Fachhochschule
Dortmund

Angewandte Mathematik
– Fourier-Analysis –

Prof. Dr. Burkhard Lenze
Fachbereich Informatik

Vorlesung für den Studiengang
– Technische Informatik –

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Fourier-Reihen

1. $f \in L_2^{2\pi}$
   Mathematik: f ist 2π-periodisch und quadrat-integrierbar über $[0, 2\pi]$.
   Elektrotechnik: f ist ein 2π-periodisches Signal mit endlicher Energie.

2. $E_k(t) := e^{ikt} = \cos(kt) + i\sin(kt)$, $t \in I\!R,\ k \in Z\!\!Z$
   Mathematik: Komplexe trigonometrische Grundpolynome.
   Elektrotechnik: "Schöne" periodische Grundsignale jeweils mit "Frequenz" k .

3. $f, g \in L_2^{2\pi} \ : \ \langle f, g\rangle := \int\limits_o^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$
   Mathematik: Skalarprodukt zweier Funktionen.
   Elektrotechnik: "Simultan-Energie" zweier Signale.

4. $f \in L_2^{2\pi} \ : \ \|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int\limits_o^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$
   Mathematik: Norm der Funktion f .
   Elektrotechnik: "Energie" des Signals f .

5. $\langle E_r, E_s\rangle = 2\pi\delta_{rs}$, $r, s \in Z\!\!Z$ (mit δ_{rs} das Kronecker-Symbol)
   Mathematik: Orthogonalität der komplexen trigonometrischen Grundpolynome.
   Elektrotechnik: "Null-Simultan-Energie" zweier Grundsignale verschiedener Frequenz.

6. $f \in L_2^{2\pi} \ : \ c_k(f) := \frac{1}{2\pi}\langle f, E_k\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_o^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt$, $k \in Z\!\!Z$
   Mathematik: Fourier-Koeffizienten.
   Elektrotechnik: Oberwellen-Amplituden, Linienspektrum.

7. $f \in L_2^{2\pi} \ : \ F_n f(t) := \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(f)E_k(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt}$, $t \in I\!R,\ n \in I\!N_o$
   Mathematik: Fourier-Summen.
   Elektrotechnik: Tiefpaßfilter.

8. $f \in L_2^{2\pi} \;:\; \lim\limits_{n\to\infty} \|f - F_n f\|_2 = 0$
   Mathematik: Norm-Konvergenz von $F_n f$ gegen f für $n \to \infty$.
   Elektrotechnik: Keine Energie-Verluste für $n \to \infty$.

9. $f \in L_2^{2\pi} \;:\; \|f\|_2^2 = 2\pi \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2$
   Mathematik: Parsevalsche Gleichung.
   Elektrotechnik: Energie des Signals ist durch das Linienspektrum bestimmt.

10. $f \in L_1^{2\pi} \;:\; F_n f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_o^{2\pi} f(\tau) D_n(t-\tau) d\tau \;,\quad t \in I\!R,\; n \in I\!N_o$
    Mathematik: Fourier-Summen sind als Faltungsintegrale mit Dirichlet-Kernen darstellbar.
    Elektrotechnik: Dirichlet-Kerne sind Filterfunktionen (Gewichtsfunktionen) der Tiefpaßfilter.

11. $f \in L_1^{2\pi} \;:\; \lim\limits_{|k|\to\infty} c_k(f) = 0$
    Mathematik: Riemann-Lebesgue-Theorem.
    Elektrotechnik: Oberwellen-Amplituden werden klein für betragsmäßig hohe Frequenzen.

12. $f \in RSC_1^{2\pi} \;:\; Ff(t) := \lim\limits_{n\to\infty} F_n f(t) = f(t) \;,\quad t \in I\!R$
    Mathematik: Punktweise Konvergenz der Folge der Fourier-Summen, punktweise Konvergenz der Fourier-Reihe.
    Elektrotechnik: Für "alle praktikablen" Signale funktioniert die Rekonstruktion des Signals aus dem Linienspektrum, sogar punktweise und nicht nur im Energiemittel.
    $$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikt} \;,\quad t \in I\!R$$

13. $f \in C_m^{2\pi} \;:\; c_k(f) = O(|k|^{-m}) \qquad (k \to \pm\infty)$
    Mathematik: Asymptotik der Fourier-Koeffizienten.
    Elektrotechnik: Je "glatter" das Signal, um so weniger Oberwellen muß man zur näherungsweisen Rekonstruktion des Signals berücksichtigen.

Kapitel 2

Fourier-Integrale

1. $f \in L_2(I\!R)$
   Mathematik: f ist quadrat-integrierbar über $(-\infty, \infty)$.
   Elektrotechnik: f ist ein Signal mit endlicher Energie.

2. $E_\omega(t) := e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$, $t \in I\!R,\ \omega \in I\!R$
   Mathematik: Komplexe trigonometrische Grundfunktionen.
   Elektrotechnik: “Schöne” Grundsignale jeweils mit “Frequenz” ω .

