Замечание Заметка Доказательство

Contents

Использованная, помимо лекций, литература:

Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. — Изд. 10-е, испр. — М.: МЦНМО,

Теория множеств: Set Theory for the Working Mathematician/ Krzysztof Ciesielski `https://people.maths.ox.ac.uk/~knight/lectures/b1st.html`

1 Общематематические понятия и обозначения

1.1 в основном про логические обозначения

`Если обозначение удобны для открытий..., то поразительным образом сокращается работа мысли.` Г. Лейбниц(1646-1716)

Логическая символика

знак	значение
$\neg$	отрицание
$\wedge$	конъюкция, союз и
$\vee$	дизъюнкция
$\implies$	влечёт
$A \implies B$	B следует из A, B необходимый признак для A, A достаточный для B
$\iff$	тождественно равно
$\equiv$	равно по определению
$\exists$	квантор существования
$\forall$	квантор общности
$:=$	со стороны определяемого понятия
$\exists!$	единственное существующее

$>$ начало и конец докозательства $<$

Приоритет символов:
$\neg$
$\cap$
$\cup$
$\implies$
$\iff$

Определение 1.1

$$A \iff B$$

$(A \implies B) \cap (B \implies A)$ *при док-ве равносильности:*

1. $A \implies B$ *необходимость* B *при необходимости* A

2. $B \implies A$ *достаточность* B *для* A

некоторые сокращения: $(\forall x \in \mathbb{X})P := \forall x(x \in \mathbb{X} \to P(x))$ $(\exists x \in \mathbb{X})P := \exists x(x \in \mathbb{X} \wedge P(x))$ $(\forall x > a)P := \forall x(x \in \mathbb{R} \wedge x > a \to P(x))$ $(\exists x > a)P := \exists x(x \in \mathbb{R} \wedge x > a \wedge P(x))$

1.2 Насчёт множеств

С конца XIX — начала XX столетия наиболее универсальным языком математики стал язык теории множеств.

создатель теоретико-множественного языка математики и теории бесконечных множеств Георг Кантор (1845-1918)

Определение 1.2 *Под множеством мы понимаем объединение в одно целое определенных, вполне различимых объектов нашей интуиции или нашей мысли.*

В Картеровской "наивной" теории множеств:

1. множество может состоять из любых различимых объектов.

2. множество однозначно определяется набором составляющих объектов.

3. любое свойство может определять множество объектов.

1.2.1 обозначения

Способы задания множеств:

1. Словесный

2. Перечисление эл-тов $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$

3. Через указание характеристического свойства $P(x)$ $\mathbb{A} = \{x | P(x)\}$

4. Специальный, он используется для обозначения числовых промежутков и числовых множеств.

Если x — объект, P — свойство, $P(x)$ — x обладает свойством P. $\{x|P(x)\}$ множество обладающих свойством x.

Определение 1.3 *Элемент множества — это объект, который принадлежит множество.* $a \in \mathbb{A}$ $x \in \mathbb{X}$ *- элемент множества*

$x \neg \in \mathbb{X}$ *или* $x \notin \mathbb{X}$ *- не элемент множества*

Определение 1.4 $\forall x((x \in A) \iff (x \in B))$ *означает* $A = B$

Определение 1.5 *Если любой элемент A является элементом множества B, то пишут $A \subset B$ и говорят что A является подмножеством B.*

Отношение включения: $(A \subset B) := \forall x((x \in A) \implies (x \in B))$

Если $A \subset B$ *и* $A \neq B$ *то включение строгое и A собственное множество B.*

Определение 1.6 *Если M — множество, то любое свойство P выделяет в подмножество M те элементы которые обладают этим свойством:* $\{x \in M | P(x)$

=>

$$M = \{x \in M | x \in M\}$$

> если же взять свойство, которому не соответствует ни один элемент из множества
>
> $$\varnothing = \{x \in M | x \neq x\}$$
>
> $A = B \iff \{x \in A | (x \in A) \iff (x \in B)\}$
> получится пустое множество

