计算机图形学中的四元数

Quaternion for Computer Graphics

原书第二版

John Vince 著
郭飞 译

2023年

谨以此书献给我的妻子*Heidi*.

第二版译序

第一版译序

译者是一名图像算法工程师，在学习 SLAM 的时候第一次接触到四元数，草草了解一点点，然后在三维重建的项目中，遇到点云显示的问题，也需要用四元数来处理旋转进行解决，恰好在查找资料的过程中发现了本书，大家也都推荐此书是一本讲解四元数很透彻的书，但是令我感到惊奇的是，如此一本好书居然目前为止尚未有中文版出版，故此，我一边学习此书一边翻译下来。

读完此书后，我的感受是，这本书讲解很透彻，循循善诱，基本上不用依赖什么大学数学知识就可以理解，甚至，讲解细致程度可以让小学生也能懂。没有多少过于复杂的定理堆彻，基本会慢慢引入概念，然后一步步引导推导，推导完成后再进行总结，最后再用例题来验证掌握程度，加深印象，巩固掌握。

当然，译者也是第一次系统学习四元数，可能对其中有些术语表达不准确；也有一些句子感觉上翻译得不是很对，很拗口，难以理解；也有一些词语为了统一，可能在局部的地方并不是那么准确，比如“ inverse ”，统一翻译为逆，而不是倒数。如果有发现翻译或原文有什么问题，有更好的翻译，或者公式上面有上面疏漏，欢迎随时发邮件指正勘误。

希望各位学习四元数的旅程能如译者第一次学习本书时一样轻松愉快！

郭飞 Bluffey@163.com

2023年2月17日 于 成都

第二版序

当我在学习成为一名电气工程师的时候，我遇到了复数，它们被用来用j算子表示非相电压和电流。我相信用的是字母j，而不是i，因为后者代表电流。所以从我学习的一开始，我脑海中就有一个清晰的画面，想象中的单位是一个旋转算子，它可以在时间上推进或延迟电量。

当事情的发展决定了我要从事计算机编程而不是电子工程的职业时，我并不需要复数，直到 Mandlebrot 对分形的研究出现。但这只是一个暂时的阶段，我从来没有需要在我的计算机图形软件中使用复数。然而，在1986年，当我加入飞行模拟行业时，我看到了一份关于四元数的内部报告，它被用来控制模拟飞机的旋转方向。

我还记得当时我被四元数弄糊涂了，因为它们包含了太多的虚数。然而，经过大量的研究，我开始了解它们是什么，但不知道它们是如何工作的。与此同时，我开始对数学的哲学方面感兴趣，并试图通过伯特兰·罗素(Bertrand Russell)的著作来理解数学的"真正意义"。因此，像i这样的概念是一个智力上的挑战。

现在，我已经习惯了虚数i只不过是一个符号，并且在代数的上下文中允许定义$i^2=-1$。我认为，试图发现其存在的深层意义是徒劳的。然而，它是数学中一个令人惊奇的对象，我经常想是否会有类似的对象等待被发明。

当我开始写关于计算机图形学的数学书籍时，我学习了复分析，以便有信心地写复数。就在那时，我发现了向量和四元数发明背后的历史事件，主要是通过 Michael Crowe的优秀著作:《向量分析的历史[1]》。这本书让我认识到了解数学发明的方式和原因的重要性。。然后我读到了 Simon Altmann 的书:《旋转、四元数和双群[2]》，该书提供了有关十九世纪四元数衰落的更多信息。Altmann 非常热情地为奥林德•罗德里格斯(Olinde Rodrigues)的数学工作争取认可，他发表了一个公式，与汉密尔顿的四元数产生的公式非常相似。罗德里格斯的这篇论文的重要之处在于，它比汉密尔顿在1843年发明四元数早了三年。然而，罗德里格斯并没有发明四元数代数——这个奖项应该属于汉密尔顿——但他确实理解了半角在三角函数中的重要性，三角函数用于使点绕任意轴旋转。

任何使用过欧拉变换的人都会意识到它的缺点，尤其是它的致命弱点:万向锁。因此，任何可以围绕任意轴旋转点的设备都是程序员工具箱中受欢迎的补充。在平面和空间中有许多旋转点和帧的技术，我在我的书中有一些详细的介绍:《计算机图形的旋转变换[3]》。那本书还涵盖了 Euler-Rodrigues 参数化和四元数，但只有在提交手稿出版后，我才决定写这本书，专门讨论四元数，它们是如何和为什么被发明的，以及它们在计算机图形学中的应用。

[1]A History of Vector Analysis
[2]Rotations, Quaternions, and Double Groups
[3]Rotation Transforms for Computer Graphics

在研究这本书的同时，阅读 William Rowan Hamilton 和他的朋友p·g·Tait的一些早期书籍和论文是非常有教育意义的。我现在明白了要完全理解四元数的重要性以及如何利用它们是多么困难。当时，没有围绕任意轴旋转点的主要需求;然而，需要一个数学系统来处理向量。最后，四元数不再流行，慢慢地淡出了人们的视线。尽管如此，对 Hamilton 来说，表示矢量并对其进行算术运算的能力是一项重大成就，尽管乔赛亚·吉布斯(Josiah Gibbs)有远见地创建了一个简单可行的代数框架。

我希望这第二版能如预期的那样改进原书。我已经复习了所有的文档和代数符号，并重新设计了所有的图形，包括颜色。我还对每章的参考书目进行了本地化调整，并扩大了索引。具体来说，我引入了一章来描述三元组如何导致四元数的发明。最后，我扩展了对Olinde Rodrigues的参考和关于插值的部分。

四元数有不同的表示方式，但我最喜欢的是有序对，这是我在 Simon Altmann 的书中发现的。我绝不认为自己是四元数方面的权威。我只是想交流一下我是如何理解他们的，希望对你有用。

这本书现在分为九章。第一章和最后一章介绍和总结了这本书，其余七章涵盖以下主题。第2章是关于数集和代数，并回顾符号和语言相关的书的其余部分。书中有关于数集、公理、有序对、群、环和域的章节。这为读者准备了非交换四元数乘积，以及为什么四元数被描述为除法环。第3章回顾了复数，并展示了如何将它们表示为有序对和矩阵。第4章继续这个主题，介绍复平面并展示复数的旋转特征。它还为读者准备了19世纪初提出的问题:是否存在一个复数的三维等价物?第5章追溯了四元数在三元组的中间阶段的出现，并展示了汉密尔顿如何引入第三个假想的k，以及如何将其与i和j整合。

第6章通过描述 Hamilton 的发明来回答这个问题:四元数和相关代数。我加入了一些历史信息，以便读者理解汉密尔顿作品的重要性。虽然有序对是主要的表示法，但我也包括了矩阵表示法。

为了让读者为四元数的旋转质量做好准备，第7章回顾了3D旋转变换，特别是欧拉角和万向节锁。我还开发了一个矩阵，用于使用向量和矩阵变换围绕任意轴旋转一个点。

第8章是本书的重点，描述了四元数如何围绕任意轴旋转向量。本章以一些历史信息开始，并解释不同的四元数乘积如何旋转点。虽然四元数很容易使用它们的复数形式或有序对符号来实现，但它们也有矩阵形式，这是从第一原理发展而来的。本章继续介绍关于偏移轴旋转，旋转参考帧，插值四元数，以及在四元数和旋转矩阵之间转换的部分。每章包含许多实际的例子，以显示如何评估方程，并在相关的地方，每章末尾会给出进一步的例子。

准备第二版是一个非常愉快的经历，我相信你也会喜欢阅读它，并从它的页面中发现一些新的东西。

我要感谢米德尔塞克斯大学荣誉读者Tony Crilly博士，他阅读了原稿，并纠正和澄

清了我的注释和解释。我完全相信他的数学知识，我很感激他的建议和专业知识。然而，我仍然要为我可能犯的代数错误负全部责任。

我还要感谢Patrick Riley教授，他阅读了一些手稿的早期草稿，并提出了一些关于四元数的有趣的技术问题。这些问题使我意识到我对四元数的一些描述需要进一步澄清，希望这些描述已经被纠正了。

我不确定这是否是我的最后一本书。如果是的话，我要感谢英国施普林格计算机科学编辑Helen Desmond，感谢她在过去几年的专业支持。如果这不是我的最后一本书，那么我期待着与她在另一个项目上再次合作。

Breinton, UK　　John Vince

第一版序

50多年前，当我正在学习成为一名电气工程师时，我遇到了复数，它们被用来用j操作符表示异相电压和电流。我相信使用的是字母j，而不是i，因为后者代表电流。因此，从我学习的一开始，我就在脑海中清晰地描绘了一个假想的单位，它是一个旋转算子，可以在时间上推进或延缓电量。

当事情决定我要从事计算机编程而不是电气工程的职业时，我不需要复数，直到Mandlebrot关于分形的工作出现。但那只是暂时的阶段，我从来都不需要在我的任何电脑图形软件中使用复数。然而在1986年，当我加入飞行模拟行业时，我看到了一份关于四元数的内部报告，它被用于控制模拟飞机的旋转方向。

我仍然记得我对四元数的困惑，仅仅是因为它们包含了很多虚数。然而，经过大量研究，我开始了解它们是什么，但不知道它们是如何工作的。与此同时，我对数学的哲学方面产生了兴趣，并试图通过伯特兰·罗素的著作来理解数学的"真正意义"。因此，像i这样的概念是一个智力挑战。

我现在对虚数i不过是一个符号的想法感到满意，并且在代数的上下文中允许定义$i^2=-1$。我相信，试图发现它存在的更深层次的意义是徒劳的。尽管如此，它在数学中是一个令人惊叹的对象，我经常想是否会有类似的对象等待被发明出来。

当我开始写关于计算机图形学的数学书籍时，我学习了复分析，以便有信心地写复数。就在那时，我发现了向量和四元数发明背后的历史事件，主要是通过Michael Crowe的优秀著作《向量分析的历史[4]》。这本书让我认识到理解数学发明如何以及为什么发生的重要性。

最近，我读到了Simon Altmann的书《旋转、四元数和双群[5]》，这本书提供了关于十九世纪四元数消亡[6]的进一步信息。Altmann非常热衷于确保Olinde Rodrigues的数学工作得到认可，后者发表了一个与汉密尔顿四元数生成的公式非常相似的公式。罗德里格斯发表论文的一个重要方面是，它比汉密尔顿在1843年发明四元数早了三年。然而，罗德里格斯并没有发明四元数代数——这个奖必须颁给汉密尔顿——但他确实理解三角函数中半角的重要性，三角函数用于围绕任意轴旋转点。

任何使用过欧拉变换的人都会意识到它的缺点，尤其是它的阿喀琉斯之踵:万向节锁。因此，任何可以围绕任意轴旋转点的设备都是程序员工具包中受欢迎的补充。在平面和空间中有许多旋转点和帧的技术，我在我的书《计算机图形的旋转变换[7]》中详细介绍了这些技术。那本书还涵盖了欧拉-罗德里格斯参数化和四元数，但只是在提交了手稿准备出版之后，我才决定写这本专门关于四元数的书，以及它们是如何和为什么被发明

[4] A History of Vector Analysis
[5] Rotations, Quaternions, and Double Groups
[6] demise，感觉不应该译为消亡
[7] Rotation Transforms for Computer Graphics

的，以及它们在计算机图形学中的应用。

在研究这本书的同时，阅读William Rowan Hamilton和他的朋友P.G. Tait的一些早期书籍和论文非常有启发性。我现在明白了完全理解四元数的意义是多么困难，以及如何利用它们。当时，没有围绕任意轴旋转点的主要需求;然而，需要一个数学系统来处理矢量。最后，四元数不再是当月的宠儿，慢慢地淡出了人们的视线。尽管如此，能够表示向量并对它们进行算术操作是汉密尔顿的一个重大成就，尽管乔赛亚·吉布斯(Josiah Gibbs)有远见地创建了一个简单可行的代数框架。

在这本书中，我试图描述一些围绕四元数发明的历史，以及对四元数代数的描述。我绝不认为自己是四元数方面的权威。我只是想谈谈我是如何理解它们的，希望对你们有用。四元数有不同的表示方式，但我最喜欢的是有序对，这是我在Simon Altmann的书中发现的。

这本书分为八章。第一章和最后一章是对本书的介绍和总结，共六章，内容包括以下主题。关于数集和代数的第二章回顾了与本书其余部分相关的符号和语言。有关于数集、公理、有序对、群、环和域的章节。这为读者准备了非交换四元数积，以及为什么四元数被描述为除法环。

第三章回顾了复数，并展示了复数如何表示为有序对和矩阵。第四章继续这一主题，介绍了复平面，并展示了复数的旋转特征。它还为读者准备了一个在19世纪早期提出的问题:是否有一个相当于复数的$3D$？

第五章通过描述汉密尔顿的发明来回答这个问题:四元数及其相关代数。我在书中加入了一些历史信息，以便读者了解Hamilton著作的重要性。虽然有序对是表示法的主要形式，但我也包括了矩阵表示法。

为了让读者了解四元数的旋转特性，第6章回顾了3D旋转变换，特别是欧拉角和万向节锁。我还开发了一个矩阵，用于使用向量和矩阵变换围绕任意轴旋转一个点。

第7章是本书的重点，描述了四元数如何围绕任意轴旋转向量。本章以一些历史信息开始，并解释了不同的四元数乘积如何旋转点。虽然四元数很容易使用它们的复杂形式或有序对符号来实现，但它们也有一个矩阵形式，这是从第一性原理发展而来的。本章继续讨论特征值、特征向量、围绕偏移轴旋转、旋转参照系、插值四元数以及四元数和旋转矩阵之间的转换。

每一章都有很多实际的例子来说明如何计算方程，每章末尾会给出进一步的例子。

写这本书是一段非常愉快的经历，我相信你也会喜欢读它，并从书中发现一些新的东西。

我要感谢米德尔塞克斯大学荣誉读者Tony Crilly博士，他阅读了一份手稿草稿，并纠正和澄清了我的注释和解释。托尼在我的书《计算机图形的旋转变换》中执行了相同的任务。我绝对信任他的数学知识，我感谢他的建议和专业知识。然而，我仍然为我可能犯的任何代数错误承担全部责任。

我还要感谢Patrick Riley教授，他阅读了手稿的一些早期草稿，并提出了一些关于四元数的有趣技术问题。这样的问题让我意识到我对四元数的一些描述需要进一步澄清，希望这些描述已经得到纠正。

我现在已经在我的三本书中使用了LaTeX2ε，并且对它的符号有了信心。尽管如此，我仍然需要致电施普林格的技术支持团队，感谢他们的帮助。

我不确定这是否是我的最后一本书。如果是的话，我要感谢贝弗利·福特，计算机科学的编辑主任，和海伦·德斯蒙德，施普林格英国计算机科学的副主编，他们在过去几年的专业支持。如果这不是我的最后一本书，那么我期待着在另一个项目上与他们再次合作。

Ringwood, UK John Vince

目录

第 1 章 介绍 **1**
1.1 旋转变换 1
1.2 目标读者 1
1.3 本书的宗旨和目标 1
1.4 数学技术 2
1.5 本书中的假设 2
第 2 章 数集与代数 **3**
2.1 介绍 3
2.2 数集 3
2.2.1 自然数 3
2.2.2 实数 3
2.2.3 整数 4
2.2.4 有理数 4
2.3 算术运算 4
2.4 公理 5
2.5 表达式 5
2.6 等式 6
2.7 有序对 6
2.8 群，环和域 8
2.8.1 群 8
2.8.2 阿贝尔群 9
2.8.3 环 9
2.8.4 域 10
2.8.5 除法环 10
2.9 总结 10
2.9.1 定义总结 11

第 3 章 复数 13

3.1 介绍 13

3.2 虚数 13

3.3 i的平方 14

3.4 复数的定义 15

3.4.1 复数的加减法 16

3.4.2 复数乘以标量 16

3.4.3 复数的乘积 16

3.4.4 复数的平方 17

3.4.5 复数的范数 17

3.4.6 复数的复共轭 17

3.4.7 复数的商 18

3.4.8 复数的逆 18

3.4.9 $\pm i$的平方根 19

3.5 复数的域结构 20

3.6 有序对 20

3.6.1 有序对的加法和减法 21

3.6.2 将有序对乘以标量 21

3.6.3 有序对乘积 21

3.6.4 有序对平方 22

3.6.5 有序对范数 23

3.6.6 有序对的复共轭 23

3.6.7 有序对的商 24

3.6.8 有序对的逆 24

3.6.9 $\pm i$的平方根 25

3.7 复数的矩阵表示 26

3.7.1 复数的加减法 27

3.7.2 两个复数的乘积 28

3.7.3 复数的范数平方 29

3.7.4 复数的复共轭 29

3.7.5 复数的逆 30

3.7.6 复数的商 30

3.7.7 $\pm i$的平方根 31

3.8 总结 32

3.8.1 定义总结 33

3.9 样例 . . . 38
第 4 章 复平面 . . . 47
4.1 介绍 . . . 47
4.2 一些历史 . . . 47
4.3 复平面 . . . 48
4.4 极坐标表示法 . . . 52
4.5 转子 . . . 55
4.6 总结 . . . 56
4.6.1 定义总结 . . . 56
4.7 样例 . . . 57
第 5 章 三元数和四元数 . . . 61
5.1 介绍 . . . 61
5.2 一些历史 . . . 61
5.3 三元数 . . . 62
5.3.1 三元数的加减法 . . . 62
5.4 四元数的诞生 . . . 63
第 6 章 四元数代数 . . . 65
6.1 介绍 . . . 65
6.2 一些历史 . . . 65
6.3 四元数定义 . . . 72
6.3.1 四元数单位 . . . 74
6.3.2 四元数乘积示例 . . . 75
6.4 代数定义 . . . 76
6.5 四元数加减法 . . . 76
6.6 实四元数 . . . 76
6.7 四元数乘以标量 . . . 77
6.8 纯四元数 . . . 78
6.9 单位四元数 . . . 79
6.10 四元数的加法形式 . . . 80
6.11 四元数的双体形式 . . . 80
6.12 四元数的复共轭 . . . 81
6.13 四元数的范数 . . . 82
6.14 归一化四元数 . . . 83
6.15 四元数乘积 . . . 84
6.15.1 纯四元数的乘积 . . . 84

6.15.2 两个归一化四元数的乘积 84
6.15.3 四元数的平方 86
6.15.4 四元数乘积的范数 87
6.16 逆四元数 87
6.17 矩阵 88
6.17.1 正交矩阵 89
6.18 四元数代数 90
6.19 总结 91
6.19.1 定义总结 91
6.20 样例 92

第 1 章 介绍

1.1 旋转变换

在计算机图形学中，我们使用变换来修改对象或虚拟摄像机的位置和方向。这种变换通常包括:缩放、平移和旋转。前两个变换很简单，但是旋转确实会引起问题。这是因为我们通常从围绕$x -$ ﬁy -和z-轴的单独旋转中构造一个旋转变换。尽管这样的转变行之有效，但还远远不够完美。真正需要的是一种直观、简单和准确的技术。

多年来，旋转变换包括方向余弦，欧拉角，欧拉-罗德里格斯参数化，四元数和多向量。最后两种技术是最新的，并且与历史相关。然而，这本书的主题是四元数，以及它们如何在计算机图形学中使用。

1.2 目标读者

这本书的目标读者学习或工作在计算机图形学和需要一个四元数的概述。他们可能就是我在互联网论坛上遇到过的询问四元数、它们如何工作以及如何编码的人。希望这本书能回答大部分问题。

1.3 本书的宗旨和目标

这本书的主要目的是向读者介绍四元数的主题，以及它们如何用于围绕任意轴旋转点。第二个目标是让读者意识到所有数学发现背后的人的层面。就我个人而言，我认为我们绝不能忽视这样一个事实:数学家也是人。尽管他们可能被赋予了非凡的数学技能，但他们恋爱、结婚、成家、死亡，留下了一座令人惊叹的知识大厦，我们都从中受益。

鼓励那些对数学的人类维度感兴趣的读者阅读四元数的发明，并发现爱、兴趣、坚韧、灵感和奉献是如何导致一项重大数学发现的。迈克尔·克罗的《矢量分析的历史》[1]是一本必不可少的书。这提供了导致四元数发明的事件的彻底分析，以及向量分析的出现。第二本书是Simon Altmann的《旋转、四元数和双群[2]》，除了提供了

四元数代数的现代分析外，还介绍了Olinde Rodrigues，他比通常被公认为四元数之父的William Rowan Hamilton早三年发明了一些与四元数相关的数学。

Simon Altmann对四元数代数的分析对我自己对四元数的看法产生了深远的影响，我试图在接下来的章节中传达这一点。特别地，我采用了使用有序对来表示四元数的思想。

本书的首要目标是使读者能够设计和编码四元数算法。读完这本书后，这应该是一个简单的练习，尽管我们处理的是一个四维数学对象。

1.4 数学技术

一旦读者理解了四元数，就会认为它们很简单。然而，如果这是你第一次遇到他们，他们可能会显得很奇怪。但像所有事物一样，熟悉带来理解和信心。

为了描述四元数，我需要用到一点三角学，一些向量理论和矩阵代数。由于四元数被描述为“超复数”，因此有一章是关于复数的。

1.5 本书中的假设

很多时候，从事计算机图形工作的人——比如我自己——没有机会学习技术文献中经常使用的数学水平。因此，我故意在写这本书的时候，温和地介绍了从复杂代数到四元数代数的形式数学符号。

