第 五 章

刚 体 动 力 学

本章主要内容

§1、惯量张量

§2、惯量主轴

§3、惯量椭球

§4、刚体定点运动时的运动方程

§5、轴承受力问题

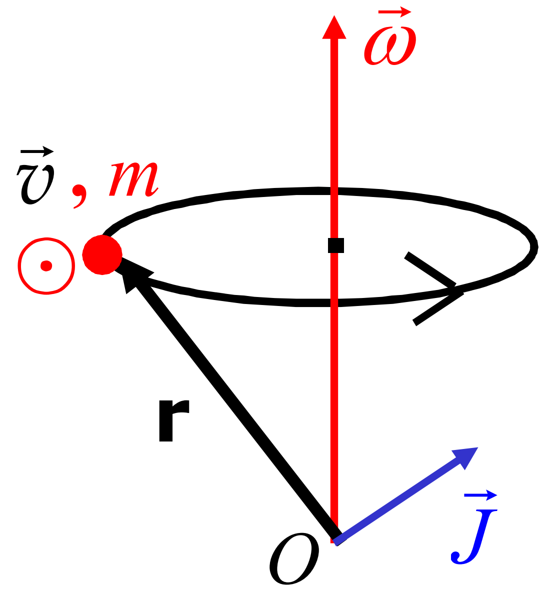
§6、刚体的定点运动

§7、质点在非惯性系中的运动

§1、惯量张量

考虑最简单情形，一个质点，
做圆周运动。
当然可以看作刚体绕固定点O的
定点运动。其角动量为：

$$\vec{J} = \vec{r} \times m\vec{v}.$$



由此可见，$\vec{J}$与 $\vec{\omega}$ 一般不同向。
$\vec{J}$与 $\vec{\omega}$ 有什么关系？

一个由n个质点组成的刚体，
绕定点O运动，对O的角动量：

$$\mathbf{J} = \mathbf{r}_a \times m_a \mathbf{v}_a$$

$$= \iiint_V \mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dm = \iiint_V \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\, dm$$

$$= \iiint_V [\boldsymbol{\omega} r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})]\, dm.$$

引入刚体对定点O的惯量张量 (2阶)：

$$\overleftrightarrow{\mathrm{I}} \equiv \iiint_V (r^2 \overleftrightarrow{\mathrm{1}} - \mathbf{r}\mathbf{r})\, dm,$$

得：
$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\omega} \cdot \overleftrightarrow{\mathrm{I}} = \overleftrightarrow{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

对于某一张量 $\overleftrightarrow{T}$，通常 $\overleftrightarrow{T}\cdot\boldsymbol{\omega}\neq\boldsymbol{\omega}\cdot\overleftrightarrow{T}$,

但对于对称张量与任意矢量点乘，

总是有： $\overleftrightarrow{\mathrm{I}}\cdot\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}\cdot\overleftrightarrow{\mathrm{I}}.$

$\overleftrightarrow{I}$ 依赖定点O的选取、

刚体的质量分布、

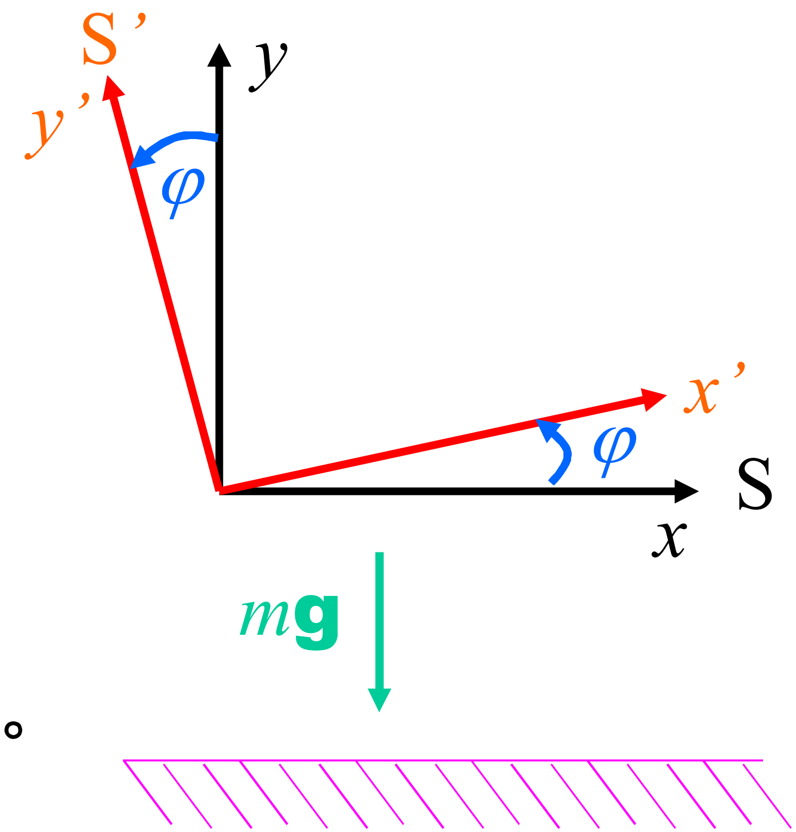
和刚体的空间取向。

对于一个矢量，如 $m\mathbf{g}$，

其分量与坐标系的

选取有关（如图），

但矢量本身与坐标系的选取无关。



同样，一个张量，如 $\overleftrightarrow{I}$，

其分量与坐标系的选取有关，

但张量本身与坐标系的选取无关。

用基矢形式写出惯量张量：

$$\overleftrightarrow{I} = I_{\mu\nu}\,\mathbf{e}_\mu\,\mathbf{e}_\nu\,,$$

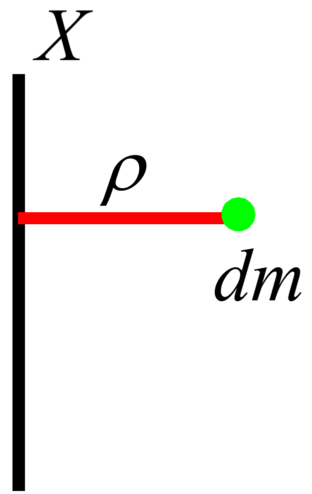
$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu} &= \mathbf{e}_\mu \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \mathbf{e}_\nu \\
&= \mathbf{e}_\mu \cdot \iiint_V (r^2 \overleftrightarrow{1} - \mathbf{rr})\, dm \cdot \mathbf{e}_\nu \\
&= \iiint_V (r^2 \delta_{\mu\nu} - X_\mu X_\nu) dm \;= I_{\nu\mu}\,,
\end{aligned}$$

由此可见，$\overleftrightarrow{I}$ 是对称张量。

$$I_{XX} = \iiint_V (r^2 - X^2)dm$$

$$= \iiint_V (Y^2 + Z^2)dm$$

$$= \iiint_V \rho^2 dm,$$



$$I_{YY} = \iiint_V (X^2 + Z^2)dm,$$

$$I_{ZZ} = \iiint_V (X^2 + Y^2)dm,$$

I_{XX}、I_{YY}、I_{ZZ}分别称为刚体对X、Y、Z轴的转动惯量。

I_{XX}简记为I_X，等等。

由 $$I_{\mu\nu}=\iiint\limits_V (r^2\delta_{\mu\nu}-X_\mu X_\nu)dm,$$

得：$$I_{XY}=I_{YX}=-\iiint\limits_V XYdm,$$

$$I_{XZ}=I_{ZX}=-\iiint\limits_V XZdm,$$

$$I_{YZ}=I_{ZY}=-\iiint\limits_V YZdm.$$

这6个分量，只有3个是独立的。它们被称为惯量积。

❖通常，刚体定点运动时，$\vec{J}$和$\vec{\omega}$是不同向的。

是否存在某个轴，当$\vec{\omega}$沿这个轴时，$\vec{J}$和$\vec{\omega}$同向？

答：对任意定点运动的刚体，

至少有3个这样的彼此正交的轴。

§2、惯量主轴

- 1、定义
- **2**、由本征方程求主轴
- **3**、主轴坐标系
- **4**、由对称性求主轴
- **5**、刚体绕过定点的任意轴的转动惯量
- **6**、刚体定点转动时的动能

限于定点运动

➢1、定义

如刚体转动的角速度沿过O点的某一轴，
且刚体对O点的角动量也沿该轴，
那么这个轴被称为刚体关于O点的惯量主轴，
简称主轴。
刚体对主轴的转动惯量称为主转动惯量。

❖如果 $\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_X \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{J} = \begin{pmatrix} I_{XX} & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_{YY} & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_X \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{XX}\omega_X \\ I_{YX}\omega_X \\ I_{ZX}\omega_X \end{pmatrix}$

通常与 $\underline{\omega}$ 不平行。

如果 $I_{YX} = I_{ZX} = 0$ $\rightleftarrows$ 当 $\vec{\omega}$ 沿X轴时，$\vec{J}$ 和 $\vec{\omega}$ 同向

$\rightleftarrows$ X轴为主轴。

这时 $\vec{J}$ 与 $\vec{\omega}$ 之间的比例系数就是沿转轴的转动惯量 I_X。

❖如果X轴、Y轴都是主轴，

$I_{YX} = I_{ZX} = 0$， $I_{XY} = I_{ZY} = 0$ $\Rightarrow$ $I_{ZX} = 0$， $I_{ZY} = 0$

Z 轴为主轴。

❖对惯量张量: $\begin{pmatrix} I_{XX} & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_{YY} & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_{ZZ} \end{pmatrix}$,

坐标轴X、Y、Z都是主轴 $\rightleftarrows$ 惯量张量是对角的

线性代数中有一个定理：任何一个实对称矩阵 $\underline{\underline{I}}$，

总可以由一个正交矩阵 $\underline{\underline{O}}$ 做相似变换，变为对角形 $\underline{\underline{I}}'$。

即： $\underline{\underline{O}}\,\underline{\underline{I}}\,\underline{\underline{O}}^T = \underline{\underline{I}}'$,

由于 $\underline{\underline{I}}$ 是二阶转动惯量张量在所选取的坐标系下的形式，

一个正交矩阵 $\underline{\underline{O}}$ 代表了一个坐标系的转动，

在坐标系的转动下，二阶张量 $\underline{\underline{I}}$ 变为 $\underline{\underline{I}}'$。

即，$\underline{\underline{\mathrm{I}}}'$ 就是二阶张量在转动后的坐标系中的形式。

由于 $\underline{\underline{\mathrm{I}}}'$ 是对角形的，所以转动后的三个坐标轴都是主轴。

因此，对任何定点运动的刚体，

至少能找到三个相互正交的主轴。

➢2、由本征方程求主轴

如果$\underline{\omega}$在主轴方向，

$$\underline{J} = \underline{\underline{\mathrm{I}}}\,\underline{\omega} = I\underline{\omega},$$

所以
$$(\underline{\underline{\mathrm{I}}} - I)\underline{\omega} = 0,$$

这里本征矢量（非零）$\underline{\omega}$ 就是主轴的方向，

本征值 I 是刚体对主轴 $\underline{\omega}$ 的转动惯量。

比较小振动中的本征方程：

$$(\underline{\underline{V}} - \omega^2 \underline{\underline{T}})\underline{b} = 0.$$

只有非零的 $\underline{\omega}$ 才能给出确定的方向。

根据线性代数，上述有关转动惯量和角速度的本征方程一定有3个非零本征矢量，分别对应3个主轴方向，相应的3个实本征值 I_μ (μ=1, 2, 3)，就是与主轴对应的转动惯量。

