# Ch5区间估计与假设检验

本章概要

**♢单正态总体参数的区间估计**

**♢假设检验的步骤及p值**

**♢单正态总体参数的假设检验**

**5.1单正态总体参数的区间估计（教材138页5.2）**

统计推断中区间估计是个重要内容，本节以单正态总体参数估计的区间估计为例，讲解R中如何实现。

前提说明：假设总体，是来自此正态总体的一个样本，  为样本均值，样本方差。

**5.1.1均值μ的区间估计**

**1.方差已知时μ的区间估计**

**理论回顾：**由于 ，因此有



由，得



所以对于单个正态母体服从，方差****已知时，**μ**的置信水平为的置信区间为 ，

简记为 

其中表示标准正态N(0,1)的下侧（左侧）p分位数。

**R软件实现：**R中没有现成的内置函数，计算方差已知时均值的置信区间，所以需要自己编写函数conf.int\_1(x,sigma,con.level)

conf.int\_1<-function(x,sigma,con.level=0.95) {

options(digits=4) #设置4位有效数字

m<-mean(x);n<-length(x)

alpha<-1-con.level

zp<-qnorm(1-alpha/2)

Low<-m-zp\*sigma/sqrt(n)

Up <-m+zp\*sigma/sqrt(n)

Result<-list(x.mean=m,conf.interval=c(Low,Up))

Result

}

例1：教材P139页的例5.2.1

一个人10次称自己的体重（单位：500g）：175,176,173,175,174,173,173,176,173,179

希望估计一下他的体重。假设此人的体重服从正态分布，标准差为1.5，现在要求体重的95%置信区间。

解：即求 

方法一：直接编程

x<-c(175,176,173,175,174,173,173,176,173,179)

sigma<-1.5;con.level<-0.95

options(digits=4) #设置4位有效数字

m<-mean(x);n<-length(x)

alpha<-1-con.level

zp<-qnorm(1-alpha/2)

Low<-m-zp\*sigma/sqrt(n)

Up <-m+zp\*sigma/sqrt(n)

Result<-list(x.mean=m,conf.interval=c(Low,Up))

Result

##方法二：#变成自定义函数conf.int\_1(x,sigma,con.level)

##方法二：#变成自定义函数conf.int\_1(x,sigma,con.level)

conf.int\_1<-function(x,sigma,con.level=0.95) {

options(digits=4) #设置4位有效数字

m<-mean(x);n<-length(x)

alpha<-1-con.level

zp<-qnorm(1-alpha/2)

Low<-m-zp\*sigma/sqrt(n)

Up <-m+zp\*sigma/sqrt(n)

Result<-list(x.mean=m,conf.interval=c(Low,Up))

Result

}

x<-c(175,176,173,175,174,173,173,176,173,179)

conf.int\_1(x,sigma=1.5)

输出： 173.8 175.6

结论：此人体重的95%的置信区间为(173.8 ,175.6)

**2.方差未知时μ的区间估计**

**理论回顾：**由于



且两者独立，则有 

同样由，得



所以对于单个正态母体服从，方差****未知时，**μ**的置信水平为1-ɑ的置信区间为 

简记为 

其中tp(n)表示自由度为n的t分布的下侧（左侧）p分位数。

**R软件实现：**

**方法一：**可以自己编写函数conf.int\_2(x,con.level)

conf.int\_2<-function(x,con.level=0.95){

#options(digits=7) #设置7位有效数字

m<-mean(x);n<-length(x);sd=sd(x)

alpha<-1-con.level

tp<-qt(1-alpha/2,n-1)

Low<-m-tp\*sd/sqrt(n)

Up <-m+tp\*sd/sqrt(n)

Result<-list(x.mean=m,conf.interval=c(Low,Up))

Result

}

方法二：R中也有现成的内置函数t.test( )是用来计算单个样本或双样本t检验的，也可返回计算方差未知时均值的置信区间，调用格式有

t.test(x, ...)

## Default S3 method:

t.test(x, y = NULL,

alternative = c("two.sided", "less", "greater"),

mu = 0, paired = FALSE, var.equal = FALSE,

conf.level = 0.95, ...)

## S3 method for class 'formula'

t.test(formula, data, subset, na.action, ...)