参考文献

[1] Crowe, M.J.: A History of Vector Analysis. Dover, New York (1994)

[2] Altmann, S.L.: Rotations, Quaternions and Double Groups. Dover, New York (1986) ISBN-13: 978-0-486-44518-2

第 2 章 数集与代数

2.1 介绍

在这一章中，我们回顾了数集的一些基本概念，以及如何用算术和代数方法来处理它们。我们简要地看一下表达式和方程，以及用于它们的构造和求值的规则。反过来，这些揭示了用所谓的复数来扩展日常数字的必要性。本章的第二部分用于定义群、环和域。

2.2 数集

2.2.1 自然数

自然数是整数$1, 2, 3, 4$，等等，根据定义(DIN 5473)，自然数和零$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$的集合由符号$\mathbb{N}$表示，我们使用:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

语句

$$k \in \mathbb{N}$$

表示k属于集合$\mathbb{N}$，其中$\in$表示属于，或者换句话说，k是一个自然数。我们在本书中使用这种符号，以确保对所使用的数字数量的类型没有混淆。

$\mathbb{N}^*$用于表示集合$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$，没有零。

2.2.2 实数

十进制数构成了由 $\mathbb{R}$ 标识的实数集。这些数都是有符号的，可以组织成一条线，在$\pm$无穷之间延伸，并包括零。无穷大的概念很奇怪，德国数学家格奥尔格-康托尔（Georg Cantor，1845-1918 年）对其进行了研究。康托尔还发明了集合论，并证明实数比自然数更多。幸运的是，我们不需要在本书中使用这些概念。

使用实数集 $\mathbb{R}$ 表示维度，其中 $\mathbb{R}^2$ 表示二维，$\mathbb{R}^3$ 表示三维，$\mathbb{R}^n$ 表示 n 维。

2.2.3 整数

整数集合 $\mathbb{Z}$ 包含自然数及其负数：

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$\mathbb{Z}$ 代表 Zahlen—德语中的 "数字"。

2.2.4 有理数

有理数的集合是 $\mathbb{Q}$ ，包含形式如下的数：

$$\frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0$$

2.3 算术运算

我们使用算术运算加法、减法、乘法和除法来处理数字，其结果是否封闭或未定义，取决于底层集合。例如，当我们把两个自然数相加时，结果总是另一个自然数，因此，这个运算是封闭的：

$$3 + 4 = 7$$

但是，当我们用两个自然数相减时，结果不一定是自然数。例如，虽然

$$6 - 2 = 4$$

是封闭运算符，但是

$$2 - 6 = -4$$

不是封闭的，因为-4 不属于自然数集。

两个自然数的乘积总是一个封闭运算，但是除法会带来一些问题。首先，偶数自然数除以 2 是封闭运算：

$$\frac{16}{2} = 8$$

而奇数自然数除以偶数自然数得到的是十进制数：

$$\frac{7}{2} = 3.5$$

并不闭合，因为 3.5 不属于自然数集。在集合语言中，这可以写成

$$3.5 \notin \mathbb{N}$$

其中 $\notin$ 表示不属于。

任何数与零相乘的结果都是零—这是一个封闭运算；然而，任何数与零相除的结果都是不确定的，必须排除在外。

实数不存在任何与自然数相关的问题，加、乘、除运算都是封闭的：

$$
\begin{aligned}
a + b &= c, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \\
ab &= c, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \\
\frac{a}{b} &= c, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \text{ and } b \neq 0.
\end{aligned}
$$

2.4 公理

当我们构建代数表达式时，我们会运用被称为公理的特定法则。对于加法和乘法，我们知道数字的分组对最终结果没有影响：例如，$2 + (4 + 6) = (2 + 4) + 6$ 和 $2 \times (3 \times 4) = (2 \times 3) \times 4$。这就是联立公理，其表达式为：

$$
\begin{aligned}
a + (b + c) &= (a + b) + c \\
a(bc) &= (ab)c.
\end{aligned}
$$

我们还知道，在进行加法或乘法运算时，顺序对最终结果没有影响：例如，$2 + 6 = 6 + 2$，$2 \times 6 = 6 \times 2$。这就是交换公理，其表达式为

$$
\begin{aligned}
a + b &= b + a \\
ab &= ba.
\end{aligned}
$$

代数表达式包含了一个实数和一串实数的乘积，它们服从分配律：

$$
\begin{aligned}
a(b + c) &= ab + ac \\
(a + b)(c + d) &= ac + ad + bc + bd.
\end{aligned}
$$

我们回顾这些公理的原因是，它们不应该被认为是刻在数学石头上的，并适用于所有发明的东西。因为当我们谈到四元数时，我们发现它们不遵守交换公理，这并不奇怪。如果你用过矩阵，你会知道矩阵乘法也是不符合交换律的，但它是符合结合律的。

2.5 表达式

使用上述公理，我们可以构造各种表达式，例如：

$$
\begin{gathered}
a(2 + c) - \frac{d}{e} + a - 10 \\
\frac{g}{ac - bd} + \frac{h}{de - fg}.
\end{gathered}
$$

我们也使用符号来表示一个量的幂，例如n^2。这个符号引入了另一组观察结果:

$$
\begin{aligned}
a^n a^m &= a^{n+m} \\
\frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} \\
(a^n)^m &= a^{nm} \\
\frac{a^n}{a^n} &= a^0 = 1 \\
\frac{1}{a^n} &= a^{-1} \\
a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a}.
\end{aligned}
$$

接下来，我们要包括各种各样的函数，比如平方根，正弦和余弦，这些看起来很简单。但我们必须警惕他们。例如，$\sqrt{16} = \pm 4$，而$\sqrt{-16}$没有自然数或实数解。因此，如果$a < 0$，表达式$\sqrt{a}$没有实根。类似地，当处理正弦和余弦等三角函数时，我们必须记住，它们的取值范围在-1到$+1$之间，包括0，这意味着如果它们被用作分母，结果可能是未定义的。例如，如果 $\sin\alpha = 0$，下面这个表达式没有定义，

$$
\frac{a}{\sin\alpha}
$$

2.6 等式

接下来是等式，我们将表达式的值赋给一个变量。 在大多数情况下，赋值都是简单明了的，并会得到一个真实的结果，例如

$$
x^2 - 16 = 0
$$

其中 $x = \pm 4$。但有趣的是，只要将符号反转为

$$
x^2 + 16 = 0
$$

我们建立了一个没有实数解的方程。不过，有一个复数解，这就是第 3 章的主题。

2.7 有序对

有序对或对偶 (a, b)是具有两个条目、坐标或投影的对象，其中第一个条目或左条目可与第二个条目或右条目区分开来。例如，(a, b) 与(b, a) 是可以区分的，除非 $a = b$。(x, y) 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的一个点，可能是有序对的最好例子，其中条目的顺序总是先是 x 坐标，然后是 y 坐标。

在计算机图形学中，有序对和有序三元组广泛用于表示$\mathbb{R}^2$：(x,y)中的点，$\mathbb{R}^3$：(x,y,z)中的点，以及诸如$(\mathrm{r},\mathrm{g},\mathrm{b})$和$(h,s,v)$等颜色值。在这些示例中，字段都是实数。没有什么可以阻止我们使用有序对开发一个代数，它的行为就像另一个代数，我们将在第三章对复数和第六章对四元数这样做。现在，让我们探索一些可以操作有序对的方法。

假设我们选择将一般有序对描述为

$$a=(a_1,a_2)\,,\quad a_1,a_2\in\mathbb{R}$$

我们将把两个这样的对象相加定义为

$$\begin{aligned}a&=(a_1,a_2)\\b&=(b_1,b_2)\\a+b&=(a_1+b_1,a_2+b_2)\,.\end{aligned}$$

举例：

$$\begin{aligned}a&=(2,3)\\b&=(4,5)\\a+b&=(6,8).\end{aligned}$$

我们将乘积定义为

$$ab=(a_1b_1,a_2b_2)$$

根据上述数值，得出

$$ab=(8,15)$$

记住，我们说了算，规则由我们定义。

另一条规则将控制有序数对如何响应标量乘法。例如

$$\begin{aligned}\lambda\,(a_1,a_2)&=(\lambda a_1,\lambda a_2)\,,\quad\lambda\in\mathbb{R}\\3(2,3)&=(6,9).\end{aligned}$$

根据上述规则，我们可以写出

$$\begin{aligned}(a_1,a_2)&=(a_1,0)+(0,a_2)\\&=a_1(1,0)+a_2(0,1)\end{aligned}$$

如果我们用乘积法则将$(1,0)$ 和$(0,1)$ 这两个单位有序对平方，就可以得到

$$\begin{aligned}(1,0)^2&=(1,0)\\(0,1)^2&=(0,1)\end{aligned}$$

这表明它们的行为与实数类似，并不出人意料。

这似乎不是很有用，但请拭目以待，看看在复数和四元数的背景下会发生什么。

2.8 群，环和域

数学家使用了一系列令人困惑的名称来标识他们的发明，这些发明似乎每天都在出现。就连 "四元数 "这个名字也不是原创的，在历史上经常出现在 "士兵的四人组 "的语境中：

> 罗马人派出四人组(quaternion)或四个人进行夜间守卫...... [1].

在不太正式的情况下，让我们探索一些与本书中包含的思想相关的更多数学结构。

2.8.1 群

我们已经讨论了集合的概念，以及属于集合的含义。我们还发现，当对集合的成员应用某些算术运算时，可以确保闭合、非闭合或结果未定义。

当将集合与算术运算结合在一起时，可以方便地创建另一个实体：一个群，它是一个集合，以及描述集合元素如何组合的公理。该集合可能包含数字、矩阵、向量、四元数、多项式等，并在下面表示为a, b和c。

该公理使用' $\circ$ '符号来表示任何二进制运算，例如$+ - \times$。一个群是由一个集合和一个二进制运算组成的。例如，我们可能希望在加法运算下形成一个整数群:$(\mathbb{Z}, +)$，或者我们可能希望检查四元数是否在乘法运算下形成一个群:$(\mathbb{H}, \times)$。

要成为一个群，以下所有公理必须在集合 S 中成立。 特别是，必须有一个特殊的单位元 $e \in S$ ，而且对于每个 $a \in S$ ，必须存在一个逆元 $a^{-1} \in S$中，这样就满足了以下公理：

$$\begin{aligned}
&\text{闭合律:} && a \circ b \in S, && a, b \in S.\\
&\text{结合律:} && (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), && a, b, c \in S.\\
&\text{单位元:} && a \circ e = e \circ a = a, && a, e \in S.\\
&\text{逆元:} && a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e, && a, a^{-1}, e \in S.
\end{aligned}$$

我们把一个群描述为$(S, \circ)$，其中S是集合，$\circ$是运算。例如，$(\mathbb{Z}, +)$是加法运算下的整数群，$(\mathbb{R}, \times)$是乘法运算下的实数群。

让我们用三个例子来说明这些公理。$(\mathbb{Z}, +)$：整数$\mathbb{Z}$在加法运算下组成一个群:

$$\begin{aligned}
&\text{闭合律:} && -23 + 24 = 1.\\
&\text{结合律:} && (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9.\\
&\text{单位元:} && 2 + 0 = 0 + 2 = 2.\\
&\text{逆元:} && 2 + (-2) = (-2) + 2 = 0.
\end{aligned}$$

$(\mathbb{Z},\times)$：整数$\mathbb{Z}$在乘法下不构成一个群:

$$\begin{aligned}
\text{闭合律:}\quad & -2\times 4=-8.\\
\text{结合律:}\quad & (2\times 3)\times 4=2\times(3\times 4)=24.\\
\text{单位元:}\quad & 2\times 1=1\times 2=2.\\
\text{逆元:}\quad & 2^{-1}=0.5\quad (0.5\notin\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

同样，整数0没有逆。

$(\mathbb{Q},\times)$：非零有理数组成的乘法下的群:

$$\begin{aligned}
\text{闭合律:}\quad & \tfrac{2}{5}\times\tfrac{2}{3}=\tfrac{4}{15}.\\
\text{结合律:}\quad & \left(\tfrac{2}{5}\times\tfrac{2}{3}\right)\times\tfrac{1}{2}=\tfrac{2}{5}\times\left(\tfrac{2}{3}\times\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{2}{15}.\\
\text{单位元:}\quad & \tfrac{2}{3}\times\tfrac{1}{1}=\tfrac{1}{1}\times\tfrac{2}{3}=\tfrac{2}{3}.\\
\text{逆元:}\quad & \tfrac{2}{3}\times\tfrac{3}{2}=\tfrac{1}{1}\quad\left(\text{其中 }\tfrac{3}{2}=\left(\tfrac{2}{3}\right)^{-1}\right).
\end{aligned}$$

2.8.2 阿贝尔群

最后，阿贝尔群以挪威数学家尼尔斯-亨里克-阿贝尔（Neils Henrik Abel，1802-1829年）的名字命名，是一个元素的顺序不会影响结果的群。因此有五个公理：闭合律、结合律、单位元、逆元和交换律:

$$\text{交换律: } a\circ b=b\circ a,\quad a,b\in S.$$

例如，整数集合在普通加法$(\mathbb{Z},+)$下构成一个无性群。然而，由于 3 -D 旋转一般不换向，三维空间中所有旋转的集合形成了一个非交换群。

2.8.3 环

环是一个扩展群，其中有一组可以相加和相乘的对象，但要遵守一些精确的公理。有实数环、复数环、整数环、矩阵环、方程环、多项式环等。环被正式定义为一个系统，其中$(S,+)$和$(S,\times)$是非良群和分配公理:

环是一个扩展的群，在这里我们有一集合对象，这些对象可以相加和相乘，服从一些精确的公理。有实数环、复数环、整数环、矩阵环、方程环、多项式环等。一个环被正式定义为一个系统，其中$(S,+)$和$(S,\times)$是阿贝尔群和分配律公理:

$$\begin{aligned}
\text{加法结合律:}\quad & a+(b+c)=(a+b)+c,\quad a,b,c\in S.\\
\text{乘法结合律:}\quad & a\times(b\times c)=(a\times b)\times c,\quad a,b,c\in S.\\
\text{分配律:}\quad & a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c),\quad \text{和}\\
& (a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c),\quad a,b,c\in S.
\end{aligned}$$

例如，我们已经知道整数$\mathbb{Z}$在加法运算下构成一个群，但它们也构成一个环，因为该集合满足上述公理:

$$
\begin{aligned}
2\times(3\times 4)&=(2\times 3)\times 4\\
2\times(3+4)&=(2\times 3)+(2\times 4)\\
(2+3)\times 4&=(2\times 4)+(3\times 4).
\end{aligned}
$$

2.8.4 域

虽然环支持加法和乘法，但它们不一定支持除法。然而，由于除法是如此重要的算术运算，因此创建了该字段来支持除法，但有一个附带条件:不允许除零。因此，我们有实数$\mathbb{R}$的域，有理数$\mathbb{Q}$的域，以及我们将看到的复数$\mathbb{C}$的域。然而，我们会发现四元数并不构成域，但它们确实构成了所谓的除法环。

由此可见，每个域都是一个环，但并非每个环都是一个域。

2.8.5 除法环

除法环或除法代数是一个环，其中每个元素都有一个逆元素，附带条件是该元素非零。代数也支持非交换乘法。下面是除法环$(S,+,\times)$的正式描述:

$$
\begin{aligned}
&\text{加法结合律:} && (a+b)+c=a+(b+c), && a,b,c\in S.\\
&\text{加法交换律:} && a+b=b+a, && a,b\in S.\\
&\text{加法单位元 0:} && 0:0+a=a+0, && a,0\in S.\\
&\text{加法逆元:} && a+(-a)=(-a)+a=0, && a,-a\in S.\\
&\text{乘法结合律:} && (a\times b)\times c=a\times(b\times c), && a,b,c\in S.\\
&\text{乘法单位元 1:} && 1\times a=a\times 1, && a,1\in S.\\
&\text{乘法逆元:} && a\times a^{-1}=a^{-1}\times a=1, && a,a^{-1}\in S,a\neq 0.\\
&\text{分配律:} && a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c), && \text{和}\\
& && (b+c)\times a=(b\times a)+(c\times a), && a,b,c\in S.
\end{aligned}
$$

1877 年，德国数学家费迪南德-乔治-弗罗贝纽斯（Ferdinand Georg Frobenius，1849-1917 年）证明了只有三个联立除法代数：实数 $\mathbb{R}$、复数 $\mathbb{C}$、四元数 $\mathbb{H}$。

2.9 总结

本章的目的是提醒大家代数的公理系统，以及算术运算的结果可以是开放的、闭合的或未定义的。也许有些有序对、集合、群、域和环的概念是新的，由于这些符号经常与四元数联系在一起使用，所以也包括在内。

当我们考虑复数代数以及后来的四元数时，所有这些想法都会再次出现。

2.9.1 定义总结

有序对

具有两个可区分组件的对象:(a, b)，使得$(a, b) \neq (b, a)$除非$a = b$。

集合

定义： 集合是对象的集合。

符号: $k \in \mathbb{Z}$ 表示 k 属于集合 $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{C}$: 复数集

$\mathbb{H}$: 四元数集

$\mathbb{N}$: 自然数集

$\mathbb{Q}$: 有理数集

$\mathbb{R}$: 实数集

$\mathbb{Z}$: 整数集.

群

定义： 一个群 $(S, \circ)$ 是一个集合 S 和一个二元运算'$\circ$'以及定义了闭合律、结合律、单位元和逆元的公理。

$$\begin{aligned}
\text{闭合律:} \quad & a \circ b \in S, & a, b \in S. \\
\text{结合律:} \quad & (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), & a, b, c \in S. \\
\text{单位元:} \quad & a \circ e = e \circ a = a, & a, e \in S. \\
\text{逆元:} \quad & a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e, & a, a^{-1}, e \in S.
\end{aligned}$$

环

定义:环是一个群，它的元素可以加/减/乘，使用一些严格的公理:

$$\begin{aligned}
\text{加法结合律:} \quad & a + (b + c) = (a + b) + c, & a, b, c \in S. \\
\text{乘法结合律:} \quad & a \times (b \times c) = (a \times b) \times c, & a, b, c \in S. \\
\text{分配律:} \quad & a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c), & \text{和} \\
& (a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c), & a, b, c \in S.
\end{aligned}$$

域

定义:域是支持除法的环。

除法环

除法环的每个元素都有一个逆元，但该逆元非零。代数也支持非交换乘法。

$$
\begin{aligned}
\text{加法结合律:}\quad & (a+b)+c = a+(b+c), && a,b,c \in S.\\
\text{加法交换律:}\quad & a+b = b+a, && a,b \in S.\\
\text{加法单位元 0:}\quad & 0: 0+a = a+0, && a,0 \in S.\\
\text{加法逆元:}\quad & a+(-a) = (-a)+a = 0, && a,-a \in S.\\
\text{乘法结合律:}\quad & (a\times b)\times c = a\times(b\times c), && a,b,c \in S.\\
\text{乘法单位元 1:}\quad & 1\times a = a\times 1, && a,1 \in S.\\
\text{乘法逆元:}\quad & a\times a^{-1} = a^{-1}\times a = 1, && a,a^{-1} \in S, a\neq 0.\\
\text{分配律:}\quad & a\times(b+c) = (a\times b)+(a\times c), && \text{和}\\
& (b+c)\times a = (b\times a)+(c\times a), && a,b,c \in S.
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] Robinson, E.: Greek and English Lexicon of the New Testament (1825). http://books.google. co.uk

第 3 章 复数

3.1 介绍

在这一章中，我们将发现没有实数根的方程是如何产生虚数i，它的平方是-1。这反过来又引导我们了解复数以及如何用代数方法处理它们。与四元数相关的许多特性都可以在复数中找到，这就是为什么它们值得仔细研究的原因。对此主题感兴趣的读者可能想看看作者的《计算机科学的虚数数学》(*Imaginary Mathematics for Computer Science*)一书[1]。

3.2 虚数

虚数的发明是为了解决方程没有实根的问题，例如$x^2+16=0$。声明一个量i的存在性，使得$i^2=-1$，这个简单的思想允许我们将这个方程的解表示为

$$x = \pm 4i$$

试图发现i到底是什么是没有意义的，i实际上只是一个平方为-1的数学对象。尽管如此，这是一个很棒的发明，并且确实适合于图形化的解释，我们将在下一章中对此进行研究。

1637年，法国数学家雷诺·笛卡尔(René Descartes, 1596-1650)发表了一篇论文《几何形状》[2]，他在文中指出，包含$\sqrt{-1}$的数字是“虚数”，几个世纪以来，这个标签一直被贴上。不幸的是，这是一个贬义的评论，并且i没有任何虚构的东西-它实际上只是一个平方为-1的东西，当嵌入代数中时，会产生一些惊人的模式。

关于如何称呼这组虚数，似乎没有达成任何共识——事实上，甚至有人认为虚数是不必要的。但是，如果您决定使用一个，则可能是$\mathbb{I}$或$I\mathbb{R}$。因此，虚数可以定义为

$$bi \in i\mathbb{R}, \quad i^2 = -1$$

3.3 i的平方

由于$i^2 = -1$，那么应该可以将i提高到其他幂。例如,

$$i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$$

和

$$i^5 = i i^4 = i$$

因此，我们有这个序列:

i^0	i^1	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6
1	i	-1	$-i$	1	i	-1

循环模式$(1, i, -1, -i, 1, \ldots)$非常引人注目，它让我们想起了一个类似的模式$(x, y, -x, -y, x, \ldots)$，它是通过逆时针方向绕笛卡尔轴旋转产生的。这种相似性是不能忽视的，因为当实数轴与垂直的虚轴结合在一起时，就产生了所谓的复平面。但更多的内容在下一章。

以上顺序总结为:

$$i^{4n} = 1$$
$$i^{4n+1} = i$$
$$i^{4n+2} = -1$$
$$i^{4n+3} = -i$$

其中 $n \in \mathbb{N}$.

