

# Tarea 2 Propiedades de los modelos ARMA

Cuéllar, Eduardo, García Jesús, Miranda Areli, Ramirez José, Saldaña Ricardo

10/26/2021

## Ejercicio 1

1.- Considere el proceso  $MA(2)$ :

$$X_t = Z_t - 0.4Z_{t-1} - 1.2Z_{t-2}$$

donde  $Z_t$  es un ruido blanco Gaussiano.

- (a) Calcule  $\sigma_X^2$  suponiendo que  $\sigma_Z^2 = 1$ .
- (b) Encuentre la expresión general para la función de autocorrelación  $\rho_k$ .
- (c) Grafique  $\rho_k$  (correlograma ACF), para  $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ .
- (d) Encuentre la expresión general para la función de autocorrelación parcial  $\phi_{kk}$ .
- (e) Grafique  $\phi_{kk}$  (correlograma PACF), para  $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ .
- (f) En R simule el proceso  $X_t$  para un tamaño de muestra  $n$ , grafique la serie de tiempo y los correlogramas ACF y PACF. Compare los correlogramas simulados con los del proceso original.

*#Cargamos librerías*

```
library(ggplot2);library(itsmr);library(forecast);library(TSA);library(lmtest)
library(timeSeries);library(timeSeries);library(astsa);
library(tseries);library(forecast);library(nortest)
```

Respuesta:

a)  $Var(X_t) = Var(Z_t - 0.4Z_{t-1} - 1.2Z_{t-2}) \dots (1)$

Como  $Z_k \perp Z_j \forall k \neq j$ , podemos expresar a (1) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &= Var(Z_t) + Var(-0.4Z_{t-1}) + Var(-1.2Z_{t-2}) \\ &= Var(Z_t) + (-0.4)^2 Var(Z_{t-1}) + (-1.2)^2 Var(Z_{t-2}) \dots (2) \end{aligned}$$

Como  $Z_t$  son *v.a.i.i.d.*, con  $\mathbb{E}[Z_t] = 0$  y  $Var(Z_t) = 1$

$$\begin{aligned} (2) &= 1 + (.16)(1) + (1.44)(1) \\ &= 1 + .16 + 1.44 \\ &= 2.6 Cov(Z_t - 1.4Z_{t-1} - 1.2Z_{t-2}, Z_{t+k} - 0.4Z_{t-1+k} - Z_{t-2+k}) \end{aligned}$$

■

b) Veamos la autocovarianza:

$$\begin{aligned}
\gamma(k) &= Cov(X_t, X_{t+k}) \\
&= Cov(Z_t - 0.4Z_{t-1} - 1.2Z_{t-2}, Z_{t+k} - 0.4Z_{t-1+k} - 1.2Z_{t-2+k}) \\
&= Cov(Z_t, Z_{t+k}) - 0.4Cov(Z_t, Z_{t+k-1}) - 1.2Cov(Z_t, Z_{t+k-2}) \\
&\quad - 0.4Cov(Z_{t-1}, Z_{t+k}) + .16Cov(Z_{t-1}, Z_{t+k-1}) + .48Cov(Z_{t-1}, Z_{t+k-2}) \\
&\quad - 1.2Cov(Z_{t-2}, Z_{t+k}) + .48Cov(Z_{t-2}, Z_{t+k-1}) + 1.44Cov(Z_{t-2}, Z_{t+k-2})
\end{aligned}$$

Si  $k = 0$ , entonces:

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= Cov(Z_t, Z_t) + .16Cov(Z_{t-1}, Z_{t+k-1}) + 1.44Cov(Z_{t-2}, Z_{t+k-2}) \\
&= Var(Z_t) + .16Var(Z_t) + 1.44Var(Z_t) \\
&= 2.6 \\
&= Var(X_t).
\end{aligned}$$

Y 0 en los demás, ya que  $Z_j \forall k \neq j$

Si  $k = 1$

$$\begin{aligned}
\gamma(1) &= -0.4Cov(Z_t, Z_{t+1-1}) + .48Cov(Z_{t-1}, Z_{t+1-2}) \\
&= -0.4Cov(Z_t, Z_t) + .48Cov(Z_{t-1}, Z_{t-1}) \\
&= -0.4Var(Z_t) + .48Var(Z_t) \\
&= -0.4 + .48 \\
&= .08
\end{aligned}$$

Si  $k = -1$

$$\begin{aligned}
\gamma(-1) &= -0.4Cov(Z_{t-1}, Z_{t-1}) + .48Cov(Z_{t-2}, Z_{t-1-1}) \\
&= -0.4Cov(Z_{t-1}, Z_{t-1}) + .48Cov(Z_{t-2}, Z_{t-2}) \\
&= -0.4Var(Z_t) + .48Var(Z_t) \\
&= -0.4 + .48 \\
&= .08
\end{aligned}$$

Si  $k = 2$

$$\begin{aligned}
\gamma(2) &= -1.2Cov(Z_t, Z_{t+2-2}) \\
&= -1.2Cov(Z_t, Z_t) \\
&= -1.2Var(Z_t) \\
&= -1.2
\end{aligned}$$

Si  $k = -2$

$$\begin{aligned}
\gamma(-2) &= -1.2Cov(Z_{t-2}, Z_{t-2}) \\
&= -1.2Cov(Z_{t-2}, Z_{t-2}) \\
&= -1.2Var(Z_t) \\
&= -1.2
\end{aligned}$$

Son los únicos  $k$  para los cuales hay un término tal que, en  $Cov(Z_j, Z_i)$  tenemos  $i = j$ , y como  $Z_j \perp Z_i$   
 $\forall j \neq i \implies Cov(Z_j, Z_i) = 0$

$$\therefore \gamma(k) = \begin{cases} 2.6 & k = 6 \\ 0.08 & |k| = 1 \\ -1.2 & |k| = 2 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Entonces, tenemos que:

Para  $k = 1$ :

$$\rho_k = 1$$

Para  $|k| = 1$ :

$$\rho_k = \frac{0.08}{2.6} = \frac{2}{65}$$

Para  $|k| = 2$ :

$$\rho_k = \frac{-1.2}{2.6} = \frac{-6}{13}$$

Para  $|k| > 2$ :

$$\rho_k = 0$$

■

c) Gráfica:

