Tarea 2

Teoría del Riesgo

Profesor: Alarcón González Edgar Gerardo

Adjuntos: González Alvarado Héctor

Martínez Loria Johan

Padilla Martínez Miriam Janeth

Integrantes: (21) Cuéllar Chávez Eduardo de Jesús

(32) García Tapia Jesús Eduardo

(60) Reyes López Arath Alejandro

(67) Saldaña Morales Ricardo

Grupo: 9106

Ejercicio 1

En clase se vio la modelación de la variable aleatoria de pérdida de una compañía de seguros (Y) para cuando se tiene un contrato de **deducible**, sea X la variable aleatoria que mide el monto de pérdida asociado a un siniestro, tomando $d > 0$ el deducible que cobra **la aseguradora**, se tiene que:

$$Y = \text{máx}\{X - d, 0\}$$

Muestra la construcción de una variable aleatoria Z para este tipo de contrato que mida la pérdida que asume **el asegurado** (todo lo que la compañía no cubre).

a) **Exhibe de manera general cómo se construye su función de densidad en términos de la densidad de X**, especificando el soporte de la variable aleatoria que estás construyendo.

Busca su relación con otra variable de cobertura que conozcas, recuerda siempre la "Ley de conservación del Riesgo".

Para comprobar que lo que hiciste está bien realiza lo siguiente:

b) Considera una variable aleatoria $X \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{100}\right)$ $(E[X] = 100)$ a partir de ésta variable aleatoria, considera $d = 27$, fija la semilla en 27 y genera una muestra aleatoria de tamaño $n = 100,000$ de tu variable Z, realiza un histograma y compáralo con la función de densidad que construiste anteriormente.

c) Obtén la esperanza muestral y teórica de Z (puede ser utilizando comandos de R) ¿son parecidas?

d) Realiza una prueba de bondad de ajuste Ji cuadrada que contraste los datos simulados de Z con la función de densidad que construiste, en particular para cuando el asegurado asume una pérdida igual a d y para cuando no, es decir, cuando $Z = d$ y cuando $Z < d$, explica y concluye tus resultados.

Solución

Inciso a)

Ejercicio 2

En clase se vio la modelación de la variable aleatoria de pérdida de una compañía de seguros (Y) para cuando se tiene un contrato de **deducible** y **monto máximo de beneficio**, sea X la variable aleatoria que mide el monto de pérdida asociado a un siniestro definido en el intervalo (a, b) con $0 < a$, tomando $a < d < u < b$ el deducible y monto máximo de beneficio respectivamente que cobra **la aseguradora**, se tiene que:

$$Y = \text{máx}\{\text{mín}\{X, u\} - d, 0\}$$

Muestra la construcción de una variable aleatoria Z para este tipo de contrato que mida la pérdida que asume **el asegurado** (todo lo que la compañía no cubre),

a) **Exhibe de manera general cómo se construye su función de densidad en términos de la densidad de X**, especificando el soporte de la variable aleatoria que estás construyendo.

Para comprobar que lo que hiciste está bien realiza lo siguiente:

b) Considera una variable aleatoria $X \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{100}\right)$ $(E[X] = 100)$ a partir de ésta variable aleatoria, considera $d = 27$ y $u = 110$, fija la semilla en 27 y genera una muestra aleatoria de tamaño $n = 100,000$ de tu variable Z, realiza un histograma y compáralo con la función de densidad que construiste anteriormente.

c) Obtén la **esperanza** muestral y teórica de Z (puede ser utilizando comandos de R) ¿son parecidas?

d) Obtenga la **mediana** muestral y teórica de Z (puede ser utilizando comandos de R) ¿son parecidas?

Ejercicio 3

Sea X la variable aleatoria que representa los montos de siniestro para un contrato. La función de masa de probabilidad está dada por:

$$\mathbb{P}[X = x] = \frac{1}{10} \qquad para \quad x = 100, 200, 300, ..., 900, 1000$$

Dicho contrato está sujeto a un deducible $d = 200$, un monto máximo de beneficio $u = 800$ y un coaseguro $\alpha = 0.95$.

a) Calcula el monto promedio del costo por pérdida de la aseguradora ($\mathbb{E}[Y_L]$)

b) Fija una semilla en 100 y realiza $n = 1,000,000$ simulaciones para calcular de forma muestral la esperanza del inciso anterior.

c) Calcula el monto promedio del costo por pago de la aseguradora ($\mathbb{E}[Y_P]$)

d) Fija una semilla en 100 y realiza $n = 1,000,000$ simulaciones para calcular de forma muestral la esperanza del inciso anterior.

