



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

# MODELO GARCH PARA SERIES DE TIEMPO

PROYECTO SERIES DE TIEMPO

*Modelos de Supervivencia y Series de Tiempo*

Autores:

Cuéllar Chávez Eduardo de Jesús

García Tapia Jesús Eduardo

Miranda Meraz Areli Gissell

Ramirez Maciel José Antonio

Saldaña Morales Ricardo

Noviembre 2021

# Contents

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>2</b>
1.1	Intuición e historia del modelo: Series financieras. . . . .	2
1.1.1	El problema del ARMA para las series financieras . . . . .	2
1.2	ARCH como predecesor del GARCH . . . . .	2
1.2.1	Efecto ARCH . . . . .	3
1.2.2	Determinación del orden . . . . .	3
1.2.3	Especificación de la ecuación de la media . . . . .	3
1.2.4	Verificación de supuestos . . . . .	3
1.2.5	Fortalezas y debilidades del ARCH . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Desarrollo</b>	<b>5</b>
2.1	Definición del GARCH y supuestos . . . . .	5
2.1.1	Estimación del orden $p, q$ de un modelo GARCH . . . . .	5
2.1.2	Comprobación de supuestos . . . . .	5
2.1.3	Fortalezas y debilidades del GARCH . . . . .	6
2.2	Procesos GARCH modificados . . . . .	6
2.2.1	The exponential GARCH model (EGARCH) . . . . .	6
2.2.2	The integrated GARCH model (IGARCH) . . . . .	7
2.2.3	The Fractionally Integrated GARCH model (FIGARCH) . . . . .	7
2.2.4	El modelo THRESHOLD GARCH (TGARCH) . . . . .	8
2.2.5	The GARCH-M (mean) model (GARCH-M) . . . . .	9
2.2.6	The asymmetric power ARCH model (APARCH) . . . . .	9
2.2.7	The Nonsymmetric GARCH model (NS-GARCH) . . . . .	10
2.2.8	Modelos ARIMA( $p_A, d, q_A$ )/GARCH( $p_G, q_G$ ) . . . . .	11
2.2.9	Otro modelo GARCH . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Ejemplo</b>	<b>12</b>
3.0.1	Historia . . . . .	12
3.0.2	Análisis Descriptivo . . . . .	12
3.1	AFC de los rendimientos . . . . .	13
3.2	Efecto ARCH . . . . .	14
3.3	¿Es estacionaria la serie? . . . . .	14
3.4	Modelación . . . . .	14
3.4.1	Primeros modelos candidatos . . . . .	14
3.5	Modificación de los primeros candidatos . . . . .	15
3.6	Candidatos finales . . . . .	15
3.7	Forecasting . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Conclusión</b>	<b>17</b>
4.0.1	Conclusión procesos GARCH modificados . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Bibliografía</b>	<b>18</b>

# 1 Introducción

## 1.1 Intuición e historia del modelo: Series financieras.

### 1.1.1 El problema del ARMA para las series financieras

Es bien sabido que las series financieras presentan propiedades estadísticas que, de manera empírica, se ha comprobado su consistencia en el sentido de que son bastante recurrentes en estas; algunas de las que podemos destacar son: Colas pesadas, asimetría, clústeres de volatilidad y dependencia serial sin correlación. El problema con estas propiedades, es que no podían ser capturadas con modelos lineales tradicionales tales como los estudiados en clase (SARIMA).

¿Qué otra razón nos impide usar dicho modelo? Si trabajamos con los rendimientos logarítmicos, definidos como  $Z_t := \ln(\frac{X_t}{X_{t-1}})$  donde  $X_t$  es el precio del activo analizado en la serie de tiempo, la cual es típicamente modelada como una serie de tiempo estacionaria, y le ajustamos un modelo ARMA, este tendría la propiedad de que la varianza condicional  $h_t$  de la serie  $Z_t$  dada la información de la serie hasta  $t$  (Es decir,  $h_t := \{\sigma_t^2 | Z_s, s < t\}$ ), son independientes de  $t$  y de  $Z_s, s < t$ ; en palabras sencillas, la varianza condicional dado el pasado, es constante. Sin embargo, un simple vistazo o análisis gráfico superficial de esta transformación de la serie nos muestra que la mayoría de los rendimientos logarítmicos no cumplen esta propiedad, de manera empírica en la realidad; esto lo podemos ilustrar a través de un ejemplo sencillo: Supongamos que estamos en finales de febrero de 2020 y vemos que la volatilidad de dichos retornos crece cada vez más, hasta que llegamos a finales de marzo, donde se presentó una volatilidad altísima: El modelo ARMA no puede capturar esta información, dado que posee varianza constante.

Es aquí cuando entra el ARCH: Necesitamos mejores modelos para modelar esta volatilidad característica que carece de comportamiento constante.

Es en 1982 cuando Engle propone el modelo ARCH (Modelos autorregresivos de heterocedasticidad condicional).

## 1.2 ARCH como predecesor del GARCH

Primero introduzcamos un poco de notación que usaremos:

$$\mu_t = \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1})$$

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(X_t | \mathcal{F}_{t-\infty})$$

Es decir; la esperanza y varianza condicional respectivamente de la serie a tiempo  $t$  dada la información hasta tiempo  $t - 1$  (Esto nos recuerda un poco a la idea de una filtración)

En el modelo de Engle, propuesto en 1982, provee una estructura sistemática para la modelación de la volatilidad:, siguiendo dos ideas básicas:

Lo que se hace en este modelo es incorporar la secuencia  $\{\sigma_t\}$  al modelo.

$X_t$  es un proceso ARCH(q) si:

$$X_t = \sigma_t \epsilon_t$$

Donde:

$$\sigma_t = \sqrt{\alpha_0 + \sum_i \alpha_i X_{t-i}^2}$$

Donde  $\{\epsilon_t\}$  es una secuencia de variables independientes idénticamente distribuidas con varianza 1 y media 0. (En la práctica se asume que sigue una distribución t de student o normal; aunque también de vez en cuando alguna distribución sesgada)

Además de que  $\alpha_0 > 0; \alpha_i \geq 0 \forall i > 0$ . Lo único que deben satisfacer dichos coeficientes son condiciones de regularidad para asegurar que la varianza incondicional de  $X_t$  sea finita.

