Convolución y respuesta de sistema discretos lineales e invariantes en el tiempo

Sea una señal discreta arbitraria x(n). Dicha secuencia puede ser representada como un tren infinito de impulsos unitarios retrasados y ponderados, de la siguiente forma:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \qquad (1)$$

Ahora, considerar las siguientes propiedades de un sistema discreto

- Linealidad

$$H\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n) + \cdots + a_Nx_N(n)\} = H\{a_1x_1(n)\}+ H\{a_2x_2(n)\}+\ldots+\ H\{a_Nx_N(n)\} \qquad (2)$$

- Causalidad

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), \ldots]\ \forall\ F \qquad (3)$$

- Invariancia en el tiempo

$$Si\ y(n) = H\{x(n)\}\ entonces\ y(n-1) = H\{x(n-1)\} \qquad (4)$$

Se puede demostrar que un sistema discreto que cumpla dichas propiedades (Sistema discreto, lineal, causal e invariante con el tiempo) describe enteramente su dinámica mediante la respuesta impulso. Para calcular la respuesta ante cualquier entrada arbitraria, resulta necesario calcular la **convolución** de dicha entrada con la respuesta escalón.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n) \qquad (5)$$

Donde:

$y(n)$: Respuesta del sistema discreto descrito por $h(n)$

$x(n)$: Entrada arbitraria al sistema discreto descrito por $h(n)$

$h(n)$: Respuesta impulso del sistema discreto

Propiedades de la convolución

1) Conmutatividad

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \tag{6}$$

2) Asociatividad

$$[x_1(n) * x_2(n)] * x_3(n) = x_1(n) * [x_2(n) * x_3(n)] \tag{7}$$

3) Distributividad

$$x_1(n) * [x_2(n) + x_3(n)] = x_1(n) * x_2(n) + x_1(n) * x_3(n) \tag{8}$$

4) Desplazamiento en el tiempo

$$y(n-T) = \ x(n-T) * h(n) = x(n) * h(n-T) \tag{9}$$

5) Convolución con un impulso

$$x(n) = x(n) * \delta(n) \tag{10}$$

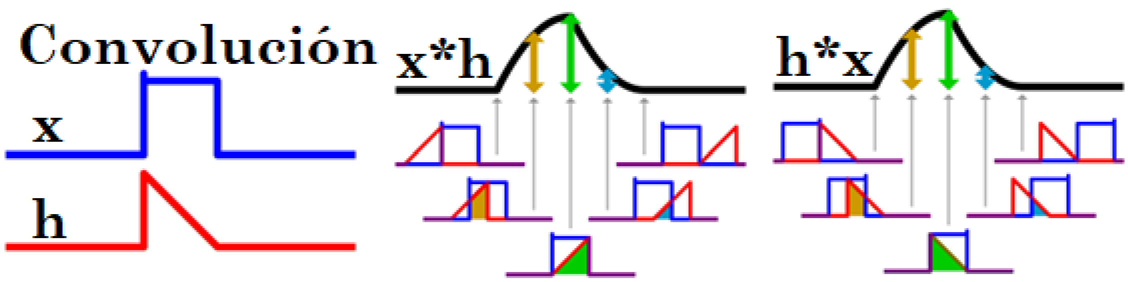
6) Causalidad

$$Si\ x(n)\ y\ h(n)\ son\ causales, entonces\ x(n) * h(n)\ tambien\ lo\ es \tag{11}$$

Interpretación gráfica del cálculo de la convolución

Considerando la forma general de la convolción de la ecuación (5), $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$, se parte de los siguientes hechos:

- La secuencia x(n) se mantiene fija
- La secuencia h(n) se refleja y se correrá en el tiempo
- En cada posición en el corrimiento de h(n), se realizará la multiplicación de la secuencia fija x(n) y la versión de h(n), se sumarán todos los elementos resultantes, y se almacenarán en la posición correspondiente con el corrimiento de h(n), en la secuencia de salida y(n)
- El procedimiento se realiza desde el primer empalme, hasta el último; fuera de dicho rango, el resultado de la convolución será cero.
- En caso de que el orden de los factores se invierta(h(n) fija y x(n) móvil), el resultado final será el mismo, dado la propiedad de conmutatividad



Procedimiento de cálculo considerando la interpretación gráfica

Sea $y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n_0 - k)$ la convolución entre la secuencia fija x(n) y la secuencia móvil h(n). El procedimiento de cálculo es el siguiente:

0) Cambiar $n \rightarrow k$, para hacer $x(k)$ y $h(k)$
1) Reflejar $h(k)$ para obtener $h(-k)$
2) Hacer corrimiento en el tiempo para $h(-k)$. Considerar que si el argumento de corrimiento n_0 es positivo, el desplazamiento se realiza a la derecha; caso contrario, cuando el argumento del corrimiento n_0 es negativo, el desplazamiento es hacia la izquierda.
3) Multiplicar la señal fija $x(k)$ por la señal desplazada $h(n_0 - k)$ para obtener la secuencia nueva $v_{n0}(k) = x(k)h(n_0 - k)$
4) Sumar todos los valores de la señal $v_{n0}(k)$ para obtener el valor de la salida $y(n)$ en el tiempo $n = n_0$
5) Considerar que, para el primer elemento no nulo de la salida, debe existir el primer empalme de la secuencia fija y la secuencia móvil; para el último elemento no nulo, se debió de presentar el último empalme

