Tarea 2

Teoría del Riesgo

Profesor: Alarcón González Edgar Gerardo

Adjuntos: González Alvarado Héctor

Martínez Loria Johan

Padilla Martínez Miriam Janeth

Integrantes: (21) Cuéllar Chávez Eduardo de Jesús

(32) García Tapia Jesús Eduardo

(60) Reyes López Arath Alejandro

(67) Saldaña Morales Ricardo

Grupo: 9106

Ejercicio 1

En clase se vio la modelación de la variable aleatoria de pérdida de una compañía de seguros (Y) para cuando se tiene un contrato de **deducible**, sea X la variable aleatoria que mide el monto de pérdida asociado a un siniestro, tomando $d > 0$ el deducible que cobra **la aseguradora**, se tiene que:

$$Y = \text{máx}\{X - d, 0\}$$

Muestra la construcción de una variable aleatoria Z para este tipo de contrato que mida la pérdida que asume **el asegurado** (todo lo que la compañía no cubre).

a) **Exhibe de manera general cómo se construye su función de densidad en términos de la densidad de X**, especificando el soporte de la variable aleatoria que estás construyendo.

Busca su relación con otra variable de cobertura que conozcas, recuerda siempre la "Ley de conservación del Riesgo".

Para comprobar que lo que hiciste está bien realiza lo siguiente:

b) Considera una variable aleatoria $X \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{100}\right)$ ($E[X] = 100$) a partir de ésta variable aleatoria, considera $d = 27$, fija la semilla en 27 y genera una muestra aleatoria de tamaño $n = 100,000$ de tu variable Z, realiza un histograma y compáralo con la función de densidad que construiste anteriormente.

c) Obtén la esperanza muestral y teórica de Z (puede ser utilizando comandos de R) ¿son parecidas?

d) Realiza una prueba de bondad de ajuste Ji cuadrada que contraste los datos simulados de Z con la función de densidad que construiste, en particular para cuando el asegurado asume una pérdida igual a d y para cuando no, es decir, cuando $Z = d$ y cuando $Z < d$, explica y concluye tus resultados.

Solución

Inciso a)

Sea Z la variable aleatoria que mide la pérdida del asegurado bajo un contrato con deducible $d > 0$.
Sea X la variable aleatoria que mide el monto del siniestro, supongamos que el monto está en el intervalo $[a, b]$ con $b \geq a \geq 0$.

Observación

$$Z = min(X, d) \quad \Longrightarrow \quad Z = \begin{cases} X & si \quad q \leq X < d \\ d & si \quad b \geq X \geq d \end{cases}$$

Ya que,

$$Si \quad X < d; \quad \text{el asegurado asume toda la pérdida,}$$
$$Si \quad X \geq d; \quad \text{el asegurado paga únicamente el deducible.}$$

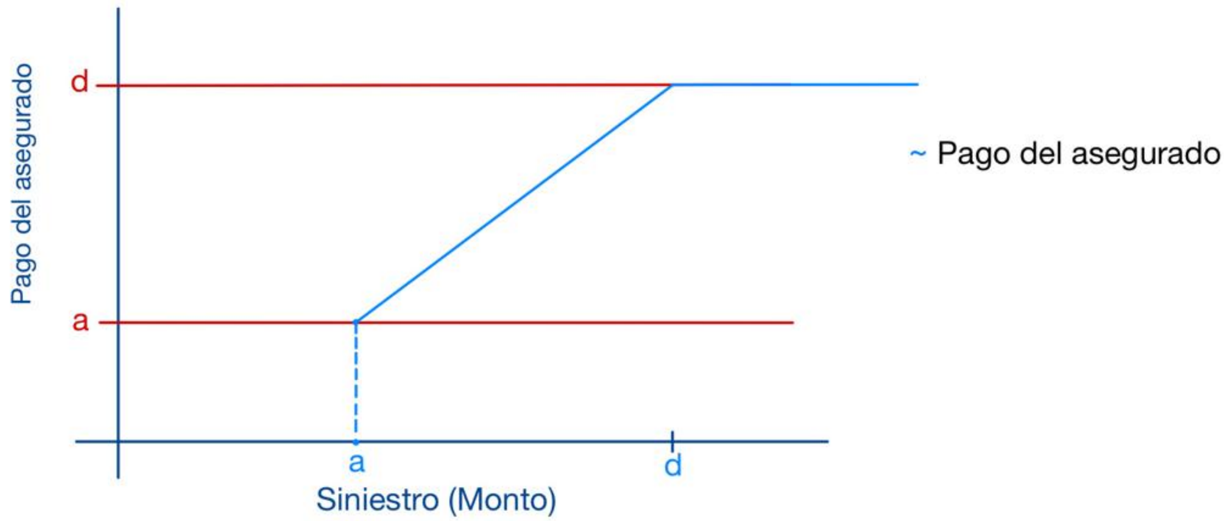
Caso 1: $X \in [a, d] \Leftrightarrow Z \in [a, d]$; Sea $z \in [a, d]$.

Y, como el siniestro tiene un monto mínimo de a, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z \leq z] = \mathbb{P}[a \leq X \leq z] &= \mathbb{P}[x < z] - \mathbb{P}[X \leq a] \\ &= [x < z] \\ F_z(z) = F_x(z) &\implies f_z(z) = f_x(z) \quad si \quad x \in [a, d) \end{aligned}$$

Caso 2: $X \in [d, b] \Leftrightarrow Z = d$

$$\mathbb{P}[Z \geq d] = \mathbb{P}[X > d] = 1 - \mathbb{P}[x \leq d] = S_x(d)$$
$$\implies f_z(d) = S_x(d)$$
$$\therefore f_z(z) = \begin{cases} f_x(z) & si \quad q \leq X < d \quad \text{(Parte continuo)} \\ S_x(z) & si \quad b \geq X \geq d \quad \text{(Parte discreta)} \end{cases}$$



Se parece al monto de pago máximo, pero iniciando desde a en lugar desde 0.

Sería la cobertura de monto de pago máximo $= d$; pero como dijimos, iniciando los "pagos" desde 0.

Porque también, el payoff de un put corto desplazado a unidades. ■

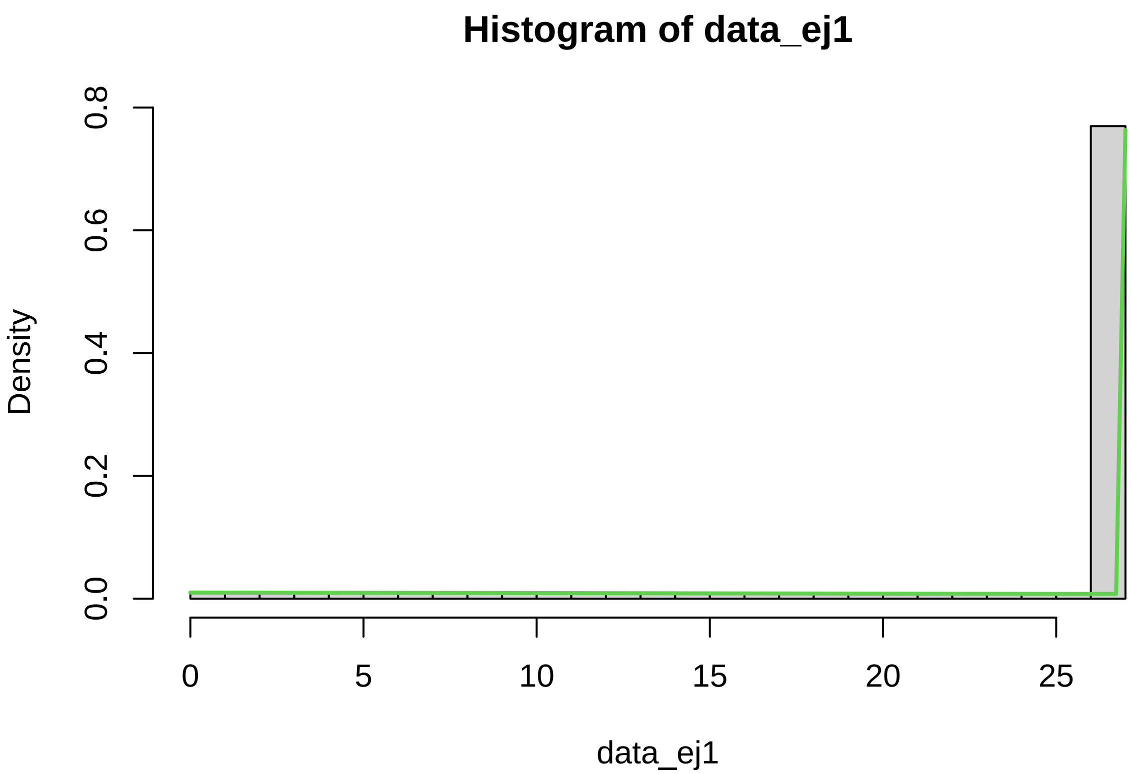
Inciso b)

```
library(MASS)
library(tidyverse)
```

```
## -- Attaching packages --------------------------------------- tidyverse 1.3.1 --

## v ggplot2 3.3.5     v purrr   0.3.4
## v tibble  3.1.5     v dplyr   1.0.7
## v tidyr   1.1.4     v stringr 1.4.0
## v readr   2.0.2     v forcats 0.5.1

## -- Conflicts ------------------------------------------ tidyverse_conflicts() --
## x dplyr::filter() masks stats::filter()
## x dplyr::lag()    masks stats::lag()
## x dplyr::select() masks MASS::select()
```

```
aux<-function(x){
    if(x<27){
    return(dexp(x,rate=1/100))
  }
  else if (x>=27){
    return(1-pexp(27,rate=1/100))
  }
}
```

```r
aux<-Vectorize(aux)
#fijamos semilla
set.seed(27)
#simulamos
data_ej1<-pmin(rexp(n=100000,rate=1/100),rep(27,100000))
hist(data_ej1,probability = TRUE,breaks = 0:27)
plot(aux,add=T,xlim = c(0,27),lwd=2,col="3")
```



■

Inciso c)

Primero notemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[X|X<d] &= \frac{\mathbb{P}(X \cap X<d)}{\mathbb{P}(x<d)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(x<d)}{\mathbb{P}(x<d)}
\end{aligned}
$$

Esperanza técnica por esperanza total:

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[Z|Z<d]\mathbb{P}[Z<d] + \mathbb{E}[Z|Z=d]\mathbb{P}[Z=d]$$

$$\mathbb{E}[Z|Z<d] = \mathbb{E}[X|X<d] = \frac{\mathbb{E}[x\mathbb{I}_{x<d}]}{\mathbb{P}[x<d]}$$

$$= \frac{\int_0^{27} x\lambda e^{-\lambda x}dx}{\int_0^{27} \lambda e^{-\lambda x}dx} = \frac{100-127e^{-\frac{27}{100}}}{1-e^{-\frac{27}{100}}}$$

De la parte de color rojo, hacemos cambio de variable:

$$u = x \implies du = 1$$

$$dv = e^{-\frac{x}{100}} \implies v = -100e^{-\frac{x}{100}}$$

$$\lambda \int_0^{27} xe^{-\frac{x}{100}}dx \quad \text{integrando ambas partes:}$$

$$= \lambda \left[-x\frac{e^{-\frac{27}{100}}}{\lambda}|_0^{27} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{27} e^{-\frac{x}{100}}dx \right]$$

$$= \frac{x}{\lambda}\left[-xe^{-\frac{x}{100}}|_0^{27} - 100e^{\frac{x}{100}}|_0^{27} \right]$$

$$= \left(-27e^{-\frac{-27}{100}} \right) - 100\left[e^{-\frac{-27}{100}} - 1 \right]$$

$$= 100 - 100e^{-\frac{-27}{100}} - 27e^{-\frac{-27}{100}}$$

$$= 100 - 127e^{-\frac{27}{100}}$$

Por otro lado,

$$\mathbb{P}[Z<d] = \mathbb{P}[x<d] = 1 - e^{-\frac{27}{100}}$$

Así;

$$\mathbb{E}[z|Z=d] = d = 27; \mathbb{P}[Z=d] = S_x(d) = e^{-\frac{27}{100}} \blacksquare$$

```
esperanza_empirica<-mean(data_ej1)
esperanza_empirica
```

```
## [1] 23.6471
```

