



## **Tarea 2**

### **Teoría del Riesgo**

**Profesor:** Alarcón González Edgar Gerardo

**Adjuntos:** González Alvarado Héctor

Martínez Loria Johan

Padilla Martínez Miriam Janeth

**Integrantes:** (21) Cuéllar Chávez Eduardo de Jesús

(32) García Tapia Jesús Eduardo

(60) Reyes López Arath Alejandro

(67) Saldaña Morales Ricardo

**Grupo:** 9106

## Ejercicio 1

En clase se vio la modelación de la variable aleatoria de pérdida de una compañía de seguros ( $Y$ ) para cuando se tiene un contrato de **deducible**, sea  $X$  la variable aleatoria que mide el monto de pérdida asociado a un siniestro, tomando  $d > 0$  el deducible que cobra **la aseguradora**, se tiene que:

$$Y = \max\{X - d, 0\}$$

Muestra la construcción de una variable aleatoria  $Z$  para este tipo de contrato que mida la pérdida que asume **el asegurado** (todo lo que la compañía no cubre).

a) **Exhibe de manera general cómo se construye su función de densidad en términos de la densidad de  $X$** , especificando el soporte de la variable aleatoria que estás construyendo.

**Busca su relación con otra variable de cobertura que conozcas, recuerda siempre la “Ley de conservación del Riesgo”.**

Para comprobar que lo que hiciste está bien realiza lo siguiente:

b) Considera una variable aleatoria  $X \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{100})$  ( $E[X] = 100$ ) a partir de ésta variable aleatoria, considera  $d = 27$ , fija la semilla en 27 y genera una muestra aleatoria de tamaño  $n = 100,000$  de tu variable  $Z$ , realiza un histograma y compáralo con la función de densidad que construiste anteriormente.

c) Obtén la esperanza muestral y teórica de  $Z$  (puede ser utilizando comandos de R) ¿son parecidas?

d) Realiza una prueba de bondad de ajuste Ji cuadrada que contraste los datos simulados de  $Z$  con la función de densidad que construiste, en particular para cuando el asegurado asume una pérdida igual a  $d$  y para cuando no, es decir, cuando  $Z = d$  y cuando  $Z < d$ , explica y concluye tus resultados.

## Solución

### Inciso a)

Sea  $Z$  la variable aleatoria que mide la pérdida del asegurado bajo un contrato con deducible  $d > 0$ .

Sea  $X$  la variable aleatoria que mide el monto del siniestro, supongamos que el monto está en el intervalo  $[a, b]$  con  $b \geq a \geq 0$ .

### Observación

$$Z = \min(X, d) \implies Z = \begin{cases} X & \text{si } 0 \leq X < d \\ d & \text{si } d \leq X \leq b \end{cases}$$

Ya que,

$$\begin{aligned} \text{Si } X < d; & \text{ el asegurado asume toda la pérdida,} \\ \text{Si } X \geq d; & \text{ el asegurado paga únicamente el deducible.} \end{aligned}$$

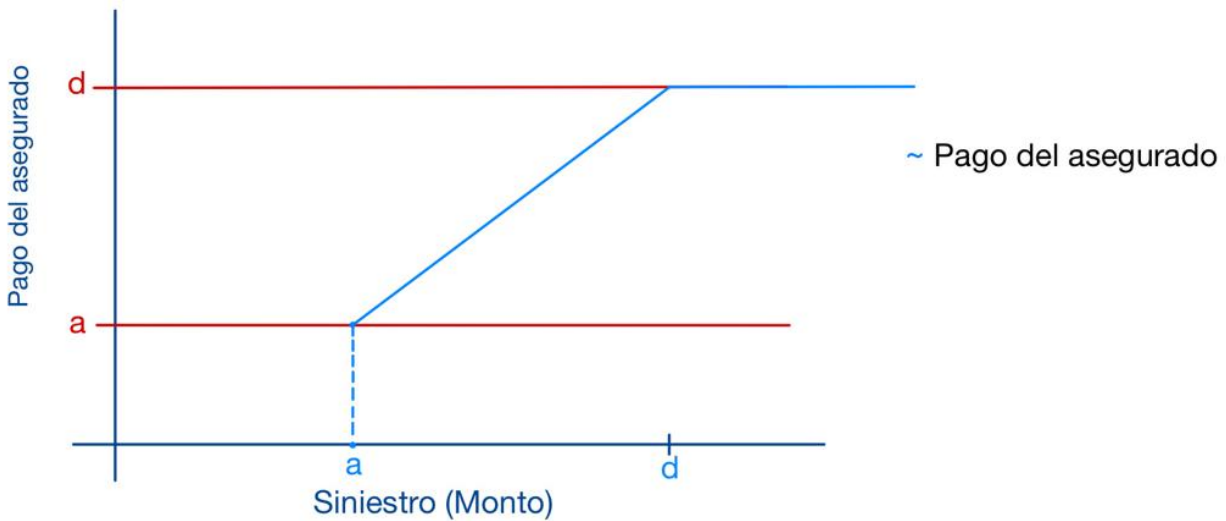
Caso 1:  $X \in [a, d] \Leftrightarrow Z \in [a, d]$ ; Sea  $z \in [a, d]$ .

Y, como el siniestro tiene un monto mínimo de  $a$ , entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z \leq z] &= \mathbb{P}[a \leq X \leq z] = \mathbb{P}[X < z] - \mathbb{P}[X \leq a] \\ &= [X < z] \\ F_z(z) = F_x(z) &\implies f_z(z) = f_x(z) \quad \text{si } x \in [a, d] \end{aligned}$$

Caso 2:  $X \in [d, b] \Leftrightarrow Z = d$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Z \geq d] &= \mathbb{P}[X > d] = 1 - \mathbb{P}[x \leq d] = S_x(d) \\ \implies f_z(d) &= S_x(d) \\ \therefore f_z(z) &= \begin{cases} f_x(z) & \text{si } q \leq X < d \text{ (Parte continuo)} \\ S_x(z) & \text{si } b \geq X \geq d \text{ (Parte discreta)} \end{cases}\end{aligned}$$



Se parece al monto de pago máximo, pero iniciando desde  $a$  en lugar desde 0.

Sería la cobertura de monto de pago máximo =  $d$ ; pero como dijimos, iniciando los “pagos” desde 0.