那么负幂呢?嗯，它们也是可能的。考虑i^{-1}，其计算如下:

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1(-i)}{i(-i)} = \frac{-i}{1} = -i$$

类似的

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

和

$$i^{-3} = i^{-1} i^{-2} = -i(-1) = i$$

与负幂递增相关的数列为:

i^0	i^{-1}	i^{-2}	i^{-3}	i^{-4}	i^{-5}	i^{-6}
1	$-i$	-1	i	1	$-i$	-1

这一次循环模式被反转为$(1, -i, -1, i, 1, \ldots)$，并且类似于模式$(x, -y, -x, y, x, \ldots)$，它是通过顺时针方向绕笛卡尔轴旋转产生的。

也许最奇怪的幂是它本身：i^i，它恰好等于$e^{-\pi/2} = 0.207879576\ldots$ [1]。在第四章作了说明。回顾了虚数i的某些特征之后，让我们来看看当它与实数结合时会发生什么。

3.4 复数的定义

根据定义，复数是实数和虚数的组合，表示为

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1$$

复数的集合是$\mathbb{C}$，这允许我们将$z \in \mathbb{C}$中。例如，$3 + 4i$是一个复数，其中3是实部，$4i$是虚部。以下均为复数:

$$3, \quad 3 + 4i, \quad -4 - 6i, \quad 7i, \quad 5.5 + 6.7i$$

实数也是复数——它只是没有虚部。这导致了实数集合是复数子集的想法，其表示为:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

其中 $\subset$表示是后面几何的一个子集。

虽然有些数学家把i放在它的乘数$i4$之前，但其他人把它放在乘数$4i$之后，这是本书中使用的惯例。但是，当i与三角函数相关联时，最好将其放在函数之前，以避免与函数的角度混淆。例如，$\sin\ \alpha i$表示角度是虚数，而$i\sin\alpha$表示$\sin\alpha$的值是虚数。因此，复数可以用各种方法构造:

$$\sin\alpha + i\cos\beta, \quad 2 - i\tan\alpha, \quad 23 + x^2 i$$

一般来说，我们把一个复数写成$a + bi$，并遵从实代数的常规规则。我们所要记住的是，当我们遇到i^2时，它被-1替换。例如:

$$\begin{aligned}(2+3i)(3+4i) &= 2\times 3 + 2\times 4i + 3i\times 3 + 3i\times 4i \\ &= 6 + 8i + 9i + 12i^2 \\ &= 6 + 17i - 12 \\ &= -6 + 17i.\end{aligned}$$

[1]译者注，和网友讨论，并不止这一种结果，正确的结果应该如此:

$$\begin{aligned} i &= \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \\ &= e^{i(\pi/2+2k\pi)}, \qquad k \in \mathbb{Z} \\ i^i &= e^{-(\pi/2+2k\pi)}, \qquad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

3.4.1 复数的加减法

给出两个复数

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$
$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

然后

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\, i$$

其中实部和虚部分别相加或减去。只要$a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$，这些操作是闭合的。 比如

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 + 3i \\ z_2 &= 4 + 2i \\ z_1 + z_2 &= 6 + 5i \\ z_1 - z_2 &= -2 + i. \end{aligned}$$

3.4.2 复数乘以标量

使用一般代数规则将一个复数乘以一个标量。例如，复数$a + bi$乘以标量λ，如下所示:

$$\lambda(a + bi) = \lambda a + \lambda bi$$

一个例子如下

$$3(2 + 5i) = 6 + 15i$$

3.4.3 复数的乘积

给出两个复数

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$
$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

它们的乘积是

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 i)\,(a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\, i \end{aligned}$$

这是另一个复数，确认运算是闭合的。例如:

$$\begin{aligned} z_1 &= 3+4i \\ z_2 &= 3-2i \\ z_1z_2 &= (3+4i)(3-2i) \\ &= 9-6i+12i-8i^2 \\ &= 9+6i+8 \\ &= 17+6i. \end{aligned}$$

注意，复数的加法、减法和乘法服从代数的一般公理。

3.4.4 复数的平方

给定一个复数z，其平方z^2为:

$$\begin{aligned} z &= a+bi \\ z^2 &= (a+bi)(a+bi) \\ &= \left(a^2-b^2\right)+2abi \end{aligned}$$

示例:

$$\begin{aligned} z &= 4+3i \\ z^2 &= (4+3i)(4+3i) \\ &= \left(4^2-3^2\right)+2\times 4\times 3i \\ &= 7+24i. \end{aligned}$$

3.4.5 复数的范数

复数z的范数、模数或绝对值写成$|z|$，被定义为

$$\begin{aligned} z &= a+bi \\ |z| &= \sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$$

例如，$3+4i$的范数是5。当我们学习复数的极坐标表示时，我们会看到为什么会这样。

3.4.6 复数的复共轭

两个复数的乘积，只有虚部的符号不同，就得到一个特殊的结果:

$$\begin{aligned} (a+bi)(a-bi) &= a^2-abi+abi-b^2i^2 \\ &= a^2+b^2 \end{aligned}$$

这种类型的乘积总是得到一个实数，并用于解决两个复数的商。因为这个实值是一个非常有趣的结果，所以$a-bi$被称为$z=a+bi$的复共轭，它可以用一个条形 $\bar{z}$ 或一个星号 z^* 来表示

$$zz^*=a^2+b^2=|z|^2.$$

举例

$$\begin{aligned}z&=3+4i\\z^*&=3-4i\\zz^*&=9+16=25.\end{aligned}$$

3.4.7 复数的商

复数共轭为我们提供了一种将一个复数除以另一个复数的方法。例如，商

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}$$

通过将分子和分母乘以分母的复共轭a_2-b_2i来求解，得到一个实数分母:

$$\begin{aligned}\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}&=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}\\&=\frac{a_1a_2-a_1b_2i+b_1a_2i-b_1b_2i^2}{a_2^2+b_2^2}\\&=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)+\left(\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)i.\end{aligned}$$

举例，求解

$$\frac{4+3i}{3+4i}$$

上下同时乘以共轭复数 $3-4i$

$$\begin{aligned}\frac{4+3i}{3+4i}&=\frac{(4+3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}\\&=\frac{12-16i+9i-12i^2}{25}\\&=\frac{24}{25}-\frac{7}{25}i\end{aligned}$$

3.4.8 复数的逆

为了计算$z=a+b$的逆函数，我们先

$$z^{-1}=\frac{1}{z}.$$

上下同时乘以z^*就得到

$$z^{-1}=\frac{z*}{zz^*}$$

但我们之前已经证明了$zz^* = |z|^2$，因此，

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{z^*}{|z|^2} \\ &= \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) - \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right) i \end{aligned}$$

举个例子，$3+4i$的逆是

$$(3+4i)^{-1} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

让我们用$3+4i$乘以它的逆来测试这个结果:

$$(3+4i)\left(\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i\right) = \frac{9}{25} - \frac{12}{25}i + \frac{12}{25}i + \frac{16}{25} = 1$$

这证实了结果的正确性。

3.4.9 $\pm i$的平方根

为了求出$\sqrt{i}$，我们假设根是复根。因此，我们先

$$\begin{aligned} \sqrt{i} &= a + bi \\ i &= (a+bi)(a+bi) \\ &= a^2 + 2abi - b^2 \\ &= a^2 - b^2 + 2abi \end{aligned}$$

等于实部和虚部

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 0 \\ 2ab &= 1. \end{aligned}$$

由此我们可以推断

$$a = b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

因此，根是

$$\sqrt{i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

让我们通过平方每个根来测试这个结果，以确保答案是i:

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (1+i)(1+i) = \frac{1}{2}2i = i$$

为了求出$\sqrt{-i}$，我们假设根是复数。因此，我们先

$$\begin{aligned} \sqrt{-i} &= a + bi \\ -i &= (a+bi)(a+bi) \\ &= a^2 + 2abi - b^2 \\ &= a^2 - b^2 + 2abi \end{aligned}$$

等于实部和虚部

$$a^2 - b^2 = 0$$

$$2ab = -1$$

由此我们可以推断

$$a = b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

因此，根是

$$\begin{aligned}\sqrt{-i} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i(1+i)\\ &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\\ &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\end{aligned}$$

让我们通过对每个根进行平方来测试这个结果，以确保答案是$-i$:

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(1-i)(1-i) = -\frac{1}{2}2i = -i$$

在下一章中，我们将使用这些根来研究复数的旋转性质。

3.5 复数的域结构

复数集合$\mathbb{C}$是一个域，因为它满足前面定义的域规则。

3.6 有序对

到目前为止，我们选择将复数表示为$a+bi$，这样可以区分实部和虚部。然而，有一件事我们不能假设，那就是实部总是在前面，虚部总是在后面，因为b i+a也是一个复数。因此，采用两个函数提取实、虚系数如下:

$$\mathrm{Re}(a+bi) = a$$

$$\mathrm{Im}(a+bi) = b$$

这让我们想到了用有序对来表示一个复数，在有序对的情况下

$$a+bi = (a, b)$$

其中b跟在a后面以定义顺序。因此复数的集合$\mathbb{C}$等价于有序对(a, b)的集合$\mathbb{R}^2$。

把复数写成有序对是一个伟大的贡献，最早是由汉密尔顿(Hamilton)在1833年提出的。这样的符号非常简洁，没有任何想象的术语，可以在需要的时候添加。

3.6.1 有序对的加法和减法

给出两个复数:

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$
$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

它们被写成有序对:

$$z_1 = (a_1, b_1)$$
$$z_2 = (a_2, b_2)$$

且

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2)$$

其中两部分分别相加或相减。

举例

$$z_1 = 2 + 3i = (2, 3)$$
$$z_2 = 4 + 2i = (4, 2)$$
$$z_1 + z_2 = (6, 5)$$
$$z_1 - z_2 = (-2, 1).$$

3.6.2 将有序对乘以标量

我们已经看到如何将复数乘以标量，标量一定对有序对相同:

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$$

示例

$$3(2, 5) = (6, 15)$$

3.6.3 有序对乘积

给出两个复数

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$
$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

它们的乘积是

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\, i$$

它也必须适用于有序对:

$$\begin{aligned} z_1 &= (a_1, b_1) \\ z_2 &= (a_2, b_2) \\ z_1 z_2 &= (a_1, b_1)(a_2, b_2) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \end{aligned}$$

举例

$$\begin{aligned} z_1 &= (6, 2) \\ z_2 &= (4, 3) \\ z_1 z_2 &= (6, 2)(4, 3) \\ &= (24 - 6, 18 + 8) \\ &= (18, 26). \end{aligned}$$

3.6.4 有序对平方

复数的平方为:

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ z^2 &= (a + bi)(a + bi) \\ &= \left(a^2 - b^2\right) + 2abi \end{aligned}$$

因此，有序对的平方为:

$$\begin{aligned} z &= (a, b) \\ z^2 &= (a, b)(a, b) \\ &= \left(a^2 - b^2, 2ab\right) \end{aligned}$$

举例

$$\begin{aligned} z &= (4, 3) \\ z^2 &= (4, 3)(4, 3) \\ &= \left(4^2 - 3^2, 2 \times 4 \times 3\right) \\ &= (7, 24) \end{aligned}$$

我们继续探索一个基于有序对的代数，它和复数代数是一样的。我们先写出

$$\begin{aligned} z &= (a, b) \\ &= (a, 0) + (0, b) \\ &= a(1, 0) + b(0, 1) \end{aligned}$$

它创建了单位有序对$(1, 0)$和$(0, 1)$。

现在我们来计算乘积$(1,0)(1,0)$

$$\begin{aligned}(1,0)(1,0) &= (1-0,0)\\ &= (1,0)\end{aligned}$$

这表明$(1,0)$表现得像实数1。即$(1,0)=1$。

接下来，让我们计算乘积$(0,1)(0,1)$:

$$\begin{aligned}(0,1)(0,1) &= (0-1,0)\\ &= (-1,0)\end{aligned}$$

这获得了实数 -1：

$$(0,1)^2 = -1$$

或

$$(0,1) = \sqrt{-1} \text{ 是一个虚数}$$

这意味着有序对(a,b)及其相关规则表示一个复数。即$(a,b)\equiv a+bi$。

3.6.5 有序对范数

有序对z的范数、模数或绝对值写成$|z|$，被定义为

$$\begin{aligned}z &= (a,b)\\ |z| &= \sqrt{a^2+b^2}\end{aligned}$$

比如，$(3,4)$的范数是5.

3.6.6 有序对的复共轭

$z=a+bi$的复共轭定义为$z^*=a-bi$，其在有序对中表示为$z^*=(a,-b)$:

$$\begin{aligned}z &= (a,b)\\ z^* &= (a,-b)\\ zz^* &= (a,b)(a,-b)\\ &= \big(a^2+b^2, ba-ab\big)\\ &= \big(a^2+b^2, 0\big)\\ &= a^2+b^2 = |z|^2.\end{aligned}$$

3.6.7 有序对的商

解析z_1/z_2的技术是将表达式乘以z_2^*/z_2^*，使用有序对是

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a_1,b_1)}{(a_2,b_2)}\\ &= \frac{(a_1,b_1)}{(a_2,b_2)}\frac{(a_2,-b_2)}{(a_2,-b_2)}\\ &= \frac{(a_1a_2+b_1b_2, b_1a_2-a_1b_2)}{(a_2^2+b_2^2,0)}\\ &= \left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}, \frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right).\end{aligned}$$

比如，求解

$$\frac{(4,3)}{(3,4)}$$

上下同时乘以共轭复数(3fi − 4)

$$\begin{aligned}\frac{(4,3)}{(3,4)} &= \frac{(4,3)(3,-4)}{(3,4)(3,-4)}\\ &= \left(\frac{12+12}{25}, \frac{9-16}{25}\right)\\ &= \left(\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}\right).\end{aligned}$$

3.6.8 有序对的逆

我们之前已经证明了z^{-1}是

$$z^{-1} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

这使用有序对表示是

$$\begin{aligned}z &= (a,b)\\ z^{-1} &= \frac{(a,-b)}{(a,b)(a,-b)}\\ &= \frac{(a,-b)}{(a^2+b^2,0)}\\ &= \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right).\end{aligned}$$

作为一个例子，$(3,4)$的逆是

$$(3,4)^{-1} = \left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}\right)$$

让我们用$(3,4)$乘以它的逆来测试这个结果:

$$\begin{aligned}(3,4)\left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}\right) &= \left(\frac{9}{25}+\frac{16}{25}, -\frac{12}{25}+\frac{12}{25}\right)\\ &= (1,0).\end{aligned}$$

3.6.9 $\pm i$的平方根

为了求出$\sqrt{i}$，我们假设根是复根。因此，我们先

$$\begin{aligned}\sqrt{i} &= (a,b)\\ i &= (a,b)(a,b)\\ (0,1) &= \big(a^2-b^2, 2ab\big)\end{aligned}$$

等于左序元素和右序元素

$$\begin{aligned}a^2-b^2 &= 0\\ 2ab &= 1.\end{aligned}$$

由此我们可以推断

$$a = b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

因此，根是

$$\sqrt{i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$$

让我们通过平方每个根来测试这个结果，以确保答案是i:

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(1,1)(1,1) = \frac{1}{2}(0,2) = (0,1)$$

为了求出$\sqrt{-i}$，我们假设根是复数。因此，我们先

$$\begin{aligned}\sqrt{-i} &= (a,b)\\ -i &= (a,b)(a,b)\\ (0,-1) &= \big(a^2-b^2, 2ab\big)\end{aligned}$$

等于左序元素和右序元素

$$\begin{aligned}a^2-b^2 &= 0\\ 2ab &= -1\end{aligned}$$

由此我们可以推断

$$\begin{aligned}a = b &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i\\ &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(0,1)(1,1)\\ &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1)\end{aligned}$$

因此，根是

$$\sqrt{-i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1)$$

让我们通过对每个根进行平方来测试这个结果，以确保答案是$-i$:

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(1,-1)(1,-1)=\frac{1}{2}(0,-2)=(0,-1)$$

从上面的定义可以明显看出，有序对为表示复数提供了另一种符号，其中虚特征嵌入到乘积公理中。我们还将使用有序对来定义具有三个虚项的四元数，当将它们合并到乘积公理中时，它们仍然是隐藏的。

3.7 复数的矩阵表示

由于四元数具有矩阵表示，也许我们应该研究复数的矩阵表示。

虽然我只是暗示了i可以被看作某种旋转算子，但这是把它形象化的完美方式。在第4章中，我们发现将一个复数乘以i可以有效地逆时针旋转90°。所以现在，它可以用90°的旋转矩阵来表示:

$$i\equiv\begin{bmatrix}\cos 90^\circ & -\sin 90^\circ\\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

和2×2的单位矩阵是

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

这允许我们将复数写成:

$$\begin{aligned}a+bi&=a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -b\\ b & 0\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

注意，这个矩阵运算表示 i 平方到 -1:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\\ &=-1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

然而，我们也必须记住 $i^2 = (-i)^2 = -1$，这被解释为复平面上的逆时针和顺时针旋转。这一点得到以下方面的证实:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= -1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

现在让我们用矩阵符号来表示所有用于复数的算术运算。

3.7.1 复数的加减法

两个复数的加减法如下:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + b_1 i \\ z_2 &= a_2 + b_2 i \\ z_1 &= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \\ z_2 &= \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\ z_1 \pm z_2 &= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 \pm a_2 & -(b_1 \pm b_2) \\ b_1 \pm b_2 & a_1 \pm a_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

举个例子

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 2+3i \\
z_2 &= 4+2i \\
z_1 &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\
z_2 &= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\
z_1 \pm z_2 &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\
z_1 + z_2 &= \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = 6+5i \\
z_1 - z_2 &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -2+i.
\end{aligned}
$$

3.7.2 两个复数的乘积

两个复数之积的计算方法如下:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= a_1 + b_1 i \\
z_2 &= a_2 + b_2 i \\
z_1 z_2 &= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -(a_1b_2 + b_1a_2) \\ a_1b_2 + b_1a_2 & a_1a_2 - b_1b_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

举个例子

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 6+2i \\
z_2 &= 4+3i \\
z_1 z_2 &= \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 24-6 & -(18+8) \\ 18+8 & 24-6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 18 & -26 \\ 26 & 18 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

3.7.3 复数的范数平方

范数的平方作为矩阵的行列式:

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\ |z|^2 = a^2 + b^2 &= \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

3.7.4 复数的复共轭

复数的共轭复数是

$$\begin{aligned} z = a + bi &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\ z^* = a - bi &= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

乘积$zz^* = a^2 + b^2$:

$$\begin{aligned} zz^* &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix} \\ &= \left(a^2 + b^2\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

举个例子:

$$\begin{aligned} z = 3 + 4i &= \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \\ z^* = 3 - 4i &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \\ zz^* &= \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \\ &= 25 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.7.5 复数的逆

2 × 2矩阵**A**的逆如下式给出

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{12} \end{bmatrix}$$

因此，z 的逆如下

$$z = a + bi$$
$$z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$
$$z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

举个例子:

$$z = 3 + 4i$$
$$z = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$
$$z^{-1} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.7.6 复数的商

两个复数的商的计算方法如下:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + b_1 i \\ z_2 &= a_2 + b_2 i \\ \frac{z_1}{z_2} &= z_1 z_2^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \frac{1}{a_2^2 + b_2^2} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a_2^2 + b_2^2} \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1b_2 & -(b_1a_2 - a_1b_2) \\ b_1a_2 - a_1b_2 & a_1a_2 + b_1b_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

比如:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 4+3i \\
z_2 &= 3+4i \\
\frac{z_1}{z_2} &= z_1 z_2^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{9+16} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 24 & 7 \\ -7 & 24 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

3.7.7 $\pm i$的平方根

为了求出$\sqrt{i}$，我们假设根是复根。因此，我们从

$$
\begin{aligned}
\sqrt{i} &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\
i &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

根据左右矩阵的等式，我们有

$$
\begin{aligned}
a^2-b^2 &= 0 \\
2ab &= 1.
\end{aligned}
$$

由此我们可以推断

$$a = b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

因此，根是

$$\sqrt{i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

让我们通过平方每个根来测试这个结果，以确保答案是i:

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = i$$

为了求出$\sqrt{-i}$，我们假设根是复数。因此，我们从

$$\begin{aligned}\sqrt{-i} &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\ -i &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

根据左右矩阵的等式，我们有

$$\begin{aligned}a^2-b^2 &= 0 \\ 2ab &= -1\end{aligned}$$

由此我们可以推断

$$a = b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

因此，根是

$$\sqrt{-i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

让我们通过平方每个根来测试这个结果，以确保答案是$-i$:

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = -i$$

3.8 总结

在本章中，我们已经证明了复数的集合是一个域，因为它们满足闭合律、结合律、分配律、单位元和逆的要求。我们还证明了复数和有序对之间存在一对一的对应关系，并且复数可以表示为矩阵，这使得我们可以将所有复数运算计算为矩阵运算或有序对。

如果这是你第一次遇到复数，你可能会发现它们一方面很奇怪，另一方面又很神奇。简单地宣布存在平方为-1的i，就开辟了一个新的数字系统，统一了大量的数学领域。

3.8.1 定义总结

定义

$i\mathbb{R}$是虚数的集合:$ib \in i\mathbb{R}, \quad i^2 = -1$。

复数

实单位: 1 ,

虚单位: i.

