Transfinite Interpolation über Rechtecken

Gegeben seien 4 beliebige Punkte $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ und die vier durch sie definierbaren Kurven $c_1, c_2, c_3, c_4 : [0,1] \to \mathbb{R}^3$

$c_1(t) := (1-t)\vec{a} + t\cdot\vec{b}$ $\quad c_2(t) := (1-t)\vec{a} + t\vec{c}$

$c_3(t) := (1-t)\vec{c} + t\cdot\vec{d}$ $\quad c_4(t) := (1-t)\vec{b} + t\vec{d}$

für $t \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass die zugehörige Coons-Interpolationsfunktion $CIR: [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ existiert und in diesem Fall genau mit der ~~beliebigen~~ bilinearen Interpolations-Funktion $BIR: [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der gegebenen Punkte übereinstimmt

$CIR: [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$

$(u,v)^T \mapsto (1-v)c_1(u) + v\cdot c_3(u) + (1-u)c_2(v) + u\,c_4(v)$
$- (1-u)(1-v)c_1(0) - u(1-v)c_1(1) - (1-u)\cdot v\,c_3(0)$
$- uv\,c_3(1)$

$CIR: [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$

$(1-v)((1-u)\vec{a} + u\vec{b}) + v\cdot((1-u)\vec{c} + u\cdot\vec{d})$
$+ (1-u)((1-v)\vec{a} + v\vec{c}) + u\cdot((1-v)\vec{b} + v\vec{d})$
$- (1-u)(1-v)\cdot\vec{a} - u(1-v)(\cancel{(1-1)\vec{a}} + \vec{b})$
$- (1-u)\cdot v\cdot\vec{c} - u\cdot v\cdot(\cancel{(1-1)\vec{c}} + \vec{d})$
$= (1-v)(\vec{a} - u\vec{a} + u\vec{b}) + v\cdot(\vec{c} - u\vec{c} + u\vec{d})$
$+ (1-u)(\vec{a} - v\vec{a} + v\vec{c}) + u\cdot(\vec{b} - v\vec{b} + v\vec{d})$
$- (1-u)(\vec{a} - v\vec{a}) - (u-uv)\vec{b} - (v-uv)\vec{c} - uv\vec{d}$
$= \vec{a} - u\vec{a} + u\vec{b} - v\vec{a} + uv\vec{a} - uv\vec{b} + v\vec{c} - uv\vec{c} + uv\vec{d}$
$+ \cancel{\vec{a}} - \cancel{v\vec{a}} + \cancel{v\vec{c}} - \cancel{u\vec{a}} + \cancel{uv\vec{a}} - \cancel{uv\vec{c}} + \cancel{u\vec{b}} - \cancel{uv\vec{b}} + \cancel{uv\vec{d}}$
$- (\cancel{\vec{a}} - \cancel{v\vec{a}} - \cancel{u\vec{a}} + \cancel{uv\vec{a}}) - (\cancel{u\vec{b}} - \cancel{uv\vec{b}}) - (\cancel{v\vec{c}} - \cancel{uv\vec{c}}) - \cancel{uv\vec{d}}$
$= \vec{a} - u\vec{a} + u\vec{b} + uv\vec{a} - uv\vec{b} - uv\vec{c} + uv\vec{d} - v\vec{a} + v\vec{c}$

Transfinite Interpolation über Rechtecken 2

Bilineare Interpolation BIR

$BIR: [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3,$

$$(u,v)^T \to (1-u)(1-v)\vec{a} + u(1-v)\vec{b} + (1-u)v\vec{c} + uv\vec{d}$$

$$= (1-u)(\vec{a} - v\vec{a}) + (u-uv)\vec{b} + 1v\vec{c} - uv\vec{c} + uv\vec{d}$$

$$= \vec{a} - v\vec{a} - u\vec{a} + uv\vec{a} + u\vec{b} - uv\vec{b} + v\vec{c} - uv\vec{c} + uv\vec{d}$$

$$= \vec{a} - u\vec{a} + u\vec{b} + uv\vec{a} - uv\vec{b} - uv\vec{c} + uv\vec{d} - v\vec{a} + v\vec{c}$$

$\Rightarrow$ CIR und BIR stimmen überein.

Schnittpunktbedingungen

$$c_1(0) = c_2(0) \Rightarrow (1-0)\vec{a} + 0\cdot\vec{b} = (1-0)\vec{a} + 0\cdot\vec{c}$$
$$\vec{a} = \vec{a}$$

$$c_2(1) = c_3(0) \Rightarrow (1-1)\vec{a} + 1\cdot\vec{c} = (1-0)\vec{c} + 0\cdot\vec{d}$$
$$\vec{c} = \vec{c}$$

$$c_3(1) = c_4(1) \Rightarrow (1-1)\vec{c} + 1\cdot\vec{d} = (1-1)\vec{b} + 1\cdot\vec{d}$$
$$\vec{d} = \vec{d}$$

$$c_4(0) = c_1(1) \Rightarrow (1-0)\vec{b} + 0\cdot\vec{d} = (1-1)\vec{a} + 1\cdot\vec{b}$$
$$\vec{b} = \vec{b}$$