De lo obtenido:

```
Esp_1<-(100-127*exp(-27/100))/(1-exp(-27/100))
Prob_1=(1-exp(-27/100))
Prob_2=1-Prob_1
Esp_2=27
Esp_Teorica<-Esp_1*Prob_1+Esp_2*Prob_2
Esp_Teorica
```

```
## [1] 23.66205
```

Lo cual coincide bastante con la probabilidad empírica obtenida, siendo la diferencia de:

```
Esp_Teorica-esperanza_empirica
```

```
## [1] 0.01494588
```

■

inciso d)

```
cortes<-cut(data_ej1, breaks = c(0,27,Inf),right=FALSE)
observados<-table(cortes)
observados
```

```
## cortes
##   [0,27) [27,Inf)
##    23783    76217
```

```
esperados<-c(Prob_1,Prob_2)
chisq.test(x=observados,p=esperados) #Ji-cuadrada
```

```
##
##  Chi-squared test for given probabilities
##
## data:  observados
## X-squared = 0.80987, df = 1, p-value = 0.3682
```

No rechazamos la hipótesis nula, el p-value es altísimo, por lo que no hay evidencia estadísticamente significativa como para decir que no sigue la disttribución propuesta. **i.e, sí se distribuye de la manera propuesta teóricamente** $\blacksquare$

Ejercicio 2

En clase se vio la modelación de la variable aleatoria de pérdida de una compañía de seguros (Y) para cuando se tiene un contrato de **deducible** y **monto máximo de beneficio**, sea X la variable aleatoria que mide el monto de pérdida asociado a un siniestro definido en el intervalo (a, b) con $0 < a$, tomando $a < d < u < b$ el deducible y monto máximo de beneficio respectivamente que cobra **la aseguradora**, se tiene que:

$$Y = \text{máx}\{\text{mín}\{X, u\} - d, 0\}$$

Muestra la construcción de una variable aleatoria Z para este tipo de contrato que mida la pérdida que asume **el asegurado** (todo lo que la compañía no cubre),

a) **Exhibe de manera general cómo se construye su función de densidad en términos de la densidad de X**, especificando el soporte de la variable aleatoria que estás construyendo.

Solución

Inciso a)

Observación(es):

- Notemos que $Z = X$, si $X \in (a, d)$, pues el contrato tiene efecto unicamente si $x \geq d$.
- $Z = d$ si $X \in [d, u]$, pues el asegurado deberá pagar d (deducible) y esto está topado por un munto u (monto máximo).
- $Z = x + d - u$ si $x \in (u, b)$, pues el asegurado asume el costo del deducible (d), recibe el monto máximo (u) por parte de la aseguradora y paga el resto.

En resumen:

$$Z = \begin{cases} X, & si \quad x \in (a,d) \Leftrightarrow z \in (a,d) \\ d, & si \quad x \in [d,u] \Leftrightarrow z = d \\ X + d - u, & si \quad x \in (u,b) \Leftrightarrow z \in (d, b+d-u) \end{cases}$$

Notemos que bajo esta observación,

$$Z \in (a, b+d-u),$$

La cual tiene sentido pues el nivel mínimo a cubrir es a y el máximo es b, pero antes debimos de haber pagado el deducible y recibido el monto máximo por parte de la aseguradora

$$\Longrightarrow \ (a, b+d-u) = \underbrace{(a,d)}_{Caso \quad 1} \cup \underbrace{\{d\}}_{Caso \quad 2} \underbrace{(d, b+d-u)}_{Caso \quad 3}$$

Nota: Bajo cualquier concepto Z y Y satisfacen nuestra llamada "Ley de conservación del reisgo", es decir;

$$X = Y + Z$$

Caso 1: Si $x \in (a,d) \Leftrightarrow Z \in (a,d)$

$$\Longrightarrow \ F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z) = F_X(z)$$
$$\Longrightarrow \ f_Z(z) = f_x(z)$$

Caso 2: Si $x \in [d,u] \Leftrightarrow Z = d$

$$f_Z(d) = \mathbb{P}(Z = d) = \mathbb{P}(d \leq X \leq u) = F_X(u) - F_X(d)$$

Caso 3: Si $x \in (u,b) \Leftrightarrow Z \in (d, b+d-u)$

$$\Longrightarrow \ F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X + d - u \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z + u - d)$$
$$= F_X(z+u-d) \ \Longrightarrow \ f_Z(z) = f_X(z+u-d)$$

De esta manera:

$$f_Z(z) = \begin{cases} f_X(z), & si \quad z \in (a,d) \\ F_X(u) - F_X(d), & si \quad z = d \\ f_X(Z+u-d), & si \quad z \in (d, b+d-u) \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Para comprobar que lo que hiciste está bien realiza lo siguiente:

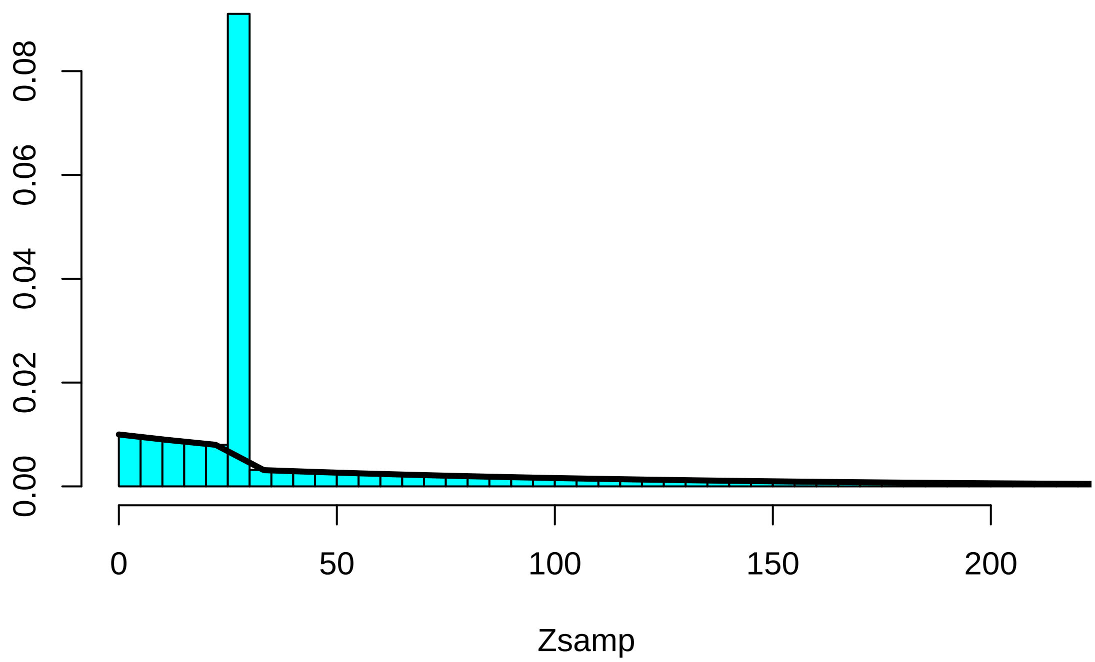
b) Considera una variable aleatoria $X \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{100}\right)$ $(E[X] = 100)$ a partir de ésta variable aleatoria, considera $d = 27$ y $u = 110$, fija la semilla en 27 y genera una muestra aleatoria de tamaño $n = 100,000$ de tu variable Z, realiza un histograma y compáralo con la función de densidad que construiste anteriormente.

Solución

Inciso b)

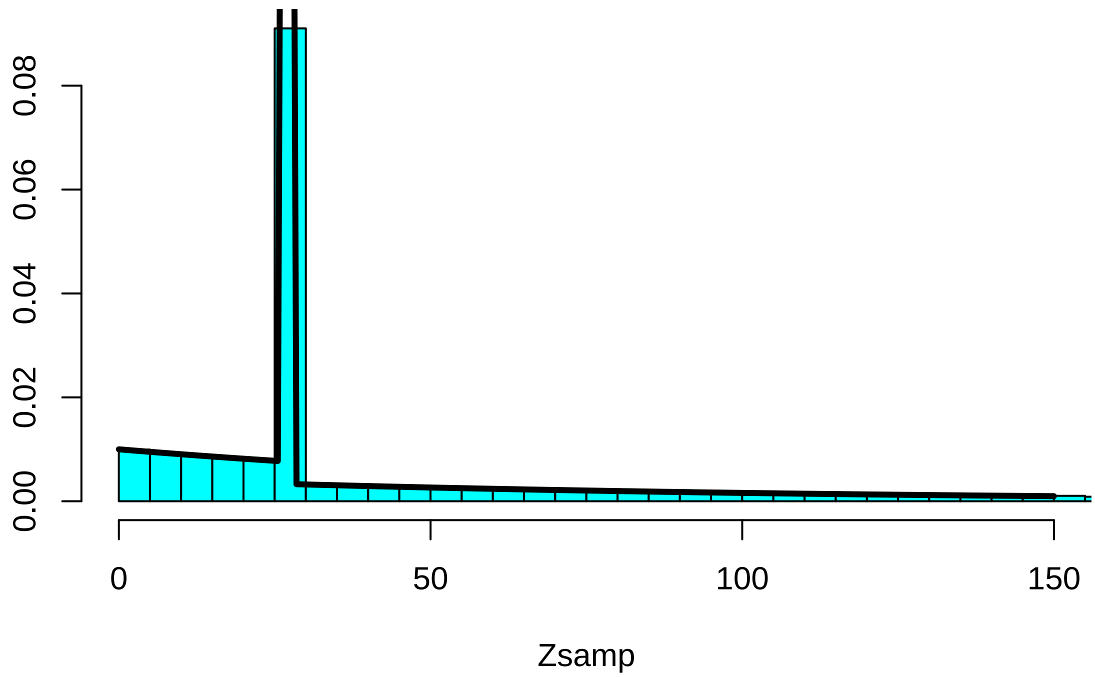
Densidad

```r
Z <- function(X,a,d,u,b){
  n = length(X)
  l <- c()
  for(i in 1:n){
    if(a<= X[i] & X[i]<d){
      l[i] = X[i]
    }else{
      if(X[i]<=u){
        l[i] = d
      }else{
        l[i] = X[i] + d-u
      }
    }
  }
  return(l)
}
aux<-function(x,a=0,d=27,u=110,b=Inf){
  if(a<=x & x<d){
    return(dexp(x,rate=1/100))
  }
  else if(x==d){
    return(pexp(u,rate=1/100)-pexp(d,rate=1/100))
  }
  else{
    return(dexp(x+u-d,rate=1/100))
  }
}
aux<-Vectorize(aux)
set.seed(27)
X <- rexp(100000, 1/100)
Zsamp <- Z(X,0,27,110) # Notemos que tanto a como b no se especificaron al inicio del problema
library(MASS)
MASS::truehist(Zsamp,xlim=c(0,quantile(Zsamp,0.95)))
plot(aux,xlim=c(0,ceiling(max(Zsamp))),add=T,lwd=3)
```



Sin embargo notemos que nuestra función no grafica bien la parte de d, ya que ahí se dispara **en un solo valor, que es x=d=27** y después vuelve a tomar valores pequeños. Pero hagamos un zoom hasta esa parte para verificar:

```
MASS::truehist(Zsamp,xlim=c(0,150))
plot(aux,xlim=c(0,150),add=T,lwd=3)
```



Solo es un problema al momento de graficar todo junto. **Aquí lo confirmamos, se ve mejor**

■

c) Obtén la **esperanza** muestral y teórica de Z (puede ser utilizando comandos de R) ¿son parecidas?