De la estructura de este modelo, es visible que si tenemos una secuencia pasada  $\{X_{t-i}^2\}_{i=1}^m$  cuyos valores son grandes, entonces esto implica una varianza condicional  $\sigma_t^2$  grande para el proceso  $X_t$  (a tiempo  $t$ ). Consecuentemente,  $X_t$  **tiende** a asumir un valor grande (en módulo/valor absoluto). En palabras más simples: Bajo el esquema del ARCH, grandes valores de  $X_t$  van seguidos de valores grandes de  $X_t$ ; cosa que podemos verificar en las series de tiempo financieras.

### 1.2.1 Efecto ARCH

Para poder aplicar el modelo ARCh hay que trabajar con  $a_t = Z_t - \mu_t$  donde  $Z_t$  eran los retornos logarítmicos y  $\mu_t$  la media condicional a tiempo  $t$  dada la información hasta tiempo  $t-1$ . Se debe revisar la heterocedasticidad condicional a  $a_t^2$  (el llamado *Efecto GARCH*). Dos test están disponibles:

1. Ljung-Box: La hipótesis nula es que los primeros  $m$  lags del ACF de  $a_t^2$  son 0.
2. La prueba para heterocedasticidad condicional de los multiplicadores de Lagrange propuesta por Engle: Es equivalente a la prueba F para probar si los coeficientes son distintos de cero en una regresión lineal, en este caso  $a_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2 + e_t$  donde  $e_t$  es el error. La hipótesis nula es que los  $\alpha_i = 0 \forall i \in \{0, \dots, m\}$

En ambos casos, nos interesa rechazar la hipótesis nula

### 1.2.2 Determinación del orden

Si se encuentra un efecto ARCH significativo, uno puede usar el PACF de  $X_t^2$  para determinar el orden del ARCH. Esto se justifica por lo siguiente:

Dado que  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2$ , esperamos que  $X_t^2$  esté linealmente relacionada con  $X_{t-1}^2, \dots, X_{t-m}^2$  de una manera similar a aquella en un proceso autorregresivo de orden  $p$ .

### 1.2.3 Especificación de la ecuación de la media

Para la mayoría de las series de rendimiento de activos, las correlaciones seriales son débiles, si las hay. Por lo tanto, construir una ecuación de media equivale a eliminar la media de la muestra de los datos si la media de la muestra es significativamente diferente de cero. Para algunas series de devoluciones diarias, es posible que se necesite un modelo AR simple. En algunos casos, la ecuación de la media puede emplear algunas variables explicativas, como una variable indicadora para efectos de fin de semana o enero. Como se mencionó anteriormente, para los rendimientos logarítmicos mensuales de las acciones de Intel, la ecuación media consiste únicamente en una constante.

### 1.2.4 Verificación de supuestos

Hay que revisar que  $\bar{X}_t = \frac{X_t}{\sigma_t}$  sea una secuencia de variables independientes idénticamente distribuidas (Que podemos checar con un Ljung-Box test). Además de ver que siguen la distribución propuesta

### 1.2.5 Fortalezas y debilidades del ARCH

Como se discutió en la subsección anterior, los modelos ARCH tienen varias ventajas para analizar la rentabilidad de los activos.

Las fortalezas clave son las siguientes:

- El modelo puede producir conglomerados de volatilidad.

- Los amortiguadores del modelo tienen colas pesadas.

Los modelos también tienen algunas debilidades:

- El modelo asume que los choques positivos y negativos tienen los mismos efectos sobre la volatilidad porque depende del cuadrado de los choques anteriores. En la práctica, es bien sabido que el precio de un activo financiero responde de manera diferente a los choques positivos y negativos.
- El modelo ARCH es bastante restrictivo. La restricción se vuelve complicada para los modelos ARCH de orden superior. En la práctica, limita la capacidad de los modelos ARCH con innovaciones gaussianas para capturar el exceso de curtosis.
- El modelo ARCH no proporciona ninguna nueva perspectiva para comprender el origen de las variaciones de una serie de tiempo financiera. Simplemente proporciona una forma mecánica de describir el comportamiento de la varianza condicional. No da ninguna indicación sobre las causas de tal comportamiento.
- Es probable que los modelos ARCH predigan en exceso la volatilidad porque responden lentamente a grandes shocks aislados en la serie de rentabilidad.
- Un posible sobreajuste, que algunos parámetros terminen siendo no significantes, complejidad al momento de implementar el modelo para forecasting o de estimar los parámetros.

**Nota 1.1.** Con choque nos referimos a  $a_t = \sigma_t \epsilon_t$  y se llaman así por su origen en la econometría: Originalmente, representaban fuerzas exógenas primitivas que son significativas económicamente (O en palabras más simples de acuerdo a Green: Eventos cualitativos en una economía que impactan un proceso o las variables/términos de error de un modelo).

## 2 Desarrollo

### 2.1 Definición del GARCH y supuestos

Si  $X_t$  es la serie de retornos logarítmicos, definimos el **shock** como  $a_t = X_t - \mu_t$ , donde  $a_t$  sigue un modelo GARCH(p,q) si:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t$$

con:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

De donde vemos que  $\{\epsilon_t\}$  es una variable iid con esperanza cero y varianza igual a 1. Así mismo podemos notar que  $\alpha_0 \geq 0, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0$  y además  $\sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$ . Cabe aclarar que  $\alpha_i = 0$  para  $i > p$  y  $\beta_j = 0$  para  $j > q$ .

Ahora, la restricción en  $\alpha_i + \beta_i$  implica que la varianza de  $a_t$  es finita. Por otro lado, la varianza condicional de  $\sigma_t^2$  cambia con el tiempo.

En cuanto a  $\epsilon_t$  vemos que sigue una distribución normal estándar o una t distribution estándar.