Porque también, el payoff de un put corto desplazado a unidades. ■

## Inciso b)

```
library(MASS)
library(tidyverse)

## -- Attaching packages ----- tidyverse 1.3.1 --
## v ggplot2 3.3.5      v purrr  0.3.4
## v tibble  3.1.5      v dplyr  1.0.7
## v tidyr   1.1.4      v stringr 1.4.0
## v readr   2.0.2      v forcats 0.5.1

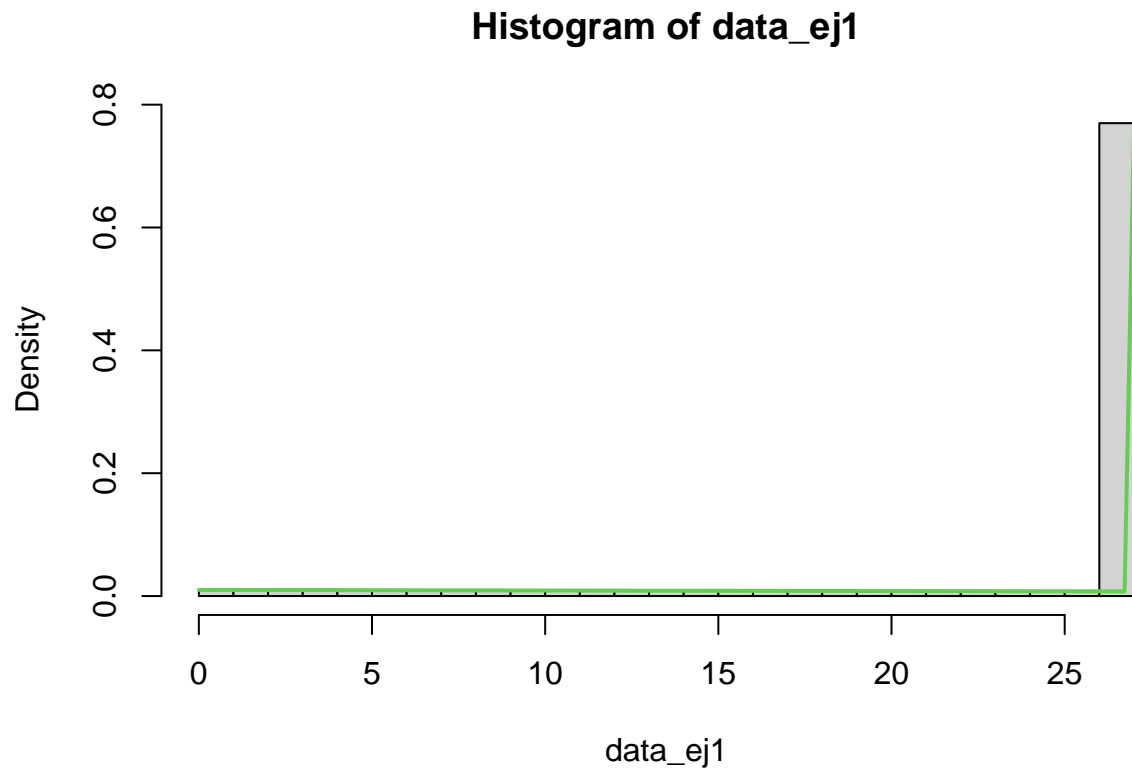
## -- Conflicts ----- tidyverse_conflicts() --
## x dplyr::filter() masks stats::filter()
## x dplyr::lag()    masks stats::lag()
## x dplyr::select() masks MASS::select()

aux<-function(x){
  if(x<27){
    return(dexp(x,rate=1/100))
  }
  else if (x>=27){
    return(1-pexp(27,rate=1/100))
  }
}
```

```

aux<-Vectorize(aux)
#fijamos semilla
set.seed(27)
#simulamos
data_ej1<-pmin(rexp(n=100000,rate=1/100),rep(27,100000))
hist(data_ej1,probability = TRUE,breaks = 0:27)
plot(aux,add=T,xlim = c(0,27),lwd=2,col="3")

```



■

#### Inciso c)

Primero notemos que:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[X|X < d] &= \frac{\mathbb{P}(X \cap X < d)}{\mathbb{P}(x < d)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(x < d)}{\mathbb{P}(x < d)}
 \end{aligned}$$

Esperanza técnica por esperanza total:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}[Z|Z < d]\mathbb{P}[Z < d] + \mathbb{E}[Z|Z = d]\mathbb{P}[Z = d] \\ \mathbb{E}[Z|Z < d] &= \mathbb{E}[X|X < d] = \frac{\mathbb{E}[x\mathbb{I}_{x < d}]}{\mathbb{P}[x < d]} \\ &= \frac{\int_0^{27} x\lambda e^{-\lambda x} dx}{\int_0^{27} \lambda e^{-\lambda x} dx} = \frac{100 - 127e^{-\frac{27}{100}}}{1 - e^{-\frac{27}{100}}}\end{aligned}$$

De la parte de color rojo, hacemos cambio de variable:

$$\begin{aligned}u = x &\implies du = 1 \\ dv = e^{-\frac{x}{100}} &\implies v = -100e^{-\frac{x}{100}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda \int_0^{27} x e^{-\frac{x}{100}} dx &\quad \text{integrando ambas partes:} \\ &= \lambda \left[ -x \frac{e^{-\frac{x}{100}}}{\lambda} \Big|_0^{27} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{27} e^{-\frac{x}{100}} dx \right] \\ &= \frac{x}{\lambda} \left[ -x e^{-\frac{x}{100}} \Big|_0^{27} - 100 e^{-\frac{x}{100}} \Big|_0^{27} \right] \\ &= \left( -27e^{-\frac{27}{100}} \right) - 100 \left[ e^{-\frac{27}{100}} - 1 \right] \\ &= 100 - 100e^{-\frac{27}{100}} - 27e^{-\frac{27}{100}} \\ &= 100 - 127e^{-\frac{27}{100}}\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\mathbb{P}[Z < d] = \mathbb{P}[x < d] = 1 - e^{-\frac{27}{100}}$$

Así;

$$\mathbb{E}[z|Z = d] = d = 27; \mathbb{P}[Z = d] = S_x(d) = e^{-\frac{27}{100}} \blacksquare$$

```
esperanza_empirica<-mean(data_ej1)
esperanza_empirica
```

```
## [1] 23.6471
```

De lo obtenido:

```
Esp_1<-(100-127*exp(-27/100))/(1-exp(-27/100))
Prob_1=(1-exp(-27/100))
Prob_2=1-Prob_1
Esp_2=27
Esp_Teorica<-Esp_1*Prob_1+Esp_2*Prob_2
Esp_Teorica
```

```
## [1] 23.66205
```

Lo cual coincide bastante con la probabilidad empírica obtenida, siendo la diferencia de:

```
Esp_Teorica-esperanza_empirica
```

```
## [1] 0.01494588
```

■

### inciso d)

```
cortes<-cut(data_ej1, breaks = c(0,27,Inf),right=FALSE)
observados<-table(cortes)
observados
```

```
## cortes
##      [0,27) [27,Inf)
##      23783      76217
```

```
esperados<-c(Prob_1,Prob_2)
chisq.test(x=observados,p=esperados) #Ji-cuadrada
```

```
##
## Chi-squared test for given probabilities
##
## data:  observados
## X-squared = 0.80987, df = 1, p-value = 0.3682
```

No rechazamos la hipótesis nula, el p-value es altísimo, por lo que no hay evidencia estadísticamente significativa como para decir que no sigue la distribución propuesta. **i.e, sí se distribuye de la manera propuesta teóricamente**

## Ejercicio 2

En clase se vio la modelación de la variable aleatoria de pérdida de una compañía de seguros ( $Y$ ) para cuando se tiene un contrato de **deducible** y **monto máximo de beneficio**, sea  $X$  la variable aleatoria que mide el monto de pérdida asociado a un siniestro definido en el intervalo  $(a, b)$  con  $0 < a$ , tomando  $a < d < u < b$  el deducible y monto máximo de beneficio respectivamente que cobra **la aseguradora**, se tiene que:

$$Y = \max\{\min\{X, u\} - d, 0\}$$

Muestra la construcción de una variable aleatoria  $Z$  para este tipo de contrato que mida la pérdida que asume **el asegurado** (todo lo que la compañía no cubre),

a) **Exhibe de manera general cómo se construye su función de densidad en términos de la densidad de  $X$** , especificando el soporte de la variable aleatoria que estás construyendo.