例2：教材P141页

一个人10次称自己的体重（单位：500g）：175,176,173,175,174,173,173,176,173,179

希望估计一下他的体重。假设此人的体重服从正态分布，方差不知道，现在要求体重的95%置信区间。

解：即求 

方法一：直接编程

##方法一：直接编程

x<-c(175,176,173,175,174,173,173,176,173,179)

con.level<-0.95

options(digits=7) #设置7位有效数字

m<-mean(x);n<-length(x);sd=sd(x)

alpha<-1-con.level

tp<-qt(1-alpha/2,n-1)

Low<-m-tp\*sd/sqrt(n)

Up <-m+tp\*sd/sqrt(n)

Result<-list(x.mean=m,conf.interval=c(Low,Up))

Result

##方法二：#变成自定义函数conf.int\_2(x,con.level)

方法二：变成自定义函数conf.int\_2(x,con.level)

conf.int\_2<-function(x,con.level=0.95){

#options(digits=7) #设置7位有效数字

m<-mean(x);n<-length(x);sd=sd(x)

alpha<-1-con.level

tp<-qt(1-alpha/2,n-1)

Low<-m-tp\*sd/sqrt(n)

Up <-m+tp\*sd/sqrt(n)

Result<-list(x.mean=m,conf.interval=c(Low,Up))

Result

}

x<-c(175,176,173,175,174,173,173,176,173,179)

conf.int\_2(x)

方法三：调用内置函数t.test()

##方法三：调用内置函数t.test()

x<-c(175,176,173,175,174,173,173,176,173,179)

t.test(x)

t.test(x)$conf.int

输出： 173.3076 176.0924

结论：此人体重的95%的置信区间为(173.3076 ，176.0924)

**5.1.2方差σ2的区间估计**

**均值μ未知时，方差σ2的区间估计**

# 理论回顾：由于

所以得

所以**σ2**的置信水平为1-ɑ的置信区间为



其中表示自由度为n卡方分布的下侧（左侧）p分位数。

**R软件实现：**R中没有现成的内置函数，计算均值未知时方差的置信区间，所以需要自己编写函数conf.int\_3(x,conf.level)

conf.int\_3<-function(x,conf.level=0.95){

sd<-sd(x);n<-length(x)

alpha<-1-conf.level

xp.left<-qchisq(alpha/2,n-1) #左边分位数

xp.right<-qchisq(1-alpha/2,n-1) #右边分位数

Low<-(n-1)\*sd^2/xp.left

Up<-(n-1)\*sd^2/xp.right

Result<-list(sigma2.conf.interval=c(Low,Up))

Result

}

例3：教材P143

一个人10次称自己的体重（单位：500g）：175,176,173,175,174,173,173,176,173,179

希望估计一下他的体重。假设此人的体重服从正态分布，现在要求**σ2**的95%置信区间。

解：即求 

方法一：直接编程

##方法一：直接编程

x<-c(175,176,173,175,174,173,173,176,173,179)

conf.level<-0.95

sd<-sd(x);n<-length(x)

alpha<-1-conf.level

xp.left<-qchisq(alpha/2,n-1)

xp.right<-qchisq(1-alpha/2,n-1)

Low<-(n-1)\*sd^2/xp.right

Up<-(n-1)\*sd^2/xp.left

Result<-list(sigma2.conf.interval=c(Low,Up))

Result

##方法二：#变成自定义函数conf.int\_3(x,conf.level)

##方法二：自定义函数conf.int\_3(x,conf.level)

conf.int\_3<-function(x,conf.level=0.95){

sd<-sd(x);n<-length(x)

alpha<-1-conf.level

xp.left<-qchisq(alpha/2,n-1) #左边

xp.right<-qchisq(1-alpha/2,n-1) #右边

Low<-(n-1)\*sd^2/xp.right

Up<-(n-1)\*sd^2/xp.left

Result<-list(sigma2.conf.interval=c(Low,Up))

Result

}

x<-c(175,176,173,175,174,173,173,176,173,179)

conf.int\_3(x)

输出： 1.792589 12.627808

结论：**σ2**的95%的置信区间为(1.792589 ，12.627808)

