

1.5.17 Polynomiale Interpolation nach Newton Teil 1

Gegeben seien vier zu interpolierende Punkte $(x_0, y_0)^T := (-4, 0)^T$
 $(x_1, y_1)^T := (-1, 3)^T$, $(x_2, y_2)^T := (0, 0)^T$, $(x_3, y_3)^T := (3, -2)^T$.
Bestimmen Sie das Interpolationspolynom vom Höchstgrad 3 durch die gegebenen Punkte mit Hilfe der Newton-Strategie. Werten Sie ferner P an der Stelle $x := 4$ mit dem Newton-Horner-Schema aus.

Newton-Strategie

$$w_0(x) := 1$$

$$w_1(x) := (x - x_0) = (x - (-4)) = x + 4$$

$$w_2(x) := (x - x_0)(x - x_1) = (x + 4)(x + 1)$$

$$w_3(x) := (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = (x + 4)(x + 1)(x - 0)$$

$$p(x) = d_0 w_0(x) + d_1 w_1(x) + d_2 w_2(x) + d_3 w_3(x)$$

$$d_0 \cdot 1 = 0$$

$$d_0 \cdot 1 + d_1 \cdot 3 = 3$$

$$d_0 \cdot 1 + d_1 \cdot 4 + d_2 \cdot 4 = 0$$

$$d_0 \cdot 1 + d_1 \cdot 7 + d_2 \cdot 28 + d_3 \cdot 84 = -21$$

Auflösen von oben

$$d_0 = 0$$

$$d_0 + 3d_1 = 3 \Rightarrow d_1 = 1$$

$$d_0 + 4d_1 + 4d_2 = 0$$

$$4 + 4d_2 = 0 \quad | -4 \quad | :4$$

$$d_2 = -1$$

$$d_0 + 7d_1 + 28d_2 + 84d_3 = -21$$

$$7 + 28 \cdot (-1) + 84d_3 = -21 \quad | -7 \quad | +28 \quad | :84$$

$$d_3 = 0$$

$$\Rightarrow p(x) = \overset{1}{(x+4)} - \overset{1}{(x+4)(x+1)} = (x+4) - (x^2 + 4x + x + 4) \\ = (x+4) - (x^2 + 5x + 4) = -x^2 - 4x$$

Direkt:

$$p(4) = -32$$

1.5.17 Polynomiale Interpolation nach Newton Teil 2

Newton-Horner-Schema

Spaltenweise addieren und von Spalte zu Spalte jeweils mit $x - x_i$ für $i = n-1, n-2, \dots, 0$ multiplizieren

	0	-1	1	0
$x=4$	0	$0 \cdot (4-0)$	$-1 \cdot (4-(-1))$	$-4 \cdot (4-(-4))$
	0	-1	-4	-32

$$\Rightarrow p(4) = -32$$

Dividierte-Differenzen-Schema

-4	0	$\frac{3-0}{-1-(-4)} = 1$		
-1	3	$\frac{0-3}{0-(-1)} = -3$	$\frac{-3-1}{0-(-4)} = -1$	
0	0	$\frac{-21-0}{3-0} = -7$	$\frac{-7-(-3)}{3-(-1)} = -1$	$\frac{-4-(-1)}{3-(-4)} = \frac{0}{7} = 0$
3	-21			

$$\Rightarrow d_0 = 0, d_1 = 1, d_2 = -1, d_3 = 0$$