## Solución

### Inciso a)

**Observación(es):**

- Notemos que  $Z = X$ , si  $X \in (a, d)$ , pues el contrato tiene efecto unicamente si  $x \geq d$ .
- $Z = d$  si  $X \in [d, u]$ , pues el asegurado deberá pagar  $d$  (deducible) y esto está topado por un monto  $u$  (monto máximo).
- $Z = x + d - u$  si  $x \in (u, b)$ , pues el asegurado asume el costo del deducible ( $d$ ), recibe el monto máximo ( $u$ ) por parte de la aseguradora y paga el resto.

En resumen:

$$Z = \begin{cases} X, & \text{si } x \in (a, d) \Leftrightarrow z \in (a, d) \\ d, & \text{si } x \in [d, u] \Leftrightarrow z = d \\ X + d - u, & \text{si } x \in (u, b) \Leftrightarrow z \in (d, b + d - u) \end{cases}$$

Notemos que bajo esta observación,

$$Z \in (a, b + d - u),$$

La cual tiene sentido pues el nivel mínimo a cubrir es  $a$  y el máximo es  $b$ , pero antes debimos de haber pagado el deducible y recibido el monto máximo por parte de la aseguradora

$$\Rightarrow (a, b + d - u) = \underbrace{(a, d)}_{\text{Caso 1}} \cup \underbrace{\{d\}}_{\text{Caso 2}} \underbrace{(d, b + d - u)}_{\text{Caso 3}}$$

**Nota:** Bajo cualquier concepto  $Z$  y  $Y$  satisfacen nuestra llamada “Ley de conservación del riesgo”, es decir;

$$X = Y + Z$$

**Caso 1:** Si  $x \in (a, d) \Leftrightarrow Z \in (a, d)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z) = F_X(z) \\ \Rightarrow f_Z(z) &= f_X(z) \end{aligned}$$

**Caso 2:** Si  $x \in [d, u] \Leftrightarrow Z = d$

$$f_Z(d) = \mathbb{P}(Z = d) = \mathbb{P}(d \leq X \leq u) = F_X(u) - F_X(d)$$

**Caso 3:** Si  $x \in (u, b) \Leftrightarrow Z \in (d, b + d - u)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X + d - u \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z + u - d) \\ &= F_X(z + u - d) \Rightarrow f_Z(z) = f_X(z + u - d) \end{aligned}$$

De esta manera:

$$f_Z(z) = \begin{cases} f_X(z), & \text{si } z \in (a, d) \\ f_X(u) - F_X(d), & \text{si } z = d \\ f_X(z + u - d), & \text{si } z \in (d, b + d - u) \end{cases} \quad \blacksquare$$

Para comprobar que lo que hiciste está bien realiza lo siguiente:

b) Considera una variable aleatoria  $X \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{100})$  ( $E[X] = 100$ ) a partir de ésta variable aleatoria, considera  $d = 27$  y  $u = 110$ , fija la semilla en 27 y genera una muestra aleatoria de tamaño  $n = 100,000$  de tu variable  $Z$ , realiza un histograma y compáralo con la función de densidad que construiste anteriormente.

## Solución

Inciso b)

Densidad

```

library(kdensity)

## Warning: package 'kdensity' was built under R version 4.1.2
set.seed(27)

Z <- function(X,a,d,u,b){
  n = length(X)
  l <- c()
  for(i in 1:n){
    if(a<= X[i] & X[i]<d){
      l[i] = X[i]
    }else{
      if(X[i]<=u){
        l[i] = d
      }else{
        l[i] = X[i] + d-u
      }
    }
  }
  return(l)
}

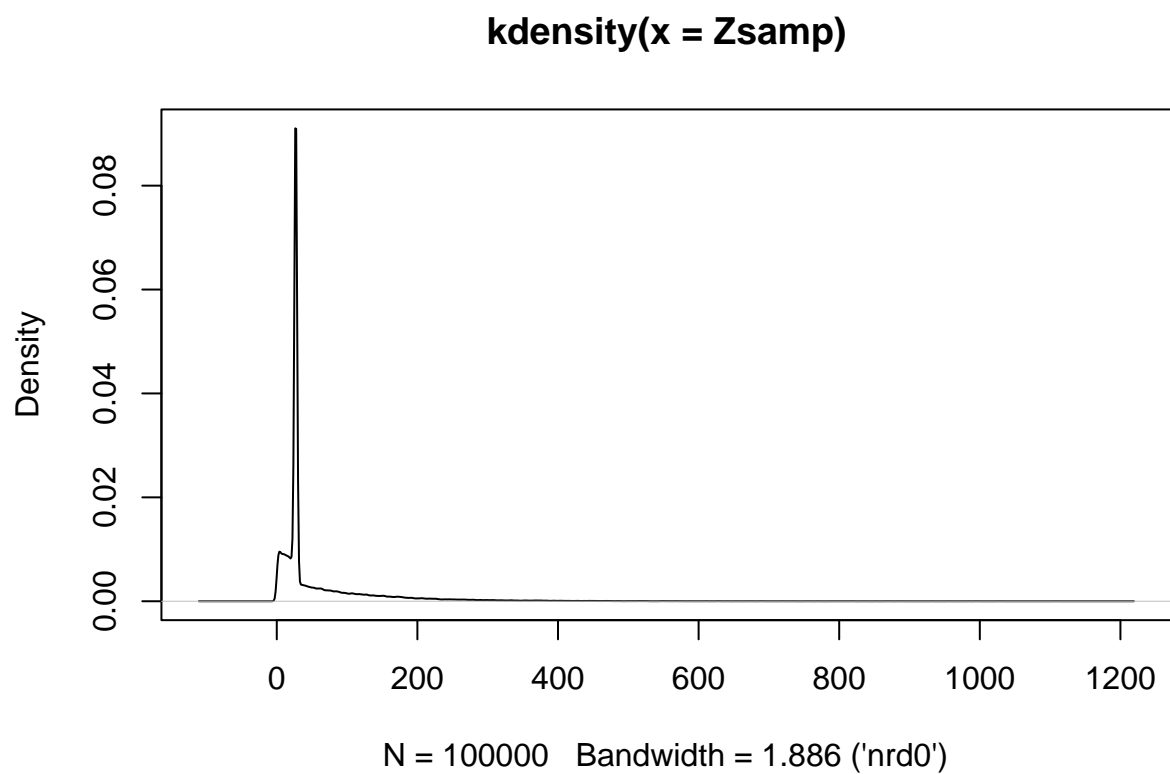
X <- rexp(100000, 1/100)

Zsamp <- Z(X,0,27,110,200) # Notemos que tanto a como b no se especificaron al inicio del problema

kde = kdensity(Zsamp)
plot(kde)

```





c) Obtén la **esperanza** muestral y teórica de  $Z$  (puede ser utilizando comandos de R) ¿son parecidas?

