计算机图形学中的四元数

Quaternion for Computer Graphics

原书第二版

John Vince 著

郭飞 译

2023年

谨以此书献给我的妻子*Heidi*.

第二版译序

第一版译序

译者是一名图像算法工程师，在学习 SLAM 的时候第一次接触到四元数，草草了解一点点，然后在三维重建的项目中，遇到点云显示的问题，也需要用四元数来处理旋转进行解决，恰好在查找资料的过程中发现了本书，大家也都推荐此书是一本讲解四元数很透彻的书，但是令我感到惊奇的是，如此一本好书居然目前为止尚未有中文版出版，故此，我一边学习此书一边翻译下来。

读完此书后，我的感受是，这本书讲解很透彻，循循善诱，基本上不用依赖什么大学数学知识就可以理解，甚至，讲解细致程度可以让小学生也能懂。没有多少过于复杂的定理堆彻，基本会慢慢引入概念，然后一步步引导推导，推导完成后再进行总结，最后再用例题来验证掌握程度，加深印象，巩固掌握。

当然，译者也是第一次系统学习四元数，可能对其中有些术语表达不准确；也有一些句子感觉上翻译得不是很对，很拗口，难以理解；也有一些词语为了统一，可能在局部的地方并不是那么准确，比如“ inverse ”，统一翻译为逆，而不是倒数。如果有发现翻译或原文有什么问题，有更好的翻译，或者公式上面有上面疏漏，欢迎随时发邮件指正勘误。

希望各位学习四元数的旅程能如译者第一次学习本书时一样轻松愉快！

郭飞 Bluffey@163.com

2023年2月17日 于 成都

第二版序

当我在学习成为一名电气工程师的时候，我遇到了复数，它们被用来用j算子表示非相电压和电流。我相信用的是字母j，而不是i，因为后者代表电流。所以从我学习的一开始，我脑海中就有一个清晰的画面，想象中的单位是一个旋转算子，它可以在时间上推进或延迟电量。

当事情的发展决定了我要从事计算机编程而不是电子工程的职业时，我并不需要复数，直到 Mandlebrot 对分形的研究出现。但这只是一个暂时的阶段，我从来没有需要在我的计算机图形软件中使用复数。然而，在1986年，当我加入飞行模拟行业时，我看到了一份关于四元数的内部报告，它被用来控制模拟飞机的旋转方向。

我还记得当时我被四元数弄糊涂了，因为它们包含了太多的虚数。然而，经过大量的研究，我开始了解它们是什么，但不知道它们是如何工作的。与此同时，我开始对数学的哲学方面感兴趣，并试图通过伯特兰·罗素(Bertrand Russell)的著作来理解数学的"真正意义"。因此，像i这样的概念是一个智力上的挑战。

现在，我已经习惯了虚数i只不过是一个符号，并且在代数的上下文中允许定义$i^2=-1$。我认为，试图发现其存在的深层意义是徒劳的。然而，它是数学中一个令人惊奇的对象，我经常想是否会有类似的对象等待被发明。

当我开始写关于计算机图形学的数学书籍时，我学习了复分析，以便有信心地写复数。就在那时，我发现了向量和四元数发明背后的历史事件，主要是通过 Michael Crowe的优秀著作:《向量分析的历史[1]》。这本书让我认识到了解数学发明的方式和原因的重要性。。然后我读到了 Simon Altmann 的书:《旋转、四元数和双群[2]》，该书提供了有关十九世纪四元数衰落的更多信息。Altmann 非常热情地为奥林德•罗德里格斯(Olinde Rodrigues)的数学工作争取认可，他发表了一个公式，与汉密尔顿的四元数产生的公式非常相似。罗德里格斯的这篇论文的重要之处在于，它比汉密尔顿在1843年发明四元数早了三年。然而，罗德里格斯并没有发明四元数代数——这个奖项应该属于汉密尔顿——但他确实理解了半角在三角函数中的重要性，三角函数用于使点绕任意轴旋转。

任何使用过欧拉变换的人都会意识到它的缺点，尤其是它的致命弱点:万向锁。因此，任何可以围绕任意轴旋转点的设备都是程序员工具箱中受欢迎的补充。在平面和空间中有许多旋转点和帧的技术，我在我的书中有一些详细的介绍:《计算机图形的旋转变换[3]》。那本书还涵盖了 Euler-Rodrigues 参数化和四元数，但只有在提交手稿出版后，我才决定写这本书，专门讨论四元数，它们是如何和为什么被发明的，以及它们在计算机图形学中的应用。

---

[1] A History of Vector Analysis

[2] Rotations, Quaternions, and Double Groups

[3] Rotation Transforms for Computer Graphics

在研究这本书的同时，阅读 William Rowan Hamilton 和他的朋友p·g·Tait的一些早期书籍和论文是非常有教育意义的。我现在明白了要完全理解四元数的重要性以及如何利用它们是多么困难。当时，没有围绕任意轴旋转点的主要需求;然而，需要一个数学系统来处理向量。最后，四元数不再流行，慢慢地淡出了人们的视线。尽管如此，对 Hamilton 来说，表示矢量并对其进行算术运算的能力是一项重大成就，尽管乔赛亚·吉布斯(Josiah Gibbs)有远见地创建了一个简单可行的代数框架。

我希望这第二版能如预期的那样改进原书。我已经复习了所有的文档和代数符号，并重新设计了所有的图形，包括颜色。我还对每章的参考书目进行了本地化调整，并扩大了索引。具体来说，我引入了一章来描述三元组如何导致四元数的发明。最后，我扩展了对Olinde Rodrigues的参考和关于插值的部分。

四元数有不同的表示方式，但我最喜欢的是有序对，这是我在 Simon Altmann 的书中发现的。我绝不认为自己是四元数方面的权威。我只是想交流一下我是如何理解他们的，希望对你有用。

这本书现在分为九章。第一章和最后一章介绍和总结了这本书，其余七章涵盖以下主题。第2章是关于数集和代数，并回顾符号和语言相关的书的其余部分。书中有关于数集、公理、有序对、群、环和域的章节。这为读者准备了非交换四元数乘积，以及为什么四元数被描述为除法环。第3章回顾了复数，并展示了如何将它们表示为有序对和矩阵。第4章继续这个主题，介绍复平面并展示复数的旋转特征。它还为读者准备了19世纪初提出的问题:是否存在一个复数的三维等价物?第5章追溯了四元数在三元组的中间阶段的出现，并展示了汉密尔顿如何引入第三个假想的k，以及如何将其与i和j整合。

第6章通过描述 Hamilton 的发明来回答这个问题:四元数和相关代数。我加入了一些历史信息，以便读者理解汉密尔顿作品的重要性。虽然有序对是主要的表示法，但我也包括了矩阵表示法。

为了让读者为四元数的旋转质量做好准备，第7章回顾了3D旋转变换，特别是欧拉角和万向节锁。我还开发了一个矩阵，用于使用向量和矩阵变换围绕任意轴旋转一个点。

第8章是本书的重点，描述了四元数如何围绕任意轴旋转向量。本章以一些历史信息开始，并解释不同的四元数乘积如何旋转点。虽然四元数很容易使用它们的复数形式或有序对符号来实现，但它们也有矩阵形式，这是从第一原理发展而来的。本章继续介绍关于偏移轴旋转，旋转参考帧，插值四元数，以及在四元数和旋转矩阵之间转换的部分。每章包含许多实际的例子，以显示如何评估方程，并在相关的地方，每章末尾会给出进一步的例子。

准备第二版是一个非常愉快的经历，我相信你也会喜欢阅读它，并从它的页面中发现一些新的东西。

我要感谢米德尔塞克斯大学荣誉读者Tony Crilly博士，他阅读了原稿，并纠正和澄

清了我的注释和解释。我完全相信他的数学知识，我很感激他的建议和专业知识。然而，我仍然要为我可能犯的代数错误负全部责任。

我还要感谢Patrick Riley教授，他阅读了一些手稿的早期草稿，并提出了一些关于四元数的有趣的技术问题。这些问题使我意识到我对四元数的一些描述需要进一步澄清，希望这些描述已经被纠正了。

我不确定这是否是我的最后一本书。如果是的话，我要感谢英国施普林格计算机科学编辑Helen Desmond，感谢她在过去几年的专业支持。如果这不是我的最后一本书，那么我期待着与她在另一个项目上再次合作。

Breinton, UK John Vince

第一版序

50多年前，当我正在学习成为一名电气工程师时，我遇到了复数，它们被用来用j操作符表示异相电压和电流。我相信使用的是字母j，而不是i，因为后者代表电流。因此，从我学习的一开始，我就在脑海中清晰地描绘了一个假想的单位，它是一个旋转算子，可以在时间上推进或延缓电量。

当事情决定我要从事计算机编程而不是电气工程的职业时，我不需要复数，直到Mandlebrot关于分形的工作出现。但那只是暂时的阶段，我从来都不需要在我的任何电脑图形软件中使用复数。然而在1986年，当我加入飞行模拟行业时，我看到了一份关于四元数的内部报告，它被用于控制模拟飞机的旋转方向。

我仍然记得我对四元数的困惑，仅仅是因为它们包含了很多虚数。然而，经过大量研究，我开始了解它们是什么，但不知道它们是如何工作的。与此同时，我对数学的哲学方面产生了兴趣，并试图通过伯特兰·罗素的著作来理解数学的"真正意义"。因此，像i这样的概念是一个智力挑战。

我现在对虚数i不过是一个符号的想法感到满意，并且在代数的上下文中允许定义$i^2 = -1$。我相信，试图发现它存在的更深层次的意义是徒劳的。尽管如此，它在数学中是一个令人惊叹的对象，我经常想是否会有类似的对象等待被发明出来。

当我开始写关于计算机图形学的数学书籍时，我学习了复分析，以便有信心地写复数。就在那时，我发现了向量和四元数发明背后的历史事件，主要是通过Michael Crowe的优秀著作《向量分析的历史[4]》。这本书让我认识到理解数学发明如何以及为什么发生的重要性。

最近，我读到了Simon Altmann的书《旋转、四元数和双群[5]》，这本书提供了关于十九世纪四元数消亡[6]的进一步信息。Altmann非常热衷于确保Olinde Rodrigues的数学工作得到认可，后者发表了一个与汉密尔顿四元数生成的公式非常相似的公式。罗德里格斯发表论文的一个重要方面是，它比汉密尔顿在1843年发明四元数早了三年。然而，罗德里格斯并没有发明四元数代数——这个奖必须颁给汉密尔顿——但他确实理解三角函数中半角的重要性，三角函数用于围绕任意轴旋转点。

任何使用过欧拉变换的人都会意识到它的缺点，尤其是它的阿喀琉斯之踵:万向节锁。因此，任何可以围绕任意轴旋转点的设备都是程序员工具包中受欢迎的补充。在平面和空间中有许多旋转点和帧的技术，我在我的书《计算机图形的旋转变换[7]》中详细介绍了这些技术。那本书还涵盖了欧拉-罗德里格斯参数化和四元数，但只是在提交了手稿准备出版之后，我才决定写这本专门关于四元数的书，以及它们是如何和为什么被发明

[4]A History of Vector Analysis
[5]Rotations, Quaternions, and Double Groups
[6]demise，感觉不应该译为消亡
[7]Rotation Transforms for Computer Graphics

的，以及它们在计算机图形学中的应用。

在研究这本书的同时，阅读William Rowan Hamilton和他的朋友P.G. Tait的一些早期书籍和论文非常有启发性。我现在明白了完全理解四元数的意义是多么困难，以及如何利用它们。当时，没有围绕任意轴旋转点的主要需求;然而，需要一个数学系统来处理矢量。最后，四元数不再是当月的宠儿，慢慢地淡出了人们的视线。尽管如此，能够表示向量并对它们进行算术操作是汉密尔顿的一个重大成就，尽管乔赛亚·吉布斯(Josiah Gibbs)有远见地创建了一个简单可行的代数框架。

在这本书中，我试图描述一些围绕四元数发明的历史，以及对四元数代数的描述。我绝不认为自己是四元数方面的权威。我只是想谈谈我是如何理解它们的，希望对你们有用。四元数有不同的表示方式，但我最喜欢的是有序对，这是我在Simon Altmann的书中发现的。

这本书分为八章。第一章和最后一章是对本书的介绍和总结，共六章，内容包括以下主题。关于数集和代数的第二章回顾了与本书其余部分相关的符号和语言。有关于数集、公理、有序对、群、环和域的章节。这为读者准备了非交换四元数积，以及为什么四元数被描述为除法环。

第三章回顾了复数，并展示了复数如何表示为有序对和矩阵。第四章继续这一主题，介绍了复平面，并展示了复数的旋转特征。它还为读者准备了一个在19世纪早期提出的问题:是否有一个相当于复数的$3D$？

