第　四　章

刚 体 运 动 学

本章主要内容

§1、直角坐标系下的3维张量

§2、刚体的定点运动

§3、刚体的一般运动

§4、刚体运动的特殊情形

§5、无穷小转动的矩阵形式

§6、 **Euler** 运动学方程

§1、直角坐标系下的3维张量

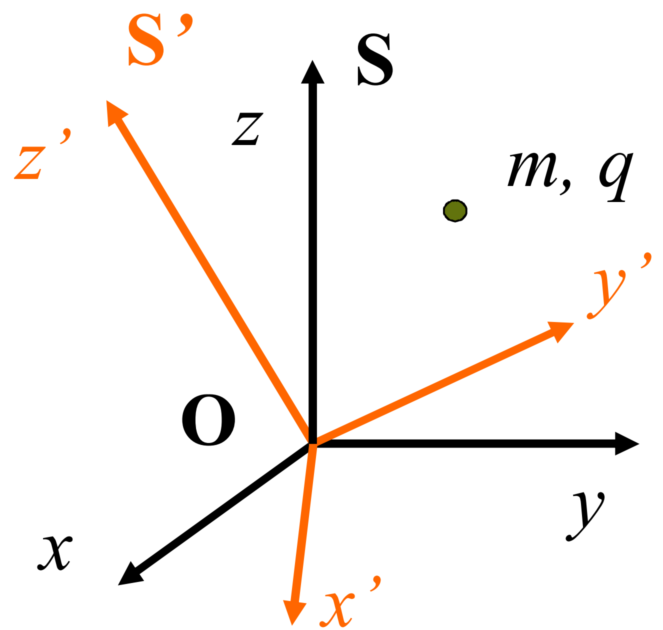
- 1、标量
- 2、矢量
- 3、二阶张量
- 4、n 阶张量
- 5、正交变换
- 6、张量的运算
- 7、张量的基矢和矩阵形式

在坐标系变换下，
物理量根据变换性质被分成不同阶的张量。
这里仅讨论最简单情形，即直角坐标系的空间转动变换。

➢1、标量

即0阶张量，

例如一个质点的质量m、电荷q，
这类物理量只有1个(3^0)分量，
在坐标系转动下不变。



➢2、矢量

即1阶张量,

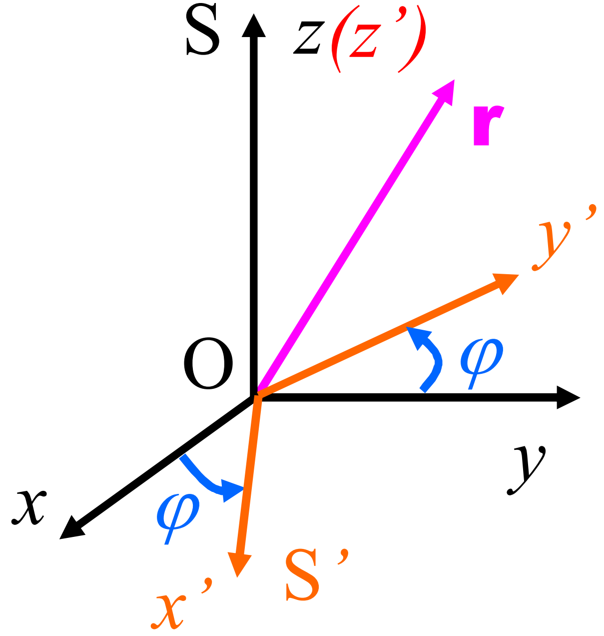
如1个质点的位置矢径：　$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=x_i\mathbf{e}_i$,

坐标系绕z轴转动φ,

$\mathbf{r}=x'\mathbf{i}'+y'\mathbf{j}'+z'\mathbf{k}'$

$=x_i'\mathbf{e}_i'$,

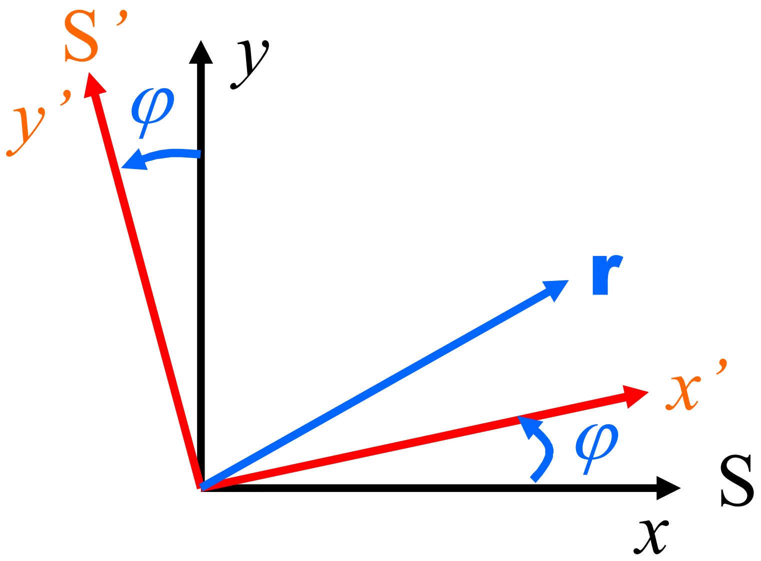
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