Para entender las propiedades del modelo GARCH usaremos la siguiente representación. Sea  $\eta_t = a_t^2 - \sigma_t^2$  entonces  $\sigma_t^2 = a_t^2 - \eta_t$ , además  $\sigma_{t-i}^2 = a_{t-i}^2 - \eta_{t-i}$  con  $i = 0, \dots, s$ . Así entonces podemos reescribir el modelo GARCH como:

$$a_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) a_{t-i}^2 + \eta_t - \sum_{j=1}^s \beta_j \eta_{t-j}$$

Es fácil ver que  $\{\eta_t\}$  es una diferencia de serie de diferencia martingala (i.e.  $(\eta_t) = 0 \text{ cov}(\eta_t, \eta_{t-j}) = 0 \text{ para } j \geq 1$ ). En general  $\{\eta_t\}$  no es una variable aleatoria iid. La ecuación anterior es un tipo de ARMA para la serie  $a_t^2$ . Entonces el modelo GARCH puede ser considerado como una aplicación del ARMA a la serie  $a_t^2$ . Usando la esperanza incondicional del modelo ARMA, tenemos:

$$E(a_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i)}$$

siempre que el denominador de la fracción sea positivo.

#### 2.1.1 Estimación del orden p,q de un modelo GARCH

El procedimiento de modelaje aplicado al ARCH puede usarse también para construir un modelo GARCH. Sin embargo, existe poco estudio acerca de especificar el orden de un modelo GARCH para series financieras. Solo órdenes pequeños son usados en la mayoría de las aplicaciones, como (1,1), (1,2) o (2,1). En muchas ocasiones el orden p=1, q=1 suele ser adecuado.

#### 2.1.2 Comprobación de supuestos

El modelo ajustado puede ser revisado usando los residuales estandarizados  $\bar{a}_t = \frac{a_t}{\sigma_t}$  y su proceso elevado al cuadrado (es decir,  $\bar{a}_t^2$ )

**2.1.3 Fortalezas y debilidades del GARCH**

En cuanto a las fortalezas y debilidades del modelo GARCH se pueden ver facilmente si nos enfocamos simplemente en el modelo GARCH(1,1) con:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

donde:

$$0 \leq \alpha_1, \beta_1 \leq 1, (\alpha_1 + \beta_1) < 1.$$

Primero, para valores grandes de  $a_{t-1}^2$  o de  $\sigma_{t-1}^2$ , nos da un valor grande de  $\sigma_t^2$ . Es decir, un valor grande de  $a_{t-1}^2$  tiende a ser seguido de otro valor grande de  $a_t^2$ , generando entonces lo que se conoce como el comportamiento de agrupación de volatilidad en series de tiempo financieras. Segundo, podemos ver que si  $1 - 2\alpha_1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2$ , entonces:

$$\frac{E(t^4)}{[E(a_1^2)]^2} = \frac{3[1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2]}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2} > 3$$

En consecuencia, similar al modelo ARCH, la cola de la distribución de un proceso GARCH(1,1) es mas pesada que la de una distribución normal. Tercero, el modelo proporciona una función parametrica simple que puede ser usada para describir la evolución de la volatilidad.

Una ventaja mas es que las predicciones de un modelo GARCH pueden ser obtenidas por medio de métodos similares a los de un modelo ARMA.

**2.2 Procesos GARCH modificados**

**Nota 2.1.** *Las propiedades estadísticas que, de manera empírica, se ha comprobado su consistencia en el sentido de que son bastante recurrentes en estas; son las llamadas "características estilizadas".*

Las siguientes son las llamadas "características estilizadas" asociadas con series de tiempo observadas de rendimientos financieros:

- Las distribuciones marginales tienen colas pesadas,
- Hay persistencia de volatilidad,
- Los rendimientos exhiben gaussianidad agregada,
- Hay asimetría con respecto a las perturbaciones negativas y positivas y,
- La volatilidad exhibe frecuentemente una larga-dependencia de rango.

Para contabilizar las propiedades 4 y 5 se diseñaron los modelos EGARCH y FIGARCH.

**2.2.1 The exponential GARCH model (EGARCH)**

Para permitir que los valores negativos y positivos de la definición del proceso GARCH tengan diferentes impactos en las volatilidades posteriores, es decir,  $h_s$ , ( $s > t$ ), en 1991, Nelson introdujo los modelos EGARCH, ilustrados en lo siguiente.

Sea un proceso  $a_t$ , el cual lo podemos modelar a través de un EGARCH(1,1), definido por las siguientes ecuaciones:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \epsilon_t \sim \text{IID}(0, 1), \quad \text{es decir, media 0, varianza 1.}$$

Donde  $\{\ell_t := \ln \sigma_t^2\}$  es la solución débil y estrictamente estacionaria de:

$$\begin{aligned} \ell_t &= c + \alpha - 1g(\epsilon_{t-1}) + \gamma_1 \ell_{t-1}, \quad \text{con } c \in \mathbb{R}, \alpha_1 \in \mathbb{R}, |\gamma_1| < 1, \\ g(\epsilon_t) &= \epsilon_t + \lambda(|\epsilon_t| - E|\epsilon_t|), \\ \text{y } \epsilon_t &\text{ tiene distribución simétrica al rededor del 0, i.e., } \epsilon_t \stackrel{d}{=} -\epsilon_t. \end{aligned}$$

Como el proceso esta definido en terminos de  $\ell_t$  podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$g(\epsilon_t) = \begin{cases} (1 + \lambda)\epsilon_t - \lambda E|\epsilon_t| & \text{si } \epsilon_t \geq 0, \\ (1 - \lambda)\epsilon_t - \lambda E|\epsilon_t| & \text{si } \epsilon_t < 0 \end{cases}$$

Las propiedades de  $\{g(\epsilon_t)\}$  son:

- $\{g(\epsilon_t)\}$  es independiente e idénticamente distribuido.
- $Eg(\epsilon_t) = 0$ .
- $Var(g(\epsilon_t)) = 1 + \lambda^2 Var(|\epsilon_t|)$ .

Una de las grandes ventajas que ofrecen los EGARCH a través del uso de logaritmos es la no restricción del signo de los posibles valores de los parámetros obteniendo una adaptación de las estimaciones de las volatilidades de las series financieras respecto a su comportamiento real observado en los mercados. Sin embargo, las desventajas de emplear estos modelos se encuentran que las estimaciones de los parámetros pueden resultar no tan simples como las empleadas en otros métodos. De la misma manera entre mayor sea el periodo de tiempo mayores serán los recursos empleados para estimar los parámetros. Además, su no linealidad los conviene en modelos más complejos de utilizar.

