



Tarea 2

Teoría del Riesgo

Profesor: Alarcón González Edgar Gerardo

Adjuntos: González Alvarado Héctor

Martínez Loria Johan

Padilla Martínez Miriam Janeth

Integrantes: (21) Cuéllar Chávez Eduardo de Jesús

(32) García Tapia Jesús Eduardo

(60) Reyes López Arath Alejandro

(67) Saldaña Morales Ricardo

Grupo: 9106

Ejercicio 1

En clase se vio la modelación de la variable aleatoria de pérdida de una compañía de seguros (Y) para cuando se tiene un contrato de **deducible**, sea X la variable aleatoria que mide el monto de pérdida asociado a un siniestro, tomando $d > 0$ el deducible que cobra **la aseguradora**, se tiene que:

$$Y = \max\{X - d, 0\}$$

Muestra la construcción de una variable aleatoria Z para este tipo de contrato que mida la pérdida que asume **el asegurado** (todo lo que la compañía no cubre).

a) **Exhibe de manera general cómo se construye su función de densidad en términos de la densidad de X** , especificando el soporte de la variable aleatoria que estás construyendo.

Busca su relación con otra variable de cobertura que conozcas, recuerda siempre la “Ley de conservación del Riesgo”.

Para comprobar que lo que hiciste está bien realiza lo siguiente:

b) Considera una variable aleatoria $X \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{100})$ ($E[X] = 100$) a partir de ésta variable aleatoria, considera $d = 27$, fija la semilla en 27 y genera una muestra aleatoria de tamaño $n = 100,000$ de tu variable Z , realiza un histograma y compáralo con la función de densidad que construiste anteriormente.

c) Obtén la esperanza muestral y teórica de Z (puede ser utilizando comandos de R) ¿son parecidas?

d) Realiza una prueba de bondad de ajuste Ji cuadrada que contraste los datos simulados de Z con la función de densidad que construiste, en particular para cuando el asegurado asume una pérdida igual a d y para cuando no, es decir, cuando $Z = d$ y cuando $Z < d$, explica y concluye tus resultados.

Solución

Inciso a)

Sea Z la variable aleatoria que mide la pérdida del asegurado bajo un contrato con deducible $d > 0$.

Sea X la variable aleatoria que mide el monto del siniestro, supongamos que el monto está en el intervalo $[a, b]$ con $b \geq a \geq 0$.

Observación

$$Z = \min(X, d) \implies Z = \begin{cases} X & \text{si } a \leq X < d \\ d & \text{si } b \geq X \geq d \end{cases}$$

Ya que,

$$\begin{aligned} \text{Si } X < d; & \text{ el asegurado asume toda la pérdida,} \\ \text{Si } X \geq d; & \text{ el asegurado paga únicamente el deducible.} \end{aligned}$$

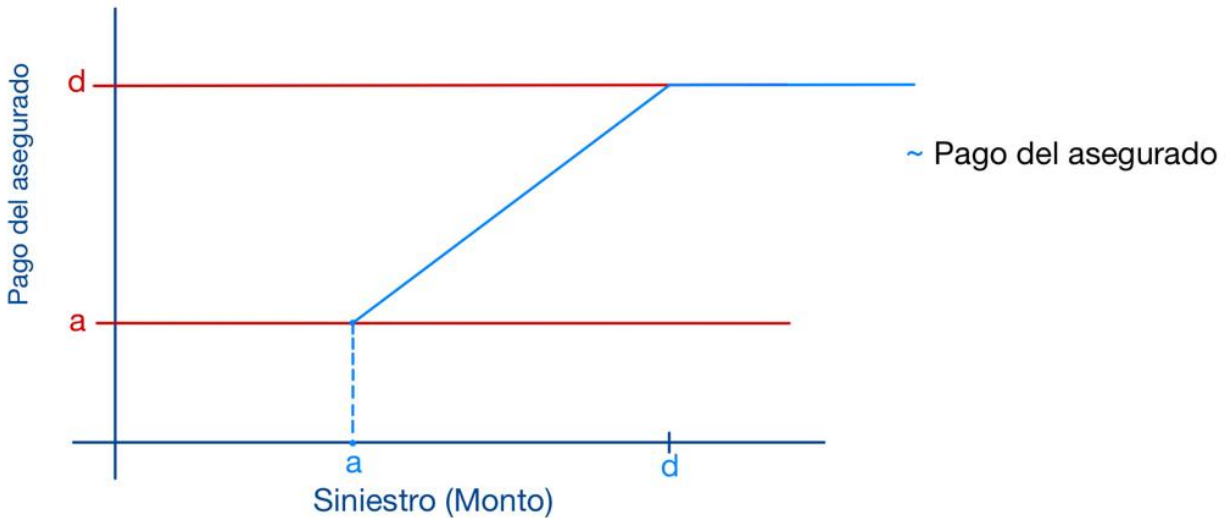
Caso 1: $X \in [a, d] \Leftrightarrow Z \in [a, d]$; Sea $z \in [a, d]$.

Y, como el siniestro tiene un monto mínimo de a , entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z \leq z] &= \mathbb{P}[a \leq X \leq z] = \mathbb{P}[X < z] - \mathbb{P}[X \leq a] \\ &= [X < z] \\ F_z(z) = F_x(z) &\implies f_z(z) = f_x(z) \quad \text{si } x \in [a, d] \end{aligned}$$

Caso 2: $X \in [d, b] \Leftrightarrow Z = d$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Z \geq d] &= \mathbb{P}[X > d] = 1 - \mathbb{P}[x \leq d] = S_x(d) \\ \Rightarrow f_z(d) &= S_x(d) \\ \therefore f_z(z) &= \begin{cases} f_x(z) & \text{si } q \leq X < d \quad (\text{Parte continuo}) \\ S_x(z) & \text{si } b \geq X \geq d \quad (\text{Parte discreta}) \end{cases}\end{aligned}$$



Se parece al monto de pago máximo, pero iniciando desde a en lugar desde 0.

Sería la cobertura de monto de pago máximo = d ; pero como dijimos, iniciando los “pagos” desde 0.