第五章通过描述汉密尔顿的发明来回答这个问题:四元数及其相关代数。我在书中加入了一些历史信息，以便读者了解Hamilton著作的重要性。虽然有序对是表示法的主要形式，但我也包括了矩阵表示法。

为了让读者了解四元数的旋转特性，第6章回顾了3D旋转变换，特别是欧拉角和万向节锁。我还开发了一个矩阵，用于使用向量和矩阵变换围绕任意轴旋转一个点。

第7章是本书的重点，描述了四元数如何围绕任意轴旋转向量。本章以一些历史信息开始，并解释了不同的四元数乘积如何旋转点。虽然四元数很容易使用它们的复杂形式或有序对符号来实现，但它们也有一个矩阵形式，这是从第一性原理发展而来的。本章继续讨论特征值、特征向量、围绕偏移轴旋转、旋转参照系、插值四元数以及四元数和旋转矩阵之间的转换。

每一章都有很多实际的例子来说明如何计算方程，每章末尾会给出进一步的例子。

写这本书是一段非常愉快的经历，我相信你也会喜欢读它，并从书中发现一些新的东西。

我要感谢米德尔塞克斯大学荣誉读者Tony Crilly博士，他阅读了一份手稿草稿，并纠正和澄清了我的注释和解释。托尼在我的书《计算机图形的旋转变换》中执行了相同的任务。我绝对信任他的数学知识，我感谢他的建议和专业知识。然而，我仍然为我可能犯的任何代数错误承担全部责任。

我还要感谢Patrick Riley教授，他阅读了手稿的一些早期草稿，并提出了一些关于四元数的有趣技术问题。这样的问题让我意识到我对四元数的一些描述需要进一步澄清，希望这些描述已经得到纠正。

我现在已经在我的三本书中使用了LATEX2ε，并且对它的符号有了信心。尽管如此，我仍然需要致电施普林格的技术支持团队，感谢他们的帮助。

我不确定这是否是我的最后一本书。如果是的话，我要感谢贝弗利·福特，计算机科学的编辑主任，和海伦·德斯蒙德，施普林格英国计算机科学的副主编，他们在过去几年的专业支持。如果这不是我的最后一本书，那么我期待着在另一个项目上与他们再次合作。

Ringwood, UK John Vince

目录

第 1 章　介绍

1.1　旋转变换

在计算机图形学中，我们使用变换来修改对象或虚拟摄像机的位置和方向。这种变换通常包括:缩放、平移和旋转。前两个变换很简单，但是旋转确实会引起问题。这是因为我们通常从围绕$x -$ fi$y$ -和z-轴的单独旋转中构造一个旋转变换。尽管这样的转变行之有效，但还远远不够完美。真正需要的是一种直观、简单和准确的技术。

多年来，旋转变换包括方向余弦，欧拉角，欧拉-罗德里格斯参数化，四元数和多向量。最后两种技术是最新的，并且与历史相关。然而，这本书的主题是四元数，以及它们如何在计算机图形学中使用。

1.2　目标读者

这本书的目标读者学习或工作在计算机图形学和需要一个四元数的概述。他们可能就是我在互联网论坛上遇到过的询问四元数、它们如何工作以及如何编码的人。希望这本书能回答大部分问题。

1.3　本书的宗旨和目标

这本书的主要目的是向读者介绍四元数的主题，以及它们如何用于围绕任意轴旋转点。第二个目标是让读者意识到所有数学发现背后的人的层面。就我个人而言，我认为我们绝不能忽视这样一个事实:数学家也是人。尽管他们可能被赋予了非凡的数学技能，但他们恋爱、结婚、成家、死亡，留下了一座令人惊叹的知识大厦，我们都从中受益。

鼓励那些对数学的人类维度感兴趣的读者阅读四元数的发明，并发现爱、兴趣、坚韧、灵感和奉献是如何导致一项重大数学发现的。迈克尔·克罗的《矢量分析的历史》[1]是一本必不可少的书。这提供了导致四元数发明的事件的彻底分析，以及向量分析的出现。第二本书是Simon Altmann的《旋转、四元数和双群[2]》，除了提供了

四元数代数的现代分析外，还介绍了Olinde Rodrigues，他比通常被公认为四元数之父的William Rowan Hamilton早三年发明了一些与四元数相关的数学。

Simon Altmann对四元数代数的分析对我自己对四元数的看法产生了深远的影响，我试图在接下来的章节中传达这一点。特别地，我采用了使用有序对来表示四元数的思想。

本书的首要目标是使读者能够设计和编码四元数算法。读完这本书后，这应该是一个简单的练习，尽管我们处理的是一个四维数学对象。

1.4 数学技术

一旦读者理解了四元数，就会认为它们很简单。然而，如果这是你第一次遇到他们，他们可能会显得很奇怪。但像所有事物一样，熟悉带来理解和信心。

为了描述四元数，我需要用到一点三角学，一些向量理论和矩阵代数。由于四元数被描述为“超复数”，因此有一章是关于复数的。

1.5 本书中的假设

很多时候，从事计算机图形工作的人——比如我自己——没有机会学习技术文献中经常使用的数学水平。因此，我故意在写这本书的时候，温和地介绍了从复杂代数到四元数代数的形式数学符号。

参考文献

[1] Crowe, M.J.: A History of Vector Analysis. Dover, New York (1994)

[2] Altmann, S.L.: Rotations, Quaternions and Double Groups. Dover, New York (1986) ISBN-13: 978-0-486-44518-2

第 2 章　数集与代数

2.1　介绍

在这一章中，我们回顾了数集的一些基本概念，以及如何用算术和代数方法来处理它们。我们简要地看一下表达式和方程，以及用于它们的构造和求值的规则。反过来，这些揭示了用所谓的复数来扩展日常数字的必要性。本章的第二部分用于定义群、环和域。

2.2　数集

2.2.1　自然数

自然数是整数$1, 2, 3, 4$，等等，根据定义(DIN 5473)，自然数和零$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$的集合由符号$\mathbb{N}$表示，我们使用:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

语句

$$k \in \mathbb{N}$$

表示k属于集合$\mathbb{N}$，其中$\in$表示属于，或者换句话说，k是一个自然数。我们在本书中使用这种符号，以确保对所使用的数字数量的类型没有混淆。

$\mathbb{N}^*$用于表示集合$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$，没有零。

2.2.2　实数

十进制数构成了由 $\mathbb{R}$ 标识的实数集。这些数都是有符号的，可以组织成一条线，在$\pm$无穷之间延伸，并包括零。无穷大的概念很奇怪，德国数学家格奥尔格-康托尔（Georg Cantor，1845-1918 年）对其进行了研究。康托尔还发明了集合论，并证明实数比自然数更多。幸运的是，我们不需要在本书中使用这些概念。

使用实数集 $\mathbb{R}$ 表示维度，其中 $\mathbb{R}^2$ 表示二维，$\mathbb{R}^3$ 表示三维，$\mathbb{R}^n$ 表示 n 维。

2.2.3 整数

整数集合 $\mathbb{Z}$ 包含自然数及其负数：

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$\mathbb{Z}$ 代表 Zahlen—德语中的 "数字"。

2.2.4 有理数

有理数的集合是 $\mathbb{Q}$ ，包含形式如下的数：

$$\frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0$$

2.3 算术运算

我们使用算术运算加法、减法、乘法和除法来处理数字，其结果是否封闭或未定义，取决于底层集合。例如，当我们把两个自然数相加时，结果总是另一个自然数，因此，这个运算是封闭的：

$$3 + 4 = 7$$

但是，当我们用两个自然数相减时，结果不一定是自然数。例如，虽然

$$6 - 2 = 4$$

是封闭运算符，但是

$$2 - 6 = -4$$

不是封闭的，因为-4 不属于自然数集。

两个自然数的乘积总是一个封闭运算，但是除法会带来一些问题。首先，偶数自然数除以 2 是封闭运算：

$$\frac{16}{2} = 8$$

而奇数自然数除以偶数自然数得到的是十进制数：

$$\frac{7}{2} = 3.5$$

并不闭合，因为 3.5 不属于自然数集。在集合语言中，这可以写成

$$3.5 \notin \mathbb{N}$$

其中 $\notin$ 表示不属于。

任何数与零相乘的结果都是零—这是一个封闭运算；然而，任何数与零相除的结果都是不确定的，必须排除在外。

实数不存在任何与自然数相关的问题，加、乘、除运算都是封闭的：

$$a+b=c, \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$
$$ab=c, \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$
$$\frac{a}{b}=c, \quad a,b,c \in \mathbb{R} \text{ and } b \neq 0.$$

2.4 公理

当我们构建代数表达式时，我们会运用被称为公理的特定法则。对于加法和乘法，我们知道数字的分组对最终结果没有影响：例如，$2+(4+6)=(2+4)+6$ 和 $2\times(3\times4)=(2\times3)\times4$。这就是联立公理，其表达式为：

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$
$$a(bc)=(ab)c.$$

我们还知道，在进行加法或乘法运算时，顺序对最终结果没有影响：例如，$2+6=6+2$，$2\times6=6\times2$。这就是交换公理，其表达式为

$$a+b=b+a$$
$$ab=ba.$$

代数表达式包含了一个实数和一串实数的乘积，它们服从分配律：

$$a(b+c)=ab+ac$$
$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

我们回顾这些公理的原因是，它们不应该被认为是刻在数学石头上的，并适用于所有发明的东西。因为当我们谈到四元数时，我们发现它们不遵守交换公理，这并不奇怪。如果你用过矩阵，你会知道矩阵乘法也是不符合交换律的，但它是符合结合律的。

2.5 表达式

使用上述公理，我们可以构造各种表达式，例如：

$$a(2+c)-\frac{d}{e}+a-10$$
$$\frac{g}{ac-bd}+\frac{h}{de-fg}.$$

我们也使用符号来表示一个量的幂，例如n^2。这个符号引入了另一组观察结果:

$$
\begin{aligned}
a^n a^m &= a^{n+m} \\
\frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} \\
(a^n)^m &= a^{nm} \\
\frac{a^n}{a^n} &= a^0 = 1 \\
\frac{1}{a^n} &= a^{-1} \\
a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a}.
\end{aligned}
$$

接下来，我们要包括各种各样的函数，比如平方根，正弦和余弦，这些看起来很简单。但我们必须警惕他们。例如，$\sqrt{16} = \pm 4$，而$\sqrt{-16}$没有自然数或实数解。因此，如果$a < 0$，表达式$\sqrt{a}$没有实根。类似地，当处理正弦和余弦等三角函数时，我们必须记住，它们的取值范围在-1到$+1$之间，包括0，这意味着如果它们被用作分母，结果可能是未定义的。例如，如果 $\sin\alpha = 0$，下面这个表达式没有定义，

$$
\frac{a}{\sin\alpha}
$$

2.6 等式

接下来是等式，我们将表达式的值赋给一个变量。 在大多数情况下，赋值都是简单明了的，并会得到一个真实的结果，例如

$$
x^2 - 16 = 0
$$

其中 $x = \pm 4$。但有趣的是，只要将符号反转为

$$
x^2 + 16 = 0
$$

我们建立了一个没有实数解的方程。不过，有一个复数解，这就是第 3 章的主题。

2.7 有序对

有序对或对偶 (a, b)是具有两个条目、坐标或投影的对象，其中第一个条目或左条目可与第二个条目或右条目区分开来。例如，(a, b) 与(b, a) 是可以区分的，除非 $a = b$。(x, y) 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的一个点，可能是有序对的最好例子，其中条目的顺序总是先是 x 坐标，然后是 y 坐标。

在计算机图形学中，有序对和有序三元组广泛用于表示$\mathbb{R}^2$：(x, y)中的点，$\mathbb{R}^3$：(x, y, z)中的点，以及诸如$(\mathrm{r}, \mathrm{g}, \mathrm{b})$和$(h, s, v)$等颜色值。在这些示例中，字段都是实数。没有什么可以阻止我们使用有序对开发一个代数，它的行为就像另一个代数，我们将在第三章对复数和第六章对四元数这样做。现在，让我们探索一些可以操作有序对的方法。

假设我们选择将一般有序对描述为

$$a = (a_1, a_2)\,, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

我们将把两个这样的对象相加定义为

$$\begin{aligned} a &= (a_1, a_2) \\ b &= (b_1, b_2) \\ a + b &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2)\,. \end{aligned}$$

举例：

$$\begin{aligned} a &= (2, 3) \\ b &= (4, 5) \\ a + b &= (6, 8). \end{aligned}$$

我们将乘积定义为

$$ab = (a_1 b_1, a_2 b_2)$$

根据上述数值，得出

$$ab = (8, 15)$$

记住，我们说了算，规则由我们定义。

另一条规则将控制有序数对如何响应标量乘法。例如

$$\begin{aligned} \lambda\,(a_1, a_2) &= (\lambda a_1, \lambda a_2)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ 3(2, 3) &= (6, 9). \end{aligned}$$

根据上述规则，我们可以写出

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) &= (a_1, 0) + (0, a_2) \\ &= a_1(1, 0) + a_2(0, 1) \end{aligned}$$

如果我们用乘积法则将$(1, 0)$ 和$(0, 1)$ 这两个单位有序对平方，就可以得到

$$\begin{aligned} (1, 0)^2 &= (1, 0) \\ (0, 1)^2 &= (0, 1) \end{aligned}$$

这表明它们的行为与实数类似，并不出人意料。

这似乎不是很有用，但请拭目以待，看看在复数和四元数的背景下会发生什么。

2.8 群，环和域

数学家使用了一系列令人困惑的名称来标识他们的发明，这些发明似乎每天都在出现。就连 "四元数 "这个名字也不是原创的，在历史上经常出现在 "士兵的四人组 "的语境中：

> 罗马人派出四人组(quaternion)或四个人进行夜间守卫...... [1].