有序对

$$1 = (1, 0)$$

$$i = (0, 1).$$

矩阵

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

表示

$\mathbb{C}$是复数的集合:$z = a + ib, \quad a \in \mathbb{R}, \quad ib \in i\mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}$。

复数

$$z = a + bi$$

有序对

$$z = (a, b)$$

矩阵

$$a + bi = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

加减法

复数

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 \pm z_2 = a_1 \pm a_2 + (b_1 \pm b_2)\, i$$

有序对

$$\begin{aligned} z_1 &= (a_1, b_1) \\ z_2 &= (a_2, b_2) \\ z_1 \pm z_2 &= (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2) \,. \end{aligned}$$

矩阵

$$\begin{aligned} z_1 &= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \\ z_2 &= \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\ z_1 \pm z_2 &= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 \pm a_2 & -(b_1 \pm b_2) \\ b_1 \pm b_2 & a_1 \pm a_2 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

乘法

复数

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + b_1 i \\ z_2 &= a_2 + b_2 i \\ z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\, i \end{aligned}$$

有序对

$$\begin{aligned} z_1 &= (a_1, b_1) \\ z_2 &= (a_2, b_2) \\ z_1 z_2 &= (a_1, b_1)(a_2, b_2) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \,. \end{aligned}$$

矩阵

$$\begin{aligned} z_1 &= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \\ z_2 &= \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -\left(a_1 b_2 + b_1 a_2\right) \\ a_1 b_2 + b_1 a_2 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

平方

复数

$$
\begin{aligned}
z &= a + bi \\
z^2 &= (a + bi)(a + bi) \\
&= \left(a^2 - b^2\right) + 2abi
\end{aligned}
$$

有序对

$$
\begin{aligned}
z &= (a, b) \\
z^2 &= (a, b)(a, b) \\
&= \left(a^2 - b^2, 2ab\right)
\end{aligned}
$$

矩阵

$$
\begin{aligned}
z &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\
z^2 &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

范数

复数

$$
\begin{aligned}
z &= a + bi \\
|z| &= \sqrt{a^2 + b^2}
\end{aligned}
$$

有序对

$$
\begin{aligned}
z &= (a, b) \\
|z| &= \sqrt{a^2 + b^2}
\end{aligned}
$$

矩阵

$$z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$|z|^2 = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}.$$

复共轭

复数

$$z = a + bi$$

$$z^* = a - bi$$

有序对

$$z = (a, b)$$

$$z^* = (a, -b).$$

矩阵

$$z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$z^* = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

逆

复数

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ z^{-1} &= \frac{z^*}{|z|^2} \\ &= \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) - \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right) i \end{aligned}$$

有序对

$$z = (a, b)$$

$$z^* = (a, -b)$$

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} = z^{-1} &= \frac{z^*}{|z|^2} \\ &= \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \end{aligned}$$

矩阵

$$z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$z^* = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

商

复数

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) + \left(\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) i.$$

有序对

$$z_1 = (a_1, b_1)$$

$$z_2 = (a_2, b_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1, b_1)}{(a_2, b_2)} = \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right).$$

矩阵

$$z_1 = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$z_2 = \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= z_1 z_2^{-1} \\
&= \frac{1}{a_2^2+b_2^2}\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{a_2^2+b_2^2}\begin{bmatrix} a_1a_2+b_1b_2 & -(b_1a_2-a_1b_2) \\ b_1a_2-a_1b_2 & a_1a_2+b_1b_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

$\pm i$的平方根

复数

$$
\begin{aligned}
\sqrt{i} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\
\sqrt{-i} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)
\end{aligned}
$$

有序对

$$
\begin{aligned}
\sqrt{i} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1) \\
\sqrt{-i} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1).
\end{aligned}
$$

矩阵

$$
\begin{aligned}
\sqrt{i} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\sqrt{-i} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

3.9 样例

下面是一些进一步运用上述思想的例子。在某些情况下，测试包括确认结果。

例 3.1: 复数加减法

z_1 和 z_2相加。

复数

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 12+6i \\
z_2 &= 10-4i \\
z_1+z_2 &= 22+2i \\
z_1-z_2 &= 2+10i
\end{aligned}
$$

有序对

$$\begin{aligned} z_1 &= (12, 6) \\ z_2 &= (10, -4) \\ z_1 + z_2 &= (12, 6) + (10, -4) = (22, 2) \\ z_1 - z_2 &= (12, 6) - (10, -4) = (2, 10). \end{aligned}$$

矩阵

$$\begin{aligned} z_1 &= \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \\ z_2 &= \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} \\ z_1 + z_2 &= \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -2 \\ 2 & 22 \end{bmatrix} \\ z_1 - z_2 &= \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

例 3.2: 复数乘积

计算乘积$z_1 z_2$。

复数

$$\begin{aligned} z_1 &= 12 + 6i \\ z_2 &= 10 - 4i \\ z_1 z_2 &= (12 + 6i)(10 - 4i) \\ &= 144 + 12i \end{aligned}$$

有序对

$$\begin{aligned} z_1 &= (12, 6) \\ z_2 &= (10, -4) \\ z_1 z_2 &= (12, 6)(10, -4) \\ &= (120 + 24, -48 + 60) \\ &= (144, 12). \end{aligned}$$

矩阵

$$z_1 = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$z_2 = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$z_1 z_2 = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 144 & -12 \\ 12 & 144 \end{bmatrix}.$$

例 3.3: 复数乘以i

将z_1乘以i。

复数

$$\begin{aligned} z_1 &= 12 + 6i \\ z_1 i &= (12 + 6i)i \\ &= -6 + 12i \end{aligned}$$

有序对

$$\begin{aligned} z_1 &= (12, 6) \\ i &= (0, 1) \\ z_1 i &= (12, 6)(0, 1) \\ &= (-6, 12). \end{aligned}$$

矩阵

$$z_1 = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$z_1 z_2 = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}.$$

例 3.4: 复数的范数

计算z_1的范数。

复数

$$z_1 = 12 + 6i$$
$$|z_1| = \sqrt{12^2 + 6^2} \approx 13.416$$

有序对

$$z_1 = (12, 6)$$
$$|z_1| = \sqrt{12^2 + 6^2} \approx 13.416.$$

矩阵

$$z_1 = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$
$$|z_1| = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = \sqrt{12^2 + 6^2} \approx 13.416$$

例 3.5: 复数的复共轭

计算下列项的复共轭。

复数

$$(2 + 3i)^* = 2 - 3i$$
$$1^* = 1$$
$$i^* = -i$$

有序对

$$(2, 3)^* = (2, -3)$$
$$(1, 0)^* = \left(\begin{matrix} 1, & 0 \end{matrix} \right)$$
$$(0, 1)^* = \left(\begin{matrix} 0, -1 \end{matrix} \right)$$

矩阵

$$z = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$
$$z^* = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$
$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$i^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

例 3.6: 两个复数之商

计算商$(2+3i)/(3+4i)$。

复数

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{3+4i} &= \frac{(2+3i)}{(3+4i)}\frac{(3-4i)}{(3-4i)} \\ &= \frac{6-8i+9i+12}{25} \\ &= \frac{18}{25}+\frac{1}{25}i\end{aligned}$$

测试

$$\begin{aligned}(3+4i)\left(\frac{18}{25}+\frac{1}{25}i\right) &= \frac{54}{25}+\frac{3}{25}i+\frac{72}{25}i-\frac{4}{25} \\ &= 2+3i.\end{aligned}$$

有序对

$$\begin{aligned}\frac{(2,3)}{(3,4)} &= \frac{(2,3)}{(3,4)}\frac{(3,-4)}{(3,-4)} \\ &= \frac{(6+12,1)}{(9+16,0)} \\ &= \left(\frac{18}{25},\frac{1}{25}\right).\end{aligned}$$

矩阵

$$\begin{aligned}z_1 &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ z_2 &= \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \\ \frac{z_1}{z_2} &= z_1 z_2^{-1} \\ &= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 18 & -1 \\ 1 & 18 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

例 3.7: 用复数除以i

用$2+3i$除以i。

复数

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{0+i} &= \frac{(2+3i)}{(0+i)}\frac{(0-i)}{(0-i)}\\ &= \frac{-2i+3}{1}\\ &= 3-2i\end{aligned}$$

测试

$$i(3-2i)=2+3i$$

有序对

$$\begin{aligned}\frac{(2,3)}{(0,1)} &= \frac{(2,3)}{(0,1)}\frac{(0,-1)}{(0,-1)}\\ &= \frac{(3,-2)}{(1,0)}\\ &= (3,-2).\end{aligned}$$

矩阵

$$\begin{aligned} z &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\\ i &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\\ i^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\\ zi^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

例 3.8: 用复数除以$-i$

用复数 $2+3i$ 除以 $-i$.

复数

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{0-i} &= \frac{(2+3i)}{(0-i)}\frac{(0+i)}{(0+i)}\\ &= \frac{2i-3}{1}\\ &= -3+2i\end{aligned}$$

测试

$$-i(-3+2i)=2+3i$$

有序对

$$\begin{aligned}\frac{(2,3)}{(0,-1)}&=\frac{(2,3)}{(0,-1)}\frac{(0,1)}{(0,1)}\\&=\frac{(-3,2)}{1}\\&=(-3,2)\end{aligned}$$

矩阵

$$\begin{aligned}z&=\begin{bmatrix}2&-3\\3&2\end{bmatrix}\\-i&=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\\-i^{-1}&=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\\z\left(-i^{-1}\right)&=\begin{bmatrix}2&-3\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&-2\\2&-3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

例 3.9: 复数的逆

计算$2+3i$的逆.

复数

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+3i}&=\frac{1}{(2+3i)}\frac{(2-3i)}{(2-3i)}\\&=\frac{2-3i}{13}\\&=\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i.\end{aligned}$$

有序对

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2,3)}&=\frac{1}{(2,3)}\frac{(2,-3)}{(2,-3)}\\&=\frac{(2,-3)}{13}\\&=\left(\frac{2}{13},-\frac{3}{13}\right).\end{aligned}$$

矩阵

$$z = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$
$$z^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

例 3.10: i的逆

计算 i 的逆.

复数

$$\begin{aligned}\frac{1}{0+i} &= \frac{1}{(0+i)}\frac{(0-i)}{(0-i)} \\ &= \frac{-i}{1} = -i\end{aligned}$$

有序对

$$\begin{aligned}\frac{1}{(0,1)} &= \frac{1}{(0,1)}\frac{(0,-1)}{(0,-1)} \\ &= \frac{(0,-1)}{(1,0)} = (0,-1) = -i.\end{aligned}$$

矩阵

$$i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$i^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -i.$$

例 3.11: $-i$的逆

计算 $-i$ 的逆.

复数

$$\begin{aligned}\frac{1}{0-i} &= \frac{1}{(0-i)}\frac{(0+i)}{(0+i)} \\ &= \frac{i}{1} = i\end{aligned}$$

有序对

$$\begin{aligned}\frac{1}{(0,-1)} &= \frac{1}{(0,-1)}\frac{(0,1)}{(0,1)} \\ &= \frac{(0,1)}{(1,0)} = (0,1) = i.\end{aligned}$$

矩阵

$$-i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-i^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = i.$$

参考文献

[1] Vince, J.: Imaginary Mathematics for Computer Science. Springer, Berlin (2018). ISBN 978-3319-94636-8

[2] Descartes, R.: La Géométrie (1637) (There is an English translation by Michael Mahoney) Dover, New York (1979)

第 4 章 复平面

4.1 介绍

一些学科的历史往往是令人兴奋的读物，尤其是在对日期或先有技术存在争议的情况下。澄清谁在别人之前做了某事是历史学家的工作，他们可以帮助揭示谁应该为某一事件负责，谁应该居功至伟。要从日记、书籍和私人信件中理清事件的来龙去脉，并将它们按时间顺序排列在一起，需要具备学科知识、坚韧的毅力和客观的分析。

对于大多数研究学科来说，有两个日期对于确定优先权非常重要：论文提交发表的日期和被接受的论文发表的日期。这样的协议似乎是一个公平的方案，但前提是要有一个高效的邮政系统、一个公正的同行评审系统，以及其他许多条件。

在数学和科学领域，一些研究人员并不总是有信心将一个萌芽的想法发表出来，如果不发表，这个想法要么留在他们的脑海里，要么放在他们桌上的笔记本里，在研究人员死后可能被发现，也可能不被发现。对研究人员来说，不幸的是，人的脑袋并不是历史学家方便的信息存放处！

有时，数学论文会出现在与其他学科相关的期刊上，可以理解的是，这些期刊并不一定受到数学界的监督。同样，历史学家或好奇的学者通过巧妙的侦查工作，也会将复杂的优先权、归属问题浮出水面，在某些情况下，还会引起令人不快的剽窃嫌疑。

复数平面的发明是一个完美的例子，它说明了当数学思想的官方发布渠道被 "双关 "时，发明者会遇到怎样的严重问题。让我们看看发生了什么。

4.2 一些历史

一切始于 1813 年，瑞士业余数学家让-罗伯特-阿尔冈（Jean-Robert Argand，1768-1822 年）在他私人资助的一本 "小册子 "中发表了他关于复数几何解释的想法：关于几何构造中虚量表示方法的论文(Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques)[1]。

这本小册子并没有广泛传播，更糟糕的是，它并没有 Argand 的名字！1813

年，Jacques Français 在一篇论文中重新发表了复平面的想法，并要求最初想法的匿名作者透露自己的身份。Argand 站了出来，他的发明得到了认可，如今复平面被称为 Argand 图。1874 年，Gauthier-Villars 出版社出版了 Argand 著作的第二版[2]。

当时，挪威测量学家卡斯帕-韦塞尔（Caspar Wessel，1745-1818 年）一直在对丹麦进行三角测量，并开发数学技术来简化工作，但 Argand 和其他人都不知道。其中一个想法是添加矢量的原始想法，另一个是复数的几何解释。

1797 年， Wessel 在丹麦皇家学院的一次会议上提交了他的第一篇也是唯一一篇描述复平面的数学论文，并于 1799 年发表在学院的《备忘录》上。Wessel 的论文被数学界隐藏了近一个世纪，直到 1895 年才被丹麦数学家索福斯-克里斯蒂安-朱尔（Sophus Christian Juel，1855-1935 年）发现。尽管现在大家都认为 Wessel 是第一个发明复数平面的人，但复数平面仍以 Argand 的名字命名。

但这并没有结束！苏格兰数学家彼得-加斯里-泰特（ Peter Guthrie Tait,1831-1901 年）在他的著作《四元数初论》中写道："在十七世纪末，沃利斯提出用一条线来表示一元二次方程的不可能根：

Wallis 在十七世纪末，提出了表示一元二次方程不可能的根的方法，即离开如果是真实的根就会在其上的直线。他的构造等同于把 $\sqrt{-1}$ 看作一条垂直于实数测量线的有向单位线。[3]

约翰-沃利斯（John Wallis，1616-1703 年）是一位天才的英国数学家[4]，人们相信， Argand, Warren和其他人扩展了 Wallis 和 De Moivre 的成果，他们在复平面方面做了一些早期工作。

4.3 复平面

杰出的瑞士数学家莱昂哈德-欧拉（Leonhard Euler, 1707-1783 年）是与复数的发展有关的人物之一。欧拉证明了复数的特性：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

而当 $\theta = \pi$ 出现时，数学中最美丽的公式之一就出现了：

$$e^{i\pi} = -1$$

或

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

这整合了五个重要常数：$0, 1, e, \pi$ 和 i，以及基本算术运算：加法、乘法和指数运算。

当 $\theta = \pi/2$ 时，这个公式的另一个结果就产生了：

$$e^{i\pi/2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

因此[1]

$$\begin{aligned} i^i &= \left(e^{i\pi/2}\right)^i \\ &= e^{i^2\pi/2} \\ &= e^{-\pi/2} \\ &\approx 0.207879576. \end{aligned}$$

这表明虚数单位自身的幂等于一个实数![2]

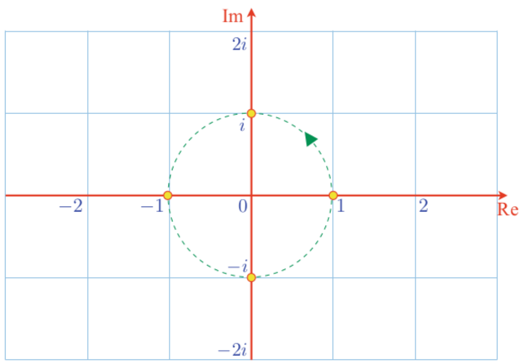


图 4.1: 带单位圆的复平面

在第三章中，我们看到虚i的幂产生了两个序列 $(1, i, -1, -i, 1, \ldots)$ 和 $(1, -i, -1, i, 1, \ldots)$，它们与分别沿逆时针和顺时针方向绕笛卡尔轴旋转时产生的模式$(x, y, -x, -y, x, \ldots)$ 和 $(x, -y, -x, y, x, \ldots)$ 惊人地相似。这种相似并非巧合，因为复数属于一个叫做复平面的二维平面，我们现在将描述它。

如图4.1所示，复数平面使我们能够用横轴记录实部、纵轴记录虚部来直观地表示复数。

该图还显示了一个单位半径的圆经过$1, i, -1, -i$，这是与i的幂次增加相关的序列。我们可以看到$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i$和$i^4 = 1$的位置，这表明乘以$i$相当于旋转$90°$。

为了演示这种旋转效应，图4.2给出了带四个复数的复平面:

$$p = 2 + i, \quad q = -1 + 2i, \quad r = -2 - i, \quad s = 1 - 2i$$

[1]译者注，和网友讨论，并不止这一种结果，正确的结果应该如此:

$$\begin{aligned} i &= \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \\ &= e^{i(\pi/2+2k\pi)}, \qquad k \in \mathbb{Z} \\ i^i &= e^{-(\pi/2+2k\pi)}, \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

是一个完全的实数的实数幂函数，对应多个值，感谢网友“天津-莲子粥（嵌入式）”。

[2]译者注，参考上一条脚注，应该是一系列实数。

它们之间的距离是90°。

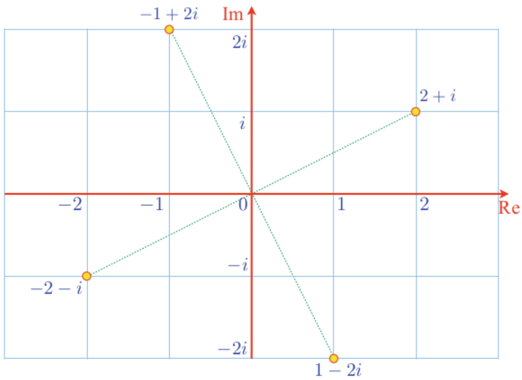


图 4.2: 标记4个复数的复平面

通过将点p乘以i，将点p旋转90°到q:

$$\begin{aligned} i(2+i) &= 2i+i^2 \\ &= -1+2i. \end{aligned}$$

通过乘以i，将点q再旋转90°到r:

$$\begin{aligned} i(-1+2i) &= -i+2i^2 \\ &= -2-i \end{aligned}$$

通过乘以i，将点r再旋转90°到s:

$$\begin{aligned} i(-2-i) &= -2i-i^2 \\ &= 1-2i \end{aligned}$$

最后，通过乘以i，将s旋转90°回到p:

$$\begin{aligned} i(1-2i) &= i-2i^2 \\ &= 2+i \end{aligned}$$

在第三章中，我们还发现与增加负幂相关的序列:$(1,-i,-1,i,...)$是顺时针方向的旋转，并且意味着将一个复数除以i使其顺时针旋转90°。然而，我们证明了$i^{-1}=-i$，用$-i$乘以一个复数要比用i除以它容易得多。所以让我们重复上面的练习来证明这一点。