Porque también, el payoff de un put corto desplazado a unidades. ■

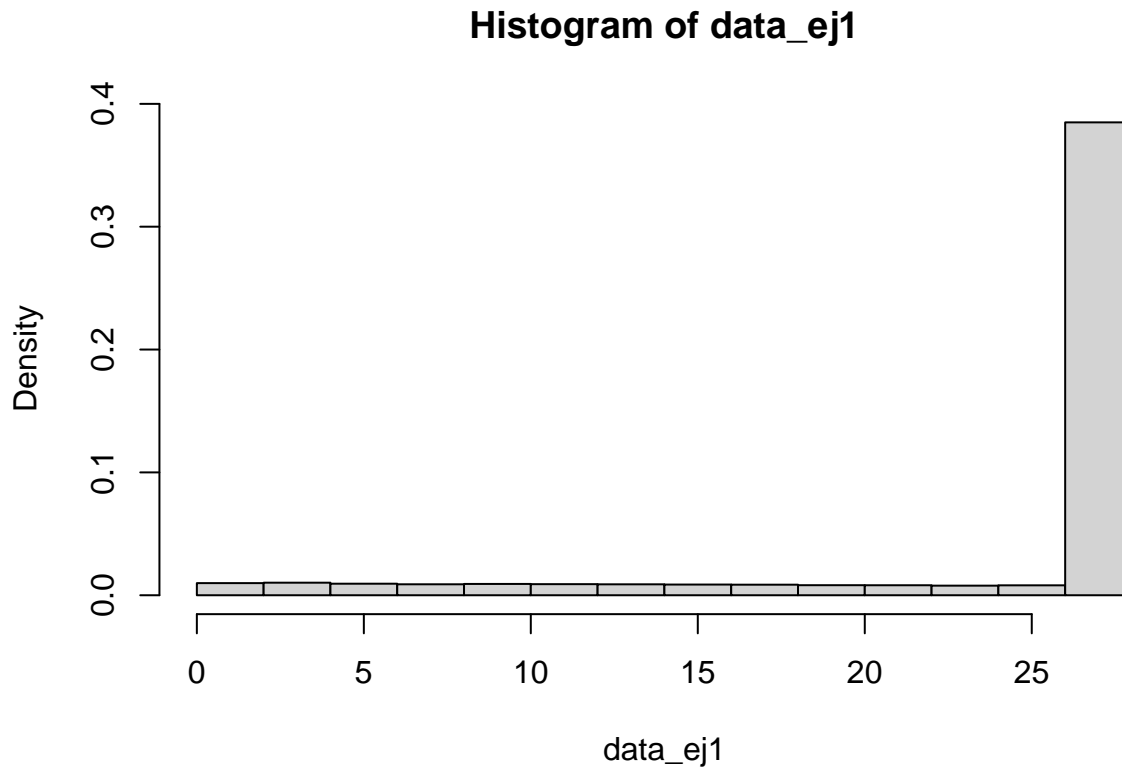
Inciso b)

```
library(MASS)
library(tidyverse)

## -- Attaching packages ----- tidyverse 1.3.1 --
## v ggplot2 3.3.5    v purrr  0.3.4
## v tibble  3.1.5    v dplyr  1.0.7
## v tidyr   1.1.4    v stringr 1.4.0
## v readr   2.0.2    v forcats 0.5.1

## -- Conflicts ----- tidyverse_conflicts() --
## x dplyr::filter() masks stats::filter()
## x dplyr::lag()    masks stats::lag()
## x dplyr::select() masks MASS::select()

# fijamos semilla
set.seed(27)
# simulamos
data_ej1 <- pmin(rexp(n=100000, rate=1/100), rep(27, 100000))
hist(data_ej1, probability = TRUE)
```



■

Inciso c)

Primero notemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X|X < d] &= \frac{\mathbb{P}(X \cap X < d)}{\mathbb{P}(x < d)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(x < d)}{\mathbb{P}(x < d)}\end{aligned}$$

Esperanza técnica por esperanza total:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}[Z|Z < d]\mathbb{P}[Z < d] + \mathbb{E}[Z|Z = d]\mathbb{P}[Z = d] \\ \mathbb{E}[Z|Z < d] &= \mathbb{E}[X|X < d] = \frac{\mathbb{E}[x\mathbb{I}_{x < d}]}{\mathbb{P}[x < d]} \\ &= \frac{\int_0^{27} x\lambda e^{-\lambda x} dx}{\int_0^{27} \lambda e^{-\lambda x} dx} = \frac{100 - 127e^{-\frac{27}{100}}}{1 - e^{-\frac{27}{100}}}\end{aligned}$$

De la parte de color rojo, hacemos cambio de variable:

$$u = x \implies du = 1$$

$$dv = e^{-\frac{x}{100}} \implies v = -100e^{-\frac{x}{100}}$$

$$\begin{aligned} & \lambda \int_0^{27} x e^{-\frac{x}{100}} dx \quad \text{integrando ambas partes:} \\ &= \lambda \left[-x \frac{e^{-\frac{x}{100}}}{\lambda} \Big|_0^{27} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{27} e^{-\frac{x}{100}} dx \right] \\ &= \frac{x}{\lambda} \left[-x e^{-\frac{x}{100}} \Big|_0^{27} - 100 e^{\frac{x}{100}} \Big|_0^{27} \right] \\ &= \left(-27 e^{-\frac{27}{100}} \right) - 100 \left[e^{-\frac{27}{100}} - 1 \right] \\ &= 100 - 100 e^{-\frac{27}{100}} - 27 e^{-\frac{27}{100}} \\ &= 100 - 127 e^{-\frac{27}{100}} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\mathbb{P}[Z < d] = \mathbb{P}[x < d] = 1 - e^{-\frac{27}{100}}$$

Así;

$$\mathbb{E}[z|Z = d] = d = 27; \mathbb{P}[Z = d] = S_x(d) = e^{-\frac{27}{100}} \blacksquare$$

```
esperanza_empirica<-mean(data_ej1)
esperanza_empirica
```

```
## [1] 23.6471
```

De lo obtenido:

```
Esp_1<-(100-127*exp(-27/100))/(1-exp(-27/100))
Prob_1=(1-exp(-27/100))
Prob_2=1-Prob_1
Esp_2=27
Esp_Teorica<-Esp_1*Prob_1+Esp_2*Prob_2
Esp_Teorica
```

```
## [1] 23.66205
```

Lo cual coincide bastante con la probabilidad empírica obtenida, siendo la diferencia de:

```
Esp_Teorica-esperanza_empirica
```

```
## [1] 0.01494588
```

■

inciso d)

```
cortes<-cut(data_ej1, breaks = c(0,27,Inf),right=FALSE)
observados<-table(cortes)
observados
```

```
## cortes
## [0,27) [27,Inf)
## 23783 76217
```

```
esperados<-c(Prob_1,Prob_2)
chisq.test(x=observados,p=esperados) #Ji-cuadrada
```

```
##
## Chi-squared test for given probabilities
##
## data: observados
## X-squared = 0.80987, df = 1, p-value = 0.3682
```

No rechazamos la hipótesis nula, el p-value es altísimo, por lo que no hay evidencia estadísticamente significativa como para decir que no sigue la distribución propuesta. **i.e, sí se distribuye de la manera propuesta teóricamente**

Ejercicio 2

En clase se vio la modelación de la variable aleatoria de pérdida de una compañía de seguros (Y) para cuando se tiene un contrato de **deducible** y **monto máximo de beneficio**, sea X la variable aleatoria que mide el monto de pérdida asociado a un siniestro definido en el intervalo (a, b) con $0 < a$, tomando $a < d < u < b$ el deducible y monto máximo de beneficio respectivamente que cobra **la aseguradora**, se tiene que:

$$Y = \max\{\min\{X, u\} - d, 0\}$$

Muestra la construcción de una variable aleatoria Z para este tipo de contrato que mida la pérdida que asume **el asegurado** (todo lo que la compañía no cubre),

a) **Exhibe de manera general cómo se construye su función de densidad en términos de la densidad de X** , especificando el soporte de la variable aleatoria que estás construyendo.

