Einzelschritt-Verfahren Teil 1

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Führen Sie ausgehend von $\vec{x}^{(0)} := (0,0,0)^T$ drei Iterationsschritte mit dem Einzelschrittverfahren durch (zuvor Diagonale auf Eins normieren und das Zeilensummenkriterium prüfen) und versuchen Sie basierend auf den erhaltenen Iterationsvektoren die Lösung des Gleichungssystems zu erraten. Bestimmen Sie ferner den Konvergenzparameter P_1 und geben Sie die entsprechenden a-priori und a-posteriori-Fehlerabschätzungen an.

Normierung

$$\left| \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \right| \begin{matrix} :4 \\ :6 \\ :8 \end{matrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 0 \\ 1/6 & 1 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 3/2 \\ 5/4 \end{pmatrix} \right|$$

$\Rightarrow$ Das Zeilensummenkriterium $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < 1$ für $1 \leq i \leq n$ ist erfüllt, da

$|3/4|+|0| < 0$, $|1/6| + |1/3| < 1$ und $|1/4| + |0| < 1$

$\vec{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$

$x_1^{(k+1)} = -3/4\, x_2^{(k)} + 7/4$

$x_2^{(k+1)} = -1/6\, x_1^{(k+1)} - 1/3\, x_3^{(k)} + 3/2$

$x_3^{(k+1)} = -1/4\, x_1^{(k+1)} + 5/4$

Resultate für $k \in N$

$x_1^{(1)} = -3/4 \cdot 0 + 7/4 = 7/4$

$x_2^{(1)} = -1/6 \cdot 7/4 - 1/3 \cdot 0 + 3/2 = \frac{29}{24}$

$x_3^{(1)} = -1/4 \cdot 7/4 + 5/4 = \frac{13}{16}$

Einzelschritt-Verfahren Teil 2

$x_1^{(2)} = -3/4 \cdot 29/24 + 7/4 = 27/32$

$x_2^{(2)} = -1/6 \cdot 27/32 - 1/3 \cdot \frac{13}{16} + 3/2 = \frac{209}{192}$

$x_3^{(2)} = -1/4 \cdot 27/32 + 5/4 = 133/128$

$x_1^{(3)} = -3/4 \cdot 209/192 + 7/4 = 239/256$

$x_2^{(3)} = -1/6 \cdot 239/256 - 1/3 \cdot 133/128 + 3/2 = 511/512$

$x_3^{(3)} = -1/4 \cdot 239/256 + 5/4 = 1041/1024$

Vermutung für den Grenzwert der Iterationsvektoren

$\vec{x} = (1, 1, 1)^T$

Konvergenzparameter P

$$p := \max \left\{ \frac{\sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|} \;\middle|\; 1 \leq i \leq n \right\} < 1$$

$$p := \max \left\{ \frac{\frac{3}{4}}{1-0}, \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}, \frac{0}{1-\frac{1}{4}} \right\} = \max \left\{ \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, 0 \right\} = \frac{3}{4} < 1$$

A-Priori-Fehler-Abschätzung

$\|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty = \max\{|x_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$

$$\|\vec{x} - \vec{x}^{(k)}\|_\infty \leq \frac{p^k}{1-p} \|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\|_\infty$$

$$\|\vec{x} - \vec{x}^{(k)}\|_\infty \leq \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^k}{1-\frac{3}{4}} \|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{7}{4} \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^k}{1/4} = 7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

$$\|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\|_\infty = \max\{|7/4 - 0|, |29/24 - 0|, |13/16 - 0|\}$$
$$= 7/4$$

A-Posteriori-Fehlerabschätzung

$$\|\vec{x} - \vec{x}^{(k)}\|_\infty \leq \frac{p}{1-p} \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}\|_\infty$$

$$\|\vec{x} - \vec{x}^{(k)}\|_\infty \leq \frac{3/4}{1-3/4} \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}\|_\infty$$

$$= 3\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}\|_\infty$$