Замечание Заметка Доказательство

Contents

Использованная, помимо лекций, литература:

Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. — Изд. 10-е, испр. — М.: МЦНМО,

Теория множеств: Set Theory for the Working Mathematician/ Krzysztof Ciesielski `https://people.maths.ox.ac.uk/~knight/lectures/b1st.html`

1 в основном про логические обозначения

`Если обозначение удобны для открытий..., то поразительным образом сокращается работа мысли.` Г. Лейбниц(1646-1716)

Логическая символика

знак	значение
$\neg$	отрицание
$\wedge$	конъюкция, союз и
$\vee$	дизъюнкция
$\implies$	влечёт
$A \implies B$	В следует из А, В необходимый признак для А, А достаточный для В
$\iff$	тождественно равно
$\equiv$	равно по определению
$\exists$	квантор существования
$\forall$	квантор общности
$:=$	со стороны определяемого понятия
$\exists!$	единственное существующее

$>$ начало и конец докозательства $<$

Приоритет символов:
$\neg$
$\cap$
$\cup$
$\implies$
$\iff$

$$A \iff B$$

$(A \implies B) \cap (B \implies A)$ при док-ве равносильности:

1. $A \implies B$ необходимость В при необходимости А

2. $B \implies A$ достаточность В для А

2 Насчёт множеств

С конца XIX — начала XX столетия наиболее универсальным языком математики стал язык теории множеств.

создатель теоретико-множественного языка математики и теории бесконечных множеств Георг Кантор (1845-1918)

Определение 2.1 *Под множеством мы понимаем объединение в одно целое определенных, вполне различимых объектов нашей интуиции или нашей мысли.*

В Картеровской "наивной" теории множеств:

1. множество может состоять из любых различимых объектов.
2. множество однозначно определяется набором составляющих объектов.
3. любое свойство может определять множество объектов.

2.1 обозначения

Способы задания множеств:

1. Словесный
2. Перечисление эл-тов $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$
3. Через указание характеристического свойства $P(x)$ $\mathbb{A} = \{x|P(x)\}$
4. Специальный, он используется для обозначения числовых промежутков и числовых множеств.

Если x — объект, P — свойство, $P(x)$ — x обладает свойством P. $\{x|P(x)\}$ множество обладающих свойством x.

Элемент множества — это объект, который принадлежит множество. $a \in \mathbb{A}$ $x \in \mathbb{X}$ - элемент множества

$x \neg \in \mathbb{X}$ или $x \notin \mathbb{X}$ - не элемент множества

$\forall x((x \in A) \iff (x \in B))$ означает $A = B$

Если любой элемент A является элементом множества B, то пишут $A \subset B$ и говорят что A является подмножеством B.

Отношение включения: $(A \subset B) := \forall x((x \in A) \implies (x \in B))$

Если $A \subset B$ и $A \neq B$ то включение строгое и A собственное множество B.

Если M — множество, то любое свойство P выделяет в подмножество M те элементы которые обладают этим свойством:

$$\{x \in M|P(x)\}$$

=>

$$M = \{x \in M|x \in M\}$$

если же взять свойство, которому не соответствует ни один элемент из множества

$$\varnothing = \{x \in M|x \neq x\}$$

$A = B \iff \{x \in A|(x \in A) \iff (x \in B)\}$
получится пустое множество

2.2 операции над множествами

1. объединение множеств A и B: $A \cup B := \{x|(x \in A) \vee (x \in B)\}$ дизъюнктивное объединение A и B: Объединение непересекающихся подможеств $\mathbb{A} \sqcup \mathbb{B}$
2. пересечение множеств A и B: $A \cap B := \{x|(x \in A) \wedge (x \in B)\}$

3. разность множества $A \setminus B := \{x|(x \in A), \wedge(x \notin B)\}$

   Разность между множеством М и содержащимся в нём подмножеством А обычно называют А в М и обозначают через

$$C_M A$$

   или

$$CA$$

   если понятно к какому множеству дополнение.