（1）如果3个本征值互不相同，它们对应的3个本征矢量一定相互正交。

（2）如果3个本征值只有2个相同，过定点与非简并本征矢量正交的任意方向都是主轴。

设 I 为2重根，即：
$$\underline{\underline{I}}\underline{\omega}_1 = I\underline{\omega}_1,\ \underline{\underline{I}}\underline{\omega}_2 = I\underline{\omega}_2,\ \underline{\underline{I}}\underline{\omega}_3 = I_3\underline{\omega}_3,$$

得：　$\underline{\underline{I}}(a\underline{\omega}_1 + b\underline{\omega}_2) = I(a\underline{\omega}_1 + b\underline{\omega}_2).$

$a\underline{\omega}_1 + b\underline{\omega}_2$ 可以构成与 $\underline{\omega}_3$正交的任意矢量。

（3）如果3个本征值都相等，

过定点任意方向都是主轴方向。

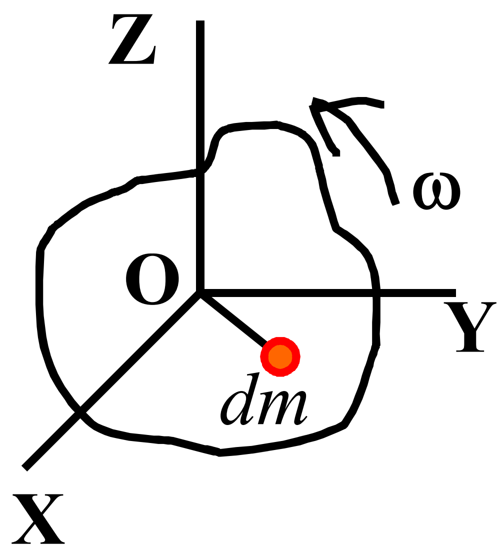
无论哪一种情况，我们都能找到3个相互正交的主轴。

➢3、主轴坐标系

如果 $t=0$ 时，X是主轴，

即与X坐标相关的2个惯量积都为0，

$$I_{\mathrm{XY}} = I_{\mathrm{YX}} = -\iiint_V XYdm = 0,$$



由于刚体的转动，

dm的坐标 X、Y 随时间发生变化，

即$t \neq 0$ 时，一般地，$I_{XY} \neq 0$。

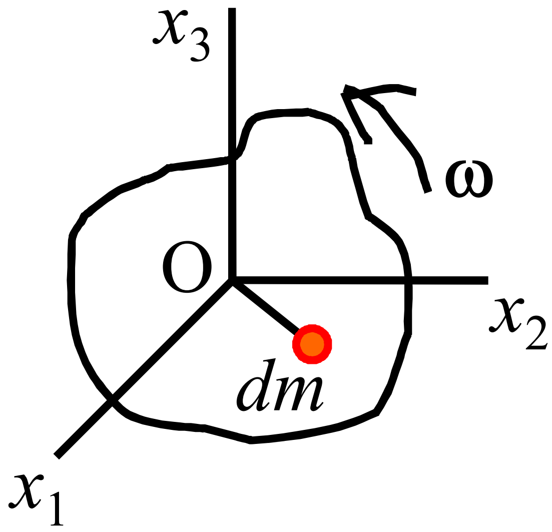
在刚体动力学中，我们需要找出始终是主轴的坐标轴。

如果**3**个相互正交的坐标轴始终是主轴，

它们构成的坐标系称为主轴坐标系。

建立主轴坐标系的一个方法是：

把**3**个相互正交的主轴固定在刚体上。



这样构成的坐标系，$O\text{-}x_1x_2x_3$

就是主轴坐标系。这时：

$$I_{12} = -\iiint_V x_1x_2dm = 0, \quad \cdots$$

在任意时刻都成立。

在主轴坐标系中，$\underline{\underline{I}}=\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$，在任何时候都成立。

➢**4**、由对称性求主轴

一般仅对质量分部对称的刚体。

设O为定点。

（**1**）刚体过定点O有一对称面，

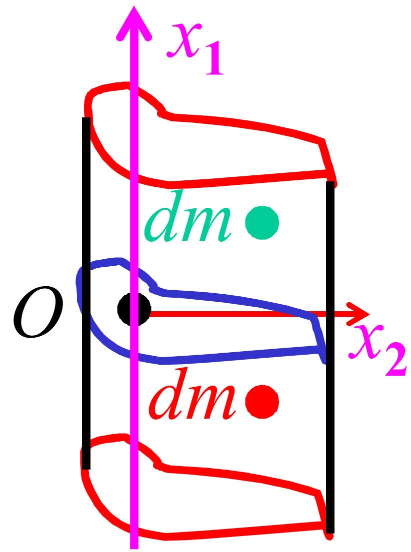
对称面过O的垂线 x_1 为主轴。

因为在惯量积

$$I_{12}=-\iiint_V x_1 x_2 dm(=0)$$

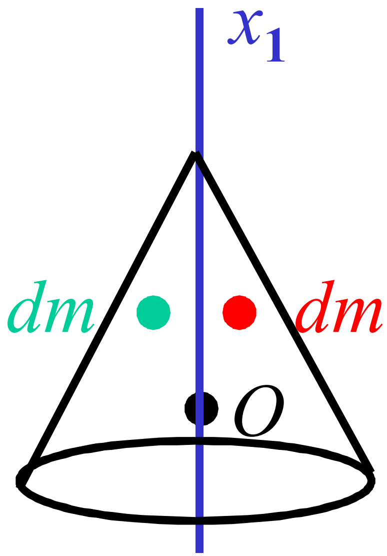
中，上面的dm与下面的dm 的 x_2 相同，

x_1 相反，两者的贡献必然消为**0**。



同理I_{13}＝ **0**，所以 x_1为主轴。

（**2**）刚体过定点O的对称轴 x_1为主轴。



因为在惯量积

$$I_{12} = -\iiint_V x_1 x_2 dm (= 0)$$

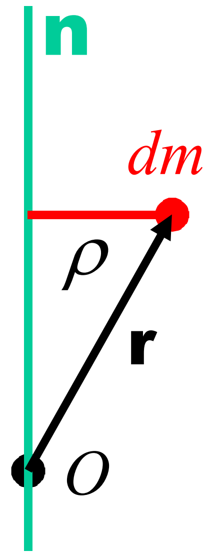
中，左边的dm与右边的dm 的

x_1 相同，x_2相反，

两者的贡献必然消为**0**。

同理I_{13}＝ **0**，所以 x_1 为主轴。

➢5、刚体绕过定点的任意轴的转动惯量



对过O点的任意单位矢量 $\mathbf{n}(t)$ ，

$$I_n = \iiint_V \rho^2 dm = \iiint_V [r^2 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})^2]\, dm$$

$$= \mathbf{n}\cdot\iiint_V (r^2\overleftrightarrow{1} - \mathbf{rr})\, dm\cdot\mathbf{n},$$

∴ $I_n = \mathbf{n}\cdot\overleftrightarrow{\mathrm{I}}\cdot\mathbf{n}$, 以前的x轴换成$\mathbf{n}$即得。

这里， $\mathbf{n}$和 $\overleftrightarrow{\mathrm{I}}$可以用任意坐标系表示出来；如果表示为矩阵形式，则需要用同一坐标系。

无论用什么坐标系， I_{n} 的结果相同。

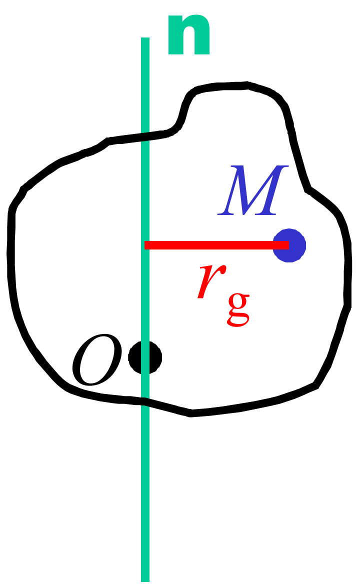
如果表示成主轴坐标系的形式，$\underset{\sim}{n} = (\alpha \quad \beta \quad \gamma)$,

$$I_n = (\alpha \quad \beta \quad \gamma)\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha^2 I_1 + \beta^2 I_2 + \gamma^2 I_3.$$

如果一质量为M的刚体对某一轴**n**的转动惯量

$$I_{\rm n} = r_{\rm g}^2 M,$$

$r_{\rm g}$就称为这个刚体对**n**轴的迴转半径。



❖如果**n**轴取在 **ω**方向，

$$\mathbf{n} = \boldsymbol{\omega} / \omega,$$

求**J**在**n**方向的投影，

$$J_\omega = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\omega} \cdot \overleftrightarrow{\mathrm{I}} \cdot \mathbf{n} = \omega \mathbf{n} \cdot \overleftrightarrow{\mathrm{I}} \cdot \mathbf{n} = \omega I_n .$$

对定轴转动， $I_{\rm n}$ 不随时间变化，

但一般说来 ω 是变化的。如转轴不固定（如瞬时轴），

$I_{\rm n}$、**ω** 一般都随时间变化。

➢6、刚体定点转动的动能

在主轴坐标系：$\underline{J}=\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}.$

$$T=\frac{1}{2}\iiint_V \mathbf{v}^2 dm=\frac{1}{2}\iiint_V \mathbf{v}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})dm=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\iiint_V \mathbf{r}\times\mathbf{v}dm=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J},$$

$\therefore \qquad T=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\overleftrightarrow{\mathrm{I}}\cdot\boldsymbol{\omega},$

对一般的定点运动， $\mathbf{J}$、$\boldsymbol{\omega}$、T、$\overleftrightarrow{\mathrm{I}}$ 都随时间变化。

对瞬时转动轴， $T=\frac{1}{2}\omega J_\omega=\frac{1}{2}\omega^2 I_\omega,$

在主轴坐标系中：

$$T=\frac{1}{2}(\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3)\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}(I_1\omega_1^2+I_2\omega_2^2+I_3\omega_3^2)=\left(\frac{J_1^2}{2I_1}+\frac{J_2^2}{2I_2}+\frac{J_3^2}{2I_3}\right).$$

与质点的动能表达式比较，有如下对应关系：

$I_i \longleftrightarrow m$， $\mathbf{J} \longleftrightarrow \mathbf{p}$， $\boldsymbol{\omega} \longleftrightarrow \mathbf{v}$。