1.2.2 операции над множествами

1. объединение множеств A и B:

   Определение 1.7 $A \cup B := \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$

   Определение 1.8 *дизъюнктивное объединение A и B: Объединение непересекающихся подмножеств* $\mathbb{A} \sqcup \mathbb{B}$

2. пересечение множеств A и B:

   Определение 1.9 $A \cap B := \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$

3. разность множества

   Определение 1.10 $A \setminus B := \{x | (x \in A), \wedge (x \notin B)\}$

   Разность между множеством M и содержащимся в нём подмножеством A обычно называют A в M и обозначают через

   $$C_M A$$

   или

   $$CA$$

   если понятно к какому множеству дополнение.

   - Пример. Плавила де Моргана:

     $$C_M(A \cup B) = C_M A \cap C_M B$$

     $$C_M(A \cap B) = C_M A \cup C_M B$$

     докажем первое из равенств

   > $(x \in C_M(A \cup B)) \implies (x \notin (A \cup B)) \implies ((x \notin A) \wedge (x \notin B)) \implies (x \in C_M A) \wedge (x \in C_M B) \implies (x \in (C_M A \cap C_M B))$

$$C_M(A \cup B) \subset C_M A \cap C_M B$$

$(x \in (C_M A \cap C_M B)) \implies ((x \in C_M A) \wedge (x \in C_M B)) \implies ((x \notin A) \wedge (x \notin B)) \implies (x \notin (A \cup B)) \implies (x \in C_M(A \cup B))$

$$(C_M A \cap C_M B) \subset C_M(A \cup B)$$

4. Прямое (декартово) произведение множеств.

Для любой пары двух множеств можно образовать новое множество

$$\{A, B\} = \{B, A\}$$

элементами которого являются только они. Множество состоит из двух эл-тов если множ-ва не равны и одного в обратном случае.

Определение 1.11 *Существует так же упорядоченная пара*

$$(A, B) = (C, D)$$

где

$$A = C$$

$$B = D$$

$$A \neq B \implies (A, B) \neq (B, A)$$

Пусть, X и Y — произвольные множества. То это прямое произведение:

Определение 1.12

$$\mathbb{X} \times \mathbb{Y} := \{(x, y) | (x \in \mathbb{X}) \wedge (y \in \mathbb{Y})\}$$

для $\mathbb{A}_n$ множеств. $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) | a_i \in A_i\}$ декартово произведение: $\mathbb{A} \times \mathbb{A} = \mathbb{A}^2$

Образованное всеми упорядоченными парами (x, y) первый член которых есть элемент из X, а второй член — элемент из Y, называется прямым или декартовым произведением множеств X и Y.

$$X \neq Y \implies X \times Y \neq Y \times X$$

> известная всем система декартовых координат превращает эту плоскость в произведения числовых осей.

1.2.3 свойство операций над множествами

Свойство	Символьно
Коммутативность	$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{B} \cup \mathbb{A}$
	$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{B} \cap \mathbb{A}$
Ассоциативность	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Дистрибутивность	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Идемпонтность	$A \cup A = A$
	$A \cap A = A$
	$A \cup \varnothing = A$
	$A \cap \varnothing = A$

1.3 Парадокс Рассела (1872-1970)

Утверждение 1.13 *К множество всех множеств* $p(K)$ *- множество не содержит себя в качестве своего элемента*

$K = M|P(M)$
$K \in K \implies \neg P(k) \implies K \notin K$
$K \notin K \implies P(k) \implies K \in K$

В современной математике понятие множества вносится аксиоматически.
Множество обладает определённым набором свойств, описание этих свойств составляет всю аксиоматику.
В рамках этих аксиом множество всех множеств не является множеством.