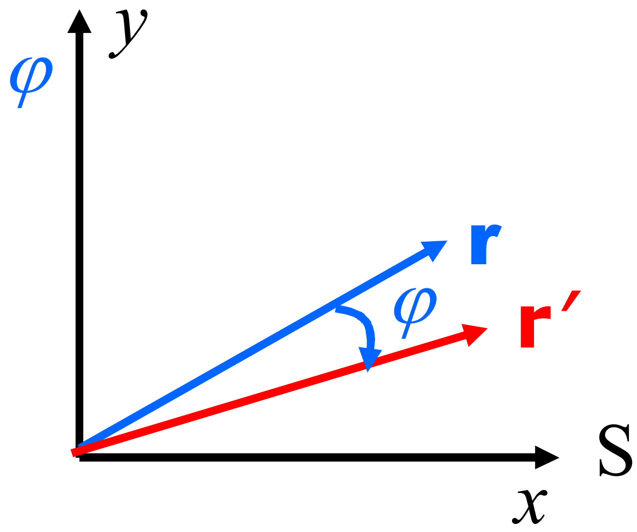


❖坐标变换中的两种等价描述：

被动观点:转动坐标系

主动观点：转动体系（矢量）

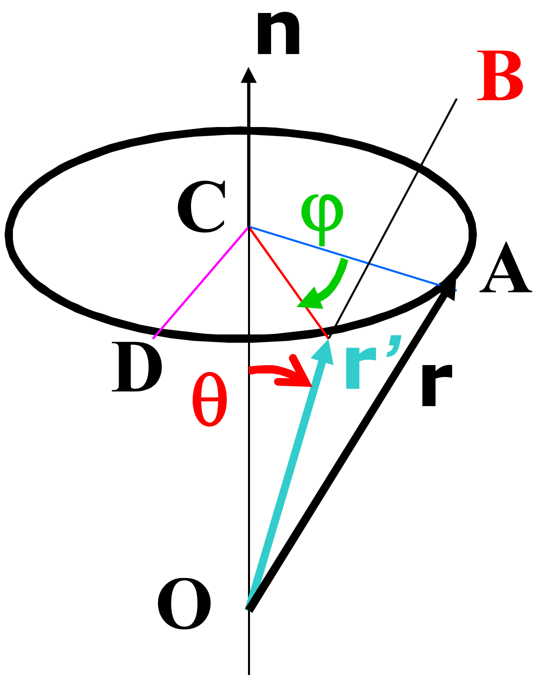




$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

这里转动操作改为平移等操作，矢量改为其它体系，
如量子力学中的波函数等，
结论仍然成立。

$\boxed{\text{坐标系绕}\mathbf{n}\text{转}\varphi} \Longrightarrow \boxed{\mathbf{r}\text{绕}\mathbf{n}\text{转}-\varphi}$



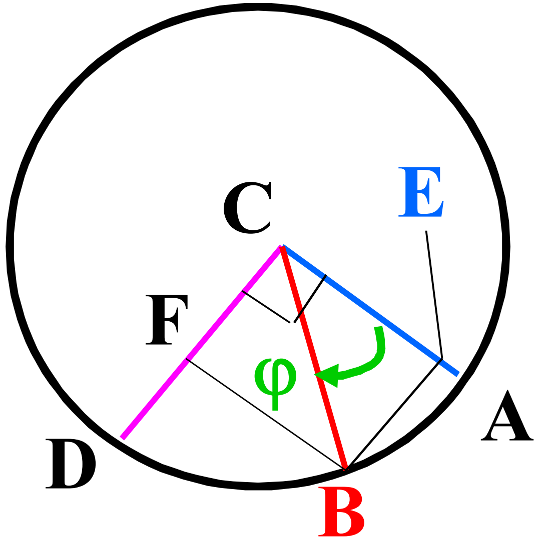
$$\vec{r}\,' = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB},$$

$$\overrightarrow{OC} = \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{r}),$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CE}$$

$$= \overrightarrow{CD}\sin\varphi + \overrightarrow{CA}\cos\varphi$$

$$= \vec{r}\times\vec{n}\sin\varphi + [\vec{r} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{r})]\cos\varphi,$$



$$\therefore \quad \vec{r}\,' = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$$

$$= \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{r}) + \vec{r}\times\vec{n}\sin\varphi + [\vec{r} - \vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{r})]\cos\varphi,$$

所以

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} o_{11} & o_{12} & o_{13} \\ o_{21} & o_{22} & o_{23} \\ o_{31} & o_{32} & o_{33} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{O}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$x'_i = o_{ij} x_j,$$

$$o_{ij}(\vec{n}, \varphi),$$

用矩阵形式写出： $\underline{r}' = \underline{\underline{O}}\,\underline{r},$

❖如果一个量有3（3^1）分量，在坐标系的转动下，这些分量的变换为 $x'_i = o_{ij} x_j,$ （i=1，2，3）而且这类量相加满足交换率，这类量被称为矢量。红色这句话的条件通常满足。

➢3、二阶张量

一个量，有 $3^2=9$个分量T_{ij}，（$i,j=1,2,3$），

在坐标系的转动变换下，

$$T'_{ij}=o_{ik}o_{jl}T_{kl}, \qquad i,j=1,2,3,$$

$\underline{\underline{T}}'=\underline{\underline{O}}\,\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{\tilde{O}}}$，不特别说明阶数的张量一般指2阶张量。

➢ 4、n 阶张量（n为0或正整数）

一个量，有 3^n 个分量

$$T_{i_1\ldots i_n}, \qquad (\,i_1, i_2, \ldots, i_n=1, 2, 3\,)$$

在坐标系的转动变换下：　$T'_{i_1\ldots i_n}=o_{i_1j_1}\ldots o_{i_nj_n}T_{j_1\ldots j_n}$，

这里，$n=0$，1，2，….。

❖当 n **=0, 3^0 =1**个分量,

在坐标系的转动下不变，为标量。

n =1, 3^1 =3个分量,

在坐标系的转动下 $x'_i = o_{ij} x_j$,

为**1**阶张量，即矢量。

……

➢ 5、正交变换

$\because \quad x'_i = o_{ij} x_j,$

$$\therefore \quad x'_i x'_i = o_{ij} x_j o_{ik} x_k = \underline{o_{ij} o_{ik}} x_j x_k$$

$$= x_k x_k,$$

$\boxed{= x_k}$

以上结果对任意 x_1，x_2，x_3 都成立，$\therefore$

由此得，$\quad o_{ij} o_{ik} = \delta_{jk}$， $\quad j,k = 1,2,3.$

即：$\quad \underline{\underline{O}}^T \underline{\underline{O}} = \underline{\underline{I}}.$ $\quad \because \quad \underline{r}' = \underline{\underline{O}}\,\underline{r},$ 设：$\quad \underline{r} = \underline{\underline{R}}\,\underline{r}',$

$\therefore \quad \underline{r}' = \underline{\underline{O}}\left(\underline{\underline{R}}\,\underline{r}'\right) = \left(\underline{\underline{O}}\,\underline{\underline{R}}\right)\underline{r}', \qquad \underline{r} = \underline{\underline{R}}\left(\underline{\underline{O}}\,\underline{r}\right) = \left(\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{O}}\right)\underline{r},$

因为 $\underline{r}'$ 和 $\underline{r}$ 是任意的，所以：$\underline{\underline{O}}\,\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{O}} = \underline{\underline{I}},$

所以： $\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{O}}^{-1}.$

$$\underline{\underline{R}} = \left(\underline{\underline{O}}^{T}\underline{\underline{O}}\right)\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{O}}^{T}\left(\underline{\underline{O}}\,\underline{\underline{R}}\right) = \underline{\underline{O}}^{T},$$

$\therefore$ $\underline{\underline{O}}^{T} = \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{O}}^{-1},$

$\therefore$ $\underline{\underline{O}}^{T}\underline{\underline{O}} = \underline{\underline{O}}\,\underline{\underline{O}}^{T} = \underline{\underline{1}},$