在不太正式的情况下，让我们探索一些与本书中包含的思想相关的更多数学结构。

2.8.1 群

我们已经讨论了集合的概念，以及属于集合的含义。我们还发现，当对集合的成员应用某些算术运算时，可以确保闭合、非闭合或结果未定义。

当将集合与算术运算结合在一起时，可以方便地创建另一个实体：一个群，它是一个集合，以及描述集合元素如何组合的公理。该集合可能包含数字、矩阵、向量、四元数、多项式等，并在下面表示为a, b和c。

该公理使用' $\circ$ '符号来表示任何二进制运算，例如$+ - \times$。一个群是由一个集合和一个二进制运算组成的。例如，我们可能希望在加法运算下形成一个整数群:$(\mathbb{Z}, +)$，或者我们可能希望检查四元数是否在乘法运算下形成一个群:$(\mathbb{H}, \times)$。

要成为一个群，以下所有公理必须在集合 S 中成立。 特别是，必须有一个特殊的单位元 $e \in S$ ，而且对于每个 $a \in S$ ，必须存在一个逆元 $a^{-1} \in S$中，这样就满足了以下公理：

$$\begin{array}{rll}
\text{闭合律:} & a \circ b \in S, & a, b \in S. \\
\text{结合律:} & (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), & a, b, c \in S. \\
\text{单位元:} & a \circ e = e \circ a = a, & a, e \in S. \\
\text{逆元:} & a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e, & a, a^{-1}, e \in S.
\end{array}$$

我们把一个群描述为$(S, \circ)$，其中S是集合，$\circ$是运算。例如，$(\mathbb{Z}, +)$是加法运算下的整数群，$(\mathbb{R}, \times)$是乘法运算下的实数群。

让我们用三个例子来说明这些公理。$(\mathbb{Z}, +)$：整数$\mathbb{Z}$在加法运算下组成一个群:

$$\begin{array}{rl}
\text{闭合律:} & -23 + 24 = 1. \\
\text{结合律:} & (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9. \\
\text{单位元:} & 2 + 0 = 0 + 2 = 2. \\
\text{逆元:} & 2 + (-2) = (-2) + 2 = 0.
\end{array}$$

$(\mathbb{Z}, \times)$：整数$\mathbb{Z}$在乘法下不构成一个群:

$$\begin{aligned} \text{闭合律:} &\quad -2 \times 4 = -8. \\ \text{结合律:} &\quad (2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4) = 24. \\ \text{单位元:} &\quad 2 \times 1 = 1 \times 2 = 2. \\ \text{逆元:} &\quad 2^{-1} = 0.5 \quad (0.5 \notin \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

同样，整数0没有逆。

$(\mathbb{Q}, \times)$：非零有理数组成的乘法下的群:

$$\begin{aligned} \text{闭合律:} &\quad \tfrac{2}{5} \times \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{15}. \\ \text{结合律:} &\quad \left(\tfrac{2}{5} \times \tfrac{2}{3}\right) \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{5} \times \left(\tfrac{2}{3} \times \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{2}{15}. \\ \text{单位元:} &\quad \tfrac{2}{3} \times \tfrac{1}{1} = \tfrac{1}{1} \times \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{3}. \\ \text{逆元:} &\quad \tfrac{2}{3} \times \tfrac{3}{2} = \tfrac{1}{1} \quad \left(\text{其中 } \tfrac{3}{2} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{-1}\right). \end{aligned}$$

2.8.2 阿贝尔群

最后，阿贝尔群以挪威数学家尼尔斯-亨里克-阿贝尔（Neils Henrik Abel，1802-1829年）的名字命名，是一个元素的顺序不会影响结果的群。因此有五个公理：闭合律、结合律、单位元、逆元和交换律:

$$\text{交换律:}\ a \circ b = b \circ a, \quad a, b \in S.$$

例如，整数集合在普通加法$(\mathbb{Z}, +)$下构成一个无性群。然而，由于 3 -D 旋转一般不换向，三维空间中所有旋转的集合形成了一个非交换群。

2.8.3 环

环是一个扩展群，其中有一组可以相加和相乘的对象，但要遵守一些精确的公理。有实数环、复数环、整数环、矩阵环、方程环、多项式环等。环被正式定义为一个系统，其中$(S, +)$和$(S, \times)$是非良群和分配公理:

环是一个扩展的群，在这里我们有一集合对象，这些对象可以相加和相乘，服从一些精确的公理。有实数环、复数环、整数环、矩阵环、方程环、多项式环等。一个环被正式定义为一个系统，其中$(S, +)$和$(S, \times)$是阿贝尔群和分配律公理:

$$\begin{aligned} \text{加法结合律:} &\quad a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a, b, c \in S. \\ \text{乘法结合律:} &\quad a \times (b \times c) = (a \times b) \times c, \quad a, b, c \in S. \\ \text{分配律:} &\quad a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c), \quad \text{和} \\ &\quad (a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c), \quad a, b, c \in S. \end{aligned}$$

例如，我们已经知道整数$\mathbb{Z}$在加法运算下构成一个群，但它们也构成一个环，因为该集合满足上述公理:

$$
\begin{aligned}
2 \times (3 \times 4) &= (2 \times 3) \times 4 \\
2 \times (3 + 4) &= (2 \times 3) + (2 \times 4) \\
(2 + 3) \times 4 &= (2 \times 4) + (3 \times 4).
\end{aligned}
$$

2.8.4 域

虽然环支持加法和乘法，但它们不一定支持除法。然而，由于除法是如此重要的算术运算，因此创建了该字段来支持除法，但有一个附带条件:不允许除零。因此，我们有实数$\mathbb{R}$的域，有理数$\mathbb{Q}$的域，以及我们将看到的复数$\mathbb{C}$的域。然而，我们会发现四元数并不构成域，但它们确实构成了所谓的除法环。

由此可见，每个域都是一个环，但并非每个环都是一个域。

2.8.5 除法环

除法环或除法代数是一个环，其中每个元素都有一个逆元素，附带条件是该元素非零。代数也支持非交换乘法。下面是除法环$(S, +, \times)$的正式描述:

$$
\begin{aligned}
\text{加法结合律:}\quad & (a+b)+c = a+(b+c), & a,b,c \in S. \\
\text{加法交换律:}\quad & a+b = b+a, & a,b \in S. \\
\text{加法单位元 0:}\quad & 0: 0+a = a+0, & a,0 \in S. \\
\text{加法逆元:}\quad & a+(-a) = (-a)+a = 0, & a,-a \in S. \\
\text{乘法结合律:}\quad & (a \times b) \times c = a \times (b \times c), & a,b,c \in S. \\
\text{乘法单位元 1:}\quad & 1 \times a = a \times 1, & a,1 \in S. \\
\text{乘法逆元:}\quad & a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1, & a,a^{-1} \in S, a \neq 0. \\
\text{分配律:}\quad & a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c), & \text{和} \\
& (b+c) \times a = (b \times a) + (c \times a), & a,b,c \in S.
\end{aligned}
$$

1877 年，德国数学家费迪南德-乔治-弗罗贝纽斯（Ferdinand Georg Frobenius，1849-1917 年）证明了只有三个联立除法代数：实数 $\mathbb{R}$、复数 $\mathbb{C}$、四元数 $\mathbb{H}$。

2.9 总结

本章的目的是提醒大家代数的公理系统，以及算术运算的结果可以是开放的、闭合的或未定义的。也许有些有序对、集合、群、域和环的概念是新的，由于这些符号经常与四元数联系在一起使用，所以也包括在内。

当我们考虑复数代数以及后来的四元数时，所有这些想法都会再次出现。

2.9.1 定义总结

有序对

具有两个可区分组件的对象:(a,b)，使得$(a,b) \neq (b,a)$除非$a=b$。

集合

定义： 集合是对象的集合。

符号: $k \in \mathbb{Z}$ 表示 k 属于集合 $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{C}$: 复数集

$\mathbb{H}$: 四元数集

$\mathbb{N}$: 自然数集

$\mathbb{Q}$: 有理数集

$\mathbb{R}$: 实数集

$\mathbb{Z}$: 整数集.

群

定义： 一个群 $(S,\circ)$ 是一个集合 S 和一个二元运算'$\circ$'以及定义了闭合律、结合律、单位元和逆元的公理。

$$
\begin{aligned}
\text{闭合律:} \quad & a \circ b \in S, & a,b \in S. \\
\text{结合律:} \quad & (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), & a,b,c \in S. \\
\text{单位元:} \quad & a \circ e = e \circ a = a, & a,e \in S. \\
\text{逆元:} \quad & a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e, & a,a^{-1},e \in S.
\end{aligned}
$$

环

定义:环是一个群，它的元素可以加/减/乘，使用一些严格的公理:

$$
\begin{aligned}
\text{加法结合律:} \quad & a + (b + c) = (a + b) + c, & a,b,c \in S. \\
\text{乘法结合律:} \quad & a \times (b \times c) = (a \times b) \times c, & a,b,c \in S. \\
\text{分配律:} \quad & a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c), & \text{和} \\
& (a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c), & a,b,c \in S.
\end{aligned}
$$

域

定义:域是支持除法的环。

除法环

除法环的每个元素都有一个逆元，但该逆元非零。代数也支持非交换乘法。

$$
\begin{aligned}
\text{加法结合律:} \quad & (a+b)+c = a+(b+c), && a,b,c \in S.\\
\text{加法交换律:} \quad & a+b = b+a, && a,b \in S.\\
\text{加法单位元 0:} \quad & 0 : 0+a = a+0, && a,0 \in S.\\
\text{加法逆元:} \quad & a+(-a) = (-a)+a = 0, && a,-a \in S.\\
\text{乘法结合律:} \quad & (a\times b)\times c = a\times(b\times c), && a,b,c \in S.\\
\text{乘法单位元 1:} \quad & 1\times a = a\times 1, && a,1 \in S.\\
\text{乘法逆元:} \quad & a\times a^{-1} = a^{-1}\times a = 1, && a,a^{-1} \in S, a \neq 0.\\
\text{分配律:} \quad & a\times(b+c) = (a\times b)+(a\times c), && \text{和}\\
& (b+c)\times a = (b\times a)+(c\times a), && a,b,c \in S.
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] Robinson, E.: Greek and English Lexicon of the New Testament (1825). http://books.google. co.uk

第 3 章 复数

3.1 介绍

在这一章中，我们将发现没有实数根的方程是如何产生虚数i，它的平方是-1。这反过来又引导我们了解复数以及如何用代数方法处理它们。与四元数相关的许多特性都可以在复数中找到，这就是为什么它们值得仔细研究的原因。对此主题感兴趣的读者可能想看看作者的《计算机科学的虚数数学》(*Imaginary Mathematics for Computer Science*)一书[1]。

3.2 虚数

虚数的发明是为了解决方程没有实根的问题，例如$x^2 + 16 = 0$。声明一个量i的存在性，使得$i^2 = -1$，这个简单的思想允许我们将这个方程的解表示为

$$x = \pm 4i$$

试图发现i到底是什么是没有意义的，i实际上只是一个平方为-1的数学对象。尽管如此，这是一个很棒的发明，并且确实适合于图形化的解释，我们将在下一章中对此进行研究。

1637年，法国数学家雷诺·笛卡尔(René Descartes, 1596-1650)发表了一篇论文《几何形状》[2]，他在文中指出，包含$\sqrt{-1}$的数字是“虚数”，几个世纪以来，这个标签一直被贴上。不幸的是，这是一个贬义的评论，并且i没有任何虚构的东西-它实际上只是一个平方为-1的东西，当嵌入代数中时，会产生一些惊人的模式。

关于如何称呼这组虚数，似乎没有达成任何共识——事实上，甚至有人认为虚数是不必要的。但是，如果您决定使用一个，则可能是$\mathbb{I}$或$I\mathbb{R}$。因此，虚数可以定义为

$$bi \in i\mathbb{R}, \quad i^2 = -1$$

3.3 i的平方

由于$i^2 = -1$，那么应该可以将i提高到其他幂。例如,

$$i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$$

和

$$i^5 = ii^4 = i$$

因此，我们有这个序列:

i^0	i^1	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6
1	i	-1	$-i$	1	i	-1

循环模式$(1, i, -1, -i, 1, \ldots)$非常引人注目，它让我们想起了一个类似的模式$(x, y, -x, -y, x, \ldots)$，它是通过逆时针方向绕笛卡尔轴旋转产生的。这种相似性是不能忽视的，因为当实数轴与垂直的虚轴结合在一起时，就产生了所谓的复平面。但更多的内容在下一章。

以上顺序总结为:

$$i^{4n} = 1$$
$$i^{4n+1} = i$$
$$i^{4n+2} = -1$$
$$i^{4n+3} = -i$$

其中 $n \in \mathbb{N}$.