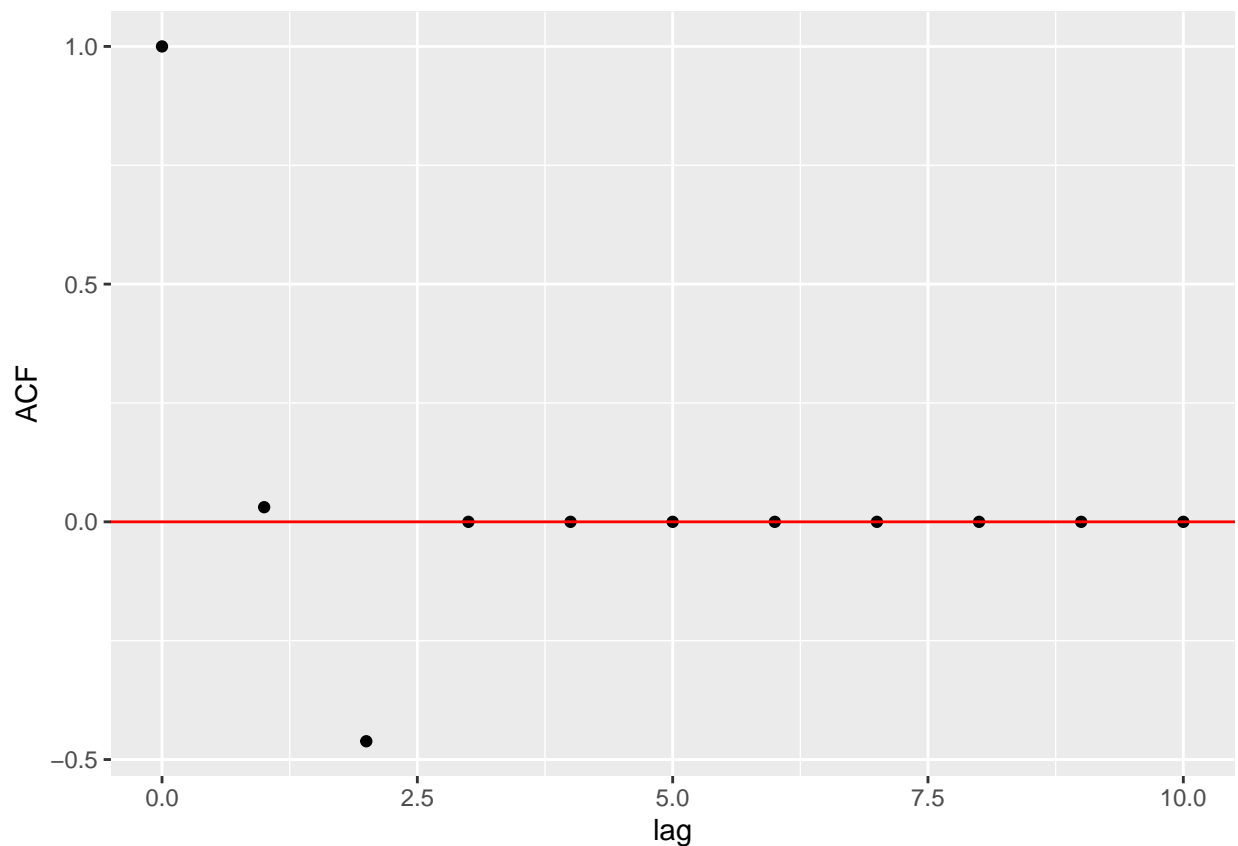
```

acf_coefs_ej1=c(1,2/65,-6/13)
#llenemos de 0 los faltantes
for (i in (length(acf_coefs_ej1)+1):11){
  acf_coefs_ej1[i]=0
}
ACF_1<-data.frame('ACF'=acf_coefs_ej1,lag=0:10)
ACF_1

```

```
##           ACF lag
## 1  1.00000000  0
## 2  0.03076923  1
## 3 -0.46153846  2
## 4  0.00000000  3
## 5  0.00000000  4
## 6  0.00000000  5
## 7  0.00000000  6
## 8  0.00000000  7
## 9  0.00000000  8
## 10 0.00000000  9
## 11 0.00000000 10
```

```
ggplot(ACF_1,aes(x=lag,y=ACF))+geom_point()+geom_abline(intercept = 0,slope=0,color='red')
```



d) Automatizaremos la obtención de los coeficientes del PACF para el ejercicio 1:

```
#x será el vector con los coeficientes de autocorrelación
coefs_pacf<-function(p,k){
  if(k==0){
    return(1)
  }
  if(length(p)<k+1){
    for(i in length(p):k){
      p[i+1]=0
    }
  }
}
```

```

A<-matrix(nrow=k,ncol = k)
for (j in 1:k){
  for (i in 1:k){
    A[i,j]=p[abs(i-j)+1]
  }
}
B<-A
for (i in 1:k){
  B[i,k]=p[i+1]
}
return(det(B)/det(A))
}

```

¿Cómo funciona? Bien, en clase, en la página 27 de las notas, podemos observar que  $\phi_{kk}$ , que es el coeficiente de autocorrelación parcial para un lag de  $k$  se puede calcular usando Cramer. Observamos el patrón de que en la matriz que ‘va en el denominador’, iba el coeficiente  $\rho_i$  donde  $i$  era el valor absoluto de la diferencia entre el número de columna y renglón, por ello es que llenamos la matriz como  $A[i, j] = p[abs(i - j) + 1]$ . En la matriz ‘numerador’, únicamente es cambiar el último renglón por los  $\rho_j$  donde  $j$  es el número de renglón, siendo ambas matrices de dimensión  $k * k$

Ahora solo aplicamos la fórmula:

```

pacf_ej1=c()
for (i in 1:11){
  pacf_ej1[i]<-coefs_pacf(acf_coefs_ej1,i-1)
}
PACF_1=data.frame(PACF=pacf_ej1,lag=c(0:10))
PACF_1

```

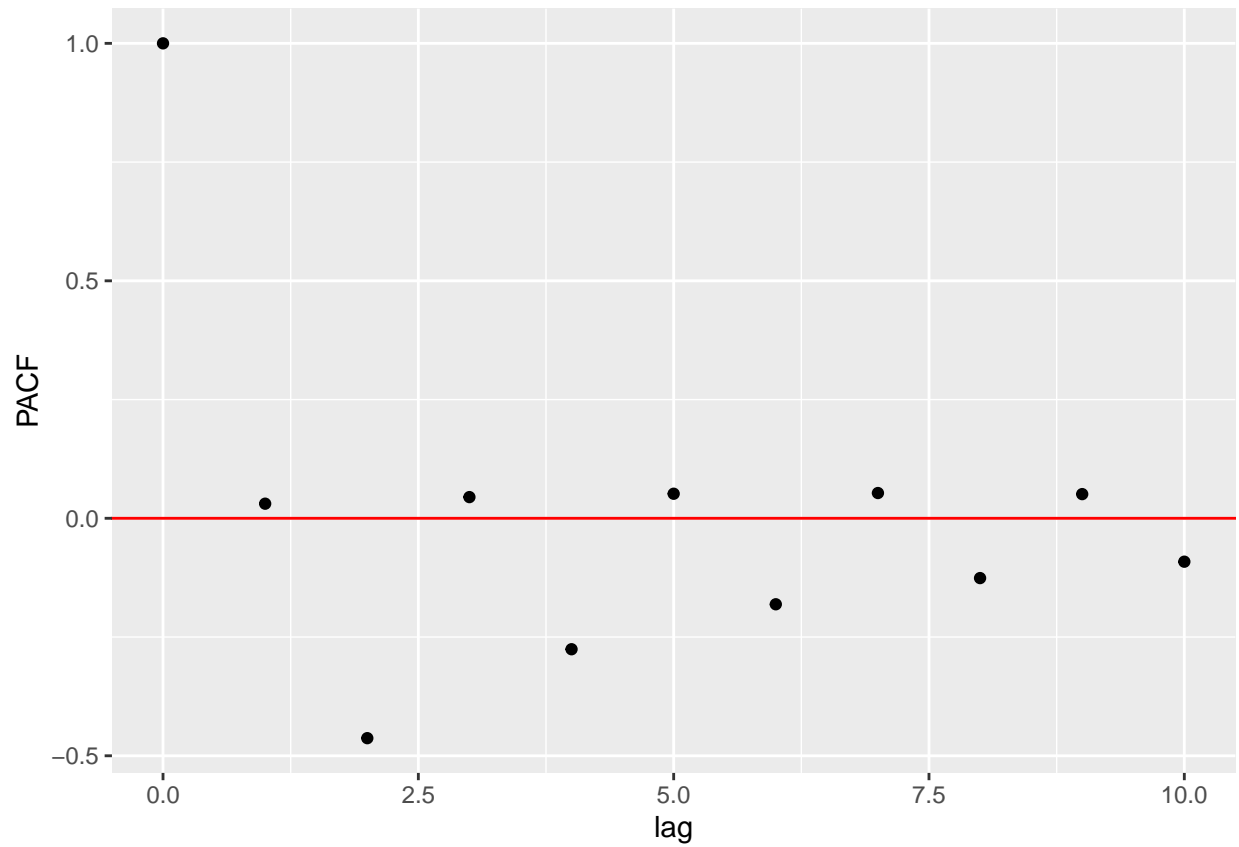
##		PACF	lag
## 1	1.00000000	0	
## 2	0.03076923	1	
## 3	-0.46292348	2	
## 4	0.04461263	3	
## 5	-0.27566723	4	
## 6	0.05170474	5	
## 7	-0.18101857	6	
## 8	0.05318550	7	
## 9	-0.12591880	8	
## 10	0.05090694	9	
## 11	-0.09137468	10	

