Tarea 4

Funciones en análisis de supervivencia

Modelos de series de Tiempo y Supervivencia

Profesor: Naranjo Albarrán Lizbeth

Adjuntos: Reyes González Belén

Rivas Godoy Yadira

Integrantes: Cuéllar Chávez Eduardo de Jesús

García Tapia Jesús Eduardo

Miranda Meraz Areli Gissell

Ramírez Maciel José Antonio

Saldaña Morales Ricardo

Grupo: 9249

Fecha: 02/DIC/2021

1. Resuelva lo siguiente:

a) Suponga que la función de riesgo de asociada a un tiempo de supervivencia es una función lineal $h(t) = a + bt$ donde \$ a > 0\$ y $b \in \mathbb{R}$. Obtenga: $S(t)$, $F(t)$, $f(t)$, $h(t)$, y la media, mediana y moda de la distribución. Grafique las funciones.

b) Supongo que una función de supervivencia está definida por $S(t) = exp(-t^\gamma)$ para $0 \leq t$. Obtenga su función de densidad $f(t)$ y su función de riesgo $h(t)$.

Solución

a) Sea $h(t) = a + bt$

Como

$$
\begin{aligned}
H(t) &= \int_0^t h(u)du \\
\implies H(t) &= \int_0^t a + budu = au|_0^t + \frac{bu^2}{2}|_0^t = at + \frac{bt^2}{2}
\end{aligned}
$$

Veamos $S(t)$,

$$S(t) = e^{\int_0^t h(u)du} = e^{-H(t)} = e^{-(at+\frac{bt^2}{2})}$$

Ahora,veamos $F(t)$, como

$$
\begin{aligned}
S(t) &= 1 - F(t) \\
\implies F(t) &= 1 - S(t) = 1 - e^{-(at+\frac{bt^2}{2})}
\end{aligned}
$$

Por otro lado, como

$$
\begin{aligned}
&F'(t) = f(t) \\
&\implies \frac{d\left(1 - e^{-\left(at+\frac{bt^2}{2}\right)}\right)}{dt} = f(t) = -\left(-\left(a + \frac{2bt}{2}\right)e^{\left(at+\frac{bt^2}{2}\right)}\right) = (a+bt)e^{-\left(at+\frac{bt^2}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

De manera alternativa,

$$f(t) = h(t)e^{\int_0^t h(u)du} = h(t)S(t) = (a+bt)e^{-\left(at+\frac{bt^2}{2}\right)}$$

Veamos la media:

$$\int_0^\infty t(a+bt)e^{-\left(at+\frac{bt^2}{2}\right)dt}$$

Haciendo cambio de variable, sea $u = \frac{bt^2}{2} + at \implies du = (a+bt)dt, \quad$ despejando t

$$\frac{bt^2}{2}+at-u=0 \implies \frac{a+\sqrt{a^2-4\left(\frac{b}{2}\right)(-u)}}{2\left(\frac{b}{2}\right)}=x$$

(Nos quedamos con el signo positivo por el soporte)

$$\implies \frac{a+\sqrt{a^2+2bu}}{b}=x$$

$$\implies \mathbb{E}(X)=\int_0^\infty \left[\frac{a+\sqrt{a^2+2bu}}{b}\right]e^{-u}du$$

$$=\frac{a}{b}\int_0^\infty e^{-u}du+\frac{1}{b}\int_0^\infty \sqrt{a^2+2bu}e^{-u}du$$

$$=-\frac{a}{b}e^{-u}|_0^\infty+\frac{1}{b}\int_0^\infty \sqrt{a^2+2bu}e^{-u}du$$

$$=-\frac{a}{b}\left[\lim_{u\to\infty} e^{-u}-e^0\right]+\frac{1}{b}\int_0^\infty \sqrt{a^2+2bu}e^{-u}du$$

$$=-\frac{a}{b}[0-1]+\frac{1}{b}\int_0^\infty \sqrt{a^2+2bu}e^{-u}du$$

$$=\frac{a}{b}+\frac{1}{b}\int_0^\infty \sqrt{a^2+2bu}e^{-u}du \quad (1)$$

Sea

$$y=\frac{(a^2+2bu)^{\frac{3}{2}}}{3b}$$

$$\implies dy=\sqrt{a^2+2bu}du$$

$$\implies 3by=(a^2+2bu)^{\frac{3}{2}}$$

$$\implies (3by)^{\frac{3}{2}}=a^2+2bu$$

$$\implies \frac{(3by)^{\frac{3}{2}}-a^2}{2b}=u$$

Dado lo anterior, continuamos desarrollando donde nos quedamos en (1)

$$=\frac{1}{b}\int_{\frac{a^3}{b}}^\infty e^{-\left[\frac{(3by)^{\frac{3}{2}}-a^2}{2b}\right]}dy$$

$$=\frac{1}{b}\int_{\frac{a^3}{b}}^\infty e^{-\frac{(3by)^{\frac{3}{2}}}{2b}}e^{\frac{a^2}{2b}}dy$$

$$=\frac{1}{b}e^{\frac{a^2}{2b}}\int_{\frac{a^3}{b}}^\infty e^{-\frac{(3by)^{\frac{3}{2}}}{2b}}dy$$

$$\therefore \mathbb{E}[X]=\frac{a}{b}+\frac{1}{b}e^{\frac{a^2}{2b}}\int_{\frac{a^3}{b}}^\infty e^{-\frac{(3by)^{\frac{3}{2}}}{2b}}dy$$

Lo dejamos expresado solamente, debido a que no se puede integrar.

