

# 数学分析笔记

关茂松

## 目录

<b>1</b>	<b>实数与数列极限</b>	<b>4</b>
1.1	实数的基本性质与常用不等式	4
1.2	数列与数列极限的概念	4
1.3	收敛数列的性质	4
1.4	发散数列与子列的概念	4
1.5	确界原理	4
1.6	数列收敛的判别法	4
1.7	Stolz 公式	6
<b>2</b>	<b>函数与函数极限</b>	<b>6</b>
2.1	映射与函数的概念	6
2.2	$x \rightarrow \infty$ 函数极限的概念	6
2.3	$x \rightarrow x_0$ 函数极限的概念	6
2.4	函数极限的性质	6
2.5	函数极限存在的判别法	6
<b>3</b>	<b>函数的连续性</b>	<b>7</b>
3.1	连续函数的概念	7
3.2	函数间断的概念	7
3.3	连续函数的局部性质与初等函数的连续性	7
3.4	连续函数的基本性质	7
<b>4</b>	<b>微分与导数</b>	<b>7</b>
4.1	微分与导数的概念	7
4.2	求导方法与导数公式	7
4.3	微分的计算与应用	7

4.4	高阶导数与高阶微分 . . . . .	8
4.5	参数方程所表示的函数的导数 . . . . .	8
<b>5</b>	<b>导数的应用</b>	<b>8</b>
5.1	Fermat 定理和 Darboux 定理 . . . . .	8
5.2	中值定理 . . . . .	8
5.3	不定式极限 . . . . .	8
5.4	Taylor 公式 . . . . .	9
5.5	函数的单调性与凸性 . . . . .	9
5.6	函数的极值与最值 . . . . .	10
5.7	函数作图 . . . . .	10
<b>6</b>	<b>实数集的稠密性与完备性</b>	<b>10</b>
6.1	实数集的稠密性 . . . . .	10
6.2	实数集的完备性 . . . . .	10
6.3	上极限和下极限简介 . . . . .	10
<b>7</b>	<b>不定积分</b>	<b>10</b>
7.1	原函数与不定积分的概念 . . . . .	10
7.2	不定积分的计算 . . . . .	10
7.3	有理函数的不定积分 . . . . .	11
<b>8</b>	<b>定积分</b>	<b>11</b>
8.1	定积分的概念与性质 . . . . .	11
8.2	微积分基本定理 . . . . .	11
8.3	定积分的计算 . . . . .	11
8.4	定积分存在的条件 . . . . .	11
8.5	积分中值定理 . . . . .	13
8.6	关于定积分的一些补充 . . . . .	14
<b>9</b>	<b>定积分的应用与反常积分</b>	<b>14</b>
9.1	定积分应用的两种常用格式 . . . . .	14
9.2	平面图形的面积 . . . . .	14
9.3	平行截面面积求体积 . . . . .	15
9.4	平面弧长的概念 . . . . .	15
9.5	旋转曲面的面积 . . . . .	15

9.6	定积分在某些物理问题中的应用	15
9.7	反常积分的概念与基本性质	16
9.8	反常积分的敛散性	16
<b>10</b>	<b>数项级数</b>	<b>18</b>
10.1	数项级数的概念与性质	18
10.2	正项级数	18
10.3	一般项级数	21
10.4	绝对收敛与条件收敛级数的性质	21
<b>11</b>	<b>函数项级数</b>	<b>21</b>
11.1	函数列一致收敛的概念与判定	21
11.2	一致收敛函数列的性质	22
11.3	函数项级数一致收敛的概念及判定	22
11.4	和函数的分析性质	23
11.5	处处不可微的连续函数	24
<b>12</b>	<b>幂级数与 Fourier 级数</b>	<b>24</b>
12.1	幂级数的收敛域与和函数	24
12.2	函数的幂级数展开	26
12.3	三角级数与 Fourier 级数	27
12.4	Fourier 级数的收敛性	27
<b>13</b>	<b>多元函数及其微分学</b>	<b>27</b>
13.1	平面中的点集	27
13.2	$\mathbb{R}^2$ 完备性	27
13.3	二元函数的极限和连续性	28
13.4	多元函数的偏导数和全微分	28
13.5	复合函数的微分法	28
<b>14</b>	<b>多元函数微分法的应用</b>	<b>29</b>
14.1	方向导数	29
14.2	多元函数 Taylor 公式	29
14.3	多元函数的极值	29
14.4	隐函数	30
14.5	隐函数组	31

<b>15 含参变量积分</b>	<b>33</b>
15.1 含参变量正常积分及其分析性质 . . . . .	33
15.2 含参变量反常积分及一致收敛判别法 . . . . .	33
15.3 含参变量反常积分的分析性质 . . . . .	35

## 1 实数与数列极限

### 1.1 实数的基本性质与常用不等式

无.

### 1.2 数列与数列极限的概念

无.

### 1.3 收敛数列的性质

无.

### 1.4 发散数列与子列的概念

无.

### 1.5 确界原理

无.

### 1.6 数列收敛的判别法

**定理 1.6.1** (压缩映像原理).

1. 对于任一数列  $\{x_n\}$  而言, 若存在常数  $r$ , 使得  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 恒有

$$|x_{n+1} - x_n| \leq r|x_n - x_{n-1}|, 0 < r < 1.$$

则数列  $\{x_n\}$  收敛.

2. 特别, 若数列  $\{x_n\}$  利用递推公式给出:  $x_{n+1} = f(x_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 其中  $f$  为某一可微函数, 且  $\exists r \in \mathbb{R}$ , 使得

$$|f'(x)| \leq r < 1,$$

则数列  $\{x_n\}$  收敛.

注. 压缩映像条件是充分的而不是必要的.

**定理 1.6.2** (不动点方法). 已知数列  $\{x_n\}$  在区间  $I$  上由  $x_{n+1} = f(x_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 给出,  $f$  是  $I$  上连续增函数, 若  $f$  在  $I$  上有不动点  $x^*$  (即  $x^* = f(x^*)$ ) 满足

$$(x_1 - f(x_1))(x_1 - x^*) \geq 0, \quad (1)$$

则此时数列  $\{x_n\}$  必收敛, 且极限  $A$  满足  $A = f(A)$ .

若1式" $\geq$ "改为" $>$ "对任意  $x_1 \in I$  成立, 则意味着  $x^*$  是唯一不动点, 并且  $A = x^*$ .

特别, 若  $f$  可导, 且  $0 < f'(x) < 1$  ( $x \in I$ ), 则  $f$  严增, 且不等式1( $\geq$ "可改为" $>$ ")会自动满足 ( $\forall x_1 \in I$ ). 这时  $f$  的不动点存在且唯一, 从而  $A = x^*$ .

设  $z = f(x, y)$  为二元函数, 我们约定, 将  $z = f(x, x)$  的不动点称为  $f$  的不动点 (或二元不动点).

