MatIntroMatNat
OPGAVEFORSIDE

AFLEVERINGSOPGAVE# ________

DATO(dd-mm-åå): ________________________________

Klasse#______ Skemagruppe (A eller C):______

Studieretning:______________________________________

Navn (inkl. mellemnavne):

Fødselsdato:____________

Hvis mapledelen er udfærdiget i samarbejde med andre (max. 2 andre) angives deres navne og fødselsdato her:

MatIntro

Pointopgave 4

Jesper Henrichsen | tgw831

23. september 2015

4.1

$$(1+x^2)yy' = x(1+y^2) \tag{1}$$

Først ved løsning i Maple fås:

Figur 1: Maple input og output

$DF := \left(x^2+1\right) y\left(x\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y\left(x\right) = x\left(1+\left(y\left(x\right)\right)^2\right)$

$$\left(x^2+1\right) y\left(x\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y\left(x\right) = x\left(1+\left(y\left(x\right)\right)^2\right)$$

$dsolve(DF);$

$$y\left(x\right) = \sqrt{\_C1\, x^2 + \_C1 - 1},\ y\left(x\right) = -\sqrt{\_C1\, x^2 + \_C1 - 1}$$

$y := x \mapsto \sqrt{\_C1\, x^2 + \_C1 - 1}$

$$x \mapsto \sqrt{\_C1\, x^2 + \_C1 - 1}$$

$isolate\left(y\left(3\right) = 1, \_C1\right)$

$$\_C1 = 1/5$$

$isolate\left(y\left(3\right) = 3, \_C1\right)$

$$\_C1 = 1$$

$isolate\left(y\left(3\right) = -7, \_C1\right)$

$$\_C1 = 5$$

For at løse (1) ses det at separation kan benyttes på ligninger af formen:

$$q(x)y' = p(x) \tag{2}$$

At ligningen er separabel henviser til at lighedstegnet separere de to variable x og y.

$$
\begin{aligned}
&(1+x^2)yy' = x(1+y^2) && /(1+x^2)y \\
&\Rightarrow y' = \frac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)} && /\frac{(1+y^2)}{y} \\
&\Rightarrow \frac{y'y}{1+y^2} = \frac{x}{1+x^2} && \text{flyt } y' \text{ ud af brøken} \\
&\Rightarrow y'\frac{y}{1+y^2} = \frac{x}{1+x^2} && \text{(2) er nu opfyldt} \\
&\Rightarrow \int y'\frac{y}{1+y^2}dx = \int \frac{x}{1+x^2}dx
\end{aligned}
$$

Ved dette trin kan det udnyttes at $y' = \frac{dy}{dx}$ og notationen kan misbruges til at opsætte $dy = y'dx$, dette tillader nu at udbytte ovenstående udtryk for istedet at have integralet med hensyn til y således at

$$
\int \frac{y}{1+y^2}y'dx \Leftrightarrow \int \frac{y}{1+y^2}dy
$$

og det kan således indsættes således at

$$
\int \frac{y}{1+y^2}dy = \int \frac{x}{1+x^2}dx
$$

For at løse dette kan integration ved substition benyttes. Substitution kan benyttes på integraler på formen:

$$
\int f(g(x))g'(x)dx \tag{3}
$$

Ved lade $u = g(x) = y^2 + 1$ da er $g'(x) = 2y$ og det ses at ved at faktorisere brøken med $\frac{1}{2}$ og flytte udenfor integralet fås netop en funktion som opfylder (3), hvilket er vist i det følgende:

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{y}{1+y^2}dy = \frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}dy \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2y}{u}dy && \text{Da } 2y = \frac{du}{dy} \Leftrightarrow dy = \frac{du}{2y} \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2y}{u}\cdot\frac{du}{2y} \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\ du \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\ ln(|u|) + C && \text{Ved at substituere } y^2+1 \text{ istedet for } u \text{ fås} \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\ ln(|y^2+1|) + C && \text{da } y^2+1 \text{ kun kan være positivt} \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\ ln(y^2+1) + C
\end{aligned}
$$

Ved at have integreret den venstre side af det oprindelige udtryk og notere at venstre er identisk med højre med undtagelse af variablen kan udtrykket altså skrives som:

$$
\frac{1}{2}\ ln(y^2+1) + C_1 = \frac{1}{2}\ ln(x^2+1) + C_2
$$

C_1 og C_2 er vilkårlige variable og kan samles under en vilkårlig variabel $C_3 = C_2 - C_1$ på højre side.

$$\frac{1}{2}\,ln(y^2+1) = \frac{1}{2}\,ln(x^2+1) + C_3$$

For at isolere $y(x)$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,ln(y^2+1) = \frac{1}{2}\,ln(x^2+1) + C_3 && \text{Gange begge sider med 2}\\
&\Rightarrow ln(y^2+1) = ln(x^2+1) + C_3 && \text{Opløft e med begge sider}\\
&\Rightarrow e^{ln(y^2+1)} = e^{ln(x^2+1)+C_3} &&\\
&\Rightarrow y^2+1 = e^{C_3}(x^2+1) && e^{C_3} \text{ er blot en anden vilkårlig variabel, lad } C = e^{C_3}\\
&\Rightarrow y^2+1 = C(x^2+1) && \text{Træk 1 fra begge sider}\\
&\Rightarrow y^2 = C(x^2+1) - 1 && \text{Tag roden af begge sider}\\
&\Rightarrow y = \sqrt{C(x^2+1)-1} &&
\end{aligned}$$

Dermed er $y(x)$ fundet til

$$y(x) = \sqrt{C(x^2+1)-1}$$

Da kan med udgangspunkt i hver af de givne startværdier, c findes et C således at $y(c) = d$ hvor d er de angivne værdier stillet i opgaven.
For $y(3) = 1$ fås:

$$\begin{aligned}
&1 = \sqrt{C(3^2+1)-1}\\
&\Rightarrow 1 = \sqrt{C10-1}\\
&\Rightarrow 1 = C10-1\\
&\Rightarrow 2 = C10\\
&\Rightarrow C = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

$$y(x) = \sqrt{\tfrac{1}{5}(x^2+1)-1}$$

Ligeledes for $y(3) = 3$:

$$\begin{aligned}
&3 = \sqrt{C(3^2+1)-1}\\
&\Rightarrow 3 = \sqrt{C10-1}\\
&\Rightarrow 9 = C10-1\\
&\Rightarrow 10 = C10\\
&\Rightarrow C = \frac{10}{10} = 1
\end{aligned}$$

$$y(x) = \sqrt{(x^2+1)-1}$$

Og til sidst samme fremgangsmåde for $y(3) = -7$

$$\begin{aligned}
&-7 = \sqrt{C(3^2+1)-1}\\
&\Rightarrow -7 = \sqrt{C10-1}\\
&\Rightarrow 49 = C10-1\\
&\Rightarrow 50 = C10\\
&\Rightarrow C = \frac{50}{10} = 5
\end{aligned}$$

$y(x) = \sqrt{5(x^2+1)-1}$

4.2 (i)

b)

Figur 2: Maple input og output