

数学分析笔记

关茂松

目录

1 实数与数列极限	4
1.1 实数的基本性质与常用不等式	4
1.2 数列与数列极限的概念	4
1.3 收敛数列的性质	4
1.4 发散数列与子列的概念	4
1.5 确界原理	4
1.6 数列收敛的判别法	4
1.7 Stolz 公式	6
2 函数与函数极限	6
2.1 映射与函数的概念	6
2.2 $x \rightarrow \infty$ 函数极限的概念	6
2.3 $x \rightarrow x_0$ 函数极限的概念	6
2.4 函数极限的性质	6
2.5 函数极限存在的判别法	6
3 函数的连续性	7
3.1 连续函数的概念	7
3.2 函数间断的概念	7
3.3 连续函数的局部性质与初等函数的连续性	7
3.4 连续函数的基本性质	7
4 微分与导数	7
4.1 微分与导数的概念	7
4.2 求导方法与导数公式	7
4.3 微分的计算与应用	7

4.4 高阶导数与高阶微分	8
4.5 参数方程所表示的函数的导数	8
5 导数的应用	8
5.1 Fermat 定理和 Darboux 定理	8
5.2 中值定理	8
5.3 不定式极限	8
5.4 Taylor 公式	9
5.5 函数的单调性与凸性	9
5.6 函数的极值与最值	10
5.7 函数作图	10
6 实数集的稠密性与完备性	10
6.1 实数集的稠密性	10
6.2 实数集的完备性	10
6.3 上极限和下极限简介	10
7 不定积分	10
7.1 原函数与不定积分的概念	10
7.2 不定积分的计算	10
7.3 有理函数的不定积分	11
8 定积分	11
8.1 定积分的概念与性质	11
8.2 微积分基本定理	11
8.3 定积分的计算	11
8.4 定积分存在的条件	11
8.5 积分中值定理	13
8.6 关于定积分的一些补充	14
9 定积分的应用与反常积分	14
9.1 定积分应用的两种常用格式	14
9.2 平面图形的面积	14
9.3 平行截面面积求体积	15
9.4 平面弧长的概念	15
9.5 旋转曲面的面积	15

9.6 定积分在某些物理问题中的应用	15
9.7 反常积分的概念与基本性质	16
9.8 反常积分的敛散性	16
10 数项级数	18
10.1 数项级数的概念与性质	18
10.2 正项级数	18
10.3 一般项级数	21
10.4 绝对收敛与条件收敛级数的性质	21
11 函数项级数	21
11.1 函数列一致收敛的概念与判定	21
11.2 一致收敛函数列的性质	22
11.3 函数项级数一致收敛的概念及判定	22
11.4 和函数的分析性质	23
11.5 处处不可微的连续函数	24
12 幂级数与 Fourier 级数	24
12.1 幂级数的收敛域与和函数	24
12.2 函数的幂级数展开	26
12.3 三角级数与 Fourier 级数	27
12.4 Fourier 级数的收敛性	27
13 多元函数及其微分学	27
13.1 平面中的点集	27
13.2 \mathbb{R}^2 完备性	27
13.3 二元函数的极限和连续性	28
13.4 多元函数的偏导数和全微分	28
13.5 复合函数的微分法	28
14 多元函数微分法的应用	29
14.1 方向导数	29
14.2 多元函数 Taylor 公式	29
14.3 多元函数的极值	29
14.4 隐函数	30
14.5 隐函数组	31

15 含参变量积分	33
15.1 含参变量正常积分及其分析性质	33
15.2 含参变量反常积分及一致收敛判别法	33
15.3 含参变量反常积分的分析性质	35

1 实数与数列极限

1.1 实数的基本性质与常用不等式

无.

1.2 数列与数列极限的概念

无.

1.3 收敛数列的性质

无.

1.4 发散数列与子列的概念

无.

1.5 确界原理

无.

1.6 数列收敛的判别法

定理 1.6.1 (压缩映像原理).

- 对于任一数列 $\{x_n\}$ 而言, 若存在常数 r , 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$, 恒有

$$|x_{n+1} - x_n| \leq r|x_n - x_{n-1}|, 0 < r < 1.$$

则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

2. 特别, 若数列 $\{x_n\}$ 利用递推公式给出: $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$), 其中 f 为某一可微函数, 且 $\exists r \in \mathbb{R}$, 使得

$$|f'(x)| \leq r < 1,$$

则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

注. 压缩映像条件是充分的而不是必要的.

定理 1.6.2 (不动点方法). 已知数列 $\{x_n\}$ 在区间 I 上由 $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) 给出, f 是 I 上连续增函数, 若 f 在 I 上有不动点 x^* (即 $x^* = f(x^*)$) 满足

$$(x_1 - f(x_1))(x_1 - x^*) \geq 0, \quad (1)$$

则此时数列 $\{x_n\}$ 必收敛, 且极限 A 满足 $A = f(A)$.

若¹式” \geq ”改为” $>$ ”对任意 $x_1 \in I$ 成立, 则意味着 x^* 是唯一不动点, 并且 $A = x^*$.

特别, 若 f 可导, 且 $0 < f'(x) < 1$ ($x \in I$), 则 f 严增, 且不等式¹(\geq ”可改为” $>$ ”)会自动满足 ($\forall x_1 \in I$). 这时 f 的不动点存在且唯一, 从而 $A = x^*$.

设 $z = f(x, y)$ 为二元函数, 我们约定, 将 $z = f(x, x)$ 的不动点称为 f 的不动点(或二元不动点).

定理 1.6.3 (不动点方法的推广). 已知 $z = f(x, y)$ 为 $x > 0, y > 0$ 上定义的正连续函数, z 分别对 x 和 y 单调递增, 假若:

1. 存在点 b 是 $f(x, y)$ 的不动点;
2. 当且仅当 $x > b$ 时有 $x > f(x, x)$.

令 $a_1 = f(a, a), a_2 = f(a_1, a)$ ($a > 0$),

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}) \quad , n = 3, 4, \dots,$$

则 $\{a_n\}$ 单调有界, 有极限, 且其极限 A 是 f 的不动点.

注.