e) Graficamos

```

ggplot(PACF_1,aes(x=lag,y=PACF))+geom_point()+geom_abline(intercept = 0,slope=0,color='red')

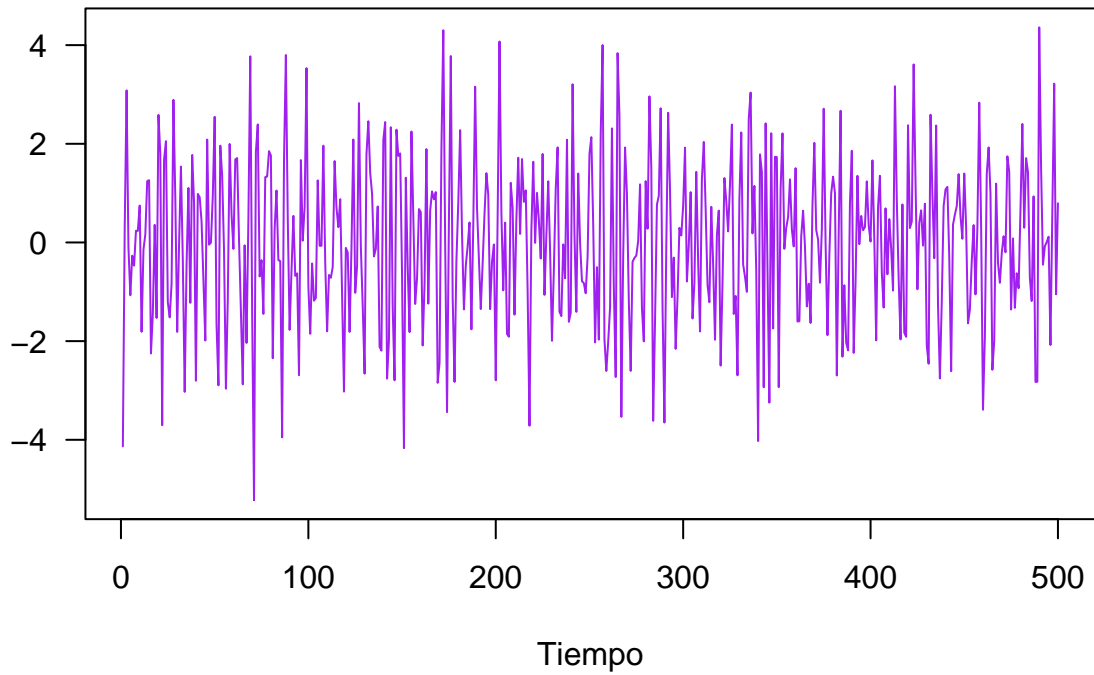
```



f) Simulamos

```
par(mfrow=c(1,1))
MA2=arima.sim(list(order=c(0,0,2), ma=c(-0.4,-1.2)),n=500)
plot(MA2, main="Simulación MA(2)", col="purple", ylab="", las=1, xlab="Tiempo")
```

## Simulación MA(2)

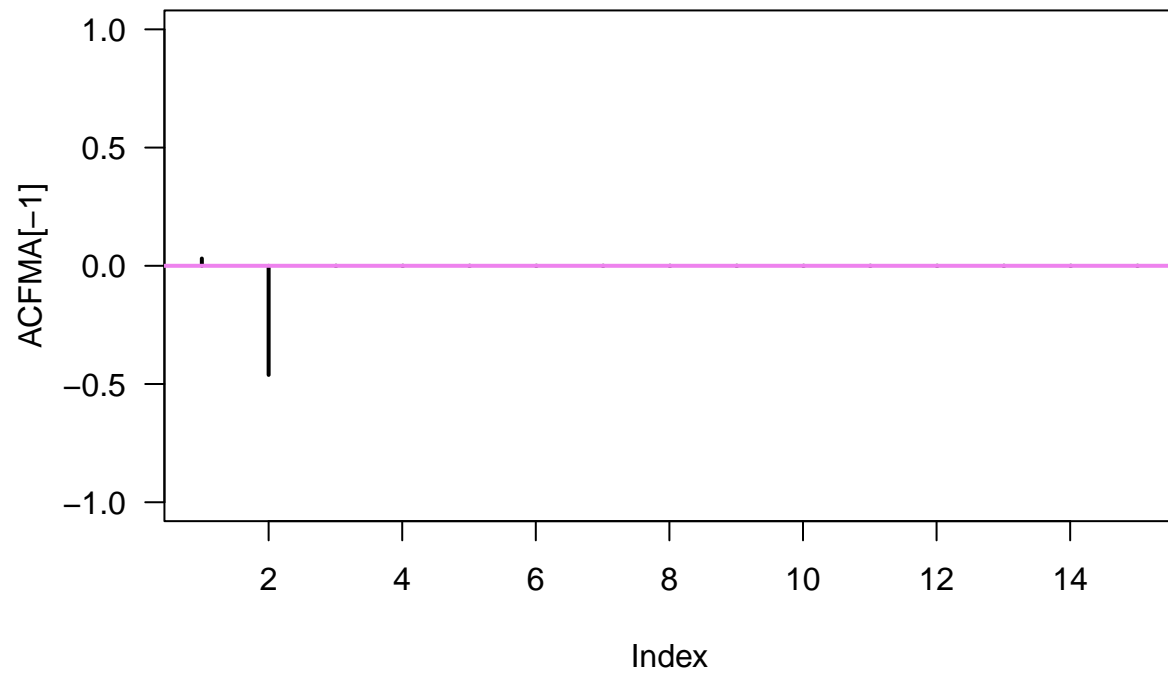


```
# Vamos a calcular el ACF de la muestra simulada
(ACFMA=ARMAacf( ma=c(-0.4,-1.2), ar=0,15))
```

```
##           0           1           2           3           4           5
## 1.00000000 0.03076923 -0.46153846 0.00000000 0.00000000 0.00000000
##           6           7           8           9          10          11
## 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000
##          12          13          14          15
## 0.00000000 0.00000000 0.00000000 0.00000000
```

