KLAUSURRELEVANT

<u>Aufgabe</u> Überführen Sie das Polynom p,

$$p(x) := 5x^2 - 4x + 2,$$

von der Monom-Darstellung in die Bézier-Darstellung.

<u>Lösung (Koeffizientenvergleich):</u>

Ansatz: $p(x) = \beta_0\, b_{0,2}(x) + \beta_1\, b_{1,2}(x) + \beta_2\, b_{2,2}(x)$

$$\beta_0 (1 - 2x + x^2) + \beta_1 (2x - 2x^2) + \beta_2 x^2$$

$$= 5x^2 - 4x + 2$$

<u>Koeffizientenvergleich liefert:</u>

$$x^2(\beta_0 - 2\beta_1 + \beta_2) + x(-2\beta_0 + 2\beta_1) + \beta_0$$

$$= 5x^2 - 4x + 2$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{lr} \beta_0 - 2\beta_1 + \beta_2 & = 5 \\ -2\beta_0 + 2\beta_1 & = -4 \\ \beta_0 & = 2 \end{array}}$$

lineares Gls. in Dreiecksform!

Aufrollen von unten:

$$\underline{\underline{\beta_0 = 2}}$$

$$-2\cdot 2 + 2\beta_1 = -4 \Longrightarrow \underline{\underline{\beta_1 = 0}}$$

$$2 - 2\cdot 0 + \beta_2 = 5 \Longrightarrow \underline{\underline{\beta_2 = 3}}$$

Also: $\underline{\underline{p(x) = 2\, b_{0,2}(x) + 0\cdot b_{1,2}(x) + 3\, b_{2,2}(x)}}$

Werten Sie nun die Polynome an der Stelle $x := -1$ sowohl mit dem Horner- als auch mit dem de Casteljau-Schema aus.

Wie lautet also $p(-1)$ für unser obiges Polynom p,

$$p(x) = \underline{5}\,x^2 \underline{-4}\,x + \underline{2} = \underline{3}\, b_{2,2}(x) \underline{+0}\, b_{1,2}(x) + \underline{2}\, b_{0,2}(x) \;?$$

Horner-Schema

	5	−4	2
$x=-1$	0	−5	9
	5	−9	$\underline{\underline{11}}$

de Casteljau-Schema

$x = -1, \quad 1-x = 2$

$$\begin{tikzcd}
2 \arrow[dr, dash, "2"] & & \\
& 4 \arrow[dr, dash] & \\
0 \arrow[ur, dash, "-1"] \arrow[dr, dash] & & 2\cdot 4 + (-1)\cdot(-3) = \underline{\underline{11}} \\
& -3 \arrow[ur, dash] & \\
3 \arrow[ur, dash] & &
\end{tikzcd}$$

Generator:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[dr, dash, "1-x"] & \\
& \cdot \\
\cdot \arrow[ur, dash, "x"'] &
\end{tikzcd}$$

$1-x = 2$

$x = -1$

Fortsetzung der Aufgabe für eine weitere Auswertung

Wie lautet $p(3)$ für unser obiges Polynom p,

$$p(x) = \underline{5}\,x^2 \underline{-4}\,x + \underline{2} = \underline{3}\,b_{2,2}(x) + \underline{0}\,b_{1,2}(x) + \underline{2}\,b_{0,2}(x) \;?$$

(1) Horner für Monom-Darstellung:

	5	−4	2
$x = 3$	0	15	33
	5	11	$\underline{\underline{35 = p(3)}}$

(2) de Casteljau für Bézier-Darstellung

$$
\begin{array}{lcl}
2 & & \\
 & \overset{-2}{\underset{3}{\searrow\!\!\nearrow}} \; 2\cdot(-2) + 0\cdot 3 = -4 & \\
0 & & \overset{-2}{\underset{3}{\searrow\!\!\nearrow}} \; (-4)\cdot(-2) + 9\cdot 3 = \underline{\underline{35 = p(3)}} \\
 & \overset{-2}{\underset{3}{\searrow\!\!\nearrow}} \; 0\cdot(-2) + 3\cdot 3 = 9 & \\
3 & &
\end{array}
$$

Generator: $\overset{1-x}{\underset{x}{\searrow\!\!\nearrow}}$

$1 - x = -2$

$x = 3$

Aufgabe

Gegeben sei das Polynom p,

$$p(x) := 7x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 24x - 5.$$

Überführen Sie p in Bézier-Darstellung.