**定理 1.6.3** (不动点方法的推广). 已知  $z = f(x, y)$  为  $x > 0, y > 0$  上定义的正连续函数,  $z$  分别对  $x$  和  $y$  单调递增, 假若:

1. 存在点  $b$  是  $f(x, y)$  的不动点;
2. 当且仅当  $x > b$  时有  $x > f(x, x)$ .

令  $a_1 = f(a, a), a_2 = f(a_1, a)$  ( $a > 0$ ),

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}) \quad , n = 3, 4, \dots ,$$

则  $\{a_n\}$  单调有界, 有极限, 且其极限  $A$  是  $f$  的不动点.

注.

1. 当  $a_1 \geq a$  时,  $\{a_n\}$  单调递增有上界  $b$ , 当  $a_1 < a$  时,  $\{a_n\}$  单调递减有下界  $b$ ,
2. 按  $b$  的条件可知  $b$  是  $f$  的最大不动点,  $x > b$  时不可能再有不动点,
3. 当  $a_1 < a$  时, 极限  $A \geq b$  是不动点, 表明此时  $A = b$ .

## 1.7 Stolz 公式

**定理 1.7.1** ( $\frac{\infty}{\infty}$  型 Stolz 公式). 设  $\{x_n\}$  严格递增 (即  $\forall n \in \mathbb{N}$  有  $x_n < x_{n+1}$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ).

1. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a$  (有限数), 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = a$ ;
2. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = +\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = +\infty$ ;
3. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = -\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = -\infty$ ;

## 2 函数与函数极限

### 2.1 映射与函数的概念

无.

### 2.2 $x \rightarrow \infty$ 函数极限的概念

无.

### 2.3 $x \rightarrow x_0$ 函数极限的概念

无.

### 2.4 函数极限的性质

无.

### 2.5 函数极限存在的判别法

**定理 2.5.1** (归结原则). 设函数  $f(x)$  在  $\mathring{U}(x_0; \delta_0)$  内有定义,  $A \in \mathbb{R}$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  的充要条件是: 对  $\mathring{U}(x_0; \delta_0)$  内任何以  $x_0$  为极限的数列  $\{x_n\}$ , 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

**定理 2.5.2.** 设函数  $f(x)$  在  $U(\infty) = \{x | |x| > M \geq 0\}$  内有定义. 如果在  $\mathring{U}(x_0; \delta_0)$  内有定义,  $A \in \mathbb{R}$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  的充要条件是: 对  $U(\infty)$  内任何以  $\infty$  为非正常极限的数列  $\{x_n\}$ , 都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

## 3 函数的连续性

### 3.1 连续函数的概念

命题 3.1.1. 设  $f(x)$  在有限开区间  $(a, b)$  内连续, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内一致连续的充要条件是极限  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  及  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  存在 (有限).

命题 3.1.2. 若  $f(x)$  在  $[a, +\infty]$  上连续,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$  (有限), 则  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  一致连续.

命题 3.1.3. 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续,  $\varphi(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \varphi(x)] = 0$ , 则  $\varphi(x)$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续.

### 3.2 函数间断的概念

无.

### 3.3 连续函数的局部性质与初等函数的连续性

无.

### 3.4 连续函数的基本性质

无.

## 4 微分与导数

### 4.1 微分与导数的概念

无.

### 4.2 求导方法与导数公式

无.

### 4.3 微分的计算与应用

无.

## 4.4 高阶导数与高阶微分

无.

## 4.5 参数方程所表示的函数的导数

定义 4.5.1. 设函数  $\varphi(t), \psi(t)$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上有连续的导数, 且

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0,$$

这时称方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

给出的曲线为光滑曲线.

# 5 导数的应用

## 5.1 Fermat 定理和 Darboux 定理

定理 5.1.1 (Fermat 定理). 若  $f(x)$  在点  $x_0$  可导, 且  $x_0$  是  $f(x)$  的极值点, 则  $f'(x_0) = 0$ .

定理 5.1.2 (Darboux 导函数介值定理). 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $f'_+(a) \neq f'_-(b)$ ,  $\eta$  介于  $f'_+(a)$  与  $f'_-(b)$  之间, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = \eta$ .

## 5.2 中值定理

命题 5.2.1 (推广的柯西中值定理). 设  $(a, b)$  为有限或无穷区间,  $f(x)$  在  $(a, b)$  内可微, 且  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A$  (有限或  $\pm\infty$ ), 则  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .

证明. 若  $f(x) \equiv A$ , 则显然; 否则先使用连续函数的介值性, 然后再使用罗尔中值定理.  $\square$

命题 5.2.2. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $(a, b)$  内可微, 若存在极限  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = l$ , 则右导数  $f'_+(a)$  存在且等于  $l$ .

## 5.3 不定式极限

无.

## 5.4 Taylor 公式

无.

## 5.5 函数的单调性与凸性

设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义,  $f(x)$  在  $I$  上称为凸函数, 当且仅当  $\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in (0, 1)$ , 有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \quad (2)$$

若式(2)中的“ $\leq$ ”改成“ $<$ ”, 则是严格凸函数的定义; 若“ $\leq$ ”改成“ $\geq$ ”或“ $>$ ”, 则分别是凹函数与严格凹函数的定义.

**定理 5.5.1.** 设  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义, 则以下条件等价 (其中各不等式要求  $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$  保持成立):

1.  $f(x)$  在  $I$  上是凸函数;
2.  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$ ;
3.  $\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$ ;
4.  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$
5. 曲线  $y = f(x)$  上三点  $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)), C(x_3, f(x_3))$  所围成的有向图面积

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} \geq 0$$

**定理 5.5.2.** 若  $f(x)$  是区间  $I$  上的凸函数, 则对  $I$  上任一内点  $x$ , 单侧导数  $f'_+(x), f'_-(x)$  皆存在, 皆为增函数, 且

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \quad (\forall x \in I^\circ).$$

这里  $I^\circ$  表示  $I$  的全体内点组成之集合 (若  $f$  为严格凸的, 则  $f'_+(x)$  与  $f'_-(x)$  为严格递增的).

**推论 5.5.1.** 若  $f(x)$  在区间  $I$  上为凸的, 则  $f$  在任一内点  $x \in I^\circ$  上连续.

**定理 5.5.3.** 设  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义, 则  $f(x)$  为凸函数的充要条件是:  $\forall x_0 \in I^\circ, \exists$  实数  $\alpha$ , 使得  $\forall x \in I$  有  $f(x) \geq \alpha(x - x_0) + f(x_0)$ .

**定理 5.5.4.** 设  $f(x)$  在区间  $I$  上有导数, 则  $f(x)$  在  $I$  上为凸函数的充要条件是  $f'(x)$  单调递增 ( $x \in I$ ).

**推论 5.5.2.** 设  $f(x)$  在区间  $I$  上有二阶导数, 则  $f(x)$  在区间  $I$  上为凸函数的充要条件是  $f''(x) \geq 0$ .

## 5.6 函数的极值与最值

无.