点p乘以$-i$被旋转$-90°$到s:

$$\begin{aligned} -i(2+i) &= -2i-i^2 \\ &= 1-2i. \end{aligned}$$

点s再乘以$-i$旋转$-90°$到r:

$$\begin{aligned}-i(1-2i) &= -i+2i^2\\ &= -2-i.\end{aligned}$$

点r再乘以$-i$旋转$-90°$到q，:

$$\begin{aligned}-i(-2-i) &= 2i+i^2\\ &= -1+2i.\end{aligned}$$

最后，点q乘以$-i$被旋转$-90°$为p:

$$\begin{aligned}-i(-1+2i) &= i-2i^2\\ &= 2+i.\end{aligned}$$

因此，将一个复数旋转$\pm 90°$，乘以$\pm i$。

在第3章中，我们看到$\sqrt{\pm i}$的根为

$$\begin{aligned}\sqrt{+i} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\\ \sqrt{-i} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\end{aligned}$$

如图4.3所示。请注意，每个根之间的距离为180°，这表明角度与它们的作用有关。例

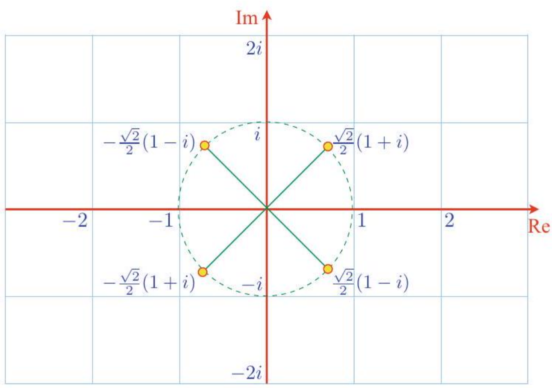


图 4.3: $\sqrt{\pm i}$的复数根

如，$\sqrt{i}$的正根是$\sqrt{2}/2(1+i)$，距离实轴为45°。将这个根乘以它自己将它旋转到i轴上。同样，负根是$-\sqrt{2}/2(1+i)$，与实轴的距离为225°。将这个根乘以它自己将它225°旋转到i轴。对于$\sqrt{-i}$的根也是如此。

这些观察似乎表明，我们可以构造一个能够将另一个复数旋转任何角度的复数。这是真的，我们接下来会讲到。

4.4 极坐标表示法

在复平面上放置一个复数，我们将得到极坐标表示法，在极坐标表示法中，从原点到复数形成一条直线，如图4.4 所示。这条线的长度是r，等于$\sqrt{a^2+b^2}$，这就是为什么复数的范数是用勾股定理定义的:

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

直线与实轴之间的角度θ称为z的参数，表示为:

$$\arg(z) = \theta$$

其中

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned}
&\text{第一象限：} a>0, b>0, && \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right). \\
&\text{第二第三象限：} a<0, && \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\pi. \\
&\text{第四象限：} a>0, b<0, && \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)+2\pi.
\end{aligned}$$

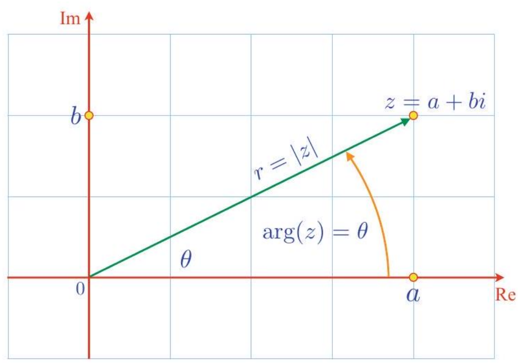


图 4.4: 复数的表示

由图4.4可知，z的水平分量为$r\cos\theta$，垂直分量为$r\sin\theta$，我们可以这样写

$$\begin{aligned}
z &= a + bi \\
&= r\cos\theta + ri\sin\theta \\
&= r(\cos\theta + i\sin\theta).
\end{aligned}$$

如之前所述，欧拉的发现之一是$e^{\theta}, \sin\theta$和$\cos\theta$的幂级数的同一性：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

这样我们就可以写出

$$z = re^{i\theta}$$

有了这一发现，我们现在就可以用极坐标形式重新研究两个复数的积和商了。例如，给出以下复数：

$$z = re^{i\theta}$$
$$w = se^{i\phi}$$

它们的乘积是

$$\begin{aligned} zw &= rse^{i\theta}e^{i\phi} \\ &= rse^{i(\theta+\phi)} \\ &= rs[\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)] \end{aligned}$$

因此，两个复数的乘积会产生第三个复数，其范数为

$$|zw| = rs$$

且参数

$$\arg(zw) = \theta + \phi$$

这里两个角度相加了。

接下来是商：

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{re^{i\theta}}{se^{i\phi}} \\ &= \frac{r}{s}e^{i(\theta-\phi)} \\ &= \frac{r}{s}[\cos(\theta-\phi) + i\sin(\theta-\phi)] \end{aligned}$$

它的范数是

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{r}{s}$$

参数是

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \theta - \phi$$

这里是两个角度相减了。

让我们举例说明这些公式。图4.5显示了两个复数：

$$z = 2 + 2i$$
$$w = -1 + i$$

其极坐标形式为

$$z = 2\sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

$$w = \sqrt{2}\,(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ) = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}.$$

用普通的复代数，积zw是

$$zw = (2+2i)(-1+i) = -4$$

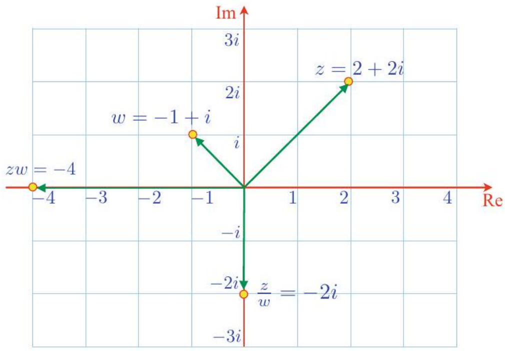


图 4.5: 两个复数的乘积和商

用极坐标形式:

$$|zw| = 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 4$$

$$\arg(zw) = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$$

这编码了 -4 。 现在我们用普通复数代数计算商z/w，然后求极坐标形式。

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{(2+2i)}{(-1+i)}\frac{(-1-i)}{(-1-i)}\\ &= \frac{-2-2i-2i-2i^2}{1+1}\\ &= -2i.\end{aligned}$$

接下来，用极坐标形式

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$$

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = 45^\circ - 135^\circ = -90^\circ$$

这编码了复数$-2i$。结果如图4.5所示。

我们也可以用欧拉公式计算$\sqrt{i}$如下:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

代入$\theta = \pi/2$

$$e^{i\pi/2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

两边开平方根，得到

$$\begin{aligned}
\pm e^{i\pi/4} &= \sqrt{i} \\
\pm\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] &= \sqrt{i} \\
\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) &= \sqrt{i}
\end{aligned}$$

为求$\sqrt{-i}$，我们代入$\theta=-\pi/2$:

$$\begin{aligned}
e^{-i\pi/2} &= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-i \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-i
\end{aligned}$$

两边开平方根，得到

$$\begin{aligned}
\pm e^{-i\pi/4} &= \sqrt{-i} \\
\pm\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] &= \sqrt{-i} \\
\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) &= \sqrt{-i}
\end{aligned}$$

使用类似的技术可以找到更高的根。

4.5 转子

极坐标形式表明了这样一个事实:将$z=re^{i\theta}$与范数r相乘，再乘以$w=se^{i\phi}$与范数s相乘，就产生了第三个复数，范数为rs。因此，为了避免缩放z,w必须有一个单位范数。在这种情况下，w充当转子。例如，将$4+5i$乘以$1+0i$使其保持未缩放和未旋转状态。但是，将$4+5i$乘以$0+i$将其旋转为$90°$而不进行任何缩放。

因此，要将 $2+2i$ 旋转 $45°$ ，必须乘以 $e^{i\pi/4}$ ：

$$\begin{aligned}
e^{i\pi/4} &= \cos 45° + i\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\
\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(2+2i) &= \frac{\sqrt{2}}{2}4i \\
&= 2\sqrt{2}i
\end{aligned}$$

因此，$e^{i\theta}$可以将任何复数旋转一个角度θ。

要将复数 $x+yi$ 旋转一个角度 θ，我们可以将其乘以转子 $cos\theta+i\sin\theta$

$$\begin{aligned}
x'+y'i &= (\cos\theta+i\sin\theta)(x+yi) \\
&= x\cos\theta-y\sin\theta+i(x\sin\theta+y\cos\theta)
\end{aligned}$$

其矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} x' \\ iy' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ iy \end{bmatrix}$$

在继续讨论之前，让我们先考虑一下转子的复共轭对旋转方向的影响，我们可以通过将 $x+yi$ 乘以转子 $cos\theta -\ i\sin\theta$ 来做到这一点：

$$\begin{aligned} x' + y'i &= (\cos\theta - i\sin\theta)(x+yi) \\ &= x\cos\theta + y\sin\theta + i(-x\sin\theta + y\cos\theta) \end{aligned}$$

其在矩阵形式中为

$$\begin{bmatrix} x' \\ iy' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ iy \end{bmatrix}$$

是围绕原点旋转 $-\theta$。

因此，我们将转子 $\mathbf{R}_\theta$ 及其共轭 $\mathbf{R}_\theta^\dagger$ 定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\theta &= \cos\theta + i\sin\theta \\ \mathbf{R}_\theta^\dagger &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{R}_\theta$ 旋转 $+\theta$，而 $\mathbf{R}_\theta^\dagger$ 旋转 $-\theta$。注意匕首 $\dagger$ 符号的使用。

4.6 总结

在这一章中，我们发现了利用复平面对复数的图形化解释。欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 允许我们将复数表示为e的虚次幂，从而使我们可以轻松地计算乘积和商。总之，这些想法让我们产生了转子的想法，而转子将使用四元数来开发。

4.6.1 定义总结

复数

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ |z| &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

极坐标形式

$$\begin{aligned} z &= re^{i\theta} \\ z &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ r &= |z| \\ \tan\theta &= b/a \\ \theta &= \arg(z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{第一象限：}\quad & a>0, b>0 & \theta &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right). \\
\text{第二、第三象限：}\quad & a<0, & \theta &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\pi. \\
\text{第四象限：}\quad & a>0, b<0, & \theta &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right)+2\pi.
\end{aligned}$$

乘积

$$\begin{aligned}
z &= re^{i\theta} \\
w &= se^{i\phi} \\
zw &= rse^{i(\theta+\phi)} \\
&= rs[\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)].
\end{aligned}$$

商

$$\begin{aligned}
\frac{z}{w} &= \frac{r}{s}e^{i(\theta-\phi)} \\
&= \frac{r}{s}[\cos(\theta-\phi)+i\sin(\theta-\phi)].
\end{aligned}$$

转子

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_\theta &= \cos\theta + i\sin\theta \\
\mathbf{R}_\theta^\dagger &= \cos\theta - i\sin\theta.
\end{aligned}$$

4.7 样例

下面是一些进一步运用上述思想的例子。在某些情况下，需要进行测试以确认结果。

例 4.1: 用 i 旋转复数

从 $1+2i$ 开始，将得到的复数乘以 i四次，并在复数平面上绘出结果。

将点 p 旋转 90° 至 q 是通过乘以 i，：

$$\begin{aligned}
i(1+2i) &= i+2i^2 \\
&= -2+i.
\end{aligned}$$

通过乘以 i，点 q 又旋转了 90° 至 r：

$$\begin{aligned} i(-2+i) &= -2i + i^2 \\ &= -1 - 2i. \end{aligned}$$

通过乘以 i，点 r 又旋转了 90° 至 s:

$$\begin{aligned} i(-1-2i) &= -i - 2i^2 \\ &= 2 - i. \end{aligned}$$

最后，通过乘以 i，将点 s 旋转 90° 回到 p:

$$\begin{aligned} i(2-i) &= 2i - i^2 \\ &= 2 + i. \end{aligned}$$

图4.6 显示了由 90° 分隔的四个复数。

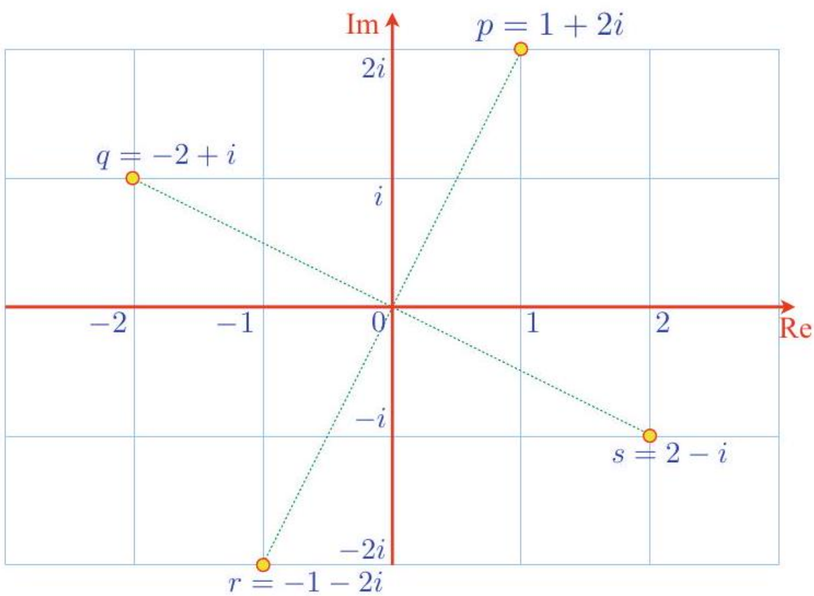


图 4.6: 有四个复数的复平面

例 4.2: 使用极坐标形式计算积和商

用极坐标形式计算积 zw 和商 z/w。

$$z = 3 + 3i$$
$$w = -1 - i.$$

乘积:

$$\begin{aligned}
z &= 3\sqrt{2}\left(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ\right) = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4} \\
w &= \sqrt{2}\left(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ\right) = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} \\
|zw| &= 3\sqrt{2}\sqrt{2} = 6 \\
\arg(zw) &= 45^\circ + 225^\circ = 270^\circ
\end{aligned}$$

编码复数 $-6i$。

测试: 使用普通复数代数，乘积 zw 是

$$zw = (3+3i)(-1-i) = -6i$$

商:

$$\begin{aligned}
|z| &= 3\sqrt{2} \\
|w| &= \sqrt{2} \\
\left|\frac{z}{w}\right| &= 3\sqrt{2}/\sqrt{2} = 3 \\
\arg\left(\frac{z}{w}\right) &= 45^\circ - 225^\circ = 180^\circ
\end{aligned}$$

编码复数 -3 。

测试: 使用普通复代数，商 z/w 是

$$\begin{aligned}
\frac{z}{w} &= \frac{(3+3i)}{(-1-i)}\frac{(-1+i)}{(-1+i)} \\
&= \frac{-6}{2} \\
&= -3
\end{aligned}$$

并与极坐标形式一致。

例 4.3: 设计一个旋转复数30°的转子

设计一个转子，使复数在不缩放的情况下旋转 30° 。首先

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

令 $\theta = 30^\circ = \pi/6$

$$
\begin{aligned}
e^{i\pi/6} &= \cos 30^\circ + i\sin 30^\circ \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i).
\end{aligned}
$$

测试： 让我们用这个转子将 $1+0i$ 旋转三次，直到 i。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)1 &= \frac{1}{8}(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i) \\
&= \frac{1}{8}(2+2\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i) \\
&= \frac{1}{8}(2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2i+6i) \\
&= i
\end{aligned}
$$

例 4.4: 设计一个将复数旋转 -60° 的转子

设计一个转子，使复数在不缩放的情况下旋转-60°。首先

$$
e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta
$$

令 $\theta = -60^\circ = -\pi/3$

$$
\begin{aligned}
e^{-i\pi/3} &= \cos(-60^\circ) + i\sin(-60^\circ) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
&= \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] Argand, J.R.: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Argand.html

[2] Argand, J.R.: Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, 2nd edn. Gauthier-Villars, Paris (1874)

[3] Tait, P.G.: Elementary Treatise on Quaternions. Cambridge University Press, Cambridge (1867)

[4] Wallis, J.: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Wallis.html

第 5 章　三元数和四元数

5.1　介绍

这一章涵盖了 Hamilton 发明四元数之前的时期。它不仅展示了其他数学家的想法，也展示了 Hamilton 一直在努力解决的问题。

5.2　一些历史

当一群杰出的数学家对同一学科感兴趣时，发现他们中的两个人同时提出同样的发明是很常见的。即使两个这样的人在数学上有不同的优势，他们应该有机会接触到相同的积累数学知识的大厦，并且意识到已经解决的问题和等待解决的问题。

在第4章中，我们看到了 Wessel 和 Argand 是如何发明复平面，并用它来形象化复数的。对于这两个人来说，很不幸的是，他们无法接触到今天无处不在的出版网络和互联网。然而，优先权过去是——现在仍然是——由谁先到达印刷机决定。但正如我们在韦塞尔身上看到的那样，即使是第一个出版也不能保证成名。

四元数的发明也有类似的故事。威廉·罗文·汉密尔顿(William Rowan Hamilton)爵士被认为是四元数代数的发明者，四元数代数成为第一个被发现的非交换代数。可以想象，当他找到了一个问题的解决方案时，他感到多么高兴，他已经思考了十多年了!

这一发明为操作矢量提供了第一个数学框架，尽管这是由美国理论物理学家、化学家和数学家约西亚·威拉德·吉布斯(Josiah Willard Gibbs, 1839-1903)改进的。Hamilton 通过代数和几何途径得到了他的发明，因为他很明显，四元数具有巨大的几何潜力。因此，他立即开始探索如何将四元数应用于物理学，以及它们的矢量和旋转特性。

Hamilton 以及当时几乎所有其他人都不知道，法国社会改革家、杰出的娱乐数学家本杰明-奥林德-罗德里格斯（Benjamin Olinde Rodrigues，1795-1851 年）早在 1840 年就发表了一篇论文，描述了如何通过绕第三轴的单一旋转来表示绕不同轴的两个连续旋转[1]。更重要的是，Rodrigues 使用标量和三维轴表达了他的解决方案，这比 Hamilton 自己使用标量和矢量的方法早了三年！

西蒙·奥特曼(Simon Altmann)在澄清这一事实方面所做的工作可能比其他任何人都多，并广泛发表了他的观点[2, 3, 4, 5]。不过，现在让我们继续讨论 Hamilton 代数，稍后再回到它的旋转特性和 Rodrigues 博士。

复数的存在为 18 和 19 世纪的数学家提出了一个诱人的问题。是否存在 3 -D 等价物？这个问题的答案并不明显，包括高斯(Gauss)、莫比乌斯(Möbius)、格拉斯曼(Grassmann)和 Hamilton 在内的许多天才数学家一直在寻找答案。

Hamilton 的研究有据可查，从 19 世纪 30 年代初到 1843 年他发明了四元数。在此后的 22 年里，直到 1865 年去世，他一直专注于这一课题。到 1833 年，他已经证明复数构成了偶数代数，即有序对[6]。

5.3 三元数

Hamilton 将自己的想法记录在笔记本上，他在笔记本上概述了导致他发现的事件。其中一个条目是

今天上午，我被引向了一个在我看来可能会有有趣发展的四元数理论。假定耦合是已知的，并且已知可以用平面中的点来表示，因此 $\sqrt{-1}$ 与 1 垂直，那么自然可以设想可能存在另一种 $\sqrt{-1}$，与平面本身垂直。让这个新的虚数为 j：因此 $j^2 = -1$. 空间中的一个点 x, y, z 可以表示三元数 $x + iy + jz$。[7]

这个条目显示了汉密尔顿的想法，即一个二维复数可以用 $x + iy$ 表示，一个三维复数也可以用三元来表示：$x + iy + jz$，其中i和j是平方为-1的虚量。然而，这样一个三元组的平方在代数展开时会产生问题:

$$
\begin{aligned}
z &= x + iy + jz \\
z^2 &= (x + iy + jz)(x + iy + jz) \\
&= x^2 + ixy + jxz + ixy - y^2 + ijyz + jxz + jiyz - z^2 \\
&= x^2 - y^2 - z^2 + 2ixy + 2jxz + 2ijyz.
\end{aligned}
$$

平方运算几乎是闭合的，除了 $2ijyz$ 项。

5.3.1 三元数的加减法

虽然 Hamilton 三元数在平方时无法闭合，但它们很容易相加或相减:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= a_1 + b_1 i + c_1 j \\
z_2 &= a_2 + b_2 i + c_2 j \\
z_1 \pm z_2 &= a_1 \pm a_2 + (b_1 \pm b_2)\, i + (c_1 \pm c_2)\, j.
\end{aligned}
$$

Hamilton 写信给他的儿子阿奇博尔德(Archibald):

1843年10月上旬的每天早晨 我去吃早饭时 你兄弟威廉-埃德温(William Edwin)和你都会问我 "爸爸 你会三元数乘法吗" 我总是无奈地摇摇头回答说："不会，我只会它们的加减法。" [8]