Solución

Inciso a)

Observación(es):

- Notemos que $Z = X$, si $X \in (a, d)$, pues el contrato tiene efecto unicamente si $x \geq d$.
- $Z = d$ si $X \in [d, u]$, pues el asegurado deberá pagar d (deducible) y esto está topado por un monto u (monto máximo).
- $Z = x + d - u$ si $x \in (u, b)$, pues el asegurado asume el costo del deducible (d), recibe el monto máximo (u) por parte de la aseguradora y paga el resto.

En resumen:

$$Z = \begin{cases} X, & \text{si } x \in (a, d) \Leftrightarrow z \in (a, d) \\ d, & \text{si } x \in [d, u] \Leftrightarrow z = d \\ X + d - u, & \text{si } x \in (u, b) \Leftrightarrow z \in (d, b + d - u) \end{cases}$$

Notemos que bajo esta observación,

$$Z \in (a, b + d - u),$$

La cual tiene sentido pues el nivel mínimo a cubrir es a y el máximo es b , pero antes debimos de haber pagado el deducible y recibido el monto máximo por parte de la aseguradora

$$\implies (a, b + d - u) = \underbrace{(a, d)}_{\text{Caso 1}} \cup \underbrace{\{d\}}_{\text{Caso 2}} \cup \underbrace{(d, b + d - u)}_{\text{Caso 3}}$$

Nota: Bajo cualquier concepto Z y Y satisfacen nuestra llamada “Ley de conservación del riesgo”, es decir;

$$X = Y + Z$$

Caso 1: Si $x \in (a, d) \Leftrightarrow Z \in (a, d)$

$$\begin{aligned} \implies F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z) = F_X(z) \\ \implies f_Z(z) &= f_X(z) \end{aligned}$$

Caso 2: Si $x \in [d, u] \Leftrightarrow Z = d$

$$f_Z(d) = \mathbb{P}(Z = d) = \mathbb{P}(d \leq X \leq u) = F_X(u) - F_X(d)$$

Caso 3: Si $x \in (u, b) \Leftrightarrow Z \in (d, b + d - u)$

$$\begin{aligned} \implies F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X + d - u \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z + u - d) \\ &= F_X(z + u - d) \implies f_Z(z) = f_X(z + u - d) \end{aligned}$$

De esta manera:

$$f_Z(z) = \begin{cases} f_X(z), & \text{si } z \in (a, d) \\ f_X(u) - F_X(d), & \text{si } z = d \\ f_X(z + u - d), & \text{si } z \in (d, b + d - u) \end{cases} \quad \blacksquare$$

Para comprobar que lo que hiciste está bien realiza lo siguiente:

b) Considera una variable aleatoria $X \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{100})$ ($E[X] = 100$) a partir de ésta variable aleatoria, considera $d = 27$ y $u = 110$, fija la semilla en 27 y genera una muestra aleatoria de tamaño $n = 100,000$ de tu variable Z , realiza un histograma y compáralo con la función de densidad que construiste anteriormente.

Solución

Inciso b)

Densidad

```
library(kdensity)

## Warning: package 'kdensity' was built under R version 4.1.2
set.seed(27)

Z <- function(X,a,d,u,b){
  n = length(X)
  l <- c()
  for(i in 1:n){
    if(a<= X[i] & X[i]<d){
      l[i] = X[i]
```

```

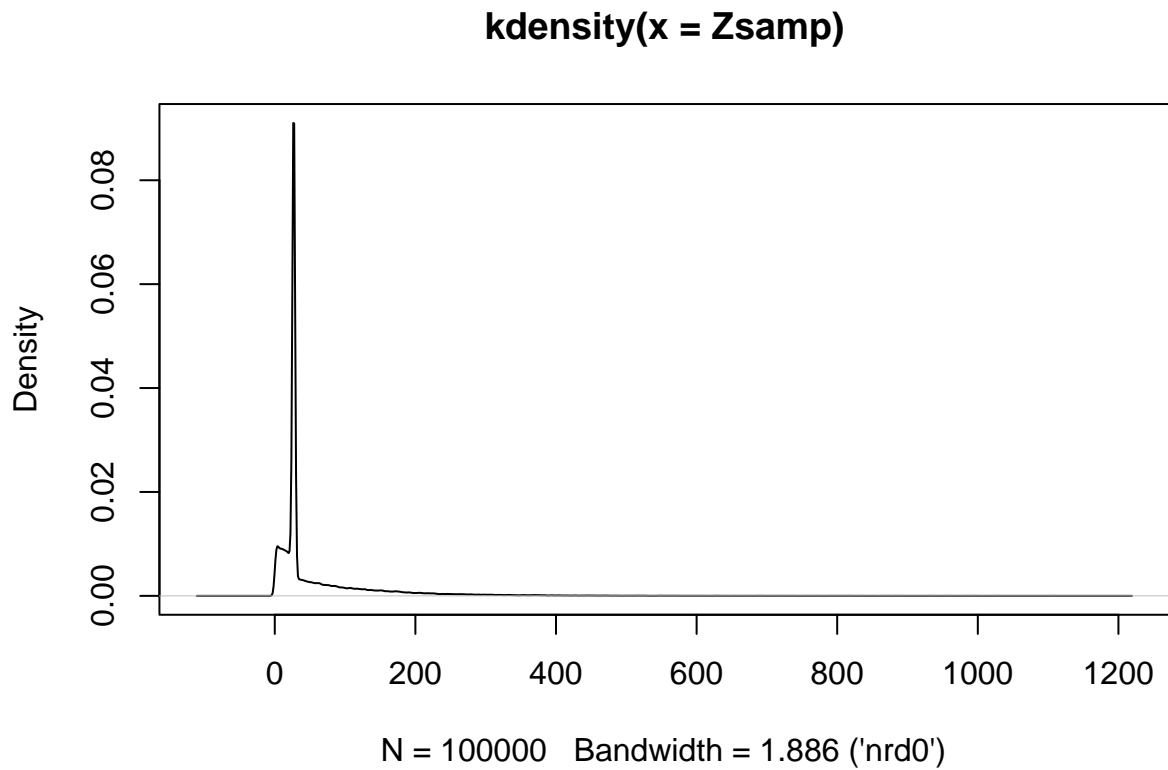
    }else{
      if(X[i]<=u){
        l[i] = d
      }else{
        l[i] = X[i] + d-u
      }
    }
  }
  return(l)
}

X <- rexp(100000, 1/100)

Zsamp <- Z(X,0,27,110,200) # Notemos que tanto a como b no se especificaron al inicio del problema

kde = kdensity(Zsamp)
plot(kde)

```



c) Obtén la **esperanza** muestral y teórica de Z (puede ser utilizando comandos de R) ¿son parecidas?