1. 当 $a_1 \geq a$ 时, $\{a_n\}$ 单调递增有上界 b , 当 $a_1 < a$ 时, $\{a_n\}$ 单调递减有下界 b ,
2. 按 b 的条件可知 b 是 f 的最大不动点, $x > b$ 时不可能再有不动点,
3. 当 $a_1 < a$ 时, 极限 $A \geq b$ 是不动点, 表明此时 $A = b$.

1.7 Stolz 公式

定理 1.7.1 ($\frac{\infty}{\infty}$ 型 Stolz 公式). 设 $\{x_n\}$ 严格递增 (即 $\forall n \in \mathbb{N}$ 有 $x_n < x_{n+1}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$).

1. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a$ (有限数), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = a$;
2. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = +\infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = +\infty$;
3. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = -\infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = -\infty$;

2 函数与函数极限

2.1 映射与函数的概念

无.

2.2 $x \rightarrow \infty$ 函数极限的概念

无.

2.3 $x \rightarrow x_0$ 函数极限的概念

无.

2.4 函数极限的性质

无.

2.5 函数极限存在的判别法

定理 2.5.1 (归结原则). 设函数 $f(x)$ 在 $\dot{U}(x_0; \delta_0)$ 内有定义, $A \in \mathbb{R}$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充要条件是: 对 $\dot{U}(x_0; \delta_0)$ 内任何以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$, 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

定理 2.5.2. 设函数 $f(x)$ 在 $U(\infty) = \{x | |x| > M \geq 0\}$ 内有定义. 如果在 $\dot{U}(x_0; \delta_0)$ 内有定义, $A \in \mathbb{R}$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的充要条件是: 对 $U(\infty)$ 内任何以 ∞ 为非正常极限的数列 $\{x_n\}$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

3 函数的连续性

3.1 连续函数的概念

命题 3.1.1. 设 $f(x)$ 在有限开区间 (a, b) 内连续, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内一致连续的充要条件是极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在(有限).

命题 3.1.2. 若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty]$ 上连续, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ (有限), 则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 一致连续.

命题 3.1.3. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续, $\varphi(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\varphi(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

3.2 函数间断的概念

无.

3.3 连续函数的局部性质与初等函数的连续性

无.

3.4 连续函数的基本性质

无.

4 微分与导数

4.1 微分与导数的概念

无.

4.2 求导方法与导数公式

无.

4.3 微分的计算与应用

无.

4.4 高阶导数与高阶微分

无.

4.5 参数方程所表示的函数的导数

定义 4.5.1. 设函数 $\varphi(t), \psi(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的导数, 且

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0,$$

这时称方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

给出的曲线为光滑曲线.

5 导数的应用

5.1 Fermat 定理和 Darboux 定理

定理 5.1.1 (Fermat 定理). 若 $f(X)$ 在点 x_0 可导, 且 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0) = 0$.

定理 5.1.2 (Darboux 导函数介值定理). 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'_+(a) \neq f'_-(b)$, η 介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \eta$.

5.2 中值定理

命题 5.2.1 (推广的柯西中值定理). 设 (a, b) 为有限或无穷区间, $f(x)$ 在 (a, b) 内可微, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A$ (有限或 $\pm\infty$), 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

证明. 若 $f(x) \equiv A$, 则显然; 否则先使用连续函数的介值性, 然后再使用罗尔中值定理. \square

命题 5.2.2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 (a, b) 内可微, 若存在极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = l$, 则右导数 $f'_+(a)$ 存在且等于 l .

5.3 不定式极限

无.

5.4 Taylor 公式

无.

5.5 函数的单调性与凸性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, $f(x)$ 在 I 上称为凸函数, 当且仅当 $\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in (0, 1)$, 有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2). \quad (2)$$

若式(2)中的” \leq ” 改成” $<$ ”, 则是严格凸函数的定义; 若” \leq ” 改成” \geq ” 或” $>$ ”, 则分别是凹函数与严格凹函数的定义.

定理 5.5.1. 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 则以下条件等价 (其中各不等式要求 $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$ 保持成立):

1. $f(x)$ 在 I 上是凸函数;
2. $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1};$
3. $\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2};$
4. $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$
5. 曲线 $y = f(x)$ 上三点 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)), C(x_3, f(x_3))$ 所围成的有向图面积

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} \geq 0$$

定理 5.5.2. 若 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数, 则对 I 上任一内点 x , 单侧导数 $f'_+(x), f'_-(x)$ 皆存在, 皆为增函数, 且

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \quad (\forall x \in I^\circ).$$

这里 I° 表示 I 的全体内点组成之集合 (若 f 为严格凸的, 则 $f'_+(x)$ 与 $f'_-(x)$ 为严格递增的).

推论 5.5.1. 若 $f(x)$ 在区间 I 上为凸的, 则 f 在任一内点 $x \in I^\circ$ 上连续.

定理 5.5.3. 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 则 $f(x)$ 为凸函数的充要条件是: $\forall x_0 \in I^\circ, \exists$ 实数 α , 使得 $\forall x \in I$ 有 $f(x) \geq \alpha(x - x_0) + f(x_0)$.

定理 5.5.4. 设 $f(x)$ 在区间 I 上有导数, 则 $f(x)$ 在 I 上为凸函数的充要条件是 $f'(x)$ 单调递增 ($x \in I$).

推论 5.5.2. 设 $f(x)$ 在区间 I 上有二阶导数, 则 $f(x)$ 在区间 I 上为凸函数的充要条件是 $f''(x) \geq 0$.

5.6 函数的极值与最值

无.

5.7 函数作图

定理 5.7.1. 直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线等价于

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx].$$

6 实数集的稠密性与完备性

6.1 实数集的稠密性

无.

6.2 实数集的完备性

无.

6.3 上极限和下极限简介

无.

7 不定积分

7.1 原函数与不定积分的概念

无.

7.2 不定积分的计算

无.

7.3 有理函数的不定积分

无.

8 定积分

8.1 定积分的概念与性质

定理 8.1.1 (可积的必要条件). 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

8.2 微积分基本定理

定理 8.2.1. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则变上限的定积分所定义的函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

在 $[a, b]$ 上连续.

定理 8.2.2 (原函数存在定理). 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则变上限的定积分所定义的函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的原函数.