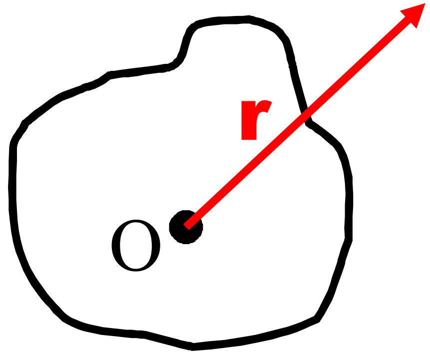
§3、惯量椭球

- 1、刚体沿任意**r**方向的转动惯量$\mathbf{I}_{\mathbf{r}}$
- 2、刚体角动量的方向
- 3、J_{ω}的大小

❖对定点运动

在主轴坐标系中，

$$\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},$$



对以O点为起点的任意矢径 $\underline{r}^T = (x_1\ \ x_2\ \ x_3)$，

$$\mathbf{r}\cdot\overleftrightarrow{\mathrm{I}}\cdot\mathbf{r} = \underline{\tilde{r}}\,\underline{\underline{I}}\,\underline{r}$$

$$= I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2 .$$

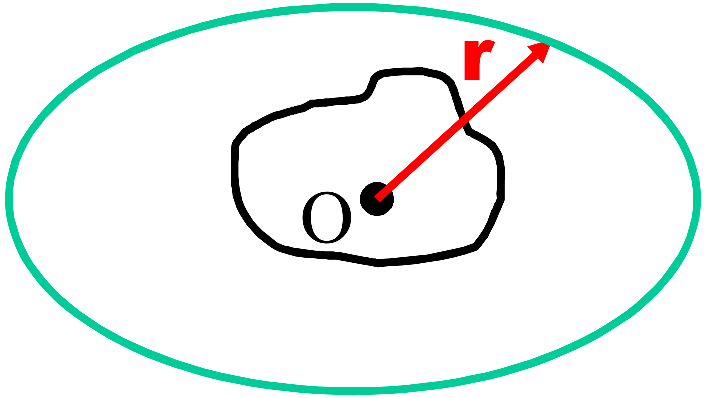
这是一个标量，其大小依赖 **r** 的选取，从0到∞都可能。

去掉这个量的量纲，只考虑其数值，

例如所有的量都用IS单位的数值表示。

令 $I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2 = 1$，

这时，**r** 就不能任意变化了。



从上述方程看，

r 的终点绘出一个椭球。

由于主轴坐标系固定在刚体上，

I_1、I_2、I_3都是常量，

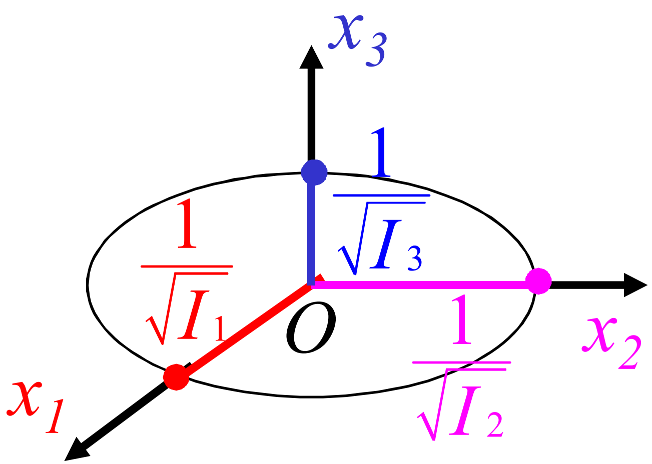
所以根据上述方程绘出的椭球是固定在刚体上的。

这个椭球叫刚体对定点O的惯量椭球。

上述方程可以改写为：

$$\frac{x_1^2}{\left(\sqrt{1/I_1}\right)^2} + \frac{x_2^2}{\left(\sqrt{1/I_2}\right)^2} + \frac{x_3^2}{\left(\sqrt{1/I_3}\right)^2} = 1,$$

由此可以得到惯量椭球的3个半轴的长度如右图。

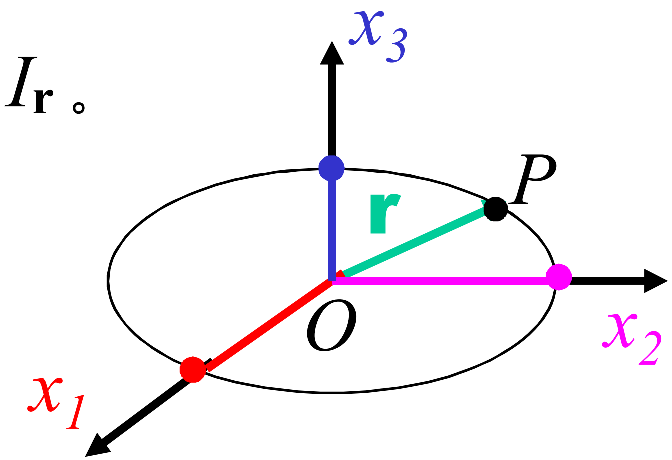


某轴的转动惯量越大，相应的半轴就越短。

从刚体的惯量椭球，我们能够得到刚体定点转动的下述性质：

➢1、刚体沿任意 $\mathbf{r}$ 方向的转动惯量 $I_{\mathbf{r}}$。

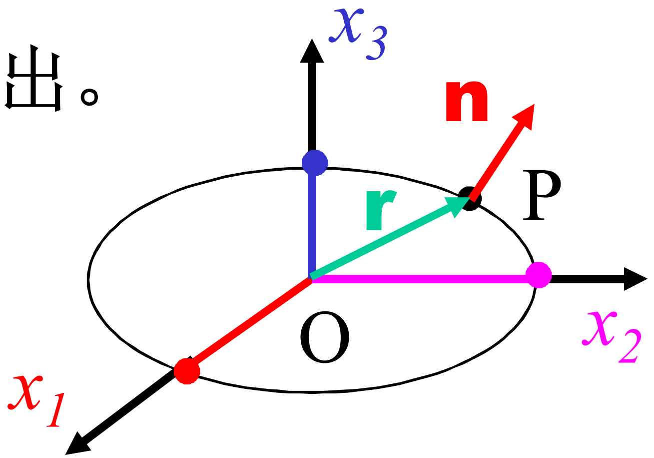
$$I_r = \frac{(\mathbf{r}\cdot\overleftrightarrow{\mathrm{I}}\cdot\mathbf{r})}{r^2} = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\left(\overline{OP}\right)^2}.$$



椭球面上的P点离中心离O越远，OP 轴的转动惯量就越小。

➢2、当刚体沿任意 **r** 方向转动，
刚体角动量的方向可以由惯量椭球求出。
引入函数：

$$f(x_1、x_2、x_3) \equiv I_i x_i^2 = 1,$$



在椭圆上的微分： $df = 0$，

即

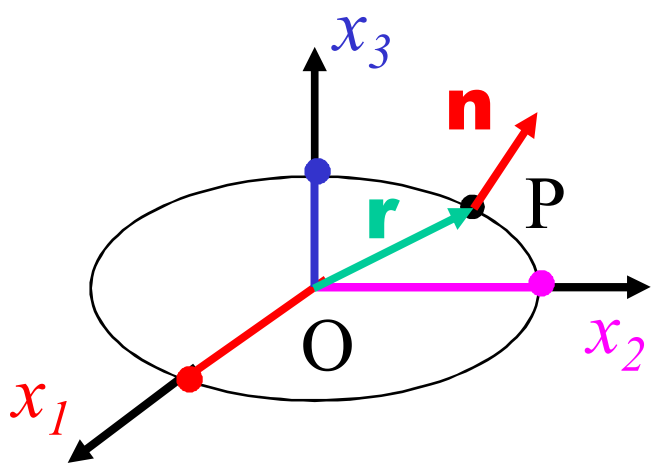
$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \underline{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}} \underline{\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}} = 0,$$

椭球面在P点的任意切向矢量

这些表达式对
任意 dx_1、dx_2、dx_3（在椭球上）都成立，

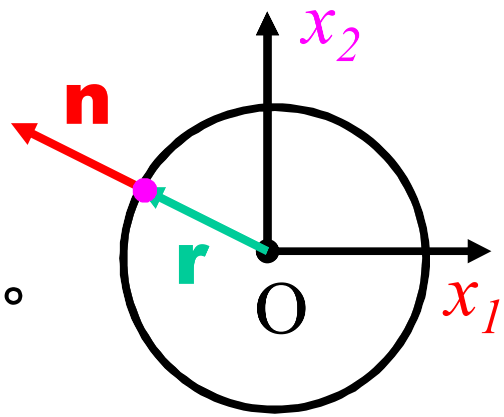
所以，该矢量一定与椭球面P点的法向矢量**n**共线

求出法向矢量:
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$



$$=2(I_1 x_1 \quad I_2 x_2 \quad I_3 x_3)$$
$$\propto (I_1 x_1 \quad I_2 x_2 \quad I_3 x_3)$$
$$\propto (I_1 \omega_1 \quad I_2 \omega_2 \quad I_3 \omega_3) = J .$$

$\therefore$ **J**$\propto$**n**.



(1) 当I_1、I_2、I_3互不相等时:

三个坐标轴是主轴，其它轴都不是主轴。

(2) 当$I_1 = I_2 \neq I_3$（ I_1为2重简并）时:

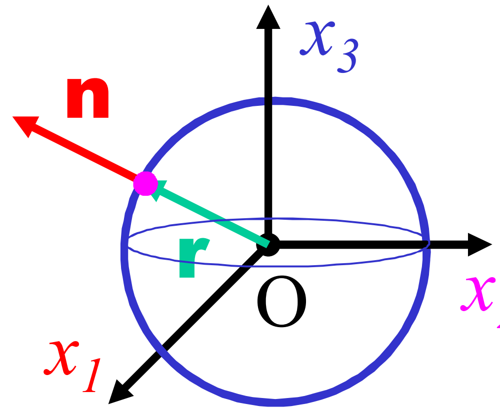
过O点，垂直于x_3轴的任意转动轴都是主轴。

这时，主轴的个数是无限多。

(3) 当$I_1 = I_2 = I_3$ （I_1为3重简并）时：

过O点的任意转动轴都是主轴，

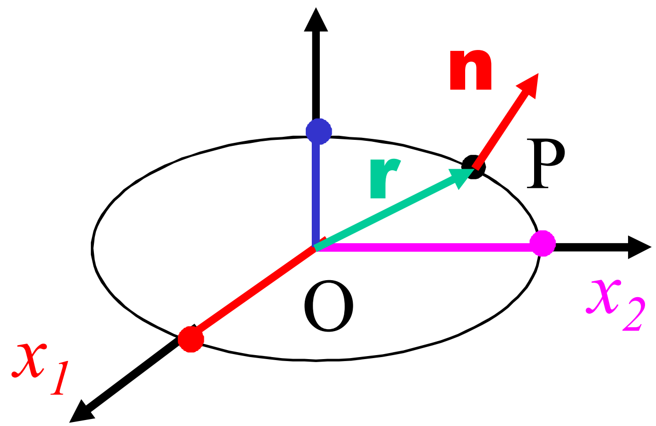
有无限多个。



➢3、J_ω 的大小(如 **ω**已知)

也可以由惯量椭球求出

$$
\begin{aligned}
J_\omega &= \vec{J}\cdot\vec{\omega}/\omega \\
&= \vec{\omega}\cdot\overleftrightarrow{\mathrm{I}}\cdot\vec{\omega}/\omega \\
&= \omega\left[\left(\vec{\omega}/\omega\right)\cdot\overleftrightarrow{\mathrm{I}}\cdot\left(\vec{\omega}/\omega\right)\right] \\
&= \omega/r^2.
\end{aligned}
$$



➢4、结合 ➢2和➢3，可求出角动量矢量**J**

❖**J**、**N**、$\overleftrightarrow{\mathrm{I}}$、惯量椭球、主轴、主轴坐标系

都是对定点O而言的。

§4、刚体定点运动的运动方程

1、质点组运动的角动量定理（不限于刚体）

2、随体微商

3、Euler动力学方程

4、刚体定点运动时的Lagrange方程

➢1、质点组运动的角动量定理（不限于刚体）

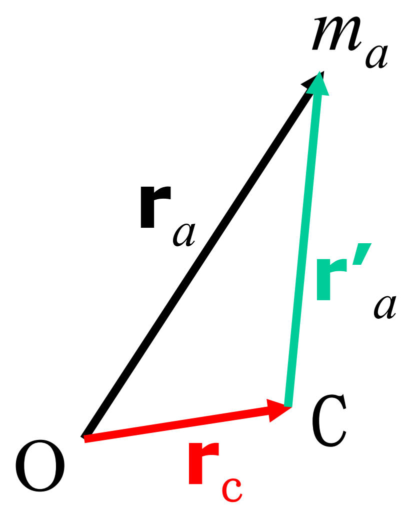
设质点组由n个质点构成。

（1）在惯性系、对惯性系中的固定点O的角动量定理

❖总角动量：　$\mathbf{J} = \mathbf{r}_a \times m_a \mathbf{v}_a$

$$= \mathbf{r}_c \times M \mathbf{V}_c + \mathbf{r}'_a \times m_a \mathbf{v}'_a$$

$$= \mathbf{J}_c + \mathbf{J}'_{(c)}$$



质心的角动量（对固定点O）

在质心系（′）对质心$_{(c)}$的角动量

$d\mathbf{J}/dt = \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a = \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_a^e$　(用Newton第三定律强形式)