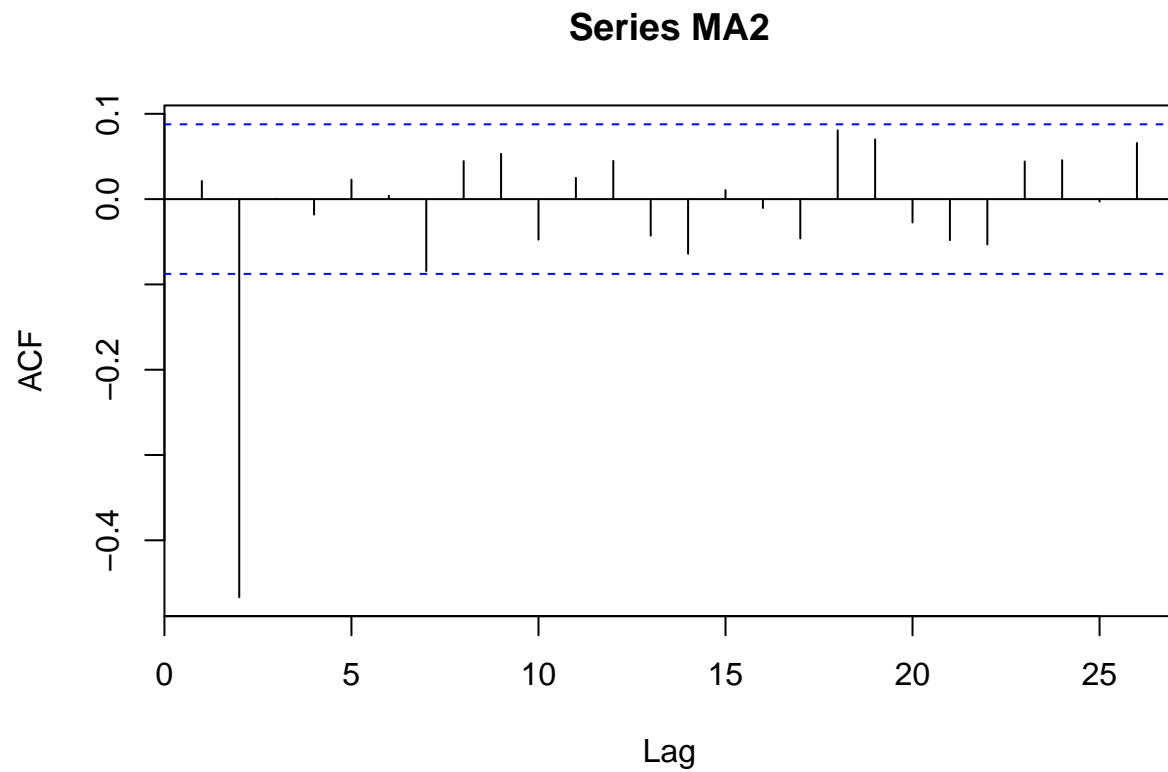
```
plot(ACFMA[-1],type="h", main="ACF de la muestra de un MA(2)", lwd=2, ylim=c(-1,1), las=1)
abline(h=0, lwd=2, col="violet")
```

### ACF de la muestra de un MA(2)



```
acf(MA2)
```



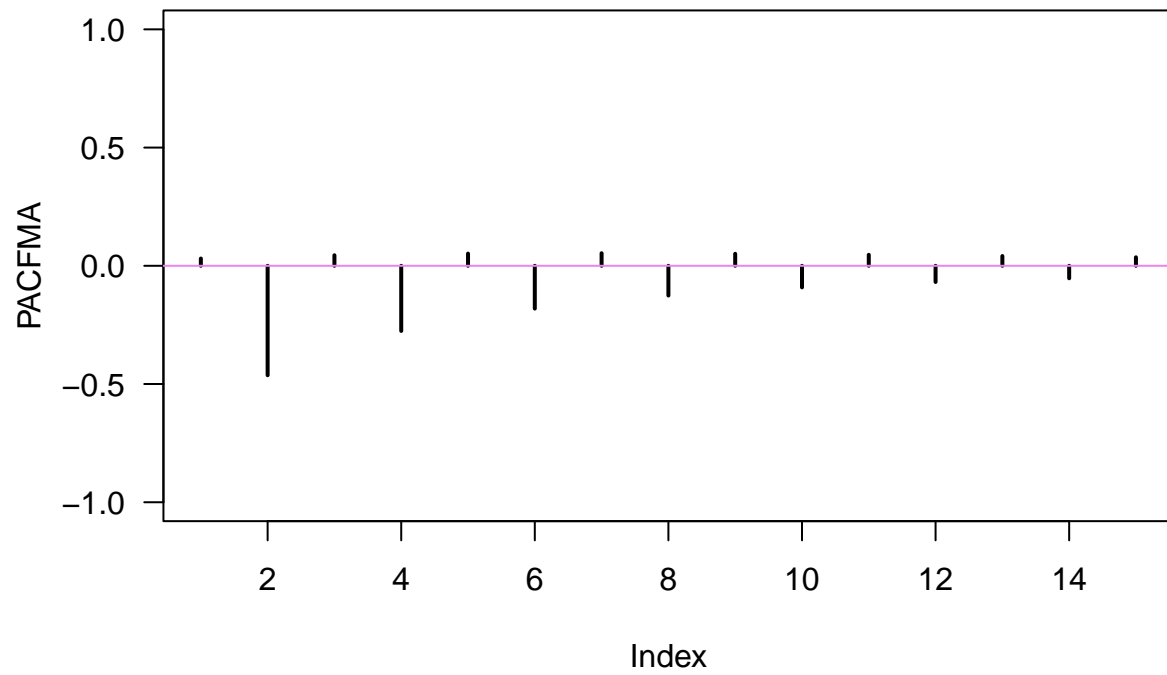


```
# Vamos a calcular el PACF de la muestra simulada
(PACFMA=ARMAacf( ma=c(-0.4,-1.2), ar=0,15, pacf=T))

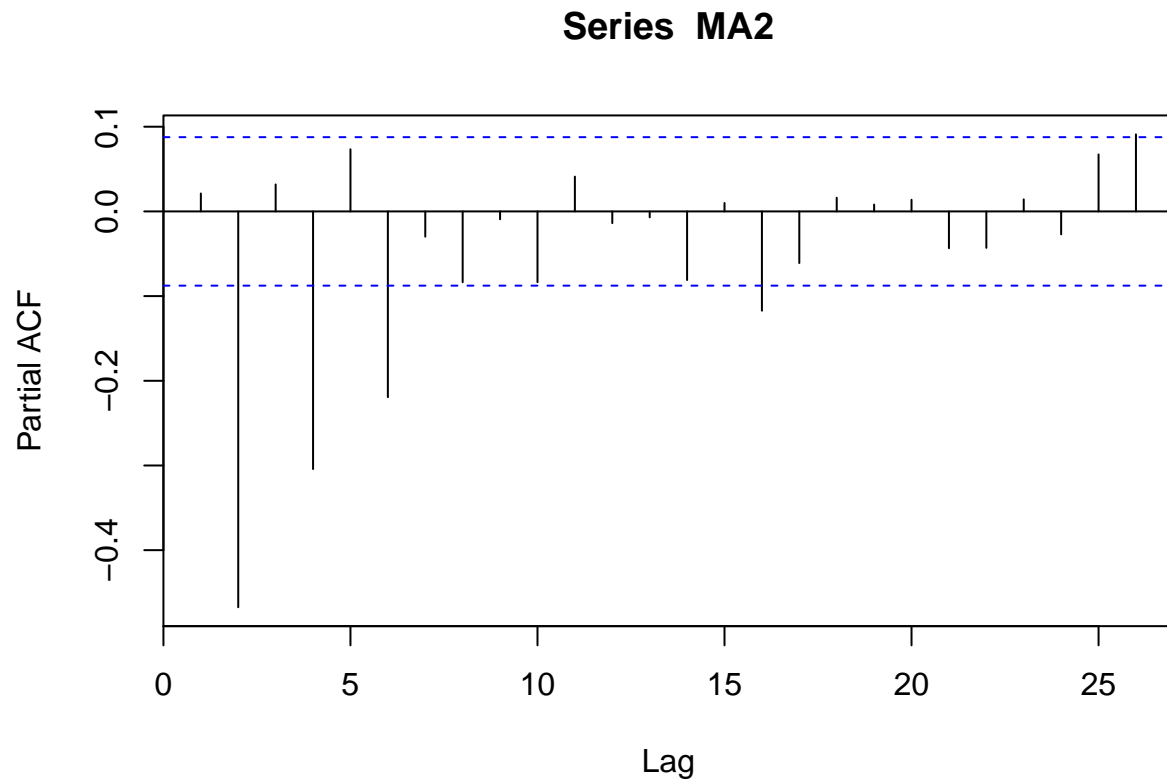
## [1] 0.03076923 -0.46292348 0.04461263 -0.27566723 0.05170474 -0.18101857
## [7] 0.05318550 -0.12591880 0.05090694 -0.09137468 0.04654881 -0.06857228
## [13] 0.04131486 -0.05286052 0.03595283

plot(PACFMA,type="h", main="PACF de la muestra de un MA(2)", lwd=2, ylim=c(-1,1), las=1)
abline(h=0, lwd=1, col="violet")
```

### PACF de la muestra de un MA(2)



```
pacf(MA2)
```



## Ejercicio 2

2.- Considere el proceso  $AR(2)$ :

$$X_t + 0.4X_{t-1} + 0.75X_{t-2} = Z_t$$

donde  $\{Z_t\}$  es un ruido blanco Gaussiano.