定理 8.2.3 (微积分基本定理). 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的任一原函数, 则

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

8.3 定积分的计算

无.

8.4 定积分存在的条件

定义 8.4.1 (达布和). 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, $T : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ 为 $[a, b]$ 上的任一分割, 记 $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 及每个 Δ_i 上都存在上、下确界. 记

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \quad m = \inf_{x \in [a, b]} f(x),$$

$$M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

作和

$$S(T) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad s(T) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i.$$

分别称为 f 关于分割 T 的上和与下和 (或称为达布上和与达布下和, 统称为达布和).

下面的定理8.4.1到定理8.4.4都是对 $[a, b]$ 上的有界函数 $f(x)$ 来说的.

定理 8.4.1. 对 $[a, b]$ 的同一分割 T , 相对于任何点集 $\{\xi_i\}$ 而言, 上和是所有积分和的上确界, 下和是所有积分和的下确界, 即

$$S(T) = \sup_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad s(T) = \inf_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

定理 8.4.2. 设 T' 为分割 T 添加 p 个新分点所得到的分割, 则

$$s(T) \leq s(T') \leq s(T) + p(M - m) \|T\|,$$

$$S(T) \geq S(T') \geq S(T) - p(M - m) \|T\|,$$

即分点增加后, 下和递增, 上和递减.

定理 8.4.3. 若 T' 与 T'' 为 $[a, b]$ 的任意两个分割, T 为 T' 与 T'' 的所有分点合并后得到的分割 (注意: 重复的分点只取一次), 记为 $T = T' + T''$, 则

$$S(T) \leq S(T'), \quad s(T) \geq s(T'),$$

$$S(T) \leq S(T''), \quad s(T) \geq s(T'').$$

定理 8.4.4. 对 $[a, b]$ 的任意两个分割 T' 与 T'' 总有

$$s(T') \leq S(T''), \quad s(T'') \leq S(T'),$$

即下和不超过上和.

因此, 对所有分割来说, 所有的下和有上界, 所有的上和有下界, 从而分别有上、下确界, 记作 s 与 S , 即

$$s = \sup_T \{s(T)\}, \quad S = \inf_T \{S(T)\}.$$

通常称 S 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的上积分, s 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的下积分.

定理 8.4.5 (达布定理).

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} s(T) = s, \quad \lim_{\|T\| \rightarrow 0} S(T) = S$$

定理 8.4.6 (可积准则 I). 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的充分必要条件是: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的上积分等于下积分, 即 $S = s$.

定理 8.4.7 (可积准则 II). 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0$, 总存在一个分割 T , 使得

$$S(T) - s(T) < \epsilon$$

或

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \epsilon,$$

其中 $\omega_i(f) = M_i - m_i$ 称为 $f(x)$ 在 $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅.

引理 8.4.1. 设 $f(x)$ 在区间 Δ 上有界, 其振幅为 $\omega(f)$, 则

$$\omega(f) = \sup_{x', x'' \in \Delta} \{ |f(x') - f(x'')| \}.$$

定理 8.4.8 (可积准则 III). 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的充分必要条件是: 任给正数 ε, η , 总存在一个分割 T , 使得属于 T 的所有小区间中, 对应于振幅 $\omega_{k'} \geq \varepsilon$ 的那些小区间的总长 $\sum_{k'} \Delta x_{k'} < \eta$.

定理 8.4.9. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

定理 8.4.10. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

定理 8.4.11. 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上只有有限个间断点的有界函数, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

推论 8.4.1. 若 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的分段连续函数 (即只有有限个间断点, 且都是第一类间断点的函数), 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

8.5 积分中值定理

定理 8.5.1 (积分第一中值定理). 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

定理 8.5.2 (推广的第一积分中值定理). 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积且不变号, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

定理 8.5.3 (积分第二中值定理). 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上递增且 $g(x) \geq 0$, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \int_{\xi}^b f(x)dx.$$

推论 8.5.1. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上递减且 $g(x) \geq 0$, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)dx.$$

定理 8.5.4 (推广的积分第二中值定理). 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $g(x)$ 为单调函数, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x)dx$$

8.6 关于定积分的一些补充

命题 8.6.1 (Riemann 引理). 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $g(x)$ 以 T 为周期, 在 $[0, T]$ 上可积, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)g(nx)dx = \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx \int_a^b f(x)dx.$$

9 定积分的应用与反常积分

9.1 定积分应用的两种常用格式

无.

9.2 平面图形的面积

定理 9.2.1 (参数方程的情形). 当曲线 C 由参数方程

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$$

给出, 在 $[\alpha, \beta]$ 上 $\psi(t)$ 连续, $\varphi(t)$ 连续可微, $x = \varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上严格递增或严格递减, 则 C 与 x 轴及两条直线 $x = \varphi(\alpha), x = \varphi(\beta)$ 围成的面积为

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)\varphi'(t)|dt.$$

定理 9.2.2 (极坐标的情形). 设由曲线 $r = \varphi(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成一平面图形, 其中 $\varphi(\theta) \geq 0$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, $\beta - \alpha \leq 2\pi$, 则它的面积为

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(\theta)d\theta$$

9.3 平行截面面积求体积

无.

9.4 平面弧长的概念

定理 9.4.1. 设简单曲线 C 的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

且 C 为一光滑曲线, 则 C 是可求长的且弧长为

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

关于光滑曲线的定义可参见定义4.5.1.

推论 9.4.1. 若简单曲线 C 由直角坐标方程

$$y = f(x), \quad x \in [a, b]$$

给出, 则当 f 在 $[a, b]$ 上连续可微时, 此曲线为一光滑曲线. 这时弧长公式为

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

推论 9.4.2. 当简单曲线 C 由极坐标方程

$$r = r(\theta), \quad \theta \in [\alpha, \beta]$$

表示, $r(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续可微且 $r^2(\theta) + r'^2(\theta) \neq 0$ 时, 曲线弧长公式为

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta.$$

9.5 旋转曲面的面积

待作者补充.

9.6 定积分在某些物理问题中的应用

无.

9.7 反常积分的概念与基本性质

例子 9.7.1. 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 在 $p > 1$ 时收敛, 在 $p \leq 1$ 时发散.