   - Пример. Плавила де Моргана:

$$C_M(A \cup B) = C_M A \cap C_M B$$

$$C_M(A \cap B) = C_M A \cup C_M B$$

     докажем первое из равенств

   $(x \in C_M(A \cup B)) \implies (x \notin (A \cup B)) \implies ((x \notin A) \wedge (x \notin B)) \implies (x \in C_M A) \wedge (x \in C_M B) \implies (x \in (C_M A \cap C_M B))$

$$C_M(A \cup B) \subset C_M A \cap C_M B$$

   $(x \in (C_M A \cap C_M B)) \implies ((x \in C_M A) \wedge (x \in C_M B)) \implies ((x \notin A) \wedge (x \notin B)) \implies (x \notin (A \cup B)) \implies (x \in C_M(A \cup B))$

$$(C_M A \cap C_M B) \subset C_M(A \cup B)$$

4. Прямое (декартово) произведение множеств.

   Для любой пары двух множеств можно образовать новое множество

$$\{A, B\} = \{B, A\}$$

   элементами которого являются только они. Множество состоит из двух эл-тов если множ-ва не равны и одного в обратном случае.

   Существует так же упорядоченная пара

$$(A, B) = (C, D)$$

   где

$$A = C$$
$$B = D$$

$$A \neq B \implies (A, B) \neq (B, A)$$

   Пусть, X и Y — произвольные множества.

$$\mathbb{X} \times \mathbb{Y} := \{(x, y)|(x \in \mathbb{X}) \wedge (y \in \mathbb{Y})\}$$

   для $\mathbb{A}_n$ множеств. $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n)|a_i \in A_i\}$ декартово произведение: $\mathbb{A} \times \mathbb{A} = \mathbb{A}^2$

   Образованное всеми упорядоченными парами (x, y) первый член которых есть элемент из X, а второй член — элемент из Y, называется прямым или декартовым произведением множеств X и Y.

$$X \neq Y \implies X \times Y \neq Y \times X$$

   зам. известная всем система декартовых координат превращает эту плоскость в произведения числовых осей.

2.3 свойство операций над множествами

Свойство	Символьно
Коммутативность	$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{B} \cup \mathbb{A}$
	$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{B} \cap \mathbb{A}$
Ассоциативность	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Дистрибутивность	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Идемпонтность	$A \cup A = A$
	$A \cap A = A$
	$A \cup \varnothing = A$
	$A \cap \varnothing = A$

3 Парадокс Рассела (1872-1970)

К множество всех множеств $p(K)$ - множество не содержит себя в качестве своего элемента

$K = M|P(M)$

$K \in K \implies \neg P(k) \implies K \notin K$

$K \notin K \implies P(k) \implies K \in K$

В современной математике понятие множества вносится аксиоматически.

Множество обладает определённым набором свойств, описание этих свойств составляет всю аксиоматику.

В рамках этих аксиом множество всех множеств не является множеством.

4 Аксиоматика теории множеств

1. Аксиома объёмности. / The axiom of extension

   Множества равны тогда и только когда имеют одни и те же элементы. $A = B => \forall x((x \in \mathbb{A}) \iff (x \in \mathbb{B}))$

2. Аксиома выделения. / Comprehension scheme

   Любому множеству A и свойству P отвечает множество B, элементы которого суть те же элементы множества A, которые обладают свойством P. $B = \{x \in \mathbb{A}|P(x)\}$

   Из этой аксиомы следует, что разность множеств, в том числе дополнение — множества.

3. Аксиома пустого множества / Empty set axiom

   Существует пустое множество $\varnothing = \{x \in X|x \neq x\}$ учитывая 1 аксиому пустое множество единственно.

4. Аксиома объединения. / Axiom of Union

   Для каждого семейства $\mathbb{M}$ существует множество, которое является объединением $\bigcup \mathbb{M}$, содержащим все элементы из $\mathbb{M}$

   причём(где X это элемент семейства):

   $x \in \bigcup \mathbb{M} \iff \exists \mathbb{X}((\mathbb{X} \in \mathbb{M}))$

   эта аксиома позволяет определить пересечение семейства множеств как множество:.

   $\bigcap \mathbb{M} := \{x \in \bigcup \mathbb{M}|\forall \mathbb{X}((\mathbb{X} \in \mathbb{M}) \implies (x \in \mathbb{X}))\}$

5. Аксиома пары / Pairing axiom

   Для любых множеств X и Y существует множество Z такое, что содержит все и исключительно элементы этих множеств.