1.4 Аксиоматика теории множеств

Аксиома 1.14 *Аксиома объёмности (The Axiom of Extension) Множества равны тогда и только тогда, когда имеют одни и те же элементы.*

$$A = B \iff \forall x((x \in A) \iff (x \in B))$$

Аксиома 1.15 *Аксиома выделения (Comprehension Scheme) Любому множеству* A *и свойству* P *отвечает множество* B*, элементы которого суть те элементы множества* A*, которые обладают свойством* P*.*

$$B = \{x \in A \mid P(x)\}$$

Из этой аксиомы следует, что разность множеств, в том числе дополнение, являются множествами.

Аксиома 1.16 *Аксиома пустого множества (Empty Set Axiom) Существует пустое множество.*

$$\varnothing = \{x \in X \mid x \neq x\}$$

Учитывая аксиому объёмности, пустое множество единственно.

Аксиома 1.17 *Аксиома объединения (Axiom of Union) Для каждого семейства* $\mathbb{M}$ *существует множество, которое является объединением* $\bigcup \mathbb{M}$*, содержащим все элементы из* $\mathbb{M}$*:*

$$x \in \bigcup \mathbb{M} \iff \exists X((X \in \mathbb{M}) \wedge (x \in X))$$

Эта аксиома позволяет определить пересечение семейства множеств как множество:

$$\bigcap \mathbb{M} := \{x \in \bigcup \mathbb{M} \mid \forall X((X \in \mathbb{M}) \implies (x \in X))\}$$

Аксиома 1.18 *Аксиома пары (Pairing Axiom) Для любых множеств* X *и* Y *существует множество* Z*, которое содержит в точности элементы этих множеств:*

$$\{X, Y\} = Z$$

Если множества равны, то Z *состоит из одного элемента. Эта аксиома помогает ввести упорядоченную пару:*

$$(X, Y) := \{\{X\}, \{X, Y\}\}$$

Аксиома 1.19 *Аксиома множества подмножеств (Power Set Axiom) Для каждого множества X существует множество $\mathcal{P}(X)$, состоящее из всех подмножеств X:*

$$\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subset X\}$$

Так можно ввести прямое произведение множеств:

$$X \times Y := \{p \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)) \mid p = (x, y) \wedge (x \in X) \wedge (y \in Y)\}$$

Аксиома 1.20 *Аксиома бесконечности (Infinity Axiom) Введём понятие последователя: $X^+ = X \cup \{X\}$ (добавляет к множеству одноэлементное множество $\{X\}$).*

Назовём множество индуктивным, если оно содержит пустое множество и последователь каждого своего элемента.

Аксиома утверждает, что индуктивные множества существуют:

$$\exists X(\varnothing \in X \wedge \forall y(y \in X \to y \cup \{y\} \in X))$$

Аксиома позволяет определить модель множества $\mathbb{N}_0$ натуральных чисел как пересечение всех индуктивных множеств, т. е. наименьшее индуктивное множество. Его элементами являются:

$$\varnothing, \varnothing^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}, \{\varnothing\}^+ = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\}, \ldots$$

Аксиома 1.21 *Аксиома подстановки (Replacement Axiom) Для любого множества X, любого набора множеств $(N_i)_{i=1}^n$ и любого закона Φ, который каждому $x \in X$ и каждой последовательности $(N_1, \ldots, N_n)$ ставит в соответствие единственное множество $\Phi(x, N_1, \ldots, N_n)$, существует множество:*

$$\{y \mid \exists x \in X : y = \Phi(x, N_1, \ldots, N_n)\}$$

Аксиома 1.22 *Аксиома выбора (Axiom of Choice) Для каждого семейства непустых попарно непересекающихся множеств существует множество C такое, что для любого множества X из данного семейства множество $X \cap C$ состоит ровно из одного элемента.*

1.5 вкратце о числах

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$

Любое рац число может быть записанно в виде конечной дроби, либо периодической дроби.

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

геометрическая интерпретация множества действительных чисел.