Solución

Inciso c)

Veamos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \int_a^d z f_x(z) dz + d(F_X(u) - F_X(d)) + \int_d^{b+d-u} Z f_x(z+u-d) dz \\
&= \int_a^d Z f_X(z) dz + d(F_X(u) - F_X(d)) + \int_u^b (\alpha + d - u) f_X(\alpha) d\alpha \\
&= \int_a^d Z f_X(z) dz + d(F_x(u) - F_x(d)) + \int_u^d \alpha f_x(\alpha) d\alpha + (d-u)(F_x(b) - F_x(u)) \\
&= \mathbb{E}(X) - \int_d^u Z f_x(z) dz + (d-u)F_x(b) - dF_x(d) + uF_x(u) \\
&= \mathbb{E}(X) - \int_0^{u-d} (t+d) f_x(t+d) dt + d(1 - F_x(d)) - u(1 - F_x(u)) \\
t &= z - d \\
&= \mathbb{E}(X) - \int_0^{u-d} t f_X(t+d) dt - d(F_X(u) - F_X(d)) + dS_X(d) - uS_x(u) \\
&= \mathbb{E}(X) - \int_0^{u-d} t f_X(t+d) dt + d - uS_x(u) - dF_x(u) \\
&= \mathbb{E}(X) - d(1 - F_x(u)) - uS_x(u) \\
&= \mathbb{E}(X) - \int_0^{u-d} t f_X(t+d) dt + t(d-u)S_X(u) \\
&= \mathbb{E}(X) - \underbrace{\left[\int_0^{u-d} t f_x(t+d) dt + (u-d)S_X(u) \right]}_{\mathbb{E}(Y)} \\
&= \mathbb{E}(X) - \int_d^u S_X(t) dt \\
\therefore \mathbb{E}(Z) &= \mathbb{E}(X) - \underbrace{\int_d^u S_X(t) dt}_{\mathbb{E}(Y)}
\end{aligned}$$

Para nuestro ejercicio

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= 100 - \int_{27}^{110} e^{-\frac{t}{100}} dt = 100 - \left(-100e^{-\frac{t}{100}} \Big|_{27}^{110} \right) \\
&= 100 + 100 \left(e^{-\frac{110}{100}} - e^{-\frac{27}{100}} \right) = 100 \left[1 + e^{-\frac{110}{100}} - e^{-\frac{27}{100}} \right] \\
&= 100[.5694916] \approx 56.94916 \blacksquare
\end{aligned}$$

```
Zsamp <- Z(X,0,27,110,200) # Notemos que tanto a como b no se especificaron al inicio del problema
print("Media Muestral de Z:")
```

```
## [1] "Media Muestral de Z:"
```

```
print(mean(Zsamp))
```

```
## [1] 56.73916
```

d) Obtenga la **mediana** muestral y teórica de Z (puede ser utilizando comandos de R) ¿son parecidas?

Solución

Inciso d)

Notemos que:

$$Z = \max\{X - u, 0\} + \min\{X, d\}$$

Pues, si $x \in (a, d) \Leftrightarrow a < x < d \Leftrightarrow a - u < x - u < d - u < 0$

$$\Rightarrow \max\{x - u, 0\} = 0 \wedge \min\{X, d\} = X$$

$$\Rightarrow Z = x$$

Si $x \in [d, u] \Leftrightarrow d \leq x \leq u \Leftrightarrow d - u \leq x - u \leq 0$

$$\Rightarrow \max\{x - u, 0\} = 0 \wedge \min\{X, d\} = d$$

$$\Rightarrow Z = d$$

Si $x \in [u, b] \Leftrightarrow u < x < b \Leftrightarrow 0 < x - u < b$

$$\Rightarrow \max\{x - u, 0\} = x - u \wedge \min\{X, d\} = d$$

$$\Rightarrow Z = X - u + d$$

De manera análoga a como pensamos para Y , la función $f(x) := \max\{x - u, 0\} + \min\{x, d\}$ es no decreciente, pues a mayor monto de siniestro, mayor será el pago del asegurado.

Y por el teorema de equivarianza de cuantiles se tiene que:

$$q_Z(.5) = \max\{q_x(.5) - u, 0\} + \min\{q_x(.5), d\}$$

En nuestro caso ($u = 110, d = 27, q_x(.5) = \ln(2)(100) = 69.314$)

$$\Rightarrow q_Z(.5) = \max\{69.314 - 110, 0\} + \min\{69.314, 27\}$$

$$= 0 + 27 = 27$$

$$\therefore q_Z(.5) = 27 \quad \blacksquare$$

```
Zsamp <- Z(X,0,27,110,200) # Notemos que tanto a como b no se especificaron al inicio del problema
print("Mediana Muestral de Z:")
```

```
## [1] "Mediana Muestral de Z:"
```

```
print(quantile(Zsamp, 0.5))
```

```
## 50%
```

```
## 27
```

Ejercicio 3

Sea X la variable aleatoria que representa los montos de siniestro para un contrato. La función de masa de probabilidad está dada por:

$$\mathbb{P}[X = x] = \frac{1}{10} \quad \text{para } x = 100, 200, 300, \dots, 900, 1000$$

Dicho contrato está sujeto a un deducible $d = 200$, un monto máximo de beneficio $u = 800$ y un coaseguro $\alpha = 0.95$.

- Calcula el monto promedio del costo por pérdida de la aseguradora ($\mathbb{E}[Y_L]$)
- Fija una semilla en 100 y realiza $n = 1,000,000$ simulaciones para calcular de forma muestral la esperanza del inciso anterior.
- Calcula el monto promedio del costo por pago de la aseguradora ($\mathbb{E}[Y_P]$)
- Fija una semilla en 100 y realiza $n = 1,000,000$ simulaciones para calcular de forma muestral la esperanza del inciso anterior.

Solución

Inciso a)

Usaremos la fórmula vista en clase, con la tasa de inflación $r = 0\%$, $d = 200$; $u = 800 \implies u - d = 800 - 200 = 600$, $\alpha = 0.95 \implies \alpha(u - d) = 570 \implies \alpha d = 190$.

