Correlación

Es una operación que se aplica sobre señales de entrada $x(n)$ y $y(n)$, donde el resultado obtenido se representa como $r_{xy}(n)$ y se calcula de la siguiente forma:

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l) \quad l = 0, \pm1, \pm2, \ldots \qquad (1)$$

La siguiente también es una forma equivalente

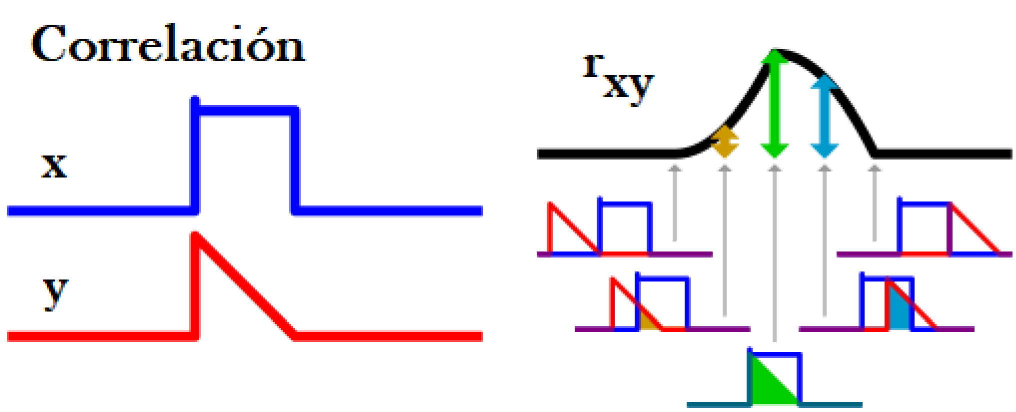
$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+l)y(n) \quad l = 0, \pm1, \pm2, \ldots \qquad (2)$$

La operación de correlación es un auxiliar para evaluar el parecido entre dos señales, por lo tanto, resulta en una herramienta de primera mano para el reconocimiento de patrones. Cuando el resultado de la correlación crece, indica un mayor parecido entre las dos señales bajo escrutinio.

La interpretación intuitiva será la siguiente:

- Para la ecuación (1), la secuencia x(n) permanece estática
- La secuencia y(n) es recorrida en el tiempo "l" unidades bajo la siguiente lógica: l unidades a la derecha si l es positivo; l unidades a la izquierda si l es negativo
- En la ecuación (2), la lógica del punto anterior se invierte: l unidades a la derecha si l es negativo; l unidades a la izquierda si l es positivo

La representación gráfica sería:



Propiedades de la correlación

1) **No conmunatividad**

$$r_{xy}(n) \neq r_{yx}(n) \tag{3}$$

$$r_{xy}(n) = r_{yx}(-n) \tag{4}$$

2) **Relación con la convolución**

$$r_{xy}(n) = x(n) * y(-n) \tag{5}$$

$$r_{yx}(n) = x(-n) * y(n) \tag{6}$$

$$x(n) * y(n) = r_{x(n)y(-n)}(n) = r_{y(n)x(-n)}(n) \tag{7}$$

Reducción de los límites de la correlación

Sea la formulación de correlación, $r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l)$, con x(n) como secuencia fija y y(n) como secuencia móvil. Ahora, hay que considerar que dichas secuencias son descritas de la siguiente forma:

$$x(n) = \{x(p), x(p+1), \dots, x(q-1), x(q)\} \quad con\ q > p \tag{8}$$

Donde el índice "p" representa el índice del valor de la secuencia colocado en el extremo izquierdo de la escala de tiempo, y "q" representa el índice del último elemento en la misma escala. Se define a continuación la longitud de dicha secuencia, que es equivalente al conteo de elementos en ella:

$$L_x = q - p + 1 \tag{9}$$

Ahora bien, para la descripción de la secuencia y(n)

$$y(n) = \{y(r), y(r+1), \dots, y(s-1), y(s)\} \quad con\ s > r \tag{10}$$

Donde el índice "r" representa el índice del valor de la secuencia colocado en el extremo izquierdo de la escala de tiempo, y "s" representa el índice del último elemento en la misma escala. Se define a continuación la longitud de dicha secuencia, que es equivalente al conteo de elementos en ella:

$$L_y = s - r + 1 \tag{11}$$

La longitud de la secuencia de salida sería similar al caso de la convolución, resultando en:

$$L_{rxy} = L_x + L_y - 1 \tag{12}$$

Los límites finitos para la sumatoria de correlación quedarían expresados como:

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=p}^{q} x(n)y(n-l) \quad \forall \ l \in (p - s \leq l \leq q - r) \tag{13}$$

Ejemplo: sean las secuencias

$x(n) = \{1,2,-1\}$ *y* $y(n) = \{1,0,1\}$

Entonces, se identifica que p=-1, q=1, r=0 y s=2, por lo tanto:

Límites de la sumatoria: $-1 \leq n \leq 1$

Límites para l: $-3 \leq l \leq 1$

Dando solución

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-1}^{1} x(n)y(n-l) \quad \forall \ l \in (-3 \leq l \leq 1) \tag{14}$$

Aplicando algorítmicamente

- Para *l*=-3
  $r_{xy}(-3) = x(-1)y[-1-(-3)] + x(0)y[0-(-3)] + x(1)y[1-(-3)]$
  $r_{xy}(-3) = x(-1)y[2] + x(0)y[3] + x(1)y[4]$
  $r_{xy}(-3) = (1)(1) + (2)(0) + (-1)(0)$
  $r_{xy}(-3) = 1$

- Para *l*=-2
  $r_{xy}(-2) = x(-1)y[-1-(-2)] + x(0)y[0-(-2)] + x(1)y[1-(-2)]$

$r_{xy}(-2) = x(-1)y[1] + x(0)y[2] + x(1)y[3]$
$r_{xy}(-2) = (1)(0) + (2)(1) + (-1)(0)$
$r_{xy}(-2) = 2$

- Para l=-1
  $r_{xy}(-1) = x(-1)y[-1-(-1)] + x(0)y[0-(-1)] + x(1)y[1-(-1)]$
  $r_{xy}(-1) = x(-1)y[0] + x(0)y[1] + x(1)y[2]$
  $r_{xy}(-1) = (1)(1) + (2)(0) + (-1)(1)$
  $r_{xy}(-1) = 0$

- Para l=0
  $r_{xy}(0) = x(-1)y[-1-(0)] + x(0)y[0-(0)] + x(1)y[1-(0)]$
  $r_{xy}(0) = x(-1)y[-1] + x(0)y[0] + x(1)y[1]$
  $r_{xy}(0) = (1)(0) + (2)(1) + (-1)(0)$
  $r_{xy}(0) = 2$

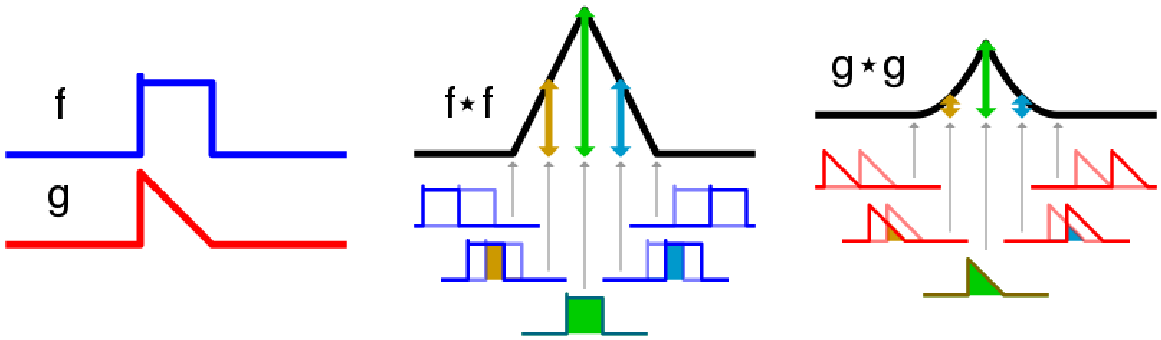
- Para l=1
  $r_{xy}(1) = x(-1)y[-1-(1)] + x(0)y[0-(1)] + x(1)y[1-(1)]$
  $r_{xy}(1) = x(-1)y[-2] + x(0)y[-1] + x(1)y[0]$
  $r_{xy}(1) = (1)(0) + (2)(0) + (-1)(1)$
  $r_{xy}(1) = -1$