Ejemplo: Sean las secuencias

$x(n) = \{1,2,1\}$ *y* $h(n) = \{1,-1\}$

Calcular la convolución de acuerdo con las indicaciones del procedimiento anterior

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(k)$				1	-1		
$h(-k)$			-1	1			
$x(k)$				1	2	1	

El valor adecuado de n para comenzar, es aquel en donde ocurra el primer empalme. Al observar la posición que guarda de forma inicial la señal h(-k), *mover tantas posiciones como se necesita para generar el primer empalme, considerando el punto 2 del procedimiento de cálculo*

$Para\ n_0 = -1$

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(-1-k)$		-1	1				
$x(k)$				1	2	1	
$v_{n0}(k)$	0	0	0	0	0	0	0

$y(-1) = 0$

$Para\ n_0 = 0$

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(0-k)$			-1	1			
$x(k)$				1	2	1	
$v_{n0}(k)$	0	0	0	1	0	0	0

$y(0) = 1$

$Para\ n_0 = 1$

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(1-k)$				-1	1		
$x(k)$				1	2	1	
$v_{n0}(k)$	0	0	0	-1	2	0	0

$y(1) = 1$

$Para\ n_0 = 2$

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(2-k)$					-1	1	
$x(k)$				1	2	1	
$v_{n0}(k)$	0	0	0	0	-2	1	0

$y(2) = -1$

$Para\ n_0 = 3$

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(3-k)$						-1	1
$x(k)$				1	2	1	
$v_{n0}(k)$	0	0	0	0	0	-1	0

$y(3) = -1$

Para $n_0 = 4$

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(4-k)$							1
$x(k)$				1	2	1	
$v_{n0}(k)$	0	0	0	0	0	0	0

$$y(4) = 0$$

Solución total $\mathbf{y(n) = \{1, 1, -1, -1\}}$

Forma algorítmica

Consiste en el seguimiento cabal de la formulación general de la convolución, expresado por $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$

Ejemplo: Sean las secuencias

$x(n) = \{1,2,1\}$ *y* $h(n) = \{1, -1\}$

Calcular la convolución de acuerdo con la forma algorítmica

- Para $n = -1$

$$y(-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-1-k)$$

$$y(-1) = \cdots + \overset{k=-1}{\boxed{x(-1)h[-1-(-1)]}} + \overset{k=0}{\boxed{x(0)h[-1-(0)]}} + \overset{k=1}{\boxed{x(1)h[-1-(1)]}} + \underset{k=2}{\boxed{x(2)h[-1-(2)]}} + \underset{k=3}{\boxed{x(3)h[-1-(3)]}} + \cdots$$

$$y(-1) = \cdots + x(-1)h[0] + x(0)h[-1] + x(1)h[-2] + x(2)h[-3] + x(3)h[-4] + \cdots$$

$$y(-1) = 0$$

Nota: En la sumatoria, solo vale la pena calcular los límites de acuerdo a los valores para donde la secuencia fija es no nula.

- Para $n = 0$

$$y(0) = x(0)h[0 - (0)] + x(1)h[0 - (1)] + x(2)h[0 - (2)]$$

$$y(0) = x(0)h[0] + x(1)h[-1] + x(2)h[-2]$$

$$y(0) = (1)(1) + (2)(0) + (1)(0)$$

$$y(0) = 1$$

- Para $n = 1$

$$y(1) = x(0)h[1 - (0)] + x(1)h[1 - (1)] + x(2)h[1 - (2)]$$

$$y(1) = x(0)h[1] + x(1)h[0] + x(2)h[-1]$$

$$y(1) = (1)(-1) + (2)(1) + (1)(0)$$

$$y(1) = 1$$

- Para $n = 2$

$$y(2) = x(0)h[2 - (0)] + x(1)h[2 - (1)] + x(2)h[2 - (2)]$$

$$y(2) = x(0)h[2] + x(1)h[1] + x(2)h[0]$$

$$y(1) = (1)(0) + (2)(-1) + (1)(1)$$

$$y(2) = -1$$

- Para n=3

$$y(3) = x(0)h[3 - (0)] + x(1)h[3 - (1)] + x(2)h[3 - (2)]$$

$$y(3) = x(0)h[3] + x(1)h[2] + x(2)h[1]$$

$$y(1) = (1)(0) + (2)(0) + (1)(-1)$$

$$y(3) = -1$$

Solución total $\boldsymbol{y(n) = \{1, 1, -1, -1\}}$

En lo general, el manejo de sumatorias infinitas es complicado, o incluso, imposible de resolver algorítmicamente. Así las cosas, se realizan las siguientes recomendaciones para el cálculo de los límites adecuados de la convolución, y así, evitar trabajo infructuoso.