如上所述，三元数的问题出在它们的平方上，即如何处理 $2ijyz$ 项。Hamilton 的笔记本反映了这种想法：

这个三元组$[x+iy+jz]$的平方是$x^2-y^2-z^2+2ixy+2jxz+2ijyz$; 至少一开始我是这样认为的，因为我认为$ij=ji$。另一方面，如果这是表示与$1,0,0$和$x,y,z$成比例的第三个比例，将其视为线的标记(即以具有这些坐标的点为终点的线，而它们以原点为起点)，并且假设这第三个比例的长度与1和$\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$成第三个比例，距离$1,0,0$的距离是x,y,z的两倍;那么它的实部应该是$x^2-y^2-z^2$它的两个虚部应该是对于系数$2xy$和$2xz$;因此，$2ijyz$这项出现似乎是不恰当的，我一开始就被引导假设了$ij=0$。不过，我发现只要假设 $ji=-ij$ 就可以消除这个困难。[9]

5.4 四元数的诞生

三元数的非闭和性对 Hamilton 来说是一个真正的问题，因为他花了十多年的时间试图解决这个问题。Hamilton 试图解释两条线段的乘积，他灵机一现，引入了第三个假想项k，使得$k=ij$。英国社会学家、哲学家和科学史学家安德鲁·皮克林(Andrew Pickering)指出：

引入新的虚数k，定义为i和j的乘积，这使得 Hamilton 在考虑两个任意三元组的乘积时，能够同时用代数和几何表示，这是一种新的适应，这种适应有一个方面值得强调。这相当于两个代表制的桥头堡发生了巨大的变化。更准确地说，它包括定义一个新的桥头堡，从复杂代数的两位表示到不是三位而是四位系统——这种系统很快被称为四元数。[10]

引入第三个虚项只是解决方法的一部分；无法解决的是控制 $i\Delta j$ 和 k 的代数规则。最后，1843 年 10 月 16 日，汉密尔顿与妻子汉密尔顿夫人在爱尔兰皇家运河边散步，主持爱尔兰皇家学院的一次会议时，灵光一闪，他看到了如何解决三个虚项 $i\Delta j$ 和 k 它们的所有乘积。[11]

解法是 $z=a+bi+cj+dk$，其中 i,j,k 都平方到-1 。因为有四个项，所以 Hamilton 将其命名为 "四元数"。汉密尔顿借此机会在当时路过的布鲁姆桥（Broome bridge）的桥壁上刻下了这一规则，将这一事件记录在石头上。虽然他最初的题词经不起爱尔兰多年的风吹雨打，但现在一块更永久的牌匾取代了它。

当 Hamilton 发明四元数时，他还创造了各种名称，如张量、矢量和向量来描述它们的属性。作为发明者， Hamilton 有权选择他想要的任何名称，而在当时，这些名称都与那个时期的符号有关。例如，他把四元数的实部称为标量，虚部称为矢量。然而今天，矢量与虚部没有任何关联，这就使四元数的解释略显混乱。

Simon Altmann 非常清楚这些问题，并通过对四元数代数进行迄今为止所缺乏的严密审查，帮助澄清了这一困惑。这种严谨的代数学采用了有序对的思想，易于理解，并揭示了四元数与复数之间的密切关系。

让我们来研究一下四元数代数，它构成了 $\mathbb{H}$ 集，以表彰汉密尔顿的成就。

参考文献

[1] Cheng, H., Gupta, K.C.: An historical note on finite rotations. Trans. ASME J. Appl. Mech. 56(1), 139-145 (1989)

[2] Altmann, S.L.: Rotations, Quaternions and Double Groups, Dover, (2005), p. 16, ISBN-13: 978-0-486-44518-2 (1986)

[3] Altmann, S.L.: Rodrigues, and the quaternion scandal. Math. Mag. 62(5), 291-308 (1989)

[4] Altmann, S.L.: Icons and Symmetries. Clarendon Press, Oxford (1992)

[5] Altmann, S.L., Ortiz, E.L. (eds.): Mathematics and Social Utopias in France: Olinde Rodrigues and his Times, History of Mathematics, vol. 28. Am. Math. Soc, Providence (2005). 10: 08218-3860-1, ISBN-13: 978-0-8218-3860-0

[6] Hamilton, W.R.: The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton, vol. I, Geometrical Optics; Conway, A.W., McDonnell, A.J. (eds.) vol. II, Dynamics; Halberstam, H., Ingram, R.E. (eds.) vol. III, Algebra, Cambridge University Press, Cambridge, (1931, 1940, 1967) (1833)

[7] Hersh, R. (ed): 18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics, Pickering, A.: Concepts and the Mangle of Practice Constructing Quaternions, p. 263. Springer, Berlin (2006). ISBN 978 0-387-25717-9

[8] Crowe, M.J.: A History of Vector Analysis. Dover, New York (1994)

[9] Hersh, R. (ed): 18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics, Pickering, A.: Concepts and the Mangle of Practice Constructing Quaternions, p. 264. Springer, Berlin (2006). ISBN 978 0-387-25717-9

[10] Hersh, R. (ed): 18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics, Pickering, A.: Concepts and the Mangle of Practice Constructing Quaternions, p. 270. Springer, Berlin (2006). ISBN 978 0-387-25717-9

[11] Hamilton, W.R.: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Hamilton.html

第 6 章 四元数代数

6.1 介绍

This chapter contains further historical background to the invention of quaternions, and covers the evolution of quaternion algebra. I show how quaternion algebra is greatly simplified by treating a quaternion as an ordered pair, and provide examples of addition, subtraction, real, pure and unit quaternions. After defining the complex conjugate, norm, quaternion product, square and inverse, I show how a quaternion is represented by a matrix. The chapter concludes with a summary of the important definitions and several worked examples.

6.2 一些历史

Hamilton defined a quaternion q, and its associated rules as

$$q = s + ia + jb + kc, \quad s, a, b, c \in \mathbb{R}$$

where,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$
$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$
$$ji = -k, kj = -i, ik = -j$$

References $[1-3]$, but we tend to write quaternions as

$$q = s + ai + bj + ck$$

Observe from Hamilton's rules how the occurrence of ij is replaced by k. The extra imaginary k term is key to the cyclic patterns $ij = k, jk = i$, and $ki = j$, which are very similar to the cross product of two unit Cartesian vectors:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

In fact, this similarity is no coincidence, as Hamilton also invented the scalar and vector products. However, although quaternions provided an algebraic framework to describe vectors, one must acknowledge that vectorial quantities had been studied for many years prior to Hamilton.

Hamilton also saw that the i, j, k terms could represent three Cartesian unit vectors $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ and $\mathbf{k}$, which had to possess imaginary qualities. i.e. $\mathbf{i}^2 = -1$, etc., which didn't go down well with some mathematicians and scientists who were suspicious of the need to involve so many imaginary terms.

Hamilton's motivation to search for a 3-D equivalent of complex numbers was part algebraic, and part geometric. For if a complex number is represented by a couple and is capable of rotating points on the plane by $90°$, then perhaps a triple rotates points in space by $90°$. In the end, a triple had to be replaced by a a quadruple-a quaternion.

One can regard Hamilton's rules from two perspectives. The first, is that they are an algebraic consequence of combining three imaginary terms. The second, is that they reflect an underlying geometric structure of space. The latter interpretation was adopted by P. G. Tait, and outlined in his book An Elementary Treatise on Quaternions. Tait's approach assumes three unit vectors $\mathbf{i}, \mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ aligned with the x-, y-, z-axes respectively:

The result of the multiplication of $\mathbf{i}$ into $\mathbf{j}$ or $\mathbf{ii}$ is defined to be the turning of $\mathbf{j}$ through a right angle in the plane perpendicular to $\mathbf{i}$ in the positive direction, in other words, the operation of $\mathbf{i}$ on $\mathbf{j}$ turns it round so as to make it coincide with $\mathbf{k}$; and therefore briefly $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$.

To be consistent it is requisite to admit that if $\mathbf{i}$ instead of operating on $\mathbf{j}$ had operated on any other unit vector perpendicular to $\mathbf{i}$ in the plane yz, it would have turned it through a right-angle in the same direction, so that $\mathbf{ik}$ can be nothing else than $-\mathbf{j}$.

Extending to other unit vectors the definition which we have illustrated by referring to $\mathbf{i}$, it is evident that $\mathbf{j}$ operating on $\mathbf{k}$ must bring it round to $\mathbf{i}$, or $\mathbf{jk} = \mathbf{i}$. [4]

Tait's explanation is illustrated in Fig. 6.1a-d. Figure 6.1a shows the original alignment of $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, k. Figure 6.1 b shows the effect of turning $\mathbf{j}$ into $\mathbf{k}$. Figure 6.1c shows the turning of $\mathbf{k}$ into $\mathbf{i}$, and Fig. 6.1d shows the turning of $\mathbf{i}$ in to $\mathbf{j}$.

So far, there is no mention of imaginary quantities-we just have:

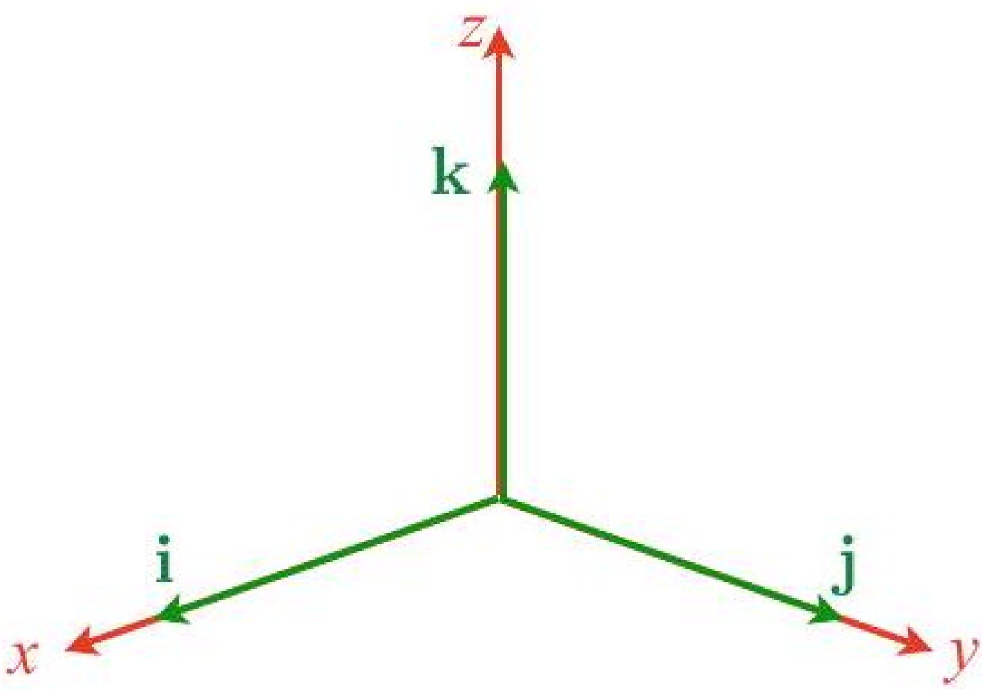
$$\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \mathbf{ik} = -\mathbf{j}.$$

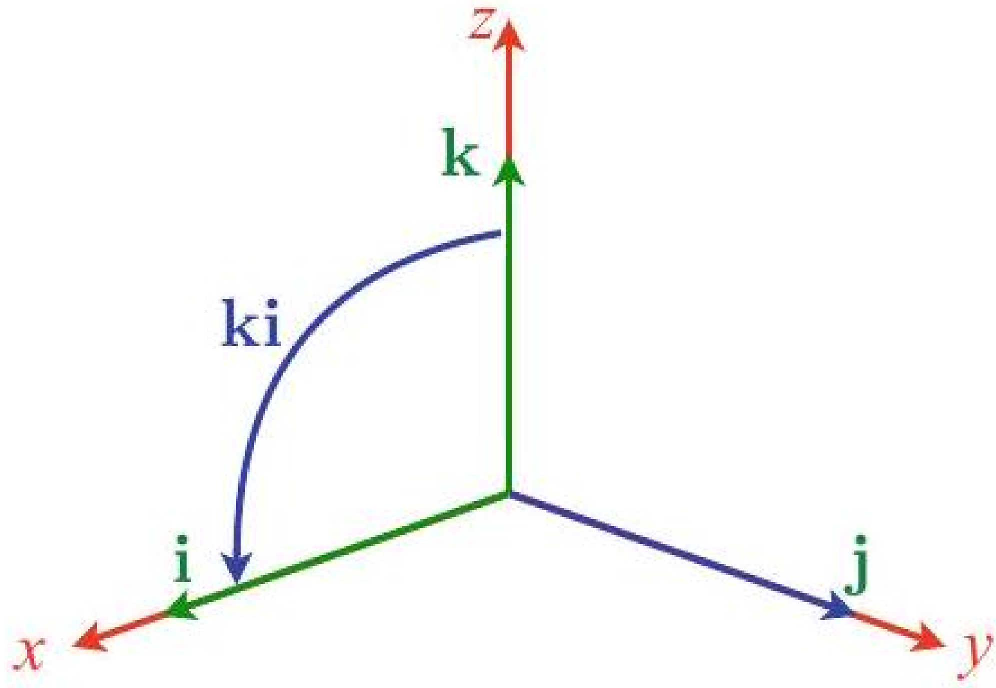
If we assume that these vectors obey the distributive and associative axioms of algebra, their imaginary qualities are exposed. For example:

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k}$$

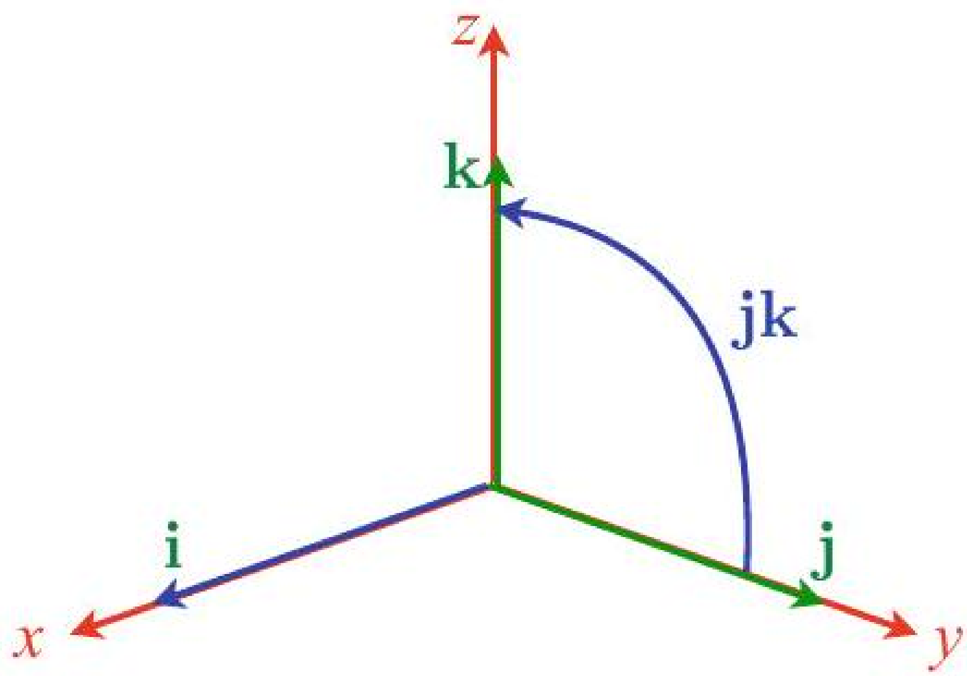
(a)



(c)



(b)



(d)

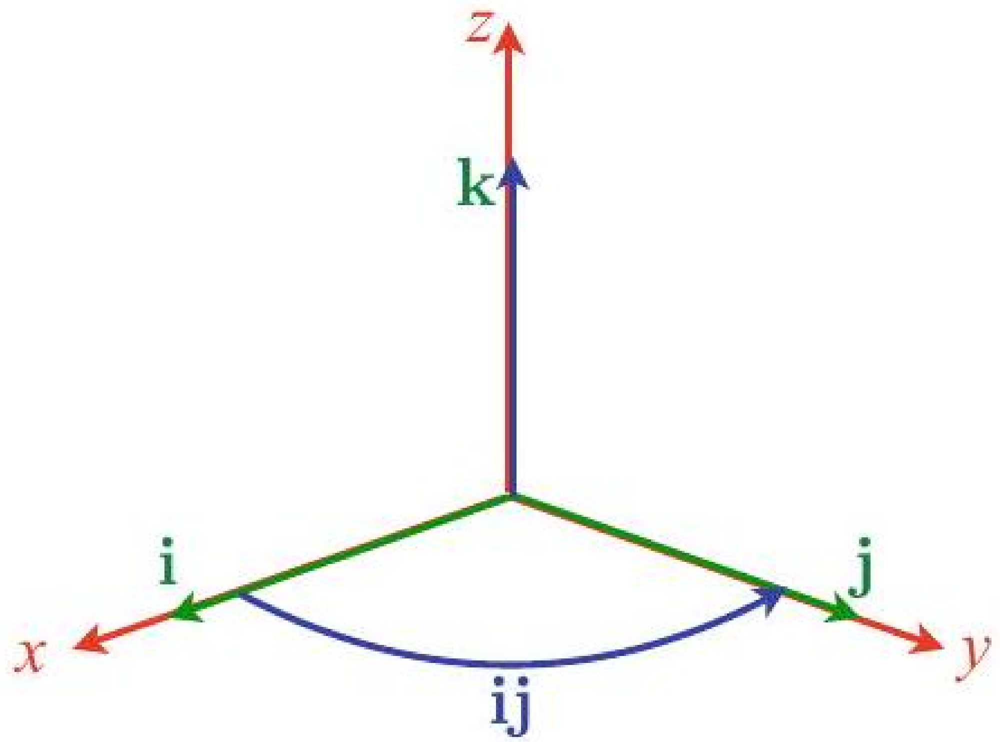


Fig. 6.1 Interpreting the products **jk**, ki, ij

and multiplying throughout by **i** :

$$\mathbf{iij} = \mathbf{ik} = -\mathbf{j}$$

therefore,

$$\mathbf{ii} = \mathbf{i}^2 = -1$$

Similarly, we can show that $\mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$.

Next:

$$\mathbf{ijk} = \mathbf{i}(\mathbf{jk}) = \mathbf{ii} = \mathbf{i}^2 = -1$$

Thus, simply by declaring the action of the cross-product, Hamilton's rules emerge, with all of their imaginary features. Tait also made the following observation:

A very curious speculation, due to Servois, and published in 1813 in Gergonne's Annales is the only one, so far has been discovered, in which the slightest trace of an anticipation of Quaternions is contained. Endeavouring to extend to space the form $a+b\sqrt{-1}$ for the plane, he is guided by analogy to write a directed unit-line in space the form

$$p\cos\alpha + q\cos\beta + r\cos\gamma$$

where α, β, γ are its inclinations to the three axes. He perceives easily that p, q, r must be non-reals : but, he asks, "seraient-elles imaginaires réductibles à la forme générale $A+B\sqrt{-1}$?" This could not be the answer. In fact they are the $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ of the Quaternion Calculus. [4]

So the French mathematician François-Joseph Servois (1768-1847), was another person who came very close to discovering quaternions. Furthermore, both Tait and Hamilton were apparently unaware of the paper published by Rodrigues.

And it doesn't stop there. The brilliant German mathematician Carl Friedrich Gauss (1777-1855), was extremely cautious, and nervous of publishing anything too revolutionary, just in case he was ridiculed by fellow mathematicians. His diaries reveal that he had anticipated non-euclidean geometry ahead of Nikolai Ivanovich Lobachevsky. And in a short note from his diary in 1819 [5] he reveals that he had identified a method of finding the product of two quadruples (a, b, c, d) and $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ as:

$$\begin{aligned}(A, B, C, D) =&(a, b, c, d)(\alpha, \beta, \gamma, \delta)\\ =&(a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta, a\beta + b\alpha - c\delta + d\gamma\\ &a\gamma + b\delta + c\alpha - d\beta, a\delta - b\gamma + c\beta + d\alpha).\end{aligned}$$

At first glance, this result does not look like a quaternion product, but if we transpose the second and third coordinates of the quadruples, and treat them as quaternions, we have:

$$\begin{aligned}(A, B, C, D) &= (a + ci + bj + dk)(\alpha + \gamma i + \beta j + \delta k)\\ &= a\alpha - c\gamma - b\beta - d\delta + a(\gamma i + \beta j + \delta k)\\ &= +\alpha(ci + bj + dk), (b\delta - d\beta)i + (d\gamma - c\delta)j + (c\beta - b\gamma)k\end{aligned}$$

which is identical to Hamilton's quaternion product! Furthermore, Gauss also realised that the product was non-commutative. However, he did not publish his findings, and it was left to Hamilton to invent quaternions for himself, publish his results and take the credit.

In 1881 and 1884, Josiah Willard Gibbs, at Yale University, printed his lecture notes on vector analysis for his students. Gibbs had cut the 'umbilical cord' between the real and vector parts of a quaternion and raised the 3 -D vector as an independent object without any imaginary connotations. Gibbs also took on board the ideas of the German mathematician Hermann Günter Grassmann (1809-1877), who had been developing his own ideas for a vectorial system since 1832 . Gibbs also defined the scalar and vector products using the relevant parts of the quaternion product. Finally, in 1901, a student of Gibbs, Edwin Bidwell Wilson, published Gibbs' notes in book form: Vector Analysis [6], which contains the notation in use today.