9.8 反常积分的敛散性

定理 9.8.1 (反常积分的 Cauchy 收敛准则). 如果 f 在任一 $[a, u] \subset [a, \omega)$ 上可积, $\int_a^\omega f(x)dx$ 为反常积分, 则 $\int_a^\omega f(x)dx$ 收敛的充要条件时: 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $B \in [a, \omega)$, 使对一切 $u_1, u_2 \in [B, \omega)$ 有

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

定理 9.8.2. 绝对收敛的反常积分必收敛.

定理 9.8.3. 如果 f 在任一 $[a, u] \subset [a, \omega)$ 上非负可积, $\int_a^\omega f(x)dx$ 为反常积分, 则反常积分 $\int_a^\omega f(x)dx$ 收敛的充分必要条件使 $F(u) = \int_a^u f(x)dx$ 在 $[a, \omega)$ 上有上界.

定理 9.8.4. 设 f, g 在任一 $[a, u] \subset [a, \omega]$ 上可积, $\int_a^\omega f(x)dx$ 及 $\int_a^\omega g(x)dx$ 为反常积分, 在 $[a, \omega)$ 上有 $0 \leq f(x) \leq g(x)$, 则

(1) 当 $\int_a^\omega g(x)dx$ 收敛时有 $\int_a^\omega f(x)dx$ 收敛;

(2) 当 $\int_a^\omega f(x)dx$ 发散时有 $\int_a^\omega g(x)dx$ 发散.

推论 9.8.1 (比较判别法的极限形式). 设 f, g 在任一 $[a, u] \subset [a, \omega)$ 上非负可积, $\int_a^\omega f(x)dx$ 及 $\int_a^\omega g(x)dx$ 为反常积分. 如果 $\lim_{x \rightarrow \omega^-} \frac{f(x)}{g(x)} = c$, 则有

(1) 当 $0 < c < +\infty$ 时, $\int_a^\omega f(x)dx$ 与 $\int_a^\omega g(x)dx$ 同敛态;

(2) 当 $c = 0$ 时, 由 $\int_a^\omega g(x)dx$ 收敛可推知 $\int_a^\omega f(x)dx$ 收敛;

(3) 当 $c = +\infty$ 时, 由 $\int_a^\omega g(x)dx$ 发散可推知 $\int_a^\omega f(x)dx$ 发散.

推论 9.8.2 (Cauchy 判别法). 设 f 在 $[a, +\infty)(a > 0)$ 的任一闭子区间上可积.

(1) 若存在 $p > 1$ 和 $C > 0$, 使得 $|f(x)| \leq \frac{C}{x^p}, x \in [a, +\infty)$, 则 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛;

(2) 若存在 $p \leq 1$ 和 $C > 0$, 使得 $|f(x)| \geq \frac{C}{x^p}, x \in [a, +\infty)$, 则 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 发散.

推论 9.8.3 (Cauchy 判别法). 设 f 在 $[a, +\infty)$ ($a > 0$) 的任一闭子区间上可积, 且存在实数 p , 使得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p |f(x)| = c,$$

则

(1) 当 $0 \leq c < +\infty$ 且 $p > 1$ 时, $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛;

(2) 当 $0 < c \leq +\infty$ 且 $p \leq 1$ 时, $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 发散.

推论 9.8.4 (Cauchy 判别法). 设 f 在 $[a, b]$ 的任一闭子区间上可积且 b 为瑕点.

(1) 若存在 $0 < p < 1$ 和 $C > 0$, 使 $|f(x)| \leq \frac{C}{(b-x)^p}, x \in [a, b)$, 则瑕积分 $\int_a^b |f(x)| dx$ 收敛;

(2) 若存在 $p \geq 1$ 和 $C > 0$, 使得 $|f(x)| \geq \frac{C}{(b-x)^p}, x \in [a, b)$, 则瑕积分 $\int_a^b |f(x)| dx$ 发散.

推论 9.8.5 (Cauchy 判别法). 设 f 在 $[a, b)$ 的任一闭子区间上可积, b 为瑕点, 且存在实数 p , 使得

$$\lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^p |f(x)| = c,$$

则

(1) 当 $0 \leq c < +\infty$ 且 $0 < p < 1$ 时, 瑕积分 $\int_a^b |f(x)| dx$ 收敛;

(2) 当 $0 < c \leq +\infty$ 且 $p \geq 1$ 时, 瑕积分 $\int_a^b |f(x)| dx$ 发散.

定理 9.8.5 (Dirichlet 判别法). 设 $f(x), g(x)$ 在任一 $[a, u] \subset [a, \omega)$ 上可积, $\int_a^\omega f(x)g(x) dx$ 是反常积分. 若

(1) $F(u) = \int_a^u f(x) dx$ 在 $[a, \omega)$ 上有界;

(2) $g(x)$ 在 $[a, \omega)$ 上单调且 $\lim_{x \rightarrow \omega^-} g(x) = 0$,

则反常积分 $\int_a^\omega f(x)g(x) dx$ 收敛.

定理 9.8.6 (Abel 判别法). 设 f, g 在任一 $[a, u] \subset [a, \omega)$ 上可积, $\int_a^\omega f(x)g(x) dx$ 是反常积分. 若 $\int_a^\omega f(x) dx$ 收敛, $g(x)$ 在 $[a, \omega)$ 上单调有界, 则 $\int_a^\omega f(x)g(x) dx$ 收敛.

10 数项级数

10.1 数项级数的概念与性质

暂无.

10.2 正项级数

定理 10.2.1. 设 $a_n \geq 0 (n = 1, 2, \dots)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是: 它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有上界.

定理 10.2.2 (Cauchy 积分判别法). 设函数 f 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 并且非负, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 具有相同的敛散性.

定理 10.2.3 (比较判别法). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个级数. 若存在正整数 N , 使当 $n \geq N$ 时有 $0 \leq a_n \leq b_n$, 则

(1) 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

定理 10.2.4 (比较判别法的极限形式). 设有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, 则

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散;

(2) 当 $l = 0$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(3) 当 $l = +\infty$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 10.2.5 (Cauchy 根值法). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数.