Los posibles valores de $Z = \min(\max(\alpha(X - d), 0), \alpha(u - d))$; dado que:

$$x \in \{100, 200, \underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{De 100 en 100}}, 900, 1000\}$$

son:

```
alpha=0.95
d=200
u=800
posibles_pagos<-c()
for (i in seq(100,1000,by=100)){
  posibles_pagos[i/100]<-min(max(alpha*(i-d),0),alpha*(u-d))
}
valores_ej3<-data.frame("Perdida"=seq(100,1000,by=100),"Pago"=posibles_pagos,
                        "Probabilidad"=rep(1/10,10))
valores_ej3
```

```
##      Perdida Pago Probabilidad
## 1      100    0          0.1
## 2      200    0          0.1
## 3      300   95          0.1
## 4      400  190          0.1
## 5      500  285          0.1
## 6      600  380          0.1
## 7      700  475          0.1
## 8      800  570          0.1
## 9      900  570          0.1
## 10     1000  570          0.1
```

```
valores_ej3_agrupados <- valores_ej3 %>%
  group_by(Pago) %>%
  summarise(Probabilidad=sum(Probabilidad))
valores_ej3_agrupados
```

```
## # A tibble: 7 x 2
##   Pago Probabilidad
##   <dbl>         <dbl>
## 1     0          0.2
## 2    95          0.1
## 3   190          0.1
```

```
## 4    285        0.1
## 5    380        0.1
## 6    475        0.1
## 7    570        0.3
```

Entonces, la probabilidad teórica está dada por:

```
esperanza_teorica_L3<-sum(valores_ej3$Pago*valores_ej3$Probabilidad)
esperanza_teorica_L3
```

```
## [1] 313.5
```



Solución

Inciso b)

```
set.seed(100)
datos_ej3b<-sample(pmin(pmax(alpha*(seq(100,1000,by=100)-d),0),alpha*(u-d)),1000000,replace=T)
esperanza_empirica_L3<-mean(datos_ej3b)
esperanza_empirica_L3
```

```
## [1] 313.355
```

Vemos que es muy similar, de hecho solo difiere por:

```
esperanza_teorica_L3-esperanza_empirica_L3
```

```
## [1] 0.14497
```



Solución

Inciso c)

Como $Y^P = Z|Z > 0$

$$\mathbb{P}[Z = z|z > 0] = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}[Z=z]}{\mathbb{P}[Z>0]}, & \text{si } Z > 0 \\ 0, & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Como $\mathbb{P}[Z > 0] = \frac{8}{10}$; entonces tenemos que:

```
posibles_perdidas=posibles_pagos[posibles_pagos>0]
pago<-data.frame("Pago_positivo"=posibles_perdidas,
                 "Probabilidad"=rep((1/10)/(8/10),length(posibles_perdidas)))
pago
```

```
##   Pago_positivo Probabilidad
## 1           95        0.125
## 2          190        0.125
## 3          285        0.125
## 4          380        0.125
## 5          475        0.125
## 6          570        0.125
## 7          570        0.125
```

```
## 8          570          0.125
pago_agrupado<-pago %>%
  group_by(Pago_positivo) %>%
  summarise(Probabilidad=sum(Probabilidad))
pago_agrupado
```

```
## # A tibble: 6 x 2
##   Pago_positivo Probabilidad
##         <dbl>         <dbl>
## 1           95          0.125
## 2          190          0.125
## 3          285          0.125
## 4          380          0.125
## 5          475          0.125
## 6          570          0.375
```

Entonces la esperanza teórica está dada por:

```
esperanza_teorica_P3<-sum(pago$Pago_positivo*pago$Probabilidad)
esperanza_teorica_P3
```

```
## [1] 391.875
```



Solución

Inciso d)

```
set.seed(100)
datos_ej3d<-sample(pmin(pmax(alpha*(seq(100,1000,by=100)-d),0),alpha*(u-d))[pmin(pmax(alpha*(seq(100,1000,by=100)-d),0),alpha*(u-d))],n)
esperanza_empirica_P3<-mean(datos_ej3d)
esperanza_empirica_P3
```

```
## [1] 391.8326
```

Vemos que son bastante similares, de hecho solo difieren por:

```
esperanza_teorica_P3-esperanza_empirica_P3
```

```
## [1] 0.04237
```



Ejercicio 4

En clase se vio la modelación de la variable aleatoria de pérdida de una compañía de seguros (Y) para cuando se tiene un contrato de **deducible**, sea X la variable aleatoria que mide el monto de pérdida asociado a un siniestro definido en el intervalo (a, b) con $0 < a$, tomando $a < d < b$ el deducible que cobra **la aseguradora**, se define como **deducible franquicia** tal que el pago de la compañía aseguradora está dado por:

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \leq d \\ X & \text{si } X > d \end{cases}$$

Muestra la construcción de una variable aleatoria Y para este tipo de contrato que mida la pérdida que asume **la aseguradora** (todo lo que la compañía cubre),

a) Exhibe de manera general cómo se construye su función de densidad en términos de la densidad de X , especificando el soporte de la variable aleatoria que estás construyendo.

Solución a

Notemos que:

$$Y = X\mathbb{I}_{\{X > d\}}$$

De igual manera, notemos que:

$$f_Y(0) = \mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X \leq d) = F_X(d)$$

y si $y \in (d, b)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(d < Y \leq y) &= \mathbb{P}(d < x < y) = F_X(y) - F_X(d) \\ \implies F_Y(y) - F_Y(d) &= F_X(y) - F_X(d) \\ \implies f_Y(y) &= f_X(y) \text{ si } y \in (d, b) \\ \therefore f_Y(y) &= \begin{cases} F_X(d) & \text{si } y \leq 0 \\ f_X(y) & \text{si } y > d \end{cases}\end{aligned}$$

De esta manera $\text{Sop}(Y) = \{0\} \cup (d, b)$

Para comprobar que lo que hiciste está bien realiza lo siguiente:

b) Considera una variable aleatoria $X \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{100})$ ($E[X] = 100$) a partir de ésta variable aleatoria, considera $d = 50$, fija la semilla en 6 y genera una muestra aleatoria de tamaño $n = 100,000$ de tu variable Y , realiza un histograma y compáralo con la función de densidad que construiste anteriormente.