3. $f, g \in L_2(I\!R)$: $\langle f, g\rangle := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt$
   Mathematik: Skalarprodukt zweier Funktionen.
   Elektrotechnik: “Simultan-Energie” zweier Signale.

4. $f \in L_2(I\!R)$: $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt}$
   Mathematik: Norm der Funktion f .
   Elektrotechnik: “Energie” des Signals f .

5. $\langle E_\mu, E_\nu\rangle = 2\pi\delta(\mu - \nu)$, $\mu, \nu \in I\!R$ (mit δ die Delta-Funktion)
   Mathematik: Distributionelle Orthogonalität der komplexen trigonometrischen Grundfunktionen.
   Elektrotechnik: “Null-Simultan-Energie” zweier Grundsignale verschiedener Frequenz.

6. $f \in L_2(I\!R)$: $\mathcal{F}f(\omega) := f^\wedge(\omega) := \langle f, E_\omega\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$, $\omega \in I\!R$
   Mathematik: Fourier-Transformierte.
   Elektrotechnik: Verallgemeinerte Oberwellen-Amplituden, kontinuierliches Spektrum.

7. $f \in L_2(I\!R)$: $\hat{F}_n f(t) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-n}^{n} f^\wedge(\omega)e^{i\omega t}d\omega$, $t \in I\!R,\ n \in I\!N_o$
   Mathematik: Fourier-Inversionsintegrale.
   Elektrotechnik: Tiefpaßfilter.

8. $f \in L_2(I\!R)$: $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - \hat{F}_n f\|_2 = 0$
   Mathematik: Norm-Konvergenz von $\hat{F}_n f$ gegen f für $n \to \infty$.
   Elektrotechnik: Keine Energie-Verluste für $n \to \infty$.

9. $f \in L_2(I\!R)$: $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|f^\wedge\|_2^2$
   Mathematik: Parsevalsche Gleichung.
   Elektrotechnik: Energie des Signals ist durch das kontinuierliche Spektrum bestimmt.

10. $f \in L_1(I\!R)$: $\hat{F}_n f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, 2n\, \operatorname{sinc}(n(t-\tau))d\tau$, $t \in I\!R,\ n \in I\!N_o$
    Mathematik: Fourier-Inversionsintegrale sind als Faltungsintegrale mit sinc-Kernen darstellbar.
    Elektrotechnik: sinc-Kerne sind Filterfunktionen (Gewichtsfunktionen) der Tiefpaßfilter.

11. $f \in L_1(I\!R)$: $\lim\limits_{|\omega|\to\infty} f^\wedge(\omega) = 0$
    Mathematik: Riemann-Lebesgue-Theorem.
    Elektrotechnik: Verallgemeinerte Oberwellen-Amplituden werden klein für betragsmäßig hohe Frequenzen.

12. $f \in RSC_1(I\!R) \cap L_1(I\!R)$: $\hat{F}f(t) := \lim\limits_{n\to\infty} \hat{F}_n f(t) = f(t)$, $t \in I\!R$
    Mathematik: Punktweise Konvergenz der Folge der Fourier-Inversionsintegrale, punktweise Gültigkeit der Fourier-Inversionsformel.
    Elektrotechnik: Für "alle praktikablen" Signale funktioniert die Rekonstruktion des Signals aus dem kontinuierlichen Spektrum.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(\omega)e^{i\omega t}d\omega \ , \quad t \in I\!R$$

13. $f \in W_{m,1}(I\!R)$: $f^\wedge(\omega) = o(|\omega|^{-m}) \qquad (\omega \to \pm\infty)$
    Mathematik: Asymptotik der Fourier-Transformierten.
    Elektrotechnik: Je "glatter" das Signal, um so weniger verallgemeinerte Oberwellen muß man zur näherungsweisen Rekonstruktion des Signals berücksichtigen.

14. $W > 0$, $f \in L_1(I\!R) \cap C(I\!R)$ mit $f^\wedge(\omega) = 0$ für $|\omega| > W$:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{W}\right) \operatorname{sinc}(Wt - k\pi) \ , \quad t \in I\!R$$

    Mathematik: Whittaker-Shannon-Kotelnikov-Abtasttheorem.
    Elektrotechnik: Diskretes Sampling eines bandbegrenzten stetigen Signals endlicher Energie mit hinreichend hoher Abtastrate genügt zum Erfassen und Rekonstruieren der gesamten analogen Information.

Kapitel 3

Laplace-Integrale

1. $f \in LE_\alpha(\mathbb{R}_+)$
   Mathematik: f ist kompakt-integrierbar über $[0, \infty)$ und vom Exponentialtyp.
   Elektrotechnik: f ist ein kausales Exponentialtyp-Signal.

2. $E_s(t) := e^{ist} = e^{-(\operatorname{Im} s)t}(\cos((\operatorname{Re} s)t) + i \sin((\operatorname{Re} s)t))$, $t \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{C}$
   Mathematik: Produkt komplexer trigonometrischer Grundfunktionen mit Exponentialfunktion.
   Elektrotechnik: "Schöne" Grundsignale jeweils mit "Frequenz" $\operatorname{Re} s$ und Exponentialanteil mit Dämpfung $\operatorname{Im} s$.