$= \mathbf{N}^e$.　(external force)

（2）在惯性系、

对质心C的角动量定理（ C 一般是运动的）

$$\mathbf{J}_{(c)} = \mathbf{r}'_a \times m_a \mathbf{v}_a$$

$$\mathrm{d}\mathbf{J}_{(c)}/dt = \mathbf{r}'_a \times \mathbf{F}^e_a$$ （用Newton第三定律，强形式）

$$= \mathbf{N}^e_{(C)}.$$

（3）在质心系、对质心 C 的

角动量定理（质心系一般是非惯性系）

$$\mathrm{d}\mathbf{J}'_{(c)}/dt = \mathbf{r}'_a \times \mathbf{F}^e_a$$ （用Newton第三定律，强形式）

$$= \mathbf{N}^e_{(C)}.$$

➢2、随体微商

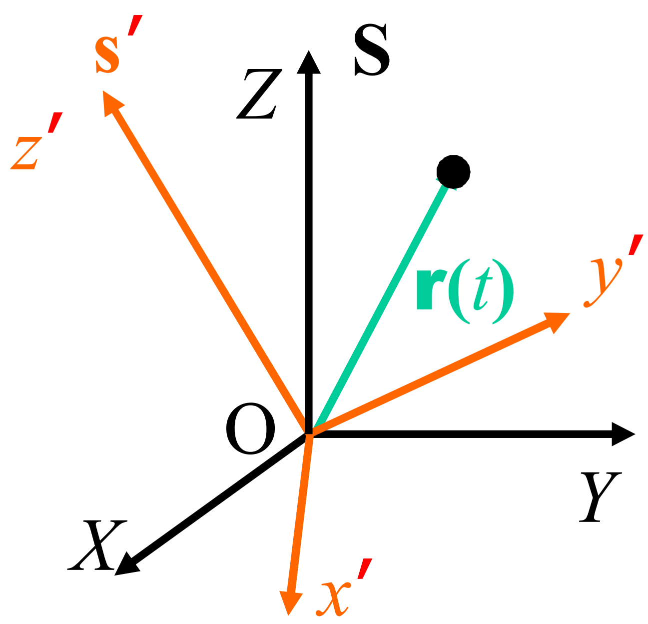
以指向运动的小虫的矢径$\mathbf{r}(t)$为例，对其它矢量也同样适用。

$$\mathbf{r}(t)=x_i\mathbf{e}_i\,,$$

t 到 $t+dt$，$\mathbf{r}$ 到$\mathbf{r}+\mathrm{d}\mathbf{r}$，$s'$ 转动了 $d\boldsymbol{\varphi}$

$$\mathrm{d}\mathbf{r}=\mathbf{e}_i dx_i+x_i\mathrm{d}\mathbf{e}_i$$

$$=\mathbf{e}_i dx_i+x_i d\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{e}_i\,,$$



引入 $\mathrm{d}'\mathbf{r}\equiv\mathbf{e}_i dx_i\,,$

称为随体微分，

意义为在转动的坐标系（参考系）中观测到的矢径变化。

$$\mathrm{d}\mathbf{r}=\mathrm{d}'\mathbf{r}+d\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}\,,$$

∴ $\mathrm{d}\mathbf{r}/dt = \mathrm{d}'\mathbf{r}/dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$， 其中$\mathrm{d}'\mathbf{r}/dt$称为随体微商。

以上做法的原则也可用于张量。

由以上推导过程可知，由于标量（如电荷q）

本身不含单位基矢，

所以随体微商与普通微商没有区别。

即 $\mathrm{d}\,q = \mathrm{d}'q$ 。

➢3、Euler动力学方程

对刚体绕定点O运动，

用惯性系、对惯性系的固定点O的角动量定理：

$\mathrm{d}\mathbf{J}/dt = \mathbf{N}^e = \mathbf{N}$，（简化标记，去掉力矩的上标“e”。）

$\mathbf{J} = \overleftrightarrow{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}$,

这里，$\mathbf{J}$、$\boldsymbol{\omega}$、$\overleftrightarrow{\mathrm{I}}$都随时间变化。

用本体坐标系：

分量不变，基矢变化的贡献

$$\mathrm{d}\mathbf{J}/dt = \underline{\mathrm{d}'\mathbf{J}/dt} + \overline{\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}} = \mathbf{N},$$

分量变化，基矢不变的贡献

用主轴坐标系：

$$\mathbf{J} = I_i\,\omega_i\,\mathbf{e}_i\ ,$$

这里， I_i 为常量，ω_i、 $\mathbf{e}_i$ 一般随时间变化。

$$\mathrm{d}'\mathbf{J}/dt = I_i(\mathrm{d}'\omega_i/dt)\,\mathbf{e}_i$$

$$= I_i(\mathrm{d}\omega_i/dt)\,\mathbf{e}_i$$

$$= \mathbf{i}I_1\dot{\omega}_1 + \mathbf{j}I_2\dot{\omega}_2 + \mathbf{k}I_3\dot{\omega}_3,$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J} = \mathbf{i}\,(\omega_2 I_3\,\omega_3 - \omega_3 I_2\,\omega_2) + \mathbf{j}\ldots + \mathbf{k}\ldots,$$

$\therefore \quad I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = N_1$，

上式指标轮换1→2 →3 →1，得：

$$I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = N_2,$$

$$I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = N_3,$$

这**3**个方程就是Euler 动力学方程，或 Euler 运动方程。

对定点运动的刚体，给定了主转动惯量 I_1、I_2、I_3，

给定了外力矩**N**$(\psi, \theta, \phi, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$，

3个Euler 动力学方程和3个Euler 运动学方程，

共**6**个方程，

原则上能解出 $\psi, \theta, \phi, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ 这6个未知量。

对下面3 种情形，$\psi(t), \theta(t), \phi(t)$ 的解析解可以求出：

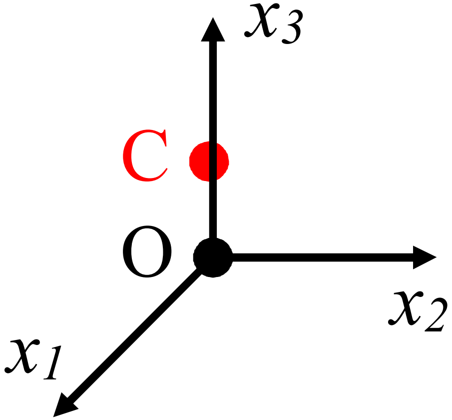
（**1**） Euler 情形：

N＝0，不受外力矩的定点转动，即定点自由转动。

（2） **Lagrange情形：**

$I_1 = I_2$，力矩完全由重力引起，

重心 C 在 x_3 轴上。



❖均匀的对称刚体，在重力场中，

绕其对称轴上的一点（该点光滑）转动。

这样的力学体系称为重陀螺。

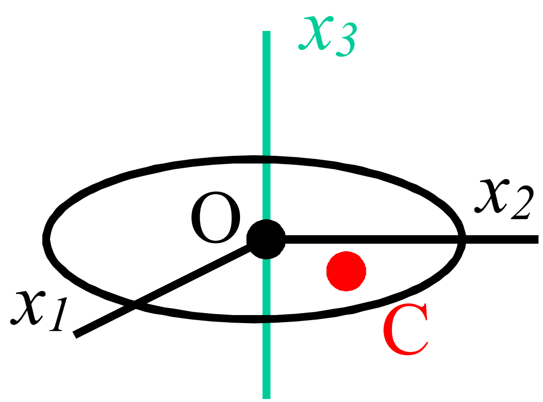
重陀螺的运动属于Lagrange情形。

（3） **Sonya Kovalevskaya情形：**

$I_1 = I_2 = 2I_3$，

力矩完全由重力引起，

重心 C 在 x_1x_2 平面上。



在大约200年里，人们努力寻找各种情形下，
刚体定点运动的解析解，直到Husson(1905年)、
Burgatti(1910年)证明，在任意初始条件下，
除以上3种情形外的刚体定点运动，不存在解析解。
现在计算机的应用，研究解析解的重要性明显下降。
对没有解析解的定点运动问题，原则上总可以求数值解。

➢4、刚体定点运动的Lagrange方程

当作用在刚体上的力都是保守力时
（以上3种情形都属这类），
作用力可以用势能来描述：$V(\psi,\theta,\phi)$，动能 $T=I_i\omega_i^{\,2}/2$，
由Euler运动学方程，
可把上述动能用广义坐标（即Euler角）
和广义速度表示出来。

从而得到刚体定点运动时的Lagrange量：

$$L=T-V$$

$$=\frac{1}{2}[(I_1-I_2)(\dot{\theta}\cos\phi+\dot{\psi}\sin\theta\sin\phi)^2+$$

$$+I_2(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta)+I_3(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})^2]-$$

$$-V(\psi,\theta,\varphi).$$

因此可以得到3个Lagrange方程，

原则上可以解出3个未知的Euler角。

由于$\partial L/\partial t=0,$

并且变换方程不显含 t，

∴ $T+V=E=\text{const.}$

这个方程可以代替 3 个Euler运动方程中的一个。

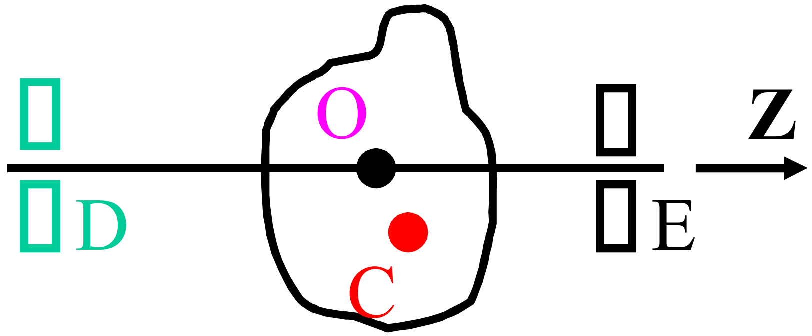
❖Euler运动方程有2个方面的应用，
一是已知运动，求力矩；
二是已知力矩，求运动。
一般说来，第一方面的问题相对简单一些。
下面，我们讨论第一方面的问题，
即已知运动，求力矩的问题。

§5、轴承受力问题

- **1**、基本方程，
- 2、举例

➢1、基本方程

设D、E处光滑。



$$d\mathbf{J}/dt = \mathbf{N}^{A} + \mathbf{N}^{R}, \quad [1]$$

其中，$\mathbf{N}^{A}$为主动力的力矩，$\mathbf{N}^{R}$为约束力的力矩。

如果 $\mathbf{N}^{A}$已知，$\mathbf{N}^{R}$ 就可以由上面的方程求出。

但知道了$\mathbf{N}^{R}$，

D、E处的约束力$\mathbf{R}_D$、$\mathbf{R}_E$还是不能由以上结果求出。

因为在 $\mathbf{N}^{R} = \mathbf{OD} \times \mathbf{R}_D + \mathbf{OE} \times \mathbf{R}_E \quad [2]$