$$r_{xy}(n) = \{1,2,0,2,-1\}$$

Caso especial: autocorrelación

Regularmente, la correlación se aplica entre señales diferentes para evaluar su parecido; este tipo de correlación se le suel denominar “cruzada”. Para ciertos propósitos específicos, se puede presentar el caso en el que se deba calcular la correlación de una señal consigo misma, en una operación denominada “Autocorrelación”. Su formulación sería:

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=p}^{q} x(n)x(n-l) \quad \forall \ l \in (p-q \leq l \leq q-p) \tag{15}$$



En donde un término importante de la autocorrelación es $r_{xx}(0)$, el cual se puede calcular como:

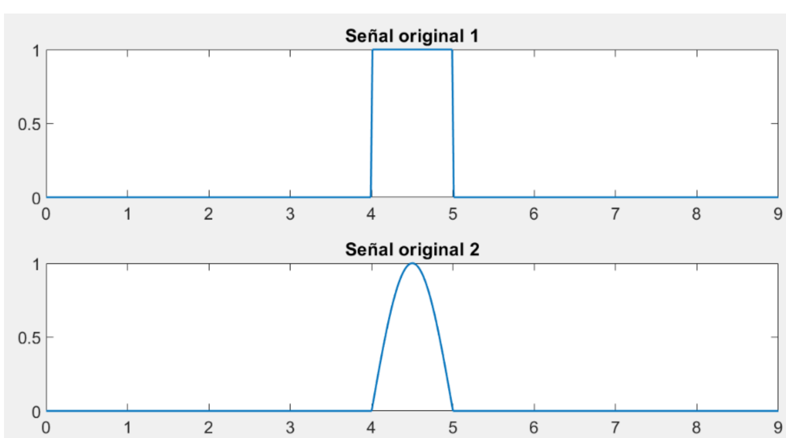
$$r_{xx}(0) = \sum_{n=p}^{q} [x(k)]^2 \tag{16}$$

Caso especial: correlación normalizada

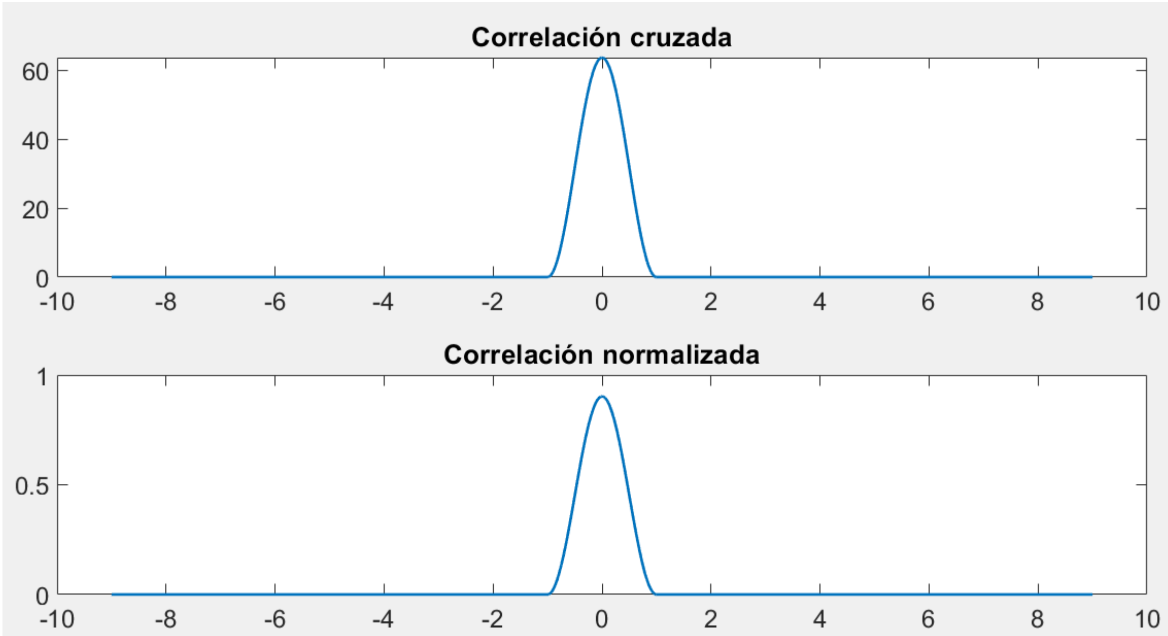
Cuando se desea conocer a mayor detalle el grado de parecido entre dos señales, se emplea el proceso de normalización de la correlación. El valor máximo de esta, además de indicar la posición de mayor parecido, si es cercano a uno, indica el parecido general entre ambas señales

