Замечание Заметка Доказательство

Contents

1 Линейное пространство и подпространство **1**

1.1 линейное пространство . . . 1

1.2 линейное подпространство . . . 2

2 линейная зависимость, базис, размерность **3**

1 Линейное пространство и подпространство

k — основное поле элементы поле k - скаляры.

1.1 линейное пространство

Определение 1.1 *Линейное(векторное) пространство над полем k. Множество с двумя операциями "+" и "∗".*

$$+ : V \times V \to V(u, v) \to u + v$$

.

$$* : V \times V \to V(u, v) \to u * v$$

аксиомы, которые должны выполняться:

1. $\forall u, v \in V\ (u + v = v + u)$
2. $\forall u, v, w \in V\ ((u + v) + w = u + (v + w))$
3. $\exists 0 \in V\ \forall v \in V\ (v + 0 = v)$
4. $\forall v \in V\ \exists(-v) \in V\ (v + (-v) = 0)$
5. $\forall \lambda \in k\ \forall u, v \in V\ (\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v)$
6. $\forall \lambda, \mu \in k\ \forall v \in V\ ((\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v)$
7. $\forall \lambda, \mu \in k\ \forall v \in V\ (\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v)$
8. $\forall v \in V\ (1 \cdot v = v)$

Утверждение 1.2 $\forall v, \lambda \in V\ (\mathbf{0} * v = \mathbf{0} * = \mathbf{0})$

Утверждение 1.3 $\forall v \in V\ ((-1) \cdot v = -v)$

Утверждение 1.4 $\forall \lambda \in k\ \forall v \in V\ ((\lambda \cdot v = \mathbf{0}) \implies (\lambda = 0 \vee v = \mathbf{0}))$

\ доказывать не буду

1. Множество $\{0\}$, состоящее из одного элемента 0, является линейным пространством над любым полем.
2. Множества векторов на прямой, на плоскости, в пространстве, являются линейными пространствами над полем $\mathbb{R}$.
3. Поле k является векторным пространством над самим собой.
4. $\mathbb{C}$ векторное пространство над $\mathbb{R}$, а $\mathbb{R}$ на $\mathbb{Q}$ $k_1 \subset k_2$ подполе, то k_2 - векторное пространство над k_1

5. n-мерное координатное(или арифметическое) пространство над k. $n = 1 \implies k^n = k$ 1.6

6. $k^{\mathbb{X}} = \{f : \mathbb{X} \to k\}$ $\mathbb{X}$ - множество, k - поле. $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ $(\lambda * f)(x) = \lambda f(x)$ $\mathbb{X} = \{1, 2..., n\}$ $k^{\mathbb{X}} = k^n$

7. $C(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ где C - непрерывная функция.

8. Множество решений однородной системы линейных уравнений

9. $\mathbb{R}^{\infty}$ 1.5, пространство $\overset{\wedge}{\mathbb{R}}^{\infty}$ 1.7

10. Множество $k[x]$ многочленов от одной переменной с коэффициентами в k являются линейными пространством. И множество $k_n[x]$ степени не выше чем n.

11. Множество всех матриц размера $m \times n$ с элементами из k образует линейное пространство $\mathrm{Mat}_k(m, n)$ относительно операций сложения матриц и поэлементарного умножения матриц на числа. При $m = 1$ мы получаем пространство строк k^n

Определение 1.5 *финитная последовательность. (с конечным куском и после бесконечными нулями)*

$\mathbb{R}^{\infty}$ *- бесконечная последовательность* $(x_1, x_2, ...x_n)$ x_i*=0 при* $i > N$ *для некоторого* N $\mathbb{R}^{\infty} \equiv \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{R}^n$

Определение 1.6 *n-мерное координатное(или арифметическое) пространство над k.* $k^n := \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in K\}$ *— множество последовательностей (строк) фиксированной длина n из элементов поля k.*

к примеру $\mathbb{R}^n$ *и* $\mathbb{C}^n$

Определение 1.7 $\overset{\wedge}{\mathbb{R}}^{\infty}$ *- множество всех последовательностей.*

1.2 линейное подпространство

Определение 1.8 *Множество* $W \subset V$ *линейного пространства* V *называется подпространством, если для любых векторов* $u, v \in W$ *и скаляра* $\lambda \in k$ *оно само является пространством. соответственно выполняются эти аксиомы:*

1. $u + v \in W$
2. $\lambda u \in W$

Вот некоторые примеры подпространств.

1. $\{0)$ является подпространством в любом пространстве V.

2. Множество векторов, коллинеарных заданному вектору, является подпространством в пространстве всех векторов на плоскости или в пространстве.

3. Пространство $C(\mathbb{R})$ непрерывных функций является подпространством в пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ всех функций на $\mathbb{R}$.

4. Пространство $\mathbb{R}^{\infty}$ финитных последовательностей является подпространством в пространстве $\overset{\wedge}{\mathbb{R}}^{\infty}$ всех последовательностей.

5. $k_n[x]$ является подпространством $k_m[x]$ при $m \geq n$, а также в $k[x]$.

2 линейная зависимость, базис, размерность

Пусть V — линейное пространство над полем k.

Определение 2.1 *Линейной комбинацией конечной системы векторов $v_1 ..., v_k$ пространства называется формальная сумма вида сумма вида $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$ где $\lambda_i \in k$.*

Представляет вектор $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$

$\mathbb{R}^3$

$z(1,0,0) + (-z)(0,1,0) + z(-1,1,0)$
$0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(-1,1,0)$
Представляет вектор $\vec{0} = (0,0,0)$

Определение 2.2 *Линейная комбинация бесконечной системы векторов. $\{v_i : i \in \mathbb{I}\}$ - сумма вида $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i v_i$ с конечным числом скаляров λ_i отличных от нуля. Линейная комбинация — это функция $\mathbb{I} \to K$ $i \to \lambda_i$*

С конечным носителем(принимает ненулевые значения только на конечном подмножестве индекса)

Определение 2.3 *Система векторов $\{v_i : i \in \mathbb{I}\}$ линейно зависимая, если есть λ_i где*

$$(\lambda_i \neq 0) \wedge (\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = \vec{0})$$

и линейно независимая в обратном.

Определение 2.4 *Линейная оболочка $\{v_i : i \in I\}$ — подмножество векторов $\mathbb{V}$ представляемых линейными комбинациями $\sum\limits_{i\in\mathbb{I}} \lambda_i v_I$.*

Обозначается $\langle v_i : i \in \mathbb{I}\rangle$ или $\langle v_1, ..., v_k\rangle$ (для конечных систем)

Утверждение 2.5 *Линейная оболочка $\langle v_i : i \in \mathbb{I}\rangle$ является подпостранством в V, притом, это наименьшее линейное подпространство включающее все векторы системы.*

- Сумма векторов и умножение вектора системы на скаляр это линейные комбинации, принадлежащие линейной оболочке, соответственно $\langle v_i : i \in I >\rangle$ — подпространство.
- Допустим, существует некое подпространство включающее векторы из $\{v_i : i \in I\}$, выходит оно содержит все их линейные комбинации и $\langle v_i : i \in I >\rangle$.