中，2个约束力都是未知的。

因此，仅方程 [1] 还不够。

可以用另一个运动方程：

$$d\,\mathbf{P}_C/dt = \mathbf{F}^A + \mathbf{R}_D + \mathbf{R}_E, \qquad [3]$$

$\mathbf{N}^R$、 $\mathbf{F}^A$ 已知，

方程 [2]、[3] 仍然不能求出约束力的全部分量。

这时由于在 [2] 式里， $N^R_Z = 0$ 对$\mathbf{R}_D$、 $\mathbf{R}_E$
没有任何限制，

所以，方程 [2]、[3] 只相当于5个关于约束力的
标量方程，因此只能解出5个未知量。

[2] 式对 R_{DZ}、R_{EZ}没有限制，

[3] 式只对 $R_{DZ} + R_{EZ}$有限制。所以，只能解出：

$R_{DZ} + R_{EZ}$， $\mathbf{R}_{D\perp}$、 $\mathbf{R}_{E\perp}$， 共5个未知量。

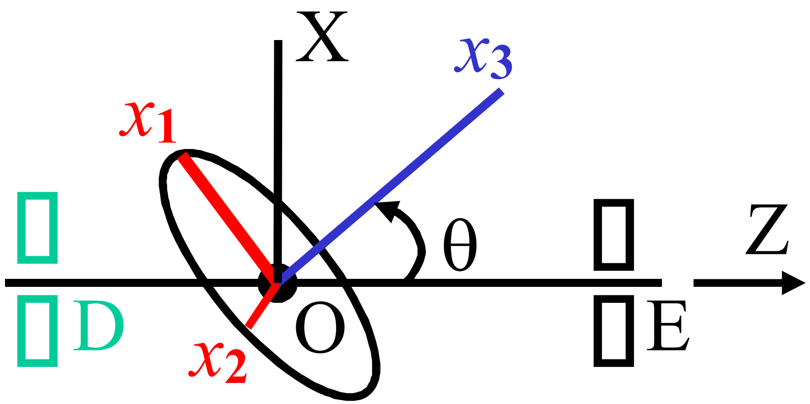
另外，如果某一组解已经求出：

$\mathbf{R}_{D\perp}$、 $\mathbf{R}_{E\perp}$、 $R_{DZ} + R_{EZ}$，

另一组解：

$\mathbf{R}_{D\perp}$、 $\mathbf{R}_{E\perp}$、 （$R_{DZ}+R_Z$） + （$R_{EZ}-R_Z$），
也必然满足方程 [2]、[3] 。

➢2、举例



一均匀薄园盘 O，M、R，
$\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{K}=$ const.

求 **J**、**N**、**R**。

解：

（1）建立坐标系

在x_3–Z平面，确定x_1轴，然后，确定x_2轴。

O–$x_1x_2x_3$为主轴坐标系（固定在盘上）。

在如图所示的时刻， 在x_1–x_3–Z平面，取X轴，然后，确定 Y（在这个瞬时与x_2轴重合）。

O–XYZ为空间坐标系。

（2）角动量

$$I_1 = I_2 = MR^2/4, \quad I_3 = 2\,I_1 = MR^2/2,$$

$$\omega_1 = -\omega\sin\theta, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega\cos\theta,$$

$$\mathbf{J} = -\mathbf{i}\, I_1\omega\sin\theta + \mathbf{k}\, 2I_1\,\omega\cos\theta,$$

x_1、x_3、Z、**J**始终在同一个平面里。

（3）力矩

$\because \quad \dot{\omega} = 0,$

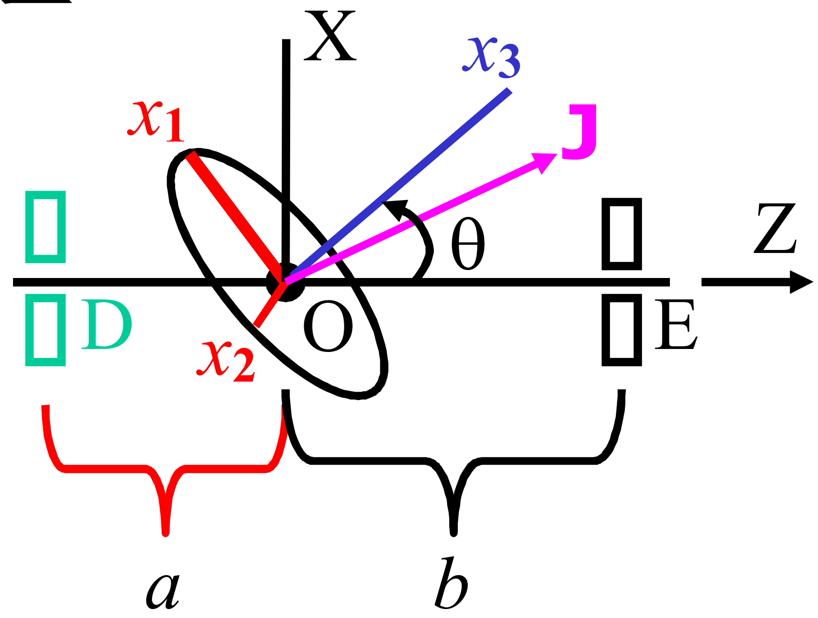
$\therefore \quad \dot{\omega}_1$、$\dot{\omega}_2$、$\dot{\omega}_3 = 0,$

$$N_1 = I_1\cancel{\dot{\omega}_1} - (I_2 - I_3)\cancel{\omega_2}\,\omega_3 = 0,$$

$$N_3 = I_3\cancel{\dot{\omega}_3} - (I_1 - I_2)\,\omega_1\cancel{\omega_2} = 0,$$

$$N_2 = I_1\cancel{\dot{\omega}_2} - (I_3 - I_1)\,\omega_3\,\omega_1$$

$$= -I_1\,\omega_3\,\omega_1 = M R^2\omega^2(\sin 2\theta)/8 > 0\ .$$



（4）约束力

$$d\,\mathbf{P}_C/dt = \mathbf{F}^A + \mathbf{R}_D + \mathbf{R}_E = 0\,,$$

限于M相对很小，ω相对很大情形，
即在刚体的转动问题中，重力比约束力小得多。

这时，$\mathbf{F}^A = M\mathbf{g} \approx 0$。

$\therefore \quad \mathbf{R}_D + \mathbf{R}_E = 0, \quad$ [1]

并且 $N_1 = N_3 = 0,$

$\therefore \quad N_X = 0,$ （在图中所示的时刻）

$$N_X = a\,\mathrm{R}_{DY} - b\,\mathrm{R}_{EY}$$
$$= (a+b)\,\mathrm{R}_{DY} = 0, \qquad \text{（用 [1] 式）}$$

$\therefore \quad \mathrm{R}_{DY} = 0, \quad \mathrm{R}_{EY} = 0.$

$$N_Y = N_2$$
$$= -a\,R_{DX} + b\,R_{EX}$$
$$= (a+b)\,R_{EX} \qquad \text{（用 [1]式）}$$

用N_2的表达式，解出R_{EX}和R_{DX}：

$$R_{EX} = -R_{DX} = \frac{MR^2\omega^2}{8(a+b)}\sin 2\theta,$$

最后由 [1] 式得：　$R_{DZ} + R_{EZ} = 0.$

从R_{EX}和R_{DX}的表达式知道，当θ不为 0，ω大时，
轴承受到的作用力可能很大。

❖当 M**g** 不能忽略，C与O不重合，计算方法与以上相似。

§6、刚体的定点运动

- 1、自由转动：惯量椭球是轴对称（旋转椭球）
- 2、自由转动：惯量椭球非轴对称情形
- 3、对称重刚体的定点转动

本节限于刚体的定点运动，且**N**＝0。

如果 **ω**在t时刻沿主轴方向，例如沿x_1轴，

即 $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{i}, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0,$ [1]

由Euler运动方程得：

$$I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2 \cancel{\omega_3} = 0,$$

$\therefore \quad \dot{\omega}_1 = 0,$

同理，$\dot{\omega}_2 = 0, \quad \dot{\omega}_3 = 0,$

由于ω_1、ω_2、ω_3随时间的变化率都为0,

所以dt 时间间隔之后，

[1] 式仍然成立。

由此可以推出，**ω**为常矢量。

这时， $\mathbf{J}=I_1\,\omega_1\mathbf{i}$ 也为常矢量。

这种角速度和角动量都不变的定点运动状态称为运动平衡。

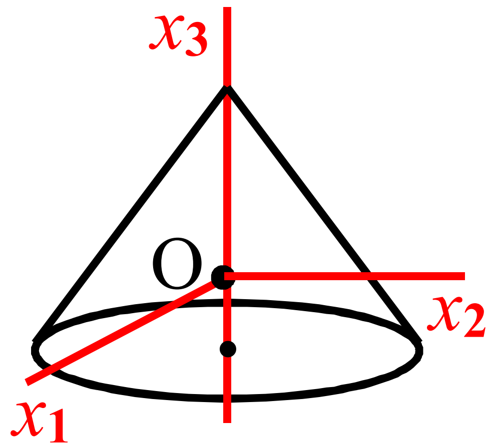
如果 $\boldsymbol{\omega}$不沿主轴方向，上面 $\boldsymbol{\omega}$ 为常矢量的结论不成立。

但由于$\mathbf{N}=0$， $\mathbf{J}$ 仍然是常矢量。

➢1、惯量椭球是轴对称的（旋转椭球）

设对称轴为x_3。

右图的均匀对称刚体就属于这种情况。



显然x_1、x_2、x_3是主轴，

并且$I_1=I_2$，简计 $I_1=I$.

（1）在主轴坐标系，列出运动方程

$$I\dot{\omega}_1 = (I - I_3)\omega_2\omega_3, \quad [1]$$

$$I\dot{\omega}_2 = (I_3 - I)\omega_1\omega_3, \quad [2]$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = 0。 \quad [3]$$

由 [3] 得：$\omega_3 = \text{const.}$

d [1] $/dt$，并将[2]代入其中：

$$I\ddot{\omega}_1 = (I - I_3)\dot{\omega}_2\omega_3$$

$$= -\left(\frac{(I_3 - I)^2}{I}\omega_3^2\right)\omega_1,$$

$$\therefore \quad \omega_1 = \Omega_1 \cos\left(\frac{I_3 - I}{I}\omega_3 t + \beta_1\right),$$

Ω_1、β_1为任意常数。

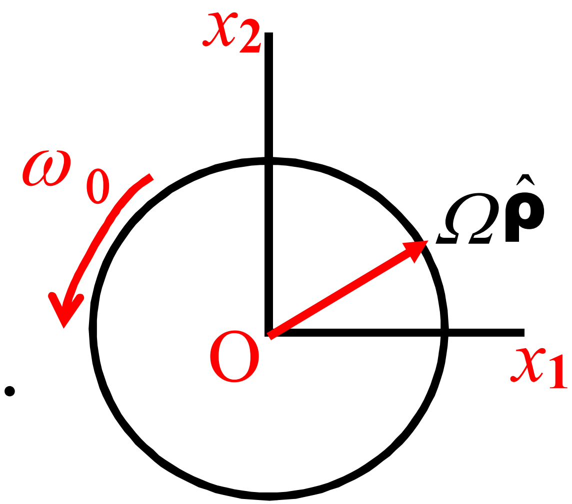
同样可得：
$$\omega_2=\Omega_2\cos\left(\frac{I_3-I}{I}\omega_3 t+\beta_2\right),$$