即： $o_{ij}o_{ik} = o_{ji}o_{ki} = \delta_{jk}$ ， $j, k = 1,2,3.$

满足这个条件的所有变换构成 O(3)群，

Orthogonal group 。

➢ 6、张量的运算

（1）相加

与矢量相同，

任意两个同阶的张量可以相加，和为同阶张量，和的每一个分量都为两个相加张量的对应分量之和。

$$T_{ij} + U_{ij} = V_{ij}\ ,\quad i, j = 1,2,3.$$

（2）数乘

与矢量相同，

任意一个张量可以与一数(即标量)相乘，其积的阶数不变。积的每一个分量都为原张量的对应分量与该数的积：

$$s\,T_{ij}=V_{ij}\ ,\ i,j=1,2,3.$$

（3）外积

任意两个张量可以做外积。一个n阶张量和一个m阶张量的外积，为一个$n+m$阶张量。

$$V_{ijk}=U_iT_{jk}\,,\quad i,j\,,k=1,2,3.$$

（4）内积（点乘、收缩）

内积可以看成矢量的点乘的推广，对任意一个张量或几个张量，内积后的结果仍为一个张量。

给定2个1阶张量（矢量）**T** 和 **U**,

它们的（1次）内积[（1次）点乘]为：$V = U_i T_i$ ，

即2个矢量的1对分量下标取相同值，并从1到3求和。

2个矢量，共有2个下标，

但由于求和，得到1个量，从得到的分量的个数看，

符合标量的要求。

根据标量的变换性质容易证明，2个矢量内积后的结果的确是一个标量。

矢量的一次内积可以推广到任意个任意阶张量的多次内积。

例如，i，k，l为1，2，3中的任意值:

由3阶张量T和2阶张量U可以定义一组数(含27个数)V_{ikl}:

$V_{ikl} = T_{ijk}U_{lj} = T_{i1k}U_{l1} + T_{i2k}U_{l2} + T_{i3k}U_{l3}$，

V_{ikl}构成3阶张量的ikl分量，其中ikl均将取遍1/2/3中的所有值。这里的运算中，对1对下标求和，称为1次内积。

同理，$T_{ijk}U_{jl}$，$T_{ijk}U_{lm}V_{jn}$，T_{ijj}，U_{ii}都是一次内积。

如对2对下标求和，相应的运算为2次内积，

$V_k = T_{iji}U_{jk}$

为1阶张量（矢量）的k分量。

类似的，可以引入3次以上的内积。

参加内积的张量的阶数和（下标的总个数），

减去内积次数的2倍（减少的下标个数），

就是内积结果的张量阶数（剩下的下标个数）。

下面举例证明这个结论。

$$(T_{iji}U_{jk})' \equiv T'_{iji}U'_{jk} = \underline{o_{i\ell}}\,\underline{o_{jm}}\,\underline{o_{in}}\,T_{\ell mn}\,\underline{o_{jp}}\,o_{kq}\,U_{pq}$$

$$\delta_{\ell n} \qquad\qquad \delta_{mp}$$

$$= o_{kq}\,T_{\ell m\ell}\,U_{mq}\ ,$$

由此可见，两次内积的结果为*1*阶张量，即矢量。

➢7、张量的基矢和矩阵形式

分量形式是张量的最基本形式，

其次是基矢形式，然后是矩阵形式。

但某些情况下矩阵形式比较简单、直观。

❖张量某些性质和运算也可以表示为

基矢形式和矩阵形式。

这也是把张量表示成基矢形式和矩阵形式的根据。

(1)标量　　以带电粒子的电荷q为例：

分量	基矢	矩阵
q	q	q

(2) 矢量

以质点的位置矢径**r**为例：

分量　　　基矢　　　　　　矩阵

x_i, $i=1, 2, 3$;　$\mathbf{r}=x_i\mathbf{e}_i$;　$\underline{\mathrm{r}}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,　或　$\tilde{\underline{\mathrm{r}}}=(x, y, z)$.

两个矢量$\mathbf{r}=x_i\mathbf{e}_i$和$\mathbf{s}=y_i\mathbf{e}_i$的内积就是点乘：

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}=x_i\mathbf{e}_i\cdot y_j\mathbf{e}_j=x_iy_j\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=x_iy_j\delta_{ji}=x_iy_i。$$

内积的矩阵形式为：$\underline{\tilde{r}}\,\underline{s}=(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=x_iy_i$.

(3）2阶张量

2阶张量 $\overleftrightarrow{T}$ 的基矢形式为： $T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ ，

其中， $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ 称为并矢，

它前面的系数就是2阶张量的ij分量。

上面的2阶张量的基矢形式可以记为：$\overleftrightarrow{T}$ 或 $\overline{\overline{T}}$，

即： $\overleftrightarrow{T}=T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$.

两个矢量$\mathbf{r}=x_i\mathbf{e}_i$和$\mathbf{s}=y_i\mathbf{e}_i$的外积

用基矢形式表示就是两个矢量的并矢：

$$\mathbf{rs}=x_i\mathbf{e}_i\,y_j\mathbf{e}_j=x_iy_j\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\,,$$

这里的ij分量为x_iy_j，与分量时的结果一致。

类似的，2阶以上的n阶张量都可以用n个并在一起的矢量来表示，如： **rstu**四个矢量并在一切就是四阶张量。

❖2阶张量 $\overset{\leftrightarrow}{\mathrm{T}}$ 也可以表示成矩阵形式：

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathrm{T}} \Rightarrow \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

2个矢量**r**= x_i**e**$_i$和**s**= y_i **e**$_i$的外积的矩阵形式为：

$$\underline{r}\tilde{\underline{s}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix} \neq \underline{s}\tilde{\underline{r}}.$$

还可以证明， $\delta_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial x_j}$ 是2阶张量，

它的矩阵形式为：

$$\underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

基矢形式：$\overleftrightarrow{1} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}.$

矢量$\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$和张量$\overleftrightarrow{T}$之间的内积$x_i T_{ij}$ 可以表示为

$\mathbf{r}$从左边点乘$\overleftrightarrow{T}$：$\vec{r} \cdot \overleftrightarrow{T} = x_i \vec{e}_i \cdot T_{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k = x_i T_{jk} \vec{e}_k \delta_{ij} = x_i T_{ik} \vec{e}_k.$

矩阵形式为

$$\underline{\tilde{r}} \, \underline{\underline{T}} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = (x_i T_{i1} \quad x_i T_{i2} \quad x_i T_{i3}).$$

矢量$\mathbf{r}=x_i\mathbf{e}_i$和张量$\overleftrightarrow{\mathrm{T}}$之间的内积$x_iT_{ji}$ 可以表示为

$\mathbf{r}$从右边点乘$\overleftrightarrow{\mathrm{T}}$ 。

矩阵形式为：

$$\underline{\underline{\mathrm{T}}}\ \underline{\mathrm{r}}=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T_{1i}x_i \\ T_{2i}x_i \\ T_{3i}x_i \end{pmatrix}.$$

2次内积$\mathrm{T}_{ij}\mathrm{U}_{ji}$的基矢形式为：

$$\overleftrightarrow{\mathrm{T}}:\overleftrightarrow{\mathrm{U}}=T_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j:U_{kl}\vec{e}_k\vec{e}_l=T_{ij}U_{kl}\delta_{jk}\delta_{il}=T_{ij}U_{ji}.$$

类似的，可以把多次内积和基矢形式的多次点乘相对应。

上面的2次点乘的矩阵形式为：

$$Tr\left[\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix}\right]=$$

$$=Tr\begin{pmatrix} T_{1j}U_{j1} & \times & \times \\ \times & T_{2j}U_{j2} & \times \\ \times & \times & T_{3j}U_{j3} \end{pmatrix}=T_{ij}U_{ji}.$$