- Calcule  $\sigma_X^2$  suponiendo que  $\sigma_Z^2 = 1$ .
- Encuentre la expresión general para la función de autocorrelación  $\rho_k$ .
- Grafique  $\rho_k$  (correlograma ACF), para  $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ .
- Encuentre la expresión general para la función de autocorrelación parcial  $\phi_{kk}$ .
- Grafique  $\phi_{kk}$  (correlograma PACF), para  $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ .
- En R simule el proceso  $X_t$  para un tamaño de muestra  $n$  grafique la serie de tiempo y los correlogramas ACP y PACF. Compare los correlogramas simulados con los del proceso original.

Primero, notemos que el proceso  $AR(2)$  lo podemos ver de la siguiente manera:

$$X_t = -0.4X_{t-1} - 0.75X_{t-2} + Z_t$$

Además, notemos que:  $\phi_1 = -0.4$  y  $\phi_2 = -0.75$ .

Igualmente, las raíces del polinomio de retraso caen fuera del círculo complejo unitario:

```
x<-c(1,0.4,0.75)
raices<-polyroot(x)
#Las raíces son:
raices
```

```
## [1] -0.266667+1.123487i -0.266667-1.123487i
```

```
#Ahora veamos que la norma es:  
norm(cbind(-0.266667,1.123487))
```

```
## [1] 1.123487
```

```
norm(cbind(-0.266667,-1.123487))
```

```
## [1] 1.123487
```

Una vez lo anterior, pasemos al inciso a).

a) En clase vimos lo siguiente:

$$\text{Var}(X_t) = \gamma(0) = \frac{\sigma_Z^2}{1 - \phi_1\rho(1) - \phi_2\rho(2) - \cdots - \phi_p\rho(p)}$$

De esta manera, sabemos que debemos calcular  $\rho(1)$  y  $\rho(2)$ . De igual manera, sabemos que, por lo visto en clase, que para un  $AR(p)$  lo calculamos de la siguiente manera:

$$\rho(k) = \phi_1\rho(k-1) + \phi_2\rho(k-2) + \cdots + \phi_p\rho(k-p)$$

Con  $\rho(0) = 1$  y  $\rho(-k) = \rho(p)$ .

Así, para  $k = 1$  y  $k = 2$  tenemos:

$$\begin{aligned}\rho(1) &= -0.4\rho(0) - 0.75\rho(1) \implies \\ \rho(2) &= -0.4\rho(1) - 0.75\rho(0)\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\rho(1) &= -0.4 - 0.75\rho(1) \implies 1.75\rho(1) = -0.4 \\ \implies \rho(1) &= \frac{-0.4}{1.75} \\ &= \frac{-8}{35}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho(2) &= -0.4\rho(1) - 0.75 \\ \implies \rho(2) &= -0.4\left(\frac{-0.4}{1.75}\right) - .75 \\ &= \frac{-461}{700}\end{aligned}$$

■

Nota: Como necesitamos los coeficientes de autocorrelación, el ejercicio continua después del inciso c), a partir de donde dice “Entonces”.

b) Programamos la función recursiva para los coeficientes de correlación

```

#phi es un vector con los coeficientes del modelo AR(p)
#p es un vector con los acf para lag=1 y 2
coefs_acf<-function(phi,p,k){
  for (i in length(p):k+1){
    p[i]=phi[1]*p[i-1]+phi[2]*p[i-2]
  }
  return(p)
}

```

Aplicamos:

```

coefs_acf_ej2<-c(1,-8/35,-461/700)
phi_ej2<-c(-0.4,-0.75)
coefs_acf_ej2<-coefs_acf(phi_ej2,coefs_acf_ej2,10)
ACF_2=data.frame(ACF=coefs_acf_ej2,lag=c(0:10))
ACF_2

```

```

##          ACF lag
## 1  1.00000000  0
## 2 -0.22857143  1
## 3 -0.65857143  2
## 4  0.43485714  3
## 5  0.31998571  4
## 6 -0.45413714  5
## 7 -0.05833443  6
## 8  0.36393663  7
## 9 -0.10182383  8
## 10 -0.23222294  9
## 11  0.16925705 10

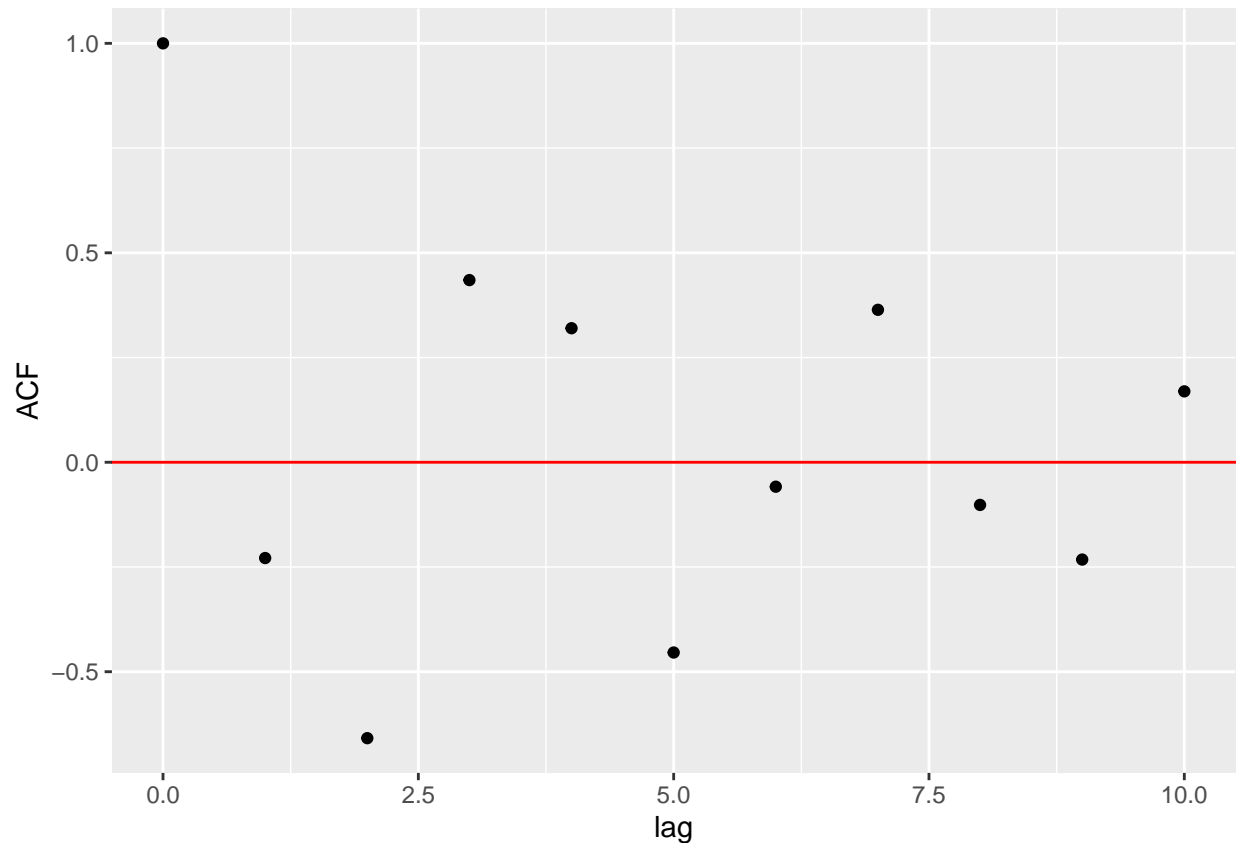
```

c) Gráfica

```

ggplot(ACF_2,aes(x=lag,y=ACF))+geom_point()+geom_abline(intercept = 0,slope=0,color='red')

```



Continuación del inciso a).