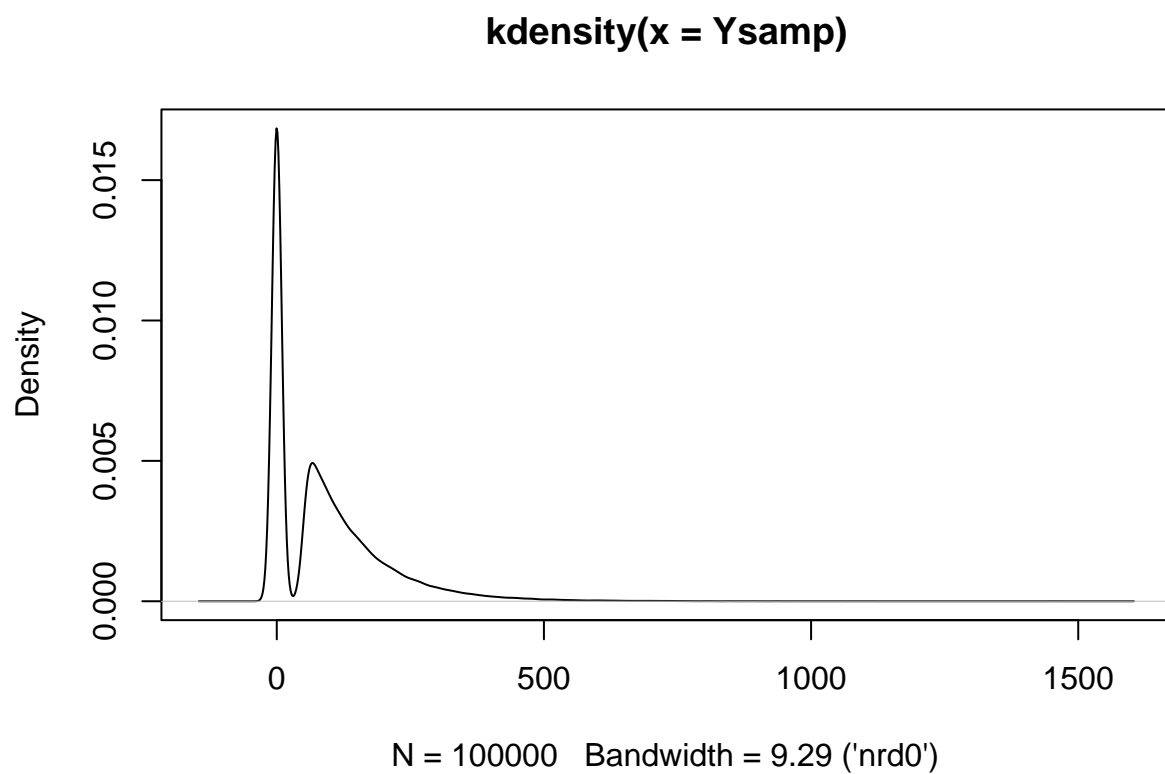
Solución b

```
library(kdensity)
set.seed(6)

Y <- function(X,d){
  n = length(X)
  l <- c()
  for(i in 1:n){
    if(X[i]>d){
      l[i] = X[i]
    }else{l[i] = 0}
  }
  return(l)
}

X <- rexp(100000, 1/100)
Ysamp <- Y(X,50)

# Densidad
kde = kdensity(Ysamp)
plot(kde)
```



c) Obtén la **esperanza** muestral y teórica de Y (puede ser utilizando comandos de R) ¿son parecidas?

Solución c

Notemos que:

$$\mathbb{E}(Y) = 0F_X(d) + \int_d^\infty yf_x(y)dy = \int_d^\infty yf_x(y)dy \dots (1)$$

Notemos además que, si $x > d$

$$\begin{aligned}
&\implies X = \max\{X - d, 0\} + d \\
&\implies \mathbb{E}(Y) = \int_d^\infty [(y - d)_+ + d] f_x(y) dy = \int_d^\infty (y - d)_+ f_x(y) dy \\
&\quad + d \int_d^\infty f_x(y) dy = \int_d^\infty (y - d) f_x(y) dy + d(1 - F_X(d)) \\
&= \mathbb{E}(X) - d \int_d^\infty f_x(y) dy - \int_a^d y f_x(y) dy + dS_x(d) \\
&= \mathbb{E}(X) - \int_a^\infty \min\{d, y\} f_x(y) dy + dS_x(d) \\
&= \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\min\{X, d\}) + dS_x(d) \\
&= \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge d) + dS_x(d)
\end{aligned}$$

Veamos (1) para nuestro caso particular, es decir, $(d = 50, X \sim \exp(\frac{1}{100}))$

$$\begin{aligned}
&\implies \mathbb{E}(Y) = \int_{50}^\infty y \frac{1}{100} e^{-\frac{y}{100}} dy \begin{cases} u = y \implies du = dy \\ dv = \frac{1}{100} e^{-\frac{y}{100}} dy \implies v = -e^{-\frac{y}{100}} \end{cases} \\
&= -ye^{-\frac{y}{100}} \Big|_{50}^\infty + \int_{50}^\infty e^{-\frac{y}{100}} dy = 50e^{-\frac{1}{2}} + \left(-100e^{-\frac{y}{100}} \Big|_{50}^\infty\right) \\
&= 50e^{-\frac{1}{2}} + 100e^{-\frac{1}{2}} \\
&= 150e^{-\frac{1}{2}} \\
&= 90.9796 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

```
Ysamp <- Y(X,50)
```

```
print("Media Muestral de Y:")
```

```
## [1] "Media Muestral de Y:"
```

```
print(mean(Ysamp))
```

```
## [1] 90.85721
```

d) Obtenga la **mediana** muestral y teórica de Y (puede ser utilizando comandos de R) ¿son parecidas?

Solución d

Recordemos que:

$$Y = X\mathbb{I}_{\{X > d\}}(x); \quad X \geq 0$$

Entonces, notemos que si $0 \leq x_1 \leq x_2$, entonces:

- Si $x_1 > d \implies x_2 > d \implies \mathbb{I}_{\{x_1 > d\}} = \mathbb{I}_{\{x_2 > d\}} = 1$
- Si $x_1 \leq d < x_2 \implies \mathbb{I}_{\{x_1 > d\}} = 0 < \mathbb{I}_{\{x_2 > d\}} = 1$
- Si $x_2 \leq d \implies \mathbb{I}_{\{x_1 > d\}} = \mathbb{I}_{\{x_2 > d\}} = 0$

De esta manera $g(x) := \mathbb{I}_{\{X > d\}}(x)$ es una función no decreciente y positiva al igual que: $f(x) := x$ (Para $x \in [0, \infty)$) $\implies h(x) := f(x) * g(x)$ es una función no decreciente y positiva, es decir, $h(x) = x\mathbb{I}_{\{X > d\}}(x)$ es no decreciente y positiva \implies por el teorema de equivarianza de cuantiles:

$$q_Y(\alpha) = q_x(\alpha) \mathbb{I}_{\{X > d\}}(q_x(\alpha))$$

EN nuestro caso ($\alpha = 0.5, d = 50, X \sim \exp(\frac{1}{100})$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow q_Y(0.5) &= \ln(2)(100) \mathbb{I}_{\{X > d\}}(\ln(2)(100)) \\ &= 69.314718 \mathbb{I}_{\{X > d\}}(69.314718) \quad (\text{lo naranja se hace uno}) \\ &= 69.314718 \\ q_Y(0.5) &\approx 69.314718 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

```
Ysamp <- Y(X,50)

print("Mediana Muestral de Y:")

## [1] "Mediana Muestral de Y:"

print(quantile(Ysamp, 0.5))

##      50%
## 69.37989
```

Ejercicio 5

Un deducible franquicia modifica el deducible ordinario agregando el deducible cuando hay un monto positivo pagado.

Una vez que la pérdida X supera el umbral d , la aseguradora paga la pérdida total X .