Solución

Inciso c)

Veamos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \int_a^d z f_x(z)dz + d(F_X(w) - F_X(d)) + \int_d^{b+d-u} Z f_x(z+u-d)dz \\
&= \int_a^d Z f_X(z)dz + d(F_X(u) - F_X(d)) + \int_u^b (\alpha + d - u) f_X(\alpha)d\alpha \\
&= \int_a^d Z f_X(z)dz + d(F_x(u) - F_x(d)) + \int_u^d \alpha f_x(\alpha)d_\alpha + (d-u)(F_x(b) - F_X(u)) \\
&= \mathbb{E}(X) - \int_d^u Z f_x(z)dz + (d-u)F_x(b) - dF_x(d) + uF_x(u) \\
&= \mathbb{E}(X) - \int_0^{u-d} (t+d) f_x(t+d)dt + d(1 - F_x(d)) - u(1 - F_x(u))
\end{aligned}$$

$t = z - d$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}(X) - \int_0^{u-d} t f_X(t+d)dt - d(F_X(u) - F_X(d)) + dS_X(d) - uS_x(u) \\
&= \mathbb{E}(X) - \int_0^{u-d} t f_X(t+d)dt + d - uS_x(u) - dF_x(u) \\
&= \mathbb{E}(X) - +d(1 - F_x(u)) - uS_x(u) \\
&= \mathbb{E}(X) - \int_0^{u-d} t f_X(t+d)dt + t(d-u)S_X(u) \\
&= \mathbb{E}(X) - \underbrace{\left[\int_0^{u-d} t f_x(t+d)dt + (u-d)S_X(u)\right]}_{\mathbb{E}(Y)} \\
&= \mathbb{E}(X) - \int_d^u S_X(t)dt \\
&\therefore \mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) - \underbrace{\int_d^u S_X(t)dt}_{\mathbb{E}(Y)}
\end{aligned}
$$

Para nuestro ejercicio

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) = 100 - \int_{27}^{110} e^{-\frac{t}{100}} dt &= 100 - \left(-100e^{-\frac{t}{100}}|_{27}^{110}\right) \\
&= 100 + 100\left(e^{-\frac{110}{100}} - e^{-\frac{-27}{(100)}}\right) = 100\left[1 + e^{-\frac{110}{100}} - e^{-\frac{-27}{100}}\right] \\
&= 100[.5694916] \approx 56.94916 \blacksquare
\end{aligned}
$$

```
Zsamp <- Z(X,0,27,110,200) # Notemos que tanto a como b no se especificaron al inicio del problema
print("Media Muestral de Z:")
```

```
## [1] "Media Muestral de Z:"
```

```
print(mean(Zsamp))
```

```
## [1] 56.73916
```

d) Obtenga la **mediana** muestral y teórica de Z (puede ser utilizando comandos de R) ¿son parecidas?

Solución

Inciso d)

Notemos que:

$$Z = máx\{X - u, 0\} + mín\{X, d\}$$

Pues, si $x \in (a, d) \Leftrightarrow a < x < d \Leftrightarrow a - u < x - u < d - u < 0$

$$
\begin{aligned}
&\implies máx\{x - u, 0\} = 0 \wedge mín\{X, d\} = X \\
&\implies Z = x
\end{aligned}
$$

Si $x \in [d,u] \Leftrightarrow d \leq x \leq u \Leftrightarrow d-u \leq x-u \leq 0$

$$\begin{aligned} &\implies máx\{x-u,0\} = 0 \wedge mín\{X,d\} = d \\ &\implies Z = d \end{aligned}$$

Si $x \in [u,b] \Leftrightarrow u < x < b \Leftrightarrow 0 < x-u < b$

$$\begin{aligned} &\implies máx\{x-u,0\} = x-u \wedge mín\{X,d\} = d \\ &\implies Z = X-u+d \end{aligned}$$

De manera análoga a como pensamos para Y, la función $f(x) := máx\{x-u,0\} + mín\{x,d\}$ es no decreciente, pues a mayor monto de siniestro, mayor será el pago del asegurado.

Y por el teorema de equivarianza de cuantiles se tiene que:

$$q_Z(.5) = máx\{q_x(.5)-u,0\} + mín\{q_x(.5),d\}$$

En nuestro caso $(u = 110, d = 27, q_x(.5) = ln(2)(100)) = 69.314$

$$\begin{aligned} \implies q_Z(.5) &= máx\{69.314-110,0\} + mín\{69.314,27\} \\ &= 0+27 = 27 \\ &\therefore q_Z(.5) = 27 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

```
Zsamp <- Z(X,0,27,110,200) # Notemos que tanto a como b no se especificaron al inicio del problema
print("Mediana Muestral de Z:")
```

```
## [1] "Mediana Muestral de Z:"
```

```
print(quantile(Zsamp, 0.5))
```

```
## 50%
##  27
```

Ejercicio 3

Sea X la variable aleatoria que representa los montos de siniestro para un contrato. La función de masa de probabilidad está dada por:

$$\mathbb{P}[X = x] = \frac{1}{10} \qquad para \qquad x = 100, 200, 300, ..., 900, 1000$$

Dicho contrato está sujeto a un deducible $d = 200$, un monto máximo de beneficio $u = 800$ y un coaseguro $\alpha = 0.95$.

a) Calcula el monto promedio del costo por pérdida de la aseguradora ($\mathbb{E}[Y_L]$)

b) Fija una semilla en 100 y realiza $n = 1,000,000$ simulaciones para calcular de forma muestral la esperanza del inciso anterior.

c) Calcula el monto promedio del costo por pago de la aseguradora ($\mathbb{E}[Y_P]$)

d) Fija una semilla en 100 y realiza $n = 1,000,000$ simulaciones para calcular de forma muestral la esperanza del inciso anterior.

Solución

Inciso a)

Usaremos la fórmula vista en clase, con la tasa de inflación $r = 0\%, d = 200; u = 800 \implies u - d = 800 - 200 = 600, \alpha = 0.95 \implies \alpha(u - d) = 570 \implies \alpha d = 190$.

Los posibles valores de $Z = mín(máx(\alpha(X - d), 0), \alpha(u - d))$; dado que:

$$x \in \{100, 200, \underbrace{\ldots}_{\text{De 100 en 100}}, 900, 1000\}$$

son:

```
alpha=0.95
d=200
u=800
posibles_pagos<-c()
for (i in seq(100,1000,by=100)){
  posibles_pagos[i/100]<-min(max(alpha*(i-d),0),alpha*(u-d))
}
valores_ej3<-data.frame("Perdida"=seq(100,1000,by=100),"Pago"=posibles_pagos,
                        "Probabilidad"=rep(1/10,10))
valores_ej3
```

```
##    Perdida Pago Probabilidad
## 1      100    0          0.1
## 2      200    0          0.1
## 3      300   95          0.1
## 4      400  190          0.1
## 5      500  285          0.1
## 6      600  380          0.1
## 7      700  475          0.1
## 8      800  570          0.1
## 9      900  570          0.1
## 10    1000  570          0.1
```

```
valores_ej3_agrupados <- valores_ej3 %>%
  group_by(Pago) %>%
  summarise(Probabilidad=sum(Probabilidad))
valores_ej3_agrupados
```

```
## # A tibble: 7 x 2
##    Pago Probabilidad
##   <dbl>        <dbl>
## 1     0          0.2
## 2    95          0.1
## 3   190          0.1
## 4   285          0.1
## 5   380          0.1
## 6   475          0.1
## 7   570          0.3
```

Entonces, la probabilidad teórica está dada por:

```
esperanza_teorica_L3<-sum(valores_ej3$Pago*valores_ej3$Probabilidad)
esperanza_teorica_L3
```

```
## [1] 313.5
```

■

Solución

Inciso b)

```
set.seed(100)
datos_ej3b<-sample(pmin(pmax(alpha*(seq(100,1000,by=100)-d),0),alpha*(u-d)),1000000,replace=T)
esperanza_empirica_L3<-mean(datos_ej3b)
esperanza_empirica_L3
```

```
## [1] 313.355
```

Vemos que es muy similar, de hecho solo difiere por:

```
esperanza_teorica_L3-esperanza_empirica_L3
```

```
## [1] 0.14497
```

■

Solución

Inciso c)

Como $Y^P = Z|Z > 0$

$$\mathbb{P}[Z = z|z > 0] = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}[Z=z]}{\mathbb{P}[Z>0]}, & si \quad Z > 0 \\ 0, & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Como $\mathbb{P}[Z > 0] = \frac{8}{10}$; entonces tenemos que:

```
posibles_perdidas=posibles_pagos[posibles_pagos>0]
pago<-data.frame("Pago_positivo"=posibles_perdidas,
                 "Probabilidad"=rep((1/10)/(8/10),length(posibles_perdidas)))
pago
```

```
##   Pago_positivo Probabilidad
## 1            95        0.125
## 2           190        0.125
## 3           285        0.125
## 4           380        0.125
## 5           475        0.125
## 6           570        0.125
## 7           570        0.125
## 8           570        0.125
```

```
pago_agrupado<-pago %>%
  group_by(Pago_positivo) %>%
  summarise(Probabilidad=sum(Probabilidad))
pago_agrupado
```

```
## # A tibble: 6 x 2
##   Pago_positivo Probabilidad
##           <dbl>        <dbl>
```

```
## 1            95        0.125
## 2           190        0.125
## 3           285        0.125
## 4           380        0.125
## 5           475        0.125
## 6           570        0.375
```

Entonces la esperanza teórica está dada por:

```
esperanza_teorica_P3<-sum(pago$Pago_positivo*pago$Probabilidad)
esperanza_teorica_P3
```

```
## [1] 391.875
```

■

Solución

Inciso d)

```
set.seed(100)
datos_ej3d<-sample(pmin(pmax(alpha*(seq(100,1000,by=100)-d),0),alpha*(u-d))[pmin(pmax(alpha*(seq(100,10
esperanza_empirica_P3<-mean(datos_ej3d)
esperanza_empirica_P3
```

```
## [1] 391.8326
```

Vemos que son bastante similares, de hecho solo difieren por:

```
esperanza_teorica_P3-esperanza_empirica_P3
```

```
## [1] 0.04237
```

■

Ejercicio 4

En clase se vio la modelación de la variable aleatoria de pérdida de una compañía de seguros (Y) para cuando se tiene un contrato de **deducible**, sea X la variable aleatoria que mide el monto de pérdida asociado a un siniestro definido en el intervalo (a, b) con $0 < a$, tomando $a < d < b$ el deducible que cobra **la aseguradora**, se define como **deducible franquicia** tal que el pago de la compañía aseguradora está dado por:

$$Y = \begin{cases} 0 & si \quad X \leq d \\ X & si \quad X > d \end{cases}$$

Muestra la construcción de una variable aleatoria Y para este tipo de contrato que mida la pérdida que asume **la aseguradora** (todo lo que la compañía cubre),

a) **Exhibe de manera general cómo se construye su función de densidad en términos de la densidad de X**, especificando el soporte de la variable aleatoria que estás construyendo.