### 2.2.2 The integrated GARCH model (IGARCH)

**Nota 2.2.** Para motivar la definición, recordemos que si el polinomio AR de la representación GARCH tiene una raíz unitaria, entonces tenemos un modelo IGARCH (heterocedástico condicional autorregresivo generalizado integrado).

Los modelos IGARCH son modelos GARCH de raíz unitaria. Similar a los modelos ARIMA, una característica clave de los modelos IGARCH es que el impacto de los shocks cuadrados pasados  $\eta_{t-i} = a_{t-i}^2 - \sigma_{t-i}^2$  para  $i > 0$  sobre  $a_t^2$  es persistente.

Veamos que un modelo IGARCH(1,1) puede ser escrito como:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 - \beta_1) a_{t-1}^2,$$

Donde  $\{\epsilon_t\}$  esta definido como antes y  $1 > \beta_1 > 0$ .

Las estimaciones de los parámetros del modelo IGARCH (1,1) no están lejos de las del modelo GARCH (1,1), pero hay una diferencia importante entre los dos modelos. La varianza incondicional de  $a_t$ , por lo tanto la de  $Z_t$ , no se define en el modelo IGARCH (1,1) anterior. Esto parece difícil de justificar para una serie de devoluciones de registros.

### 2.2.3 The Fractionally Integrated GARCH model (FIGARCH)

**Nota 2.3.** Para motivar la definición, recordamos que el proceso GARCH (p, q) es la solución causal estacionaria de las ecuaciones.



Para permitir el decaimiento muy lento del ACF de la muestra que se observa con frecuencia en series de retorno cuadradas diarias largas, se desarrollaron los modelos FIGARCH (GARCH integrado fraccionalmente). Para incorporar la memoria larga a la familia de modelos GARCH, en 1996, Baillie definió un proceso GARCH fraccionalmente integrado (FIGARCH) como una solución causal estrictamente estacionaria de las ecuaciones en diferencias.

Sea un proceso  $Z_t$ , el cual lo podemos modelar a través de un FIGARCH( $p, d, q$ ) para ser una solución causal estrictamente estacionaria de las ecuaciones. Definimos:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad y \quad (1)$$

$$\phi(B)(1-B)^d a_t^2 = \alpha_0 + (1-\beta(B))W_t, \quad 0 < d < 1. \quad (2)$$

Donde  $W_t = a_t^2 - \sigma_t^2, \{\epsilon_t\} \sim \text{IID}(0, 1)$  (es decir, media 0, varianza 1.) y los polinomios  $\phi(z)$  y  $1-\beta(z)$  son distintos de cero para todos los complejos  $z$  tal que  $|z| \leq 1$ . Sustituyendo  $W_t = a_t^2 - \sigma_t^2$  en (2) vemos que es equivalente a la siguiente ecuación:

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{1-\beta(1)} + [1 - (1-\beta(B))^{-1}\phi(B)(1-B)^d] a_t^2,$$

Lo que significa que un proceso FIGARCH( $p, q$ ) puede considerarse como un caso especial de IARCH( $\infty$ ), así:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j a_{t-j}^2, \quad \text{con } a_0 > 0 \quad y \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_j = 1.$$

Por lo que decimos de manera general que, un modelo FIGARCH es un caso generalizado fraccionalmente de un modelo IGARCH.

**Nota 2.4.** *Los siguientes modelos los mencionaremos de manera mas "simple"*

#### 2.2.4 El modelo THRESHOLD GARCH (TGARCH)

Otro modelo de volatilidad comunmente usado para manejar los efectos del apalancamiento es el modelo de umbral heterosdástico condicional autorregresivo generalizado, tambien conocido como modelo TGARCH.

Un modelo TGARCH( $p, q$ ) adquiere la forma:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \gamma_i N_{t-i}) a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Donde  $N_{t-1}$  es un indicador negativo para  $a_{t-i}$  que es:

$$0 \quad \text{si } a_{t-i} \geq 0$$

y  $\alpha_i$  y  $\beta_j$  son parametros no negativos que satisfacen condiciones similares los del modelo GARCH. Del modelo, podemos ver que para una  $a_{t-i}$  positiva, aporta  $\alpha_i a_{t-i}^2$  a  $\sigma_t^2$ , mientras que una  $a_{t-i}$  negativa tiene un mayor impacto  $(\alpha_i + \gamma_i) a_{t-i}^2$  con  $\gamma_i > 0$ . El modelo incluye cero como umbral

para separar los impactos del shocks anterior.

Los TGARCH son procesos estacionarios, lo cual puede comprobarse aplicando el mismo análisis que se llevó a cabo para los modelos ARCH Y GARCH. Los modelos TGARCH ofrecen las siguientes ventajas:

- Heredan las fortalezas de los modelos EGARCH. considerando la asimetría de las volatilidades.
- Incorporan la estimación de la magnitud de las colas, lo cual se traduce en un modelo más refinado respecto a la similitud del comportamiento de las series financieras en la vida real.
- Recuperan la linealidad de los parámetros, lo que ayuda en la interpretación del modelo y en la sencilla estimación de los coeficientes. La definición formal Definición: (Proceso autorregresivo generalizado con heterocedasticidad condicionado de la forma t de Student de orden (p,q))

### 2.2.5 The GARCH-M (mean) model (GARCH-M)

En finanzas, el rendimiento de un activo puede depender de su volatilidad. Para modelar tal fenómeno, uno puede considerar el modelo GARCH-M, donde “M” significa GARCH en la media. Un modelo GARCH (1,1) -M simple se puede escribir como:

$$Z_t = \mu + c\sigma_t^2 + a_t, \quad a_t = \sigma_t\epsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\alpha_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2,$$

donde  $\mu$  y  $c$  son constantes. El parámetro  $c$  se denomina parámetro de prima de riesgo. Una  $c$  positiva indica que el rendimiento está relacionado positivamente con su volatilidad pasada. En la literatura también se han utilizado otras especificaciones de prima de riesgo, que incluyen  $Z_t = \mu + c\sigma_t + a_t$  y  $Z_t = \mu + c\ln(\sigma_t^2) + a_t$ .