Entonces:

```
Var_Xt<-1/(1-sum(phi_ej2*(coefs_acf_ej2[2:3])))
Var_Xt
```

```
## [1] 2.411714
```

d) Sabemos que en un modelo AR(p), solo los primeros p coeficientes del PACF son distintos de 0, es decir, en este caso los primeros 2, para lag=1 y 2. Aplicamos la función escrita anteriormente:

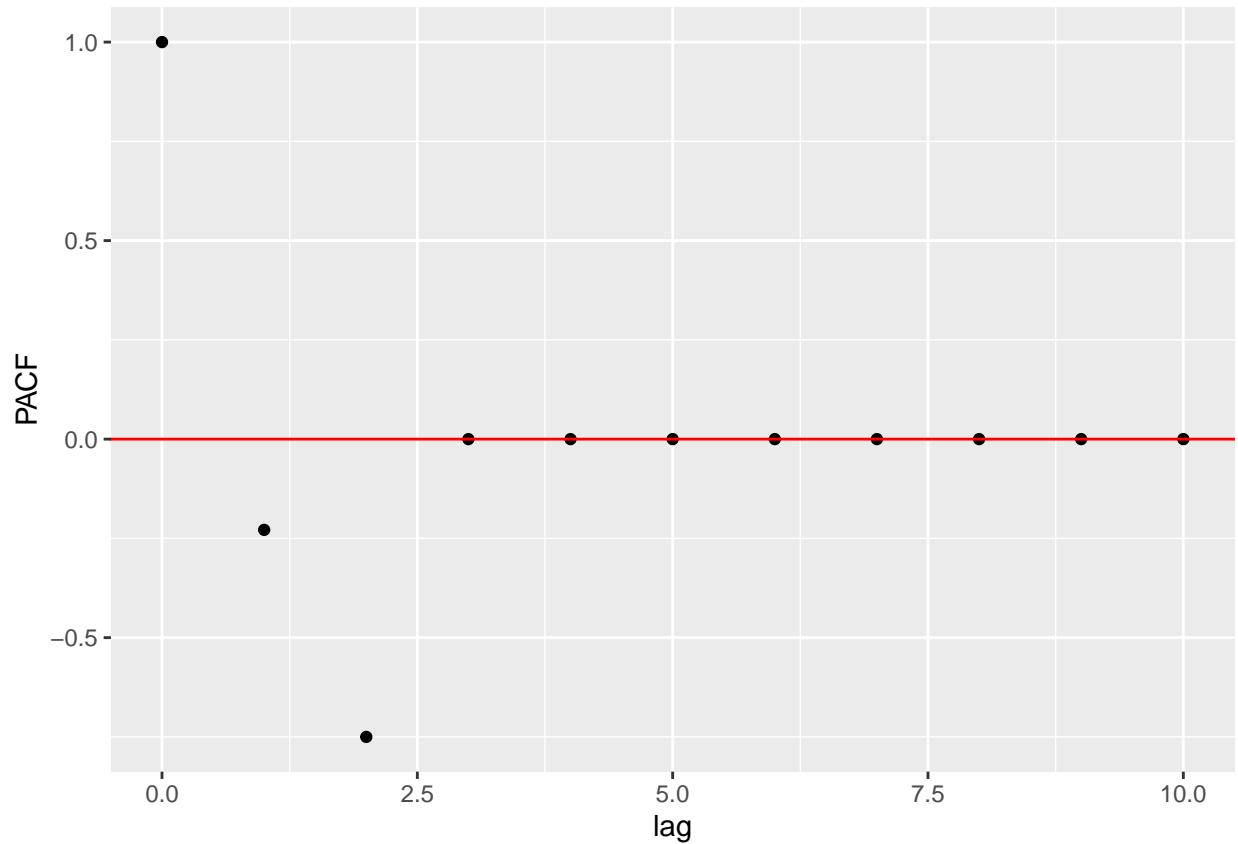
```
pacf_ej2=c()
for (i in 1:3){
  pacf_ej2[i]<-coefs_pacf(coefs_acf_ej2,i-1)
}
for (i in 4:11){
  pacf_ej2[i]<-0
}
PACF_2=data.frame(PACF=pacf_ej2,lag=c(0:10))
PACF_2
```

```
##      PACF lag
## 1  1.000000  0
## 2 -0.228571  1
## 3 -0.750000  2
## 4  0.000000  3
## 5  0.000000  4
## 6  0.000000  5
```

```
## 7 0.0000000 6
## 8 0.0000000 7
## 9 0.0000000 8
## 10 0.0000000 9
## 11 0.0000000 10
```

e) Graficamos

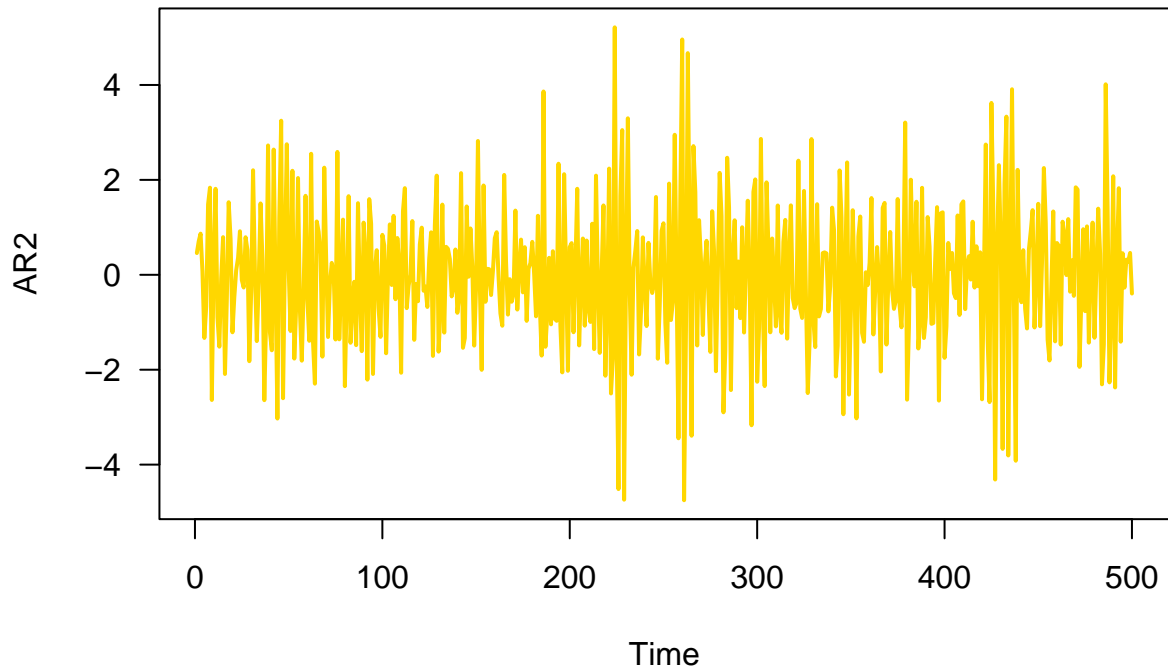
```
ggplot(PACF_2,aes(x=lag,y=PACF))+geom_point()+geom_abline(intercept = 0,slope=0,color='red')
```



f) Simulamos

```
par(mfrow=c(1,1))
# Vamos a calcular el ACF de la muestra simulada
AR2=arima.sim(list(order=c(2,0,0), ar=c(-0.4,-0.75)),n=500)
plot(AR2, main="Simulación AR(2)", col="gold", lwd=2, las=1)
```