Solución a

Notemos que:

$$Y = X\mathbb{I}_{\{X>d\}}$$

De igual manera, notemos que:

$$f_Y(0) = \mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X \le d) = F_X(d)$$

y si $y \in (d, b)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(d < Y \le y) = \mathbb{P}(d < x < y) &= F_x(y) - F_x(d) \\
&\implies F_Y(y) - F_Y(d) = F_X(y) - F_X(d) \\
&\implies f_y(y) = f_x(y) \text{si} x \in (d, b) \\
\therefore f_Y(y) &= \begin{cases} F_X(d) & si \quad y \le 0 \\ f_X(y) & si \quad y > d \end{cases}
\end{aligned}$$

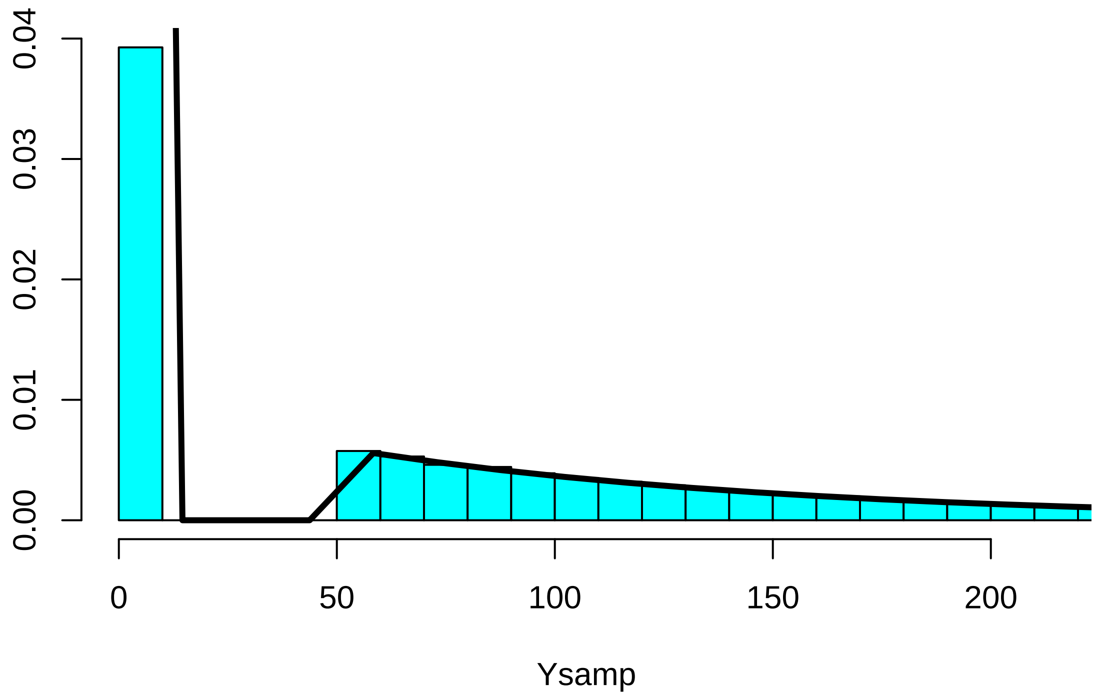
De esta manera $Sop(Y) = \{0\} \cup (d, b)$

Para comprobar que lo que hiciste está bien realiza lo siguiente:

b) Considera una variable aleatoria $X \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{100}\right)$ $(E[X] = 100)$ a partir de ésta variable aleatoria, considera $d = 50$, fija la semilla en 6 y genera una muestra aleatoria de tamaño $n = 100,000$ de tu variable Y, realiza un histograma y compáralo con la función de densidad que construiste anteriormente. ■

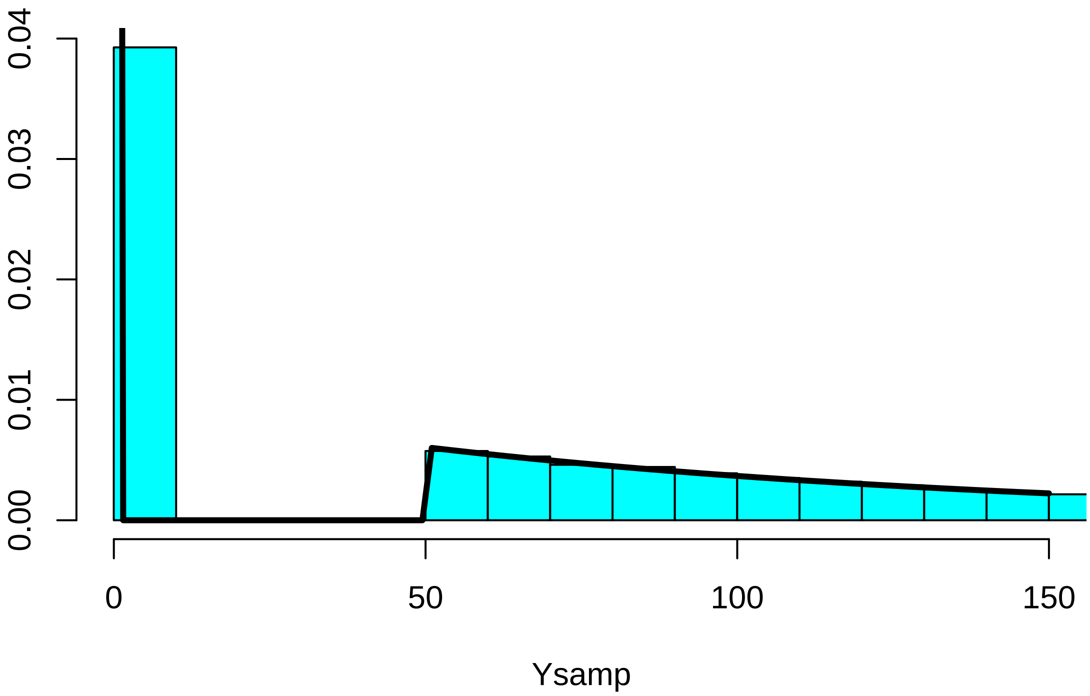
Solución b

```
set.seed(6)

Y <- function(X,d){
  n = length(X)
  l <- c()
  for(i in 1:n){
    if(X[i]>d){
      l[i] = X[i]
    }else{l[i] = 0}
  }
  return(l)
}
aux<-function(x,d=50){
  if(x==0){
    return(pexp(d,rate=1/100))
  }
  else if(x>d){
    return(dexp(x,rate=1/100))
  }
  else if(x>0 & x<=d){
    return(0)
  }
}
aux=Vectorize(aux)
X <- rexp(100000, 1/100)
Ysamp <- Y(X,50)
MASS::truehist(Ysamp,xlim=c(0,quantile(Zsamp,0.95)))
plot(aux,xlim=c(0,ceiling(max(Ysamp))),add=T,lwd=3)
```



Aquí también el desfase es debido a los límites del eje x, hagamos un poco de zoom

```
MASS::truehist(Ysamp,xlim=c(0,150))
plot(aux,xlim=c(0,150),add=T,lwd=3)
```



Aquí se ve mejor, en esta escala. El problema en el anterior era del graficador únicamente. ■

c) Obtén la **esperanza** muestral y teórica de Y (puede ser utilizando comandos de R) ¿son parecidas?

Solución c

Notemos que:

$$\mathbb{E}(Y) = 0F_X(d) + \int_d^\infty y f_x(y)dy = \int_d^\infty y f_x(y)dy \ldots (1)$$

Notemos además que, si $x > d$

$$\begin{aligned}
&\implies X = máx\{X-d, 0\} + d \\
&\implies \mathbb{E}(Y) = \int_d^\infty \left[(y-d)_+ + d\right] f_x(y)dy = \int_d^\infty (y-d)_+ f_x(y)dy \\
&+ d\int_d^\infty f_x(y)dy = \int_d^\infty (y-d)f_x(y)dy + d(1-F_X(d)) \\
&= \mathbb{E}(X) - d\int_d^\infty f_x(y)dy - \int_a^d y f_x(y)dy + dS_x(d) \\
&= \mathbb{E}(X) - \int_a^\infty mín\{d, y\} f_x(y)dy + dS_x(d) \\
&= \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(mín\{X, d\}) + dS_x(d) \\
&= \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge d) + dS_x(d)
\end{aligned}$$

Veamos (1) para nuestro caso particular, es decir, $(d = 50, X \sim exp(\frac{1}{100}))$

$$
\begin{aligned}
\implies \mathbb{E}(Y) &= \int_{50}^{\infty} y\frac{1}{100}e^{-\frac{y}{100}}dy \begin{cases} u = y \implies du = dy \\ dv = \frac{1}{100}e^{-\frac{y}{100}}dy \implies v = -e^{-\frac{y}{100}} \end{cases} \\
&= -ye^{-\frac{y}{100}}|_{50}^{\infty} + \int_{50}^{\infty} e^{-\frac{y}{100}}dy = 50e^{-\frac{1}{2}} + \left(-100e^{-\frac{y}{100}}|_{50}^{\infty}\right) \\
&= 50e^{-\frac{1}{2}} + 100e^{-\frac{1}{2}} \\
&= 150e^{-\frac{1}{2}} \\
&= 90.9796 \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

```
Ysamp <- Y(X,50)

print("Media Muestral de Y:")
```

```
## [1] "Media Muestral de Y:"
```

```
print(mean(Ysamp))
```

```
## [1] 90.85721
```

d) Obtenga la **mediana** muestral y teórica de Y (puede ser utilizando comandos de R) ¿son parecidas?

Solución d

Recordemos que:

$$Y = X\mathbb{I}_{\{X>d\}}(x); \quad X \geq 0$$

Entonces, notemos que si $0 \leq x_1 \leq x_2$, entonces:

- Si $x_1 > d \implies x_2 > d \implies \mathbb{I}_{\{x_1>d\}} = \mathbb{I}_{\{x_2>d\}} = 1$
- Si $x_1 \leq d < x_2 \implies \mathbb{I}_{\{x_1>d\}} = 0 < \mathbb{I}_{\{x_2>d\}} = 1$
- Si $x_2 \leq d \implies \mathbb{I}_{\{x_1>d\}} = \mathbb{I}_{\{x_2>d\}} = 0$

De esta manera $g(x) := \mathbb{I}_{\{X>d\}}(x)$ es una función no decreciente y positiva al igual que: $f(x) := x$(Para $x \in [0, \infty)$) $\implies h(x) := f(x) * g(x)$ es una función no decreciente y positiva, es decir, $h(x) = x\mathbb{I}_{\{X>d\}}(x)$ es no decreciente y positiva $\implies$ por el teorema de equivarianza de cuantiles:

$$q_Y(\alpha) = q_x(\alpha)\mathbb{I}_{\{X>d\}}(q_x(\alpha))$$

En nuestro caso $(\alpha = 0.5, d = 50, X \sim exp(\frac{1}{100}))$

$$
\begin{aligned}
\implies q_Y(0.5) &= ln(2)(100)\mathbb{I}_{\{X>d\}}(ln(2)(100)) \\
&= 69.314718\mathbb{I}_{\{X>d\}}(69.314718) \quad \text{(lo naranja se hace uno)} \\
&= 69.314718 \\
q_Y(0.5) &\approx 69.314718 \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

```
Ysamp <- Y(X,50)

print("Mediana Muestral de Y:")
```

```
## [1] "Mediana Muestral de Y:"
```

```
print(quantile(Ysamp, 0.5))
```

```
##      50%
## 69.37989
```

Ejercicio 5

Un deducible franquicia modifica el deducible ordinario agregando el deducible cuando hay un monto positivo pagado.

Una vez que la pérdida X supera el umbral d, la aseguradora paga la pérdida total X.