**5.2假设检验的步骤及p值（教材161页6.1）**

* **步骤：**

**1）提出原假设H0与备择假设H1**

**2）选择检验统计量W并确定其分布**

**3）在给定的显著性水平下，确定统计量W的拒绝域**

**4）算出样本眯对应的检验统计量的值**

**5)判断：若统计量的值落在拒绝域内，则拒绝Ho,否则接受Ho**

* **检验的p值**

**定义1：在一个假设检验问题中，拒绝原假设Ho的最小显著性水平称为检验的p值。**

**定义2：检验的p值是检验统计量取得比观测值及更极端值的概率**

**检验判断方法：在显著性水平*α*下，当p<*α*时，拒绝H0；当p＞*α*时，接受H0.**

**现在统计软件都提供了计算检验的p值，我们也要学会计算检验的p 值。**

**5.3单个正态总体参数的假设检验(教材P162 6.2节)**

**5.3.1均值μ假设检验**

**1. 方差σ2已知时，均值μ的Z检验**

**理论回顾：**

设总体X~N(*μ*,*σ*2)，当*σ*2=*σ*02已知，给定检验水平*α*，对常数*μ*0要检验问题有三类:

（1）（双边检验）

（2）（单边右侧检验）

（3）（单边左侧检验）

设X1,X2,…Xn为X的简单随机样本，在成立时有



其中为样本均值，n为样本量。

检验问题（1）的拒绝域为：

检验问题（2）的拒绝域为：

检验问题（3）的拒绝域为：

注：**Z*α***为标准正态分布的下侧 ***α***分位数，**Z*α***= **-Z1-*α***

**设具体样本数据计算得到的统计量Z的值为Zobs ,对应的这三个检验问题P值为：**

**1）**

**2）**

**3）**

**以问题1）为例，图解P值检验法等价于分位数（查表得到）检验法**

zobs

p/2

Z1-α/2

α/2

|Zobs|>Z1-α/2等价于p<α

注：下侧1-α/2分位数z1-α/2满足P{|z|> z1-α/2}=α，所以z1-α/2也是双侧α分位数

**R软件实现：没有现成内置函数，需 编制自定义函数**my.z.test()

my.z.test<-function(x,n,u0,sigma,alpha=0.05,alternative="two.sides")

{ x.mean<-mean(x)

z=(x.mean-u0)/(sigma/sqrt(n)) #检验观测值

if (alternative=="two.sided")

{ z.critical.value=qnorm(1-alpha/2) #双侧检验临界值

p=2\*(1-pnorm(abs(z))) #双侧检验p值

}

if (alternative=="greater")

{ z.critical.value=qnorm(1-alpha) #右侧检验临界值

p=1-pnorm(z) #右侧检验p值 或 pnorm(z,lower.tail=T)

}

if (alternative=="less")

{ z.critical.value=-qnorm(1-alpha) #左侧检验临界值

p=pnorm(z) #左侧检验p值

}

list(x.mean=x.mean,z=z,z.critical.value=z.critical.value,p.value=p)

}

**例1教材P163页的例6.2.1**

微波炉在炉门关闭状态下的辐射指标要求服从正态分布N(μ，0.12)，均值要求不超过0.12，为检查近期产品的质量，从某厂生产的微波炉中抽查25台，得其炉门关闭时的辐射量的均值。问该厂生产的微波炉炉门关闭时的辐射量是否偏高？

解：（单边右侧检验）

，接受H0，即辐射量没有偏高

编程方法一：直接编程

#方法一：直接编程

x.mean=0.13;n=25;u0=0.12;sigma=0.1;alpha=0.05;alternative="greater"

z=(x.mean-u0)/(sigma/sqrt(n)) #检验观测值

if (alternative=="two.sided")

{ z.critical.value=qnorm(1-alpha/2) #双侧检验临界值

p=2\*(1-pnorm(abs(z))) #双侧检验p值

}

if (alternative=="greater")

{ z.critical.value=qnorm(1-alpha) #右侧检验临界值

p=1-pnorm(z) #右侧检验p值 或 pnorm(z,lower.tail=F)

}

if (alternative=="less")

{ z.critical.value=-qnorm(1-alpha) #左侧检验临界值

p=pnorm(z) #左侧检验p值

}

list(x.mean=x.mean,z=z,z.critical.value=z.critical.value,p.value=p)

输出：$x.mean

[1] 0.13

$z

[1] 0.5

$z.critical.value

[1] 1.645

$p.value

[1] 0.3085

结论：因为p=0.3085>0.05,故接受Ho,认为炉门关闭时辐射量没有偏高

方法二：自定义函数my.z.test（）

#方法二：自定义函数my.z.test()

my.z.test<-function(x,n,u0,sigma,alpha=0.05,alternative="two.sides")