由于方程 [1]、[2] 为2个未知函数的1阶微分方程组，
所以在4个任意常数Ω_1 、Ω_2 、β_1、β_2中，
只有2个是独立的。

把ω_1和ω_2的解代入方程[1]（或[2] ）：
$$\Omega_1 = \Omega_2 \equiv \Omega、\beta_1 = \beta_2 + \pi/2 = \beta,$$

$$\therefore \begin{cases} \omega_1=\Omega\cos\left(\dfrac{I_3-I}{I}\omega_3 t+\beta\right), \\ \omega_2=\Omega\sin\left(\dfrac{I_3-I}{I}\omega_3 t+\beta\right), \\ \omega_3=const. \end{cases}$$

从ω_1和ω_2的形式可知，**ω** 在x_1x_2平面的投影顶端做匀速圆周运动，圆周的半径是Ω；设$\omega_3>0$，如果$I_3>I$，运动方向如图，



运动的圆频率是 $\omega_0\equiv\dfrac{I_3-I}{I}\omega_3$，

$$\omega^2=\Omega^2+\omega_3^2=\text{const.}$$

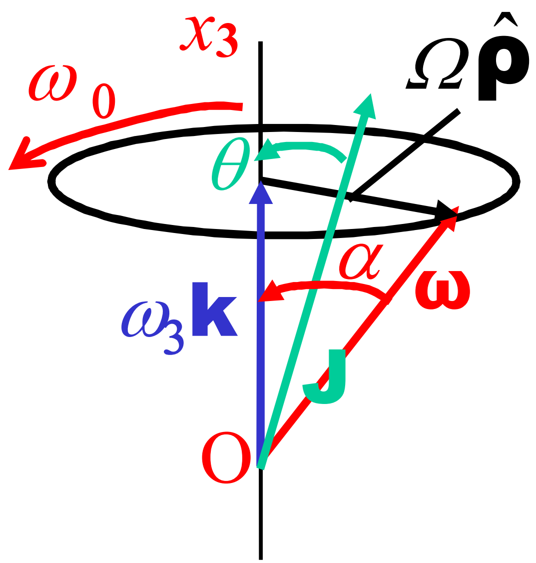
$\boldsymbol{\omega}=\Omega\hat{\boldsymbol{\rho}}+\omega_3\mathbf{k}$，$\tan\alpha=\Omega/\omega_3=\text{const.}$

这里所说的角速度矢量的转动，都是对本体坐标系（参考系）来说的。

$$\mathbf{J}=I\omega_1\mathbf{i}+I\omega_2\mathbf{j}+I_3\omega_3\mathbf{k}$$

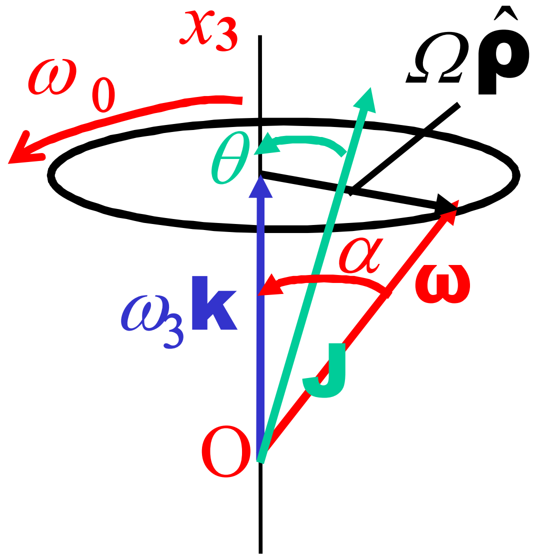
$$=I\Omega\hat{\boldsymbol{\rho}}+I_3\omega_3\mathbf{k},$$

$$\tan\theta=\frac{I\Omega}{I_3\omega_3}=\frac{I}{I_3}\tan\alpha,$$



∴ θ也是一个常量。

如果$I_3 > I$，$\theta < \alpha$；否则相反。



由于$\mathbf{J}$、$\boldsymbol{\omega}$都只有x_3分量和ρ分量，

所以，$\mathbf{J}$、$\boldsymbol{\omega}$、x_3永远在同一个平面内。

$\boldsymbol{\omega}$在刚体上会画出一个锥面，

被称为本体锥面。

（2）在空间参考系

由于 $\mathbf{N} = 0$,

所以$\mathbf{J}$＝const.，常量是指在空间参考系看不变。

因此可以取$\mathbf{J}$作为空间坐标系的OZ 轴。

θ是Z 轴与x_3轴的夹角，

因此θ就是章动角。

由于θ＝const.，所以 $\dot{\theta} = 0$。

由Euler运动学方程的第1、第2式平方得：

$$\omega_1^2+\omega_2^2=\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\cancel{\dot{\theta}^2}=\Omega^2,$$

∴ $$\dot{\psi}=\pm\Omega/\sin\theta,$$

在前面所设的条件下，

即 $\omega_3>0$，并且 $I_3>I$，

上式应该取正号（见右图），

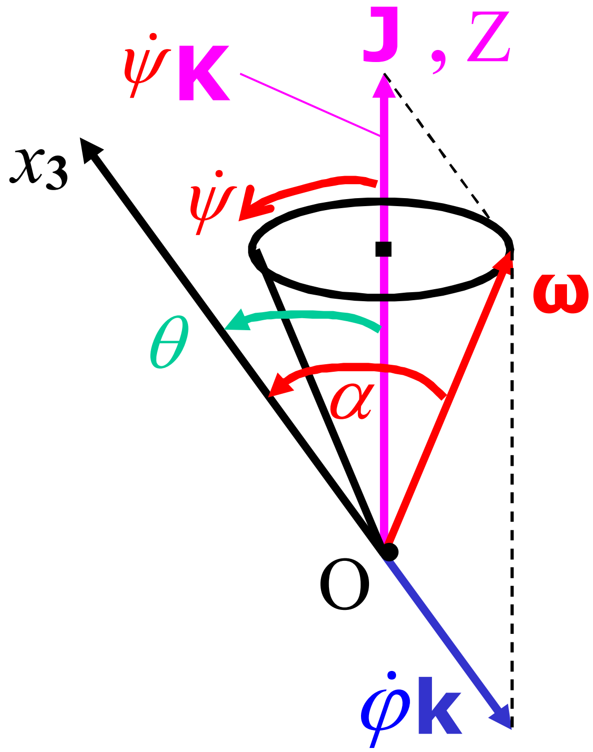
即： $\dot{\psi}=\Omega/\sin\theta=\text{const.}\geqslant 0$，

由于**J**、x_3、**ω** 三者共面，

$\dot{\psi}$ 是刚体的 x_3轴绕 Z 转动的角速度，

也是 **ω**绕 Z 转动的角速度。

由 $\omega_3=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}$,



得 $\dot{\varphi} = \omega_3 - \dot{\psi}\cos\theta,$

$= \omega_3 - \cos\theta\,\Omega/\sin\theta$

$= \frac{I - I_3}{I}\omega_3$ （用 $\tan\theta = I\Omega/I_3\,\omega_3$）

$= -\omega_0 = \text{const.} < 0$，（当 $I_3 > I,\ \omega_3 > 0$ 时）。

瞬时转动轴在空间的轨迹为一锥面，

即空间锥面。

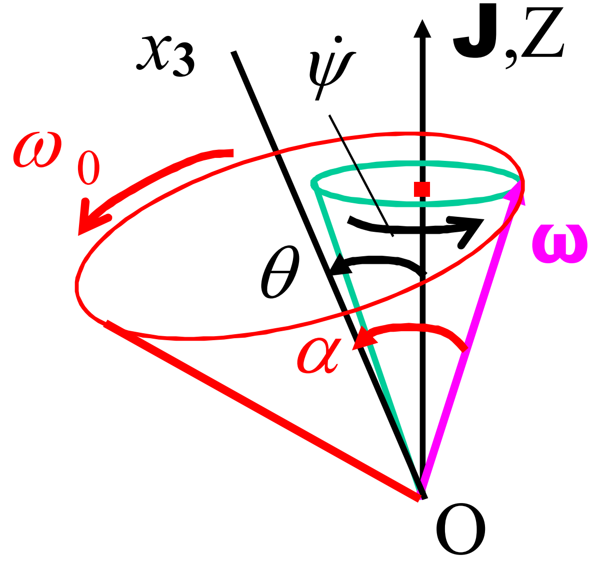
$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{K} + \dot{\varphi}\mathbf{k}$。这里 $\dot{\theta} = 0$，$\dot{\psi}$、$\dot{\varphi}$ 都是常量，

刚体的这种运动称为正规进动。

❖当$I_3 > I$ 时，
瞬时转动轴在空间锥面
和本体锥面上的相对位置如右图。
2个锥面相切，切线为瞬时转动轴，
2者相对于对方纯滚动。

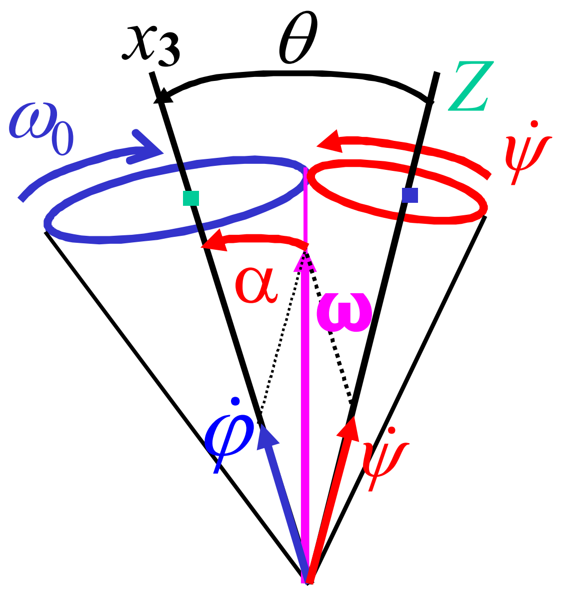
$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{K} + \dot{\varphi}\mathbf{k}。$$

$\dot{\varphi} < 0$。



❖当$I_3 < I$ 时，
瞬时转动轴的空间锥面
和本体锥面上见右图。

$\dot{\varphi} > 0$。



（3）地球的自转

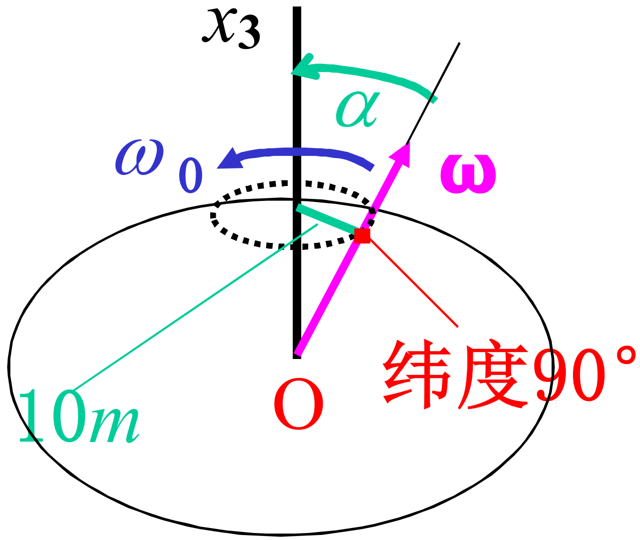
把地球近似的当作刚体，
随地心平动的参考系取为惯性系，
地球自转当作刚体绕定点（地心O）的转动。