## 5.7 函数作图

**定理 5.7.1.** 直线  $y = kx + b$  是曲线  $y = f(x)$  的斜渐近线等价于

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx].$$

# 6 实数集的稠密性与完备性

## 6.1 实数集的稠密性

无.

## 6.2 实数集的完备性

无.

## 6.3 上极限和下极限简介

无.

# 7 不定积分

## 7.1 原函数与不定积分的概念

无.

## 7.2 不定积分的计算

无.

### 7.3 有理函数的不定积分

无.

## 8 定积分

### 8.1 定积分的概念与性质

定理 8.1.1 (可积的必要条件). 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界.

### 8.2 微积分基本定理

定理 8.2.1. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 则变上限的定积分所定义的函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

在  $[a, b]$  上连续.

定理 8.2.2 (原函数存在定理). 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则变上限的定积分所定义的函数  $F(x)$  是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的原函数.

定理 8.2.3 (微积分基本定理). 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $F(x)$  是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的任一原函数, 则

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

### 8.3 定积分的计算

无.

### 8.4 定积分存在的条件

定义 8.4.1 (达布和). 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界,  $T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$  为  $[a, b]$  上的任一分割, 记  $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, \cdots, n)$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  及每个  $\Delta_i$  上都存在上、下确界. 记

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \quad m = \inf_{x \in [a, b]} f(x),$$
$$M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x), \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

作和

$$S(T) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad s(T) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i.$$

分别称为  $f$  关于分割  $T$  的上和与下和 (或称为达布上和与达布下和, 统称为达布和).

下面的定理8.4.1到定理8.4.4都是对  $[a, b]$  上的有界函数  $f(x)$  来说的.

**定理 8.4.1.** 对  $[a, b]$  的同一分割  $T$ , 相对于任何点集  $\{\xi_i\}$  而言, 上和是所有积分和的上确界, 下和是所有积分和的下确界, 即

$$S(T) = \sup_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad s(T) = \inf_{\{\xi_i\}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

**定理 8.4.2.** 设  $T'$  为分割  $T$  添加  $p$  个新分点所得到的分割, 则

$$s(T) \leq s(T') \leq s(T) + p(M - m) \|T\|,$$

$$S(T) \geq S(T') \geq S(T) - p(M - m) \|T\|,$$

即分点增加后, 下和递增, 上和递减.

**定理 8.4.3.** 若  $T'$  与  $T''$  为  $[a, b]$  的任意两个分割,  $T$  为  $T'$  与  $T''$  的所有分点合并后得到的分割 (注意: 重复的分点只取一次), 记为  $T = T' + T''$ , 则

$$S(T) \leq S(T'), \quad s(T) \geq s(T'),$$

$$S(T) \leq S(T''), \quad s(T) \geq s(T'').$$

**定理 8.4.4.** 对  $[a, b]$  的任意两个分割  $T'$  与  $T''$  总有

$$s(T') \leq S(T''), \quad s(T'') \leq S(T'),$$

即下和不超过上和.

因此, 对所有分割来说, 所有的下和有上界, 所有的上和和下界, 从而分别有上、下确界, 记作  $s$  与  $S$ , 即

$$s = \sup_T \{s(T)\}, \quad S = \inf_T \{S(T)\}.$$

通常称  $S$  为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的上积分,  $s$  为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的下积分.

**定理 8.4.5** (达布定理).

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} s(T) = s, \quad \lim_{\|T\| \rightarrow 0} S(T) = S$$

**定理 8.4.6** (可积准则 I). 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积的充分必要条件是:  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的上积分等于下积分, 即  $S = s$ .

**定理 8.4.7** (可积准则 II). 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积的充要条件是:  $\forall \epsilon > 0$ , 总存在一个分割  $T$ , 使得

$$S(T) - s(T) < \epsilon$$

或

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \epsilon,$$

其中  $\omega_i(f) = M_i - m_i$  称为  $f(x)$  在  $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$  上的振幅.

**引理 8.4.1.** 设  $f(x)$  在区间  $\Delta$  上有界, 其振幅为  $\omega(f)$ , 则

$$\omega(f) = \sup_{x', x'' \in \Delta} \{|f(x') - f(x'')|\}.$$

**定理 8.4.8** (可积准则 III). 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积的充分必要条件是: 任给正数  $\epsilon, \eta$ , 总存在一个分割  $T$ , 使得属于  $T$  的所有小区间中, 对应于振幅  $\omega_{k'} \geq \epsilon$  的那些小区间的总长  $\sum_{k'} \Delta x_{k'} < \eta$ .

**定理 8.4.9.** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积.

**定理 8.4.10.** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积.

**定理 8.4.11.** 设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上只有有限个间断点的有界函数, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积.

**推论 8.4.1.** 若  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的分段连续函数 (即只有有限个间断点, 且都是第一类间断点的函数), 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积.

## 8.5 积分中值定理

**定理 8.5.1** (积分第一中值定理). 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

**定理 8.5.2** (推广的第一积分中值定理). 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $g(x)$  在  $[a, b]$  上可积且不变号, 则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

**定理 8.5.3** (积分第二中值定理). 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积,  $g(x)$  在  $[a, b]$  上递增且  $g(x) \geq 0$ , 则存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \int_a^b f(x)dx.$$

**推论 8.5.1.** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积,  $g(x)$  在  $[a, b]$  上递减且  $g(x) \geq 0$ , 则存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^b f(x)dx.$$

**定理 8.5.4** (推广的积分第二中值定理). 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积,  $g(x)$  为单调函数, 则存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x)dx$$

## 8.6 关于定积分的一些补充

**命题 8.6.1** (Reimann 引理). 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积,  $g(x)$  以  $T$  为周期, 在  $[0, T]$  上可积, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)g(nx)dx = \frac{1}{T} \int_0^T g(x)dx \int_a^b f(x)dx.$$

# 9 定积分的应用与反常积分

## 9.1 定积分应用的两种常用格式

无.

## 9.2 平面图形的面积

**定理 9.2.1** (参数方程的情形). 当曲线  $C$  由参数方程

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$$

给出, 在  $[\alpha, \beta]$  上  $\psi(t)$  连续,  $\varphi(t)$  连续可微,  $x = \varphi(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上严格递增或严格递减, 则  $C$  与  $x$  轴及两条直线  $x = \varphi(\alpha), x = \varphi(\beta)$  围成的面积为

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)\varphi'(t)|dt.$$

**定理 9.2.2** (极坐标的情形). 设由曲线  $r = \varphi(\theta)$  及射线  $\theta = \alpha, \theta = \beta$  围成一平面图形, 其中  $\varphi(\theta) \geq 0$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续,  $\beta - \alpha \leq 2\pi$ , 则它的面积为

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(\theta)d\theta$$

### 9.3 平行截面面积求体积

无.

### 9.4 平面弧长的概念

定理 9.4.1. 设简单曲线  $C$  的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

且  $C$  为一光滑曲线, 则  $C$  是可求长的且弧长为

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

关于光滑曲线的定义可参见定义4.5.1.