$$\rho_{xy}(n) = \frac{r_{xy}(n)}{\sqrt{r_{xx}(0) r_{yy}(0)}} \tag{17}$$

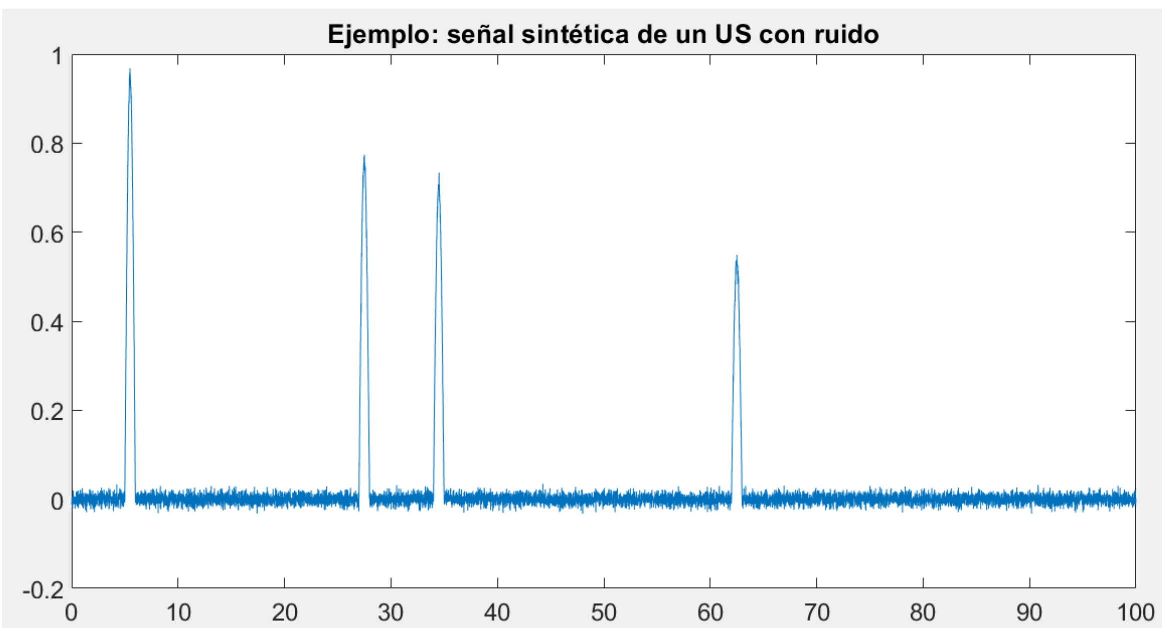
Ejemplo práctico (archivo corr_norm.m): Sean dos pulsos, uno de ellos de forma cuadrada y otro con un lóbulo senoidal