Ejercicio 4

En clase se vio la modelación de la variable aleatoria de pérdida de una compañía de seguros (Y) para cuando se tiene un contrato de **deducible**, sea X la variable aleatoria que mide el monto de pérdida asociado a un siniestro definido en el intervalo (a, b) con $0 < a$, tomando $a < d < b$ el deducible que cobra **la aseguradora**, se define como **deducible franquicia** tal que el pago de la compañía aseguradora está dado por:

$$Y = \begin{cases} 0 & si \quad X \leq d \\ X & si \quad X > d \end{cases}$$

Muestra la construcción de una variable aleatoria Y para este tipo de contrato que mida la pérdida que asume **la aseguradora** (todo lo que la compañía cubre),

a) **Exhibe de manera general cómo se construye su función de densidad en términos de la densidad de X**, especificando el soporte de la variable aleatoria que estás construyendo.

Para comprobar que lo que hiciste está bien realiza lo siguiente:

b) Considera una variable aleatoria $X \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{100}\right)$ ($E[X] = 100$) a partir de ésta variable aleatoria, considera $d = 50$, fija la semilla en 6 y genera una muestra aleatoria de tamaño $n = 100,000$ de tu variable Y, realiza un histograma y compáralo con la función de densidad que construiste anteriormente.

c) Obtén la **esperanza** muestral y teórica de Y (puede ser utilizando comandos de R) ¿son parecidas?

d) Obtenga la **mediana** muestral y teórica de Y (puede ser utilizando comandos de R) ¿son parecidas?

Ejercicio 5

Un deducible franquicia modifica el deducible ordinario agregando el deducible cuando hay un monto positivo pagado.

Una vez que la pérdida X supera el umbral d, la aseguradora paga la pérdida total X.

La variable aleatoria por perdida para una póliza con deducible franquicia es.

$$Y^L = \begin{cases} 0 & para \quad X \leq d \\ X & para \quad X > d \end{cases}$$

La variable aleatoria por pago para una póliza con deducible franquicia está dada por

$$Y^P = X|X > d$$

a) Demuestra para una poliza con deducible franquicia

$$\mathbb{E}\left(Y^L\right) = \mathbb{E}\left(X\right) - \mathbb{E}\left(X \wedge d\right) + d\left[1 - F\left(d\right)\right]$$

b) Obten la funcion de decidad $f_{Y^P}(y)$

Ejercicio 6

Mike es un especialista en acrobacias con motocicleta que se presenta en eventos de deportes extremos.

El costo anual para reparar su motocicleta, es modelado por una variable aleatoria $X \sim Pareto\left(\alpha = 2, \theta = 5,000\right)$

Los costos anuales de reparación de la motocicleta están sujetos a lo siguiente:

i) Mike paga un deducible d=1,000

ii) Mike paga 20% para reparaciones que están entre 1,000 y 6,000

iii) Mike paga el 100% para reparaciones que superan 6,000 y hasta desembolsar máximo 10,000

iv) Mike paga el 10% de las reparaciones restantes

Con la información proporcionada

a) Calcula el costo esperado anual de reparación.

Hint : Usa el ejericio anterior

Ejercicio 7

Sea $X \sim Pareto(a, b)$ con soporte en $(0, \infty)$ la v.a. de los montos de un siniestro.

a) Calcular la distribución de la variable de costo por pago cuando la póliza está sujeta a un deducible d.

b) Para valores de a, b y d de su elección, comprueba que lo encontrado en el inciso anterior se cumple muestralmente comparando un histograma y la densidad teórica. Realiza una prueba de bondad de ajuste y concluye.

Ejercicio 8

Sean $X_1, \ldots, X_{100}$ los montos de siniestros independientes con distribución exponencial de media 1000. Una aseguradora cubrirá todos los riesgos cuyas póliza están sujetas cada una a un deducible $d = 100$.

a) Calcular la distribución del número de siniestros en los que la aseguradora tendrá que pagar algun monto positivo.

b) Calcular la distribución del numero de siniestros en los que la aseguradora no tendrá que pagar (incluyendo pagos de 0).

c) Simular valores para el número de siniestros en los que la aseguradora debe realizar un pago positivo. Realizar una prueba Ji-cuadrada partiendo la muestra en 3 conjuntos (muestra$\leq$ 90, 90 $<$muestra$\leq$ 95 y 95 $<$muestra) para corroborar la distribución encontradas en el inciso a).

d) Simular valores para el número de siniestros en los que la aseguradora no debe realizar un pago. Realizar una prueba Ji-cuadrada partiendo la muestra en 3 conjuntos (muestra$\leq$ 5, 5 $<$muestra$\leq$ 10 y 10 $<$muestra) para corroborar la distribución encontradas en el inciso b).