推论 9.4.1. 若简单曲线  $C$  由直角坐标方程

$$y = f(x), \quad x \in [a, b]$$

给出, 则当  $f$  在  $[a, b]$  上连续可微时, 此曲线为一光滑曲线. 这时弧长公式为

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

推论 9.4.2. 当简单曲线  $C$  由极坐标方程

$$r = r(\theta), \quad \theta \in [\alpha, \beta]$$

表示,  $r(\theta)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续可微且  $r^2(\theta) + r'^2(\theta) \neq 0$  时, 曲线弧长公式为

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta.$$

### 9.5 旋转曲面的面积

待作者补充.

### 9.6 定积分在某些物理问题中的应用

无.

## 9.7 反常积分的概念与基本性质

例子 9.7.1. 反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  在  $p > 1$  时收敛, 在  $p \leq 1$  时发散.

## 9.8 反常积分的敛散性

定理 9.8.1 (反常积分的 Cauchy 收敛准则). 如果  $f$  在任一  $[a, u] \subset [a, \omega)$  上可积,  $\int_a^\omega f(x)dx$  为反常积分, 则  $\int_a^\omega f(x)dx$  收敛的充要条件是: 对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $B \in [a, \omega)$ , 使对一切  $u_1, u_2 \in [B, \omega)$  有

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

定理 9.8.2. 绝对收敛的反常积分必收敛.

定理 9.8.3. 如果  $f$  在任一  $[a, u] \subset [a, \omega)$  上非负可积,  $\int_a^\omega f(x)dx$  为反常积分, 则反常积分  $\int_a^\omega f(x)dx$  收敛的充分必要条件使  $F(u) = \int_a^u f(x)dx$  在  $[a, \omega)$  上有上界.

定理 9.8.4. 设  $f, g$  在任一  $[a, u] \subset [a, \omega]$  上可积,  $\int_a^\omega f(x)dx$  及  $\int_a^\omega g(x)dx$  为反常积分, 在  $[a, \omega)$  上有  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ , 则

- (1) 当  $\int_a^\omega g(x)dx$  收敛时有  $\int_a^\omega f(x)dx$  收敛;
- (2) 当  $\int_a^\omega f(x)dx$  发散时有  $\int_a^\omega g(x)dx$  发散.

推论 9.8.1 (比较判别法的极限形式). 设  $f, g$  在任一  $[a, u] \subset [a, \omega)$  上非负可积,  $\int_a^\omega f(x)dx$  及  $\int_a^\omega g(x)dx$  为反常积分. 如果  $\lim_{x \rightarrow \omega^-} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ , 则有

- (1) 当  $0 < c < +\infty$  时,  $\int_a^\omega f(x)dx$  与  $\int_a^\omega g(x)dx$  同敛态;
- (2) 当  $c = 0$  时, 由  $\int_a^\omega g(x)dx$  收敛可推知  $\int_a^\omega f(x)dx$  收敛;
- (3) 当  $c = +\infty$  时, 由  $\int_a^\omega g(x)dx$  发散可推知  $\int_a^\omega f(x)dx$  发散.

推论 9.8.2 (Cauchy 判别法). 设  $f$  在  $[a, +\infty)$  ( $a > 0$ ) 的任一闭子区间上可积.

- (1) 若存在  $p > 1$  和  $C > 0$ , 使得  $|f(x)| \leq \frac{C}{x^p}, x \in [a, +\infty)$ , 则  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  收敛;

(2) 若存在  $p \leq 1$  和  $C > 0$ , 使得  $|f(x)| \geq \frac{C}{x^p}, x \in [a, +\infty)$ , 则  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  发散.

**推论 9.8.3** (Cauchy 判别法). 设  $f$  在  $[a, +\infty)$  ( $a > 0$ ) 的任一闭子区间上可积, 且存在实数  $p$ , 使得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p |f(x)| = c,$$

则

(1) 当  $0 \leq c < +\infty$  且  $p > 1$  时,  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  收敛;

(2) 当  $0 < c \leq +\infty$  且  $p \leq 1$  时,  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  发散.

**推论 9.8.4** (Cauchy 判别法). 设  $f$  在  $[a, b)$  的任一闭子区间上可积且  $b$  为瑕点.

(1) 若存在  $0 < p < 1$  和  $C > 0$ , 使  $|f(x)| \leq \frac{C}{(b-x)^p}, x \in [a, b)$ , 则瑕积分  $\int_a^b |f(x)|dx$  收敛;

(2) 若存在  $p \geq 1$  和  $C > 0$ , 使得  $|f(x)| \geq \frac{C}{(b-x)^p}, x \in [a, b)$ , 则瑕积分  $\int_a^b |f(x)|dx$  发散.

**推论 9.8.5** (Cauchy 判别法). 设  $f$  在  $[a, b)$  的任一闭子区间上可积,  $b$  为瑕点, 且存在实数  $p$ , 使得

$$\lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^p |f(x)| = c,$$

则

(1) 当  $0 \leq c < +\infty$  且  $0 < p < 1$  时, 瑕积分  $\int_a^b |f(x)|dx$  收敛;

(2) 当  $0 < c \leq +\infty$  且  $p \geq 1$  时, 瑕积分  $\int_a^b |f(x)|dx$  发散.

**定理 9.8.5** (Dirichlet 判别法). 设  $f(x), g(x)$  在任一  $[a, u] \subset [a, \omega)$  上可积,  $\int_a^\omega f(x)g(x)dx$  是反常积分. 若

(1)  $F(u) = \int_a^u f(x)dx$  在  $[a, \omega)$  上有界;

(2)  $g(x)$  在  $[a, \omega)$  上单调且  $\lim_{x \rightarrow \omega^-} g(x) = 0$ ,

则反常积分  $\int_a^\omega f(x)g(x)dx$  收敛.

**定理 9.8.6** (Abel 判别法). 设  $f, g$  在任一  $[a, u] \subset [a, \omega)$  上可积,  $\int_a^\omega f(x)g(x)dx$  是反常积分. 若  $\int_a^\omega f(x)dx$  收敛,  $g(x)$  在  $[a, \omega)$  上单调有界, 则  $\int_a^\omega f(x)g(x)dx$  收敛.

## 10 数项级数

### 10.1 数项级数的概念与性质

暂无.

### 10.2 正项级数

**定理 10.2.1.** 设  $a_n \geq 0 (n = 1, 2, \dots)$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛的充要条件是: 它的部分和数列  $\{s_n\}$  有上界.

**定理 10.2.2** (Cauchy 积分判别法). 设函数  $f$  在  $[1, +\infty)$  上单调递减, 并且非负, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  与无穷积分  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  具有相同的敛散性.

**定理 10.2.3** (比较判别法). 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  是两个级数. 若存在正整数  $N$ , 使当  $n \geq N$  时有  $0 \leq a_n \leq b_n$ , 则

(1) 当级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

(2) 当级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散.