Bernstein-Grundpolynome:

$$b_{0,4}(x) = 1 \cdot x^0 \cdot (1-x)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

$$b_{1,4}(x) = 4 \cdot x^1 \cdot (1-x)^3 = -4x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 4x$$

$$b_{2,4}(x) = 6 \cdot x^2 \cdot (1-x)^2 = 6x^4 - 12x^3 + 6x^2$$

$$b_{3,4}(x) = 4 \cdot x^3 \cdot (1-x)^1 = -4x^4 + 4x^3$$

$$b_{4,4}(x) = 1 \cdot x^4 \cdot (1-x)^0 = x^4$$

Ansatz:

$$\beta_4 x^4 + \beta_3\left(-4x^4+4x^3\right) + \beta_2\left(6x^4-12x^3+6x^2\right)$$
$$+\beta_1\left(-4x^4+12x^3-12x^2+4x\right)$$
$$+\beta_0\left(x^4-4x^3+6x^2-4\cdot x+1\right) =$$
$$7x^4-8x^3-18x^2+24x-5$$

Koeffizienten-Vergleich:

$$\begin{aligned}
&x^4\left(\underline{\beta_4-4\beta_3+6\beta_2-4\beta_1+\beta_0}\right)+\\
&x^3\left(\underline{4\beta_3-12\beta_2+12\beta_1-4\beta_0}\right)+\\
&x^2\left(\underline{6\beta_2-12\beta_1+6\beta_0}\right)+\\
&x\left(\underline{4\beta_1-4\beta_0}\right)+\\
&\underline{\beta_0}
\end{aligned}$$

$$= \underline{7}x^4\underline{-8}x^3\underline{-18}x^2\underline{+24}x\underline{-5}$$

$$\begin{aligned}
\beta_4-4\beta_3+6\beta_2-4\beta_1+\beta_0 &= 7\\
4\beta_3-12\beta_2+12\beta_1-4\beta_0 &= -8\\
6\beta_2-12\beta_1+6\beta_0 &= -18\\
4\beta_1-4\beta_0 &= 24\\
\beta_0 &= -5
\end{aligned}$$

Aufrollen von unten: $\underline{\underline{\beta_0 = -5}}$

$4\beta_1 + 20 = 24 \implies \underline{\underline{\beta_1 = 1}}$

$6\beta_2 - 12 - 30 = -18 \implies \underline{\underline{\beta_2 = 4}}$

$4\beta_3 - 48 + 12 + 20 = -8 \implies \underline{\underline{\beta_3 = 2}}$

$\beta_4 - 8 + 24 - 4 - 5 = 7 \implies \underline{\underline{\beta_4 = 0}}$

Also:

$$\underline{\underline{p(x) = 2\, b_{3,4}(x) + 4\, b_{2,4}(x) + b_{1,4}(x) - 5\, b_{0,4}(x)}}$$

Zusatzaufgabe Man berechne $p(-3) = ?$

de Casteljau-Schema $x = -3$, $1 - x = 4$

$$\begin{array}{lllll}
-5 & & & & \\
 & -20+(-3) = -23 & & & \\
1 & & -92+24 = -68 & & \\
 & 4+(-12) = -8 & & -272+186 = -86 & \\
4 & & -32-30 = -62 & & \\
 & 16+(-6) = 10 & & -248-48 = -296 & \\
2 & & 40-24 = 16 & & \\
 & 8+0 = 8 & & & \\
0 & & & & -344+888 = \underline{\underline{544}}
\end{array}$$

Horner - Schema

	7	-8	-18	24	-5
$x = -3$	0	-21	87	-207	549
	7	-29	69	-183	$\underline{\underline{544}}$