La variable aleatoria por perdida para una póliza con deducible franquicia es.

$$Y^L = \begin{cases} 0 & para \quad X \leq d \\ X & para \quad X > d \end{cases}$$

La variable aleatoria por pago para una póliza con deducible franquicia está dada por

$$Y^P = X | X > d$$

a) Demuestra para una poliza con deducible franquicia

$$\mathbb{E}\left(Y^L\right) = \mathbb{E}\left(X\right) - \mathbb{E}\left(X \wedge d\right) + d\left[1 - F\left(d\right)\right]$$

Solución a)

Observación

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[mín(X,d)] &= \mathbb{E}[X|X<d]\mathbb{P}[X<d] + \mathbb{E}[d|X \geq d]\mathbb{P}[X \geq d] \\
&= \left[\int_0^d x\frac{fx(x)dx}{F_X(d)}\right] F_X(d) + d[1 - F_X(d)] \\
&= \int_0^d xF_X(x)dx + d[1-F_X(d)] \\
&= \int_0^d S(x)d_X + d[1-F_X(d)] \\
&\therefore \int_0^d S(x)d_X + d[1-F_X(d)]
\end{aligned}$$

Resolvemos el inciso a

$\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[Y^2|X \leq d]\mathbb{P}[X \leq d] + \mathbb{E}[Y^2|X > d]\mathbb{P}[X > d]$ Pero, $\mathbb{E}[Y^2|X \leq d] = 0$ ya que $Y^2|Z \leq d = 0$. (La v.a constante 0)

$$\mathbb{E}[Y^2|X > d]\mathbb{P}[X > d]$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X > d] &= 1F_X(d) \\
\mathbb{E}[Y^2|X > d] &= \mathbb{E}[X|X > d] \\
&= \int_d^\infty x\frac{fx(z)dz}{1-F_X(d)} \\
&= \int_d^\infty x\frac{fx(z)dz}{1-F_X(d)} + \int_0^d x\frac{fx(z)dz}{1-F_X(d)} - \int_0^d x\frac{fx(z)dz}{1-F_X(d)} \\
&= \int_0^\infty x\frac{fx(z)dz}{1-F_X(d)} - \int_0^d x\frac{fx(z)dz}{1-F_X(d)} \\
&= \frac{1}{1-F_X(d)}\left[\int_0^\infty zf_x(z)dz - \int_0^d xf_X(z)dz\right]
\end{aligned}$$

Haciendo uso de Darth-Vader

$$= \frac{1}{1-F_X(d)}\left(\mathbb{E}[X]-\int_0^d S(x)dx\right)$$
$$= \frac{1}{1-F_X(d)}\left(\mathbb{E}[X]-\int 0^d S(x)dx\right)[1-F_X(d)]$$
$$= \mathbb{E}[X]-\int_0^d S(x)dx$$
$$= \mathbb{E}[X]-\int_0^d S(x)dx - d[1-F_X(d)] + d[1-F_X(d)]$$
$$= \mathbb{E}[X]-\mathbb{E}[X\wedge d] + d[1-F_X(d)] \quad \blacksquare$$

b) Obten la funcion de decidad $f_{Y^P}(y)$

$$\mathbb{P}[X\leq x|X>d] = \frac{\mathbb{P}[X\leq x\mathbb{I}_{\{X>d\}}]}{\mathbb{P}[X>d]}$$
$$= \frac{\int_0^x f_x(x)dx\mathbb{I}_{\{x>d\}}}{S_x(d)}$$
$$= \frac{\int_0^x f_x(x)dx}{S_x(d)}$$
$$\implies F_X(x) = \frac{\int_0^x f_x(z)dz}{S_x(d)}$$
$$\text{Derivando} \implies f_x(x) = \frac{f_x(x)}{S_x(d)}$$
$$\therefore f_x(x) = \begin{cases} \frac{f_x(x)}{S_x(d)} & si \quad x>d \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Ejercicio 6

Mike es un especialista en acrobacias con motocicleta que se presenta en eventos de deportes extremos.

El costo anual para reparar su motocicleta, es modelado por una variable aleatoria $X \sim Pareto\,(\alpha=2, \theta=5,000)$

Los costos anuales de reparación de la motocicleta están sujetos a lo siguiente:

i) Mike paga un deducible d=1,000

ii) Mike paga 20% para reparaciones que están entre 1,000 y 6,000

iii) Mike paga el 100% para reparaciones que superan 6,000 y hasta desembolsar máximo 10,000

iv) Mike paga el 10% de las reparaciones restantes

Con la información proporcionada

a) Calcula el costo esperado anual de reparación.

Hint : Usa el ejericio anterior

Solución a

Observaciones

- Notemos que la aseguradora paga el 80% de las reparaciones entre 1,000 y 6,000.

- Observemos que el asegurado desembolsa 10,000 una vez que paga 1,000 de deducible, 20% de los gastos entre 1,000 y 6,000, es decir, 0.2(6,000 - 1,000) = 1,000 y 100% de los gastos acumulados hasta gastar 10,000, es decir, 8,000 = 1(14,000 - 6,000). De esta forma, la aseguradora paga el 90% de los gastos mayores a 14,000, así, el costo esperado anual por reparación esta dado por:

$$0.8(\mathbb{E}(X \wedge 6,000) - \mathbb{E}(X \wedge 1,000)) + 0.9(\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge 14,000))$$

Sin embargo, observemos que, $\forall \beta > 0; \theta = 5,000$

$$\begin{aligned}
(\mathbb{E}(X \wedge B) &= \int_0^\infty mín\{X,\beta\}\frac{2\theta^2}{(X+\theta)^3}dx = \int_0^\beta \frac{2\theta^2}{(X+\theta)^3}dx + \beta\int_\beta^\infty \frac{2\theta^2}{(X+\theta)^3}dx \\
&= 2\theta^2\left[\int_\theta^{\beta+\theta}\frac{u-\theta}{xu^3}du\right] + \beta 2\theta^2\int_\beta^\infty \frac{1}{(X+\theta)^3}dx \\
&= 2\theta^2\left[\left(-\frac{1}{u}+\frac{\theta}{2u^2}\right)|_\theta^{\beta+\theta}\right] + \beta 2\theta^2\left(-\frac{1}{2(X+\theta)^2}|_\beta^\infty\right) \\
&= 2\theta^2\left[\frac{\theta-2u}{2u^2}|_\theta^{\beta+\theta}\right] + \beta 2\theta^2\left(\frac{1}{2(\beta+\theta)^2}\right) \\
&= \theta^2\left(\frac{\theta-2(\beta+\theta)}{(\beta+\theta)^2} - \left(\frac{\theta-2\theta}{\theta^2}\right)\right) + \beta\left(\frac{\theta}{\beta+\theta}\right)^2 \\
&= \theta^2\left(\frac{(-2\beta-\theta)}{(\beta+\theta)^2}+\frac{1}{\theta}\right) + \beta\left(\frac{\theta}{\beta+\theta}\right)^2 \\
&= \theta + \frac{\theta^2}{(\beta+\theta)^2}[\beta-2\beta-\theta] = \theta - \frac{(\beta+\theta)\theta^2}{(\beta+\theta)} = \theta\left(1-\frac{\theta}{\beta+\theta}\right) \\
&= \frac{\theta\beta}{\beta+\theta} \\
&\therefore \mathbb{E}(X\wedge\beta) = \frac{\theta\beta}{\beta+\theta} = \frac{(5,000)\beta}{\beta+5,000} \\
\Longrightarrow &- \mathbb{E}(X\wedge 6,000) = \frac{5,000(6,000)}{11,000} = 2,727.272727 \\
&- \mathbb{E}(X\wedge 1,000) = \frac{5,000(1,000)}{6,000} = 833.33333 \\
&- \mathbb{E}(X\wedge 14,000) = \frac{5,000(14,000)}{19,000} = 3,684.210526 \\
&- \mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \frac{2(5,000)^2x}{(x+5,000)^3}dx = \int_{5,000}^\infty \frac{2(5,000)^2(u-5,000)}{u^3}du \\
&= 2(5,000)^2\left[\frac{5,000-2u}{2u^2}|_{5,000}^\infty\right] = (5,000)^2\left(\frac{2(5,000)-5,000}{(5,000)^2}\right) \\
&= 5,000 \\
\Longrightarrow\ & 0.8(\mathbb{E}(X\wedge 6,000) - \mathbb{E}(X\wedge 1,000)) + 0.9(\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X\wedge 14,000)) \\
&= 0.8[2,727.272727 - 833.33333] + 0.9(5,000 - 3,684.210526) \\
&= 1515.151515 + 1184.21 \\
&= 2,699.362042
\end{aligned}$$

$\therefore$ El costo esperado anual de reparación es de 2,699.362042. ■

Ejercicio 7

Sea $X \sim Pareto(a,b)$ con soporte en $(0,\infty)$ la v.a. de los montos de un siniestro.

a) Calcular la distribución de la variable de costo por pago cuando la póliza está sujeta a un deducible d.

b) Para valores de a, b y d de su elección, comprueba que lo encontrado en el inciso anterior se cumple muestralmente comparando un histograma y la densidad teórica. Realiza una prueba de bondad de ajuste y concluye.

Solución

Inciso a)

En clase vimos que, de manera general: la función de densidad de Y es:\

$$f_Y(t) = \begin{cases} F_X\left(\frac{d}{1+r}\right) & \text{si} & t=0 \quad (discreta) \\ \frac{f_X\left(\frac{t+d\alpha}{\alpha(1+r)}\right)}{\alpha(1+r)} & \text{si} & t \in (0, \alpha(u-d)) \quad (continua) \\ S_X\left(\frac{u}{(1+r)}\right) & \text{si} & t = \alpha(u-d) \quad (discreta) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Tomando $r = 0, \alpha = 1; u = \infty;$ y como $S_x(\infty) = 0;$

$$\implies f_Y(t) = \begin{cases} F_X(d) & si \quad t=0 \\ f_X(t+d) & si \quad t \in (0,\infty) \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Tenemos que: *Pareto*

Pareto

$$\begin{aligned} X &\sim Pareto(a,b) \ con \ a > 0 \ y \ b > 0. \\ f(x) &= \frac{ab^a}{(b+x)^{a+1}} \ para \ x > 0. \\ F(x) &= 1 - \left[\frac{b}{(b+x)}\right]^a \ para \ x > 0. \end{aligned}$$

$$\implies F_X(d) = 1 - \left[\frac{b}{b+d}\right]^a$$

$$\implies f_Y(t) = \begin{cases} 1 - \left[\frac{b}{b+d}\right]^a & si \quad t=0 \\ \frac{ab^a}{(b+(t+d))^{a+1}} & si \quad t \in (0,\infty) \end{cases}$$

Además:

$$f_{Y_p}(t) = \frac{f_{Y_L}(t)}{1 - f_{Y_L}(0)} \forall t \in (0, \alpha(u-d))$$

$$\implies f_{y_p}(t) = \frac{\frac{ab^a}{(b+(t+d))}a+1}{1-\left[1-\left[\frac{b}{b+d}\right]^a\right]}$$
$$= \frac{\frac{ab^a}{(b+(t+d))^{a+1}}}{\left[\frac{b}{b+d}\right]^a}$$
$$= \frac{\frac{ab^a}{(b+d+t))^{a+1}}}{\frac{b^a}{(b+d)^a}}$$
$$= \frac{ab^a(b+d)^a}{b^a(b+d+t))^{a+1}}$$
$$= \frac{a(b+d)^a}{[b^a(b+d)+t]^{a+1}}$$

¡Se distribuye $Pareto(a, b+d)$! ■

Solución

Inciso b)