（4）3阶和3阶以上的张量

3阶以上的张量难于用矩阵形式表示出来。

如果只限于直角坐标系变换下的张量，
任意阶的张量和运算都可以用基矢形式表示出来，
只是过于复杂的内积运算的基矢形式显得很不方便。

§2、刚体的定点运动

1、刚体及其自由度数

2、刚体运动的Euler 定理

3、刚体上任意一点的运动

➢1、刚体及其自由度数

在质点的基础上，引入刚体。

一个由若干个质点组成的体系，任意2个质点之间的距离始终保持不变，这个体系被称为刚体。

一个生鸡蛋一般不能当作刚体，一个煮过的鸡蛋一般可以近似地当作刚体，一个铅球一般可以当作比较理想的刚体。

如一个刚体由n个质点组成，$3n$个坐标变量，第a个和第b个质点的矢径满足：

$$(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)^2 = l_{ab}^2 \text{。 (const.)} \qquad [1]$$

这属于理想、稳定、完整约束。

象[1]这样的约束共有 $n(n\text{-}1)/2$ 个。

当n 很大时， $n(n\text{-}1)/2 \;>>\; 3n$

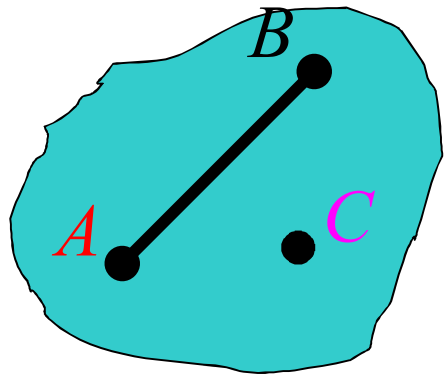
所以，这些约束是不独立的。

对一个自由刚体（即除了上述约束之外再无其它约束），

d=**3** + **2** + **1**=**6**，

A B C（不共线）

或 d=**3×3 − 3 = 6**，



A,B,C之间的**3**个独立约束

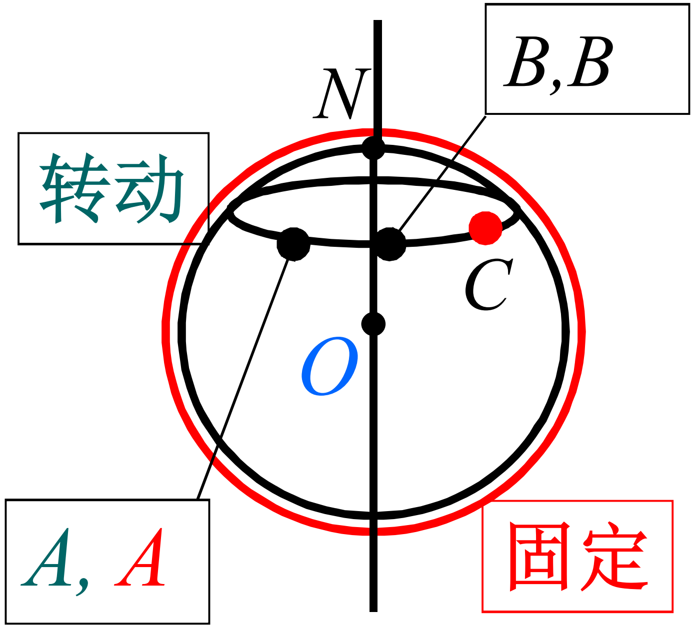
所以，在$n(n\text{-}1)/2$ 个约束中，只有$3n-6$个是独立的。

对于刚体的定点运动
（刚体上的每一点到某一固定点的距离始终不变），
由于一个点已经固定，相当于上图中的A点固定，
这时只有B、 C能运动，所以

$$d = \underset{B}{2} + \underset{C}{1} = 3$$。

➢ 2、刚体定点运动的Euler 定理：
刚体定点运动的任一位移都可以通过绕过定点的某一轴的转动实现。

证明：



在刚体上任取一点A，

经过绕定点O的任一转动，

A转到B，B转到C，

A、B、C构成一个平面，

平面与球面的交线为一园，

ON为园的对称轴。

因为$AB = BC$（刚体上的2个固定点），

AB圆弧＝ BC圆弧，

所以，绕ON转动，使A到B，则B必然到C。

再加上对A、B、C 处于特殊位置关系情形的讨论，

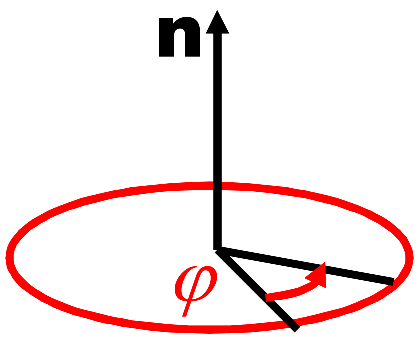
就可以证明以上定理。

❖现在看绕轴的转动：

绕**n**转有限大角度φ。

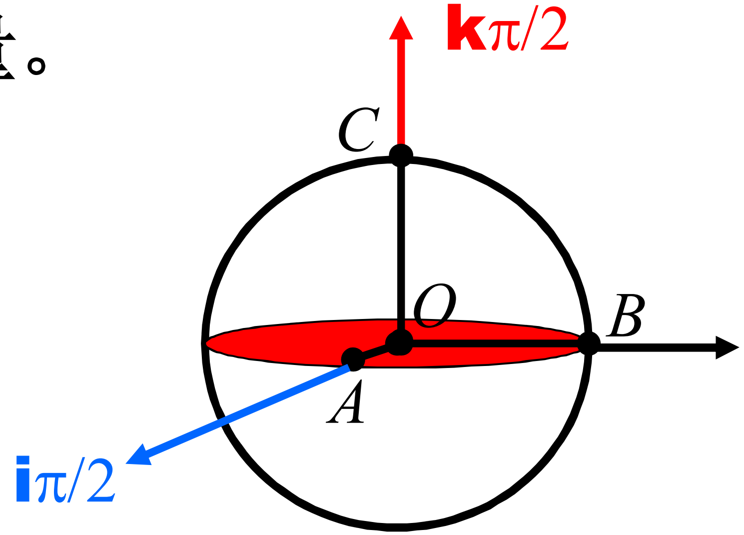
如用**n**φ代表这个转动，

nφ可分解为3个分量，这3个分量在坐标系的转动下满足矢量的变换关系，但这类量相加时不满足交换率，所以代表有限大转动的**n**φ不是矢量。



$$A \xrightarrow{\text{转}\mathbf{i}\pi/2} A \xrightarrow{\text{转}\mathbf{k}\pi/2} B$$

$$A \xrightarrow{\text{转}\mathbf{k}\pi/2} B \xrightarrow{\text{转}\mathbf{i}\pi/2} C$$