**定理 10.2.4** (比较判别法的极限形式). 设有正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ , 则

(1) 当  $0 < l < +\infty$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  同敛散;

(2) 当  $l = 0$  且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

(3) 当  $l = +\infty$  且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

**定理 10.2.5** (Cauchy 根值法). 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为正项级数.

(1) 如果存在  $q \in (0, 1), N \in \mathbb{N}_+$ , 使得

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1, \quad n > N,$$

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

(2) 如果  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$  对无穷多个  $n$  成立, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

**推论 10.2.1** (Cauchy 根植法的极限形式). 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是正项级数, 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r,$$

则

(1) 当  $r < 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

(2) 当  $r > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

**定理 10.2.6** (D'Alembert 比值法). 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为正项级数.

(1) 如果存在  $q \in (0, 1), N \in \mathbb{N}_+$ , 使得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q, \quad n > N,$$

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

(2) 如果存在  $N \in \mathbb{N}_+$ , 使得  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$  对  $n > N$  成立, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

**推论 10.2.2** (D'Alembert 比值法的极限形式). 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是正项级数, 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = s,$$

则

(1) 当  $s < 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

(2) 当  $s > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

**定理 10.2.7** (Cauchy 根值法). 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为正项级数. 如果

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r,$$

则

(1) 当  $r < 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

(2) 当  $r > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

**定理 10.2.8** (D'Alembert 比值法). 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是正项级数.

(1) 若  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = s < 1$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

(2) 若  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = s' > 1$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

**定理 10.2.9** (Raabe 判别法). 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是正项级数, 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = r,$$

则

(1) 当  $r > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

(2) 当  $r < 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

### 10.3 一般项级数

**定理 10.3.1.** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛, 则它必收敛.

**定理 10.3.2** (Leibniz 判别法). Leibniz 级数必收敛.

**定理 10.3.3** (Dirichlet 判别法). 如果数列  $\{a_n\}$  单调趋于 0, 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  的部分和数列有界, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

**定理 10.3.4** (Abel 判别法). 如果数列  $\{a_n\}$  单调有界, 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

### 10.4 绝对收敛与条件收敛级数的性质

作者暂时还没学.

## 11 函数项级数

### 11.1 函数列一致收敛的概念与判定

**定理 11.1.1** (余项定理). 设函数列  $\{f_n(x)\}$  在集合  $I$  上逐点收敛与函数  $f(x)$ . 引入记号

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|,$$

则下列三条是等价的.

- (1)  $\{f_n(x)\}$  在集合  $I$  上一致收敛于函数  $f(x)$ ;
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f) = 0$ ;
- (3) 对任何数列  $\{x_n\} \subset I$  都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$ .

**定理 11.1.2** (一致收敛的柯西准则). 设函数列  $\{f_n(x)\}$  在集合  $I$  上有定义, 则这函数列在  $I$  上一致收敛的充要条件是: 对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_+$ , 使当  $n, m > N$  时都有

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in I.$$

## 11.2 一致收敛函数列的性质

**定理 11.2.1** (连续性). 若函数列  $\{f_n(x)\}$  的每一项  $f_n(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 并且  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $f(x)$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续.

**定理 11.2.2** (Dini 定理). 设函数列  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上逐点收敛于  $f(x)$ . 如果

- (1)  $f_n(x)$  都在  $[a, b]$  上连续,  $n = 1, 2, \dots$ ;
- (2) 对任意固定的  $x \in [a, b]$ , 数列  $\{f_n(x)\}$  对  $n$  都是单调递增的;
- (3) 极限函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,

则函数列  $\{f_n(x)\}$  在闭区间  $[a, b]$  上一致收敛于  $f(x)$ .

**定理 11.2.3** (可积性). 若函数列  $\{f_n(x)\}$  的每一项在  $[a, b]$  上连续, 并且  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $f(x)$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

**定理 11.2.4** (可导性). 如果函数列  $\{f_n(x)\}$  满足条件

- (1)  $f_n(x)$  在  $[a, b]$  上连续可微,  $n = 1, 2, \dots$ ;
- (2) 导函数列  $\{f'_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $\varphi(x)$ ;
- (3)  $\{f_n(x)\}$  至少在某个  $x_0 \in [a, b]$  收敛, 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = y_0$ ,

那么函数列  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛于某个连续可微函数  $f(x)$ , 并且  $f'(x) = \varphi(x)$ .

## 11.3 函数项级数一致收敛的概念及判定

**定理 11.3.1** (一致收敛的 Cauchy 准则). 函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在数集  $E$  上一致收敛的充分必要条件时: 对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}_+$ , 使当  $n > N$  时, 对一切  $p \in \mathbb{N}_+$  都有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in E.$$

**推论 11.3.1.** 函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在数集  $E$  上一致收敛的必要条件是函数列  $\{u_n(x)\}$  在  $E$  上一致收敛于 0.

**定义 11.3.1.** 设函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $E$  上有定义, 称  $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$  为其余级数. 当  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $E$  上收敛时, 称  $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$  为其余项, 记作  $R_n(x)$ , 即

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x), \quad x \in E.$$

**定理 11.3.2** (余项定理). 设函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在数集  $E$  上收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $E$  上一致收敛的充分必要条件为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |R_n(x)| = 0.$$

**定理 11.3.3** (M 判别法). 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  是定义在数集  $E$  上的函数项级数. 若存在收敛的常数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  和  $N_0 \in \mathbb{N}_+$ , 使当  $n \geq N_0$  时,

$$|u_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in E,$$

则函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $E$  上一致收敛.

## 11.4 和函数的分析性质

**定理 11.4.1** (连续性). 若  $u_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 都在区间  $[a, b]$  上连续, 函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $S(x)$ , 则和函数  $S(x)$  在  $[a, b]$  上连续.

**定理 11.4.2** (Dini 定理). 设函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上逐点收敛到  $S(x)$  且满足

(1)  $u_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 都在  $[a, b]$  上连续且非负;

(2)  $S(x)$  在  $[a, b]$  连续,

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛.

**定理 11.4.3** (逐项积分). 若  $u_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 都在区间  $[a, b]$  上连续, 函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $S(x)$ , 则  $S(x)$  在  $[a, b]$  上可积且

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

**定理 11.4.4** (逐项求导). 若函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  满足

(1)  $u_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 在  $[a, b]$  上连续可导;

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在某点  $x_0 \in [a, b]$  收敛;

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛到  $\sigma(x)$ ,

则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛到某个连续可导函数  $S(x)$  且  $S'(x) = \sigma(x)$ , 即

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

## 11.5 处处不可微的连续函数

作者暂时还没学.

# 12 幂级数与 Fourier 级数

## 12.1 幂级数的收敛域与和函数

**定理 12.1.1** (Abel 第一定理). (1) 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x_1 (\neq 0)$  处收敛, 则对于满足不等式

$|x| < |x_1|$  的一切  $x$ , 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  都是绝对收敛;

(2) 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x_2 (\neq 0)$  处发散, 则对于满足不等式  $|x| > |x_2|$  的一切  $x$ , 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  都发散.