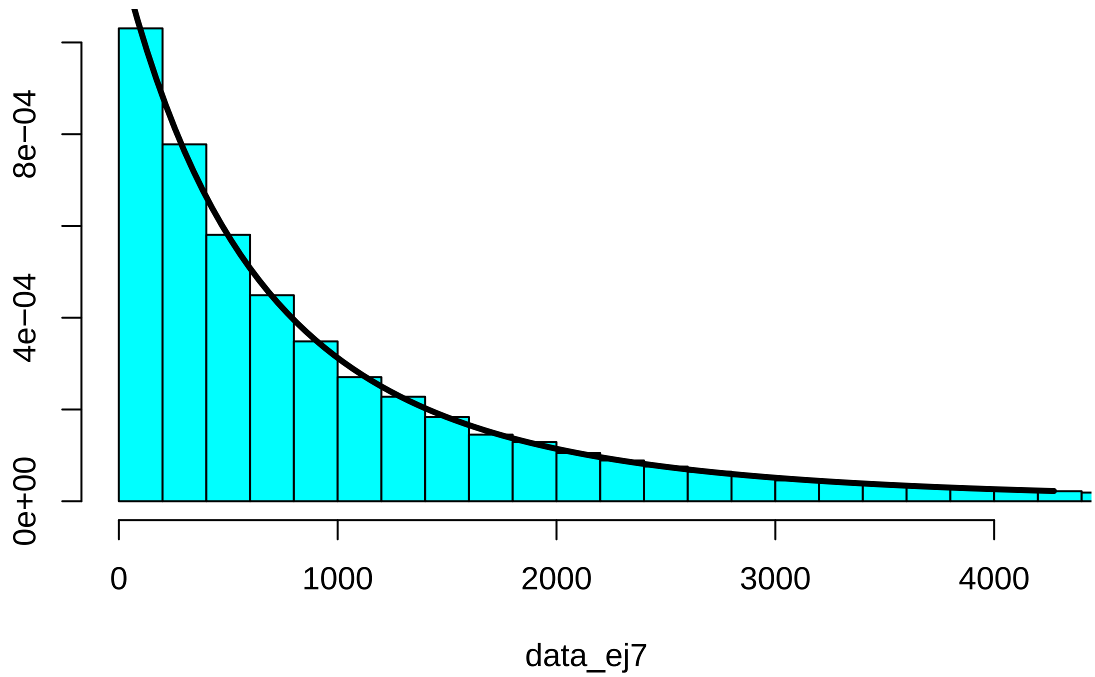
```
library(actuar)
```

```
##
## Attaching package: 'actuar'

## The following objects are masked from 'package:stats':
##
##     sd, var

## The following object is masked from 'package:grDevices':
##
##     cm
```

```
a=3
b=2000
d=500
proba_0<-ppareto(d,shape=a,scale=b)
proba_0
```

```
## [1] 0.488
```

```
set.seed(27)
n=100000
data_ej7<-c()
j=1
while(j<=n){
  aux=max(rpareto(1,shape=a,scale=b)-d,0)
  if(aux>0){
    data_ej7[j]=aux
    j=j+1
    }
}
aux = function(x){dpareto(x,shape=a,scale=b+d)}
MASS::truehist(data_ej7,xlim = c(0,quantile(data_ej7,0.95)))
plot(aux,xlim = c(0,quantile(data_ej7,0.95)),add=T,lwd=3)
```



Gráficamente, vemos que se pega demasiado la línea al histograma.

```
library(goftest)
goftest::ad.test(data_ej7,"ppareto",shape=a,scale=b+d) #Anderson-Darling
```

```
##
##  Anderson-Darling test of goodness-of-fit
##  Null hypothesis: distribution 'ppareto'
##  with parameters shape = 3, scale = 2500
##  Parameters assumed to be fixed
##
## data:  data_ej7
## An = 1.2129, p-value = 0.2627
```

```
ks.test(unique(data_ej7),"ppareto",shape=a,scale=b+d)
```

```
##
##  One-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  unique(data_ej7)
## D = 0.0033495, p-value = 0.2119
## alternative hypothesis: two-sided
```

Pasa ambos test sin ningún problema: Los p-values obtenidos en ambas pruebas son altísimos. Por lo que aceptamos la hipótesis nula de que se distrubuye pareto(3,2500). De hecho, la esperanza muestral y teórica coinciden:

```
esp_mues_ej7<-mean(data_ej7)
esp_mues_ej7
```

```
## [1] 1248.82
```

```r
esp_teo_ej7<-(b+d)/(a-1)
esp_teo_ej7
```

```
## [1] 1250
```

Difieren por:

```r
esp_mues_ej7-esp_teo_ej7
```

```
## [1] -1.180437
```

■

Ejercicio 8

Sean $X_1, \ldots, X_{100}$ los montos de siniestros independientes con distribución exponencial de media 1000. Una aseguradora cubrirá todos los riesgos cuyas póliza están sujetas cada una a un deducible $d = 100$.

a) Calcular la distribución del número de siniestros en los que la aseguradora tendrá que pagar algun monto positivo.

b) Calcular la distribución del numero de siniestros en los que la aseguradora no tendrá que pagar (incluyendo pagos de 0).

c) Simular valores para el número de siniestros en los que la aseguradora debe realizar un pago positivo. Realizar una prueba Ji-cuadrada partiendo la muestra en 3 conjuntos (muestra$\leq$ 90, 90 <muestra$\leq$ 95 y 95 <muestra) para corroborar la distribución encontradas en el inciso a).

d) Simular valores para el número de siniestros en los que la aseguradora no debe realizar un pago. Realizar una prueba Ji-cuadrada partiendo la muestra en 3 conjuntos (muestra$\leq$ 5, 5 <muestra$\leq$ 10 y 10 <muestra) para corroborar la distribución encontradas en el inciso b).

Solución

Inciso a)

Sabemos que $X_K \sim (\frac{1}{1000}) \quad \forall k \in \{1, \ldots, 100\}$ y notemos que la probabilidad de que la aseguradora pague un monto positivo sobre el asegurado K es si, $X_K > d$, es decir, $\mathbb{P}(X_K > d) = e^{-\frac{100}{1000}} = e^{-\frac{1}{10}} \approx 0.90483 \quad \forall k \in \{1, \ldots, 100\}$. Observamos que podemos identificas si $X_K > d$ por medio de una Bernoulli ($\mathbb{P}(X_K > d)$) de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
B_K = &\begin{cases} 1 & si \quad X_K > d \\ 0 & si \quad X_K \leq d \end{cases} \quad \forall k \in \{1, \ldots, 100\} \\
\implies \mathbb{P}(B_K = 1) &= \mathbb{P}(X_K > d) = 0.90483 \\
\mathbb{P}(B_K = 0) &= \mathbb{P}(X_K \leq d) = 1 - 0.90483 = 0.09516 \\
&\therefore B_K \sim Ber(0.90483) \quad \forall k \in \{1, \ldots, 100\}
\end{aligned}
$$

Podemos contabilizar el número de siniestros en los que la aseguradora pagará un monto positivo, es decir $X_K > d$ como:

$$B = \sum_{K=1}^{100} B_K \sim Binom(100, 0.9048374) \blacksquare$$

Solución

Inciso b)

$$\hat{B_K} = \begin{cases} 1 & si \quad X_K \leq d \\ 0 & si \quad X_K > d \end{cases} \quad \forall k \in \{1, \dots, 100\}$$
$$\implies \hat{B_K} \sim Ber(\mathbb{P}(X_K \leq d)) = Ber(0.095162582) \quad \forall k \in \{1, \dots, 100\}$$

De esta manera, podemos calcular el número de siniestros por los cuales la aseguradora no paga como:

$$\hat{B} = \sum_{K=1}^{100} \hat{B_K} \sim Binom(100, 0.095162582) \blacksquare$$

Solución

Inciso c)

```
set.seed(2000)
P <- c() # Vector de la cantidad de individuos a los que se les paga
NP <- c() # Vector de la cantidad de individuos a los que NO se les paga
n = 10000  # Tamaño de muestra

for(j in 1:n){
  X <- rexp(100,1/1000) # Simulamos una exp(1/1000)
  B<- c() # Vector que guarda las muestras Bernoulli del inciso a)
  B_<- c() # Vector que guarda las muestras Bernoulli del inciso b)
  for(i in 1:100){
    if(X[i]>100){
      B[i] = 1 # Sí se paga
      B_[i] = 0
    }else{
      B[i] = 0
      B_[i] = 1
    }
  }
 P[j] = sum(B) # Contar a cuantos se les pagó en ese intento
 NP[j] = sum(B_) # Contar a cuantos NO se les pagón en ese intento
}

# Notemos que en efecto, P + NP = c(100, 100, ..., 100)

#INCISO C

# Los que paga la aseguradora

# Separar en las categorías que se pide
o1 = sum(P<=90)
o3 = sum(P>95)
o2 = n - o1 -o3
Oi = c(o1,o2,o3)
Pi=c()
```

```r
# Probabilidades Teóricas
Pi[1] = pbinom(90, 100, 0.9048374)
Pi[2] = pbinom(95, 100, 0.9048374)-pbinom(90, 100, 0.9048374)
Pi[3] =1-pbinom(95, 100, 0.9048374)
# Prueba Chi2 para Binom(100, 0.9048374)
chisq.test(x = Oi, p=Pi)
```

```
##
##  Chi-squared test for given probabilities
##
## data:  Oi
## X-squared = 1.2394, df = 2, p-value = 0.5381
```

```r
#Mostrar el valor del p-value (0.5381) y en general el output para la prueba Chi2,
#de esta forma fallamos en rechazarla hipótesis nula, es decir, podemos afirmar
#que la muestra sigue una distribución Binom(100, 0.9048374)
```

■

Solución

Inciso d)

```r
#INCISO D

# Los que NO paga la aseguradora

# Separar en las categorías que se pide
o1_ = sum(NP<=5)
o3_ = sum(NP>10)
o2_ = n - o1_ -o3_
Oi_ = c(o1_,o2_,o3_)
Pi_=c()
# Probabilidades Teóricas
Pi_[1] = pbinom(5, 100, 1-0.9048374)
Pi_[2] = pbinom(10, 100, 1-0.9048374)-pbinom(5, 100, 1-0.9048374)
Pi_[3] =1-pbinom(10, 100, 1-0.9048374)
# Prueba Chi2 para Binom(100, 1-0.9048374)
chisq.test(x = Oi_, p=Pi_)
```

```
##
##  Chi-squared test for given probabilities
##
## data:  Oi_
## X-squared = 1.7354, df = 2, p-value = 0.4199
```

```r
#Mostrar el valor del p-value (0.4199) y en general el output para la prueba Chi2,
#de esta forma fallamos en rechazarla hipótesis nula, es decir, podemos afirmar
#que la muestra sigue una distribución Binom(100, 1- 0.9048374)
```

■

Ejercicio 9

Recordemos la formula de De Pril [ii]: Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *v.a.i.i.d.* con valores en el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Para cada entero $j \geq 0$, defina la probabilidad $f_j = \mathbb{P}[X = j]$, y suponga $f_0 \neq 0$. Sea $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Entonces las probabilidades $g_x = \mathbb{P}[S = x]$ se pueden calcular recursivamente mediante la fórmula

$$g_x = \begin{cases} (f_0)^n & \text{si} \quad x = 0, \\ \dfrac{1}{f_0} \displaystyle\sum_{k=1}^{x} \left[\dfrac{j(n+1)}{x} - 1 \right] f_j g_{x-j} & \text{si} \quad x \in \mathbb{N} - \{0\}. \end{cases}$$

1. Considere ahora $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *v.a.i.i.d.* con valores en el conjunto $\mathbb{N} - \{0, 1, \ldots, m-1\} = \{m, m+1, \ldots\}$. Para cada entero $j \geq m$, defina la probabilidad $f_j = \mathbb{P}[X = j]$, y suponga $f_m \neq 0$. Encuentre y demuestre una manera de encontrar probabilidades exactas para $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

   Hint: Use De Pril [ii].

2. Programe, muestre y explique con comentarios la metodología encontrada.
3. Suponga que tiene $n = 100$ pólizas/asegurados (X_i) independientes e idénticamente distribuidos tales que tienen una función de masa de probabilidad dada por

k	10	15	20	25
$\mathbb{P}[X = k]$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$

   Calcule de manera "exacta" (numéricamente):

   (a) $\mathbb{P}[S = 1570]$

   (b) $\mathbb{P}[S = 900]$

   (c) $\mathbb{P}[S \leq 1,650]$

   (d) $\mathbb{P}[S \geq 1,560]$

   Hint: Use los incisos anteriores.