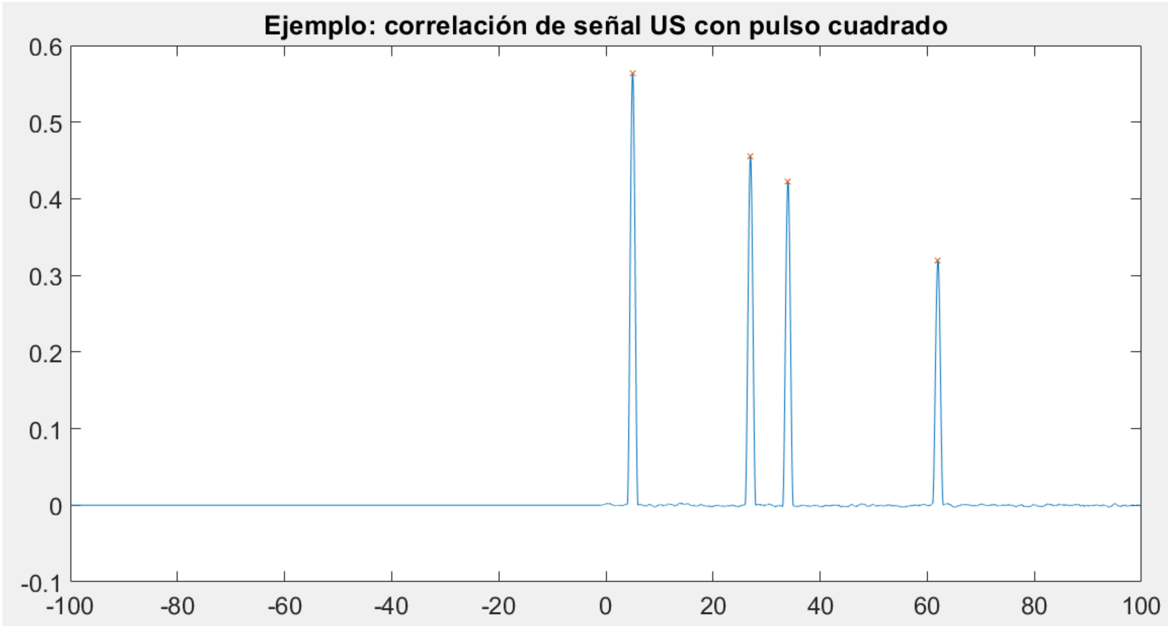
Calcular su correlación cruzada y su correlación normalizada



En segunda instancia, sea una señal que simula ecos de ultrasonido



Al correlacionarse con una señal pulso, el resultado sería:




```
Command Window
Los tiempos en los que se presentan los pulsos son 4.99        26.99        33.99        61.99
>>
```

La implementación de correlación en Matlab, se realiza con el comando **"xcorr"**

Ejercicios suplementarios:

Sean las secuencias

$$w(n) = \{2, -1, 0, 2\}$$

$$x(n) = \{-1, 0, 2, -3\}$$

Calcular:

- *i)* $w(n) * x(n)$ *(Respuesta { -2 1 4 -10 3 4 -6})*
- *ii)* $r_{w(n)x(n)}$ *(Respuesta { -6 7 -2 -8 5 0 -2})*
- *iii)* $r_{x(n)w(n)}$ *(Respuesta { -2 0 5 -8 -2 7 -6})*
- *iv)* $r_{w(n)x(-n)}$ *(Respuesta { -2 1 4 -10 3 4 -6})*
- *v)* $w(n) * x(1-n)$ *(Respuesta { -6 7 -2 -8 5 0 -2})*

Solución (i) $w(n) * x(n)$ *con*

$w(n) = \{2, -1, 0, 2\}$ *: p= -1 ; q=2*

$x(n) = \{-1, 0, 2, -3\}$ *: r=0 ; s=3*

$$w(n) * x(n) = \sum_{k=p}^{q} w(k)x(n-k) \quad \forall\ n \in (p + r \leq n \leq q + s)$$

$$w(n) * x(n) = \sum_{k=-1}^{2} w(k)x(n-k) \quad \forall\ n \in (-1 \leq n \leq 5)$$

