

30.4.17 Trapez- und Simpson-Regel

Berechnen Sie die Integrale

(a) $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$ und (b) $\int_0^\pi \sin(x) dx$

sowohl exakt, als auch näherungsweise mit der Trapez- und der Simpson-Regel.

(a) $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$

Exakt:

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx = [\ln(|x|)]_1^3 = \ln(3) - \ln(1) = \ln(3) \approx 1,099$$

Trapez-Regel:

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx \approx (3-1) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

Simpson-Regel:

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{1}{x} dx &\approx (3-1) \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1} + \frac{2}{3} \cdot f\left(\frac{1+3}{2}\right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{18} \right) = \frac{10}{9} \approx 1,111 \end{aligned}$$

(b) $\int_0^\pi \sin(x) dx$

Exakt:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin(x) dx &= [-\cos(x)]_0^\pi \\ &= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Trapez-Regel:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin(x) dx &\approx (\pi-0) \left(\frac{1}{2} \cdot \sin(0) + \frac{1}{2} \sin(\pi) \right) \\ &= \pi \cdot (0 + 0) = 0 \end{aligned}$$

Simpson-Regel:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin(x) dx &\approx (\pi-0) \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \sin(0) + \frac{2}{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6} \cdot \sin(\pi) \right) \\ &= \pi \left(0 + \frac{2}{3} \cdot 1 + 0 \right) \\ &= \frac{2}{3} \pi \approx 2,094 \end{aligned}$$