那么负幂呢?嗯，它们也是可能的。考虑i^{-1}，其计算如下:

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1(-i)}{i(-i)} = \frac{-i}{1} = -i$$

类似的

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

和

$$i^{-3} = i^{-1} i^{-2} = -i(-1) = i$$

与负幂递增相关的数列为:

i^0	i^{-1}	i^{-2}	i^{-3}	i^{-4}	i^{-5}	i^{-6}
1	$-i$	-1	i	1	$-i$	-1

这一次循环模式被反转为$(1, -i, -1, i, 1, \ldots)$，并且类似于模式$(x, -y, -x, y, x, \ldots)$，它是通过顺时针方向绕笛卡尔轴旋转产生的。

也许最奇怪的幂是它本身：i^i，它恰好等于$e^{-\pi/2}=0.207879576\ldots$ [1]。在第四章作了说明。回顾了虚数i的某些特征之后，让我们来看看当它与实数结合时会发生什么。

3.4 复数的定义

根据定义，复数是实数和虚数的组合，表示为

$$z=a+bi,\quad a,b\in\mathbb{R},\quad i^2=-1$$

复数的集合是$\mathbb{C}$，这允许我们将$z\in\mathbb{C}$中。例如，$3+4i$是一个复数，其中3是实部，$4i$是虚部。以下均为复数:

$$3,\quad 3+4i,\quad -4-6i,\quad 7i,\quad 5.5+6.7i$$

实数也是复数——它只是没有虚部。这导致了实数集合是复数子集的想法，其表示为:

$$\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

其中 $\subset$表示是后面几何的一个子集。

虽然有些数学家把i放在它的乘数$i4$之前，但其他人把它放在乘数$4i$之后，这是本书中使用的惯例。但是，当i与三角函数相关联时，最好将其放在函数之前，以避免与函数的角度混淆。例如，$\sin\ \alpha i$表示角度是虚数，而$i\sin\alpha$表示$\sin\alpha$的值是虚数。因此，复数可以用各种方法构造:

$$\sin\alpha+i\cos\beta,\quad 2-i\tan\alpha,\quad 23+x^2i$$

一般来说，我们把一个复数写成$a+bi$，并遵从实代数的常规规则。我们所要记住的是，当我们遇到i^2时，它被-1替换。例如:

$$\begin{aligned}(2+3i)(3+4i)&=2\times3+2\times4i+3i\times3+3i\times4i\\&=6+8i+9i+12i^2\\&=6+17i-12\\&=-6+17i.\end{aligned}$$

[1]译者注，和网友讨论，并不止这一种结果，正确的结果应该如此:

$$\begin{aligned}i&=\cos(\frac{\pi}{2}+2k\pi)+i\sin(\frac{\pi}{2}+2k\pi)\\&=e^{i(\pi/2+2k\pi)},\qquad k\in\mathbb{Z}\\i^i&=e^{-(\pi/2+2k\pi)},\qquad k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

3.4.1 复数的加减法

给出两个复数

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$
$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

然后

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\, i$$

其中实部和虚部分别相加或减去。只要$a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$，这些操作是闭合的。 比如

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 + 3i \\ z_2 &= 4 + 2i \\ z_1 + z_2 &= 6 + 5i \\ z_1 - z_2 &= -2 + i. \end{aligned}$$

3.4.2 复数乘以标量

使用一般代数规则将一个复数乘以一个标量。例如，复数$a + bi$乘以标量λ，如下所示:

$$\lambda(a + bi) = \lambda a + \lambda bi$$

一个例子如下

$$3(2 + 5i) = 6 + 15i$$

3.4.3 复数的乘积

给出两个复数

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$
$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

它们的乘积是

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 i)\,(a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\, i \end{aligned}$$

这是另一个复数，确认运算是闭合的。例如:

$$\begin{aligned} z_1 &= 3+4i \\ z_2 &= 3-2i \\ z_1z_2 &= (3+4i)(3-2i) \\ &= 9-6i+12i-8i^2 \\ &= 9+6i+8 \\ &= 17+6i. \end{aligned}$$

注意，复数的加法、减法和乘法服从代数的一般公理。

3.4.4 复数的平方

给定一个复数z，其平方z^2为:

$$\begin{aligned} z &= a+bi \\ z^2 &= (a+bi)(a+bi) \\ &= \left(a^2-b^2\right)+2abi \end{aligned}$$

示例:

$$\begin{aligned} z &= 4+3i \\ z^2 &= (4+3i)(4+3i) \\ &= \left(4^2-3^2\right)+2\times 4\times 3i \\ &= 7+24i. \end{aligned}$$

3.4.5 复数的范数

复数z的范数、模数或绝对值写成$|z|$，被定义为

$$\begin{aligned} z &= a+bi \\ |z| &= \sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$$

例如，$3+4i$的范数是5。当我们学习复数的极坐标表示时，我们会看到为什么会这样。

3.4.6 复数的复共轭

两个复数的乘积，只有虚部的符号不同，就得到一个特殊的结果:

$$\begin{aligned} (a+bi)(a-bi) &= a^2-abi+abi-b^2i^2 \\ &= a^2+b^2 \end{aligned}$$

这种类型的乘积总是得到一个实数，并用于解决两个复数的商。因为这个实值是一个非常有趣的结果，所以$a-bi$被称为$z=a+bi$的复共轭，它可以用一个条形 $\bar{z}$ 或一个星号 z^* 来表示

$$zz^* = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

举例

$$\begin{aligned} z &= 3+4i \\ z^* &= 3-4i \\ zz^* &= 9+16=25. \end{aligned}$$

3.4.7 复数的商

复数共轭为我们提供了一种将一个复数除以另一个复数的方法。例如，商

$$\frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i}$$

通过将分子和分母乘以分母的复共轭$a_2-b_2 i$来求解，得到一个实数分母:

$$\begin{aligned} \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} &= \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} \\ &= \frac{a_1 a_2 - a_1 b_2 i + b_1 a_2 i - b_1 b_2 i^2}{a_2^2+b_2^2} \\ &= \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2+b_2^2}\right) + \left(\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2+b_2^2}\right) i. \end{aligned}$$

举例，求解

$$\frac{4+3i}{3+4i}$$

上下同时乘以共轭复数 $3-4i$

$$\begin{aligned} \frac{4+3i}{3+4i} &= \frac{(4+3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} \\ &= \frac{12-16i+9i-12i^2}{25} \\ &= \frac{24}{25} - \frac{7}{25} i \end{aligned}$$

3.4.8 复数的逆

为了计算$z=a+b$的逆函数，我们先

$$z^{-1} = \frac{1}{z}.$$

上下同时乘以z^*就得到

$$z^{-1} = \frac{z*}{zz^*}$$

但我们之前已经证明了$zz^* = |z|^2$，因此，

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{z^*}{|z|^2} \\ &= \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) - \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right) i \end{aligned}$$

举个例子，$3+4i$的逆是

$$(3+4i)^{-1} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25} i$$

让我们用$3+4i$乘以它的逆来测试这个结果:

$$(3+4i)\left(\frac{3}{25} - \frac{4}{25} i\right) = \frac{9}{25} - \frac{12}{25} i + \frac{12}{25} i + \frac{16}{25} = 1$$

这证实了结果的正确性。

3.4.9 $\pm i$的平方根

为了求出$\sqrt{i}$，我们假设根是复根。因此，我们先

$$\begin{aligned} \sqrt{i} &= a + bi \\ i &= (a+bi)(a+bi) \\ &= a^2 + 2abi - b^2 \\ &= a^2 - b^2 + 2abi \end{aligned}$$

等于实部和虚部

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 0 \\ 2ab &= 1. \end{aligned}$$

由此我们可以推断

$$a = b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

因此，根是

$$\sqrt{i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

让我们通过平方每个根来测试这个结果，以确保答案是i:

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (1+i)(1+i) = \frac{1}{2} 2i = i$$

为了求出$\sqrt{-i}$，我们假设根是复数。因此，我们先

$$\begin{aligned} \sqrt{-i} &= a + bi \\ -i &= (a+bi)(a+bi) \\ &= a^2 + 2abi - b^2 \\ &= a^2 - b^2 + 2abi \end{aligned}$$

等于实部和虚部

$$a^2 - b^2 = 0$$

$$2ab = -1$$

由此我们可以推断

$$a = b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

因此，根是

$$\begin{aligned}\sqrt{-i} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i(1+i) \\ &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \\ &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\end{aligned}$$

让我们通过对每个根进行平方来测试这个结果，以确保答案是$-i$:

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(1-i)(1-i) = -\frac{1}{2}2i = -i$$

在下一章中，我们将使用这些根来研究复数的旋转性质。

3.5 复数的域结构

复数集合$\mathbb{C}$是一个域，因为它满足前面定义的域规则。

3.6 有序对

到目前为止，我们选择将复数表示为$a + bi$，这样可以区分实部和虚部。然而，有一件事我们不能假设，那就是实部总是在前面，虚部总是在后面，因为b i+a也是一个复数。因此，采用两个函数提取实、虚系数如下:

$$\mathrm{Re}(a + bi) = a$$

$$\mathrm{Im}(a + bi) = b$$

这让我们想到了用有序对来表示一个复数，在有序对的情况下

$$a + bi = (a, b)$$

其中b跟在a后面以定义顺序。因此复数的集合$\mathbb{C}$等价于有序对(a, b)的集合$\mathbb{R}^2$。

把复数写成有序对是一个伟大的贡献，最早是由汉密尔顿(Hamilton)在1833年提出的。这样的符号非常简洁，没有任何想象的术语，可以在需要的时候添加。

3.6.1 有序对的加法和减法

给出两个复数:

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$
$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

它们被写成有序对:

$$z_1 = (a_1, b_1)$$
$$z_2 = (a_2, b_2)$$

且

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2)$$

其中两部分分别相加或相减。

举例

$$z_1 = 2 + 3i = (2, 3)$$
$$z_2 = 4 + 2i = (4, 2)$$
$$z_1 + z_2 = (6, 5)$$
$$z_1 - z_2 = (-2, 1).$$

3.6.2 将有序对乘以标量

我们已经看到如何将复数乘以标量，标量一定对有序对相同:

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$$

示例

$$3(2, 5) = (6, 15)$$

3.6.3 有序对乘积

给出两个复数

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$
$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

它们的乘积是

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\, i$$

它也必须适用于有序对:

$$\begin{aligned} z_1 &= (a_1, b_1) \\ z_2 &= (a_2, b_2) \\ z_1 z_2 &= (a_1, b_1)(a_2, b_2) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \end{aligned}$$

举例

$$\begin{aligned} z_1 &= (6, 2) \\ z_2 &= (4, 3) \\ z_1 z_2 &= (6, 2)(4, 3) \\ &= (24 - 6, 18 + 8) \\ &= (18, 26). \end{aligned}$$

3.6.4 有序对平方

复数的平方为:

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ z^2 &= (a + bi)(a + bi) \\ &= \left(a^2 - b^2\right) + 2abi \end{aligned}$$

因此，有序对的平方为:

$$\begin{aligned} z &= (a, b) \\ z^2 &= (a, b)(a, b) \\ &= \left(a^2 - b^2, 2ab\right) \end{aligned}$$

举例

$$\begin{aligned} z &= (4, 3) \\ z^2 &= (4, 3)(4, 3) \\ &= \left(4^2 - 3^2, 2 \times 4 \times 3\right) \\ &= (7, 24) \end{aligned}$$

我们继续探索一个基于有序对的代数，它和复数代数是一样的。我们先写出

$$\begin{aligned} z &= (a, b) \\ &= (a, 0) + (0, b) \\ &= a(1, 0) + b(0, 1) \end{aligned}$$

它创建了单位有序对$(1, 0)$和$(0, 1)$。

现在我们来计算乘积$(1,0)(1,0)$

$$\begin{aligned}(1,0)(1,0) &= (1-0,0)\\ &= (1,0)\end{aligned}$$

这表明$(1,0)$表现得像实数1。即$(1,0)=1$。

接下来，让我们计算乘积$(0,1)(0,1)$:

$$\begin{aligned}(0,1)(0,1) &= (0-1,0)\\ &= (-1,0)\end{aligned}$$

这获得了实数 -1 :

$$(0,1)^2 = -1$$

或

$$(0,1) = \sqrt{-1} \text{ 是一个虚数}$$

这意味着有序对(a,b)及其相关规则表示一个复数。即$(a,b)\equiv a+bi$。

3.6.5 有序对范数

有序对z的范数、模数或绝对值写成$|z|$，被定义为

$$\begin{aligned}z &= (a,b)\\ |z| &= \sqrt{a^2+b^2}\end{aligned}$$

比如，$(3,4)$的范数是5.