   если множества равны, то Z состоит из одного элемента, обозначается так: $\{\mathbb{X}, \mathbb{Y}\}$

   Эта аксиома помогает ввести упорядоченную пару: $(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) := \{\mathbb{X}\}, \{\mathbb{X}, \mathbb{Y}\}$

6. Аксиома множества подмножеств /Power Set Axiom

   Для каждого множества существует множество $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ состоящее из элементов всех подмножеств $\mathbb{X}$.

   Так можно ввести прямое произведение множеств. $\mathbb{X} \times \mathbb{Y} := \{p \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{X}) \cup \mathcal{P}(\mathbb{Y})) | p = (x, y) \wedge (x \in \mathbb{X}) \wedge (x \in \mathbb{Y})\}$

7. Аксиома бесконечности / Infinity axiom

   Введём понятие последователя $\mathbb{X}^+ = \mathbb{X} \cup \{\mathbb{X}\}$ (добавляет к множеству одноэлементное множество $\mathbb{X}$).

   Назовём множество индуктивным, если оно содержит пустое множество и последователь каждого своего элемента.

   Аксиома утверждает, что индуктивные множества существуют.

   Аксиома позволяет определить модель множества $\mathbb{N}_0$ натуральных чисел, как пересечение индуктивных множеств, т. е. наименьшее индуктивное множество. Соответственно его элементами являются: $\varnothing, \varnothing^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}, \{\varnothing\}^+ = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\}, ...,$ Так же являющееся моделью множества натуральных чисел.

   в общем, можно сформулировать эту аксиому так: $\exists x(\varnothing \in \mathbb{X} \wedge \forall y(y \in \mathbb{X} \to y \cup \{y\} \in \mathbb{X}))$

8. Аксиома подстановки / Replacement Axiom

   Есть множество $\mathbb{X}$, множества $(\mathbb{N}_i)_{i=1}^n$, существует закон, который ассоциирует для $\forall x \in X$ и для каждой последовательности множеств $(\mathbb{N}_i)_{i=1}^n$ уникальное множество $\Phi(x, \mathbb{N}, ...\mathbb{N}_n)$:

   $\{y | \forall x \in \mathbb{X} y = \Phi(x, \mathbb{N}_1, ..., \mathbb{N}_n)\}$ взято отсюда

9. Аксиома выбора / Axiom of Choice

   Для каждого семейства непустых попарно непересекающихся множеств существует множество $\mathbb{C}$ такое, что какого бы не было множество $\mathbb{X}$ данного семейства, множество $\mathbb{X} \cap \mathbb{C}$ состоит из одного элемента.

5 вкратце о числах

<2025-09-03 Wed> $x \in \mathbb{X}$ $\mathbb{A} \subset \mathbb{X}$

$C_m A = \{x \in M | x \notin M\}$ $A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$

Любое рац число может быть записанно в виде конечной дроби, либо периодической дроби.

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

геометрическая интерпретация множества действительных чисел. введение таких точек на прамой L взаимоднозначное соответствие между точками и множеством R. Направление задаваемое лучом с вершиной в точке ноль и содержащим 1 является положительным.

$\forall x \in \phi \exists! x \in \mathbb{R}$ x длина отрезка икс x - Длина положительная OX, если икс лежит правее 0. x - длина отрезка OX отрицательная, если X правее.

Такую прямую для которой установлено взаимооднозначное соответствие с R, называют числовой(координат осью) При рассмотрении числовых множеств(подмножеств R действительных) принято использовать геом-кий язык.

6 Обозначение некоторых числовых множеств

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b$

ограниченные числовые промежутки.: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ отрезок $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ интервал $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ полуинтервал $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ полуинтервал

неограниченные числовые промежутки:

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$ $(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$ $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$ $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

зам. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b|\}$ $\{a, b\}$ - множество из a, bи

Расширенная числовая прямая, или проективно расширенная: $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
Аффинно расширенная бесконечность: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$

7 мощность множества

Пусть A и B - два конечных множества. $A = \{a, b, c, d, ...\}$ $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, ...\}$ Одинаково или нет количество элементов в этих множествах можно решить не считая их элементы, а устанавливая соответствия. Для этого способа сравнения хар-но то, что для каждого эле-та одного множества указывается один и только один эл-т другого мн-ва.