❖由转动矩阵看：

矢量绕**n**转φ，相当于坐标系绕**n**转$-\varphi$，

转动矩阵为$O(\mathbf{n}, -\varphi)$，

矢量绕**m**转ψ，相当于坐标系绕**m**转$-\psi$，

转动矩阵为$O(\mathbf{m}, -\psi)$。

对有限大的2个转动，一般的：

$$O(\mathbf{n}, -\varphi)\, O(\mathbf{m}, -\psi) \neq O(\mathbf{m}, -\psi)\, O(\mathbf{n}, -\varphi)$$

❖但无限小转动是矢量，

即$\mathbf{n}d\varphi$是矢量，可以记为 $d\boldsymbol{\varphi}$，　　　　$\cancel{d\boldsymbol{\varphi}}$

或 $\overrightarrow{d\phi}$，　　　　$\cancel{d\vec{\varphi}}$

由 $\vec{r} \xrightarrow{\text{转动 } \overrightarrow{d\varphi}} \vec{r}\,'$,

对 $\overrightarrow{d\varphi} = 0$, $\qquad \underline{r}\,' = \underline{\underline{1}}\,\underline{r}$,

对任意 $\overrightarrow{d\varphi}$，$\underline{r}\,' = (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\varepsilon}})\underline{r}$，$\underline{\underline{\varepsilon}}$ 的矩阵元都是无限小的。

对任意2次无限小转动:

$$(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\varepsilon_1}})(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\varepsilon_2}}) = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\varepsilon_1}} + \underline{\underline{\varepsilon_2}} + \cancel{\underline{\underline{\varepsilon_1}}\,\underline{\underline{\varepsilon_2}}},$$

与2次转动的先后顺序无关，
即无限小转动满足交换率，

因为高阶无限小

因此，无限小转动 $\overrightarrow{d\varphi}$ 是矢量。

$\therefore \qquad \vec{\omega} \equiv \overrightarrow{d\varphi} / dt$ 为矢量，称为角速度。

在刚体定点转动过程中，任一无限小转动都可以看作绕过固定点的某一轴的转动。

随作刚体转动，相应的轴取向发生变化，

所以这种轴叫瞬时转动轴。

➢ **3、刚体上任意一点的运动**

对大小不变的 $\vec{r}$，转过了 $\overrightarrow{d\varphi}$，

$$d\vec{r} = \overrightarrow{d\varphi} \times \vec{r},$$

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt = \overrightarrow{d\varphi}/dt \times \vec{r}$$

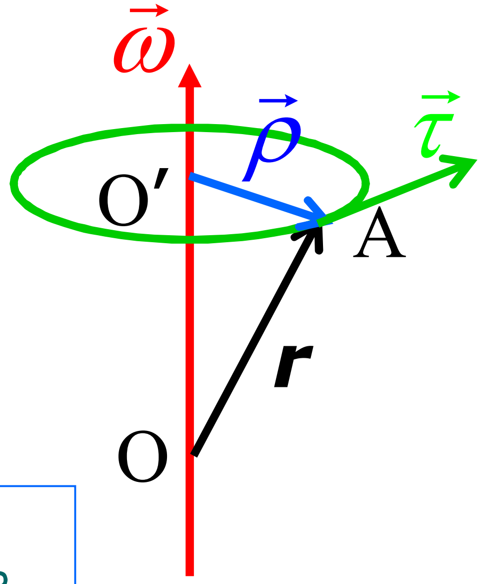
$$= \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

$\mathbf{a} = \mathbf{dv}/dt$

$$= \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

不一定在 $\vec{\tau}$ 方向

$= -\omega^2 \vec{\rho}$, 一定在$-\vec{\rho}$方向，向轴。



§3、刚体的一般运动

平移：刚体从某一初始位置移动到另一位置，
如果在这两个位置时，刚体上的任意两点间的连线
都是平行的，这种运动称为平移。

平动：刚体在运动过程中，
任意两个位置之间的运动均为平移，
这种运动过程称为平动。

Chasles 定理：刚体最一般的位移总可以看作刚体
随刚体上任意一点R的平移加绕该点的转动。
这里的任意选取的点R叫基点（**base point**，参考点）。

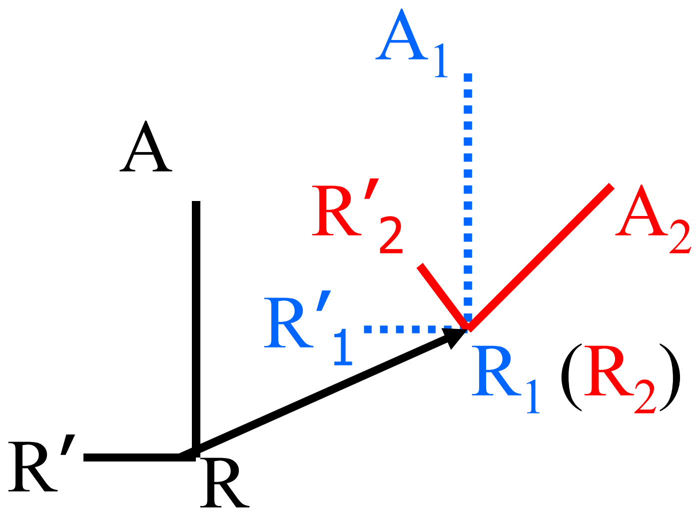
证明：

从$R'RA \Rightarrow R'_2R_2A_2$

取R做基点：

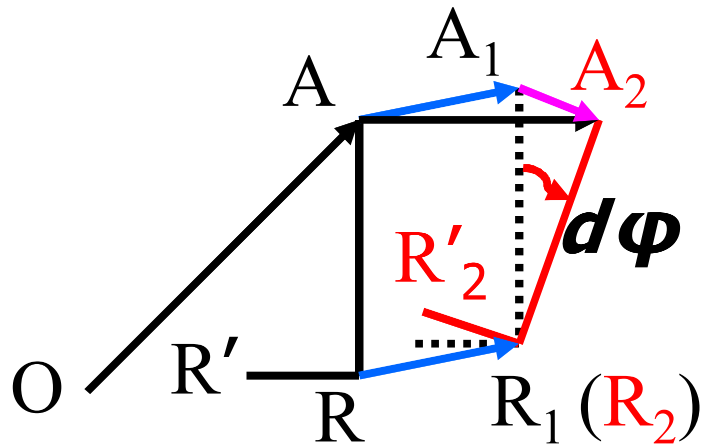
$$R'RA \xrightarrow{\text{平移}\ \overrightarrow{RR_1}} R'_1R_1A_1$$

$$\xrightarrow{\text{绕参考点}R\ (\text{即}R_1\text{、}R_2)\text{转动}} R'_2R_2A_2$$



刚体运动时，转动位移与基点的选取无关。

就无限小转动证明，取R为基点：



$$d\vec{r}_A = d\vec{r}_R + \overrightarrow{d\varphi} \times \overrightarrow{RA} \qquad [1]$$

$$d\vec{r}_{R'} = d\vec{r}_R + \overrightarrow{d\varphi} \times \overrightarrow{RR'} \qquad [2]$$