Solución

Inciso a)

Veamos que, el monto mínimo de reclamación *individual* es m. A su vez, hay n pólizas. Por lo que, conjuntamente, el valor mínimo de la variable aleatoria S es n*m.

Y notemos que el evento $\{S = nm\}$ ocurre sí y solo sí todos reclaman el monto mínimo, de modo que, por independencia, $g_{n*m} = (f_m)^n$.

Ahora veamos que, la manera de obtener la formula recursiva:

Sean $P_X(t)$ y $P_S(t)$ las funciones generadoras de probabilidad de las variables discretas X y S, respectivamente, es decir:

$$P_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{K=0}^{\infty} t^K f_K; \quad \text{Pero dado Soporte de X} \in \mathbb{N}\backslash\{0,\dots,m-1\} \implies f_K = 0 \quad \forall K \in \{0,1,\dots,m-1\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{K=m}^{\infty} t^K f_K + \sum_{k=0}^{m-1} t_K f_K \\
&= \sum_{K=m}^{\infty} t^K f_K + \sum_{k=0}^{m-1} t_K * 0 \\
&= \sum_{K=m}^{\infty} t^K f_K \quad \implies P'_X(t) = \sum_{K=m}^{\infty} K t^K f_K
\end{aligned}$$

Por otro lado;

$$P_S(t) = \mathbb{E}(t^S) = \sum_{K=0}^{\infty} t^K g_K$$

Pero, al inicio observamos que Soporte de X $\in \mathbb{N}\backslash\{0,\dots,(n*m)-1\} \implies g_K = 0 \quad \forall K \in \{0,1,\dots,(n*m)-1\}$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{K=n*m}^{\infty} t^K g_K + \sum_{k=0}^{(n*m)-1} t_K g_K \\
&= \sum_{K=n*m}^{\infty} t^K g_K + \sum_{k=0}^{(n*m)-1} t_K * 0 \\
&= \sum_{K=n*m}^{\infty} t^K g_K \\
&\implies P'_S(t) = \sum_{K=n*m}^{\infty} K t^K g_K
\end{aligned}$$

Pero, dado que las X_i son v.a.i.i.d, tenemos que:

$$P_S(t) = [P_X(t)]^n$$

Derivando respecto de t, tenempos que:

$$P'_S(t) = n[P_X(t)]^{n-1} \quad P'_X(t)$$

Multiplicando por ambos lados por $tP_X(t)$:

$$\begin{aligned}
&\implies P_X(t) t P'_S(t) = n[P_X(t)]^{n-1} P'_X(t) \quad tP_X(t) \\
&\implies P_X(t) t P'_S(t) = n[P_X(t)]^{n} t P'_X(t)
\end{aligned}$$

En términos de sumas:

$$\left[\sum_{j=m}^{\infty} t^j f_j\right]\left[\sum_{K=n*m}^{\infty} K t^K g_K\right] = n\left[\sum_{K=mn}^{\infty} t^K g_K\right]\left[\sum_{j=m}^{\infty} j t^j f_j\right]$$

Hay que identificar el coeficiente del término t^x en cada lado de la ecuación. Desarrollemos los primeros 3 términos del lado izquierdo:

$$\left[t^m f_m + t^{m+1} f_{m+1} + t^{m+2} f_{m+2}\right]\left[n*mt^{nm} g_{nm} + (nm+1)t^{nm+1} g_{nm+1} + t^{nm+2} g_{nm+2}\right]$$

$$\left[t^m f_m + t^{m+1} f_{m+1} + t^{m+2} f_{m+2}\right]\left[n*mt^{nm} g_{nm} + (nm+1)t^{nm+1} g_{nm+1} + t^{nm+2} g_{nm+2}(nm+2)\right]$$

$$t^m f_m \left[n*mt^{nm} g_{nm} + (nm+1)t^{nm+1} g_{nm+1} + t^{nm+2} g_{nm+2}\right]$$

$$\underbrace{n*mt^{nm+m} g_{nm} f_m}_{1} + \underbrace{(nm+1)t^{nm+m+1} g_{nm+1} f_m}_{1} + \underbrace{(nm+2)t^{nm+m+2} g_{nm+2} f_m}_{1}$$

$$t^{m+1} f_{m+1} \left[n*mt^{nm} g_{nm} + (nm+1)t^{nm+1} g_{nm+1} + t^{nm+2} g_{nm+2}\right]$$

$$\underbrace{nmt^{nm+m+1} g_{nm} f_{m+1}}_{2} + \underbrace{(nm+1)t^{nm+m+2} g_{nm+1} f_{m+1}}_{2} + \underbrace{(nm+2)t^{nm+m+3} g_{nm+2} f_{m+2}}_{2}$$

$$t^{m+2} f_{m+2} \left[n*mt^{nm} g_{nm} + (nm+1)t^{nm+1} g_{nm+1} + t^{nm+2} g_{nm+2}(nm+2)\right]$$

$$\underbrace{nmt^{nm+m+2} g_{nm} f_{m+2}}_{3} + \underbrace{(nm+1)t^{nm+m+3} g_{nm+1} f_{m+2}}_{3} + (nm+2)t^{nm+m+4} g_{nm+2} f_{m+2}$$

Juntando:

$$n*mt^{nm+m} g_{nm} f_m$$

Para t^{nm+m} el coeficiente es: $nm \quad g_{nm} f_m$

$$(nm+1)t^{nm+m+1} g_{nm+1} f_m + nm^{nm+m+1} g_{nm} f_{m+1} = t^{nm+m+1}\left[(nm+1)g_{nm+1} f_m + nmg_{nm} f_{m+1}\right]$$

$$(nm+2)t^{nm+m+2} g_{nm+2} f_m + (nm+1)t^{nm+m+2} g_{nm+1} f_{m+1} + nmt^{nm+m+2} g_{nm} f_{m+2}$$

$$= t^{nm+m+2}\left[(nm+2)g_{nm+2} f_m + (nm+1)g_{nm+1} f_{m+1} + nmg_{nm} f_{m+2}\right]$$

Se vuelve a repetir el patrón visto en clase. El coeficiente para el término t^X con $x \geq nm + m$ es:

$$\sum_{K=nm}^{x-m} \sum_{j=m}^{j=x-k} K g_K f_j$$
$$= \sum_{K=nm}^{x-m} K g_K \sum_{j=m}^{j=x-k} f_j$$

Es decir, el término $f_j K g_K$ para todos aquellos valores de $j \geq m$ y $K \geq nm$ tales que $j + k = x$

$\sum_{j=0}^{X-1} f_j(X-j)g_{X-j}$

Pero como $K = X - j$; lo podemos reescribir como: $\sum_{j=nm}^{X-m} [f_{X-j} * j * g_j]$

Ahora, hagamos un procedimiento análogo para ver el patrón del lado derecho:

$$\left[mt^m f_m + t_{(m+1)}^{m+1} f_{m+1} + t_{m+2}^{m+2} f_{m+2}(m+2)\right]\left[t^{nm} g_{nm} + t^{nm+1} g_{nm+1} + t^{nm+2} g_{nm+2}\right]$$

$$t^{nm} g_{nm}\left[mt^m f_m + t_{(m+1)}^{m+1} f_{m+1} + t^{m+2} f_{m+2}(m+2)\right]$$

$$t^{nm+m} f_m g_{nm} + t^{m+1+nm} f_{m+1} g_{nm}(m+1) + t^{m+2+nm} f_{m+2}(m+2) g_{nm}$$

$$t^{nm+1} g_{nm+1}\left[mt^m f_m + t_{(m+1)}^{m+1} f_{m+1} + t^{m+2} f_{m+2}(m+2)\right]$$

$$t_m^{m+nm+1} f_m g_{nm+1} + t^{m+2+nm} f_{m+1}(m+1) g_{nm+1} + t_{(m+2)}^{m+3+nm} f_{m+2} g_{nm+1}$$

$$t^{nm+2} g_{nm+2}\left[mt^m f_m + t_{(m+1)}^{m+1} f_{m+1} + t^{m+2} f_{m+2}(m+2)\right]$$

$$mt^{m+2+nm} f_m g_{nm+2} + t^{m+3+nm} f_{m+1} + t^{m+4+nm} f_{m+2}(m+2) g_{nm+2}$$

$$\begin{aligned}
\text{Para } t^{mn+m} &\implies t^{nm+m} f_m g_{nm} \\
\text{Para } t^{mn+m+1} &\implies t^{m+1+nm} f_{m+1} g_{nm}(m+1) + t_m^{m+nm+1} f_m g_{nm+1} \\
\text{Para } t^{mn+m+2} &\implies t^{m+2+nm} f_{m+2}(m+2) g_{nm} + t^{m+2+nm} f_{m+1}(m+1) g_{nm+1} + mt^{m+2+nm} f_m g_{nm+2}
\end{aligned}$$

Para el lado derecho notemos que es similiar, solo que ahora será $n * j f_j g_K$ tal que $j + K \geq X$ para $j \geq m$ y $K \geq nm$

$$n \sum_{K=nm}^{x-m} \sum_{j=m}^{j=X-K} j g_K f_j$$

$$n = \sum_{K=nm}^{x-m} g_K \quad \sum_{j=m}^{j=X-K} j f_j$$

Lo cual podemos reescribir como:

$$n \sum_{j=nm}^{x-m} [f_{x-j} * (x-j) * g_j]; \quad \text{igualando terminos}$$

$$\sum_{j=nm}^{x-m} [f_{x-j} * j * g_j] = n \sum_{j=nm}^{x-m} [f_{x-j} * (x-j) * g_j]$$

rametrizando, obtenemos: $\forall x \geq nm + m$

$$\sum_{j=m}^{x-nm} (x-j) f_j g_{x-j} = n \sum_{j=m}^{x-nm} j f_j g_{x-j}$$

Sacando el primer término:

$$(x-m) f_m g_{x-m} + \sum_{j=m+1}^{x-nm} (x-j) f_j g_{x-j} = n \sum_{j=m+1}^{x-nm} j f_j g_{x-j} + nm f_m g_{x-m}$$

$$\begin{aligned}
\implies (x-m-nm) f_m g_{x-m} &= n \sum_{j=m+1}^{x-nm} j f_j g_{x-j} - \sum_{j=m+1}^{x-nm} (x-j) f_j g_{x-j} \\
\implies [f_m (x-m-nm)] g_{x-m} &= (n+1) \sum_{j=m+1}^{x-nm} j f_j g x - j - \sum_{j=m+1}^{x-nm} (x) f_j g_{x-j} \\
&= \sum_{j=m+1}^{x-nm} (n+1) j f_j g_{x-j} - x f_j g_{x-j} \\
&= \sum_{j=m+1}^{x-nm} [j(n+1) - x] f_j g_{x-j} \\
\implies g_{x-m} &= \sum_{j=m+1}^{x-nm} \frac{[j(n+1) - x] f_j g_{x-j}}{f_m (x-m-nm)} \\
\implies g_{x-m} &= \frac{1}{f_m} \sum_{j=m+1}^{x-nm} \left[\frac{j(n+1)}{x-m-nm} - \frac{x}{x-m-nm} \right] f_j g_{x-j} \quad \forall x \geq nm + m
\end{aligned}$$

Sea $k = x - m \implies x = m + k \quad \implies x - mn = m + k - mn$

$$\implies g_K = \frac{1}{f_m} \sum_{j=m+1}^{m+k-mn} \left[\frac{j(n+1)}{K - nm} - \frac{m+K}{K - nm} \right] f_j g_{m+k-j}$$