3.6.6 有序对的复共轭

$z=a+bi$的复共轭定义为$z^*=a-bi$，其在有序对中表示为$z^*=(a,-b)$:

$$\begin{aligned}z &= (a,b)\\ z^* &= (a,-b)\\ zz^* &= (a,b)(a,-b)\\ &= \big(a^2+b^2, ba-ab\big)\\ &= \big(a^2+b^2, 0\big)\\ &= a^2+b^2 = |z|^2.\end{aligned}$$

3.6.7 有序对的商

解析z_1/z_2的技术是将表达式乘以z_2^*/z_2^*，使用有序对是

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a_1,b_1)}{(a_2,b_2)} \\ &= \frac{(a_1,b_1)}{(a_2,b_2)}\frac{(a_2,-b_2)}{(a_2,-b_2)} \\ &= \frac{(a_1a_2+b_1b_2, b_1a_2-a_1b_2)}{(a_2^2+b_2^2,0)} \\ &= \left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}, \frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right).\end{aligned}$$

比如，求解

$$\frac{(4,3)}{(3,4)}$$

上下同时乘以共轭复数(3fi − 4)

$$\begin{aligned}\frac{(4,3)}{(3,4)} &= \frac{(4,3)(3,-4)}{(3,4)(3,-4)} \\ &= \left(\frac{12+12}{25}, \frac{9-16}{25}\right) \\ &= \left(\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}\right).\end{aligned}$$

3.6.8 有序对的逆

我们之前已经证明了z^{-1}是

$$z^{-1} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

这使用有序对表示是

$$\begin{aligned}z &= (a,b) \\ z^{-1} &= \frac{(a,-b)}{(a,b)(a,-b)} \\ &= \frac{(a,-b)}{(a^2+b^2,0)} \\ &= \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right).\end{aligned}$$

作为一个例子，$(3,4)$的逆是

$$(3,4)^{-1} = \left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}\right)$$

让我们用$(3,4)$乘以它的逆来测试这个结果:

$$\begin{aligned}(3,4)\left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}\right) &= \left(\frac{9}{25}+\frac{16}{25}, -\frac{12}{25}+\frac{12}{25}\right) \\ &= (1,0).\end{aligned}$$

3.6.9 $\pm i$的平方根

为了求出$\sqrt{i}$，我们假设根是复根。因此，我们先

$$\begin{aligned}\sqrt{i} &= (a,b)\\ i &= (a,b)(a,b)\\ (0,1) &= \big(a^2-b^2, 2ab\big)\end{aligned}$$

等于左序元素和右序元素

$$\begin{aligned}a^2-b^2 &= 0\\ 2ab &= 1.\end{aligned}$$

由此我们可以推断

$$a = b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

因此，根是

$$\sqrt{i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$$

让我们通过平方每个根来测试这个结果，以确保答案是i:

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(1,1)(1,1) = \frac{1}{2}(0,2) = (0,1)$$

为了求出$\sqrt{-i}$，我们假设根是复数。因此，我们先

$$\begin{aligned}\sqrt{-i} &= (a,b)\\ -i &= (a,b)(a,b)\\ (0,-1) &= \big(a^2-b^2, 2ab\big)\end{aligned}$$

等于左序元素和右序元素

$$\begin{aligned}a^2-b^2 &= 0\\ 2ab &= -1\end{aligned}$$

由此我们可以推断

$$\begin{aligned}a = b &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i\\ &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(0,1)(1,1)\\ &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1)\end{aligned}$$

因此，根是

$$\sqrt{-i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1)$$

让我们通过对每个根进行平方来测试这个结果，以确保答案是$-i$:

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(1,-1)(1,-1)=\frac{1}{2}(0,-2)=(0,-1)$$

从上面的定义可以明显看出，有序对为表示复数提供了另一种符号，其中虚特征嵌入到乘积公理中。我们还将使用有序对来定义具有三个虚项的四元数，当将它们合并到乘积公理中时，它们仍然是隐藏的。

3.7 复数的矩阵表示

由于四元数具有矩阵表示，也许我们应该研究复数的矩阵表示。

虽然我只是暗示了i可以被看作某种旋转算子，但这是把它形象化的完美方式。在第4章中，我们发现将一个复数乘以i可以有效地逆时针旋转90°。所以现在，它可以用90°的旋转矩阵来表示:

$$i\equiv\begin{bmatrix}\cos 90^\circ & -\sin 90^\circ\\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

和2×2的单位矩阵是

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

这允许我们将复数写成:

$$\begin{aligned}a+bi&=a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -b\\ b & 0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

注意，这个矩阵运算表示 i 平方到 -1:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\\&=-1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

然而，我们也必须记住 $i^2 = (-i)^2 = -1$，这被解释为复平面上的逆时针和顺时针旋转。这一点得到以下方面的证实:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

现在让我们用矩阵符号来表示所有用于复数的算术运算。

3.7.1 复数的加减法

两个复数的加减法如下:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + b_1 i \\ z_2 &= a_2 + b_2 i \\ z_1 &= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \\ z_2 &= \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\ z_1 \pm z_2 &= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 \pm a_2 & -(b_1 \pm b_2) \\ b_1 \pm b_2 & a_1 \pm a_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

举个例子

$$\begin{aligned} z_1 &= 2+3i \\ z_2 &= 4+2i \\ z_1 &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ z_2 &= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ z_1 \pm z_2 &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ z_1 + z_2 &= \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = 6+5i \\ z_1 - z_2 &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -2+i. \end{aligned}$$

3.7.2 两个复数的乘积

两个复数之积的计算方法如下:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + b_1 i \\ z_2 &= a_2 + b_2 i \\ z_1 z_2 &= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -(a_1b_2 + b_1a_2) \\ a_1b_2 + b_1a_2 & a_1a_2 - b_1b_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

举个例子

$$\begin{aligned} z_1 &= 6+2i \\ z_2 &= 4+3i \\ z_1 z_2 &= \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 24-6 & -(18+8) \\ 18+8 & 24-6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 18 & -26 \\ 26 & 18 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3.7.3 复数的范数平方

范数的平方作为矩阵的行列式:

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\ |z|^2 = a^2 + b^2 &= \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

3.7.4 复数的复共轭

复数的共轭复数是

$$\begin{aligned} z = a + bi &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\ z^* = a - bi &= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

乘积$zz^* = a^2 + b^2$:

$$\begin{aligned} zz^* &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix} \\ &= \left(a^2 + b^2\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

举个例子:

$$\begin{aligned} z = 3 + 4i &= \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \\ z^* = 3 - 4i &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \\ zz^* &= \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \\ &= 25 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.7.5 复数的逆

2×2矩阵$\mathbf{A}$的逆如下式给出

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{12} \end{bmatrix}$$

因此，z 的逆如下

$$z=a+bi$$

$$z=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$z^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

举个例子:

$$z=3+4i$$

$$z=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$z^{-1}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.7.6 复数的商

两个复数的商的计算方法如下:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1+b_1i \\ z_2 &= a_2+b_2i \\ \frac{z_1}{z_2} &= z_1z_2^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}\frac{1}{a_2^2+b_2^2}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a_2^2+b_2^2}\begin{bmatrix} a_1a_2+b_1b_2 & -(b_1a_2-a_1b_2) \\ b_1a_2-a_1b_2 & a_1a_2+b_1b_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

比如：

$$\begin{aligned}
z_1 &= 4+3i \\
z_2 &= 3+4i \\
\frac{z_1}{z_2} &= z_1 z_2^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{9+16} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 24 & 7 \\ -7 & 24 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

3.7.7 $\pm i$的平方根

为了求出$\sqrt{i}$，我们假设根是复根。因此，我们从

$$\begin{aligned}
\sqrt{i} &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\
i &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

根据左右矩阵的等式，我们有

$$\begin{aligned}
a^2-b^2 &= 0 \\
2ab &= 1.
\end{aligned}$$

由此我们可以推断

$$a = b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

因此，根是

$$\sqrt{i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

让我们通过平方每个根来测试这个结果，以确保答案是i：

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = i$$

为了求出$\sqrt{-i}$，我们假设根是复数。因此，我们从

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-i} &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\
-i &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

根据左右矩阵的等式，我们有

$$
\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= 0 \\
2ab &= -1
\end{aligned}
$$

由此我们可以推断

$$a = b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

因此，根是

$$\sqrt{-i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

让我们通过平方每个根来测试这个结果，以确保答案是$-i$:

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = -i$$

3.8 总结

在本章中，我们已经证明了复数的集合是一个域，因为它们满足闭合律、结合律、分配律、单位元和逆的要求。我们还证明了复数和有序对之间存在一对一的对应关系，并且复数可以表示为矩阵，这使得我们可以将所有复数运算计算为矩阵运算或有序对。

如果这是你第一次遇到复数，你可能会发现它们一方面很奇怪，另一方面又很神奇。简单地宣布存在平方为-1的i，就开辟了一个新的数字系统，统一了大量的数学领域。

3.8.1 定义总结

定义

$i\mathbb{R}$是虚数的集合:$ib \in i\mathbb{R}, \quad i^2 = -1$。

复数

实单位: 1 ,

虚单位: i.

有序对

$$1 = (1, 0)$$

$$i = (0, 1).$$

矩阵

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

表示

$\mathbb{C}$是复数的集合:$z = a + ib, \quad a \in \mathbb{R}, \quad ib \in i\mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}$。

复数

$$z = a + bi$$

有序对

$$z = (a, b)$$

矩阵

$$a + bi = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

加减法

复数

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 \pm z_2 = a_1 \pm a_2 + (b_1 \pm b_2)\, i$$

有序对

$$\begin{aligned}z_1 &= (a_1, b_1)\\ z_2 &= (a_2, b_2)\\ z_1 \pm z_2 &= (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2)\,.\end{aligned}$$

矩阵

$$\begin{aligned}z_1 &= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}\\ z_2 &= \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}\\ z_1 \pm z_2 &= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} a_1 \pm a_2 & -(b_1 \pm b_2) \\ b_1 \pm b_2 & a_1 \pm a_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

乘法

复数

$$\begin{aligned}z_1 &= a_1 + b_1 i\\ z_2 &= a_2 + b_2 i\\ z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)\\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\, i\end{aligned}$$

有序对

$$\begin{aligned}z_1 &= (a_1, b_1)\\ z_2 &= (a_2, b_2)\\ z_1 z_2 &= (a_1, b_1)(a_2, b_2)\\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)\,.\end{aligned}$$

矩阵

$$\begin{aligned}z_1 &= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}\\ z_2 &= \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -(a_1 b_2 + b_1 a_2) \\ a_1 b_2 + b_1 a_2 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

平方

复数

$$
\begin{aligned}
z &= a + bi \\
z^2 &= (a+bi)(a+bi) \\
&= \left(a^2 - b^2\right) + 2abi
\end{aligned}
$$

有序对

$$
\begin{aligned}
z &= (a, b) \\
z^2 &= (a, b)(a, b) \\
&= \left(a^2 - b^2, 2ab\right)
\end{aligned}
$$

矩阵

$$
\begin{aligned}
z &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\
z^2 &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

范数

复数

$$
\begin{aligned}
z &= a + bi \\
|z| &= \sqrt{a^2 + b^2}
\end{aligned}
$$

有序对

$$
\begin{aligned}
z &= (a, b) \\
|z| &= \sqrt{a^2 + b^2}
\end{aligned}
$$

矩阵

$$z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$|z|^2 = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}.$$

复共轭

复数

$$z = a + bi$$

$$z^* = a - bi$$

有序对

$$z = (a, b)$$

$$z^* = (a, -b).$$

矩阵

$$z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$z^* = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

逆

复数

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ z^{-1} &= \frac{z^*}{|z|^2} \\ &= \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) - \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right) i \end{aligned}$$

有序对

$$z = (a, b)$$

$$z^* = (a, -b)$$

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} = z^{-1} &= \frac{z^*}{|z|^2} \\ &= \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \end{aligned}$$

矩阵

$$
\begin{aligned}
z &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\
z^* &= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \\
|z|^2 &= a^2 + b^2 \\
\frac{1}{z} &= z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2} \\
&= \frac{1}{a^2+b^2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

商

复数

$$
\begin{aligned}
z_1 &= a_1 + b_1 i \\
z_2 &= a_2 + b_2 i \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \\
&= \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) + \left(\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) i.
\end{aligned}
$$