Ahora veamos la moda:

**

$$
\begin{aligned}
& (a+bt)e^{-\left(at+\frac{bt^2}{2}\right)} \\
& = ae^{-\left(at+\frac{bt^2}{2}\right)} + bte^{-\left(at+\frac{bt^2}{2}\right)} \\
\frac{df(t)}{df} & = a(-a-bt)e^{-(at+\frac{bt^2}{2})} + b\left(e^{-at+\frac{bt^2}{2}} + t\left[(-a-bt)e^{\left(at+\frac{bt^2}{2}\right)}\right]\right) \\
& = -(a^2+abt)e^{-(at+\frac{bt^2}{2})} + be^{-at+\frac{bt^2}{2}} - bt(a+bt)e^{-(at+\frac{bt^2}{2})} \\
& = e^{-(at+\frac{bt^2}{2})}(-a^2-abt+b-bat-b^2t^2) \\
& = -e^{-(at+\frac{bt^2}{2})}(a^2+abt-b+bat+b^2t^2) \\
& = -e^{-(at+\frac{bt^2}{2})}(a^2+2abt+b^2t^2-b) \quad (2)
\end{aligned}
$$

Igualando a cero, como $e^{-x} > 0 \quad \forall x$;

$$
\begin{aligned}
(2) = 0 \quad \text{si y solo si} \quad & a^2+2abt+b^2t^2-b = 0 \\
\implies x = & \frac{-2ab \pm \sqrt{(2ab)^2 - 4(b^2)(a^2-b)}}{2b^2} \\
= & -\frac{a}{b} \pm \frac{1}{2b}\sqrt{4a^2b^2 - 4a^2b^2 + 4b} \\
= & -\frac{a}{b} + \frac{1}{2b}\sqrt{4b} \\
t = & -\frac{a}{b} + \frac{2}{2b}\sqrt{b} \quad \text{si b} > 0 \\
t = & -\frac{a}{b} + \frac{1}{\sqrt{b}} > 0 \\
& \text{si y solo si} \quad \frac{1}{\sqrt{b}} > \frac{a}{b} \\
& \text{si y solo si} \quad \sqrt{b} > a \\
& \text{si y solo si} \quad b > a^2 \\
& a^2+2abt+b^2t^2-b > 0
\end{aligned}
$$

**

$$
\begin{aligned}
&- e^{-\left(at+\frac{bt^2}{2}\right)}(a^2+2abt+b^2t^2-b)\\
&= a^2(a+bt)e^{-\left(at+\frac{bt^2}{2}\right)} + 2ab\left(t(a+bt)e^{-(at+\frac{bt^2}{2})} - e^{-\left(at+\frac{bt^2}{2}\right)}\right)\\
&+ b^2\left(t^2(a+bt)e^{-\left(at+\frac{bt^2}{2}\right)} - 2te^{-\left(at+\frac{bt^2}{2}\right)}\right) - b(a+bt)e^{-\left(at+\frac{bt^2}{2}\right)}\\
&= e^{-\left(at+\frac{bt^2}{2}\right)}\left(a^3+a^2bt+2a^2bt+2ab^2t^2-2ab+ab^2t^2+b^3t^3-t-ab-b^2t\right)
\end{aligned}
$$

**

$$= a^3+2a^2bt+2a^2bt+3ab^2t^2+b^3t^3-3b^2t*3ab$$

**

$$
\begin{aligned}
&= (a+bt)(a^2+2abt+b(bt^2-3))\\
t &= -\frac{a}{b}+\frac{1}{\sqrt{b}} \implies bt = -a+\sqrt{b} \implies 2abt = -a^2+2a\sqrt{b}\\
b^2t^2 &= b^2\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{2a}{b^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{b}\right) = a^2-2a\sqrt{b}+b\\
&= (a+\sqrt{b}-a)(a^2-2a^2+2a\sqrt{b}+a^2-2a\sqrt{b}+b-3b)\\
&= (\sqrt{b})(-2b) = -2b^{\frac{3}{2}} < 0\\
&\therefore \text{Es un máximo como *}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a^2+2abt+b^2t^2-b < a^2+2a\\
&-a^2-2abt-b(bt^2-1)\\
&< -2abt-b^2t^2+b\\
&< -2abt+b\\
&< -2abt\\
&< 0
\end{aligned}
$$

Entonces, si $b < 0$ siempre es decreciente, por lo que su máximo es en $t = 0$ (donde empieza). Lo mismo si $b < a^2$; ya que alcanza su máximo en un t < 0; Por lo que de ahí decrece, entonces su máximo sería en $t = 0$.