地球受到的作用力为太阳等星球对地球的引力，其合力通过O点，所以，**N**＝0，可以用前面的结果。

对地球，$\dfrac{I_3-I}{I}\approx\dfrac{1}{300}$，

α 由初始条件确定，很小（如图），$\cos\alpha\approx 1$，

$$\omega_0=\frac{I_3-I}{I}\omega\cos\alpha\ \approx\frac{1}{300}\frac{2\pi}{天}.$$



周期 $T = 2\pi / \omega_0$

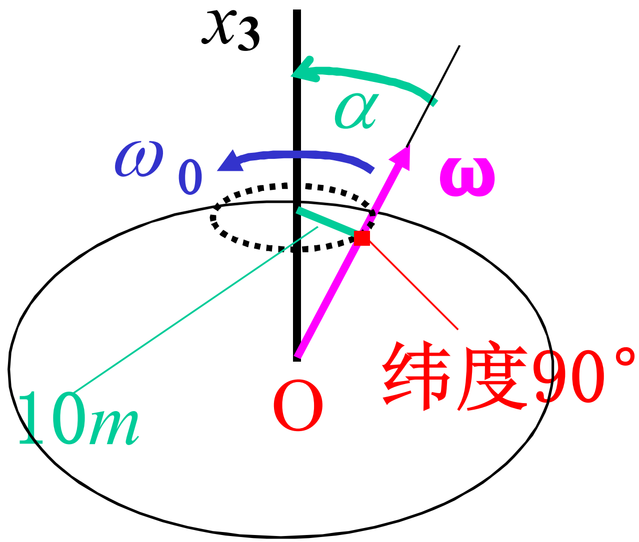
$\approx$ 300天 $\approx$ 10个月，

实际是14个月。

由此导致世界各地的

纬度周期性的微小变化，

这种现象称为极移。



➢2、惯量椭球为非轴对称情形

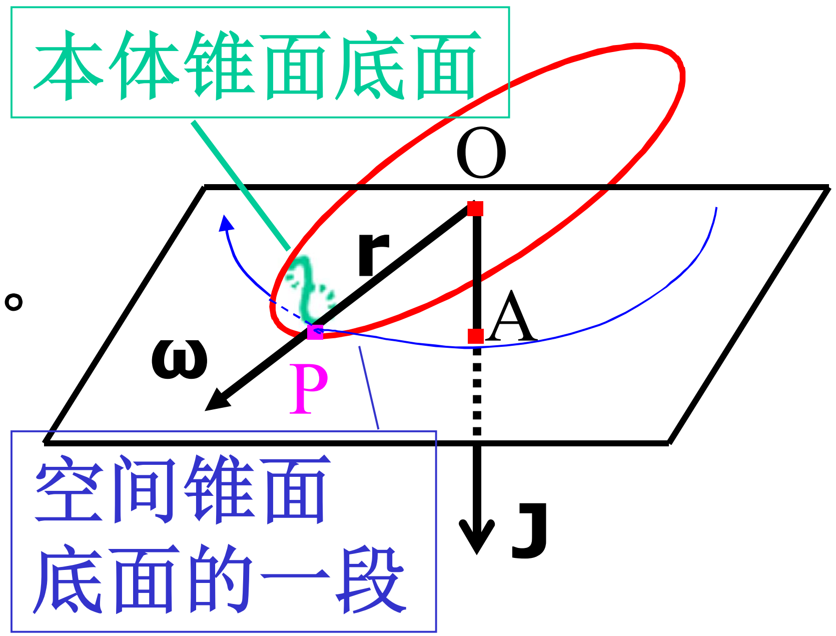
这时，刚体的 I_1 、I_2 、I_3 互不相等。

其惯量椭球的3个轴也互不相等。

如果 **ω**沿任意方向**OP**，

P 为惯量椭球上的一点，

记**OP** = **r**。



在P点作椭球的切平面，

切平面的法向矢量就是 **J** 的方向。

由于 **J** 是常矢量，所以刚体在运动过程中，

所有的切平面都与固定矢量 **J** 垂直。

$$OA=\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{J}}{J}=r\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\cdot\frac{\mathbf{J}}{J}=\frac{r}{\omega J}2T=\frac{1}{J(\omega\sqrt{I_\omega})}2T=$$

$$= \frac{1}{J\sqrt{2T}} 2T = \frac{\sqrt{2T}}{J} = const.$$

所以，刚体在运动过程中，所有的切平面是相同的。

由于P点在转轴上，

所以刚体上的P点的速度： $\mathbf{v}_P = 0.$

所以刚体将在切平面上纯滚动。本体锥面底面闭合，

空间锥面底面可能不闭合。

由于 $I_\omega \omega^2 = 2T$， $I_\omega = 1/r^2$，

$\therefore \quad \omega = r\sqrt{2T}$， 也就是 $\omega \propto r$.

这种描述刚体定点运动的方法

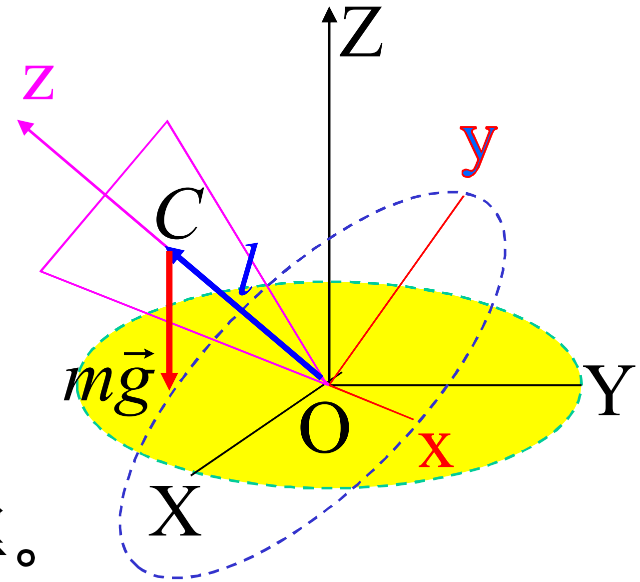
称为Poinsot 描绘。

如果 $I_1 = I_2$，

Poinsot描绘就给出对称刚体的定点运动结果。

➢ 3、对称重刚体的定点转动（Lagrange情形）

一个仅受重力矩作用的均匀、轴对称刚体称为重刚体。重刚体绕其对称轴上的一点无摩擦的转动即为前面所说的**Lagrange**情形。我们可以通过**Euler**动力学方程求解其运动。也可以由**Lagrange**方程求解。或者由守恒定律或初积分求解。



由对称性：$I_1 = I_2 = I.$

$$L=T-V=\frac{1}{2}[I(\dot\theta^2+\dot\psi^2\sin^2\theta)+I_3(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)^2]-mgl\cos\theta$$

Lagrange量不显含t、ψ、φ，因此可以分别得到**3**个初积分：

$$\frac{1}{2}I(\dot\theta^2+\dot\psi^2\sin^2\theta)+\frac{1}{2}I_3(\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi)^2+mgl\cos\theta=E \qquad [1]$$

$$p_\psi = J_Z = \partial L / \partial \dot\psi = \left(I\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta\right)\dot\psi + I_3\cos\theta\dot\varphi \qquad [2]$$

这是角动量***J***在空间轴Z上的投影J_z；

$$p_\varphi = J_3 = \partial L / \partial \dot\varphi = I_3\left(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi\right) \qquad [3]$$

即角动量***J***在本体轴z上的投影J_3。

由[2]、[3]解出进动和自转角速度：

$$\dot\psi = \frac{J_Z - J_3\cos\theta}{I\sin^2\theta} \qquad [4]$$

$$\dot\varphi = \frac{J_3}{I_3} - \frac{J_Z - J_3\cos\theta}{I\sin^2\theta}\cos\theta \qquad [5]$$

将[5]代入[1]：

$$\frac{I}{2}(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\sin^2\theta) + \frac{J_3^2}{2I_3} + mgl\cos\theta = E$$

将[4]]代入上式：

$$\frac{I}{2}\dot\theta^2 + \frac{\left(J_Z - J_3\cos\theta\right)^2}{2I\sin^2\theta} + \frac{J_3^2}{2I_3} + mgl\cos\theta = E$$

令：

$$V_{eff}(\theta) = \frac{\left(J_Z - J_3\cos\theta\right)^2}{2I\sin^2\theta} - mgl\left(1 - \cos\theta\right)$$

代入上面的能量初积分表达式：

$$\frac{I}{2}\dot{\theta}^2+V_{eff}(\theta)=E-\frac{J_3^2}{2I_3}-mgl=E' \qquad \textbf{[6]}$$

由上式化为对t和θ的积分，并做积分得：

$$t=\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{2\left(E'-V_{eff}\right)/I}}$$

这里含有椭圆积分。

积分式子中的根号下面的表达式即为：$\dot{\theta}^2$

初始条件必须使根号中的初始值大于0，否则，问题无解。

原则上，积分给出$\theta(t)$随时间的变化关系，再将结果代入$\dot{\psi}$和$\dot{\varphi}$的表达式[4]、[5]即可求出这两个**Euler**角。

下面定性讨论章动角和进动角的变化情况。

由[6]可知，θ取极小值的条件为：$E'=V_{eff}(\theta)$

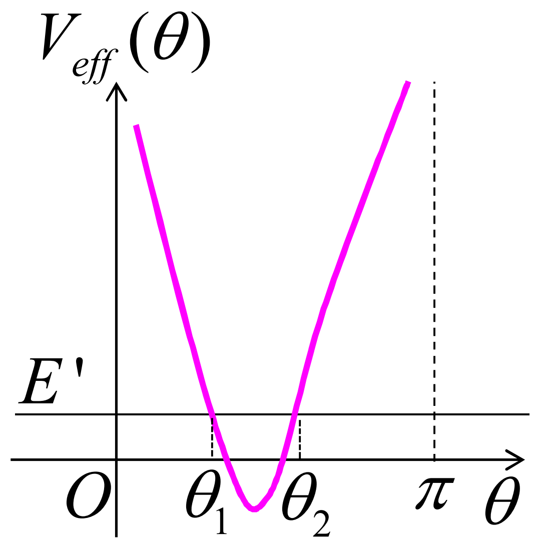
当θ=0，或$\theta=\pi$时，V_{eff}均趋于+∞，在上述两个角度之间为有限值。因此，V_{eff}的曲线为：