有序对

$$
\begin{aligned}
z_1 &= (a_1, b_1) \\
z_2 &= (a_2, b_2) \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a_1, b_1)}{(a_2, b_2)} \\
&= \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right).
\end{aligned}
$$

矩阵

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \\
z_2 &= \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= z_1 z_2^{-1} \\
&= \frac{1}{a_2^2+b_2^2}\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{a_2^2+b_2^2}\begin{bmatrix} a_1a_2+b_1b_2 & -(b_1a_2-a_1b_2) \\ b_1a_2-a_1b_2 & a_1a_2+b_1b_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

$\pm i$的平方根

复数

$$
\begin{aligned}
\sqrt{i} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\
\sqrt{-i} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)
\end{aligned}
$$

有序对

$$
\begin{aligned}
\sqrt{i} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1) \\
\sqrt{-i} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1).
\end{aligned}
$$

矩阵

$$
\begin{aligned}
\sqrt{i} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\sqrt{-i} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

3.9 样例

下面是一些进一步运用上述思想的例子。在某些情况下，测试包括确认结果。

例 3.1: 复数加减法

z_1 和 z_2相加。

复数

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 12+6i \\
z_2 &= 10-4i \\
z_1+z_2 &= 22+2i \\
z_1-z_2 &= 2+10i
\end{aligned}
$$

有序对

$$\begin{aligned} z_1 &= (12, 6) \\ z_2 &= (10, -4) \\ z_1 + z_2 &= (12, 6) + (10, -4) = (22, 2) \\ z_1 - z_2 &= (12, 6) - (10, -4) = (2, 10). \end{aligned}$$

矩阵

$$\begin{aligned} z_1 &= \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \\ z_2 &= \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} \\ z_1 + z_2 &= \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -2 \\ 2 & 22 \end{bmatrix} \\ z_1 - z_2 &= \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

例 3.2: 复数乘积

计算乘积$z_1 z_2$。

复数

$$\begin{aligned} z_1 &= 12 + 6i \\ z_2 &= 10 - 4i \\ z_1 z_2 &= (12 + 6i)(10 - 4i) \\ &= 144 + 12i \end{aligned}$$

有序对

$$\begin{aligned} z_1 &= (12, 6) \\ z_2 &= (10, -4) \\ z_1 z_2 &= (12, 6)(10, -4) \\ &= (120 + 24, -48 + 60) \\ &= (144, 12). \end{aligned}$$

矩阵

$$z_1 = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$
$$z_2 = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$$
$$z_1 z_2 = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 144 & -12 \\ 12 & 144 \end{bmatrix}.$$

例 3.3: 复数乘以i

将z_1乘以i。

复数

$$\begin{aligned} z_1 &= 12 + 6i \\ z_1 i &= (12 + 6i)i \\ &= -6 + 12i \end{aligned}$$

有序对

$$\begin{aligned} z_1 &= (12, 6) \\ i &= (0, 1) \\ z_1 i &= (12, 6)(0, 1) \\ &= (-6, 12). \end{aligned}$$

矩阵

$$z_1 = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$
$$i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$z_1 z_2 = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}.$$

例 3.4: 复数的范数

计算z_1的范数。

复数

$$\begin{aligned} z_1 &= 12 + 6i \\ |z_1| &= \sqrt{12^2 + 6^2} \approx 13.416 \end{aligned}$$

有序对

$$\begin{aligned} z_1 &= (12, 6) \\ |z_1| &= \sqrt{12^2 + 6^2} \approx 13.416. \end{aligned}$$

矩阵

$$\begin{aligned} z_1 &= \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \\ |z_1| &= \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = \sqrt{12^2 + 6^2} \approx 13.416 \end{aligned}$$

例 3.5: 复数的复共轭

计算下列项的复共轭。

复数

$$\begin{aligned} (2 + 3i)^* &= 2 - 3i \\ 1^* &= 1 \\ i^* &= -i \end{aligned}$$

有序对

$$\begin{aligned} (2, 3)^* &= (2, -3) \\ (1, 0)^* &= \begin{pmatrix} 1, & 0 \end{pmatrix} \\ (0, 1)^* &= \begin{pmatrix} 0, -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

矩阵

$$\begin{aligned} z &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ z^* &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\ 1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 1^* &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$i^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

例 3.6: 两个复数之商

计算商$(2+3i)/(3+4i)$。

复数

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{3+4i} &= \frac{(2+3i)}{(3+4i)}\frac{(3-4i)}{(3-4i)} \\ &= \frac{6-8i+9i+12}{25} \\ &= \frac{18}{25}+\frac{1}{25}i\end{aligned}$$

测试

$$\begin{aligned}(3+4i)\left(\frac{18}{25}+\frac{1}{25}i\right) &= \frac{54}{25}+\frac{3}{25}i+\frac{72}{25}i-\frac{4}{25} \\ &= 2+3i.\end{aligned}$$

有序对

$$\begin{aligned}\frac{(2,3)}{(3,4)} &= \frac{(2,3)}{(3,4)}\frac{(3,-4)}{(3,-4)} \\ &= \frac{(6+12,1)}{(9+16,0)} \\ &= \left(\frac{18}{25},\frac{1}{25}\right).\end{aligned}$$

矩阵

$$\begin{aligned}z_1 &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ z_2 &= \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \\ \frac{z_1}{z_2} &= z_1 z_2^{-1} \\ &= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 18 & -1 \\ 1 & 18 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

例 3.7: 用复数除以i

用$2+3i$除以i。

复数

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{0+i} &= \frac{(2+3i)}{(0+i)}\frac{(0-i)}{(0-i)}\\ &= \frac{-2i+3}{1}\\ &= 3-2i\end{aligned}$$

测试

$$i(3-2i)=2+3i$$

有序对

$$\begin{aligned}\frac{(2,3)}{(0,1)} &= \frac{(2,3)}{(0,1)}\frac{(0,-1)}{(0,-1)}\\ &= \frac{(3,-2)}{(1,0)}\\ &= (3,-2).\end{aligned}$$

矩阵

$$\begin{aligned}z &= \begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\\ i &= \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\ i^{-1} &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\\ zi^{-1} &= \begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

例 3.8: 用复数除以$-i$

用复数 $2+3i$ 除以 $-i$.

复数

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{0-i} &= \frac{(2+3i)}{(0-i)}\frac{(0+i)}{(0+i)}\\ &= \frac{2i-3}{1}\\ &= -3+2i\end{aligned}$$

测试

$$-i(-3+2i)=2+3i$$

有序对

$$\begin{aligned}\frac{(2,3)}{(0,-1)} &= \frac{(2,3)}{(0,-1)}\frac{(0,1)}{(0,1)}\\ &= \frac{(-3,2)}{1}\\ &= (-3,2)\end{aligned}$$

矩阵

$$\begin{aligned}z &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\\ -i &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\\ -i^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\\ z\left(-i^{-1}\right) &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

例 3.9: 复数的逆

计算$2+3i$的逆.

复数

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+3i} &= \frac{1}{(2+3i)}\frac{(2-3i)}{(2-3i)}\\ &= \frac{2-3i}{13}\\ &= \frac{2}{13}-\frac{3}{13}i.\end{aligned}$$

有序对

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2,3)} &= \frac{1}{(2,3)}\frac{(2,-3)}{(2,-3)}\\ &= \frac{(2,-3)}{13}\\ &= \left(\frac{2}{13},-\frac{3}{13}\right).\end{aligned}$$

矩阵

$$z = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

例 3.10: i的逆

计算 i 的逆.

复数

$$\begin{aligned} \frac{1}{0+i} &= \frac{1}{(0+i)}\frac{(0-i)}{(0-i)} \\ &= \frac{-i}{1} = -i \end{aligned}$$

有序对

$$\begin{aligned} \frac{1}{(0,1)} &= \frac{1}{(0,1)}\frac{(0,-1)}{(0,-1)} \\ &= \frac{(0,-1)}{(1,0)} = (0,-1) = -i. \end{aligned}$$

矩阵

$$i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$i^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -i.$$

例 3.11: $-i$的逆

计算 $-i$ 的逆.

复数

$$\begin{aligned} \frac{1}{0-i} &= \frac{1}{(0-i)}\frac{(0+i)}{(0+i)} \\ &= \frac{i}{1} = i \end{aligned}$$

有序对

$$\begin{aligned} \frac{1}{(0,-1)} &= \frac{1}{(0,-1)}\frac{(0,1)}{(0,1)} \\ &= \frac{(0,1)}{(1,0)} = (0,1) = i. \end{aligned}$$

矩阵

$$-i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-i^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = i.$$

参考文献

[1] Vince, J.: Imaginary Mathematics for Computer Science. Springer, Berlin (2018). ISBN 978-3319-94636-8

[2] Descartes, R.: La Géométrie (1637) (There is an English translation by Michael Mahoney) Dover, New York (1979)

第 4 章 复平面

4.1 介绍

一些学科的历史往往是令人兴奋的读物，尤其是在对日期或先有技术存在争议的情况下。澄清谁在别人之前做了某事是历史学家的工作，他们可以帮助揭示谁应该为某一事件负责，谁应该居功至伟。要从日记、书籍和私人信件中理清事件的来龙去脉，并将它们按时间顺序排列在一起，需要具备学科知识、坚韧的毅力和客观的分析。

对于大多数研究学科来说，有两个日期对于确定优先权非常重要：论文提交发表的日期和被接受的论文发表的日期。这样的协议似乎是一个公平的方案，但前提是要有一个高效的邮政系统、一个公正的同行评审系统，以及其他许多条件。

在数学和科学领域，一些研究人员并不总是有信心将一个萌芽的想法发表出来，如果不发表，这个想法要么留在他们的脑海里，要么放在他们桌上的笔记本里，在研究人员死后可能被发现，也可能不被发现。对研究人员来说，不幸的是，人的脑袋并不是历史学家方便的信息存放处！

有时，数学论文会出现在与其他学科相关的期刊上，可以理解的是，这些期刊并不一定受到数学界的监督。同样，历史学家或好奇的学者通过巧妙的侦查工作，也会将复杂的优先权、归属问题浮出水面，在某些情况下，还会引起令人不快的剽窃嫌疑。

复数平面的发明是一个完美的例子，它说明了当数学思想的官方发布渠道被 "双关"时，发明者会遇到怎样的严重问题。让我们看看发生了什么。

4.2 一些历史

一切始于 1813 年，瑞士业余数学家让-罗伯特-阿尔冈（Jean-Robert Argand，1768-1822 年）在他私人资助的一本 "小册子 "中发表了他关于复数几何解释的想法：关于几何构造中虚量表示方法的论文(Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques)[1]。

这本小册子并没有广泛传播，更糟糕的是，它并没有 Argand 的名字！1813

年，Jacques Français 在一篇论文中重新发表了复平面的想法，并要求最初想法的匿名作者透露自己的身份。Argand 站了出来，他的发明得到了认可，如今复平面被称为 Argand 图。1874 年，Gauthier-Villars 出版社出版了 Argand 著作的第二版[2]。

Unbeknown to Argand-and everyone else at the time-a Norwegian surveyor Caspar Wessel (1745-1818), had been triangulating Denmark and developing mathematical techniques to simplify his work. One of these ideas was the original idea of adding vectorial quantities, the other was the geometric interpretation of complex numbers.

Wessel presented his first and only mathematical paper describing his complex plane to a meeting of the Royal Danish Academy in 1797, and it was published in the Academy's Mémoires in 1799. Wessel's paper remained hidden from the mathematical community for almost a century, when it was discovered in 1895 by the Danish mathematician Sophus Christian Juel (1855-1935). However, although everyone now agrees that Wessel was the first person to invent the complex plane, it still bears Argand's name.

But it doesn't end there! The Scottish mathematician Peter Guthrie Tait (18311901), wrote in his book An Elementary Treatise on Quaternions:

Wallis, in the end of the seventeenth century, proposed to represent the impossible roots, of a quadratic equation by going out of the line on which, if real they would have been laid off. His construction is equivalent to the consideration of $\sqrt{-1}$ as a directed unit line perpendicular to that on which real quantities are measured. [3]

John Wallis (1616-1703), was a gifted English mathematician [4], and it is believed that Argand, Warren, and others, extended the results of Wallis and De Moivre, who had done some early work on the complex plane.

4.3 复平面

One of the people associated with the development of complex numbers was the brilliant Swiss mathematician Leonhard Euler (1707-1783). Euler proved the identity:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

and when $\theta = \pi$, one of the most beautiful formulae in mathematics emerges:

$$e^{i\pi} = -1$$

or

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

which integrates five important constants: $0, 1, e, \pi$ and i, as well as the basic arithmetic operations: addition, multiplication and exponentiation.

Another consequence of this formula arises when $\theta = \pi/2$:

$$e^{i\pi/2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

therefore,

$$\begin{aligned} i^i &= \left(e^{i\pi/2}\right)^i \\ &= e^{i^2\pi/2} \\ &= e^{-\pi/2} \\ &\approx 0.207879576. \end{aligned}$$

which shows that the imaginary unit raised to itself equals a real number!