введение таких точек на прамой L взаимооднозначное соответствие между точками и множеством R. Направление задаваемое лучом с вершиной в точке ноль и содержащим 1 является положительным.

$\forall x \in \phi \exists! x \in \mathbb{R}$ x длина отрезка икс

x - Длина положительная OX, если икс лежит правее 0.

x - длина отрезка OX отрицательная, если X правее.

Такую прямую для которой установлено взаимооднозначное соответствие с R, называют числовой(координат осью)

При рассмотрении числовых множеств(подможеств R действительных) принято использовать геом-кий язык.

1.6 Обозначение некоторых числовых множеств

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b$

Определение 1.23 *ограниченные числовые промежутки.:* $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ *отрезок* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ *интервал* $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ *полуинтервал* $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ *полуинтервал*

Определение 1.24 *неограниченные числовые промежутки:*

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$ $(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$ $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$ $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$ $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

> $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b|\}$ $\{a, b\}$ - множество из a, b

Определение 1.25 *Расширенная числовая прямая, или проективно рассширенная:* $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Определение 1.26 *Аффинно расширенная бесконечность:* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$

1.7 мощность множества

Пусть A и B - два конечных множества. $A = \{a, b, c, d, ...\}$ $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, ...\}$

Одинаково или нет количество элементов в этих множествах можно решить не считая их элементы, а устанавливая соответствия. Для этого способа сравнения хар-но то, что для каждого эле-та одного множества указывается один и только один эл-т другого мн-ва.

Определение 1.27 *Пусть X и У - два множества.*

Правило ϕ которое каждому эл-ту x из множества X ставит в соответствие один и только один элемент y из множества У причём, каждый элемент y из У оказывается соотнесённый только одному x из множества X, называется взаимно однозначным соответствием между множествами X и У.

Замечание, взаимно однозначное соответствие носит название биективное отображение. Биекция.

Если между множествами $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$(не обязательно конечными) можно установить взаимно однозначное соответствия, то такие мно-ва называются экви-ми или равно мощными.

$A \sim B$

отношение равномощности разбивает соотножение на классы эквивалентных множ-в

Множества одного класса эквивалентности имеют одинаковое количество элементов(равномощных)

Определение 1.28 *Класс которому принадлежит мно-во X, называется мощностью множества X или кардинальным числом(кардиналом) множества X и обозначается Card $\mathbb{X}$.*

если $\mathbb{X} \sim \mathbb{Y}$ то пишут $Card\mathbb{X} = Card\mathbb{Y}$

> Если берём $\mathbb{X} \in \mathbb{Y}$ то Card$\mathbb{X}$ < Card$\mathbb{Y}$

такой способ определения мощности можно использовать и для бесконечных множеств $\mathbb{N} = \{1, 2, ..\}$ $M = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$ $M \in N$ Card$\mathbb{M}$ = Card$\mathbb{N}$

Определение 1.29 *Все бесконечные множества для которых может быть установлено взаим-одн соответвие с множеством натуральных чисел называются счётными.*

> Все эл-ты счётных множеств могут быть занумерованы в ин-ти последовательность

Для бесконечных множеств возможна ситуация когда одно является подмножеством другого, при этом оба равно мощные.

$\mathbb{N} = \alpha$

$(0, 1)$ - не счётное $>$ допустим оно счётное, если это так, то мы можем их занумеровать но так не получится, потому что можно сделать наискосок новые индексы. $<$

Card$(a, b) = c =$ Card $\mathbb{R} = c$ $x \to \frac{x}{1-|x|}$ f устанавливае взаи-одн соответствие между (0, 1) и R

1.8 Функция

Пусть $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ — два числовых множества. $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}, \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}$

Определение 1.30 *Говорят, что есть функция* ***f****, определённая на множестве X со значениями в множестве Y, если определён закон (правило, зависимость), по которому каждому элементу из множества X ставится в соответствие единственный элемент из Y.*

$f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ $\mathbb{X}$ — *область определения функции f* $x \in \mathbb{X}$ — *независимая переменная, аргумент функции.*

Множество всех значений функции будем называть множеством значений или областью значений функции.