如果E'小于有效势的最小值，则说明初始条件不满足刚体定点运动的条件。

设E'大于有效势的最小值，如图。

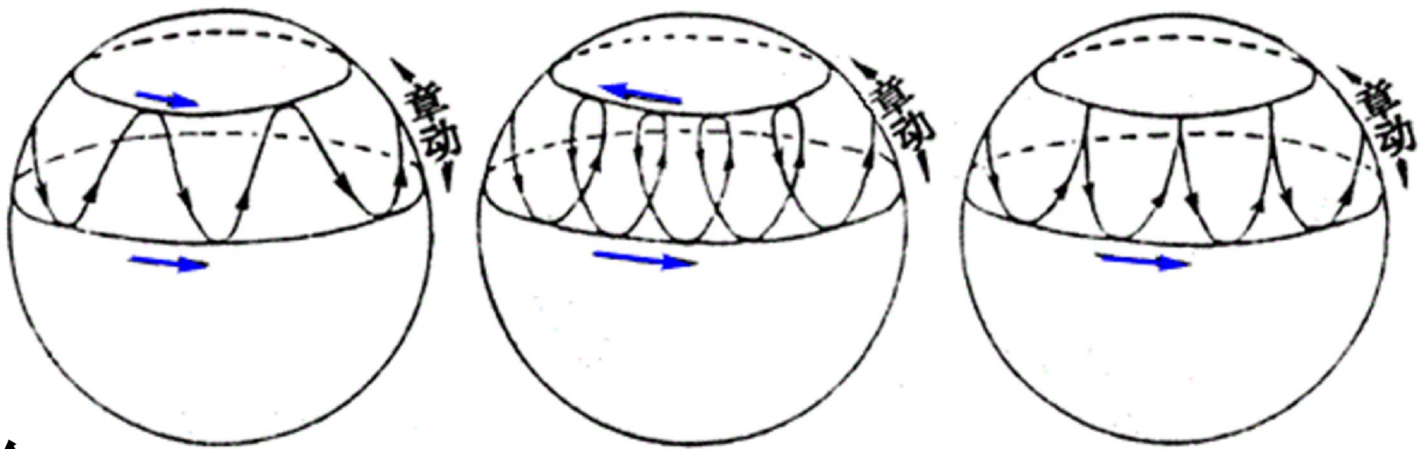
E'与有效势的两个交点为θ_1和θ_2。

这两个角度决定了刚体定点运动的过程中章动角的范围。



在运动过程中，进动角角速度是否改变符号将根据[4]中的分子$J_Z - J_3\cos\theta$是否改变符号来确定。

设右图中的球心为刚体运动的定点，球面的上、下两条纬线分别代表θ_1和θ_2两个

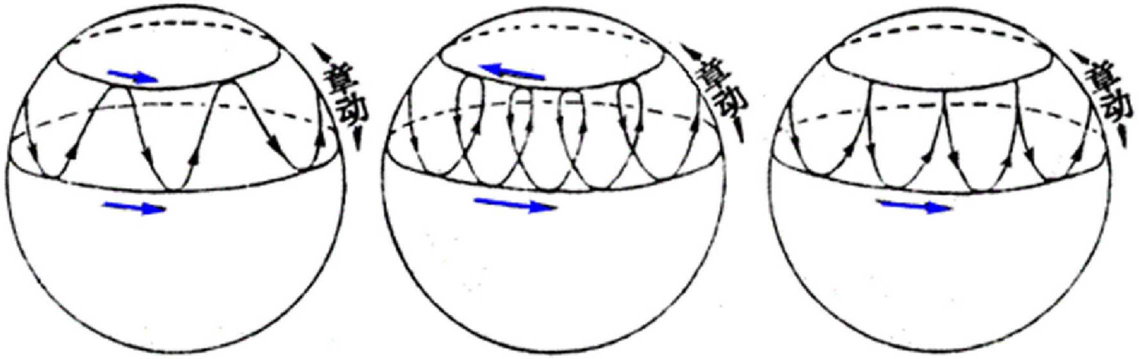


章动角（ θ_1小于θ_2 ），它们之间的曲线为刚体运动过程中，其对称轴在球面上扫过的轨迹。

如果$J_Z - J_3\cos\theta$在θ_1至θ_2区间内不改变符号，则进动角速度将不改变符号，刚体将在章动的同时单调进动，对称轴在球面上扫过的轨迹如上图左；

如果上式改变符号，则进动角速度在θ_1和θ_2时符号相反，刚体对称轴在球面上扫过的轨迹如上图中；

如果上式仅当章动角为θ_1时为0，则章动角为θ_1时，进动角速度和章动角速度同时为0。刚体对称轴在球面上扫过的轨迹如下面右图。

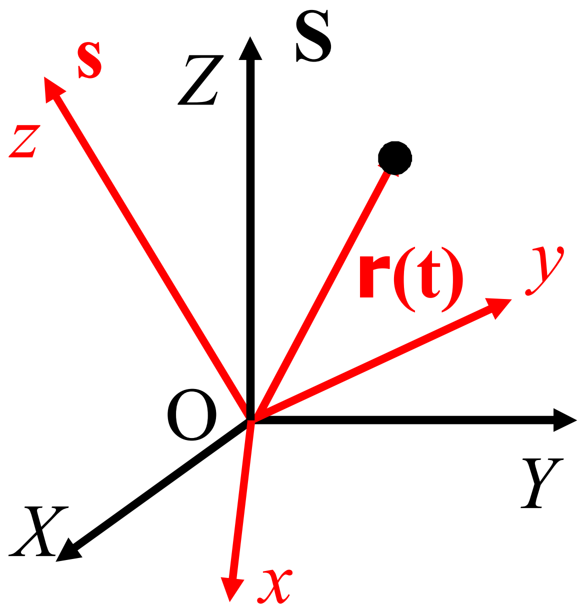


§7、质点在非惯性系中的运动

- 1、非惯性系中的速度和加速度
- 2、非惯性系中的运动方程
- 3、地球参考系中的运动方程

➢1、非惯性系中的速度和加速度

❖仍设S和s分别为惯性系和非惯性系，r为一小虫所在位置的矢径。



这里，大写字母表示S系中的量。

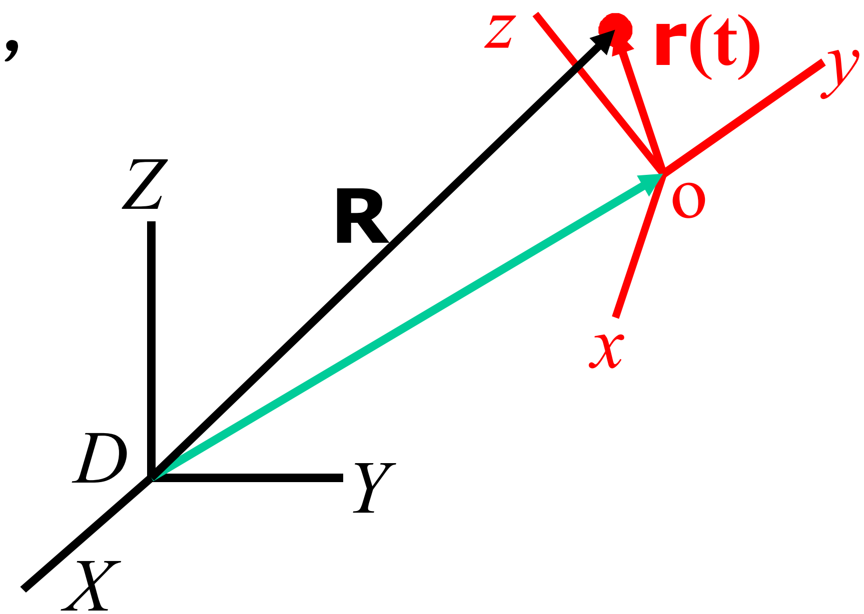
在前面得到：

$$d\mathbf{r} = d'\mathbf{r} + \mathbf{d\varphi}\times\mathbf{r} \text{ 。}$$

当s 被理解为参考系，

并且s 的原点o可以任意运动时，

以上结论仍然成立。



这时：

$$d\mathbf{R} = d'\mathbf{R} + \mathbf{d\varphi}\times\mathbf{R} \text{ 。}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{Do} + \mathbf{r} \text{ ,}$$

$\mathbf{V} = d\mathbf{R}/dt = d\mathbf{Do}/dt + d\mathbf{r}/dt =$

$=\mathbf{v}_0+(d'\mathbf{r}/dt+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=\mathbf{v}_0+(\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$。

$\mathbf{v}=d'\mathbf{r}/dt$ 为小虫在s参考系中的速度，被称为相对速度。

❖ 当$\mathbf{v}=0$时，上式就是刚体一般运动时，任意一点的速度与参考点（这里是O）的速度的关系式。

加速度： $\mathbf{A}=d\mathbf{V}/dt=d[\mathbf{v}_0+(\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})]/dt$

$$=\mathbf{a}_0+d\mathbf{v}/dt+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\times d\mathbf{r}/dt$$

$$=\mathbf{a}_0+d'\mathbf{v}/dt+\underline{\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}+\underline{\boldsymbol{\omega}\times(d'\mathbf{r}/dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

$$=\mathbf{a}_0+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}+\underbrace{\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})}_{\text{向心加速度，沿轴向，即}-\boldsymbol{\rho}\text{方向}}+\underbrace{2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}}_{\text{Coriolis 加速度，}\mathbf{a}_C}+\underbrace{\mathbf{a}}_{\text{相对加速度，在s（非惯性）参考系中的加速度}}.$$

➢2、非惯性系中的运动方程

❖惯性系中的运动方程是：$m\mathbf{A}=\mathbf{F}$.

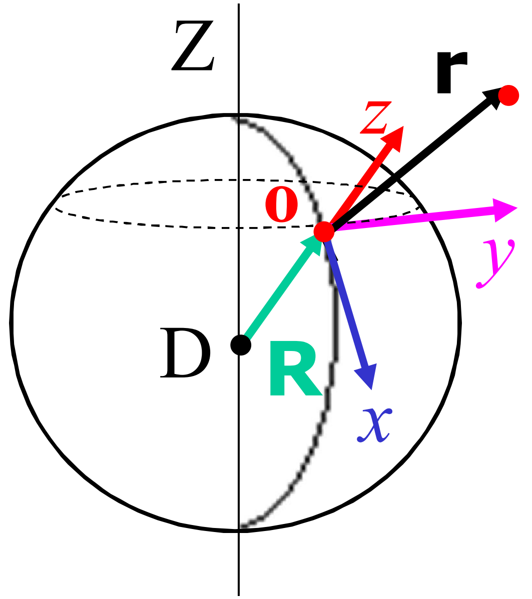
即：$m\mathbf{a}=\mathbf{F}\underbrace{-m\mathbf{a}_o-m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})-2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}}_{\text{这4项称为惯性力，记为}\mathbf{F}_{ine}}$，

$$\mathbf{F}_{ine}=-m\mathbf{a}_o-m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}\underbrace{-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})}_{\text{称为惯性离心力，其实是离轴的，即沿 }\boldsymbol{\rho}}\underbrace{-2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}}_{\text{Coriolis 力}},$$

❖在惯性系，所有由Newton第二定律导出的结果都可以用于非惯性系，

但需要计入惯性力的作用。

➢3、地球参考系中的运动方程



❖宇宙中的任何星体都受到其它星体的吸引力，因此总会有加速度。所以，把任何星体取为惯性系都是近似的。

如果取随地球平动的参考系为惯性系，那么地球就是一个转动的非惯性参考系。

用刚体的加速度公式：

$$\mathbf{a}_o = \cancel{\mathbf{a}_D} + \cancel{\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}),$$

D为惯性系中的固定点， $\mathbf{a}_D = 0$ ，

$|\dot{\boldsymbol{\omega}}| \sim 10^{-16} \mathrm{Rad/Sec^2}$， 所以 $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} \approx 0$,

惯性力为

$$\mathbf{F}_{ine} = -m\mathbf{a}_o \cancel{- m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

$$= -m\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} + \mathbf{r})] - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{ine}}$$

$$= m\mathbf{g}_0 + \mathbf{F}_e - m\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{R}+\mathbf{r})] - 2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$$

$$= \mathbf{F}_e + m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v},$$

其中， $m\mathbf{g} = m\mathbf{g}_0 - m\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{R}+\mathbf{r})]$

称为表观重力，

是实际测到的物体的重力（加速度），

表观重力在地面附近不大的范围内变化不大，

可以当作常量。

处理地面附近的物体运动，除表观重力、其它外力以外，

还应加上Coriolis 力。

本章主要内容回顾

§1、惯量张量

§2、惯量主轴

§3、惯量椭球

§4、刚体定点运动时的运动方程

§5、轴承受力问题

§6、刚体的定点运动

§7、质点在非惯性系中的运动