## Solución

### Inciso c)

Veamos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \int_a^d z f_x(z) dz + d(F_X(u) - F_X(d)) + \int_d^{b+d-u} Z f_x(z+u-d) dz \\
&= \int_a^d Z f_X(z) dz + d(F_X(u) - F_X(d)) + \int_u^b (\alpha + d - u) f_X(\alpha) d\alpha \\
&= \int_a^d Z f_X(z) dz + d(F_x(u) - F_x(d)) + \int_u^d \alpha f_x(\alpha) d\alpha + (d-u)(F_x(b) - F_x(u)) \\
&= \mathbb{E}(X) - \int_d^u Z f_x(z) dz + (d-u)F_x(b) - dF_x(d) + uF_x(u) \\
&= \mathbb{E}(X) - \int_0^{u-d} (t+d) f_x(t+d) dt + d(1 - F_x(d)) - u(1 - F_x(u)) \\
t &= z - d \\
&= \mathbb{E}(X) - \int_0^{u-d} t f_X(t+d) dt - d(F_X(u) - F_X(d)) + dS_X(d) - uS_x(u) \\
&= \mathbb{E}(X) - \int_0^{u-d} t f_X(t+d) dt + d - uS_x(u) - dF_x(u) \\
&= \mathbb{E}(X) - d(1 - F_x(u)) - uS_x(u) \\
&= \mathbb{E}(X) - \int_0^{u-d} t f_X(t+d) dt + t(d-u)S_X(u) \\
&= \mathbb{E}(X) - \underbrace{\left[ \int_0^{u-d} t f_x(t+d) dt + (u-d)S_X(u) \right]}_{\mathbb{E}(Y)} \\
&= \mathbb{E}(X) - \int_d^u S_X(t) dt \\
\therefore \mathbb{E}(Z) &= \mathbb{E}(X) - \underbrace{\int_d^u S_X(t) dt}_{\mathbb{E}(Y)}
\end{aligned}$$

Para nuestro ejercicio

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= 100 - \int_{27}^{110} e^{-\frac{t}{100}} dt = 100 - \left( -100e^{-\frac{t}{100}} \Big|_{27}^{110} \right) \\
&= 100 + 100 \left( e^{-\frac{110}{100}} - e^{-\frac{27}{100}} \right) = 100 \left[ 1 + e^{-\frac{110}{100}} - e^{-\frac{27}{100}} \right] \\
&= 100[.5694916] \approx 56.94916 \blacksquare
\end{aligned}$$

```
Zsamp <- Z(X,0,27,110,200) # Notemos que tanto a como b no se especificaron al inicio del problema
print("Media Muestral de Z:")
```

```
## [1] "Media Muestral de Z:"
```

```
print(mean(Zsamp))
```

```
## [1] 56.73916
```

d) Obtenga la **mediana** muestral y teórica de  $Z$  (puede ser utilizando comandos de R) ¿son parecidas?

## Solución

### Inciso d)

Notemos que:

$$Z = \max\{X - u, 0\} + \min\{X, d\}$$

Pues, si  $x \in (a, d) \Leftrightarrow a < x < d \Leftrightarrow a - u < x - u < d - u < 0$

$$\Rightarrow \max\{x - u, 0\} = 0 \wedge \min\{X, d\} = X$$

$$\Rightarrow Z = x$$

Si  $x \in [d, u] \Leftrightarrow d \leq x \leq u \Leftrightarrow d - u \leq x - u \leq 0$

$$\Rightarrow \max\{x - u, 0\} = 0 \wedge \min\{X, d\} = d$$

$$\Rightarrow Z = d$$

Si  $x \in [u, b] \Leftrightarrow u < x < b \Leftrightarrow 0 < x - u < b$

$$\Rightarrow \max\{x - u, 0\} = x - u \wedge \min\{X, d\} = d$$

$$\Rightarrow Z = X - u + d$$

De manera análoga a como pensamos para  $Y$ , la función  $f(x) := \max\{x - u, 0\} + \min\{x, d\}$  es no decreciente, pues a mayor monto de siniestro, mayor será el pago del asegurado.

Y por el teorema de equivarianza de cuantiles se tiene que:

$$q_Z(.5) = \max\{q_x(.5) - u, 0\} + \min\{q_x(.5), d\}$$

En nuestro caso ( $u = 110, d = 27, q_x(.5) = \ln(2)(100) = 69.314$ )

$$\Rightarrow q_Z(.5) = \max\{69.314 - 110, 0\} + \min\{69.314, 27\}$$

$$= 0 + 27 = 27$$

$$\therefore q_Z(.5) = 27 \quad \blacksquare$$

```
Zsamp <- Z(X,0,27,110,200) # Notemos que tanto a como b no se especificaron al inicio del problema
print("Mediana Muestral de Z:")
```

```
## [1] "Mediana Muestral de Z:"
```

```
print(quantile(Zsamp, 0.5))
```

```
## 50%
```

```
## 27
```

## Ejercicio 3

Sea  $X$  la variable aleatoria que representa los montos de siniestro para un contrato. La función de masa de probabilidad está dada por:

$$\mathbb{P}[X = x] = \frac{1}{10} \quad \text{para } x = 100, 200, 300, \dots, 900, 1000$$

Dicho contrato está sujeto a un deducible  $d = 200$ , un monto máximo de beneficio  $u = 800$  y un coaseguro  $\alpha = 0.95$ .

- Calcula el monto promedio del costo por pérdida de la aseguradora ( $\mathbb{E}[Y_L]$ )
- Fija una semilla en 100 y realiza  $n = 1,000,000$  simulaciones para calcular de forma muestral la esperanza del inciso anterior.
- Calcula el monto promedio del costo por pago de la aseguradora ( $\mathbb{E}[Y_P]$ )
- Fija una semilla en 100 y realiza  $n = 1,000,000$  simulaciones para calcular de forma muestral la esperanza del inciso anterior.

## Solución

### Inciso a)

Usaremos la fórmula vista en clase, con la tasa de inflación  $r = 0\%$ ,  $d = 200$ ;  $u = 800 \implies u - d = 800 - 200 = 600$ ,  $\alpha = 0.95 \implies \alpha(u - d) = 570 \implies \alpha d = 190$ .

Los posibles valores de  $Z = \min(\max(\alpha(X - d), 0), \alpha(u - d))$ ; dado que:

$$x \in \{100, 200, \underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{De 100 en 100}}, 900, 1000\}$$

son:

```
alpha=0.95
d=200
u=800
posibles_pagos<-c()
for (i in seq(100,1000,by=100)){
  posibles_pagos[i/100]<-min(max(alpha*(i-d),0),alpha*(u-d))
}
valores_ej3<-data.frame("Perdida"=seq(100,1000,by=100),"Pago"=posibles_pagos,
                        "Probabilidad"=rep(1/10,10))
valores_ej3
```

```
##      Perdida Pago Probabilidad
## 1      100    0          0.1
## 2      200    0          0.1
## 3      300   95          0.1
## 4      400  190          0.1
## 5      500  285          0.1
## 6      600  380          0.1
## 7      700  475          0.1
## 8      800  570          0.1
## 9      900  570          0.1
## 10     1000  570          0.1
```

```
valores_ej3_agrupados <- valores_ej3 %>%
  group_by(Pago) %>%
  summarise(Probabilidad=sum(Probabilidad))
valores_ej3_agrupados
```

```
## # A tibble: 7 x 2
##   Pago Probabilidad
##   <dbl>         <dbl>
## 1     0          0.2
## 2    95          0.1
## 3   190          0.1
```

```
## 4    285        0.1
## 5    380        0.1
## 6    475        0.1
## 7    570        0.3
```

Entonces, la probabilidad teórica está dada por:

```
esperanza_teorica_L3<-sum(valores_ej3$Pago*valores_ej3$Probabilidad)
esperanza_teorica_L3
```

```
## [1] 313.5
```

■

## Solución

### Inciso b)

```
set.seed(100)
datos_ej3b<-sample(pmin(pmax(alpha*(seq(100,1000,by=100)-d),0),alpha*(u-d)),1000000,replace=T)
esperanza_empirica_L3<-mean(datos_ej3b)
esperanza_empirica_L3
```

```
## [1] 313.355
```