## Simulación AR(2)



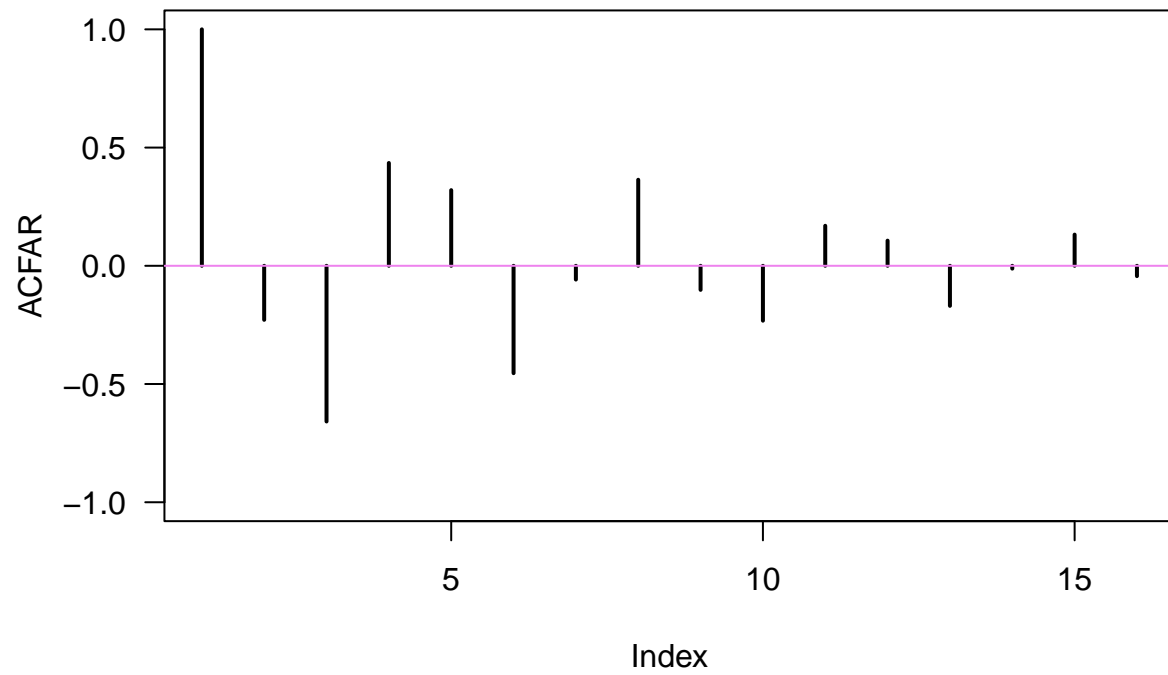
```
(ACFAR=ARMAacf(ar=c(-0.4,-0.75), ma=0,15))
```

```
##          0          1          2          3          4          5
##  1.00000000 -0.22857143 -0.65857143  0.43485714  0.31998571 -0.45413714
##          6          7          8          9         10         11
## -0.05833443  0.36393663 -0.10182383 -0.23222294  0.16925705  0.10646439
##          12         13         14         15
## -0.16952854 -0.01203687  0.13196115 -0.04375681
```

```
plot(ACFAR,type="h", main="PACF de la muestra de un MA(2)", lwd=2, ylim=c(-1,1), las=1)
abline(h=0, lwd=1, col="violet")
```

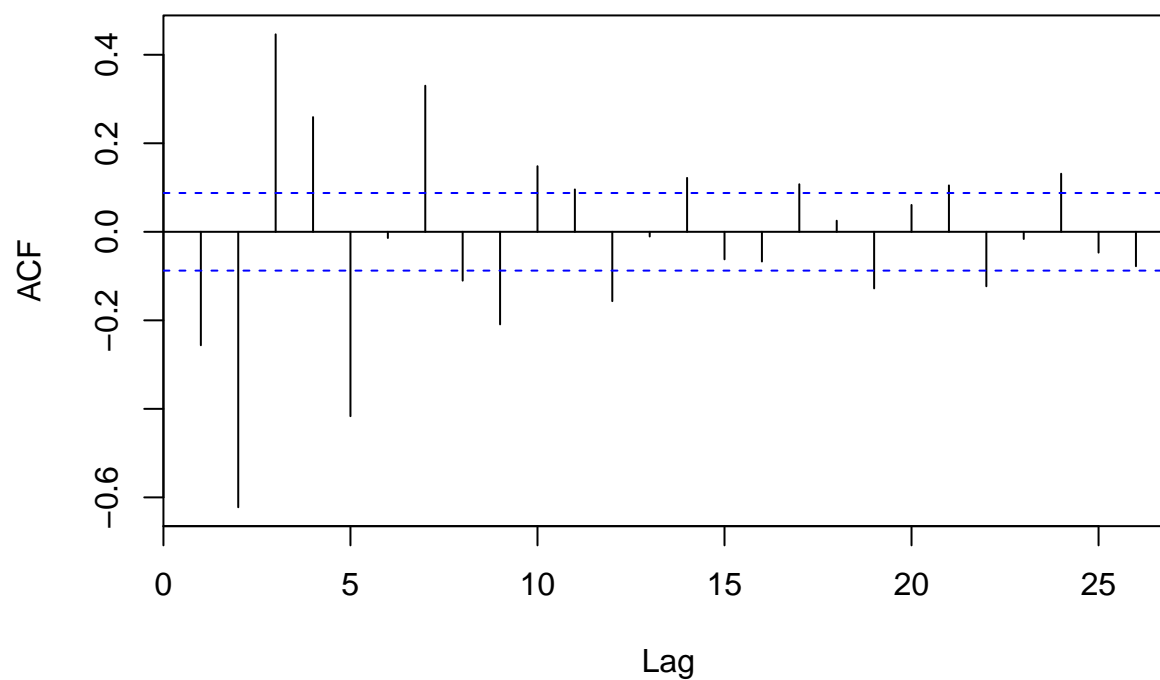


### PACF de la muestra de un MA(2)



acf (AR2)

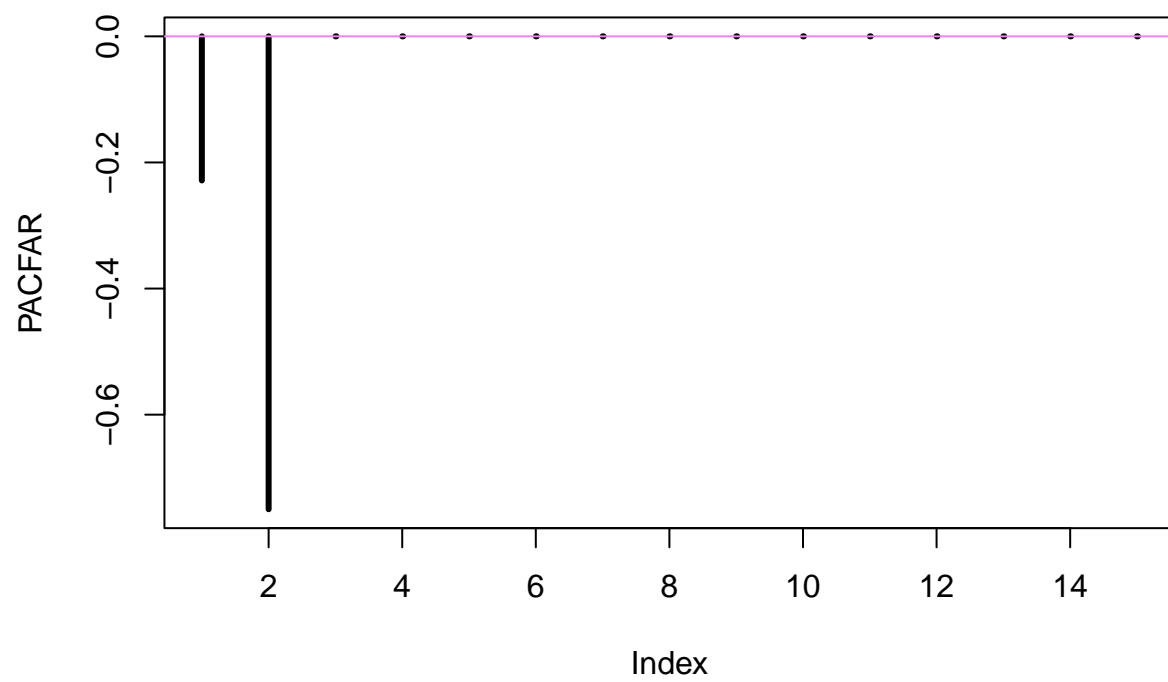
## Series AR2



```
# Vamos a calcular el PACF de la muestra simulada
(PACFAR=ARMAacf(ar=c(-0.4,-0.75), ma=0,15, pacf=T))
```