取 R’为基点：

$$d\vec{r}_A = d\vec{r}_{R'} + \overrightarrow{d\varphi'} \times \overrightarrow{R'A} \qquad [3]$$

由[1]、[2]、[3]消去 $d\vec{r}_A$、$d\vec{r}_{R'}$和$d\vec{r}_R$：

$$\overrightarrow{d\varphi'} \times \overrightarrow{R'A} = \overrightarrow{d\varphi} \times \overrightarrow{RA} - \overrightarrow{d\varphi} \times \overrightarrow{RR'} = \overrightarrow{d\varphi} \times \overrightarrow{R'A}$$

由于 $\overrightarrow{R'A}$是任意的， 所以：$\overrightarrow{d\varphi} = \overrightarrow{d\varphi'}$；

但 $d\vec{r}_R \neq d\vec{r}_{R'}$。

$\overrightarrow{d\varphi}$ 代表的是空间取向的变化，

自然不应该与基点有关，

也与相互平动的参考系的选取无关。

上面的[1]式 $d\vec{r}_A = d\vec{r}_R + \overrightarrow{d\varphi} \times \overrightarrow{RA}$

$\div dt$：

$$\vec{v}_A = \vec{v}_R + \vec{\omega} \times \overrightarrow{RA}$$

上式对 t 求导：

$$\vec{a}_A = \vec{a}_R + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{RA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{RA})$$

选取两个不同的基点：

$\vec{\omega} = \vec{\omega}'$，但 $\vec{v}_R \neq \vec{v}_{R'}$。

§4、刚体运动的特殊情形

- 1、平动
- 2、定轴转动
- 3、刚体的平面平行运动

➢1、平动

$\because \overrightarrow{d\varphi} = 0$，$\vec{\omega} = 0$，

$\therefore \vec{v}_A = \vec{v}_R$，$\vec{a}_A = \vec{a}_R$

即任意一点的运动状况都与参考点相同。

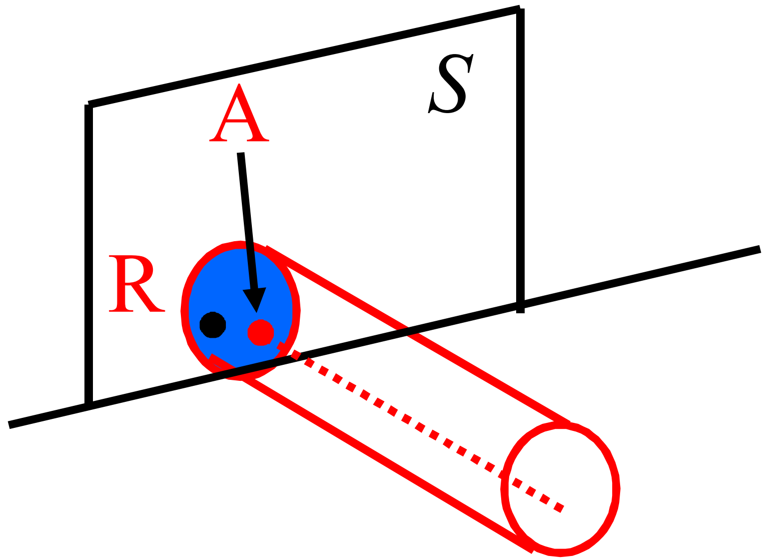
∴ 刚体平动 $\longrightarrow$ 参考点的运动，即质点的运动。

➢ 2、定轴转动

这时 $\vec{\omega}, \dot{\vec{\omega}}$ 都沿固定方向，运动状况比较简单。

➢3、刚体的平面平行运动

如果刚体上的每一点的运动速度在运动过程中始终平行于一个固定平面，这样的运动被称为平面平行运动（如右图）。这时刚体的运动可以用一个平面刚体代表。



$\vec{v}$、$\vec{a}$ 都在S面内，$\vec{\omega}\perp S$，

$$\vec{v}_A=\vec{v}_R+\vec{\omega}\times\overrightarrow{RA}$$

如果在t时刻，$\vec{v}_R=0$，R被称为瞬时转动中心，即瞬心。

在t时刻，刚体的运动状态可以看成绕 瞬心 的转动。

§ 5、无穷小转动的矩阵形式

坐标系绕**n**转 $\overrightarrow{d\varphi}$,

$$\underline{r}'=(\underline{\underline{1}}+\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{r}=\underline{\underline{O}}\,\underline{r}\ ,$$

$$\underline{\underline{O}}=\underline{\underline{1}}+\underline{\underline{\varepsilon}}\ ,$$

下面验证： $\underline{\underline{O}}^{-1}=\underline{\underline{1}}-\underline{\underline{\varepsilon}}\ ,$

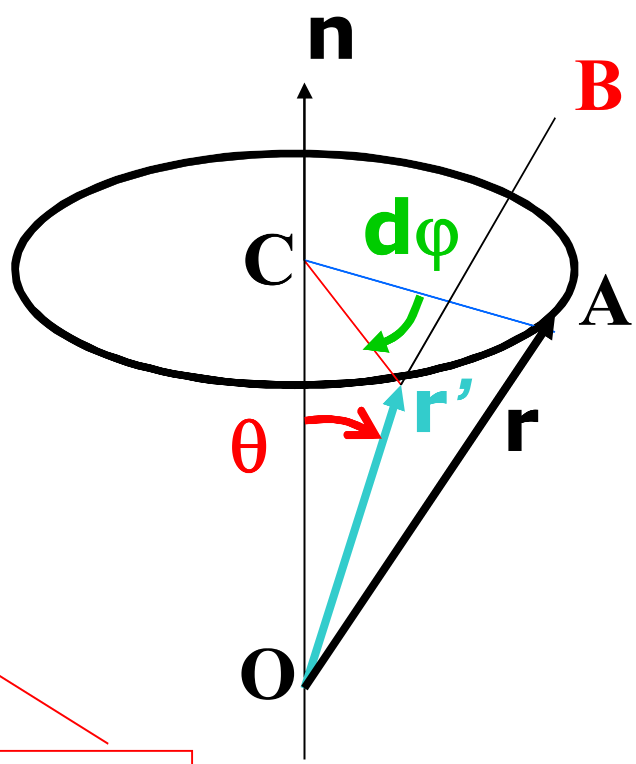
因为 $(\underline{\underline{1}}+\underline{\underline{\varepsilon}})(\underline{\underline{1}}-\underline{\underline{\varepsilon}})=\underline{\underline{1}}+\cancel{\underline{\underline{\varepsilon}}-\underline{\underline{\varepsilon}}}\cancel{-\underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{\underline{\varepsilon}}}$

$$=(\underline{\underline{1}}-\underline{\underline{\varepsilon}})(\underline{\underline{1}}+\underline{\underline{\varepsilon}})$$

$$=\underline{\underline{1}}\ ,$$

$\boxed{\text{因为高阶无限小}}$

∴ $\underline{\underline{O}}^{-1}=\underline{\underline{1}}-\underline{\underline{\varepsilon}}=\underline{\underline{O}}^{T}=\underline{\underline{1}}+\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}\ ,$