Para n= -1

$y(-1) = w(-1)x(-1-(-1)) + w(0)x(-1-0) + w(1)x(-1-1) + w(2)x(-1-2)$

$y(-1) = w(-1)x(0) + w(0)x(-1) + w(1)x(-2) + w(2)x(-3)$

$y(-1) = (2)(-1) + (-1)(0) + (0)(0) + (2)(0)$

$y(-1) = -2$

-------------------*(el resto es ejercicio al lector)*--------------------------

Solución (ii) $r_{w(n)x(n)}$ *con*

$w(n) = \{2, -1, 0, 2\}$ *: p= -1 ; q=2*

$x(n) = \{-1, 0, 2, -3\}$ *: r=0 ; s=3*

$$r_{wx}(l) = \sum_{n=p}^{q} w(n)x(n-l) \quad \forall\ l \in (p - s \leq l \leq q - r)$$

$$r_{wx}(l) = \sum_{n=-1}^{2} w(n)x(n-l) \quad \forall\ l \in (p - s \leq l \leq q - r)$$

Para l= -4

$$r(-4) = w(-1)x(-1+4) + w(0)x(0+4) + w(1)x(1+4) + w(2)x(2+4)$$

$$r(-4) = w(-1)x(3) + w(0)x(4) + w(1)x(5) + w(2)x(6)$$

$$r(-4) = (2)(-3) + (-1)(0) + (0)(0) + (2)(0)$$

$$r(-4) = -6$$

-------------------*(el resto es ejercicio al lector)*--------------------------

-------------------*(el resto es ejercicio al lector)*--------------------------

Solución (iii) $r_{x(n)w(n)}$ *con*

$x(n) = \{-1,0,2,-3\}$ *: p=0 ; q=3*

$w(n) = \{2,-1,0,2\}$ *: r= -1 ; s=2*

$$r_{xw}(l) = \sum_{n=p}^{q} x(n)w(n-l) \quad \forall \ l \in (p-s \leq l \leq q-r)$$

$$r_{xw}(l) = \sum_{n=0}^{3} x(n)w(n-l) \quad \forall \ l \in (-2 \leq l \leq 4)$$

Para l= -2

$$r(-2) = x(0)w(0+2) + x(1)w(1+2) + x(2)w(2+2) + x(3)w(3+2)$$

$$r(-2) = x(0)w(2) + x(1)w(3) + x(2)w(4) + x(3)w(5)$$

$$r(-2) = (-1)(2) + (0)(0) + (2)(0) + (-3)(0)$$

$$r(-2) = -2$$

-------------------*(el resto es ejercicio al lector)*--------------------------

Solución (iv) $r_{w(n)x(-n)} = w(n) * x(n)$ *(inciso (i), véase propiedad en la eq. 7)*

-------------------*(el resto es ejercicio al lector)*--------------------------

Solución (v) $w(n) * x(1-n)$

Sea $v(n) = x(1-n) = \{-3,2,0,1\}$

$$v(-2) = x[1-(-2)] = x(3) = -3$$

$$v(-1) = x[1-(-1)] = x(2) = 2$$

$$v(0) = x[1-(0)] = x(1) = 0$$

$$v(1) = x[1-(1)] = x(0) = -1$$

$w(n) = \{2, -1, 0, 2\}$ *: p= -1 ; q=2*

$v(n) = \{-3, 2, 0, 1\}$ *: r=-2 ; s=1*

$$w(n) * v(n) = \sum_{k=p}^{q} w(k)v(n-k) \quad \forall \ n \in (p + r \leq n \leq q + s)$$

$$w(n) * v(n) = \sum_{k=-1}^{2} w(k)v(n-k) \quad \forall \ n \in (-3 \leq n \leq 3)$$

Para n= -3

$$y(-3) = w(-1)v\big(-3-(-1)\big) + w(0)v\big(-3-(0)\big) + w(1)v\big(-3-(1)\big) + w(2)v(-3-(2))$$

$$y(-3) = w(-1)v(-2) + w(0)v(-3) + w(1)v(-4) + w(2)v(-5)$$

$$y(-3) = (2)(-3) + (-1)(0) + (0)(0) + (2)(0)$$

$$y(-3) = -6$$