Vemos que es muy similar, de hecho solo difiere por:

```
esperanza_teorica_L3-esperanza_empirica_L3
```

```
## [1] 0.14497
```

■

## Solución

### Inciso c)

Como  $Y^P = Z|Z > 0$

$$\mathbb{P}[Z = z|z > 0] = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}[Z=z]}{\mathbb{P}[Z>0]}, & \text{si } Z > 0 \\ 0, & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Como  $\mathbb{P}[Z > 0] = \frac{8}{10}$ ; entonces tenemos que:

```
posibles_perdidas=posibles_pagos[posibles_pagos>0]
pago<-data.frame("Pago_positivo"=posibles_perdidas,
                 "Probabilidad"=rep((1/10)/(8/10),length(posibles_perdidas)))
pago
```

```
##   Pago_positivo Probabilidad
## 1           95        0.125
## 2          190        0.125
## 3          285        0.125
## 4          380        0.125
## 5          475        0.125
## 6          570        0.125
## 7          570        0.125
```

```
## 8          570          0.125
pago_agrupado<-pago %>%
  group_by(Pago_positivo) %>%
  summarise(Probabilidad=sum(Probabilidad))
pago_agrupado
```

```
## # A tibble: 6 x 2
##   Pago_positivo Probabilidad
##         <dbl>         <dbl>
## 1           95          0.125
## 2          190          0.125
## 3          285          0.125
## 4          380          0.125
## 5          475          0.125
## 6          570          0.375
```

Entonces la esperanza teórica está dada por:

```
esperanza_teorica_P3<-sum(pago$Pago_positivo*pago$Probabilidad)
esperanza_teorica_P3
```

```
## [1] 391.875
```



## Solución

### Inciso d)

```
set.seed(100)
datos_ej3d<-sample(pmin(pmax(alpha*(seq(100,1000,by=100)-d),0),alpha*(u-d))[pmin(pmax(alpha*(seq(100,1000,by=100)-d),0),alpha*(u-d))],n)
esperanza_empirica_P3<-mean(datos_ej3d)
esperanza_empirica_P3
```

```
## [1] 391.8326
```

Vemos que son bastante similares, de hecho solo difieren por:

```
esperanza_teorica_P3-esperanza_empirica_P3
```

```
## [1] 0.04237
```



## Ejercicio 4

En clase se vio la modelación de la variable aleatoria de pérdida de una compañía de seguros ( $Y$ ) para cuando se tiene un contrato de **deducible**, sea  $X$  la variable aleatoria que mide el monto de pérdida asociado a un siniestro definido en el intervalo  $(a, b)$  con  $0 < a$ , tomando  $a < d < b$  el deducible que cobra **la aseguradora**, se define como **deducible franquicia** tal que el pago de la compañía aseguradora está dado por:

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \leq d \\ X & \text{si } X > d \end{cases}$$

Muestra la construcción de una variable aleatoria  $Y$  para este tipo de contrato que mida la pérdida que asume **la aseguradora** (todo lo que la compañía cubre),

a) Exhibe de manera general cómo se construye su función de densidad en términos de la densidad de  $X$ , especificando el soporte de la variable aleatoria que estás construyendo.

## Solución a

Notemos que:

$$Y = X\mathbb{I}_{\{X > d\}}$$

De igual manera, notemos que:

$$f_Y(0) = \mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X \leq d) = F_X(d)$$

y si  $y \in (d, b)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(d < Y \leq y) &= \mathbb{P}(d < x < y) = F_X(y) - F_X(d) \\ \implies F_Y(y) - F_Y(d) &= F_X(y) - F_X(d) \\ \implies f_Y(y) &= f_X(y) \text{ si } y \in (d, b) \\ \therefore f_Y(y) &= \begin{cases} F_X(d) & \text{si } y \leq 0 \\ f_X(y) & \text{si } y > d \end{cases}\end{aligned}$$

De esta manera  $\text{Sop}(Y) = \{0\} \cup (d, b)$

Para comprobar que lo que hiciste está bien realiza lo siguiente:

b) Considera una variable aleatoria  $X \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{100})$  ( $E[X] = 100$ ) a partir de ésta variable aleatoria, considera  $d = 50$ , fija la semilla en 6 y genera una muestra aleatoria de tamaño  $n = 100,000$  de tu variable  $Y$ , realiza un histograma y compáralo con la función de densidad que construiste anteriormente.

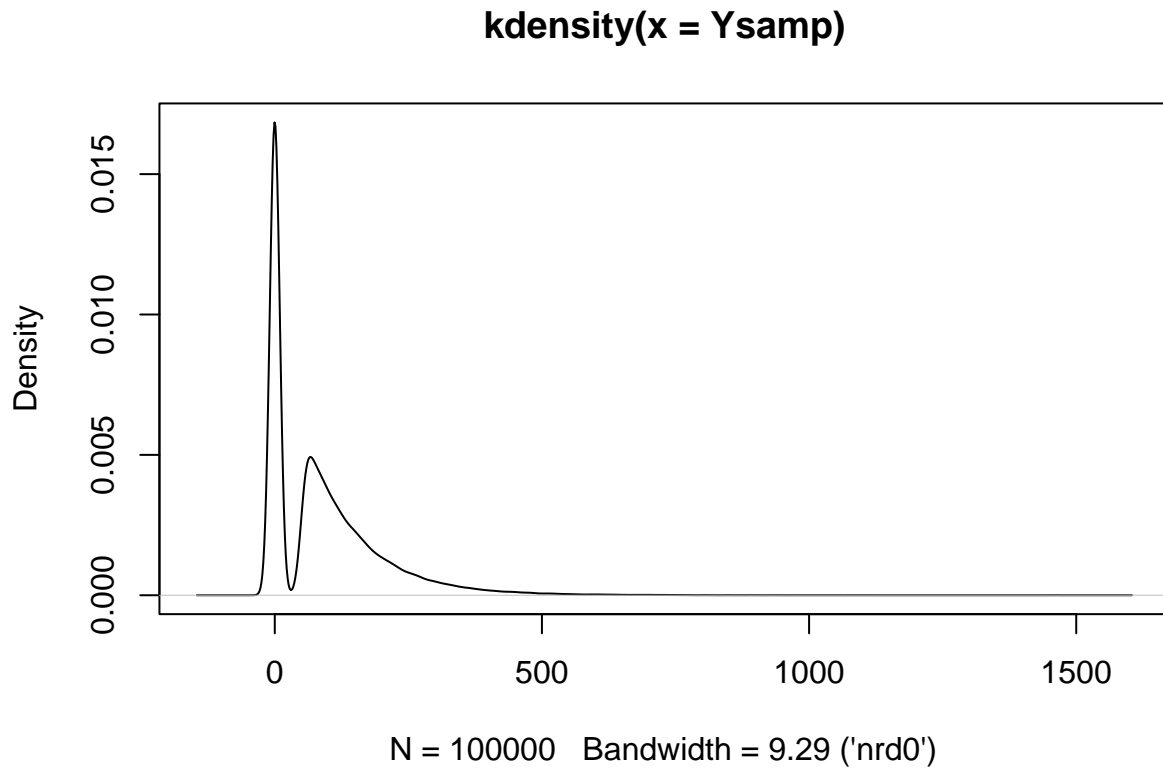
## Solución b

```
library(kdensity)
set.seed(6)

Y <- function(X,d){
  n = length(X)
  l <- c()
  for(i in 1:n){
    if(X[i]>d){
      l[i] = X[i]
    }else{l[i] = 0}
  }
  return(l)
}

X <- rexp(100000, 1/100)
Ysamp <- Y(X,50)

# Densidad
kde = kdensity(Ysamp)
plot(kde)
```



c) Obtén la **esperanza** muestral y teórica de  $Y$  (puede ser utilizando comandos de R) ¿son parecidas?