$\therefore \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = -\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}},$

$\underline{\underline{\varepsilon}}$ 是反对称的。

$$\underline{\mathrm{r}}' - \underline{\mathrm{r}} = \underline{\mathrm{dr}} = \underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{\mathrm{r}},$$

如 $\mathbf{n} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k},$

$$\mathbf{dr} = -\mathbf{n}\,d\varphi \times \mathbf{r}$$

$$= -(\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k})\,d\varphi \times \mathbf{r},$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \gamma d\varphi & -\beta d\varphi \\ -\gamma d\varphi & 0 & \alpha d\varphi \\ \beta d\varphi & -\alpha d\varphi & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

由此可以得到:

$$\underline{\underline{O}}(\mathbf{n}, \mathrm{d}\varphi) = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \mathrm{d}\varphi & -\beta \mathrm{d}\varphi \\ -\gamma \mathrm{d}\varphi & 1 & \alpha \mathrm{d}\varphi \\ \beta \mathrm{d}\varphi & -\alpha \mathrm{d}\varphi & 1 \end{pmatrix}.$$

§6、Euler 运动学方程

- 1、刚体定点运动的自由度
- 2、本体坐标系
- 3、Euler 角
- **4**、在本体坐标系中的Euler 运动学方程

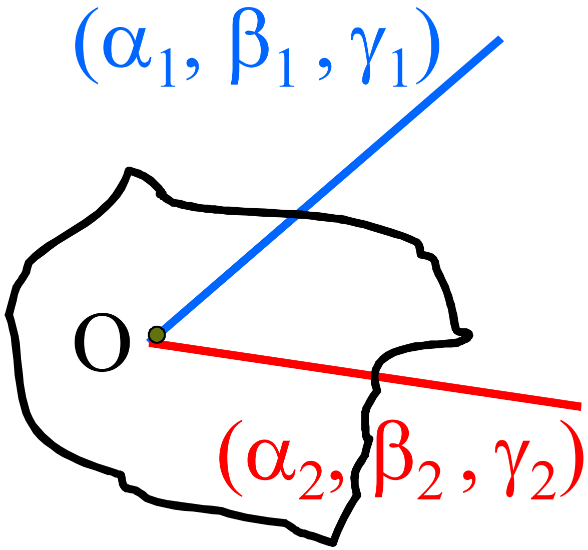
➢1、定点运动刚体的自由度

对定点运动的刚体，

$s=d=3.$

如何选这3个广义坐标？

$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ 和 $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$

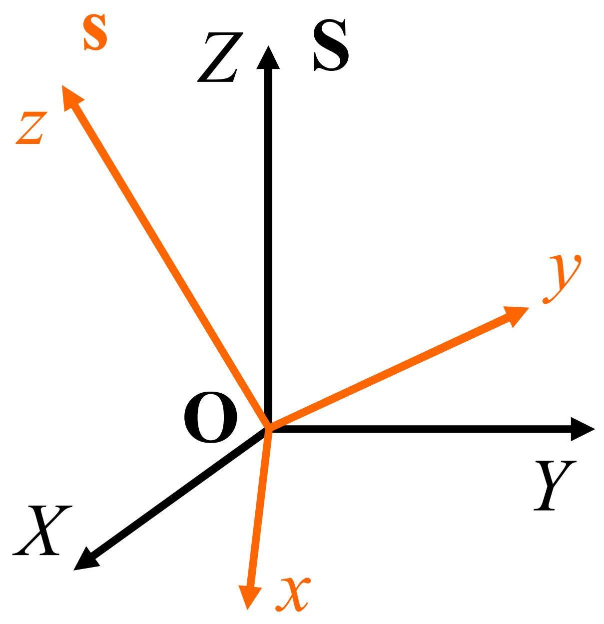


6个量虽然能够确定刚体的位置，
但其中有3个量是不独立的，
因此需要3个方程去消掉3个不独立的变量。
这样做显然比较复杂。

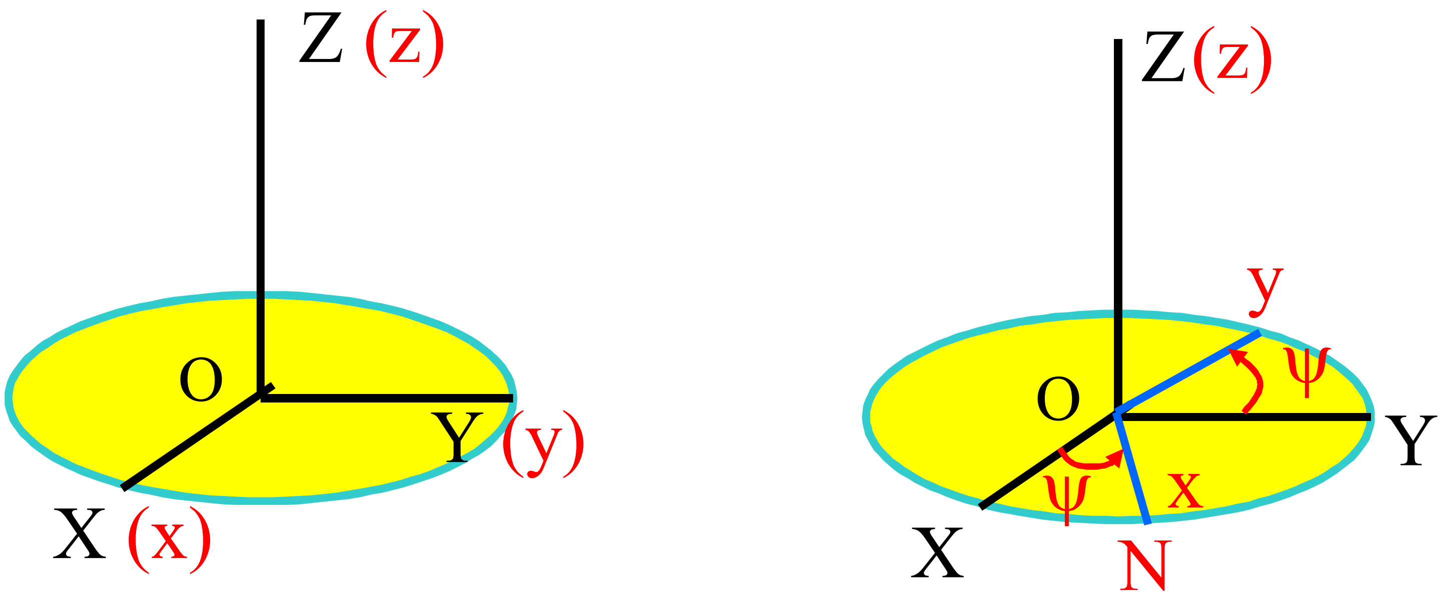
※是否可以选其它量做广义坐标？

➢2、本体坐标系

空间坐标系	本体坐标系
坐标轴相对	坐标轴固定
参考系静止	在刚体上
S	**s**
X, Y, Z,	**x, y, z;** 或**1, 2, 3**
I, J, K ,	**i, j, k,**
I_{XY}, $I_{\mu\nu}$	I_{12}, I_{ij}
$\mu, \nu = X, Y, Z.$	$i, j = 1, 2, 3.$
X_μ	x_i