{ x.mean<-mean(x)

z=(x.mean-u0)/(sigma/sqrt(n)) #检验观测值

if (alternative=="two.sided")

{ z.critical.value=qnorm(1-alpha/2) #双侧检验临界值

p=2\*(1-pnorm(abs(z))) #双侧检验p值

}

if (alternative=="greater")

{ z.critical.value=qnorm(1-alpha) #右侧检验临界值

p=1-pnorm(z) #右侧检验p值 或 pnorm(z,lower.tail=F)

}

if (alternative=="less")

{ z.critical.value=-qnorm(1-alpha) #左侧检验临界值

p=pnorm(z) #左侧检验p值

}

list(x.mean=x.mean,z=z,z.critical.value=z.critical.value,p.value=p)

}

my.z.test(0.13,n=25,u0=0.12,sigma=0.1,alternative="greater")

方法三：自定义函数z.test（）教材P139页上

z.test<-function(x,n,sigma,alpha,u0=0,alternative="two.sided") {

options(digits=4)

result<-list()

mean<-mean(x)

z<-(mean-u0)/(sigma/sqrt(n))

p<-pnorm(z,lower.tail=FALSE) #有误，改为p<-pnorm(z）或 p<-pnorm(z,lower.tail=T) ，计算左侧

result$mean<-mean

result$z<-z

result$p.value<-p

if (alternative=="two.sided")

result$p.value<-2\*pnorm(abs(z),lower.tail=FALSE)

else if (alternative=="greater")

result$p.value<-pnorm(z) #有误，改为p<-1-pnorm(z）或 p<-pnorm(z,lower.tail=F)

result$conf.int<-c(

mean-sigma\*qnorm(1-alpha/2,mean=0,sd=1,lower.tail=TRUE)/sqrt(n),

mean+sigma\*qnorm(1-alpha/2,mean=0,sd=1,lower.tail=TRUE)/sqrt(n))

result

}

z.test(0.13,25,0.1,0.05,u0=0.12,alternative="greater")

**2. 方差σ2未知时，均值μ的t检验**

**理论回顾：** 对三类假设检验问题：

（1）（双边检验）

（2）（单边右侧检验）

（3）（单边左侧检验）

**方差σ2未知时，在条件下有**



三类假设检验问题的拒绝域依次为：

检验问题（1）的拒绝域为：

检验问题（2）的拒绝域为：

检验问题（3）的拒绝域为：

注： 

**设具体样本数据计算得到的统计量T的值为Tobs ,对应的这三个检验问题P值为：**

**1）**

**2）**

**3）**

R软件实现：

方法一：自定义函数my.t.test()

方法二：调用内置函数t.test().

例：教材164 例6.2.2

某车间用一动员包装机包装盐，额定标准每袋净质量500g。设包装机包装出的盐每袋净质量X~N(*μ*,*σ*2)，某天随机抽取9袋，称得净质量（g）为：

490,506,508,502,498,511,510,515,512

问包装机工作是否正常？

解： （双边检验）



所以接受H0，认为包装机正常

编程方法一：直接编程

##方法一：直接编程

x<-c(490,506,508,502,498,511,510,515,512);alpha<-0.05;mu0=500;alternative="two.sided"

x.mean<-mean(x);n=length(x);s<-sd(x)

T<-(x.mean-mu0)/(s/sqrt(n))

if (alternative=="two.sided")

{ T.critical.value=qt(1-alpha/2,n-1) #双侧检验临界值

p=2\*(1-pt(abs(T),n-1)) #双侧检验p值

}

if (alternative=="greater")

{ T.critical.value=qt(1-alpha,n-1) #右侧检验临界值

p=1-pt(T,n-1) #右侧检验p值 或 pt(T,n-1,lower.tail=F)

}

if (alternative=="less")

{ T.critical.value=-qt(1-alpha,n-1) #左侧检验临界值

p=pt(T,n-1) #左侧检验p值

}

list(x.mean=x.mean,T=T,df=n-1,T.critical.value=T.critical.value,p.value=p)

输出：

$x.mean

[1] 505.8

$T

[1] 2.198

$df

[1] 8

$T.critical.value

[1] 2.306

$p.value

[1] 0.05919

结论：因为p=0.05919>0.05,故接受Ho,认为包装机正常

方法二：自定义函数my.t.test（）

###方法二：自定义函数my.t.test()

my.t.test<-function(x,alpha=0.05,mu0,alternative="two.sided")