## Solución c

Notemos que:

$$\mathbb{E}(Y) = 0F_X(d) + \int_d^\infty yf_x(y)dy = \int_d^\infty yf_x(y)dy \dots (1)$$

Notemos además que, si  $x > d$



$$\begin{aligned}
&\implies X = \max\{X - d, 0\} + d \\
&\implies \mathbb{E}(Y) = \int_d^\infty [(y - d)_+ + d] f_x(y) dy = \int_d^\infty (y - d)_+ f_x(y) dy \\
&\quad + d \int_d^\infty f_x(y) dy = \int_d^\infty (y - d) f_x(y) dy + d(1 - F_X(d)) \\
&= \mathbb{E}(X) - d \int_d^\infty f_x(y) dy - \int_a^d y f_x(y) dy + dS_x(d) \\
&= \mathbb{E}(X) - \int_a^\infty \min\{d, y\} f_x(y) dy + dS_x(d) \\
&= \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\min\{X, d\}) + dS_x(d) \\
&= \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge d) + dS_x(d)
\end{aligned}$$

Veamos (1) para nuestro caso particular, es decir,  $(d = 50, X \sim \exp(\frac{1}{100}))$

$$\begin{aligned}
&\implies \mathbb{E}(Y) = \int_{50}^\infty y \frac{1}{100} e^{-\frac{y}{100}} dy \begin{cases} u = y \implies du = dy \\ dv = \frac{1}{100} e^{-\frac{y}{100}} dy \implies v = -e^{-\frac{y}{100}} \end{cases} \\
&= -ye^{-\frac{y}{100}} \Big|_{50}^\infty + \int_{50}^\infty e^{-\frac{y}{100}} dy = 50e^{-\frac{1}{2}} + \left(-100e^{-\frac{y}{100}} \Big|_{50}^\infty\right) \\
&= 50e^{-\frac{1}{2}} + 100e^{-\frac{1}{2}} \\
&= 150e^{-\frac{1}{2}} \\
&= 90.9796 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

```
Ysamp <- Y(X,50)
```

```
print("Media Muestral de Y:")
```

```
## [1] "Media Muestral de Y:"
```

```
print(mean(Ysamp))
```

```
## [1] 90.85721
```

d) Obtenga la **mediana** muestral y teórica de  $Y$  (puede ser utilizando comandos de R) ¿son parecidas?

## Solución d

Recordemos que:

$$Y = X\mathbb{I}_{\{X > d\}}(x); \quad X \geq 0$$

Entonces, notemos que si  $0 \leq x_1 \leq x_2$ , entonces:

- Si  $x_1 > d \implies x_2 > d \implies \mathbb{I}_{\{x_1 > d\}} = \mathbb{I}_{\{x_2 > d\}} = 1$
- Si  $x_1 \leq d < x_2 \implies \mathbb{I}_{\{x_1 > d\}} = 0 < \mathbb{I}_{\{x_2 > d\}} = 1$
- Si  $x_2 \leq d \implies \mathbb{I}_{\{x_1 > d\}} = \mathbb{I}_{\{x_2 > d\}} = 0$

De esta manera  $g(x) := \mathbb{I}_{\{X > d\}}(x)$  es una función no decreciente y positiva al igual que:  $f(x) := x$  (Para  $x \in [0, \infty)$ )  $\implies h(x) := f(x) * g(x)$  es una función no decreciente y positiva, es decir,  $h(x) = x\mathbb{I}_{\{X > d\}}(x)$  es no decreciente y positiva  $\implies$  por el teorema de equivarianza de cuantiles:

$$q_Y(\alpha) = q_x(\alpha) \mathbb{I}_{\{X > d\}}(q_x(\alpha))$$

En nuestro caso ( $\alpha = 0.5, d = 50, X \sim \exp(\frac{1}{100})$ )

$$\begin{aligned} \Rightarrow q_Y(0.5) &= \ln(2)(100) \mathbb{I}_{\{X > d\}}(\ln(2)(100)) \\ &= 69.314718 \mathbb{I}_{\{X > d\}}(69.314718) \quad (\text{lo naranja se hace uno}) \\ &= 69.314718 \\ q_Y(0.5) &\approx 69.314718 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

```
Ysamp <- Y(X,50)

print("Mediana Muestral de Y:")

## [1] "Mediana Muestral de Y:"

print(quantile(Ysamp, 0.5))

##      50%
## 69.37989
```

## Ejercicio 5

Un deducible franquicia modifica el deducible ordinario agregando el deducible cuando hay un monto positivo pagado.

Una vez que la pérdida  $X$  supera el umbral  $d$ , la aseguradora paga la pérdida total  $X$ .

La variable aleatoria por perdida para una póliza con deducible franquicia es.

$$Y^L = \begin{cases} 0 & \text{para } X \leq d \\ X & \text{para } X > d \end{cases}$$

La variable aleatoria por pago para una póliza con deducible franquicia está dada por

$$Y^P = X | X > d$$

a) Demuestra para una poliza con deducible franquicia

$$\mathbb{E}(Y^L) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge d) + d[1 - F(d)]$$

# Solución a

**Observación**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\min(X, d)] &= \mathbb{E}[X | X < d] \mathbb{P}[X < d] + \mathbb{E}[d | X \geq d] \mathbb{P}[X \geq d] \\ &= \left[ \int_0^d x \frac{f_X(x) dx}{F_X(d)} \right] F_X(d) + d[1 - F_X(d)] \\ &= \int_0^d x F_X(x) dx + d[1 - F_X(d)] \\ &= \int_0^d S(x) d_X + d[1 - F_X(d)] \\ &\therefore \int_0^d S(x) d_X + d[1 - F_X(d)] \end{aligned}$$

Resolvemos el inciso a

$\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[Y^2|X \leq d]\mathbb{P}[X \leq d] + \mathbb{E}[Y^2|X > d]\mathbb{P}[X > d]$  Pero,  $\mathbb{E}[Y^2|X \leq d] = 0$  ya que  $Y^2|Z \leq d = 0$ . (La v.a constante 0)

$$\mathbb{E}[Y^2|X > d]\mathbb{P}[X > d]$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X > d] &= 1 - F_X(d) \\ \mathbb{E}[Y^2|X > d] &= \mathbb{E}[X|X > d] \\ &= \int_d^\infty x \frac{f_X(z)dz}{1 - F_X(d)} \\ &= \int_d^\infty x \frac{f_X(z)dz}{1 - F_X(d)} + \int_0^d x \frac{f_X(z)dz}{1 - F_X(d)} - \int_0^d x \frac{f_X(z)dz}{1 - F_X(d)} \\ &= \int_0^\infty x \frac{f_X(z)dz}{1 - F_X(d)} - \int_0^d x \frac{f_X(z)dz}{1 - F_X(d)} \\ &= \frac{1}{1 - F_X(d)} \left[ \int_0^\infty z f_X(z)dz - \int_0^d x f_X(z)dz \right]\end{aligned}$$