$$
\begin{gathered}
(2b^{\frac{3}{2}}-a)(a^2-4ab^{\frac{3}{2}}+4b^3-3b)\\
2a^2b^{\frac{3}{2}}-8ab^3+8b^{\frac{a}{2}}-6b^{\frac{5}{2}}-a^3+4a^2b^{\frac{3}{2}}-4ab^3+3ab\\
ba^2b^{\frac{3}{2}}-12ab^3+8b^{\frac{a}{2}}-6b^{\frac{5}{2}}+3ab-a^3
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
ln(0.5) = -at\\
-a^{-1}ln(0.5) = t
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
1-e^{-(at+\frac{bt^2}{2})} = .05 &\Leftrightarrow 0.5 = e^{-}at + \frac{bt^2}{2}\\
&\Leftrightarrow ln(.05) = -at - \frac{bt^2}{2}\\
&\Leftrightarrow -ln(0.5) = at + \frac{bt^2}{2}\\
&\Leftrightarrow \frac{b}{2}\left(t^2 + \frac{2at}{b}\right) = -ln(0.5)\\
&\Leftrightarrow \frac{b}{2}\left(t^2 + \frac{2at}{b} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right) = ln(2)\\
&\Leftrightarrow \frac{b}{2}\left(\left(t + \frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right) = ln(2)\\
&\Leftrightarrow \left(t + \frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{2ln(2)}{b}\\
&\Leftrightarrow \left(t + \frac{a}{b}\right)^2 = \frac{2ln(2)}{b} + \frac{a^2}{b^2}\\
&\Leftrightarrow t + \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{2bln(2) + a^2}{b^2}}\\
&\Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{a^2 + 2bln(2)}b}{b} - \frac{a}{b}\\
&\Leftrightarrow t = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2bln(2)}}{b}\\
\therefore \quad \text{La media es} \quad t = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2bln(2)}}{b}
\end{aligned}
$$

Ahora, como $t > 0$, solo está definido si:

$$-a + \sqrt{a^2 + 2bln(2)} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 2bln(2)} > a$$

Pero, $ln(2) > 0$; $2 > 0$, entonces necesitamos que $b > 0!$, ya que, de lo contrario $\sqrt{a^2 + 2bln(2)} < a$. Ahora, si $b = 0$, se reduce a una exponencial con $\lambda = a$. Si $b < 0$, el soporte debería ser $(0, \frac{a}{-b})$; ya que si $b < 0$ y $t > \frac{a}{-b}$; $at + \frac{bx^2}{2}$ es decreciente.

Veamos que:

$$
\begin{aligned}
at + \frac{bt^2}{2} = 0 &\Leftrightarrow t(a + \frac{bt}{2}) = 0\\
&\Leftrightarrow t = 0 \quad \text{ó} \quad a + \frac{bt}{2} = 0\\
&\Leftrightarrow \frac{bt}{2} = -a\\
&\Leftrightarrow t = \frac{-2a}{b}
\end{aligned}
$$

b) Sabemos que $S(t) = exp(-t^{\gamma})$, entonces obtendremos las funciones que se nos piden.

Función de densidad:

$$
\begin{aligned}
S(t) = exp(-t^{\gamma}) &\implies F(x) = 1 - e^{r^{\gamma}} \\
&\implies f(x) = -e^{-t^{\gamma}} * \left(-\gamma t^{\gamma-1}\right) \\
&= \gamma t^{\gamma-1} e^{-t^{\gamma}} \\
&\therefore \quad \text{la función de densidad es} = \gamma t^{\gamma-1} e^{-t^{\gamma}} \blacksquare \\
&\text{Ahora obtenemos la función de riesgo} \\
&\implies h(t) = \frac{\gamma t^{\gamma-1} e^{-t^{\gamma}}}{e^{-t^{\gamma}}} \\
&= \gamma t^{\gamma-1} \\
&\therefore \quad \text{la función de riesgo es} = \gamma t^{\gamma-1} \blacksquare
\end{aligned}
$$

2. Resume las siguientes distribuciones: Exponencial, Weibull, Log-Normal, Gamma, Gompertz, Log-Logística, Geométrica. (Hint: Ver capítulo 7 del libro: Kleinbaum, D. & Klein, M. (2005) Survival Analysis. A Self-Learning Text. Springer.)

a) ¿Qué distribuciones describen una tasa de riesgo constante?
b) ¿Qué distribuciones describen una tasa de riesgo creciente? Identifica sus diferencias.
c) ¿Qué distribuciones describen una tasa de riesgo decreciente? Identifica sus diferencias.
d) Con R grafique las funciones $S(t)$ y $h(t)$ dando valores fijos para los parámetros de las funciones. (Hint: Revisa la sección 2.4 del libro: Moore, D.F. (2016) Applied Survival Analysis Using R. Use R! Springer.)

Solución

a)
b)
c)
d)