In Chap. 3 we saw that the powers of imaginary i give rise to two sequences $(1, i, -1, -i, 1, \ldots)$ and $(1, -i, -1, i, 1, \ldots)$ which bear a striking resemblance to the patterns $(x, y, -x, -y, x, \ldots)$ and $(x, -y, -x, y, x, \ldots)$ that arise when rotating about the Cartesian axes in an counter-clockwise and clockwise direction, respectively. This resemblance is no coincidence, as complex numbers belong to a two-dimensional plane called the complex plane, which we will now describe.

The complex plane enables us to visualise complex numbers using the horizontal axis to record the real part, and the vertical axis to record the imaginary part, as shown in Fig. 4.1.

The figure also shows a circle with unit radius passing through the points $1, i, -1, -i$, which is the sequence associated with increasing powers of i. We can see the positions for $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i$ and $i^4 = 1$, which suggest that multiplying by i is equivalent to rotating through $90°$.

To demonstrate this rotational effect, Fig. 4.2 shows the complex plane with four complex numbers:

$$p = 2 + i, \quad q = -1 + 2i, \quad r = -2 - i, \quad s = 1 - 2i$$

which are $90°$ apart. Fig. 4.1 The complex plane with the unit circle

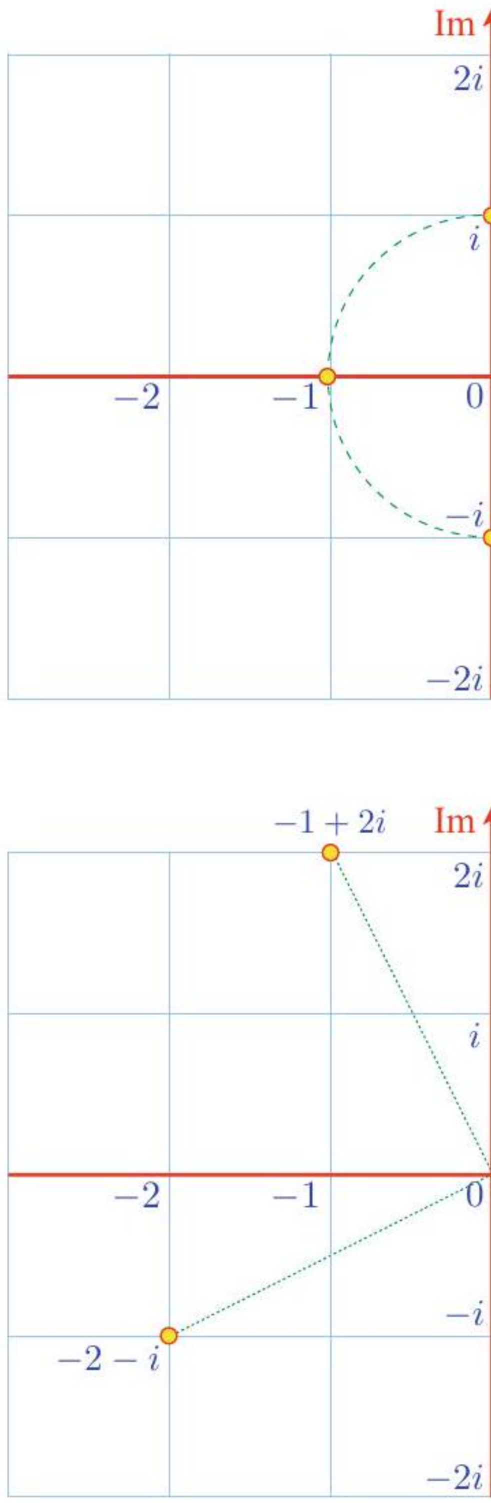


Fig. 4.2 The complex plane with four complex numbers

The point p is rotated $90°$ to q by multiplying it by i :

$$\begin{aligned} i(2+i) &= 2i + i^2 \\ &= -1 + 2i. \end{aligned}$$

The point q is rotated another $90°$ to r by multiplying it by i :

$$\begin{aligned} i(-1+2i) &= -i + 2i^2 \\ &= -2 - i \end{aligned}$$

The point r is rotated another $90°$ to s by multiplying it by i :

$$\begin{aligned} i(-2-i) &= -2i - i^2 \\ &= 1 - 2i \end{aligned}$$

Finally, the point s is rotated $90°$ back to p by multiplying it by i :

$$\begin{aligned} i(1-2i) &= i - 2i^2 \\ &= 2 + i \end{aligned}$$

We also discovered in Chap. 3 that the sequence associated with increasing negative powers: $(1, -i, -1, i, \ldots)$ is a rotation in a clockwise direction, and implies that dividing a complex number by i rotates it $90°$ clockwise. However, we showed that $i^{-1} = -i$, and it is much easier to multiply a complex number by $-i$ than divide it by i. So let's repeat the above exercise to prove this point.

The point p is rotated $-90°$ to s by multiplying it by $-i$:

$$\begin{aligned} -i(2+i) &= -2i - i^2 \\ &= 1 - 2i \end{aligned}$$

The point s is rotated another $-90°$ to r by multiplying it by $-i$:

$$\begin{aligned} -i(1-2i) &= -i + 2i^2 \\ &= -2 - i. \end{aligned}$$

The point r is rotated another $90°$ to q by multiplying it by $-i$:

$$\begin{aligned} -i(-2-i) &= 2i + i^2 \\ &= -1 + 2i. \end{aligned}$$

Finally, the point q is rotated $90°$ back to p by multiplying it by $-i$:

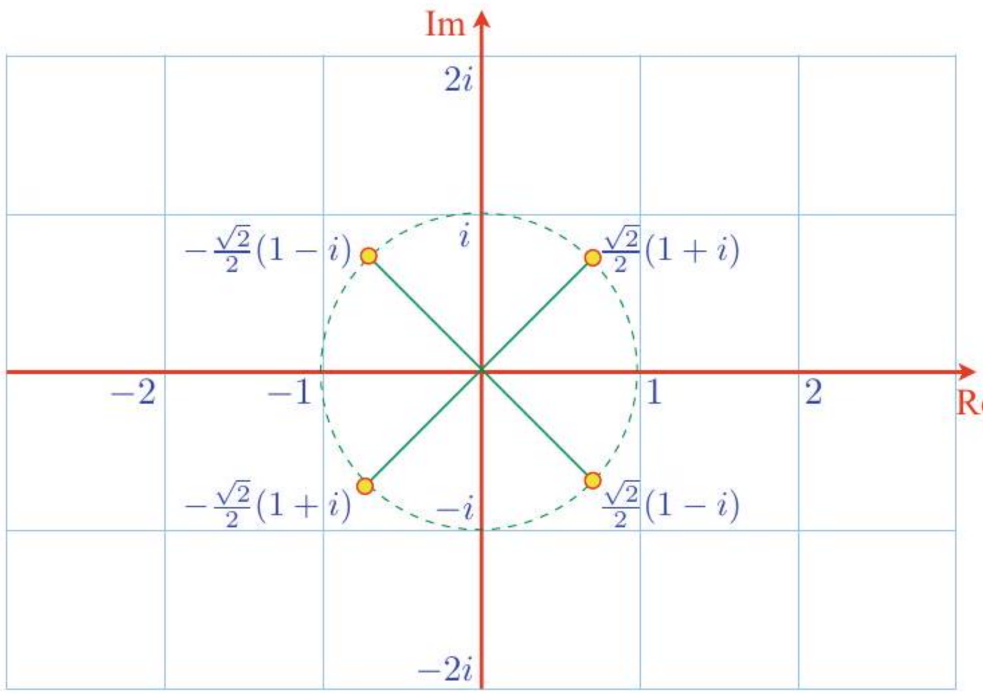
$$\begin{aligned}-i(-1+2i) &= i-2i^2 \\ &= 2+i\end{aligned}$$

Thus a complex number is rotated $\pm 90°$ by multiplying it by $\pm i$.

In Chap. 3 we saw that the roots of $\sqrt{\pm i}$ are

$$\sqrt{+i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$
$$\sqrt{-i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

and are shown in Fig. 4.3. Note that the individual roots are 180° apart, which suggests that angles have something to do with their action. For example, the positive root of $\sqrt{i}$ is $\sqrt{2}/2(1+i)$ and is 45° from the real axis. Multiplying this root by itself rotates it 45° to the i axis. Similarly, the negative root is $-\sqrt{2}/2(1+i)$ and is 225° from the real axis. Multiplying this root by itself rotates it 225° to the i axis. The same is true for the roots of $\sqrt{-i}$. Fig. 4.3 The complex roots of $\sqrt{\pm i}$



These observations seem to suggest that we can construct a complex number capable of rotating another complex number through any angle. Which is true and is covered next.

4.4 极坐标表示法

Placing a complex number on the complex plane leads us to polar representation where we form a line from the origin to the complex number as shown in Fig. 4.4. The length of the line is r and equals $\sqrt{a^2+b^2}$, which is why the norm of a complex number is defined using the Pythagorean formula:

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

The angle θ between the line and the real axis is called the argument of z and written:

$$\arg(z) = \theta$$

where,

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

1st quadrant: $a > 0, b > 0$,

$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

2nd & 3rd quadrant: $a < 0$,

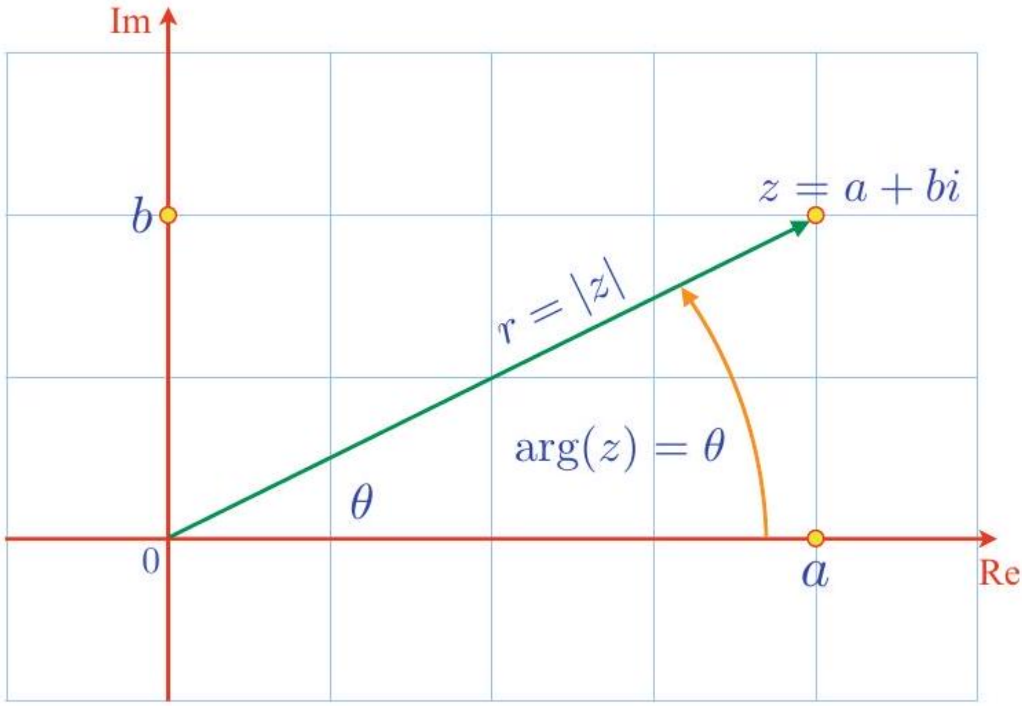
$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$$

4th quadrant: $a > 0, b < 0$,

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi$$

Fig. 4.4 Polar

representation of a complex number



We can see from Fig. 4.4 that the horizontal component of z is $r\cos\theta$ and the vertical component is $r\sin\theta$, which permits us to write

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= r\cos\theta + ri\sin\theta \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta). \end{aligned}$$

As mentioned above, one of Euler's discoveries is the identity relating the power series for $e^{\theta}, \sin\theta$ and $\cos\theta$:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

which permits us to write

$$z = re^{i\theta}$$

Armed with this discovery, we are now in a position to revisit the product and quotient of two complex numbers using polar representation. For example, given the following complex numbers:

$$z = re^{i\theta}$$
$$w = se^{i\phi}$$

their product is

$$\begin{aligned} zw &= rse^{i\theta}e^{i\phi} \\ &= rse^{i(\theta+\phi)} \\ &= rs[\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)] \end{aligned}$$

So the product of two complex numbers creates a third one with norm

$$|zw| = rs$$

and argument

$$\arg(zw) = \theta + \phi$$

where the angles are added.