(1) 如果存在 $q \in (0, 1), N \in \mathbb{N}_+$, 使得

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1, \quad n > N,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 如果 $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ 对无穷多个 n 成立, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

推论 10.2.1 (Cauchy 根植法的极限形式). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r,$$

则

(1) 当 $r < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 当 $r > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 10.2.6 (D'Alembert 比值法). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数.

(1) 如果存在 $q \in (0, 1), N \in \mathbb{N}_+$, 使得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q, \quad n > N,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 如果存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 使得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ 对 $n > N$ 成立, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

推论 10.2.2 (D'Alembert 比值法的极限形式). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = s,$$

则

(1) 当 $s < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 当 $s > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 10.2.7 (Cauchy 根值法). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数. 如果

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r,$$

则

(1) 当 $r < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 当 $r > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 10.2.8 (D'Alembert 比值法). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数.

(1) 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = s < 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = s' > 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 10.2.9 (Raabe 判别法). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = r,$$

则

(1) 当 $r > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 当 $r < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

10.3 一般项级数

定理 10.3.1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则它必收敛.

定理 10.3.2 (Leibniz 判别法). Leibniz 级数必收敛.

定理 10.3.3 (Dirichlet 判别法). 如果数列 $\{a_n\}$ 单调趋于 0, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和数列有界, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

定理 10.3.4 (Abel 判别法). 如果数列 $\{a_n\}$ 单调有界, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

10.4 绝对收敛与条件收敛级数的性质

作者暂时还没学.

11 函数项级数

11.1 函数列一致收敛的概念与判定

定理 11.1.1 (余项定理). 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在集合 I 上逐点收敛于函数 $f(x)$. 引入记号

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|,$$

则下列三条是等价的.

- (1) $\{f_n(x)\}$ 在集合 I 上一致收敛于函数 $f(x)$;
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f) = 0$;
- (3) 对任何数列 $\{x_n\} \subset I$ 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$.

定理 11.1.2 (一致收敛的柯西准则). 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在集合 I 上有定义, 则这函数列在 I 上一致收敛的充要条件是: 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_+$, 使当 $n, m > N$ 时都有

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in I.$$

11.2 一致收敛函数列的性质

定理 11.2.1 (连续性). 若函数列 $\{f_n(x)\}$ 的每一项 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 并且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

定理 11.2.2 (Dini 定理). 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上逐点收敛于 $f(x)$. 如果

- (1) $f_n(x)$ 都在 $[a, b]$ 上连续, $n = 1, 2, \dots$;
- (2) 对任意固定的 $x \in [a, b]$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 对 n 都是单调递增的;
- (3) 极限函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,

则函数列 $\{f_n(x)\}$ 在闭区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

定理 11.2.3 (可积性). 若函数列 $\{f_n(x)\}$ 的每一项在 $[a, b]$ 上连续, 并且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

定理 11.2.4 (可导性). 如果函数列 $\{f_n(x)\}$ 满足条件

- (1) $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可微, $n = 1, 2, \dots$;
- (2) 导函数列 $\{f'_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $\varphi(x)$;
- (3) $\{f_n(x)\}$ 至少在某个 $x_0 \in [a, b]$ 收敛, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = y_0$,

那么函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于某个连续可微函数 $f(x)$, 并且 $f'(x) = \varphi(x)$.

11.3 函数项级数一致收敛的概念及判定

定理 11.3.1 (一致收敛的 Cauchy 准则). 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在数集 E 上一致收敛的充分必要条件时: 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 使当 $n > N$ 时, 对一切 $p \in \mathbb{N}_+$ 都有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in E.$$

推论 11.3.1. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在数集 E 上一致收敛的必要条件是函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 0.

定义 11.3.1. 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 E 上有定义, 称 $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ 为其余项, 记作 $R_n(x)$, 即

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x), \quad x \in E.$$

定理 11.3.2 (余项定理). 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在数集 E 上收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 E 上一致收敛的充分必要条件为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |R_n(x)| = 0.$$

定理 11.3.3 (M 判别法). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是定义在数集 E 上的函数项级数. 若存在收敛的常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 和 $N_0 \in \mathbb{N}_+$, 使当 $n \geq N_0$ 时,

$$|u_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in E,$$

则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 E 上一致收敛.

11.4 和函数的分析性质

定理 11.4.1 (连续性). 若 $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 都在区间 $[a, b]$ 上连续, 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 则和函数 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

定理 11.4.2 (Dini 定理). 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上逐点收敛到 $S(x)$ 且满足

(1) $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 都在 $[a, b]$ 上连续且非负;

(2) $S(x)$ 在 $[a, b]$ 连续,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

定理 11.4.3 (逐项积分). 若 $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 都在区间 $[a, b]$ 上连续, 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积且

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

定理 11.4.4 (逐项求导). 若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 满足

(1) $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 在 $[a, b]$ 上连续可导;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在某点 $x_0 \in [a, b]$ 收敛;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $\sigma(x)$,

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到某个连续可导函数 $S(x)$ 且 $S'(x) = \sigma(x)$, 即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

11.5 处处不可微的连续函数

作者暂时还没学.

12 幂级数与 Fourier 级数

12.1 幂级数的收敛域与和函数

定理 12.1.1 (Abel 第一定理). (1) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_1 (\neq 0)$ 处收敛, 则对于满足不等式

$|x| < |x_1|$ 的一切 x , 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都是绝对收敛;

(2) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_2 (\neq 0)$ 处发散, 则对于满足不等式 $|x| > |x_2|$ 的一切 x , 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都发散.

定理 12.1.2. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 则

(1) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在区间 $(-R, R)$ 内每一点绝对收敛;

(2) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在任意 $x \notin [-R, R]$ 处发散;

(3) 当 $x = \pm R$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 可能收敛, 也可能发散.

定理 12.1.3. 对于给定的级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$$

或

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho,$$

则其收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$ (这里约定 $\rho = 0$ 时, 定义 $\frac{1}{\rho} = +\infty$; $\rho = +\infty$ 时, 定义 $\frac{1}{\rho} = 0$).

