Замечание  Заметка  Доказательство

# Contents



# 1 некоторые определения

k — основное поле элементы поле k - скаляры.

**Определение 1.1** *Линейное(векторное) пространство над полем k. Множество с двумя операциями "+" и "∗".*

$$+ : V \times V \to V(u, v) \to u + v$$

.

$$* : V \times V \to V(u, v) \to u * v$$

аксиомы, которые должны выполняться:

1. $\forall u, v \in V\,(u + v = v + u)$
2. $\forall u, v, w \in V\,((u + v) + w = u + (v + w))$
3. $\exists 0 \in V\,\forall v \in V\,(v + 0 = v)$
4. $\forall v \in V\,\exists(-v) \in V\,(v + (-v) = 0)$
5. $\forall \lambda \in k\,\forall u, v \in V\,(\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v)$
6. $\forall \lambda, \mu \in k\,\forall v \in V\,((\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v)$
7. $\forall \lambda, \mu \in k\,\forall v \in V\,(\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v)$
8. $\forall v \in V\,(1 \cdot v = v)$

**Утверждение 1.2**
- $\forall v, \lambda \in V\,(\mathbf{0} * v = \mathbf{0} * = \mathbf{0})$
- $\forall v \in V\,((-1) \cdot v = -v)$
- $\forall \lambda \in k\,\forall v \in V\,((\lambda \cdot v = \mathbf{0}) \implies (\lambda = 0 \vee v = \mathbf{0}))$

\ доказывать не буду

1. Множество $\{0\}$, состоящее из одного элемента 0, является линейным пространством над любым полем.
2. Множества векторов на прямой, на плоскости, в пространстве, являются линейными пространствами над полем $\mathbb{R}$.
3. Поле k является векторным пространством над самим собой.

**Определение 1.3** *Множество $W \subset V$ линейного пространства $V$ называется подпространством, если для любых векторов $u, v \in W$ и скаляра $\lambda \in k$ если оно само является пространством, соответственно выполняются эти аксиомы:*

*1.* $u + v \in W$

*2.* $\lambda u \in W$

Вот некоторые примеры подпространств.

1. $\{0\}$ является подпространством в любом пространстве V.
2. Множество векторов, коллинеарных заданному вектору, является подиространством в пространстве всех векторов на плоскости или в пространстве.

## 2 линейная зависимость, базис, размерность

**Определение 2.1** *Пусть $V$ — линейное пространство над полем $k$. Линейной комбинацией системы векторов $v_1 ..., v_k$ пространства называется*

- *сумма вида $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$ где $\lambda_i \in k$*
- *$\sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ с конечным числом скаляров $\lambda_i$ (она тривиальна, если все коэффициенты $\lambda_i$ равны нулю)*

**Определение 2.2** *Линейная оболочка $\{v_i : i \in I\}$ — множество всех линейных комбинаций системы. Обозначается:*

- *$\langle v_i : i \in I >\rangle$*
- *$\langle v_1, ..., v_k\rangle$ (для конечных систем)*

**Определение 2.3** *Система векторов $\{v_i : i \in I\}$:*

- *Линейно зависимая, если есть $\lambda_i$ где*

$$(\lambda_i \neq 0) \wedge \left( \sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0 \right)$$

- *Линейно независимая в обратном.*

> Линейная оболочка $\langle v_i : i \in I >\rangle$ является подпространством в $V$, притом, это наименьшее линейное подпространство включающее все векторы системы.

- Сумма векторов и умножение вектора системы на скаляр это линейные комбинации, принадлежащие линейной оболочке, соответственно $\langle v_i : i \in I >\rangle$ — подпространство.
- Допустим, существует некое подпространство включающее векторы из $\{v_i : i \in I\}$, выходит оно содержит все их линейные комбинации и $\langle v_i : i \in I >\rangle$.