Quaternion algebra is definitely imaginary, yet simply by isolating the vector part and ignoring the imaginary rules, Gibbs was able to reveal a new branch of mathematics that exploded into vector analysis. Hamilton and his supporters were unable to persuade their peers that quaternions could represent vectorial quantities, and eventually, Gibbs' notation won the day, and quaternions faded from the scene.

In recent years, quaternions have been rediscovered by the flight simulation industry, and more recently by the computer graphics community, where they are used to rotate vectors about an arbitrary axis. In the intervening years, various people have had the opportunity to investigate the algebra, and propose new ways of harnessing its qualities.

So let's look at three ways of annotating a quaternion q :

$$
\begin{aligned}
& q = s + xi + yj + zk \\
& q = s + \mathbf{v} \\
& q = [s, \mathbf{v}] \\
& \text{ wheres, } x, y, z \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \\
& \text{ and } i^2 = j^2 = k^2 = -1.
\end{aligned}
$$

The difference is rather subtle. In (6.1) we have Hamilton's original definition with its imaginary terms and associated rules. In (6.2) a ' $+$ ' sign is used to add a scalar to a vector, which seems strange, yet works. In (6.3) we have an ordered pair comprising a scalar and a vector.

Now you may be thinking: How is it possible to have three different definitions for the same object? Well, I would argue that you can call an object whatever you like, so long as they are algebraically identical. For example, matrix notation is used to represent a set of linear equations, and leads to the same results as every-day equations. Therefore, both systems of notation are equally valid.

Although I have employed the notation in (6.1) and (6.2) in other publications, in this book I have used ordered pairs. So what we need to show is that Hamilton's original definition of a quaternion (6.1), with its scalar and three imaginary terms, can be replaced by an ordered pair (6.3) comprising a scalar and a 'modern' vector.

6.3 四元数定义

Let's start with two quaternions q_a and q_b à la Hamilton:

$$
\begin{aligned}
q_a &= s_a + x_a i + y_a j + z_a k \\
q_b &= s_b + x_b i + y_b j + z_b k
\end{aligned}
$$

and the obligatory rules:

$$
\begin{aligned}
i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \\
ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j \\
ji = -k, kj = -i, ik = -j.
\end{aligned}
$$

Our objective is to show that q_a and q_b can also be represented by the ordered pairs

$$
\begin{aligned}
q_a &= [s_a, \mathbf{a}] \\
q_b &= [s_b, \mathbf{b}], \quad s_a, s_b \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3.
\end{aligned}
$$

The quaternion product $q_a q_b$ expands to

$$
\begin{aligned}
q_a q_b = [s_a, \mathbf{a}] [s_b, \mathbf{b}] =& [s_a + x_a i + y_a j + z_a k] [s_b + x_b i + y_b j + z_b k] \\
=& [(s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b) \\
&+ (s_a x_b + s_b x_a + y_a z_b - y_b z_a) i \\
&+ (s_a y_b + s_b y_a + z_a x_b - z_b x_a) j \\
&+ (s_a z_b + s_b z_a + x_a y_b - x_b y_a) k].
\end{aligned}
$$

Equation (6.4) takes the form of another quaternion, and confirms that the quaternion product is closed.

At this stage, Hamilton turned the imaginary terms i, j, k into unit Cartesian vectors $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ and transformed (6.4) into a vector form. The problem with this approach is that the vectors retain their imaginary roots. Simon Altmann's suggestion is to replace the imaginaries by the ordered pairs:

$$
i = [0, \mathbf{i}], \quad j = [0, \mathbf{j}], \quad k = [0, \mathbf{k}]
$$

which are themselves quaternions, and called quaternion units.

The idea of defining a quaternion in terms of quaternion units is exactly the same as defining a vector in terms of its unit Cartesian vectors. Furthermore, it permits vectors to exist without any imaginary associations.

Let's substitute these quaternion units in (6.4) together with $[1, \mathbf{0}] = 1$:

$$\begin{aligned}[s_a, \mathbf{a}][s_b, \mathbf{b}] =& [(s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b)[1, \mathbf{0}] \\ &+ (s_a x_b + s_b x_a + y_a z_b - y_b z_a)[0, \mathbf{i}] \\ &+ (s_a y_b + s_b y_a + z_a x_b - z_b x_a)[0, \mathbf{j}] \\ &+ (s_a z_b + s_b z_a + x_a y_b - x_b y_a)[0, \mathbf{k}]].\end{aligned}$$

Next, we expand (6.5) using previously defined rules:

$$\begin{aligned}[s_a, \mathbf{a}][s_b, \mathbf{b}] =& [[s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b, \mathbf{0}] \\ &+ [0, (s_a x_b + s_b x_a + y_a z_b - y_b z_a)\mathbf{i}] \\ &+ [0, (s_a y_b + s_b y_a + z_a x_b - z_b x_a)\mathbf{j}] \\ &+ [0, (s_a z_b + s_b z_a + x_a y_b - x_b y_a)\mathbf{k}]].\end{aligned}$$

A vertical scan of (6.6) reveals some hidden vectors:

$$\begin{aligned}[s_a, \mathbf{a}][s_b, \mathbf{b}] =& [[s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b, \mathbf{0}] \\ &+ [0, s_a(x_b\mathbf{i} + y_b\mathbf{j} + z_b\mathbf{k}) + s_b(x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j} + z_a\mathbf{k}) \\ &+ (y_a z_b - y_b z_a)\mathbf{i} + (z_a x_b - z_b x_a)\mathbf{j} + (x_a y_b - x_b y_a)\mathbf{k}]].\end{aligned}$$

Equation (6.7) contains two ordered pairs which can now be combined:

$$\begin{aligned}[s_a, \mathbf{a}][s_b, \mathbf{b}] =& [s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b, \\ &+ s_a(x_b\mathbf{i} + y_b\mathbf{j} + z_b\mathbf{k}) + s_b(x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j} + z_a\mathbf{k}) \\ &+ (y_a z_b - y_b z_a)\mathbf{i} + (z_a x_b - z_b x_a)\mathbf{j} + (x_a y_b - x_b y_a)\mathbf{k}].\end{aligned}$$

If we make

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j} + z_a\mathbf{k} \\ \mathbf{b} &= x_b\mathbf{i} + y_b\mathbf{j} + z_b\mathbf{k}\end{aligned}$$

and substitute them in (6.8) we get:

$$[s_a, \mathbf{a}][s_b, \mathbf{b}] = [s_a s_b - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, s_a\mathbf{b} + s_b\mathbf{a} + \mathbf{a}\times\mathbf{b}]$$

which defines the quaternion product.

From now on, we don't have to worry about Hamilton's rules as they are embedded within (6.9). Furthermore, our vectors have no imaginary associations.

Although Rodrigues did not have access to Gibbs' vector notation used in (6.9), he managed to calculate the equivalent algebraic expression, which was some achievement.

6.3.1 四元数单位

Using (6.9) we can check to see if the quaternion units are imaginary by squaring them:

$$\begin{aligned} i &= [0, \mathbf{i}] \\ i^2 &= [0, \mathbf{i}][0, \mathbf{i}] \\ &= [\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}, \mathbf{i} \times \mathbf{i}] \\ &= [-1, \mathbf{0}] \end{aligned}$$

which is a real quaternion and equivalent to -1 , confirming that $[0, \mathbf{i}]$ is imaginary. Using a similar expansion we can shown that $[0, \mathbf{j}]$ and $[0, \mathbf{k}]$ have the same property. Now let's compute the products ij, jk and ki :

$$\begin{aligned} ij &= [0, \mathbf{i}][0, \mathbf{j}] \\ &= [-\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}, \mathbf{i} \times \mathbf{j}] \\ &= [0, \mathbf{k}] \end{aligned}$$

which is the quaternion unit k.

$$\begin{aligned} jk &= [0, \mathbf{j}][0, \mathbf{k}] \\ &= [-\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k}] \\ &= [0, \mathbf{i}] \end{aligned}$$

which is the quaternion unit i.

$$\begin{aligned} ki &= [0, \mathbf{k}][0, \mathbf{i}] \\ &= [-\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i}] \\ &= [0, \mathbf{j}] \end{aligned}$$

which is the quaternion unit j.

Next, let's confirm that $ijk = -1$:

$$\begin{aligned}
\text{ijk} &= [0, \mathbf{i}][0, \mathbf{j}][0, \mathbf{k}] \\
&= [0, \mathbf{k}][0, \mathbf{k}] \\
&= [-\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}, \mathbf{k} \times \mathbf{k}] \\
&= [-1, \mathbf{0}]
\end{aligned}$$

which is a real quaternion equivalent to -1 , confirming that $ijk = -1$.

Thus the notation of ordered pairs upholds all of Hamilton's rules. However, the last double product assumes that quaternions are associative. So let's double check to show that $(ij)k = i(jk)$:

$$\begin{aligned}
i(jk) &= [0, \mathbf{i}][0, \mathbf{j}][0, \mathbf{k}] \\
&= [0, \mathbf{i}][0, \mathbf{i}] \\
&= [-\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}, \mathbf{i} \times \mathbf{i}] \\
&= [-1, \mathbf{0}]
\end{aligned}$$

which is correct.

6.3.2 四元数乘积示例

Although we have yet to discover how quaternions are used to rotate vectors, let's concentrate on their algebraic traits by evaluating an example.

$$\begin{aligned}
q_a &= [1, 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}] \\
q_b &= [2, 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}]
\end{aligned}$$

the product $q_a q_b$ is

$$\begin{aligned}
q_a q_b =& [1, 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}][2, 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}] \\
=& [1 \times 2 - (2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5), \\
& 1(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) + 2(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \\
& + (3 \times 5 - 4 \times 4)\mathbf{i} - (2 \times 5 - 4 \times 3)\mathbf{j} + (2 \times 4 - 3 \times 3)\mathbf{k}] \\
=& [-36, 7\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 13\mathbf{k} - \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}] \\
=& [-36, 6\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 12\mathbf{k}]
\end{aligned}$$

which is another ordered pair representing a quaternion.

Having shown that Hamilton's imaginary notation has a vector equivalent, and can be represented as an ordered pair, we continue with this notation and describe other features of quaternions. Note that we can abandon Hamilton's rules as they are embedded within the definition of the quaternion product, and will surface in the following definitions.

6.4 代数定义

A quaternion is the ordered pair:

$$q = [s, \mathbf{v}], \quad s \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$$

If we express $\mathbf{v}$ in terms of its components, we have

$$q = [s, x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}], \quad s, x, y, z \in \mathbb{R}$$

6.5 四元数加减法

Addition and subtraction employ the following rule:

$$\begin{aligned} q_a &= [s_a, \mathbf{a}] \\ q_b &= [s_b, \mathbf{b}] \\ q_a \pm q_b &= [s_a \pm s_b, \mathbf{a} \pm \mathbf{b}]\,. \end{aligned}$$

For example:

$$\begin{aligned} q_a &= [0.5, 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}] \\ q_b &= [0.1, 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}] \\ q_a + q_b &= [0.6, 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 2\mathbf{k}] \\ q_a - q_b &= [0.4, -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 10\mathbf{k}] \end{aligned}$$

6.6 实四元数

A real quaternion has a zero vector term:

$$q = [s, \mathbf{0}]$$

The product of two real quaternions is

$$
\begin{aligned}
q_a &= [s_a, \mathbf{0}] \\
q_b &= [s_b, \mathbf{0}] \\
q_a q_b &= [s_a, \mathbf{0}]\,[s_b, \mathbf{0}] \\
&= [s_a s_b, \mathbf{0}]
\end{aligned}
$$

which is another real quaternion, and shows that they behave just like real numbers:

$$[s, \mathbf{0}] \equiv s$$

We have already come across this with complex numbers containing a zero imaginary term:

$$a + bi = a, \qquad \text{when } b = 0$$

6.7 四元数乘以标量

Intuition suggests that multiplying a quaternion by a scalar should obey the rule:

$$
\begin{aligned}
q &= [s, \mathbf{v}] \\
\lambda q &= \lambda[s, \mathbf{v}], \quad \lambda \in \mathbb{R} \\
&= [\lambda s, \lambda \mathbf{v}].
\end{aligned}
$$

For example:

$$
\begin{aligned}
q &= 3[2, 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}] \\
&= [6, 9\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 15\mathbf{k}].
\end{aligned}
$$

We can confirm our intuition by multiplying a quaternion by a scalar in the form of a real quaternion:

$$
\begin{aligned}
q &= \left[\begin{array}{cc} s, & \mathbf{v} \end{array}\right] \\
\lambda &= [\lambda, \mathbf{0}] \\
\lambda q &= \left[\begin{array}{cc} \lambda, & \mathbf{0} \end{array}\right][s, \mathbf{v}] \\
&= \left[\begin{array}{cc} \lambda s, & \lambda \mathbf{v} \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

which is excellent confirmation.

6.8 纯四元数

Hamilton defined a pure quaternion as one having a zero scalar term:

$$q = xi + yj + zk$$

and is just a vector, but with imaginary qualities. Simon Altmann, and others, believe that this was a serious mistake on Hamilton's part to call a quaternion with a zero real term, a vector.

The main issue is that there are two types of vectors: polar and axial, also called a pseudovector. Richard Feynman describes polar vectors as 'honest' vectors [7] and represent the every-day vectors of directed lines. Whereas, axial vectors are computed from polar vectors, such as in a vector product. However, these two types of vector do not behave in the same way when transformed. For example, given two 'honest', polar vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$, we can compute the axial vector: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Next, if we subject $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ to an inversion transform through the origin, such that $\mathbf{a}$ becomes $-\mathbf{a}$, and $\mathbf{b}$ becomes $-\mathbf{b}$, and compute their cross product $(-\mathbf{a}) \times (-\mathbf{b})$, we still get c! Which implies that the axial vector $\mathbf{c}$ must not be transformed along with a and $\mathbf{b}$.

It could be argued that the inversion transform is not a 'proper' transform as it turns a right-handed set of axes into a left-handed set. But in physics, laws of nature are expected to work in either system. Unfortunately, Hamilton was not aware of this distinction, as he had only just invented vectors. However, in the intervening years, it has become evident that Hamilton's quaternion vector is an axial vector, and not a polar vector. As we will see, in 3-D rotations quaternions take the form

$$q = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{v}\right]$$

where θ is the angle of rotation and $\mathbf{v}$ is the axis of rotation, and when we set $\theta = 180°$, we get

$$q = [0, \mathbf{v}]$$

which remains a quaternion, even though it only contains a vector part.

Consequently, we define a pure quaternion as

$$q = [0, \mathbf{v}]$$

The product of two pure quaternions is

$$
\begin{aligned}
q_a &= [0, \mathbf{a}] \\
q_b &= [0, \mathbf{b}] \\
q_a q_b &= [0, \mathbf{a}][0, \mathbf{b}] \\
&= [-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}]
\end{aligned}
$$

which is no longer 'pure', as some of the original vector information has 'tunnelled' across into the real part via the dot product.

6.9 单位四元数

Let's pursue this analysis further by introducing some familiar vector notation.

Give vector $\mathbf{v}$, then

$$
\mathbf{v} = \lambda \hat{\mathbf{v}}, \quad \text{where } \lambda = \|\mathbf{v}\| \text{ and } \|\hat{\mathbf{v}}\| = 1
$$

Combining this with the definition of a pure quaternion we get:

$$
\begin{aligned}
q &= [0, \mathbf{v}] \\
&= [0, \lambda \hat{\mathbf{v}}] \\
&= \lambda [0, \hat{\mathbf{v}}]
\end{aligned}
$$

and reveals the object $[0, \hat{\mathbf{v}}]$ which is called the unit quaternion and comprises a zero scalar and a unit vector. It is convenient to identify this unit quaternion as $\hat{q}$:

$$
\hat{q} = [0, \hat{\mathbf{v}}]
$$

So now we have a notation similar to that of vectors where a vector $\mathbf{v}$ is described in terms of its unit form:

$$
\mathbf{v} = \lambda \hat{\mathbf{v}}
$$

and a quaternion q is also described in terms of its unit form:

$$
q = \lambda \hat{q}
$$

Note that $\hat{q}$ is an imaginary object as it squares to -1 :

$$\begin{aligned}\hat{q}^2 &= [0, \hat{\mathbf{v}}][0, \hat{\mathbf{v}}] \\ &= [-\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{v}}] \\ &= [-1, \mathbf{0}] \\ &= -1\end{aligned}$$

which is not too surprising, bearing in mind Hamilton's original invention!

6.10 四元数的加法形式

We now come to the idea of splitting a quaternion into its constituent parts: a real quaternion and a pure quaternion. Again, intuition suggests that we can write a quaternion as

$$\begin{aligned}q &= [s, \mathbf{v}] \\ &= [s, \mathbf{0}] + [0, \mathbf{v}]\end{aligned}$$

and we can test this by forming the algebraic product of two quaternions represented in this way:

$$\begin{aligned}q_a &= [s_a, \mathbf{0}] + [0, \mathbf{a}] \\ q_b &= [s_b, \mathbf{0}] + [0, \mathbf{b}] \\ q_a q_b &= ([s_a, \mathbf{0}] + [0, \mathbf{a}])\,([s_b, \mathbf{0}] + [0, \mathbf{b}]) \\ &= [s_a, \mathbf{0}]\,[s_b, \mathbf{0}] + [s_a, \mathbf{0}]\,[0, \mathbf{b}] + [0, \mathbf{a}]\,[s_b, \mathbf{0}] + [0, \mathbf{a}][0, \mathbf{b}] \\ &= [s_a s_b, \mathbf{0}] + [0, s_a\mathbf{b}] + [0, s_b\mathbf{a}] + [-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}] \\ &= [s_a s_b - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, s_a\mathbf{b} + s_b\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}]\end{aligned}$$

which is correct, and confirms that the additive form works.

6.11 四元数的双体形式

Having shown that the additive form of a quaternion works, and discovered the unit quaternion, we can join the two objects together as follows:

$$\begin{aligned}q &= [s, \mathbf{v}] \\ &= [s, \mathbf{0}] + [0, \mathbf{v}] \\ &= [s, \mathbf{0}] + \lambda[0, \hat{\mathbf{v}}] \\ &= s + \lambda\hat{q}.\end{aligned}$$

Just to recap, s is a scalar, λ is the length of the vector term, and $\hat{q}$ is the unit quaternion $[0, \hat{\mathbf{v}}]$.

Look how similar this notation is to a complex number:

$$z = a + bi$$
$$q = s + \lambda\hat{q}$$

where a, b, s, λ are scalars, i is the unit imaginary and $\hat{q}$ is the unit quaternion.

6.12 四元数的复共轭

We have already discovered that the conjugate of a complex number $z = a + b\mathrm{i}$ is given by

$$z^* = a - b\mathrm{i}$$

and is very useful in computing the inverse of z. The quaternion conjugate plays a similar role in computing the inverse of a quaternion. Therefore, given

$$q = [s, \mathbf{v}]$$

the quaternion conjugate is defined as

$$q^* = [s, -\mathbf{v}]$$

For example:

$$q = [2, 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}]$$
$$q^* = [2, -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}]$$

If we compute the product qq^* we obtain

$$\begin{aligned} qq^* &= [s, \mathbf{v}][s, -\mathbf{v}] \\ &= \left[s^2 - \mathbf{v} \cdot (-\mathbf{v}), -s\mathbf{v} + s\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (-\mathbf{v})\right] \\ &= \left[s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{0}\right] \\ &= \left[s^2 + v^2, \mathbf{0}\right]. \end{aligned}$$

Let's show that $qq^* = q^*q$:

$$
\begin{aligned}
q^*q &= [s,-\mathbf{v}][s,\mathbf{v}] \\
&= \left[s^2-(-\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}, s\mathbf{v}-s\mathbf{v}+(-\mathbf{v})\times\mathbf{v}\right] \\
&= \left[s^2+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v},\mathbf{0}\right] \\
&= \left[s^2+v^2,\mathbf{0}\right] \\
&= qq^*
\end{aligned}
$$

Now let's show that $(q_aq_b)^* = q_b^*q_a^*$.

$$
\begin{aligned}
q_a &= [s_a,\mathbf{a}] \\
q_b &= [s_b,\mathbf{b}] \\
q_aq_b &= [s_a,\mathbf{a}]\,[s_b,\mathbf{b}] \\
&= [s_as_b-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, s_a\mathbf{b}+s_b\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}] \\
(q_aq_b)^* &= [s_as_b-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, -s_a\mathbf{b}-s_b\mathbf{a}-\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\,.
\end{aligned}
$$

Next, we compute $q_b^*q_a^*$

$$
\begin{aligned}
q_a^* &= [s_a,-\mathbf{a}] \\
q_b^* &= [s_b,-\mathbf{b}] \\
q_b^*q_a^* &= [s_b,-\mathbf{b}]\,[s_a,-\mathbf{a}] \\
&= [s_as_b-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, -s_a\mathbf{b}-s_b\mathbf{a}-\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\,.
\end{aligned}
$$

And as (6.10) equals (6.11), $(q_aq_b)^* = q_b^*q_a^*$.