$f(\mathbb{X}) = \{y \in \mathbb{Y} | \ \exists x((x \in \mathbb{X}) \wedge y = f(x))\}$ y — зависимая переменная, $y = f(x)$

Определение 1.31 *Если $B \subset f(\mathbb{X})$ и $f(\mathbb{X}) = B$, то $f^{-1}(B) = \mathbb{X}$ — прообраз множества B.*

Свойства отображений (функций)

Название	Условие
Сюръекция	$f(\mathbb{X}) = \mathbb{Y}$ (каждый элемент y имеет прообраз в $\mathbb{X}$)
Инъекция	$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$ (разным аргументам соответствуют разные значения)
Биекция	Отображение является и сюръективным, и инъективным

Для того, чтобы аналитическое выражение $f(x) = x^2$ являлось биективным, надо его ограничить (например, рассмотреть на $\mathbb{R}_+$).

Если отображение $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ биективно, то возникает отображение $f^{-1} : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$, которое каждому элементу y из множества $\mathbb{Y}$ ставит в соответствие элемент x из множества $\mathbb{X}$ такой, что $f(x) = y$. Это отображение называют **обратным отображением** для f.

Свойство двух отображений быть обратными является взаимным.

2 Действительные(вещественные) числа

2.1 Аксиоматическое определение действительных чисел

Определение 2.1 *Множество $\mathbb{R}$ называется* ***множеством действительных (вещественных) чисел****, а его элементы —* ***действительными (вещественными) числами****, если выполнены следующие группы аксиом:*

2.1.1 (I) Аксиомы сложения

Аксиома 2.2 *Коммутативность сложения* $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$

Аксиома 2.3 *Ассоциативность сложения* $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) + c = a + (b + c)$

Аксиома 2.4 *Нейтральный элемент сложения* $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$

Аксиома 2.5 *Противоположный элемент* $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists(-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$

2.1.2 (II) Аксиомы умножения

Аксиома 2.6 *Коммутативность умножения* $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$

Аксиома 2.7 *Ассоциативность умножения* $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Аксиома 2.8 *Нейтральный элемент умножения* $\exists 1 \in \mathbb{R}\ (1 \neq 0) : \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$

Аксиома 2.9 *Обратный элемент* $\forall a \in \mathbb{R}\ (a \neq 0)\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$

2.1.3 (I, II) Аксиома дистрибутивности

Аксиома 2.10 *Дистрибутивность* $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

2.1.4 (III) Аксиомы порядка

Аксиома 2.11 *Рефлексивность* $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$

Аксиома 2.12 *Антисимметричность* $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$

Аксиома 2.13 *Транзитивность* $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

Аксиома 2.14 *Линейная упорядоченность* $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y) \vee (y \leq x)$

Определение 2.15 *Множество, удовлетворяющее аксиомам 2.11-2.13, называется* ***частично упорядоченным****, а множество, удовлетворяющее также аксиоме 2.14, называется* ***линейно упорядоченным****.*

2.1.5 (I, III) Связь сложения и порядка

Аксиома 2.16 *Монотонность сложения* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z)$

2.1.6 (II, III) Связь умножения и порядка

Аксиома 2.17 *Монотонность умножения* $\forall x, y \in \mathbb{R} : (0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \Rightarrow (0 \leq x \cdot y)$

2.1.7 (IV) Аксиома полноты (непрерывности)

Аксиома 2.18 *Аксиома полноты Если* $\mathbb{X}$ *и* $\mathbb{Y}$ *— непустые подмножества* $\mathbb{R}$ *такие, что*

$$\forall x \in \mathbb{X},\ \forall y \in \mathbb{Y} : x \leq y,$$

то

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{X},\ \forall y \in \mathbb{Y} : x \leq c \leq y$$

2.1.8 Вопросы насчёт аксиоматики

Относительно данной системы аксиом возникают как минимум два фундаментальных вопроса:

1. Её непротиворечивость.
2. Может ли данная система аксиом однозначно определить математический объект, категорична ли система аксиом (с точностью до изоморфизма).