定理 12.1.4 (Cauchy-Hadamard 定理). 对于给定的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 如果

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho,$$

则其收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$ (同样地, 约定当 $\rho = 0$ 时, 定义 $\frac{1}{\rho} = +\infty$; $\rho = +\infty$ 时, 定义 $\frac{1}{\rho} = 0$).

定理 12.1.5 (Abel 第二定理). (1) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 则对任意取定的 $r \in (0, R)$, 它在 $[-r, r]$ 上一致收敛;

(2) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$ 且它在 $x = R$ 处收敛, 则它在 $[0, R]$ 上一致收敛;

(3) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$ 且它在 $x = -R$ 处收敛, 则它在 $[-R, 0]$ 上一致收敛.

定理 12.1.6 (连续性). 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$, 则它的和函数 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内连续.

推论 12.1.1. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$, 并且它在 $x = R$ 处收敛, 则它的和函数 $S(x)$ 在 $[0, R]$ 上连续, 特别地,

$$\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

定理 12.1.7 (逐项求导与逐项积分). 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$, 和函数为 $S(x)$, 即

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad -R < x < R,$$

则幂级数在收敛区间内可以逐项求导与逐项积分, 即

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots, \quad -R < x < R \end{aligned} \tag{3}$$

和

$$\begin{aligned} \int_0^x S(t) dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \\ &= a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots, \quad -R < x < R \end{aligned} \tag{4}$$

且3式和4式中的幂级数收敛半径仍然是 R .

12.2 函数的幂级数展开

几个常用的初等函数的幂级数展开:

1. e^x 的展开式

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. $\sin x$ 的展开式

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. $\cos x$ 的展开式

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. $(1+x)^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$ 的展开式

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1).$$

二项式展开的收敛情况如下:

(1) 当 $\alpha \leq -1$ 时, 收敛域为 $(-1, 1)$;

(2) 当 $-1 < \alpha < 0$ 时, 收敛域为 $(-1, 1]$;

(3) 当 $\alpha > 0$ 时, 收敛域为 $[-1, 1]$.

5. $\ln(1+x)$ 的展开式

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1].$$

6. $\arctan x$ 的展开式

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1]$$

12.3 三角级数与 Fourier 级数

如果函数 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数, 并且在区间 $[-l, l]$ 上可积, 则 $f(x)$ 的以 $2l$ 为周期的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

12.4 Fourier 级数的收敛性

作者暂时还没学.

13 多元函数及其微分学

13.1 平面中的点集

定义 13.1.1. 如果点集 E 中的每一点都是 E 的内点, 则称 E 是开集. 如果点集 E 的所有聚点都属于 E , 则称 E 是闭集.

13.2 \mathbb{R}^2 完备性

无.

13.3 二元函数的极限和连续性

无.

13.4 多元函数的偏导数和全微分

定理 13.4.1 (可微的必要条件). 设二元函数 f 在 $P_0(x_0, y_0)$ 某邻域内有定义, 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 可微, 则函数 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的全微分可以表示为

$$df|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

推论 13.4.1. 设 $z = f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义, 则它在 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微的充要条件是: 两个偏导数 $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ 都存在, 且满足

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0, y_0) - (f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y)}{\rho} = 0.$$

13.5 复合函数的微分法

定理 13.5.1. 设函数 $z = f(x, y)$ 可微, $x = \varphi t$ 和 $y = \psi t$ 可导, 则复合函数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ 也可导, 并且

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = f_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t).$$

定理 13.5.2 (复合函数偏导链式法则). 设函数 $z = f(u, v)$ 可微, $u = \varphi(x, y)$ 和 $v = \psi(x, y)$ 都存在偏导数, 则复合函数 $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ 也存在偏导数, 并且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

定理 13.5.3. 设函数 $z = f(u, v)$ 在 (u, v) 可微, $u = \varphi(x, y)$ 和 $v = \psi(x, y)$ 分别在 (x, y) 可微, 则复合函数 $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ 在 (x, y) 也可微, 并且

$$dz = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy.$$

定理 13.5.4. 设函数 $z = f(x, y)$ 的混合偏导数 $f_{xy}(x, y)$ 和 $f_{yx}(x, y)$ 都在点 (x_0, y_0) 存在, 并且至少有一个在该点连续, 则二者相等,

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

14 多元函数微分法的应用

14.1 方向导数

定理 14.1.1. 如果函数 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微, 则 f 在点 P_0 沿任何方向 \mathbf{l} 的方向导数都存在, 并且

$$f_{\mathbf{l}}(P_0) = f_x(P_0) \cos \alpha + f_y(P_0) \cos \beta,$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta$ 是方向 \mathbf{l} 的方向余弦.

14.2 多元函数 Taylor 公式

定理 14.2.1 (Lagrange 型余项的 Taylor 公式). 设二元函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个领域 $U(P_0)$ 内直到 $n+1$ 阶连续可微 (即具有直到 $n+1$ 阶的连续偏导数), 则对于任意一点 $P(x_0 + h, y_0 + k) \in U(P_0)$, 存在相应的 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k), \end{aligned} \tag{5}$$

其中每一项都含有形式上的符号运算, 即

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x_0, y_0) = \sum_{i=0}^m C_m^i \left. \frac{\partial^m f(x, y)}{\partial x^i \partial y^{m-i}} \right|_{(x_0, y_0)} h^i k^{m-i}.$$

式5称为二元函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的 n 阶带 Lagrange 型余项的 Taylor 公式 (当 $(x_0, y_0) = (0, 0)$ 时, 也称为 Maclaurin 公式).

14.3 多元函数的极值

为了方便叙述定理14.3.1, 记

$$A := f_{xx}(P_0), \quad B := f_{xy}(P_0), \quad C := f_{yy}(P_0),$$

$$H := \det \mathbf{H}_f(P_0) = AC - B^2.$$

定理 14.3.1 (极值的充分条件). 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某领域 $U(P_0)$ 内具有二阶连续偏导数, 又设 P_0 是 f 的一个稳定点,

1. 当 $H > 0$ 时, 如果 $A > 0$ (或 $C > 0$), 则函数 f 在 P_0 处取得极小值; 如果 $A < 0$ (或 $C < 0$), 则函数 f 在 P_0 处取得极大值;
2. 当 $H < 0$, 函数 f 在 P_0 处不能取得极值.