Reducción de límites de la convolución

Sea la formulación de convolución, $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$, con x(n) como secuencia fija y h(n) como secuencia (aunque sea un detalle sin relevancia, debido a la propiedad de conmutatividad). Ahora, hay que considerar que dichas secuencias son descritas de la siguiente forma:

$$x(n) = \{x(p), x(p+1), \dots, x(q-1), x(q)\} \quad con\ q > p \tag{12}$$

Donde el índice "p" representa el índice del valor de la secuencia colocado en el extremo izquierdo de la escala de tiempo, y "q" representa el índice del último elemento en la misma escala. Se define a continuación la longitud de dicha secuencia, que es equivalente al conteo de elementos en ella:

$$L_x = q - p + 1 \tag{13}$$

Ahora bien, para la descripción de la secuencia h(n)

$$h(n) = \{h(r), h(r+1), \dots, h(s-1), h(s)\} \quad con\ s > r \tag{14}$$

Donde el índice "r" representa el índice del valor de la secuencia colocado en el extremo izquierdo de la escala de tiempo, y "s" representa el índice del último elemento en la misma escala. Se define a continuación la longitud de dicha secuencia, que es equivalente al conteo de elementos en ella:

$$L_h = s - r + 1 \tag{15}$$

Los límites finitos para la sumatoria de convolución quedarías expresados como:

$$y(n) = \sum_{k=p}^{q} x(k)h(n-k) \quad \forall\ n \in (p + r \leq n \leq q + s) \tag{16}$$

La longitud de la secuencia de salida se calcula como:

$$L_y = (q + s) - (p + r) + 1 \tag{17}$$

$$L_y = L_x + L_h - 1 \tag{18}$$

Ejemplo: sean las secuencias

$x(n) = \{1, 2, -1\}$ *y* $h(n) = \{1, 0, 1\}$

Entonces, se identifica que p= -1, q=1, r= -1 y s=1, por lo tanto:

Límites de la sumatoria: $-1 \leq k \leq 1$

Límites para n: $-2 \leq n \leq 2$

Dando solución

$$y(n) = \sum_{k=-1}^{1} x(k)h(n-k) \quad \forall \; n \in (-2 \leq n \leq 2) \tag{19}$$

Aplicando algorítmicamente

- Para n=-2
  $y(-2) = x(-1)h[-2-(-1)] + x(0)h[-2-(0)] + x(1)h[-2-(1)]$
  $y(-2) = x(-1)h[-1] + x(0)h[-2] + x(1)h[-3]$
  $y(-2) = (1)(1) + (2)(0) + (-1)(0)$
  $y(-2) = 1$
- Para n=-1
  $y(-1) = x(-1)h[-1-(-1)] + x(0)h[-1-(0)] + x(1)h[-1-(1)]$
  $y(-1) = x(-1)h[0] + x(0)h[-1] + x(1)h[-2]$
  $y(-1) = (1)(0) + (2)(1) + (-1)(0)$
  $y(-1) = 2$
- Para n=0
  $y(0) = x(-1)h[0-(-1)] + x(0)h[0-(0)] + x(1)h[0-(1)]$
  $y(0) = x(-1)h[1] + x(0)h[0] + x(1)h[-1]$
  $y(0) = (1)(1) + (2)(0) + (-1)(1)$
  $y(0) = 0$
- Para n=1
  $y(1) = x(-1)h[1-(-1)] + x(0)h[1-(0)] + x(1)h[1-(1)]$
  $y(1) = x(-1)h[2] + x(0)h[1] + x(1)h[0]$
  $y(1) = (1)(0) + (2)(1) + (-1)(0)$
  $y(1) = 2$

- Para n=2
  $y(2) = x(-1)h[2-(-1)] + x(0)h[2-(0)] + x(1)h[2-(1)]$
  $y(2) = x(-1)h[3] + x(0)h[2] + x(1)h[1]$
  $y(2) = (1)(0) + (2)(0) + (-1)(1)$
  $y(2) = -1$

Finalmente

$$y(n) = \{1,2,0,2,-1\}$$

Código para la programación de la convolución

```
function [Y] =convolucion_hechiza(x,h)

    Lx=length(x);
    Lh=length(h);
    Ly=Lx+Lh-1;
    Y=zeros(1,Ly);
    indice=0;
    aux=0;

    for n=0:Ly-1
        for k=0:Lx-1
            indice=n-k;

            if indice>=0 && indice<Lh
                aux=h(indice+1);
            else
                aux=0;
            end

            Y(n+1)=Y(n+1)+x(k+1)*aux;
        end
    end


end
```

La implementación de convolución en Matlab, se realiza con el comando **“conv”**