➢3、Euler 角



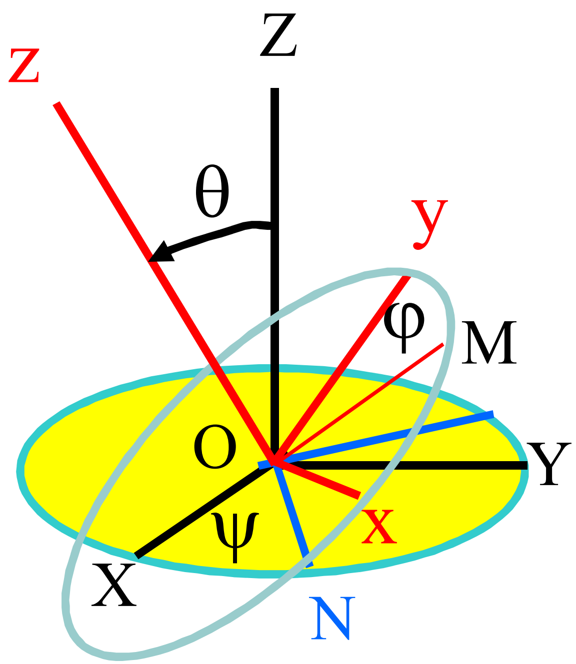
（1）绕***K***转 ψ , 进动角， $0 \le \psi < 2\pi$.

得***ON***, 称为节线。

（2）绕**ON**转 θ，章动角，$0 \le \theta \le \pi$.

（3）绕z（**k**）转 φ，自转角，

$$0 \le \varphi < 2\pi.$$



也可以这样理解这3个角：

θ：Z 到 z 的夹角，

垂直于Z、 z， 并与Z 到 z 转动构成右手螺旋关系，确定**ON**.

ψ： X 到 **ON** 的夹角.

φ： **ON** 到 x 的夹角.

ψ、θ、φ 被称为**Euler**角， **Euler**角不是矢量，其转动与顺序有关。

➢4、在本体坐标系中的Euler 运动学方程

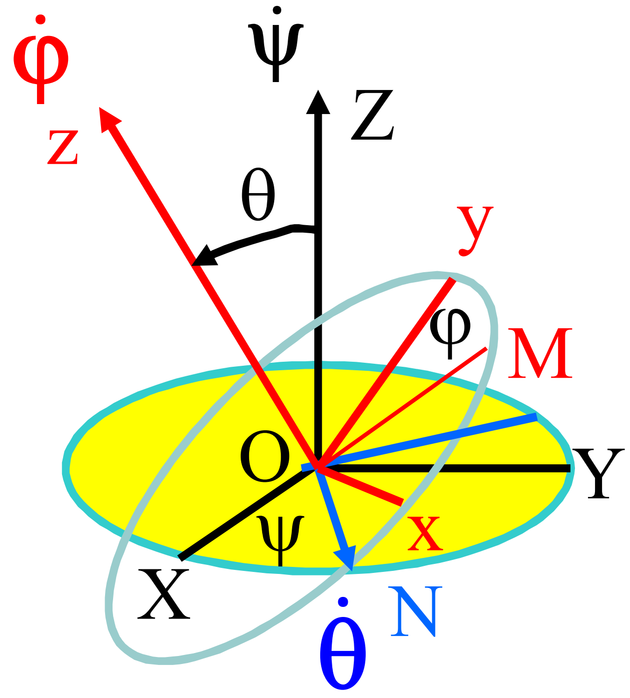
ψ、θ、φ 不是矢量，

但 $\vec{\dot{\psi}}$、$\vec{\dot{\theta}}$、$\vec{\dot{\varphi}}$ 都是矢量，

分别沿 $\vec{K}$、$\overrightarrow{ON}$、$\vec{k}$ 方向，

$\vec{\dot{\psi}}$ 与 $\vec{\dot{\varphi}}$ 一般不垂直，

$$\vec{\omega}=\vec{\dot{\psi}}+\vec{\dot{\theta}}+\vec{\dot{\varphi}}.$$

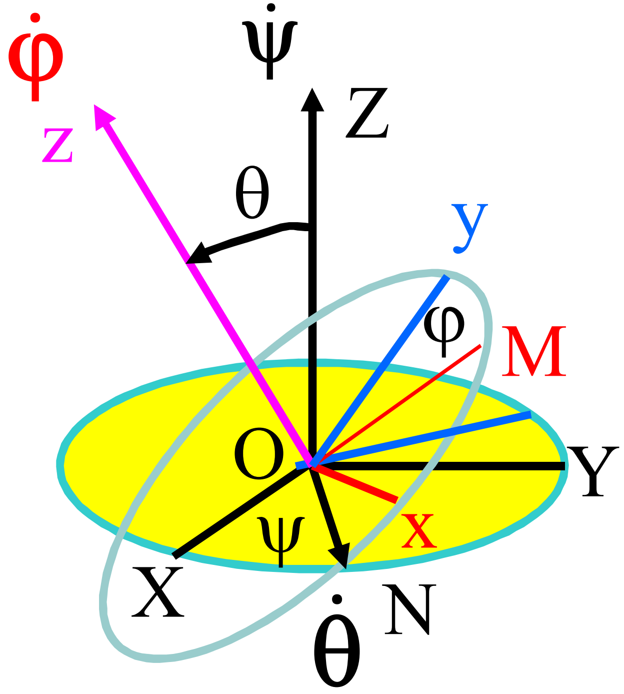


把上述角速度投影到 **i, j, k** 方向：

$$\vec{\dot{\psi}}=\vec{k}\dot{\psi}\cos\theta+\overrightarrow{OM}\dot{\psi}\sin\theta,$$

$$\overrightarrow{OM}=\vec{i}\sin\varphi+\vec{j}\cos\varphi,$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{i}\,\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \mathbf{j}\,\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi + \mathbf{k}\,\dot{\psi}\cos\theta, \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{i}\,\dot{\theta}\cos\varphi - \mathbf{j}\,\dot{\theta}\sin\varphi, \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{k}\,\dot{\varphi}, \end{cases}$$



分别取**i**、**j**、**k** 3个分量

得下面的3个方程：

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ \omega_2 = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ \omega_3 = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}, \end{cases}$$

这3个方程为**Euler 运动学方程**，

再找出动力学方程，就可以求出刚体的运动。

本章主要内容回顾

§1、直角坐标系下的3维张量

§2、刚体的定点运动

§3、刚体的一般运动

§4、刚体运动的特殊情形

§5、无穷小转动的矩阵形式

§6、 **Euler** 运动学方程