3. $f \in LE_\alpha(\mathbb{R}_+)$: $\mathcal{L}f(s) := f^\sim(s) := \int\limits_0^\infty f(t) e^{-st} dt$, $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > \alpha$
   Mathematik: Laplace-Transformierte.
   Elektrotechnik: Verallgemeinerte Oberwellen-Amplituden eines kausalen Signals vom Exponentialtyp.

4. $f \in LE_\alpha(\mathbb{R}_+)$ mit $f(t) := 0$ für $t < 0$:

$$f^\sim(s) = \left(f e^{-(\operatorname{Re} s)\cdot}\right)^\wedge (\operatorname{Im} s) , \quad s \in \mathbb{C} , \ \operatorname{Re} s > \alpha$$

   Mathematik: Fourier- und Laplace-Transformierte hängen eng zusammen.
   Elektrotechnik: Laplace-Transformation vergrößert die Menge transformierbarer kausaler Signale ("gedämpfte Fourier-Transformation").

5. $\mathbb{C}_\alpha := \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \alpha\}$:

$$\begin{array}{rcll} 1^\sim(s) & = & \frac{1}{s} , & s \in \mathbb{C}_o , \\ \exp^\sim(s) & = & \frac{1}{s-1} , & s \in \mathbb{C}_1 , \\ \cos^\sim(s) & = & \frac{s}{s^2+1} , & s \in \mathbb{C}_o , \\ \sin^\sim(s) & = & \frac{1}{s^2+1} , & s \in \mathbb{C}_o , \\ \left((\cdot)^n e^{w\cdot}\right)^\sim(s) & = & \frac{n!}{(s-w)^{n+1}} , & s \in \mathbb{C}_{\operatorname{Re} w} . \end{array}$$

6. $f, f', \ldots, f^{(n)} \in LE_\alpha(\mathbb{R}_+) \cap C(\mathbb{R}_+)$:

$$(f^{(n)})^\sim(s) = s^n f^\sim(s) - \sum_{k=o}^{n-1} f^{(n-1-k)}(0) s^k \ , \quad s \in \mathbb{C} \ , \ \ \mathrm{Re}\, s > \alpha$$

Mathematik und Elektrotechnik: Anwendung von (5) und (6) zur Lösung linearer Differentialgleichungsprobleme.

LITERATURVERZEICHNIS

1. S. BOCHNER, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1932.
2. P. L. BUTZER UND R.J. NESSEL, Fourier Analysis and Approximation, One-Dimensional Theory, Birkhäuser Verlag, Basel–Stuttgart, 1971.
3. L. CARLESON, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Math. 116, 1966, 135–157.
4. G. DOETSCH, Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Birkhäuser Verlag, Basel–Stuttgart, 1970.
5. G. DOETSCH, Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation, R. Oldenbourg Verlag, München–Wien, 1981, vierte Auflage.
6. W. F. DONOGHUE, Distributions and Fourier Transforms, Academic Press, New York–London, 1969.
7. O. FÖLLINGER, Regelungstechnik, Elitera-Verlag, Berlin, 1978, zweite Auflage.
8. O. FÖLLINGER, Laplace- und Fourier-Transformation, Hüthig-Verlag, Heidelberg, 1986, vierte Auflage.
9. A. KOLMOGOROFF, Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier, Fund. Math. 7, 1925, 24–29.
10. B. LENZE, Einführung in die Fourier-Analysis, Logos Verlag, Berlin, 2000 (2-te Auflage).
11. M. J. LIGHTHILL, Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1958.
12. A. V. OPPENHEIM UND A. S. WILLSKY, Signale und Systeme, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, 1989.
13. A. PAPOULIS, The Fourier Integral and Its Applications, McGraw-Hill, New York, 1962.
14. W. SCHEMPP UND B. DRESELER, Einführung in die harmonische Analyse, B.G. Teubner, Stuttgart, 1980.
15. E. M. STEIN UND G. WEISS, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press, Princeton, 1971.
16. D. THOMSEN, Digitale Audiotechnik, Franzis-Verlag, München, 1983.
17. E. C. TITCHMARSH, Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Clarendon Press, Oxford, 1975, zweite Auflage.
18. A. TORCHINSKY, Real-Variable Methods in Harmonic Analysis, Academic Press, New York, 1986.
19. H. UNBEHAUEN, Regelungstechnik I, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig–Wiesbaden, 1989, sechste Auflage.
20. H. WEBER, Laplace-Transformation für Ingenieure der Elektrotechnik, B.G. Teubner, Stuttgart, 1984.
21. D. V. WIDDER, The Laplace Transform, Princeton University Press, Princeton, 1972, achte Auflage.
22. N. WIENER, The Fourier Integral and Certain of its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1935.
23. A. ZYGMUND, Trigonometrical Series, Monografie Matematyczne, Warschau, 1935.