Ejercicio 9

Recordemos la formula de De Pril [ii]: Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *v.a.i.i.d.* con valores en el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Para cada entero $j \geq 0$, defina la probabilidad $f_j = \mathbb{P}[X = j]$, y suponga $f_0 \neq 0$. Sea $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Entonces las probabilidades $g_x = \mathbb{P}[S = x]$ se pueden calcular recursivamente mediante la fórmula

$$g_x = \begin{cases} (f_0)^n & \text{si} \quad x = 0, \\ \dfrac{1}{f_0} \displaystyle\sum_{k=1}^{x} \left[\dfrac{j(n+1)}{x} - 1 \right] f_j g_{x-j} & \text{si} \quad x \in \mathbb{N} - \{0\}. \end{cases}$$

1. Considere ahora $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *v.a.i.i.d.* con valores en el conjunto $\mathbb{N} - \{0, 1, \ldots, m-1\} = \{m, m+1, \ldots\}$. Para cada entero $j \geq m$, defina la probabilidad $f_j = \mathbb{P}[X = j]$, y suponga $f_m \neq 0$. Encuentre y demuestre una manera de encontrar probabilidades exactas para $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

   Hint: Use De Pril [ii].

2. Programe, muestre y explique con comentarios la metodología encontrada.

3. Suponga que tiene $n = 100$ pólizas/asegurados (X_i) independientes e idénticamente distribuidos tales que tienen una función de masa de probabilidad dada por

k	10	15	20	25
$\mathbb{P}[X = k]$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$

   Calcule de manera "exacta" (numéricamente):

   (a) $\mathbb{P}[S = 1570]$

   (b) $\mathbb{P}[S = 900]$

   (c) $\mathbb{P}[S \leq 1,650]$

   (d) $\mathbb{P}[S \geq 1,560]$

   Hint: Use los incisos anteriores.

Ejercicio 10

Una empresa tiene 500 trabajadores y desea asegurarlos por una asuma asegurada de \$100,000. Cada uno tiene una probabilidad de 0.15 de reclamar y de 0.85 de no durante cierto periodo de tiempo. Si Y es la variable aleatoria que mide el monto a pagar de la aseguradora en un contrato por deducible asumiendo el riesgo de todo el portafolio anterior:

(a) ¿Cuánto debe valer el deducible para que el valor esperado de Y sea \$500,000?

Nota: Deben dar el valor exacto del deducible (salvo quizás un error numérico). Puedes utilizar R para realizar tus cálculos y/o aproximaciones numéricas **¡cada dígito cuenta!**. Un buen punto de partida para buscar a d es saber que:

- Si $X \in [a, b]$, en general, $d \in [0, b]$ (no tiene mucho sentido $d > b$).
- $\mathbb{E}[X \wedge d] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[(X - d)_+] \leq d$.

Hint: Existen muchas maneras de solucionar esto. Puedes asumir que las fórmulas de Darth Vader son válidas para variables aleatorias discretas. Para asuntos numéricos, un par de buenas funciones son:

`pracma::integral` y `pracma::newtonRaphson`, o bien, `uniroot`. Aunque insisto, cada quién lo hará como pueda.

(b) Realiza simulaciones de la Y que propones y obtén su media.

Ejercicio α (Extra+2)

Las canciones anexadas `Mágia1.mp3` y `Mágia2.mp3` son de un videojuego. Quien protagoniza este videojuego es una bruja que utiliza hechizos para defenderse de quien la quiere matar. Hay 3 categorías de hechizo: pared, techo y piso. A la fecha de publicación de esta tarea, existen 4 videojuegos de esta saga, en particular: ¿Cómo se llama la protagonista del videojuego al que pertenecen las canciones en cuestión y cuál es la trama del mismo?

Este punto extra solamente es válido para los 4 primeros equipos que entreguen el examen y correctamente la respuesta.