Haciendo uso de Darth-Vader

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{1 - F_X(d)} \left( \mathbb{E}[X] - \int_0^d S(x)dx \right) \\ &= \frac{1}{1 - F_X(d)} \left( \mathbb{E}[X] - \int_0^d 0^d S(x)dx \right) [1 - F_X(d)] \\ &= \mathbb{E}[X] - \int_0^d S(x)dx \\ &= \mathbb{E}[X] - \int_0^d S(x)dx - d[1 - F_X(d)] + d[1 - F_X(d)] \\ &= \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X \wedge d] + d[1 - F_X(d)] \quad \blacksquare\end{aligned}$$

b) Obten la funcion de decidad  $f_{Y^P}(y)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X \leq x|X > d] &= \frac{\mathbb{P}[X \leq x \mathbb{I}_{\{X > d\}}]}{\mathbb{P}[X > d]} \\ &= \frac{\int_0^x f_X(x)dx \mathbb{I}_{\{x > d\}}}{S_X(d)} \\ &= \frac{\int_0^x f_X(x)dx}{S_X(d)} \\ &\implies F_X(x) = \frac{\int_0^x f_X(z)dz}{S_X(d)} \\ \text{Derivando } &\implies f_X(x) = \frac{f_X(x)}{S_X(d)} \\ \therefore f_X(x) &= \begin{cases} \frac{f_X(x)}{S_X(d)} & \text{si } x > d \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

## Ejercicio 6

Mike es un especialista en acrobacias con motocicleta que se presenta en eventos de deportes extremos.

El costo anual para reparar su motocicleta, es modelado por una variable aleatoria  $X \sim \text{Pareto}(\alpha = 2, \theta = 5,000)$

Los costos anuales de reparación de la motocicleta están sujetos a lo siguiente:

- i) Mike paga un deducible  $d=1,000$
- ii) Mike paga 20% para reparaciones que están entre 1,000 y 6,000
- iii) Mike paga el 100% para reparaciones que superan 6,000 y hasta desembolsar máximo 10,000
- iv) Mike paga el 10% de las reparaciones restantes

Con la información proporcionada

- a) Calcula el costo esperado anual de reparación.

**Hint :** Usa el ejercicio anterior

## Ejercicio 7

Sea  $X \sim \text{Pareto}(a, b)$  con soporte en  $(0, \infty)$  la v.a. de los montos de un siniestro.

- a) Calcular la distribución de la variable de costo por pago cuando la póliza está sujeta a un deducible  $d$ .
- b) Para valores de  $a, b$  y  $d$  de su elección, comprueba que lo encontrado en el inciso anterior se cumple muestralmente comparando un histograma y la densidad teórica. Realiza una prueba de bondad de ajuste y concluye.

## Solución

### Inciso a)

En clase vimos que, de manera general: la función de densidad de  $Y$  es:

$$f_Y(t) = \begin{cases} F_X\left(\frac{d}{1+r}\right) & \text{si } t = 0 \quad (\text{discreta}) \\ \frac{f_X\left(\frac{t+d}{\alpha(1+r)}\right)}{\alpha(1+r)} & \text{si } t \in (0, \alpha(u-d)) \quad (\text{continua}) \\ S_X\left(\frac{u}{(1+r)}\right) & \text{si } t = \alpha(u-d) \quad (\text{discreta}) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Tomando  $r = 0, \alpha = 1; u = \infty$ ; y como  $S_x(\infty) = 0$ ;

$$\Rightarrow f_Y(t) = \begin{cases} F_X(d) & \text{si } t = 0 \\ f_X(t+d) & \text{si } t \in (0, \infty) \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Tenemos que: *Pareto*

*Pareto*

$$\begin{aligned} X &\sim \text{Pareto}(a, b) \text{ con } a > 0 \text{ y } b > 0. \\ f(x) &= \frac{ab^a}{(b+x)^{a+1}} \text{ para } x > 0. \\ F(x) &= 1 - \left[ \frac{b}{(b+x)} \right]^a \text{ para } x > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow F_X(d) &= 1 - \left[ \frac{b}{b+d} \right]^a \\ \Rightarrow f_Y(t) &= \begin{cases} 1 - \left[ \frac{b}{b+d} \right]^a & \text{si } t = 0 \\ \frac{ab^a}{(b+(t+d))^{a+1}} & \text{si } t \in (0, \infty) \end{cases}\end{aligned}$$

Además:

$$f_{Y_p}(t) = \frac{f_{Y_L}(t)}{1 - f_{Y_L}(0)} \forall t \in (0, \infty)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f_{y_p}(t) &= \frac{\frac{ab^a}{(b+(t+d))^{a+1}} a + 1}{1 - \left[ 1 - \left[ \frac{b}{b+d} \right]^a \right]} \\ &= \frac{\frac{ab^a}{(b+(t+d))^{a+1}}}{\left[ \frac{b}{b+d} \right]^a} \\ &= \frac{\frac{ab^a}{(b+d+t)^{a+1}}}{\frac{b^a}{(b+d)^a}} \\ &= \frac{ab^a(b+d)^a}{b^a(b+d+t)^{a+1}} \\ &= \frac{a(b+d)^a}{[b^a(b+d) + t]^{a+1}}\end{aligned}$$

¡Se distribuye  $Pareto(a, b+d)$ ! ■

## Solución

### Inciso b)

```
library(actuar)

##
## Attaching package: 'actuar'

## The following objects are masked from 'package:stats':
##
## sd, var

## The following object is masked from 'package:grDevices':
##
## cm

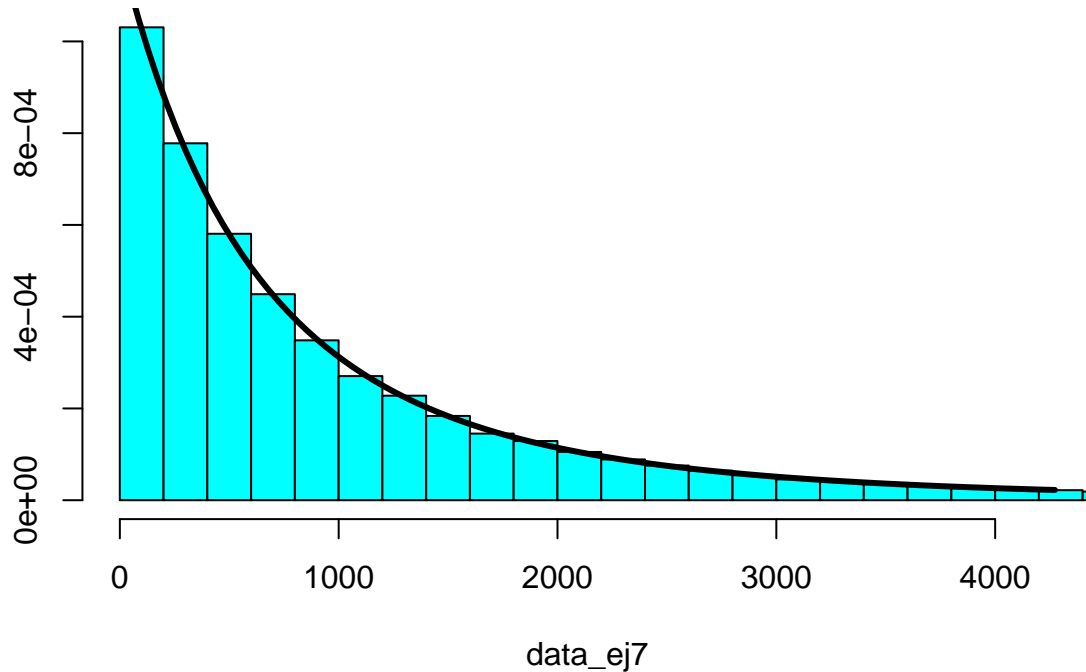
a=3
b=2000
d=500
proba_0<-ppareto(d,shape=a,scale=b)
proba_0

## [1] 0.488
```

```

set.seed(27)
n=100000
data_ej7<-c()
j=1
while(j<=n){
  aux=max(rpareto(1,shape=a,scale=b)-d,0)
  if(aux>0){
    data_ej7[j]=aux
    j=j+1
  }
}
aux = function(x){dpareto(x,shape=a,scale=b+d)}
MASS::truehist(data_ej7,xlim = c(0,quantile(data_ej7,0.95)))
plot(aux,xlim = c(0,quantile(data_ej7,0.95)),add=T,lwd=3)