Определение: Пусть X и У - два множества. Правило ϕ которое каждому эл-ту x из множества X ставит в соответствие один и только один эл-т y из множества У причём, каждый эл-т y из У оказывается соотнесённый только одному x из множества X, называется взаимно однозначным соответствием между множествами X и У.

Замечание, взаимно однозначное соответствие носит название биективное отображение. Биекция.

Если между множествами $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$(не обязательно конечными) можно установить взаимно однозначное соответствия, то такие мно-ва называются экви-ми или равно мощными. $A \sim B$ отношение равномощности разбивает соотножение на классы эквивалентных множ-в Множества одного класса эквивалентности имеют одинаковое количество элементов(равномощных)

Опред. Класс которому принадлежит мно-во X, называется мощностью множества X или кардинальным числом(кардиналом) множества X и обозначается Card $\mathbb{X}$. если $\mathbb{X} \sim \mathbb{Y}$ то пишут Card$\mathbb{X}$ = Card$\mathbb{Y}$

Зам. Если берём $\mathbb{X} \in \mathbb{Y}$ то Card$\mathbb{X}$ < Card$\mathbb{Y}$

такой способ определения мощности можно использовать и для ин-ти множеств

пр-р $\mathbb{N} = \{1, 2, ..\}$ $M = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$ $M \in N$ Card$\mathbb{M}$ = Card$\mathbb{N}$

Опред. Все ин-ти мно-ва для которых может быть установлено взаим-одн соответвие с множеством натуральных чисел называются счётными.

Зам. Все эл-ты счётных множеств могут быть занумерованы в ин-ти последовательность

Для ин-ти мно-в возможна ситуация когда одно является подмно-вом другого, при этом оба равно мощные.

$\mathbb{N} = \alpha$

$(0, 1)$ - не счётное > допустим оно счётное, если это так, то мы можем их занумеровать но так не получится, потому что можно сделать наискосок новые индексы. <

Card$(a, b) = c =$ Card $\mathbb{R} = c$ $x \to \frac{x}{1-|x|}$ f устанавливае взаи-одн соответствие между (0, 1) и R

8 функция

Пусть $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ - два числовых множеств. $\mathbb{X} \in \mathbb{R}, \mathbb{Y} \in \mathbb{R}$

Опр. Говорят, что есть функция f, определённая на множестве X со значениями в множестве Y, если определён закон(правило, зависимость), по которому каждому элементу из множества X ставится единственный элемент из Y.

$f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}, \mathbb{X} \to^f \mathbb{Y}$ $\mathbb{X}$ - область определения функции f $x \in \mathbb{X}$ x - независимая переменная, аргумент функции.

множество всех значений, будем называть множеством значений или областью значений функции.

$f(a) = \{y \in \mathbb{Y} | \exists x((x \in A) \wedge y = f(x))\}$ y - зависимая переменная $y = f(x)$

если $B \subset E(f)$ и $f(A) = B$ то $f^{-1}(B) = A$ - прообраз множества B

Допустим, есть отображение $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ оно

1. сюръективно, или сюръектиция, если $f(\mathbb{X}) = \mathbb{Y}$ т.е. у каждого элемента y есть прообраз в множестве $\mathbb{X}$.

2. инъективно, или инъекция, если $x_1 \neq x_2$ $x_1, x_2 \in \mathbb{Y}$ тогда $f(x_1) \neq f(x_2)$

3. и биективна, если соблюдается 1 и 2.

Замечание. Для того, чтобы аналитическое выражение $f(x) = x^2$ являлось биективным, надо его ограничить.

Замечание. Если отображение $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ биективно, то возникает отображение $f^{-1} : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ каждому элементу y из множества $\mathbb{Y}$ ставится в соответствие элемент x из множества $\mathbb{X}$ для которого выполняется $f(x) = y$. Называют обратным отображением для f.

Замечание. Свойство двух отображений быть обратными является взаимным.