14.4 隐函数

定理 14.4.1 (隐函数的存在唯一性). 设函数 $z = F(x, y)$ 满足下列条件:

1. $F(x_0, y_0) = 0$;
2. F 在以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为内点的某一区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 中连续;
3. F 在 D 内关于 y 是严格单调的,

则在点 P_0 的某邻域 $U(P_0) \subset D$ 内, 由方程 $F(x, y) = 0$ 可以唯一地确定一个定义在某区间 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 内的(隐)函数 $y = f(x)$, 使得

1. $f(x_0) = y_0, \{(x, f(x))|x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)\} \subset U(P_0)$ 且

$$F(x, f(x)) \equiv 0, \quad x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha);$$
2. $y = f(x)$ 在 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 内连续.

定理 14.4.2 (隐函数的可微性). 设函数 $z = F(x, y)$ 满足下列条件:

1. $F(x_0, y_0) = 0$;
2. F 在以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为内点的某一区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 中连续;
3. F 在 D 内存在连续的偏导数 $F_y(x, y)$ 且 $F_y(x_0, y_0) \neq 0$,

则在点 P_0 的某邻域 $U(P_0) \subset D$ 内, 由方程 $F(x, y) = 0$ 可以唯一地确定一个定义在某区间 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 内连续的(隐)函数 $y = f(x)$, 使得

1. $f(x_0) = y_0, \{(x, f(x))|x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)\} \subset U(P_0)$ 且

$$F(x, f(x)) \equiv 0, \quad x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha);$$
2. 假设 $F_x(x, y)$ 在 D 内存在且连续, 则隐函数 $y = f(x)$ 在 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 中有连续导函数, 并且

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

定理 14.4.3. 设函数 $u = F(x, y, z)$ 满足下列条件:

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$;
2. F 在以点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为内点的某一区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 中连续;
3. F 在 D 内存在连续的偏导数 F_x, F_y 和 F_z , 并且 $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$,

则在点 P_0 的某邻域 $U(P_0) \subset D$ 内, 由方程 $F(x, y, z) = 0$ 可以唯一地确定一个定义在某二维区域 $U(x_0, y_0)$ 内的二元(隐)函数 $z = f(x, y)$, 使得

1. $f(x_0, y_0) = z_0, \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in U(x_0, y_0) \subset U(P_0)\}$ 且

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0, \quad (x, y) \in U(x_0, y_0);$$

2. $z = f(x, y)$ 在 $U(x_0, y_0)$ 内具有连续的偏导数 z_x, z_y 且

$$f_x(x, y) = -\frac{F_x}{F_z}, \quad f_y(x, y) = -\frac{F_y}{F_z}.$$

14.5 隐函数组

定理 14.5.1 (隐函数组的存在唯一性). 设函数组 $F(x, y, z)$ 和 $G(x, y, z)$ 满足下列条件:

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0, G(x_0, y_0, z_0) = 0$;
2. F 和 G 在以点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为内点的区域 $V \subset \mathbb{R}^3$ 存在一阶连续偏导数;
3. F, G 关于 y, z 的 Jacobi 行列式 $\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_{P_0} \neq 0$,

则在点 P_0 的某邻域 $U(P_0) \subset V$ 内, 由方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (x, y, z) \in V,$$

可以唯一地确定一个定义在点 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 内的一元(隐)函数组

$$\begin{cases} y = \varphi(x), \\ z = \psi(x), \end{cases}$$

使得

1. $y_0 = \varphi(x_0), z_0 = \psi(x_0)$ 且 $\{(x, \varphi(x), \psi(x)) | x \in U(x_0)\} \subset U(P_0)$, 进而有恒等式

$$\begin{cases} F(x, \varphi(x), \psi(x)) \equiv 0, \\ G(x, \varphi(x), \psi(x)) \equiv 0, \end{cases} \quad x \in U(x_0);$$

2. $y = \varphi(x)$ 和 $z = \psi(x)$ 在 $U(x_0)$ 内连续;

3. $y = \varphi(x)$ 和 $z = \psi(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有一阶连续的导数 $\varphi'(x), \psi'(x)$ 且

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}, \quad \frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)},$$

其中

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}, \quad \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} = \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}.$$

定理 14.5.2 (反函数的存在唯一性). 设函数组

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases} \quad (x, y) \in D.$$

中的函数都在 D 上有连续的一阶偏导数, 点 $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的内点. 进一步设

$$u_0 = u(x_0, y_0), \quad v_0 = v(x_0, y_0), \quad \left. \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|_{P_0} \neq 0,$$

则在点 $P'_0(u_0, v_0)$ 的某邻域 $U(P'_0)$ 内存在唯一的一组反函数 $x = x(u, v), y = y(u, v)$, 使得

$$x_0 = x(u_0, v_0), \quad y_0 = y(u_0, v_0), \quad \{(x(u, v), y(u, v)) | (u, v) \in U(P'_0)\} \subset U(P_0).$$

进而, 恒等式

$$\begin{cases} u \equiv u(x(u, v), y(u, v)), \\ v \equiv v(x(u, v), y(u, v)), \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} x \equiv x(u(x, y), v(x, y)), \\ y \equiv y(u(x, y), v(x, y)), \end{cases}$$

分别在 $U(P'_0)$ 和 P_0 的某邻域中成立, 并且 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 在 $U(P'_0)$ 内存在连续的一阶偏导数,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{\partial v}{\partial y} \Big/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}, & \frac{\partial x}{\partial v} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \Big/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}, \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \Big/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \end{aligned}$$

15 含参变量积分

15.1 含参变量正常积分及其分析性质

定理 15.1.1 (含参变量积分的连续性). 设函数 $f(x, t)$ 在矩形区域 $R = [a, b] \times [c, d]$ 上连续, 则含参变量正常积分

$$I(t) = \int_a^b f(x, t) dx, \quad t \in [c, d]$$

在 $[c, d]$ 上也连续.