La formulación del modelo GARCH-M en la ultima ecuación implica que existen correlaciones seriales en la serie de retorno  $Z_t$ . Estas correlaciones seriales son introducidas por aquellos en el proceso de volatilidad  $\sigma_t^2$ . La existencia de prima de riesgo es, por lo tanto, otra razón por la que algunos rendimientos históricos de acciones tienen correlaciones seriales.

### 2.2.6 The asymmetric power ARCH model (APARCH)

El modelo TGARCH pertenece a la clase de modelos heterocedásticos condicionales autorregresivos de potencia asimétrica (APARCH) de Ding et al. Un modelo APARCH  $(m, s)$  general se puede escribir como:

$$Z_t = \mu_t + a_t, \quad a_t = \sigma_t\epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim D(0, 1)$$

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i(|a_{t-i}| + \gamma_i a_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^\delta,$$

donde  $\mu_t$  es la media condicional,  $D(0, 1)$  denota una distribución con media cero y varianza 1,  $\delta$  es un número real positivo y los coeficientes  $\alpha_0, \alpha_i, \gamma_i$  y  $\beta_j$  satisfacen algunas condiciones de regularidad de modo que la volatilidad es positivo. Similar a los modelos GARCH, el modelo APARCH (1,1) se usa a menudo en la práctica.

Son de interés tres casos especiales de los modelos APARCH.

- Cuando  $\delta = 2$  el modelo APARCH se reduce a un modelo TGARCH.

- Cuando  $\delta = 1$ , el modelo utiliza la volatilidad directamente en la ecuación de volatilidad.
- Cuando  $\delta = 0$  está tomando como límite  $\delta \rightarrow 0$  y en este caso el modelo se convierte en el modelo EGARCH.

La función de potencia en la transformación de la última ecuación se utiliza para mejorar la bondad de ajuste del modelo. Este parece ser un enfoque sensato si uno está interesado en la predicción. Por otro lado, a excepción de algunos valores especiales, parece difícil encontrar una buena interpretación para el parámetro de potencia  $\delta$ .

### 2.2.7 The Nonsymmetric GARCH model (NS-GARCH)

Engle y Ng propusieron otro modelo de la familia GARCH que puede capturar respuestas de volatilidad asimétrica a los shocks positivos y negativos pasados en 1993 y fue estudiado por Duan en 1995. Asume la forma siguiente:

$$\begin{aligned} Z_t &= \mu_t + a_t, a_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim D(0, 1) \\ \sigma_t^2 &= \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 (a_{t-1} - \theta \sigma_{t-1})^2 \end{aligned}$$

donde  $\mu_t$  es la media condicional,  $D(0, 1)$  denota una distribución con media 0 y varianza 1,  $\beta_i$  son parámetros no negativos con  $\beta_0 > 0$  y  $\theta$  es un parámetro de apalancamiento. El modelo en la última ecuación se conoce como un modelo GARCH (1,1) no simétrico o NSGARCH (1,1). Se reduce a un modelo GARCH (1,1) si  $\theta = 0$ .

Para estudiar las propiedades de un modelo NSGARCH(1,1), reescribimos la última ecuación como:

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-1}^2 (\epsilon_{t-1} - \theta)^2. \quad (3)$$

Usando independencia entre  $\epsilon_{t-1}$  y  $\sigma_{t-1}$ , tenemos:

$$\begin{aligned} E(\sigma_t^2) &= \beta_0 + \beta_1 E(\sigma_{t-1}^2) + \beta_2 E(\sigma_{t-1}^2) E(\epsilon_{t-1} - \theta)^2 \\ &= \beta_0 + \beta_1 E(\sigma_{t-1}^2) + \beta_2 E(\sigma_{t-1}^2) (1 + \theta^2). \end{aligned}$$

Si  $Z_t$  es débilmente estacionaria,  $E(\sigma_t^2) = E(\sigma_{t-1}^2)$  y así tenemos:

$$E(\sigma_t^2) = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1 - \beta_2(1 + \theta^2)},$$

que es la varianza incondicional de  $Z_t$ . En consecuencia, requerimos que  $1 - \beta_1 - \beta_2(1 + \theta^2) > 0$  para el modelo NSGARCH (1,1). Multiplicando la ecuación 3 por  $\epsilon_{t-1}$  y teniendo expectativa, obtenemos:

$$E(\epsilon_{t-1} \sigma_t^2) = -2\theta \beta_2 E(\sigma_{t-1}^2) = \frac{-2\theta \beta_0 \beta_2}{1 - \beta_1 - \beta_2(1 + \theta^2)}.$$

Este resultado dice que si  $\theta > 0$  y  $\beta_2 > 0$ , entonces  $\epsilon_{t-1}$  está relacionado negativamente con  $\sigma_t^2$ . Por lo tanto,  $\theta$  es un parámetro de apalancamiento y debería ser positivo. Finalmente, se puede demostrar que, bajo ciertas condiciones, el impacto  $a_t$  de un modelo NSGARCH(1,1) tiene colas pesadas incluso si  $\epsilon_t$  es gaussiano.

**2.2.8 Modelos ARIMA( $p_A, d, q_A$ )/GARCH( $p_G, q_G$ )**

Una deficiencia de los modelos ARCH( $q$ ) es que el proceso de desviación estándar condicional tiene oscilaciones de alta frecuencia con alta volatilidad en ráfagas cortas. Los modelos GARCH permiten una gama más amplia de comportamientos, en particular, una volatilidad más persistente. El modelo GARCH ( $p, q$ ) es:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \text{donde}$$

$$\sigma_t = \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^2}.$$

Debido a que los valores pasados del proceso  $\sigma_t$  se retroalimentan en el valor presente, la desviación estándar condicional puede exhibir períodos más persistentes de volatilidad alta o baja que los observados en un proceso ARCH. El proceso  $a_t$  no está correlacionado con una media y varianza estacionarias y tiene un ACF como un proceso ARMA. Los modelos GARCH incluyen los modelos ARCH como un caso especial, y usamos el término “GARCH” para referirnos a los modelos ARCH y GARCH. Un modelo de series de tiempo muy general permite  $a_t$  ser GARCH( $p_G, q_G$ ) y utiliza  $a_t$  como término de ruido en un modelo ARIMA( $p_A, d, q_A$ ). Los subíndices de  $p$  y  $q$  se distinguen entre los parámetros GARCH(G) y ARIMA(A). A dicho modelo lo llamaremos modelo ARIMA( $p_A, d, q_A$ )/GARCH( $p_G, q_G$ ).