La variable aleatoria por perdida para una póliza con deducible franquicia es.

$$Y^L = \begin{cases} 0 & \text{para } X \leq d \\ X & \text{para } X > d \end{cases}$$

La variable aleatoria por pago para una póliza con deducible franquicia está dada por

$$Y^P = X | X > d$$

a) Demuestra para una poliza con deducible franquicia

$$\mathbb{E}(Y^L) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge d) + d[1 - F(d)]$$

Solución a

Observación

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\min(X, d)] &= \mathbb{E}[X | X < d] \mathbb{P}[X < d] + \mathbb{E}[d | X \geq d] \mathbb{P}[X \geq d] \\ &= \left[\int_0^d x \frac{f_X(x) dx}{F_X(d)} \right] F_X(d) + d[1 - F_X(d)] \\ &= \int_0^d x F_X(x) dx + d[1 - F_X(d)] \\ &= \int_0^d S(x) d_X + d[1 - F_X(d)] \\ &\therefore \int_0^d S(x) d_X + d[1 - F_X(d)] \end{aligned}$$

Resolvemos el inciso a

$\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[Y^2|X \leq d]\mathbb{P}[X \leq d] + \mathbb{E}[Y^2|X > d]\mathbb{P}[X > d]$ Pero, $\mathbb{E}[Y^2|X \leq d] = 0$ ya que $Y^2|Z \leq d = 0$. (La v.a constante 0)

$$\mathbb{E}[Y^2|X > d]\mathbb{P}[X > d]$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X > d] &= 1 - F_X(d) \\ \mathbb{E}[Y^2|X > d] &= \mathbb{E}[X|X > d] \\ &= \int_d^\infty x \frac{f_X(z)dz}{1 - F_X(d)} \\ &= \int_d^\infty x \frac{f_X(z)dz}{1 - F_X(d)} + \int_0^d x \frac{f_X(z)dz}{1 - F_X(d)} - \int_0^d x \frac{f_X(z)dz}{1 - F_X(d)} \\ &= \int_0^\infty x \frac{f_X(z)dz}{1 - F_X(d)} - \int_0^d x \frac{f_X(z)dz}{1 - F_X(d)} \\ &= \frac{1}{1 - F_X(d)} \left[\int_0^\infty z f_X(z)dz - \int_0^d x f_X(z)dz \right]\end{aligned}$$

Haciendo uso de Darth-Vader

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{1 - F_X(d)} \left(\mathbb{E}[X] - \int_0^d S(x)dx \right) \\ &= \frac{1}{1 - F_X(d)} \left(\mathbb{E}[X] - \int_0^d 0^d S(x)dx \right) [1 - F_X(d)] \\ &= \mathbb{E}[X] - \int_0^d S(x)dx \\ &= \mathbb{E}[X] - \int_0^d S(x)dx - d[1 - F_X(d)] + d[1 - F_X(d)] \\ &= \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X \wedge d] + d[1 - F_X(d)] \quad \blacksquare\end{aligned}$$

b) Obten la funcion de decidad $f_{Y^P}(y)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X \leq x|X > d] &= \frac{\mathbb{P}[X \leq x \mathbb{I}_{\{X > d\}}]}{\mathbb{P}[X > d]} \\ &= \frac{\int_0^x f_X(x)dx \mathbb{I}_{\{x > d\}}}{S_X(d)} \\ &= \frac{\int_0^x f_X(x)dx}{S_X(d)} \\ &\implies F_X(x) = \frac{\int_0^x f_X(z)dz}{S_X(d)} \\ \text{Derivando} \implies f_X(x) &= \frac{f_X(x)}{S_X(d)} \\ \therefore f_X(x) &= \begin{cases} \frac{f_X(x)}{S_X(d)} & \text{si } x > d \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Ejercicio 6

Mike es un especialista en acrobacias con motocicleta que se presenta en eventos de deportes extremos.

El costo anual para reparar su motocicleta, es modelado por una variable aleatoria $X \sim \text{Pareto}(\alpha = 2, \theta = 5,000)$

Los costos anuales de reparación de la motocicleta están sujetos a lo siguiente:

- i) Mike paga un deducible $d=1,000$
- ii) Mike paga 20% para reparaciones que están entre 1,000 y 6,000
- iii) Mike paga el 100% para reparaciones que superan 6,000 y hasta desembolsar máximo 10,000
- iv) Mike paga el 10% de las reparaciones restantes

Con la información proporcionada

- a) Calcula el costo esperado anual de reparación.

Hint : Usa el ejercicio anterior

Ejercicio 7

Sea $X \sim \text{Pareto}(a, b)$ con soporte en $(0, \infty)$ la v.a. de los montos de un siniestro.

- a) Calcular la distribución de la variable de costo por pago cuando la póliza está sujeta a un deducible d .
- b) Para valores de a, b y d de su elección, comprueba que lo encontrado en el inciso anterior se cumple muestralmente comparando un histograma y la densidad teórica. Realiza una prueba de bondad de ajuste y concluye.

Solución

Inciso a)

Solución

Inciso b)

```
library(actuar)

##
## Attaching package: 'actuar'

## The following objects are masked from 'package:stats':
##
##      sd, var

## The following object is masked from 'package:grDevices':
##
##      cm

a=3
b=2000
d=500
proba_0<-ppareto(d,shape=a,scale=b)
proba_0

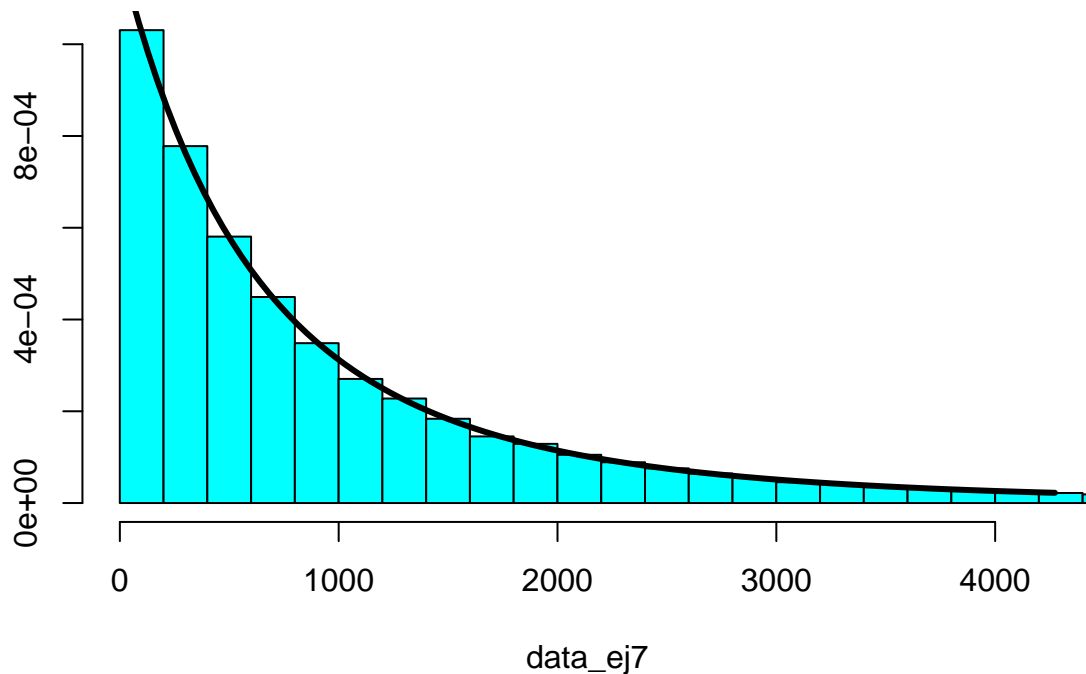
## [1] 0.488

set.seed(27)
n=100000
data_ej7<-c()
```

```

j=1
while(j<=n){
  aux=max(rpareto(1,shape=a,scale=b)-d,0)
  if(aux>0){
    data_ej7[j]=aux
    j=j+1
  }
}
aux = function(x){dpareto(x,shape=a,scale=b+d)}
MASS::truehist(data_ej7,xlim = c(0,quantile(data_ej7,0.95)))
plot(aux,xlim = c(0,quantile(data_ej7,0.95)),add=T,lwd=3)