定理 15.1.2 (含参变量积分的可微性). 设函数 $f(x, t)$ 和 $f_t(x, t)$ 在矩形区域 $R = [a, b] \times [c, d]$ 上连续, 则含参变量积分

$$I(t) = \int_a^b f(x, t) dx, \quad t \in [c, d]$$

在 $[c, d]$ 上也可微且

$$\frac{d}{dt} I(t) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx, \quad t \in [c, d].$$

定理 15.1.3 (含参变量积分的可积性). 设函数 $f(x, t)$ 在矩形区域 $R = [a, b] \times [c, d]$ 上连续, 则含参变量积分

$$I(t) = \int_a^b f(x, t) dx, \quad t \in [c, d]$$

在 $[c, d]$ 上可积, 并且有下列等式成立:

$$\int_c^d I(t) dt = \int_c^d dt \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, t) dt \right\} dx.$$

定理 15.1.4 (含参变量积分的可微性). 设函数 $f(x, t)$ 和 $f_t(x, t)$ 在矩形区域 $R = [a, b] \times [c, d]$ 上连续, 函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在 $[c, d]$ 上可导且

$$a \leq \varphi(t) \leq b, \quad a \leq \psi(t) \leq b, \quad t \in [c, d],$$

则含参变量积分 $I(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x, t) dx$ 在 $[c, d]$ 上可导且

$$\frac{d}{dt} I(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f(\psi(t), t) \psi'(t) - f(\varphi(t), t) \varphi'(t).$$

15.2 含参变量反常积分及一致收敛判别法

定义 15.2.1. 设对于区间 J 中的每一点 t , 含参变量 t 的反常积分 $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ 都收敛. 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在与 t 无关的 $G \in (a, +\infty)$, 使得对于任意的 $G' > G$ 和 $t \in J$ 均

成立

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, t) dx - \int_a^{G'} f(x, t) dx \right| = \left| \int_{G'}^{+\infty} f(x, t) dx \right| < \varepsilon,$$

则称含参变量反常积分 $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ 在区间 J 上一致收敛或关于 $t \in J$ 一致收敛.

定理 15.2.1 (一致收敛的 Cauchy 准则). 含参变量反常积分 $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ 在区间 J 上一致收敛的充分必要条件是: 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $G > a$, 使得只要 $G < G_1, G_2 < +\infty$, 就成立

$$\left| \int_{G_1}^{G_2} f(x, t) dx \right| < \varepsilon, \quad \forall t \in J.$$

定理 15.2.2 (M 判别法). 如果含参变量反常积分 $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ 的被积函数 $f(x, t)$ 可被一个可积的函数 $F(x)$ 所控制, 即存在 $b \geq a$, 使得

$$|f(x, t)| \leq F(x), \quad \forall x \in [b, +\infty), \forall t \in J,$$

并且反常积分 $\int_b^{+\infty} F(x) dx$ 收敛, 则含参变量反常积分 $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ 在区间 J 上是(绝对)一致收敛的.

定理 15.2.3 (一致收敛的 Dirichlet 判别法). 设 $f(x, t)$ 和 $g(x, t)$ 在 $[a, +\infty) \times J$ 上连续且满足如下条件:

- (1) 存在正常数 M , 使得 $\left| \int_a^b f(x, t) dx \right| \leq M$ 对所有的 b 满足 $a < b < +\infty$ 和 $t \in J$;
- (2) 函数 $g(x, t)$ 是 x 的单调函数;
- (3) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x, t)$ 关于 $t \in J$ 一致趋于 0,

则含参变量反常积分 $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) g(x, t) dx$ 在区间 J 上一致收敛.

定理 15.2.4 (一致收敛的 Abel 判别法). 设 $f(x, t)$ 和 $g(x, t)$ 在 $[a, +\infty) \times J$ 上连续且满足如下条件:

- (1) 含参变量反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ 在区间 J 上一致收敛;
- (2) 函数 $g(x, t)$ 是 x 的单调函数;
- (3) 函数 $g(x, t)$ 在区间 J 上一致有界, 即存在 $M > 0$, 使得

$$|g(x, t)| \leq M, \quad (x, t) \in [a, +\infty) \times J,$$

则含参变量反常积分 $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) g(x, t) dx$ 在区间 J 上一致收敛.

15.3 含参变量反常积分的分析性质

定理 15.3.1 (连续性). 设函数 $f(x, t)$ 在矩形区域 $R = [a, +\infty) \times J$ 上连续, 其中 J 是一个区间. 又含参变量反常积分 $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ 在区间 J 上是一致收敛的, 则含参变量反常积分

$$I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$$

在 J 上连续.

定理 15.3.2 (可积性). 设函数 $f(x, t)$ 在矩形区域 $R = [a, +\infty) \times J$ 上连续, 并且含参变量反常积分 $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ 在区间 J 上一致收敛, 则 $I(t)$ 在任意有限区间 $[c, d] \subset J$ 上可积且

$$\int_c^d I(t) dt = \int_c^d \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t) dx \right\} dt = \int_a^{+\infty} \left\{ \int_c^d f(x, t) dt \right\} dx.$$

定理 15.3.3 (可微性). 设函数 $f(x, t)$ 和 $f_t(x, t)$ 在矩形区域 $R = [a, +\infty) \times J$ 上连续且 $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ 在 J 上收敛, $\int_a^{+\infty} f_t(x, t) dx$ 在 J 上一致收敛, 则含参变量反常积分 $I(t)$ 在 J 上可导且

$$\frac{d}{dt} I(t) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx, \quad t \in J.$$

定理 15.3.4 (积分顺序的可交换性). 设 $f(x, y)$ 在 $R = [a, +\infty) \times [c, +\infty)$ 上连续, 含参变量反常积分 $\varphi(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ 和 $\psi(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 分别在区间 $[a, +\infty)$ 和 $[c, +\infty)$ 中收敛, 并且

(1) 积分 $\varphi(x)$ 和 $\psi(y)$ 在 $[a, +\infty)$ 及 $[c, +\infty)$ 上分别具有内闭一致收敛性, 即 $\varphi(x)$ 关于 x 在任何区间 $[a, b]$ 上一致收敛, $\psi(y)$ 关于 y 在任何区间 $[c, d]$ 上一致收敛;

(2) 下面的两个积分中至少有一个收敛:

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy, \quad \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx,$$

则

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy, \quad \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx.$$