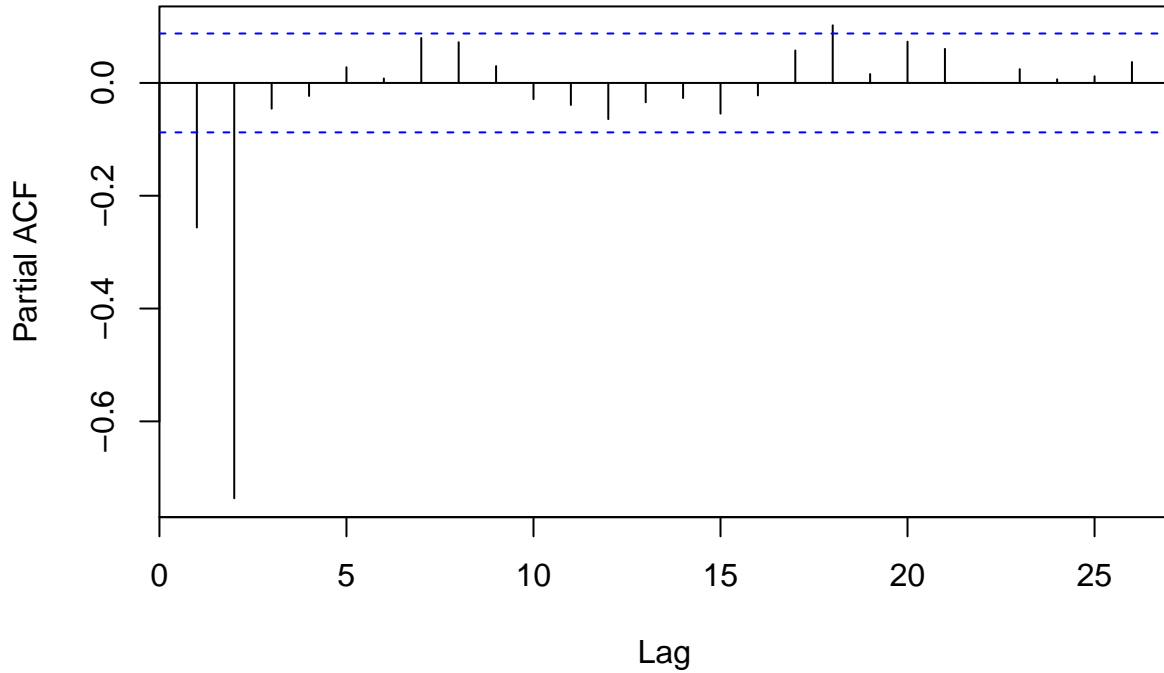
```
## [1] -2.285714e-01 -7.500000e-01 2.677540e-16 2.814762e-16 8.987415e-17
## [6] 1.718906e-17 1.405709e-16 1.673463e-17 2.008155e-17 5.689773e-17
## [11] 4.685696e-17 8.869353e-17 4.351003e-17 6.693851e-17 2.342848e-17
```

```
plot(PACFAR, type="h", lwd=3)
abline(h=0, lwd=1, col="violet")
```



`pacf(AR2)`

## Series AR2



### Ejercicio 3

3.- Considere el siguiente proceso:

$$X_t - 0.6X_{t-1} - 0.2X_{t-2} = Z_t + 0.4Z_{t-1}$$

- Escriba el proceso  $\{X_t\}$  en su forma de polinomio de retraso, donde  $\{Z_t\}$  es un ruido blanco.
- Clasifique el modelo como un  $AR(p)$ ,  $MA(q)$  o  $ARMA(p, q)$  y defina el orden.
- Determina si el proceso es estacionario, invertible o causal.
- Obtenga la representación de un  $AR(\infty)$  y  $MA(\infty)$ , respectivamente, si es que

a)

$$\begin{aligned} Z_t &= X_t - 0.6X_{t-1} - 0.2X_{t-2} - 0.4Z_{t-1} \\ &= X_t - 0.6B_X t - 0.2B^2 X_t - 0.4BZ_t \\ \implies (1 - 0.6B - 0.2B^2)X_t &= Z_t + 0.4BZ_t \\ (1 - 0.6B - 0.2B^2)X_t &= Z_t(1 + 0.4B) \\ X_t &= \frac{(1 + 0.4B)}{(1 - 0.6B - 0.2B^2)} Z_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} Z_t \\ \implies \phi(B)X_t &= \theta(B)Z_t \end{aligned}$$

■

- b) Sabemos que  $X_t$  es un proceso autoregresivo de medias móviles  $\$(ARMA(p,q))$  si

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

Equivalentemente

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i Z_{t-1} + Z_t + \sum_{i=1}^q \theta_i Z_{t-1}$$

Ó

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$$

Así, en nuestro caso

$$X_t - 0.6X_{t-1} - 0.2X_{t-2} = Z_t + 0.4Z_{t-1}$$

es un proceso  $ARMA(2, 1)$ , ya que lo podemos ver como:

$$\begin{aligned} (1 - 0.6B - 0.2B^2)X_t &= (1 + 0.4B)Z_t \\ \implies \phi(B)X_t &= \theta(B)Z_t \end{aligned}$$

con  $\phi(B) = 1 - 0.6B - 0.2B^2$  y  $\theta(B) = 1 + 0.4B$  ■

c) Tenemos por definición de causalidad lo siguiente:

Un proceso  $X_t ARMA(p, q)$  es causal si existe una sucesión  $\psi_j$  y lo podemos escribir como:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-1}$$

Esto quiere decir que el proceso  $\{X_t\}$  puede escribirse como combinación lineal de los  $Z_t$  anteriores y el actual.

Entonces para ver si  $X_t$  es causal, nos centramos en la parte autoregresiva pues la parte  $MA$  es causal por construcción.

Así que calculemos las raíces del polinomio  $\phi(B)$ :

Sea

$$\begin{aligned} \phi(B) &= 1 - 0.6B - 0.2B^2 \\ \implies 1 - 0.6B - 0.2B^2 &= 0 \\ \implies -0.2B^2 - 0.6B + 1 &= 0 \\ B_{1,2} &= \frac{-(-0.6) \pm \sqrt{(-0.6)^2 - 4(-0.2)}}{2(-0.2)} \\ &= \frac{(0.6) \pm \sqrt{1.16}}{-0.4} \end{aligned}$$

Así obtenemos:

$$B_1 = \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}, B_2 = \frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}$$

Como  $|\frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}| > 1$  y  $|\frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}| > 2$ , implica que el proceso es causal, ya que las raíces no caen dentro del círculo unitario.

Ahora para ver si es invertible, veremos la parte de promedios móviles:

$$\theta(B) = 1 + 0.4B$$

$$\implies 1 + 0.4B = 0$$

$$\implies B = \frac{-1}{0.4}$$

Sea  $|\frac{-1}{0.4}| > 1$ , esto implica que el proceso es invertible ya que B no cae cierto del círculo unitario.

$\therefore$  El proceso  $X_t$  es invertible y causal ■

d)