**定理 12.1.2.** 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径  $R > 0$ , 则

(1) 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在区间  $(-R, R)$  内每一点绝对收敛;

(2) 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在任意  $x \notin [-R, R]$  处发散;

(3) 当  $x = \pm R$  时, 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  可能收敛, 也可能发散.

**定理 12.1.3.** 对于给定的级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$$

或

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho,$$

则其收敛半径  $R = \frac{1}{\rho}$  (这里约定  $\rho = 0$  时, 定义  $\frac{1}{\rho} = +\infty$ ;  $\rho = +\infty$  时, 定义  $\frac{1}{\rho} = 0$ ).

**定理 12.1.4** (Cauchy-Hadamand 定理). 对于给定的幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 如果

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho,$$

则其收敛半径  $R = \frac{1}{\rho}$  (同样地, 约定当  $\rho = 0$  时, 定义  $\frac{1}{\rho} = +\infty$ ;  $\rho = +\infty$  时, 定义  $\frac{1}{\rho} = 0$ ).

**定理 12.1.5** (Abel 第二定理). (1) 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径  $R > 0$ , 则对任意取定的  $r \in (0, R)$ , 它在  $[-r, r]$  上一致收敛;

(2) 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径  $R > 0$  且它在  $x = R$  处收敛, 则它在  $[0, R]$  上一致收敛;

(3) 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径  $R > 0$  且它在  $x = -R$  处收敛, 则它在  $[-R, 0]$  上一致收敛.

**定理 12.1.6** (连续性). 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $R > 0$ , 则它的和函数  $S(x)$  在  $(-R, R)$  内连续.

**推论 12.1.1.** 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $R > 0$ , 并且它在  $x = R$  处收敛, 则它的和函数  $S(x)$  在  $[0, R]$  上连续, 特别地,

$$\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

**定理 12.1.7** (逐项求导与逐项积分). 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $R > 0$ , 和函数为  $S(x)$ , 即

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad -R < x < R,$$

则幂级数在收敛区间内可以逐项求导与逐项积分, 即

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots, \quad -R < x < R \end{aligned} \quad (3)$$

和

$$\begin{aligned} \int_0^x S(t) dt &= \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \\ &= a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots, \quad -R < x < R \end{aligned} \quad (4)$$

且3式和4式中的幂级数收敛半径仍然是  $R$ .

## 12.2 函数的幂级数展开

几个常用的初等函数的幂级数展开:

1.  $e^x$  的展开式

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.  $\sin x$  的展开式

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3.  $\cos x$  的展开式

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4.  $(1+x)^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$  的展开式

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1).$$

二项式展开的收敛情况如下:

(1) 当  $\alpha \leq -1$  时, 收敛域为  $(-1, 1)$ ;

(2) 当  $-1 < \alpha < 0$  时, 收敛域为  $(-1, 1]$ ;

(3) 当  $\alpha > 0$  时, 收敛域为  $[-1, 1]$ .

5.  $\ln(1+x)$  的展开式

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1].$$

6.  $\arctan x$  的展开式

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1]$$

### 12.3 三角级数与 Fourier 级数

如果函数  $f(x)$  是以  $2l$  为周期的周期函数, 并且在区间  $[-l, l]$  上可积, 则  $f(x)$  的以  $2l$  为周期的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

### 12.4 Fourier 级数的收敛性

作者暂时还没学.

## 13 多元函数及其微分学

### 13.1 平面中的点集

**定义 13.1.1.** 如果点集  $E$  中的每一点都是  $E$  的内点, 则称  $E$  是开集. 如果点集  $E$  的所有聚点都属于  $E$ , 则称  $E$  是闭集.

### 13.2 $\mathbb{R}^2$ 完备性

无.

### 13.3 二元函数的极限和连续性

无.

### 13.4 多元函数的偏导数和全微分

**定理 13.4.1** (可微的必要条件). 设二元函数  $f$  在  $P_0(x_0, y_0)$  某邻域内有定义, 在点  $P_0(x_0, y_0)$  可微, 则函数  $f$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的全微分可以表示为

$$df|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

**推论 13.4.1.** 设  $z = f(x, y)$  在  $P_0(x_0, y_0)$  的某邻域内有定义, 则它在  $P_0(x_0, y_0)$  处可微的充要条件是: 两个偏导数  $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$  都存在, 且满足

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0, y_0) - (f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y)}{\rho} = 0.$$

### 13.5 复合函数的微分法

**定理 13.5.1.** 设函数  $z = f(x, y)$  可微,  $x = \varphi t$  和  $y = \psi t$  可导, 则复合函数  $z = f(\varphi(t), \psi(t))$  也可导, 并且

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = f_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t).$$

**定理 13.5.2** (复合函数偏导链式法则). 设函数  $z = f(u, v)$  可微,  $u = \varphi(x, y)$  和  $v = \psi(x, y)$  都存在偏导数, 则复合函数  $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$  也存在偏导数, 并且

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned}$$

**定理 13.5.3.** 设函数  $z = f(u, v)$  在  $(u, v)$  可微,  $u = \varphi(x, y)$  和  $v = \psi(x, y)$  分别在  $(x, y)$  可微, 则复合函数  $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$  在  $(x, y)$  也可微, 并且

$$dz = \left( \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy.$$

**定理 13.5.4.** 设函数  $z = f(x, y)$  的混合偏导数  $f_{xy}(x, y)$  和  $f_{yx}(x, y)$  都在点  $(x_0, y_0)$  存在, 并且至少有一个在该点连续, 则二者相等,

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

## 14 多元函数微分法的应用

### 14.1 方向导数

**定理 14.1.1.** 如果函数  $f$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  处可微, 则  $f$  在点  $P_0$  沿任何方向  $\boldsymbol{l}$  的方向导数都存在, 并且

$$f_{\boldsymbol{l}}(P_0) = f_x(P_0) \cos \alpha + f_y(P_0) \cos \beta,$$

其中  $\cos \alpha, \cos \beta$  是方向  $\boldsymbol{l}$  的方向余弦.

### 14.2 多元函数 Taylor 公式

**定理 14.2.1** (Lagrange 型余项的 Taylor 公式). 设二元函数  $f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某个领域  $U(P_0)$  内直到  $n+1$  阶连续可微 (即具有直到  $n+1$  阶的连续偏导数), 则对于任意一点  $P(x_0 + h, y_0 + k) \in U(P_0)$ , 存在相应的  $\theta \in (0, 1)$ , 使得

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) = & f(x_0, y_0) + \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) \\ & + \cdots + \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) \\ & + \frac{1}{(n+1)!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k), \end{aligned} \quad (5)$$

其中每一项都含有形式上的符号运算, 即

$$\left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x_0, y_0) = \sum_{i=0}^m C_m^i \frac{\partial^m f(x, y)}{\partial x^i \partial y^{m-i}} \Big|_{(x_0, y_0)} h^i k^{m-i}.$$

式5称为二元函数  $f(x, y)$  在点  $P(x_0, y_0)$  的  $n$  阶带 Lagrange 型余项的 Taylor 公式 (当  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  时, 也称为 Maclaurin 公式).