**Nota 2.5.** *En general, podemos mezclar un modelo ARIMA, asumiendo que sus errores siguen un proceso GARCH (o alguna de sus variantes) en lugar de un ruido blanco.*

**2.2.9 Otro modelo GARCH**

El siguiente modelo solo lo mencionaremos:

- GJR GARCH

### 3 Ejemplo

#### 3.0.1 Historia

En el año 2000 el empresario Carlos Slim fundador de Grupo Carso, fundaría su segunda empresa, América Móvil enfocándose únicamente en el servicio de las telecomunicaciones, provocando la separación de los activos y adquiriendo las operadoras como Telcel y Telmex anteriormente pertenecientes a Grupo Carso. El 7 de febrero de 2001 las acciones de la empresa fueron entregados a los accionistas de Telmex.

A inicios del año 2003 América Móvil empieza a realizar una fusión de sus filiales operadoras brasileñas, tales como ATL, BCP, Americel, Tess Celular y Claro Digital con sedes de diferentes ciudades de la república de Brasil, con el fin de renovar y modernizar su nuevo operador en el país, convirtiéndose en el primer operador con el nombre de Claro.

En el año 2006 América Móvil tras tener un alto crecimiento en ingresos anuncia la adquisición del 100% de las acciones de la empresa dominicana Codetel, perteneciente anteriormente a la compañía Verizon.

En agosto del año 2007 América Móvil compraría el cien por ciento de las acciones de la empresa de operador móvil jamaquino Oceanic Digital conocido por controlar la marca Mi Phone.

En los últimos 10 años, las ventas de América Móvil crecieron 67%, al pasar de 607,855 millones de pesos a 1 billón 16,887 mdp. Esto se debió a la transición del negocio de la telefonía fija a los datos móviles y la banda ancha y a la manera en que supo aprovechar su posición de predominio en el mercado.

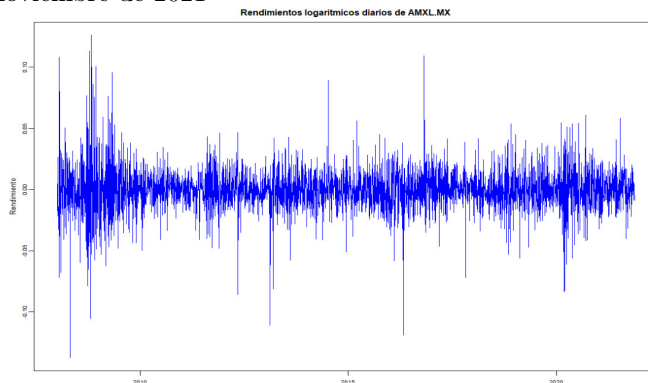
Sin embargo, en la Bolsa la historia es diferente: el valor que los inversionistas le dan a la compañía de telecomunicaciones se ha quedado estancado en la última década.

En los últimos años, incluso ha decrecido. Su precio en el mercado ha caído 30%, a 988,237 millones de pesos (mdp), y se encuentra en la segunda posición de las 145 que cotizan en México.

La caída en el valor de mercado de América Móvil también se refleja en el peso que tiene dentro del índice bursátil más importante de la Bolsa en México, el SP/BMV IPC. Este índice está compuesto por las 35 empresas más importantes del mercado. Y si bien América Móvil sigue siendo la principal, su ponderación —el 'peso' que el valor de sus acciones tiene sobre el total— ha bajado: hace diez años, la empresa de Slim suponía el 25% del IPC, y ahora es de alrededor de 11%.

#### 3.0.2 Analisis Descriptivo

Trabajamos con los rendimientos logarítmicos desde el primero de enero de 2008 hasta el 18 de noviembre de 2021



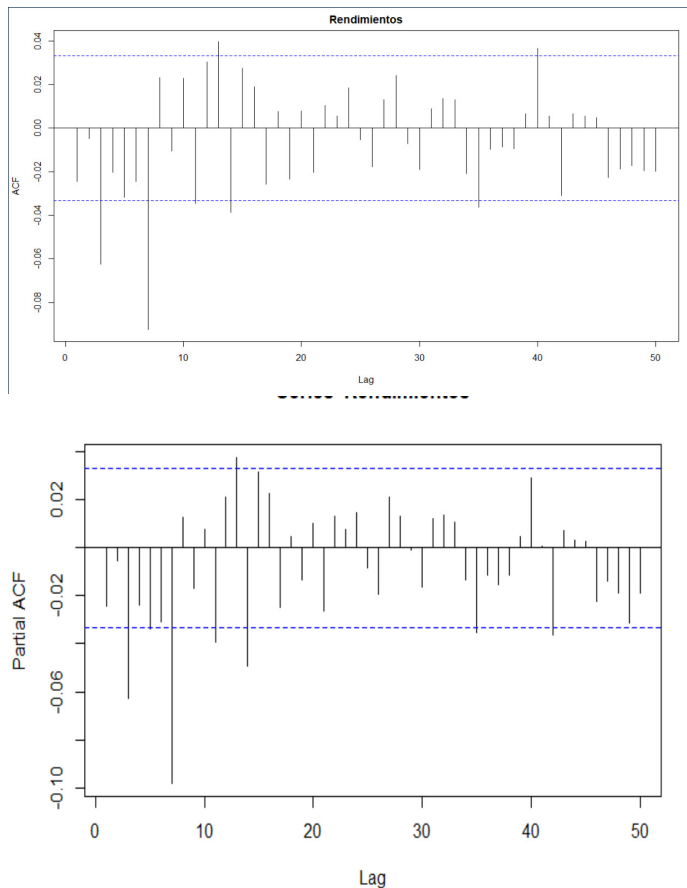
En cuanto a la media se mantiene constante, siendo esta casi idénticamente 0, pues la serie oscila alrededor de esta cantidad.

