Automi e Linguaggi Formali

Sara Feltrin

26-02-18

Capitolo 1

Introduzione

Per iniziare, ci sono alcuni concetti di base da tenere a mente:

- **Alfabeto**: insieme finito e non vuoto di simboli, per esempio $\Sigma = \{0{,}1\}$ oppure $\Sigma = \{a,b,c,d,e,..,z\}$;
- **Stringa**: sequenza finita di simboli da un alfabeto Σ, per esempio: 011001 o abc;
- **Stringa vuota**: stringa con zero occorrenze di simboli dell'alfabeto Σ, denotata da ε;
- **Lunghezza di una stringa**: numero di simboli nella stringa, per esempio |w| denota la lunghezza della stringa w, quindi $|01001| = 5$;
- **Potenze di un alfabeto**: Σ^k insieme delle stringhe di lunghezza k con simboli da Σ, per esempio preso l'alfabeto Σ=$\{0{,}1\}$: Σ^0=$\{\varepsilon\}$, Σ^1=$\{0{,}1\}$, Σ^2=$\{00{,}01{,}10{,}11\}$. Viene chiamata potenza di un alfabeto poichè può essere vista come una potenza dove la base è il numero di simboli dell'alfabeto e l'esponente il numero della potenza dell'alfabeto (quindi, nell'alfabeto dei numeri binari con Σ^3, avremo $2^3 = 8$);
- **Insieme di tutte le stringhe**: per ottenere l'insieme di tutte le stringhe, usiamo il simbolo * e scriviamo $\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup ..$;
- **Linguaggio**: dato un alfabeto Σ, chiamiamo linguaggio ogni sottoinsieme $L \subseteq \Sigma^*$ (compreso anche il linguaggio vuoto che non contiene nessuna parola).

Capitolo 2

Automi a stati finiti deterministici

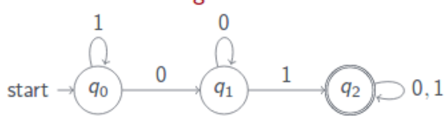
Un automa a stati finiti deterministico, chiamato anche DFA, è una quintupla $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dove

- Q è un insieme finito di stati;
- Σ è un alfabeto finito, si intende quindi l'insieme di input che può leggere l'automa;
- δ è una funzione di transizione $(q, a) \mapsto q'$, ovvero dallo stato in cui sono, quando leggo il simbolo a, passo allo stato q';
- $q_0 \subseteq Q$ è lo stato iniziale dell'automa;
- $F \subseteq Q$ è un insieme di stati finiti;

L'automa può essere rappresentato sia come diagramma di transizioni sia come tabella di transizioni:

Esempio: costruiamo un automa A che accetta il linguaggio delle stringhe con 01 come sottostringa

- L'automa come **diagramma di transizione**:



- L'automa come **tabella di transizione**:

	0	1
$\rightarrow q_0$	q_1	q_0
q_1	q_1	q_2
$*q_2$	q_2	q_2

2.1 Linguaggio accettato da un DFA

La funzione di transizione prende in input uno stato e una parola dando in output una nuova parola. Definizione:

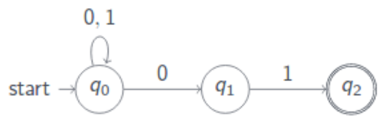
- **base**: $\delta(q, \varepsilon) = q \rightarrow$ ritorna lo stadio in cui è;
- **induzione**: $\widehat{\delta}(q, w) = \delta(\widehat{\delta}(q, x), a)$, dove $\widehat{\delta}$ rappresenta lo stato attuale e δ lo stato in cui mi troverò, a indica l'ultima lettera della parola che voglio leggere. NB: in $\widehat{\delta}$ faccio la ricorsione fino ad arrivare al caso base;

Detto ciò, possiamo definire il linguaggio accettato da A in questo modo: $L(A) = \{w : \widehat{\delta}(q_0, w) \in F\}$. Tutti i linguaggi accettati da DFA vengono chiamati **linguaggi regolari**.