```



Gráficamente, vemos que se pega demasiado la línea al histograma.

```

library(goftest)
goftest::ad.test(data_ej7,"ppareto",shape=a,scale=b+d) #Anderson-Darling

##
## Anderson-Darling test of goodness-of-fit
## Null hypothesis: distribution 'ppareto'
## with parameters shape = 3, scale = 2500
## Parameters assumed to be fixed
##
## data: data_ej7
## An = 1.2129, p-value = 0.2627
ks.test(unique(data_ej7),"ppareto",shape=a,scale=b+d)

```

```
##
## One-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data: unique(data_ej7)
## D = 0.0033495, p-value = 0.2119
## alternative hypothesis: two-sided
```

Pasa ambos test sin ningún problema: Los p-values obtenidos en ambas pruebas son altísimos. Por lo que aceptamos la hipótesis nula de que se distribuye $\text{pareto}(3, 2500)$. De hecho, la esperanza muestral y teórica coinciden:

```
esp_mues_ej7 <- mean(data_ej7)
esp_mues_ej7
```

```
## [1] 1248.82
```

```
esp_teo_ej7 <- (b+d)/(a-1)
esp_teo_ej7
```

```
## [1] 1250
```

Difieren por:

```
esp_mues_ej7 - esp_teo_ej7
```

```
## [1] -1.180437
```

■ # Ejercicio 8

Sean X_1, \dots, X_{100} los montos de siniestros independientes con distribución exponencial de media 1000. Una aseguradora cubrirá todos los riesgos cuyas pólizas están sujetas cada una a un deducible $d = 100$.

- Calcular la distribución del número de siniestros en los que la aseguradora tendrá que pagar algún monto positivo.
- Calcular la distribución del número de siniestros en los que la aseguradora no tendrá que pagar (incluyendo pagos de 0).
- Simular valores para el número de siniestros en los que la aseguradora debe realizar un pago positivo. Realizar una prueba Ji-cuadrada partiendo la muestra en 3 conjuntos ($\text{muestra} \leq 90$, $90 < \text{muestra} \leq 95$ y $95 < \text{muestra}$) para corroborar la distribución encontradas en el inciso a).
- Simular valores para el número de siniestros en los que la aseguradora no debe realizar un pago. Realizar una prueba Ji-cuadrada partiendo la muestra en 3 conjuntos ($\text{muestra} \leq 5$, $5 < \text{muestra} \leq 10$ y $10 < \text{muestra}$) para corroborar la distribución encontradas en el inciso b).

Ejercicio 9

Recordemos la formula de De Pril [ii]: Sean X_1, X_2, \dots, X_n v.a.i.i.d. con valores en el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Para cada entero $j \geq 0$, defina la probabilidad $f_j = \mathbb{P}[X = j]$, y suponga $f_0 \neq 0$. Sea $S = \sum_{k=1}^n X_k$. Entonces las probabilidades $g_x = \mathbb{P}[S = x]$ se pueden calcular recursivamente mediante la fórmula

$$g_x = \begin{cases} (f_0)^n & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{f_0} \sum_{k=1}^x \left[\frac{j(n+1)}{x} - 1 \right] f_j g_{x-j} & \text{si } x \in \mathbb{N} - \{0\}. \end{cases}$$

1. Considere ahora X_1, X_2, \dots, X_n v.a.i.i.d. con valores en el conjunto $\mathbb{N} - \{0, 1, \dots, m-1\} = \{m, m+1, \dots\}$. Para cada entero $j \geq m$, defina la probabilidad $f_j = \mathbb{P}[X = j]$, y suponga $f_m \neq 0$. Encuentre y demuestre una manera de encontrar probabilidades exactas para $S = \sum_{k=1}^n X_k$.

Hint: Use De Pril [ii].

2. Programe, muestre y explique con comentarios la metodología encontrada.
3. Suponga que tiene $n = 100$ pólizas/asegurados (X_i) independientes e idénticamente distribuidos tales que tienen una función de masa de probabilidad dada por

k	10	15	20	25
$\mathbb{P}[X = k]$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$

Calcule de manera "exacta" (numéricamente):

- (a) $\mathbb{P}[S = 1570]$
- (b) $\mathbb{P}[S = 900]$
- (c) $\mathbb{P}[S \leq 1,650]$
- (d) $\mathbb{P}[S \geq 1,560]$

Hint: Use los incisos anteriores.

Ejercicio 10

Una empresa tiene 500 trabajadores y desea asegurarlos por una suma asegurada de \$100,000. Cada uno tiene una probabilidad de 0.15 de reclamar y de 0.85 de no durante cierto periodo de tiempo. Si Y es la variable aleatoria que mide el monto a pagar de la aseguradora en un contrato por deducible asumiendo el riesgo de todo el portafolio anterior:

- (a) ¿Cuánto debe valer el deducible para que el valor esperado de Y sea \$500,000?

Nota: Deben dar el valor exacto del deducible (salvo quizás un error numérico). Puedes utilizar R para realizar tus cálculos y/o aproximaciones numéricas **¡cada dígito cuenta!**. Un buen punto de partida para buscar a d es saber que:

- Si $X \in [a, b]$, en general, $d \in [0, b]$ (no tiene mucho sentido $d > b$).
- $\mathbb{E}[X \wedge d] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[(X - d)_+] \leq d$.

Hint: Existen muchas maneras de solucionar esto. Puedes asumir que las fórmulas de Darth Vader son válidas para variables aleatorias discretas. Para asuntos numéricos, un par de buenas funciones son: `pracma::integral` y `pracma::newtonRaphson`, o bien, `uniroot`. Aunque insisto, cada quién lo hará como pueda.

- (b) Realiza simulaciones de la Y que propones y obtén su media.

Ejercicio α (Extra+2)

Las canciones anexadas `Mágia1.mp3` y `Mágia2.mp3` son de un videojuego. Quien protagoniza este videojuego es una bruja que utiliza hechizos para defenderse de quien la quiere matar. Hay 3 categorías de hechizo: pared, techo y piso. A la fecha de publicación de esta tarea, existen 4 videojuegos de esta saga, en particular: ¿Cómo se llama la protagonista del videojuego al que pertenecen las canciones en cuestión y cuál es la trama del mismo?

Este punto extra solamente es válido para los 4 primeros equipos que entreguen el examen y correctamente la respuesta.