No parece tener tendencia, pues todos los valores oscilan alrededor del 0 entre -0.1 y 0.1, al parecer no tienen.

Por otra parte podemos ver que, de manera gráfica e intuitiva, la serie de tiempo es estable a lo largo del tiempo en cuanto a su media, sin embargo la varianza no parece ser estable, lo cual es propio de las series de tiempo, ya que hay periodos con mayor y menor volatilidad, los primeros en periodos de estrés (Como antes de 2010 por los efectos de la crisis de 2008, que es cuando inicia la serie), o inicios del 2020 por la pandemia ocasionada por el COVID-19.

Por último no parecen haber ciclos, al menos de manera gráfica. Parece tener un comportamiento irregular causado de manera aleatoria.

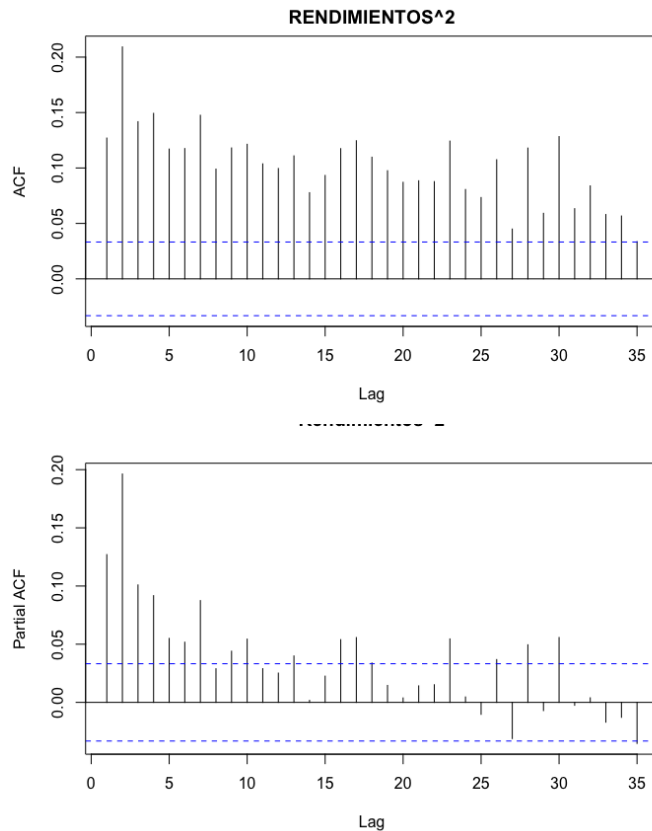
### 3.1 AFC de los rendimientos



No hay una correlación fuerte entre estos rendimientos; de manera significativa, solo en el lag 3 y 8 se sale de las bandas de confianza tanto del ACF como del PACF de manera significativa. Proponemos un  $ARMA(1,1)$ .

### 3.2 Efecto ARCH

La serie de rendimientos al cuadrado pasa las pruebas ArchTest y Ljung-Box para verificar el efecto Arch, que es visible desde el ACF y PACF de la serie



### 3.3 ¿Es estacionaria la serie?

Sí, pasa las pruebas de dickey-fuller con p-value menor a 0.01 y phillips con uno mayor a 0.1, recordando que la hipótesis alternativa de la primera es estacionariedad y de la segunda la nula es estacionariedad

### 3.4 Modelación

Creemos que el ajuste más apropiado será el de un TGARCH o un EGARCH por lo que se comenta en la parte anterior del trabajo, pero aún así intentemos con todos los modelos y vayamos descartando. Nuestro primer enfoque será el de cuántos coeficientes son significativos. Propusimos un modelo ARMA(1-1) Combinado con variaciones de GARCH, EGARCH, TGARCH en sus grados (1,1),(1,2),(2,1),(2,2), al inicio con distribución normal

#### 3.4.1 Primeros modelos candidatos

Quienes pasaron el primer filtro (tener todos los coeficientes significativos) fueron:

1. ARMA(1,1)-GARCH(1,1)
2. ARMA(1,1)-GARCH(1,2)

## 3. ARMA(1,1)-EGARCH(1,2)

## 4. ARMA(1,1)-TARCH(1,2)

Con dichos modelos propuestos como candidatos, intentamos hacer un análisis de residuos para ver si pasaban todas las pruebas, y efectivamente: Pasaban la prueba t para media 0, Phillips y Dickey-Fuller para estacionariedad, Ljung-Box para la no correlación de los cuadrados de los residuales estandarizados e inclusive Nyblom para estabilidad de los parámetros en el tiempo... Sin embargo, ninguna pasaba normalidad, su p-value era casi un cero numérico para shapiro, anderson-darling y jarque-bera. Decidimos probar modificando la distribución de estos modelos con una normal sesgada, una t de student sesgada y una t de student con  $\nu$  grados de libertad. Cabe destacar que el AIC y BIC de estos modelos era casi indistinguible.

### 3.5 Modificación de los primeros candidatos

El ARMA(1,1)-GARCH(1,1) con distribución normal sesgada tuvo todos sus coeficientes significativos, sin embargo no pasa la prueba de ajuste vía anderson-darling para la normal sesgada

El ARMA(1,1)-GARCH(1,2) con distribución normal sesgada también tuvo todos sus coeficientes significativos, sin embargo no pasa la prueba de ajuste vía anderson-darling para la normal sesgada, además de que  $\mu$  no pasa la prueba Nyblom

El ARMA(1,1)-EGARCH(1,2) con distribución t de student sesgada tuvo todos sus coeficientes significativos, sin embargo no pasa la prueba Ljung-Box para la no correlación de sus residuales al cuadrado estandarizados, además de que  $\mu$  no pasa la prueba Nyblom

El ARMA(1,1)-TGARCH(1,2) con distribución t de student sesgada tuvo todos sus coeficientes significativos y pasó todas las pruebas

El ARMA(1,1)-TGARCH(1,2) con distribución t de student tuvo todos sus coeficientes significativos y pasó todas las pruebas