Notemos que esto funciona pues, si $x = nm + m + k$

$$x - m = nm + \mathrm{m} + k - \mathrm{m}$$

Entonces tenemos las probas necesarias, notemos que:

$$m + k - j \geq nm \iff j \leq -nm + k + m$$

$\therefore g_K = \frac{1}{f_m} \sum_{j=m+1}^{m+k-mn} \left[\frac{j(n+1)}{K-nm} - \frac{m+K}{K-nm} \right] f_j g_{m+k-j} \quad \blacksquare$

Solución

Inciso b)

```r
# x es donde queremos calcular la proba
# n el número de pólizas
# f := vector de probabilidades de X (ordenadas desde m) hasta z>=m
# m es el monto mínimo de reclamación
# todo es el argumento que nos dice si queremos imprimir todas las probas puntuales
# hasta x, así como lo siguiente:
# La probabilidad acumulada hasta dicho punto
# Lla probabilidad de que S>x
# La probabilidad de que S>=x

PrilII_General <- function(x,n,m,f,todo=F){
  ###########Preparativos################
  #Verificamos que el monto x sea al menos el monto mínimo de S
  if(x<(m*n)){
    return(paste("El monto mínimo de S es",n*m,";Por ello la proba de S=",x,",es 0"))
  }
  #Creamos un vector auxiliar para las probas de la suma
  g<-(m*n):x
  #Le ponemos nombres al vector de las probas de la suma
  names(g)<-(m*n):x
  #Le ponemos nombres al vector de probas de f.
  #Como empieza en m, desplazamos dichas unidades, por eso se su,a
  names(f)<-m:(m+(length(f)-1))
  #Fórmula De Pril II
  #Aquí k juega el rol del monto de los reclamos
  for(k in (n*m):x){
    #Si k es n*m, es la proba de que TODOS reclamen
    if(k==n*m){
      g[as.character(n*m)]=f[as.character(m)]^n
    }
    #Si no, entramos a la recursión
    else{
      #Creamos un auxiliar para la suma, irá guardando los valores de la suma
      aux = 0
      #Como encontramos en el inciso anterior que la suma corre de m+1 hasta
      #k+m-n*m, es por ello que la suma corre en ese rango de valores
      #Sin ambargo, le ponemos que corra hasta el mínimo entre k+m-n*m
      #y el monto "m" + la longitud del vector de probabilidades-1, ya que
      #Ese es el último valor en el vector f; se considera que el resto que
      #hay entre dicho número y k tendrían proba 0, por lo que ya no se consideran
      # en el cálculo.

      for(j in (m+1):min(k+m-n*m,m+length(f)-1)){
        #Calculamos la suma como encontramos en la demostración
        aux = aux + ((j*(n+1))/(k-(n*m)) - (m+k)/(k-(n*m)))*f[as.character(j)]*g[as.character(m+k-j)]
      }
      #dividimos la suma entre la proba de que un individuo reclame el monto "m"
      #tal como encontramos en la demostración, y le asignamos al valor k su proba
      g[as.character(k)]=aux/f[as.character(m)]
    }
  }
  #Si todo es verdadero, regresamos todo el vector de probabilidades de la suma
    if(todo){
```

```r
      #Si todo es verdadero, devolvemos probas puntuales, acumulada, supervivencia
      # y supervivencia inclusiva
        return(list("Puntuales"=g,"Acumulada"=sum(g),"Supervivencia"=1-sum(g),
                    "Supervivencia_inclusiva"=1-sum(g)+g[as.character(x)]))
    }else{
      # de lo contrario, solo la proba del monto k
      return(g[as.character(x)])
    }
}
# Comprobamos con el ejemplo visto el 16 de diciembre de 2021
f_ej<-5:15-5:15
names(f_ej)<-5:15
f_ej[(as.character(c(5,10,15)))]<-c(3/16,3/16,5/8)
m_ej=5
n_ej=100
PrilII_General(x=1235,n_ej,m_ej,f_ej,todo=F)
```

```
##       1235
## 0.04726791
```

```r
#Obtenemos lo mismo que el profesor
```

■

Solución

Inciso c)

```r
#Ponemos un vector con dichos datos proporcionados
f<-10:25-10:25
names(f)<-10:25
f[(as.character(seq(10,25,by=5)))]<-c(2/5,1/5,1/4,3/20)
m=10
n=100
```

Calcule de manera "exacta" (numéricamente):

a) $\mathbb{P}[S = 1570]$

```r
PrilII_General(x=1570,n=n,m=m,f=f,todo=F)
```

```
##       1570
## 0.03585373
```

b) $\mathbb{P}[S = 900]$

```r
PrilII_General(x=900,n=n,m=m,f=f,todo=F)
```

```
## [1] "El monto mínimo de S es 1000 ;Por ello la proba de S= 900 ,es 0"
```

Esta probabilidad es 0, ya que el monto mínimo de reclamación es 10, y hay 100 pólizas, entonces el valor mínimo de S es $10 * 100 = 1000$

c) $\mathbb{P}[S \leq 1,650]$

```r
ej_9c<-PrilII_General(x=1650,n=n,m=m,f=f,todo=T)
ej_9c$Acumulada
```

```
## [1] 0.9181796
```

d) $\mathbb{P}[S \geq 1,560]$

```r
ej_9d<-PrilII_General(x=1560,n=n,m=m,f=f,todo=T)
ej_9d$Supervivencia_inclusiva
```

```
##      1560
## 0.6217132
```

■

Ejercicio 10

Una empresa tiene 500 trabajadores y desea asegurarlos por una asuma asegurada de $100,000. Cada uno tiene una probabilidad de 0.15 de reclamar y de 0.85 de no durante cierto periodo de tiempo. Si Y es la variable aleatoria que mide el monto a pagar de la aseguradora en un contrato por deducible asumiendo el riesgo de todo el portafolio anterior:

(a) ¿Cuánto debe valer el deducible para que el valor esperado de Y sea $500,000?

Nota: Deben dar el valor exacto del deducible (salvo quizás un error numérico). Puedes utilizar R para realizar tus cálculos y/o aproximaciones numéricas **¡cada dígito cuenta!**. Un buen punto de partida para buscar a d es saber que:

- Si $X \in [a, b]$, en general, $d \in [0, b]$ (no tiene mucho sentido $d > b$).
- $\mathbb{E}[X \wedge d] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[(X-d)_+] \leq d$.

Hint: Existen muchas maneras de solucionar esto. Puedes asumir que las fórmulas de Darth Vader son válidas para variables aleatorias discretas. Para asuntos numéricos, un par de buenas funciones son: `pracma::integral` y `pracma::newtonRaphson`, o bien, `uniroot`. Aunque insisto, cada quién lo hará como pueda.

(b) Realiza simulaciones de la Y que propones y obtén su media.

Solución

Inciso a)

Sea $B_K \sim Bernoulli(0.15) \quad \forall k \in \{1, \ldots, 500\}$

$$\implies \text{Denotamos} X_K := 100,000 B_K = \begin{cases} 100,000 & si \quad B_K = 1 \\ 0 & si \quad B_K = 0 \end{cases} \forall k \in \{1, \ldots, 500\}$$

Donde X_K representa el monto a pagar por cada asegurado.

$$\implies \text{Notemos que} \quad B = \sum_{K=1}^{500} B_K \sim Binom(500, 0.15)$$

Se tiene que:

$$Y = \left(\sum_{K=1}^{500} X_K - d \right)_+ = (100,000B - d)_+$$

Donde Y representa el monto a pagar de la aseguradora para todo el portafolio de asegurados.

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=0}^{500}(100,000i - d)_+ \binom{500}{i}_{0.15^i \quad 0.85^{500-i}} = 500,000 \ldots (1)$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}[(100,000B - d)_+] = \mathbb{E}(100,000B) - \mathbb{E}(100,000B \wedge d) \\
&= 100,000(500)0.15 - \sum_{i=0}^{500} mín\{100,000i, d\}\binom{500}{i}0.15^i \quad 0.85^{500-i} \\
&= 7,500,000 - \sum_{i=0}^{500} mín\{100,000i, d\}\binom{500}{i}0.15^i \quad 0.85^{500-i} \\
&= 500,000 \\
&\implies 7,000,000 = \sum_{i=0}^{500} mín\{100,000i, d\}\binom{500}{i}0.15^i \quad 0.85^{500-i} = 500,000 \ldots (2)
\end{aligned}$$

De (1) y (2) utilizaremos "uniroot" de R para obtener la d que cumpla ambas ecuaciones, así llegaremos a que $d = 7,183,099.39109927$

```r
# Función asociada para la primera ecuación, buscamos la d t.q. se haga 0
f <- function(d){
  x = 0
  for(i in 0:500){
    k <-min(100000*i, d)
    p <- 0.15^i
    q <- 0.85^(500-i)
    c <- choose(500,i)
    x = x + (k*c*p*q)
  }
  return(x-7000000)
}
# Función asociada para la segunda ecuación, buscamos la d t.q. se haga 0
g<- function(d){
  x = 0
  for(i in 0:500){
    m <- max(100000*i-d,0)
    p <- 0.15^i
    q <- 0.85^(500-i)
    c <- choose(500,i)
    x = x+ (m*c*p*q)
  }
  return(x-500000)
}

# Buscar las raices de ambas funciones
r1<- uniroot(f,lower = 0, upper = 100000*500 ,tol = 1e-8)$root
r2<- uniroot(g,lower = 0, upper = 100000*500 ,tol = 1e-8)$root

print("d que satisface la ecuaci?n 1:")
```

```
## [1] "d que satisface la ecuaci?n 1:"
```

```r
print(r1)
```

```
## [1] 7183099
```

```r
print("Valor de f en r1:")
```

```
## [1] "Valor de f en r1:"
```

```r
print(f(r1))
```

```
## [1] 0
```

```r
print("d que satisface la ecuaci?n 2:")
```

```
## [1] "d que satisface la ecuaci?n 2:"
```

```r
print(r2)
```

```
## [1] 7183099
```

```r
print("Valor de g en r2:")
```

```
## [1] "Valor de g en r2:"
```

```r
print(g(r2))
```

```
## [1] -3.49246e-10
```

```r
"
En efecto, ambas raices coinciden y al aplicarlas en f y g, respectivamente,
ambas se acercan a 0.
"
```

```
## [1] "\nEn efecto, ambas raices coinciden y al aplicarlas en f y g, respectivamente,\nambas se acercan
```

■

Solución

Inciso b)

```r
set.seed(314159)

n = 100000
B <- rbinom(n, size = 500, prob = 0.15)
Y = 100000*B - r2

for(i in 1:n){
  Y[i] = max(Y[i],0)
}
print("Media Muestral de Y bajo d = 7,183,099.39109927")
```

```
## [1] "Media Muestral de Y bajo d = 7,183,099.39109927"
```

```r
print(mean(Y))
```

```
## [1] 500368.1
```

■

Ejercicio α (Extra+2)

Las canciones anexadas `Mágia1.mp3` y `Mágia2.mp3` son de un videojuego. Quien protagoniza este videojuego es una bruja que utiliza hechizos para defenderse de quien la quiere matar. Hay 3 categorías de hechizo: pared, techo y piso. A la fecha de publicación de esta tarea, existen 4 videojuegos de esta saga, en particular: ¿Cómo se llama la protagonista del videojuego al que pertenecen las canciones en cuestión y cuál es la trama del mismo?

Este punto extra solamente es válido para los 4 primeros equipos que entreguen el examen y correctamente la respuesta.

Solución

La protagonista del juego es Millennia, una niña que es utilizada como títere y guardia para una raza conocida como Timenoids que son como humanos excepto inmortales, y cuyo poder es deseado por los humanos cuyas vidas gobiernan. En general, trata de una mujer atrapada en una guerra entre la raza Timenoid y un grupo de avaros seres humanos que la tienen cautiva para aprovechar sus poderes. Los humanos desean el secreto de la inmortalidad en manos de los Timenoids, y estos a su vez, sueñan con ser la única raza inteligente del planeta. ■