### 14.3 多元函数的极值

为了方便叙述定理14.3.1, 记

$$A := f_{xx}(P_0), \quad B := f_{xy}(P_0), \quad C := f_{yy}(P_0),$$

$$H := \det \boldsymbol{H}_f(P_0) = AC - B^2.$$

**定理 14.3.1** (极值的充分条件). 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的某领域  $U(P_0)$  内具有二阶连续偏导数, 又设  $P_0$  是  $f$  的一个稳定点,

1. 当  $H > 0$  时, 如果  $A > 0$ (或  $C > 0$ ), 则函数  $f$  在  $P_0$  处取得极小值; 如果  $A < 0$ (或  $C < 0$ ), 则函数  $f$  在  $P_0$  处取得极大值;
2. 当  $H < 0$ , 函数  $f$  在  $P_0$  处不能取得极值.

## 14.4 隐函数

**定理 14.4.1** (隐函数的存在唯一性). 设函数  $z = F(x, y)$  满足下列条件:

1.  $F(x_0, y_0) = 0$ ;
2.  $F$  在以点  $P_0(x_0, y_0)$  为内点的某一区域  $D \subset \mathbb{R}^2$  中连续;
3.  $F$  在  $D$  内关于  $y$  是严格单调的,

则在点  $P_0$  的某邻域  $U(P_0) \subset D$  内, 由方程  $F(x, y) = 0$  可以唯一地确定一个定义在某区间  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  内的 (隐) 函数  $y = f(x)$ , 使得

1.  $f(x_0) = y_0, \{(x, f(x)) | x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)\} \subset U(P_0)$  且

$$F(x, f(x)) \equiv 0, \quad x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha);$$

2.  $y = f(x)$  在  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  内连续.

**定理 14.4.2** (隐函数的可微性). 设函数  $z = F(x, y)$  满足下列条件:

1.  $F(x_0, y_0) = 0$ ;
2.  $F$  在以点  $P_0(x_0, y_0)$  为内点的某一区域  $D \subset \mathbb{R}^2$  中连续;
3.  $F$  在  $D$  内存在连续的偏导数  $F_y(x, y)$  且  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ ,

则在点  $P_0$  的某邻域  $U(P_0) \subset D$  内, 由方程  $F(x, y) = 0$  可以唯一地确定一个定义在某区间  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  内连续的 (隐) 函数  $y = f(x)$ , 使得

1.  $f(x_0) = y_0, \{(x, f(x)) | x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)\} \subset U(P_0)$  且

$$F(x, f(x)) \equiv 0, \quad x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha);$$

2. 假设  $F_x(x, y)$  在  $D$  内存在且连续, 则隐函数  $y = f(x)$  在  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  中有连续导函数, 并且

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

**定理 14.4.3.** 设函数  $u = F(x, y, z)$  满足下列条件:

1.  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ ;
2.  $F$  在以点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  为内点的某一区域  $D \subset \mathbb{R}^3$  中连续;
3.  $F$  在  $D$  内存在连续的偏导数  $F_x, F_y$  和  $F_z$ , 并且  $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ,

则在点  $P_0$  的某邻域  $U(P_0) \subset D$  内, 由方程  $F(x, y, z) = 0$  可以唯一地确定一个定义在某二维区域  $U(x_0, y_0)$  内的二元 (隐) 函数  $z = f(x, y)$ , 使得

1.  $f(x_0, y_0) = z_0, \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in U(x_0, y_0) \subset U(P_0)\}$  且

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0, \quad (x, y) \in U(x_0, y_0);$$

2.  $z = f(x, y)$  在  $U(x_0, y_0)$  内具有连续的偏导数  $z_x, z_y$  且

$$f_x(x, y) = -\frac{F_x}{F_z}, \quad f_y(x, y) = -\frac{F_y}{F_z}.$$

## 14.5 隐函数组

**定理 14.5.1** (隐函数组的存在唯一性). 设函数组  $F(x, y, z)$  和  $G(x, y, z)$  满足下列条件:

1.  $F(x_0, y_0, z_0) = 0, G(x_0, y_0, z_0) = 0$ ;
2.  $F$  和  $G$  在以点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  为内点的区域  $V \subset \mathbb{R}^3$  存在一阶连续偏导数;
3.  $F, G$  关于  $y, z$  的 Jacobi 行列式  $\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_{P_0} \neq 0$ ,

则在点  $P_0$  的某邻域  $U(P_0) \subset V$  内, 由方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (x, y, z) \in V,$$

可以唯一地确定一个定义在点  $x_0$  的邻域  $U(x_0)$  内的一元 (隐) 函数组

$$\begin{cases} y = \varphi(x), \\ z = \psi(x), \end{cases}$$

使得

1.  $y_0 = \varphi(x_0), z_0 = \psi(x_0)$  且  $\{(x, \varphi(x), \psi(x)) | x \in U(x_0)\} \subset U(P_0)$ , 进而有恒等式

$$\begin{cases} F(x, \varphi(x), \psi(x)) \equiv 0, \\ G(x, \varphi(x), \psi(x)) \equiv 0, \end{cases} \quad x \in U(x_0);$$

2.  $y = \varphi(x)$  和  $z = \psi(x)$  在  $U(x_0)$  内连续;

3.  $y = \varphi(x)$  和  $z = \psi(x)$  在  $U(x_0)$  内有一阶连续的导数  $\varphi'(x), \psi'(x)$  且

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}, \quad \frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)},$$

其中

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}, \quad \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} = \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}.$$

**定理 14.5.2** (反函数的存在唯一性). 设函数组

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases} \quad (x, y) \in D.$$

中的函数都在  $D$  上有连续的一阶偏导数, 点  $P_0(x_0, y_0)$  是  $D$  的内点. 进一步设

$$u_0 = u(x_0, y_0), \quad v_0 = v(x_0, y_0), \quad \left. \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|_{P_0} \neq 0,$$

则在点  $P'_0(u_0, v_0)$  的某邻域  $U(P'_0)$  内存在唯一的一组反函数  $x = x(u, v), y = y(u, v)$ , 使得

$$x_0 = x(u_0, v_0), \quad y_0 = y(u_0, v_0), \quad \{(x(u, v), y(u, v)) | (u, v) \in U(P'_0)\} \subset U(P_0).$$

进而, 恒等式

$$\begin{cases} u \equiv u(x(u, v), y(u, v)), \\ v \equiv v(x(u, v), y(u, v)), \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} x \equiv x(u(x, y), v(x, y)), \\ y \equiv y(u(x, y), v(x, y)), \end{cases}$$

分别在  $U(P'_0)$  和  $P_0$  的某邻域中成立, 并且  $x = x(u, v), y = y(u, v)$  在  $U(P'_0)$  内存在连续的一阶偏导数,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{\partial v}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}, & \frac{\partial x}{\partial v} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}, \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{\partial u}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \end{aligned}$$

## 15 含参变量积分

### 15.1 含参变量正常积分及其分析性质

**定理 15.1.1** (含参变量积分的连续性). 设函数  $f(x, t)$  在矩形区域  $R = [a, b] \times [c, d]$  上连续, 则含参变量正常积分

$$I(t) = \int_a^b f(x, t) dx, \quad t \in [c, d]$$

在  $[c, d]$  上也连续.