Next, the quotient:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{re^{i\theta}}{se^{i\phi}} \\ &= \frac{r}{s}e^{i(\theta-\phi)} \\ &= \frac{r}{s}[\cos(\theta-\phi) + i\sin(\theta-\phi)] \end{aligned}$$

where the norm is

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{r}{s}$$

and the argument is

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \theta - \phi$$

where the angles are subtracted.

Let's employ these formulae with an example. Figure 4.5 shows two complex numbers:

$$z = 2 + 2i$$
$$w = -1 + i$$

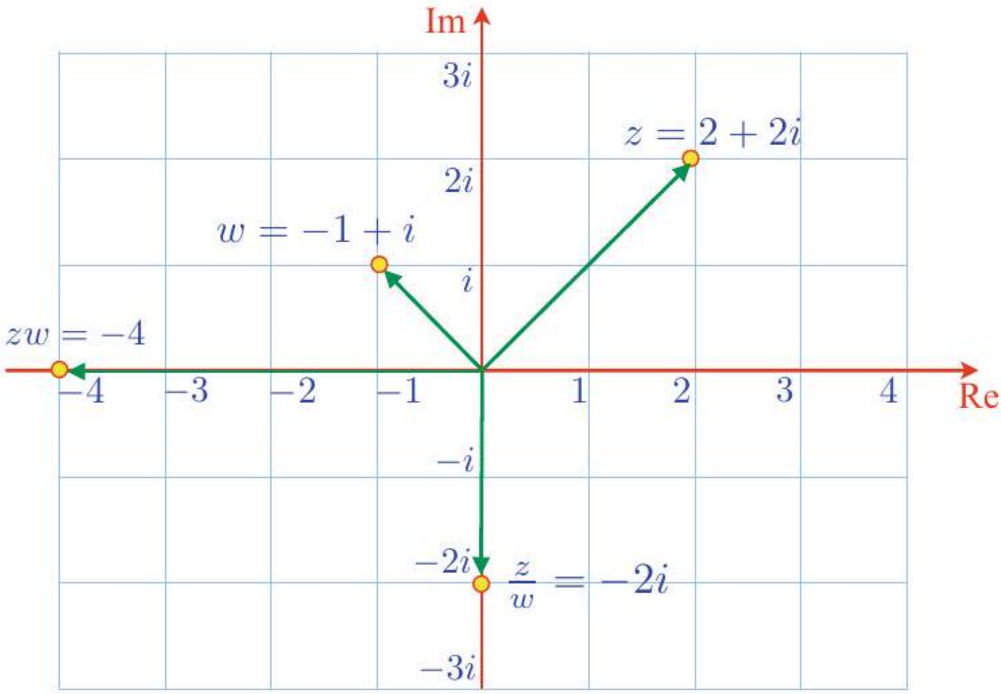
which in polar form are

$$z = 2\sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$$
$$w = \sqrt{2}\,(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}.$$

Using normal complex algebra, the product zw is

$$zw = (2 + 2i)(-1 + i) = -4$$

and using polar form: Fig. 4.5 The product and quotient of two complex numbers



$$|zw| = 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 4$$
$$\arg(zw) = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$$

which encode -4 .

Now let's compute the quotient z/w using normal complex algebra, then the polar form.

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{(2+2i)}{(-1+i)}\frac{(-1-i)}{(-1-i)}\\ &= \frac{-2-2i-2i-2i^2}{1+1}\\ &= -2i.\end{aligned}$$

Next, using polar form:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{z}{w}\right| &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 \\
\arg\left(\frac{z}{w}\right) &= 45^\circ - 135^\circ = -90^\circ
\end{aligned}
$$

which encode the complex number $-2i$. These results are shown in Fig. 4.5.

We can also use Euler's formula to compute $\sqrt{i}$ as follows:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

substituting $\theta = \pi/2$ we have

$$e^{i\pi/2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

taking the square root of both sides, we have

$$
\begin{aligned}
\pm e^{i\pi/4} &= \sqrt{i} \\
\pm\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] &= \sqrt{i} \\
\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) &= \sqrt{i}
\end{aligned}
$$

To find $\sqrt{-i}$ we substitute $\theta = -\pi/2$:

$$
\begin{aligned}
e^{-i\pi/2} &= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -i
\end{aligned}
$$

taking the square root of both sides, we have

$$
\begin{aligned}
\pm e^{-i\pi/4} &= \sqrt{-i} \\
\pm\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] &= \sqrt{-i} \\
\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) &= \sqrt{-i}
\end{aligned}
$$

Higher roots can be found using a similar technique.

4.5 转子

The polar form brings home the fact that multiplying $z = re^{i\theta}$ with norm r, by $w = se^{i\phi}$ with norm s, creates a third complex number with norm rs. Therefore, to avoid scaling z, w must have a norm of unity. Under such conditions, w acts as a rotor.

For example, multiplying $4+5i$ by $1+0i$ leaves it unscaled and unrotated. However, multiplying $4+5i$ by $0+i$ rotates it by $90°$ without any scaling.

Therefore, to rotate $2+2i$ by $45°$, we must multiply it by $e^{i\pi/4}$:

$$e^{i\pi/4} = \cos 45° + i\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(2+2i) &= \frac{\sqrt{2}}{2}4i \\
&= 2\sqrt{2}i
\end{aligned}$$

So $e^{i\theta}$ rotates any complex number through an angle θ.

To rotate a complex number $x+yi$ through an angle θ we can multiply it by the rotor $\cos\theta + i\sin\theta$

$$\begin{aligned}
x' + y'i &= (\cos\theta + i\sin\theta)(x+yi) \\
&= x\cos\theta - y\sin\theta + i(x\sin\theta + y\cos\theta)
\end{aligned}$$

which in matrix form is:

$$\begin{bmatrix} x' \\ iy' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ iy \end{bmatrix}$$

Before moving on let's consider the effect the complex conjugate of a rotor has on rotational direction, and we can do this by multiplying $x+yi$ by the rotor $\cos\theta - i\sin\theta$:

$$\begin{aligned}
x' + y'i &= (\cos\theta - i\sin\theta)(x+yi) \\
&= x\cos\theta + y\sin\theta + i(-x\sin\theta + y\cos\theta)
\end{aligned}$$

and in matrix form is

$$\begin{bmatrix} x' \\ iy' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ iy \end{bmatrix}$$

which is a rotation of $-\theta$ about the origin.

Therefore, we define a rotor $\mathbf{R}_\theta$ and its conjugate $\mathbf{R}_\theta^\dagger$ as

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_\theta &= \cos\theta + i\sin\theta \\
\mathbf{R}_\theta^\dagger &= \cos\theta - i\sin\theta
\end{aligned}$$

where $\mathbf{R}_\theta$ rotates $+\theta$, and $\mathbf{R}_\theta^\dagger$ rotates $-\theta$. Note the use of the dagger † symbol.

4.6 总结

在这一章中，我们发现了利用复平面对复数的图形化解释。欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 允许我们将复数表示为e的虚次幂，从而使我们可以轻松地计算乘积和商。总之，这些想法让我们产生了转子的想法，而转子将使用四元数来开发。

4.6.1 定义总结

复数

$$z = a + bi$$
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

极坐标形式

$$\begin{aligned} z &= re^{i\theta} \\ z &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ r &= |z| \\ \tan\theta &= b/a \\ \theta &= \arg(z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第一象限：}\quad & a > 0, b > 0 & \theta &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right). \\ \text{第二、第三象限：}\quad & a < 0, & \theta &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi. \\ \text{第四象限：}\quad & a > 0, b < 0, & \theta &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi. \end{aligned}$$

乘积

$$\begin{aligned} z &= re^{i\theta} \\ w &= se^{i\phi} \\ zw &= rse^{i(\theta+\phi)} \\ &= rs[\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)]. \end{aligned}$$

商

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{r}{s}e^{i(\theta-\phi)}\\ &= \frac{r}{s}[\cos(\theta-\phi)+i\sin(\theta-\phi)].\end{aligned}$$

转子

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_\theta &= \cos\theta + i\sin\theta\\ \mathbf{R}_\theta^\dagger &= \cos\theta - i\sin\theta.\end{aligned}$$

4.7 样例

下面是一些进一步运用上述思想的例子。在某些情况下，需要进行测试以确认结果。

例 4.1: 用 i 旋转复数

从 $1+2i$ 开始，将得到的复数乘以 i四次，并在复数平面上绘出结果。

将点 p 旋转 90° 至 q 是通过乘以 i，：

$$\begin{aligned}i(1+2i) &= i+2i^2\\ &= -2+i.\end{aligned}$$

通过乘以 i，点 q 又旋转了 90° 至 r：

$$\begin{aligned}i(-2+i) &= -2i+i^2\\ &= -1-2i.\end{aligned}$$

通过乘以 i，点 r 又旋转了 90° 至 s:

$$\begin{aligned}i(-1-2i) &= -i-2i^2\\ &= 2-i.\end{aligned}$$

最后，通过乘以 i，将点 s 旋转 90° 回到 p:

$$\begin{aligned}i(2-i) &= 2i-i^2\\ &= 2+i.\end{aligned}$$

图4.1 显示了由 90° 分隔的四个复数。

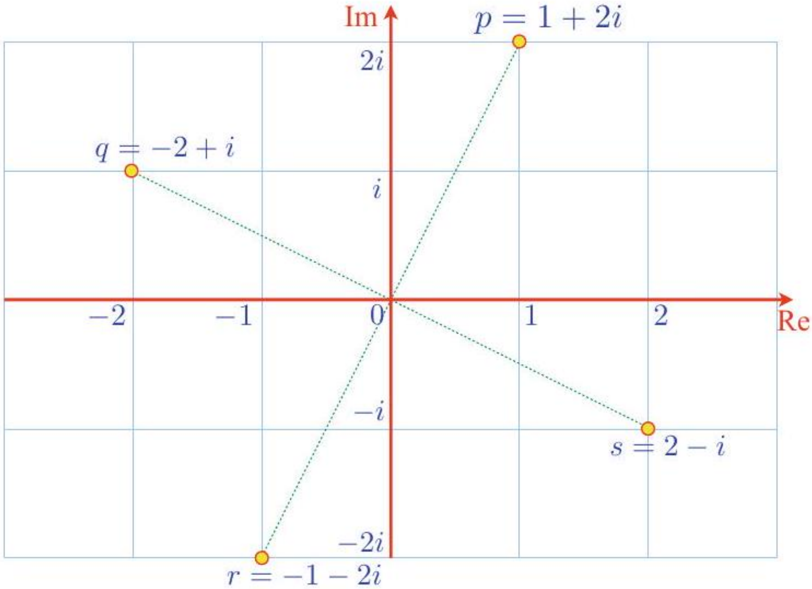


图 4.1: 有四个复数的复平面

例 4.2: 使用极坐标形式计算积和商

用极坐标形式计算积 zw 和商 z/w。

$$z = 3 + 3i$$
$$w = -1 - i.$$

乘积:

$$z = 3\sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4}$$
$$w = \sqrt{2}\,(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ) = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}$$
$$|zw| = 3\sqrt{2}\sqrt{2} = 6$$
$$\arg(zw) = 45^\circ + 225^\circ = 270^\circ$$

编码复数 $-6i$。

测试: 使用普通复数代数，乘积 zw 是

$$zw = (3 + 3i)(-1 - i) = -6i$$

商：

$$|z| = 3\sqrt{2}$$
$$|w| = \sqrt{2}$$
$$\left|\frac{z}{w}\right| = 3\sqrt{2}/\sqrt{2} = 3$$
$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = 45° - 225° = 180°$$

编码复数 -3 。

测试： 使用普通复代数，商 z/w 是

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{(3+3i)}{(-1-i)}\frac{(-1+i)}{(-1+i)} \\ &= \frac{-6}{2} \\ &= -3\end{aligned}$$

并与极坐标形式一致。

例 4.3: 设计一个旋转复数30°的转子

设计一个转子，使复数在不缩放的情况下旋转 30° 。首先

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

令 $\theta = 30° = \pi/6$

$$\begin{aligned}e^{i\pi/6} &= \cos 30° + i\sin 30° \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i).\end{aligned}$$

测试： 让我们用这个转子将 $1+0i$ 旋转三次，直到 i。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)1 &= \frac{1}{8}(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i) \\ &= \frac{1}{8}(2+2\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i) \\ &= \frac{1}{8}(2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2i+6i) \\ &= i\end{aligned}$$

例 4.4: 设计一个将复数旋转 -60° 的转子

设计一个转子，使复数在不缩放的情况下旋转-60°。首先

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

令 $\theta = -60^\circ = -\pi/3$

$$\begin{aligned} e^{-i\pi/3} &= \cos(-60^\circ) + i\sin(-60^\circ) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i) \end{aligned}$$

参考文献

[1] Argand, J.R.: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Argand.html

[2] Argand, J.R.: Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, 2nd edn. Gauthier-Villars, Paris (1874)

[3] Tait, P.G.: Elementary Treatise on Quaternions. Cambridge University Press, Cambridge (1867)

[4] Wallis, J.: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Wallis.html