Capitolo 3

Automi stati finiti non deterministici

È un automa che può trovarsi contemporaneamente in più stati diversi e le transizioni non devono per forze essere complete, per esempio:



Infatti questo non può essere un DFA perchè da q_0 se leggo 0 posso trovarmi contemporaneamente in q_0 e q_1, in più da q_1 posso muovermi solo in q_2 e da q_2 non posso proprio muovermi. Un automa a stati finiti non deterministici(NFA) è una quintupla $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dove

- Q è un insieme finito di stati;
- Σ è un alfabeto finito;
- δ è una funzione di transizione che prende in input (q,a) e restituisce un sottoinsieme di Q;
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale;
- $F \in Q$ è un insieme di stati finali;

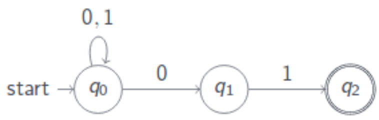
Anche per i NFA abbiamo una definizione rigorosa:

- **base**: $\widehat{\delta}(q, \varepsilon) = q$;
- **induzione**: $\widehat{\delta}(q, w) = \bigcup_{p \in \delta(\widehat{q}, x)} \delta(p, a)$;

Data una parola, il nostro automa potrà trovarsi in uno dei tanti stati che siamo andati a calcolare.

3.1 Equivalenza tra DFA e NFA

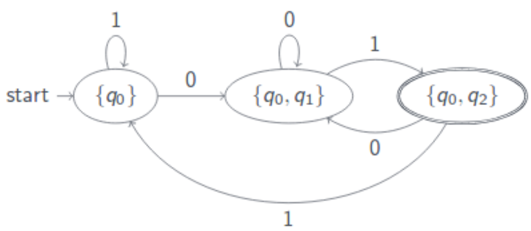
NFA e DFA sono in grado di riconoscere gli stessi linguaggi e l'equivalenza si dimostra mediante una **costruzione a sottoinsiemi**. Infatti, dato un NFA $N = (Q_N, \Sigma, q_0, \delta_N, F_N)$ costruiremo un DFA $D = (Q_D, \Sigma, q_0, \delta_D, F_D)$ tale che L(D)=L(N). Ogni stato del DFA, Q_D corrisponde ad un insieme di stati dell'NFA. *Uno stato del DFA F_D è finale se c'è almeno uno stato finale corrispondente all'NFA.* La funzione di transizione δ_D percorre tutte le possibili strade. Ad esempio:



Costruiamo δ_D per l'NFA qui sopra:

	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$*\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

La tabella di transizione per D ci permette di ottenere il diagramma di transizione



Per semplificare il disegno, ho omesso gli stati non raggiungibili

Teorema 3.1.1. *Sia D il DFA ottenuto da un NFA N con la costruzione a sottoinsiemi. Allora L(D)=L(N).*

Teorema 3.1.2. *Un linguaggio L è accettato da un DFA se e solo se è accettato da un NFA.*

3.2 NFA con epsilon-transizioni

Le epsilon-transizioni vengono usate per muovere l'automa di stato anche se non viene dato nessun simbolo in input. Un automa a stati finiti non deterministico con ε-transizioni (ε-NFA) è una quintupla $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dove cambia solo

- δ che è una funzione di transizione che prende in input uno stato in Q oppure un simbolo nell'alfabeto $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$

L'eliminazione delle ε-transizioni procede per ε-chiusura degli stati, cioè prendendo tutti gli stati raggiungibili da q con una sequenza $\varepsilon\varepsilon...\varepsilon$. L'$\varepsilon$-chiusura viene indicata con **ECLOSE(q)**.

3.3 Equivalenza tra DFA e ε-NFA

Per ogni ε-NFA E c'è una DFA D tale che L(E)=L(D), e viceversa. Ogni stato del DFA corrisponde ad un insieme di stati chiuso per ε-chiusura. Uno stato del DFA è finale se c'è **almeno** uno stato finale corrispondente nell'ε-NFA.