2.2 Некоторые следствия

2.2.1 Следствия аксиом сложения

Следствие 2.19 *В множестве действительных чисел имеется только один нуль.*

Если 0_1 и 0_2 — нули в $\mathbb{R}$, то по 2.4:

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

Следствие 2.20 *В множестве действительных чисел у каждого элемента имеется единственный противоположный элемент.*

Если x_1 и x_2 — элементы, противоположные $x \in \mathbb{R}$, то:

$$x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = 0 + x_2 = x_2.$$

Здесь последовательно использованы: 2.4, 2.5, 2.3, 2.5 и снова 2.4.

Следствие 2.21 *Уравнение $a + x = b$ в $\mathbb{R}$ имеет единственное решение:*

$$x = b + (-a).$$

Это следует из 2.5:

$$(a + x = b) \iff ((x + a) + (-a) = b + (-a)) \iff$$
$$\iff (x + (a + (-a)) = b + (-a)) \iff (x + 0 = b + (-a)) \iff (x = b + (-a)).$$

Выражение $b + (-a)$ обычно записывается как $b - a$.

2.2.2 Следствия аксиом умножения

Следствие 2.22 *В множестве действительных чисел имеется только одна единица.*

Доказательство аналогично доказательству единственности нуля (с заменой сложения на умножение и использованием 2.8).

Следствие 2.23 *Для каждого числа $x \neq 0$ имеется только один обратный элемент x^{-1}.*

Доказательство аналогично доказательству единственности противоположного элемента (с заменой сложения на умножение и использованием 2.9).

Следствие 2.24 *Уравнение $a \cdot x = b$ при $a \in \mathbb{R} \setminus 0$ имеет единственное решение:*

$$x = b \cdot a^{-1}.$$

Доказательство аналогично доказательству для уравнения $a + x = b$ (с заменой сложения на умножение и использованием 2.9).

2.2.3 Следствия аксиомы связи сложения и умножения

Следствие 2.25 *Для любого* $x \in \mathbb{R}$*:*

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0.$$

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot 0 = x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) = 0.$$

Использованы 2.4, 2.10 и 2.5.

Следствие 2.26

$$(x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0).$$

Если, например, $y \neq 0$, то из единственности решения уравнения $x \cdot y = 0$ относительно x находим:

$$x = 0 \cdot y^{-1} = 0.$$

Использованы 2.9 и предыдущее следствие.

Следствие 2.27 *Для любого* $x \in \mathbb{R}$*:*

$$-x = (-1) \cdot x.$$

$$x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0,$$

и утверждение следует из 2.5.

Следствие 2.28 *Для любого числа* $x \in \mathbb{R}$*:*

$$(-1)(-x) = x.$$

Следует из предыдущего следствия и единственности элемента x, противоположного $-x$.

Следствие 2.29 *Для любого числа* $x \in \mathbb{R}$*:*

$$(-x)(-x) = x \cdot x.$$

$$(-x)(-x) = ((-1) \cdot x)(-x) = (x \cdot (-1))(-x) = x((-1)(-x)) = x \cdot x.$$

Здесь последовательно использованы: предыдущие следствия, 2.6 и 2.7.

2.2.4 Следствия аксиом порядка

Следствие 2.30 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *справедливо одно из трёх соотношений:*

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

Следует из 2.12 и 2.14

Следствие 2.31 $\forall x, y, x \in \mathbb{R}$

$(x < y) \land (y \leq z) \implies (x < z)$ $(x \leq y) \land (y < z) \implies (x < z)$