```



Gráficamente, vemos que se pega demasiado la línea al histograma.

```

library(goftest)
goftest::ad.test(data_ej7,"ppareto",shape=a,scale=b+d) #Anderson-Darling

```

```

##
## Anderson-Darling test of goodness-of-fit
## Null hypothesis: distribution 'ppareto'
## with parameters shape = 3, scale = 2500
## Parameters assumed to be fixed
##
## data: data_ej7

```

```
## An = 1.2129, p-value = 0.2627
ks.test(unique(data_ej7), "ppareto", shape=a, scale=b+d)
```

```
##
## One-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data: unique(data_ej7)
## D = 0.0033495, p-value = 0.2119
## alternative hypothesis: two-sided
```

Pasa ambos test sin ningún problema: Los p-values obtenidos en ambas pruebas son altísimos. Por lo que aceptamos la hipótesis nula de que se distribuye pareto(3,2500). De hecho, la esperanza muestral y teórica coinciden:

```
esp_mues_ej7<-mean(data_ej7)
esp_mues_ej7
```

```
## [1] 1248.82
```

```
esp_teo_ej7<-(b+d)/(a-1)
esp_teo_ej7
```

```
## [1] 1250
```

Difieren por:

```
esp_mues_ej7-esp_teo_ej7
```

```
## [1] -1.180437
```

## ■ # Ejercicio 8

Sean  $X_1, \dots, X_{100}$  los montos de siniestros independientes con distribución exponencial de media 1000. Una aseguradora cubrirá todos los riesgos cuyas póliza están sujetas cada una a un deducible  $d = 100$ .

- Calcular la distribución del número de siniestros en los que la aseguradora tendrá que pagar algún monto positivo.
- Calcular la distribución del numero de siniestros en los que la aseguradora no tendrá que pagar (incluyendo pagos de 0).
- Simular valores para el número de siniestros en los que la aseguradora debe realizar un pago positivo. Realizar una prueba Ji-cuadrada partiendo la muestra en 3 conjuntos ( $muestra \leq 90$ ,  $90 < muestra \leq 95$  y  $95 < muestra$ ) para corroborar la distribución encontradas en el inciso a).
- Simular valores para el número de siniestros en los que la aseguradora no debe realizar un pago. Realizar una prueba Ji-cuadrada partiendo la muestra en 3 conjuntos ( $muestra \leq 5$ ,  $5 < muestra \leq 10$  y  $10 < muestra$ ) para corroborar la distribución encontradas en el inciso b).

## Ejercicio 9

Recordemos la formula de De Pril [ii]: Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.a.i.i.d. con valores en el conjunto  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ . Para cada entero  $j \geq 0$ , defina la probabilidad  $f_j = \mathbb{P}[X = j]$ , y suponga  $f_0 \neq 0$ . Sea  $S = \sum_{k=1}^n X_k$ . Entonces las probabilidades  $g_x = \mathbb{P}[S = x]$  se pueden calcular recursivamente mediante la fórmula

$$g_x = \begin{cases} (f_0)^n & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{f_0} \sum_{k=1}^x \left[ \frac{j(n+1)}{x} - 1 \right] f_j g_{x-j} & \text{si } x \in \mathbb{N} - \{0\}. \end{cases}$$

1. Considere ahora  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.a.i.i.d. con valores en el conjunto  $\mathbb{N} - \{0, 1, \dots, m-1\} = \{m, m+1, \dots\}$ . Para cada entero  $j \geq m$ , defina la probabilidad  $f_j = \mathbb{P}[X = j]$ , y suponga  $f_m \neq 0$ . Encuentre y demuestre una manera de encontrar probabilidades exactas para  $S = \sum_{k=1}^n X_k$ .

*Hint:* Use De Pril [ii].

2. Programe, muestre y explique con comentarios la metodología encontrada.
3. Suponga que tiene  $n = 100$  pólizas/asegurados ( $X_i$ ) independientes e idénticamente distribuidos tales que tienen una función de masa de probabilidad dada por

$k$	10	15	20	25
$\mathbb{P}[X = k]$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$

Calcule de manera "exacta" (numéricamente):

- (a)  $\mathbb{P}[S = 1570]$
- (b)  $\mathbb{P}[S = 900]$
- (c)  $\mathbb{P}[S \leq 1,650]$
- (d)  $\mathbb{P}[S \geq 1,560]$

*Hint:* Use los incisos anteriores.

## Ejercicio 10

Una empresa tiene 500 trabajadores y desea asegurarlos por una suma asegurada de \$100,000. Cada uno tiene una probabilidad de 0.15 de reclamar y de 0.85 de no durante cierto periodo de tiempo. Si  $Y$  es la variable aleatoria que mide el monto a pagar de la aseguradora en un contrato por deducible asumiendo el riesgo de todo el portafolio anterior:

- (a) ¿Cuánto debe valer el deducible para que el valor esperado de  $Y$  sea \$500,000?

Nota: Deben dar el valor exacto del deducible (salvo quizás un error numérico). Puedes utilizar R para realizar tus cálculos y/o aproximaciones numéricas **¡cada dígito cuenta!**. Un buen punto de partida para buscar a  $d$  es saber que:

- Si  $X \in [a, b]$ , en general,  $d \in [0, b]$  (no tiene mucho sentido  $d > b$ ).
- $\mathbb{E}[X \wedge d] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[(X - d)_+] \leq d$ .

Hint: Existen muchas maneras de solucionar esto. Puedes asumir que las fórmulas de Darth Vader son válidas para variables aleatorias discretas. Para asuntos numéricos, un par de buenas funciones son: `pracma::integral` y `pracma::newtonRaphson`, o bien, `uniroot`. Aunque insisto, cada quién lo hará como pueda.

- (b) Realiza simulaciones de la  $Y$  que propones y obtén su media.



## Ejercicio $\alpha$ (Extra+2)

Las canciones anexadas `Mágia1.mp3` y `Mágia2.mp3` son de un videojuego. Quien protagoniza este videojuego es una bruja que utiliza hechizos para defenderse de quien la quiere matar. Hay 3 categorías de hechizo: pared, techo y piso. A la fecha de publicación de esta tarea, existen 4 videojuegos de esta saga, en particular: ¿Cómo se llama la protagonista del videojuego al que pertenecen las canciones en cuestión y cuál es la trama del mismo?

Este punto extra solamente es válido para los 4 primeros equipos que entreguen el examen y correctamente la respuesta.