El ARMA(1,1)-TGARCH(1,2) con distribución normal sesgada tuvo todos sus coeficientes significativos, pero no pasa la prueba de bondad de ajuste vía anderson-darling para la normal sesgada

### 3.6 Candidatos finales

Los candidatos finales, al pasar todas las pruebas para los supuestos y tener sus coeficientes significativos, son:

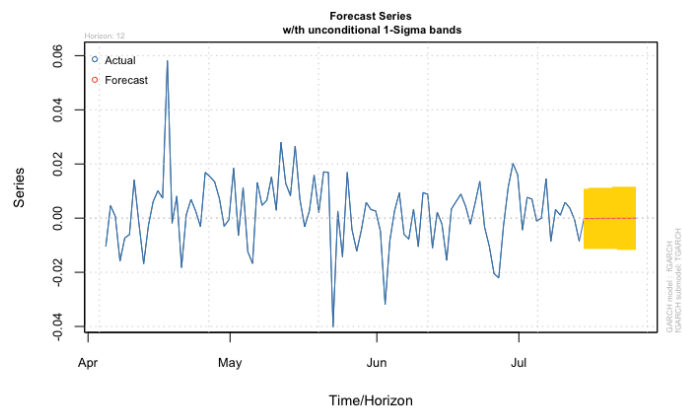
1. ARMA(1,1)-TGARCH(1,2) con distribución t de student sesgada
2. ARMA(1,1)-TGARCH(1,2) con distribución t de student

Revisando el AIC, BIC y demás criterios de selección de modelos que nos arroja la paquetería rugarch al imprimir el modelo, notamos que la diferencia entre estos es casi indistinguible, sin embargo, son ligeramente mejores las del ARMA(1,1)-TGARCH(1,2) con distribución t de student, además de que se mantiene un poco más simple en el sentido de que, en la distribución solo estamos estimando  $\nu$  (los grados de libertad) y no más coeficientes. Así que, por estos dos criterios (índices y simplicidad) escogemos el modelo final como ARMA(1,1)-TGARCH(1,2) con distribución t de student

### 3.7 Forecasting

Con el modelo ARMA(1,1)-TGARCH(1,2), haciendo un ajuste para 12 días, lo obtenido es lo siguiente:





## 4 Conclusión

Los modelos ARCH y GARCH se han aplicado a una amplia gama de análisis de series de tiempo, pero las aplicaciones en finanzas han sido particularmente exitosas y han sido el foco de esta introducción. Las decisiones financieras se basan generalmente en el compromiso entre riesgo y rendimiento; Por tanto, el análisis econométrico del riesgo es una parte integral de la valoración de activos, la optimización de la cartera, la valoración de opciones y la gestión de riesgos. Este documento ha presentado un ejemplo cuidadoso de medición de riesgos que podría ser el insumo para una variedad de decisiones económicas. El análisis de los modelos ARCH y GARCH y sus numerosas extensiones proporciona un escenario estadístico en el que se pueden exhibir y probar muchas teorías de precios de activos y análisis de carteras.

Si bien la estructura de series de tiempo es valiosa para pronosticar, no satisface nuestra necesidad de explicar la volatilidad. La estrategia de estimación introducida para los modelos ARCH y GARCH se puede aplicar directamente si existen variables predeterminadas o exógenas. Por tanto, podemos pensar en el problema de estimación de la varianza como lo hacemos con la media. Podemos realizar búsquedas de especificaciones y pruebas de hipótesis para encontrar la mejor formulación. Hasta ahora, los intentos por encontrar la causa última de la volatilidad no son muy satisfactorios.

Esta discusión abre la puerta a modelos multivariados donde no solo se investigan las volatilidades sino también las correlaciones. Ahora hay una gran cantidad de modelos ARCH multivariados para elegir que a menudo resultan difíciles de estimar y tienen un gran número de parámetros.

### 4.0.1 Conclusión procesos GARCH modificados

En conclusión, las modificaciones/extensiones de GARCH, el GARCH (1,1) es el más simple y robusto de la familia de modelos de volatilidad. Sin embargo, el modelo se puede ampliar y modificar de muchas formas. Mencionaré brevemente tres modificaciones, aunque el número de modelos de volatilidad que se pueden encontrar en la literatura es ahora bastante extraordinario. El modelo GARCH (1,1) se puede generalizar a un modelo GARCH (p, q); es decir, un modelo con términos de retraso adicionales. Estos modelos de orden superior suelen ser útiles cuando se utiliza una gran cantidad de datos, como varias décadas de datos diarios o un año de datos por horas. Con retrasos adicionales, estos modelos permiten un deterioro rápido y lento de la información. Una especificación particular del GARCH (2,2) de Engle y Lee (1999), a veces llamado modelo de componentes, es un punto de partida útil para este enfoque. Los modelos ARCH / GARCH hasta ahora han ignorado la información sobre la dirección de los retornos; solo importa la magnitud. Sin embargo, existen pruebas muy convincentes de que, en general, este no es el caso. Particularmente para los índices de renta variable de base amplia y los índices del mercado de bonos, parece que las caídas del mercado pronostican una mayor volatilidad que los aumentos de mercado comparables. Ahora existe una variedad de modelos GARCH asimétricos, incluido el modelo EGARCH de Nelson (1991), el modelo TARCH, Threshold ARCH atribuido a Zakoian (1993) y Glosten Jaganathan y Runkle (GJR ARCH, 1993), una recopilación y comparación de Engle y Ng (NSGARCH, 1993), entre otros.

## 5 Bibliografía

### References

- [1] BROCKWELL, PETER J. y DAVIS, RICHARD A. *Introduction to Time Series and Forecasting (Third Edition)*, Springer, Switzerland, 2016.
- [2] FRANCO, CHRISTIAN y ZAKOIAN, JEAN-MICHAEL, *GARCH MODELS*, Structure, Statistical Inference and Financial Applications. Second Edition. Wiley, Oxford, UK, 2010.
- [3] TSAY, RUEY S., *An Introduction to analysis of financial data with R*. Third Edition. Hoboken, New Jersey, 2013.
- [4] TSAY, RUEY S., *Analysis of Financial Time Series*. Third Edition. Hoboken, New Jersey, 2010.