6.13 四元数的范数

The norm of a complex number $z = a + bi$ is defined as:

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

which allows us to write

$$zz^* = |z|^2$$

Similarly, the norm of a quaternion q is defined as:

$$
\begin{aligned}
q &= [s,\mathbf{v}] \\
&= [s,\lambda\hat{\mathbf{v}}] \\
|q| &= \sqrt{s^2+\lambda^2}
\end{aligned}
$$

where $\lambda = \|\mathbf{v}\|$ which allows us to write

$$qq^* = |q|^2$$

For example:

$$\begin{aligned} q &= [1, 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}] \\ |q| &= \sqrt{1^2 + 4^2 + 4^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{49} \\ &= 7 \end{aligned}$$

6.14 归一化四元数

A quaternion with a unit norm is called a normalised quaternion. For example, the quaternion $q = [s, \mathbf{v}]$ is normalised by dividing it by $|q|$:

$$q' = \frac{q}{\sqrt{s^2 + \lambda^2}}$$

We must be careful not to confuse the unit quaternion with a unit-norm quaternion. The unit quaternion is $[0, \hat{\mathbf{v}}]$ with a unit-vector part, whereas a unit-norm quaternion is normalised such that $s^2 + \lambda^2 = 1$.

I will be careful to distinguish between these two terms as many authorsincluding myself-use the term unit quaternion to describe a quaternion with a unit norm. For example:

$$q = [1, 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}]$$

has a norm of 7 , and q is normalised by dividing by 7 :

$$q' = \frac{1}{7}[1, 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}]$$

The type of unit-norm quaternion we will be using takes the form:

$$q = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{\mathbf{v}}\right]$$

because $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

6.15 四元数乘积

Having shown that ordered pairs can represent a quaternion and its various manifestations, let's summarise the products we will eventually encounter. To start, we have the product of two normal quaternions:

$$\begin{aligned} q_a q_b &= [s_a, \mathbf{a}]\,[s_b, \mathbf{b}] \\ &= [s_a s_b - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, s_a\mathbf{b} + s_b\mathbf{a} + \mathbf{a}\times\mathbf{b}]\,. \end{aligned}$$

6.15.1 纯四元数的乘积

Given two pure quaternions:

$$\begin{aligned} q_a &= [0, \mathbf{a}] \\ q_b &= [0, \mathbf{b}] \end{aligned}$$

their product is

$$\begin{aligned} q_a q_b &= [0, \mathbf{a}][0, \mathbf{b}] \\ &= [-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{b}]. \end{aligned}$$

6.15.2 两个归一化四元数的乘积

Given two unit-norm quaternions:

$$\begin{aligned} q_a &= [s_a, \mathbf{a}] \\ q_b &= [s_b, \mathbf{b}] \end{aligned}$$

where $|q_a| = |q_b| = 1$. Their product is another unit-norm quaternion, which is proved as follows.

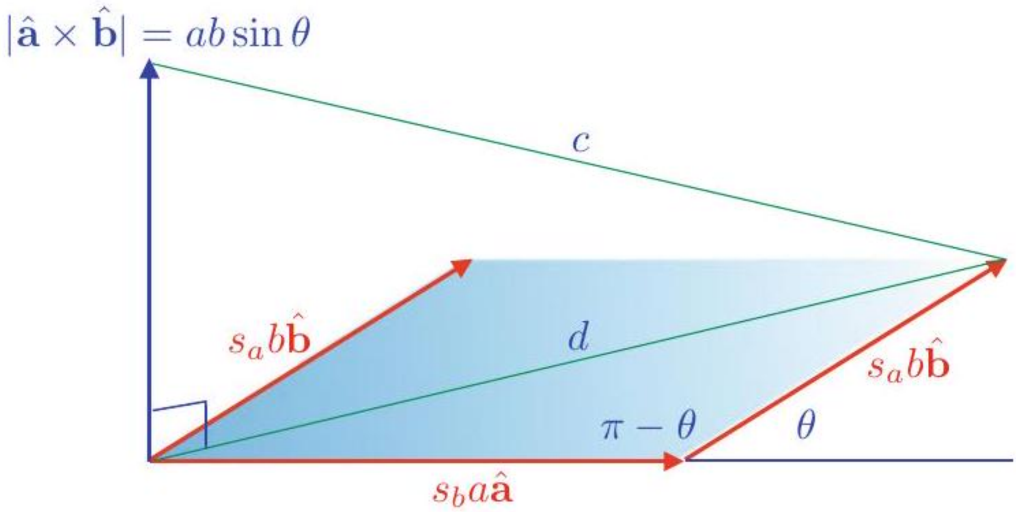
We assume $q_c = [s_c, \mathbf{c}]$ and show that $|q_c| = s_c^2 + c^2 = 1$ where

$$\begin{aligned} [s_c, \mathbf{c}] &= [s_a, \mathbf{a}]\,[s_b, \mathbf{b}] \\ &= [s_a s_b - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, s_a\mathbf{b} + s_b\mathbf{a} + \mathbf{a}\times\mathbf{b}]\,. \end{aligned}$$

Let's assume the angle between **a** and **b** is θ, which permits us to write:

$$\begin{aligned} s_c &= s_a s_b - ab\cos\theta \\ \mathbf{c} &= s_a b\hat{\mathbf{b}} + s_b a\hat{\mathbf{a}} + ab\sin\theta(\hat{\mathbf{a}}\times\hat{\mathbf{b}}). \end{aligned}$$

Fig. 6.2 Geometry for $s_a b\hat{\mathbf{b}} + s_b a\hat{\mathbf{a}} + ab\sin\theta(\hat{\mathbf{a}}\times$ b)



Therefore,

$$
\begin{aligned}
s_c^2 &= (s_a s_b - ab\cos\theta)\,(s_a s_b - ab\cos\theta) \\
&= s_a^2 s_b^2 - 2s_a s_b ab\cos\theta + a^2 b^2\cos^2\theta.
\end{aligned}
$$

Figure 6.2 shows the geometry representing $\mathbf{c}$.

$$
\begin{aligned}
d^2 &= s_b^2 a^2 + s_a^2 b^2 - 2s_a s_b ab\cos(\pi - \theta) \\
&= s_b^2 a^2 + s_a^2 b^2 + 2s_a s_b ab\cos\theta \\
c^2 &= d^2 + a^2 b^2\sin^2\theta \\
&= s_b^2 a^2 + s_a^2 b^2 + 2s_a s_b ab\cos\theta + a^2 b^2\sin^2\theta \\
s_c^2 + c^2 &= s_a^2 s_b^2 - 2s_a s_b ab\cos\theta + a^2 b^2\cos^2\theta + s_b^2 a^2 + s_a^2 b^2 + 2s_a s_b ab\cos\theta + a^2 b^2\sin^2\theta \\
&= s_a^2 s_b^2 + a^2 b^2 + s_b^2 a^2 + s_a^2 b^2 \\
&= s_a^2\left(s_b^2 + b^2\right) + a^2\left(s_b^2 + b^2\right) \\
&= s_a^2 + a^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Therefore, the product of two unit-norm quaternions is another unit-norm quaternion. Consequently, multiplying a quaternion by a unit-norm quaternion, does not change its norm:

$$
\begin{aligned}
q_a &= [s_a, \mathbf{a}] \\
|q_a| &= 1 \\
q_b &= [s_b, \mathbf{b}] \\
|q_a q_b| &= |q_b| \,.
\end{aligned}
$$

6.15.3 四元数的平方

The square of a quaternion is given by:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\
q &= [s, \mathbf{v}] \\
q^2 &= [s, \mathbf{v}][s, \mathbf{v}] \\
&= \left[s^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, 2s\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{v}\right] \\
&= \left[s^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, 2s\mathbf{v}\right] \\
&= \left[s^2 - x^2 - y^2 - z^2, 2s(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\right] .
\end{aligned}
$$

For example:

$$
\begin{aligned}
q &= [7, 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}] \\
q^2 &= \left[7^2 - 2^2 - 3^2 - 4^2, \quad 14(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})\right] \\
&= [20, 28\mathbf{i} + 42\mathbf{j} + 56\mathbf{k}]
\end{aligned}
$$

The square of a pure quaternion is

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\
q &= [0, \mathbf{v}] \\
q^2 &= [0, \mathbf{v}][0, \mathbf{v}] \\
&= [0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \times \mathbf{v}] \\
&= [0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{0}] \\
&= \left[-\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \mathbf{0}\right]
\end{aligned}
$$

which makes the square of a pure, unit-norm quaternion equal to -1 , and was one of the results, to which some 19th-century mathematicians objected.

6.15.4 四元数乘积的范数

In proving that the product of two unit-norm quaternions is another unit-norm quaternion we saw that

$$\begin{aligned} q_a &= [s_a, \mathbf{a}] \\ q_b &= [s_b, \mathbf{b}] \\ q_c &= q_a q_b \\ |q_c|^2 &= s_a^2 \left(s_b^2 + b^2\right) + a^2 \left(s_b^2 + b^2\right) \\ &= \left(s_a^2 + a^2\right)\left(s_b^2 + b^2\right) \end{aligned}$$

which, if we ignore the constraint of unit-norm quaternions, shows that the norm of a quaternion product equals the product of the individual norms:

$$\begin{aligned} |q_a q_b|^2 &= |q_a|^2 \, |q_b|^2 \\ |q_a q_b| &= |q_a| \, |q_b| \end{aligned}$$

6.16 逆四元数

An important feature of quaternion algebra is the ability to divide two quaternions q_b/q_a, as long as q_a does not vanish.

By definition, the inverse q^{-1} of q satisfies

$$qq^{-1} = [1, 0] = 1$$

To isolate q^{-1}, we multiply (6.12) by q^*

$$\begin{aligned} q^* q q^{-1} &= q^* \\ |q|^2 q^{-1} &= q^* \end{aligned}$$

and from (6.13) we can write

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$$

If q is a unit-norm quaternion, then

$$q^{-1} = q^*$$

which is useful in the context of rotations.

Furthermore, as

$$(q_a q_b)^* = q_b^* q_a^*$$

then

$$(q_a q_b)^{-1} = q_b^{-1} q_a^{-1}$$

Note that $qq^{-1} = q^{-1}q$:

$$\begin{aligned} qq^{-1} &= \frac{qq^*}{|q|^2} = 1 \\ q^{-1}q &= \frac{q^*q}{|q|^2} = 1 \end{aligned}$$

Thus, we represent the quotient q_b/q_a as

$$\begin{aligned} q_c &= \frac{q_b}{q_a} \\ &= q_b q_a^{-1} \\ &= \frac{q_b q_a^*}{|q_a|^2} \end{aligned}$$

For completeness let's evaluate the inverse of q where

$$\begin{aligned} q &= \left[1, \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right] \\ q^* &= \left[1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right] \\ |q|^2 &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 2 \\ q^{-1} &= \frac{q^*}{|q|^2} = \frac{1}{2}\left[1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right]. \end{aligned}$$

It should be clear that $q^{-1}q = 1$:

$$\begin{aligned} q^{-1}q &= \frac{1}{2}\left[1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right]\left[1, \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, \mathbf{0}\right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

6.17 矩阵

Matrices provide another way to express a quaternion product. For convenience, let's repeat (6.8) again and show it in matrix form:

$$
\begin{aligned}
[s_a, \mathbf{a}]\,[s_b, \mathbf{b}] =& [s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b \\
& + s_a\left(x_b \mathbf{i} + y_b \mathbf{j} + z_b \mathbf{k}\right) + s_b\left(x_a \mathbf{i} + y_a \mathbf{j} + z_a \mathbf{k}\right) \\
& + \left(y_a z_b - y_b z_a\right)\mathbf{i} + \left(z_a x_b - z_b x_a\right)\mathbf{j} + \left(x_a y_b - x_b y_a\right)\mathbf{k}] \\
& \begin{bmatrix} s_a & -x_a & -y_a & -z_a \\ x_a & s_a & -z_a & y_a \\ y_a & z_a & s_a & -x_a \\ z_a & -y_a & x_a & s_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_b \\ x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Let's recompute the product $q_a q_b$ using the above matrix:

$$
\begin{aligned}
q_a &= [1, 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}] \\
q_b &= [2, 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}] \\
q_a q_b &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -36 \\ 6 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} \\
&= [-36, 6\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 12\mathbf{k}].
\end{aligned}
$$

6.17.1 正交矩阵

We can demonstrate that the unit-norm quaternion matrix is orthogonal by showing that the product with its transpose equals the identity matrix. As we are dealing with matrices, $\mathbf{Q}$ will represent the matrix for q :

$$
\begin{aligned}
q &= [s, x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}] \\
&\text{where } 1 = s^2 + x^2 + y^2 + z^2 \\
\mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} s & -x & -y & -z \\ x & s & -z & y \\ y & z & s & -x \\ z & -y & x & s \end{bmatrix} \\
\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} &= \begin{bmatrix} s & x & y & z \\ -x & s & z & -y \\ -y & -z & s & x \\ -z & y & -x & s \end{bmatrix} \\
\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} &= \begin{bmatrix} s & -x & -y & -z \\ x & s & -z & y \\ y & z & s & -x \\ z & -y & x & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & x & y & z \\ -x & s & z & -y \\ -y & -z & s & x \\ -z & y & -x & s \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

For this to occur, $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}^{-1}$.

6.18 四元数代数

Ordered pairs provide a simple notation for representing quaternions, and allow us to represent the real unit 1 as $[1, \mathbf{0}]$, and the imaginaries i, j, k as $[0, \mathbf{i}]$, $[0, \mathbf{j}]$, $[0, \mathbf{k}]$ respectively. A quaternion then becomes a linear combination of these elements with associated real coefficients. Under such conditions, the elements form the basis for an algebra over the field of reals.

Furthermore, because quaternion algebra supports division, and obeys the normal axioms of algebra, except that multiplication is non-commutative, it is called a division algebra. The German mathematician Ferdinand Georg Frobenius proved that only three such real associative division algebras exist: real numbers, complex numbers and quaternions [8].

The Cayley numbers $\mathbb{O}$, constitute a real division algebra, but the Cayley numbers are 8-dimensional and are not associative, i.e. $a(bc) \neq (ab)c$ for all $a, b, c \in \mathbb{O}$.

6.19 总结

四元数与复数非常相似，除了它们有三个虚数项，而不是一个。因此，它们继承了一些与复数有关的性质，如范数、复共轭、单位范数和逆。它们也可以被加、减、乘、除。然而，与复数不同的是，它们在相乘时是反交换的。

6.19.1 定义总结

四元数

$$
\begin{aligned}
q_a &= [s_a, \mathbf{a}] = [s_a, x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j} + z_a\mathbf{k}] \\
q_b &= [s_b, \mathbf{b}] = [s_b, x_b\mathbf{i} + y_b\mathbf{j} + z_b\mathbf{k}] .
\end{aligned}
$$

加减法

$$
q_a \pm q_b = [s_a \pm s_b, \mathbf{a} \pm \mathbf{b}] .
$$

乘积

$$
\begin{aligned}
q_a q_b &= [s_a, \mathbf{a}]\,[s_b, \mathbf{b}] \\
&= [s_a s_b - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, s_a\mathbf{b} + s_b\mathbf{a} + \mathbf{a}\times\mathbf{b}] \\
&= \begin{bmatrix} s_a & -x_a & -y_a & -z_a \\ x_a & s_a & -z_a & y_a \\ y_a & z_a & s_a & -x_a \\ z_a & -y_a & x_a & s_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_b \\ x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} .
\end{aligned}
$$

平方

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\
q^2 &= [s, \mathbf{v}][s, \mathbf{v}] \\
&= \left[s^2 - x^2 - y^2 - z^2, 2s(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\right]
\end{aligned}
$$

纯四元数

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\
q^2 &= [0, \mathbf{v}][0, \mathbf{v}] \\
&= \left[-\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \mathbf{0}\right]
\end{aligned}
$$

范数

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \lambda \hat{\mathbf{v}} \\
q &= [s, \lambda \hat{\mathbf{v}}] \\
|q| &= \sqrt{s^2 + \lambda^2}
\end{aligned}
$$

单位范数

$$
|q| = \sqrt{s^2 + \lambda^2} = 1.
$$

共轭

$$
\begin{aligned}
q^* &= [s, -\mathbf{v}] \\
(q_a q_b)^* &= q_b^* q_a^*.
\end{aligned}
$$

逆

$$
\begin{aligned}
q^{-1} &= \frac{q^*}{|q|^2} \\
(q_a q_b)^{-1} &= q_b^{-1} q_a^{-1}
\end{aligned}
$$

6.20 样例

下面是一些运用了上述想法的进一步实例。在某些情况下，还包括一个测试来确认结果。

例 6.1: 四元数的加法和减法

对下列四元数进行加减运算:

$$
\begin{aligned}
q_a &= [2, -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}] \\
q_b &= [1, -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}] \\
q_a + q_b &= [3, -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 10\mathbf{k}] \\
q_a - q_b &= [1, 0\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}].
\end{aligned}
$$

例 6.2: 四元数范数

求下列四元数的范数:

$$
\begin{aligned}
q_a &= [2, -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}] \\
q_b &= [1, -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}] \\
|q_a| &= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{33} \\
|q_b| &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2 + (-6)^2} = \sqrt{66}.
\end{aligned}
$$

例 6.3: 单位范数四元数

将这些四元数转换为单位范数形式:

$$
\begin{aligned}
q_a &= [2, -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}] \\
q_b &= [1, -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}] \\
|q_a| &= \sqrt{33} \\
|q_b| &= \sqrt{66} \\
q'_a &= \frac{1}{\sqrt{33}}[2, -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}] \\
q'_b &= \frac{1}{\sqrt{66}}[1, -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}]
\end{aligned}
$$

例 6.4: 四元数乘积

计算下列四元数的乘积和反向乘积。

$$
\begin{aligned}
q_a &= [2, -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}] \\
q_b &= [1, -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}] \\
q_a q_b &= [2, -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}][1, -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}] \\
&= [2 \times 1 - ((-2) \times (-2) + 3 \times 5 + (-4) \times (-6)), \\
&+ 2(-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) + 1(-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \\
&+ (3 \times (-6) - (-4) \times 5)\mathbf{i} - ((-2) \times (-6) - (-4) \times (-2))\mathbf{j} \\
&+ ((-2) \times 5 - 3 \times (-2))\mathbf{k}] \\
&= [-41, -6\mathbf{i} + 13\mathbf{j} - 16\mathbf{k} + 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}] \\
&= [-41, -4\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 20\mathbf{k}]. \\
q_b q_a &= [1, -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}][2 - 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}] \\
&= [1 \times 2 - ((-2) \times (-2) + 5 \times 3 + (-6) \times (-4)), \\
&+ 1(-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) + 2(-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \\
&+ (5 \times (-4) - (-6) \times 3)\mathbf{i} - ((-2) \times (-4) - (-6) \times (-2))\mathbf{j} \\
&+ ((-2) \times 3 - 5 \times (-2))\mathbf{k}] \\
&= [-41, -6\mathbf{i} + 13\mathbf{j} - 16\mathbf{k} - 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}] \\
&= [-41, -8\mathbf{i} + 17\mathbf{j} - 12\mathbf{k}].
\end{aligned}
$$

注意：在这个计算中唯一改变的是轴向量叉乘的符号。

例 6.5: 四元数平方

计算这个四元数的平方:

$$
\begin{aligned}
q &= [2, -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}] \\
q^2 &= [2, -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}][2, -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}] \\
&= [2 \times 2 - ((-2) \times (-2) + 3 \times 3 + (-4) \times (-4)) \\
&+ 2 \times 2(-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k})] \\
&= [-25, -8\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 16\mathbf{k}]
\end{aligned}
$$

例 6.6: 四元数的逆

计算这个四元数的逆:

$$
\begin{aligned}
q &= [2, -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}] \\
q^* &= [2, 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}] \\
|q|^2 &= 2^2 + (-2)^2 + 3^2 + (-4)^2 = 33 \\
q^{-1} &= \frac{1}{33}[2, 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}].
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] Hamilton, W.R.: On quaternions: or a new system of imaginaries in algebra. Phil. Mag. 3rd ser. 25(1844)

[2] Hamilton, W.R.: Lectures on Quaternions. Hodges and Smith, Dublin (1853)

[3] Hamilton, W.R.: Elements of Quaternions (Jolly, C.J. (ed.) 2 vols.), 2nd edn. Green & Co., London, Longmans (1899-1901)

[4] Tait, P.G.: An Elementary Treatise on Quaternions. Cambridge University Press, Cambridge (1867)

[5] Gauss, C.F.: Mutation des Raumes In: Carl Friedrich Gauss Werke, Achter Band, pp. 357-361, König. Gesell. Wissen. Göttingen, 1900 (1819)

[6] Wilson, E.B.: Vector Analysis. Yale University Press, New Haven (1901)

[7] Feynman, R.P.: Symmetry and physical laws. In: Feynman Lectures in Physics, vol. 1

[8] Altmann, S.L.: Rotations, : Quaternions and Double Groups, p. 16. Dover, New York (2005). ISBN-13: 978-0-486-44518-2