**定理 15.1.2** (含参变量积分的可微性). 设函数  $f(x, t)$  和  $f_t(x, t)$  在矩形区域  $R = [a, b] \times [c, d]$  上连续, 则含参变量积分

$$I(t) = \int_a^b f(x, t) dx, \quad t \in [c, d]$$

在  $[c, d]$  上也可微且

$$\frac{d}{dt} I(t) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx, \quad t \in [c, d].$$

**定理 15.1.3** (含参变量积分的可积性). 设函数  $f(x, t)$  在矩形区域  $R = [a, b] \times [c, d]$  上连续, 则含参变量积分

$$I(t) = \int_a^b f(x, t) dx, \quad t \in [c, d]$$

在  $[c, d]$  上可积, 并且有下列等式成立:

$$\int_c^d I(t) dt = \int_c^d dt \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, t) dt \right\} dx.$$

**定理 15.1.4** (含参变量积分的可微性). 设函数  $f(x, t)$  和  $f_t(x, t)$  在矩形区域  $R = [a, b] \times [c, d]$  上连续, 函数  $\varphi(t)$  和  $\psi(t)$  在  $[c, d]$  上可导且

$$a \leq \varphi(t) \leq b, \quad a \leq \psi(t) \leq b, \quad t \in [c, d],$$

则含参变量积分  $I(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x, t) dx$  在  $[c, d]$  上可导且

$$\frac{d}{dt} I(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f(\psi(t), t) \psi'(t) - f(\varphi(t), t) \varphi'(t).$$

### 15.2 含参变量反常积分及一致收敛判别法

**定义 15.2.1.** 设对于区间  $J$  中的每一点  $t$ , 含参变量  $t$  的反常积分  $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$  都收敛. 如果对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在与  $t$  无关的  $G \in (a, +\infty)$ , 使得对于任意的  $G' > G$  和  $t \in J$  均

成立

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, t) dx - \int_a^{G'} f(x, t) dx \right| = \left| \int_{G'}^{+\infty} f(x, t) dx \right| < \varepsilon,$$

则称含参变量反常积分  $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$  在区间  $J$  上一致收敛或关于  $t \in J$  一致收敛.

**定理 15.2.1** (一致收敛的 Cauchy 准则). 含参变量反常积分  $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$  在区间  $J$  上一致收敛的充分必要条件是: 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 总存在  $G > a$ , 使得只要  $G < G_1, G_2 < +\infty$ , 就成立

$$\left| \int_{G_1}^{G_2} f(x, t) dx \right| < \varepsilon, \quad \forall t \in J.$$

**定理 15.2.2** (M 判别法). 如果含参变量反常积分  $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$  的被积函数  $f(x, t)$  可被一个可积的函数  $F(x)$  所控制, 即存在  $b \geq a$ , 使得

$$|f(x, t)| \leq F(x), \quad \forall x \in [b, +\infty), \forall t \in J,$$

并且反常积分  $\int_b^{+\infty} F(x) dx$  收敛, 则含参变量反常积分  $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$  在区间  $J$  上是 (绝对) 一致收敛的.

**定理 15.2.3** (一致收敛的 Dirichlet 判别法). 设  $f(x, t)$  和  $g(x, t)$  在  $[a, +\infty) \times J$  上连续且满足如下条件:

- (1) 存在正常数  $M$ , 使得  $\left| \int_a^b f(x, t) dx \right| \leq M$  对所有的  $b$  满足  $a < b < +\infty$  和  $t \in J$ ;
- (2) 函数  $g(x, t)$  是  $x$  的单调函数;
- (3) 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $g(x, t)$  关于  $t \in J$  一致趋于 0,

则含参变量反常积分  $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) g(x, t) dx$  在区间  $J$  上一致收敛.

**定理 15.2.4** (一致收敛的 Abel 判别法). 设  $f(x, t)$  和  $g(x, t)$  在  $[a, +\infty) \times J$  上连续且满足如下条件:

- (1) 含参变量反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$  在区间  $J$  上一致收敛;
- (2) 函数  $g(x, t)$  是  $x$  的单调函数;
- (3) 函数  $g(x, t)$  在区间  $J$  上一致有界, 即存在  $M > 0$ , 使得

$$|g(x, t)| \leq M, \quad (x, t) \in [a, +\infty) \times J,$$

则含参变量反常积分  $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) g(x, t) dx$  在区间  $J$  上一致收敛.

### 15.3 含参变量反常积分的分析性质

**定理 15.3.1** (连续性). 设函数  $f(x, t)$  在矩形区域  $R = [a, +\infty) \times J$  上连续, 其中  $J$  是一个区间. 又含参变量反常积分  $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t)dx$  在区间  $J$  上是一致收敛的, 则含参变量反常积分

$$I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t)dx$$

在  $J$  上连续.

**定理 15.3.2** (可积性). 设函数  $f(x, t)$  在矩形区域  $R = [a, +\infty) \times J$  上连续, 并且含参变量反常积分  $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t)dx$  在区间  $J$  上一致收敛, 则  $I(t)$  在任意有限区间  $[c, d] \subset J$  上可积且

$$\int_c^d I(t) dt = \int_c^d \left\{ \int_a^{+\infty} f(x, t) dx \right\} dt = \int_a^{+\infty} \left\{ \int_c^d f(x, t) dt \right\} dx.$$

**定理 15.3.3** (可微性). 设函数  $f(x, t)$  和  $f_t(x, t)$  在矩形区域  $R = [a, +\infty) \times J$  上连续且  $I(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t)dx$  在  $J$  上收敛,  $\int_a^{+\infty} f_t(x, t)dx$  在  $J$  上一致收敛, 则含参变量反常积分  $I(t)$  在  $J$  上可导且

$$\frac{d}{dt} I(t) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx, \quad t \in J.$$

**定理 15.3.4** (积分顺序的可交换性). 设  $f(x, y)$  在  $R = [a, +\infty) \times [c, +\infty)$  上连续, 含参变量反常积分  $\varphi(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)dy$  和  $\psi(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$  分别在区间  $[a, +\infty)$  和  $[c, +\infty)$  中收敛, 并且

(1) 积分  $\varphi(x)$  和  $\psi(y)$  在  $[a, +\infty)$  及  $[c, +\infty)$  上分别具有内闭一致收敛性, 即  $\varphi(x)$  关于  $x$  在任何区间  $[a, b]$  上一致收敛,  $\psi(y)$  关于  $y$  在任何区间  $[c, d]$  上一致收敛;

(2) 下面的两个积分中至少有一个收敛:

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy, \quad \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx,$$

则

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy, \quad \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx.$$