{ x.mean<-mean(x);n=length(x);s<-sd(x)

T<-(x.mean-mu0)/(s/sqrt(n))

if (alternative=="two.sided")

{ T.critical.value=qt(1-alpha/2,n-1) #双侧检验临界值

p=2\*(1-pt(abs(T),n-1)) #双侧检验p值

}

if (alternative=="greater")

{ T.critical.value=qt(1-alpha,n-1) #右侧检验临界值

p=1-pt(T,n-1) #右侧检验p值 或 pt(T,n-1,lower.tail=F)

}

if (alternative=="less")

{ T.critical.value=-qt(1-alpha,n-1) #左侧检验临界值

p=pt(T,n-1) #左侧检验p值

}

list(x.mean=x.mean,T=T,df=n-1,T.critical.value=T.critical.value,p.value=p)

}

x<-c(490,506,508,502,498,511,510,515,512)

my.t.test(x,mu0=500)

方法三：调用内置函数t.test（）

###方法三：调用内置函数t.test()

x<-c(490,506,508,502,498,511,510,515,512)

t.test(x,mu=500)

**5.3.2方差σ2的检验：χ2检验**

原理回顾：

要检验的问题有三类:

（1）（双边检验）

（2） （单边右侧假设检验）

（2） （单边左侧假设检验）

**在条件下有**

对应的拒绝域依次为：

检验问题（1）的拒绝域为：

检验问题（2）的拒绝域为：

检验问题（3）的拒绝域为：

**设具体样本数据计算得到的统计量的值为,对应的这三个检验问题P值为：**

**1）**

**2）**

**3）**

R软件实现：没有内置函数可以调用，必须自定义函数my.chisq.test()

例：检查一批保险丝，抽出10根测量其通过电流熔化所需的时间（单位：秒）：

42,65,75,78,59,71,57,68,54,55

假设熔化所需时间服从正态分布，问能否认为熔化时间的方差并不超过80（取ɑ=0.05）？

解： （左侧单边检验）



所以接受H0，认为熔化时间的方差并不超过80

编程方法一：直接编程

#方法一：直接编程

x<-c(42,65,75,78,59,71,57,68,54,55);sigma.sq=80;alpha=0.05;alternative="less"

n<-length(x);s2<-var(x)

chi2<-(n-1)\*s2/sigma.sq

if (alternative=="two.sided") #双侧检验

{chisq.critical.value.Right=qchisq(1-alpha/2,n-1) #右边临界值

chisq.critical.value.left=qchisq(alpha/2,n-1) #左边临界值

chisq.critical.value=c(chisq.critical.value.left,chisq.critical.value.Right)

p=2\*min(pchisq(chi2,n-1),pchisq(chi2,n-1,lower.tail=F))

}

if (alternative=="greater") #右侧检验

{chisq.critical.value=qchisq(1-alpha,n-1) #右侧检验临界值

p=pchisq(chi2,n-1,lower.tail=F)

}

if (alternative=="less") #左侧检验

{chisq.critical.value=qchisq(alpha,n-1) #左侧检验临界值

p=pchisq(chi2,n-1,lower.tail=T)

}

list(var=s2,chisq=chi2,df=n-1,chisq.critical.value=chisq.critical.value,p.value=p)

输出：

$var

[1] 121.8

$chisq

[1] 13.71

$df

[1] 9

$chisq.critical.value

[1] 3.325

$p.value

[1] 0.8668

结论：因为p=0.8668>0.05,故接受Ho,认为熔化时间的方差并不超过80

方法二：自定义函数my.chisq.test()

###方法二：自定义函数my.chisq.test()

my.chisq.test<-function(x,sigma.sq,alpha=0.05,alternative="less")

{

n<-length(x);s2<-var(x)

chi2<-(n-1)\*s2/sigma.sq

if (alternative=="two.sided") #双侧检验

{ chisq.critical.value.Right=qchisq(1-alpha/2,n-1) #右边临界值

chisq.critical.value.left=qchisq(alpha/2,n-1) #左边临界值

chisq.critical.value=c(chisq.critical.value.left,chisq.interval.Right)

p=2\*min(pchisq(chi2,n-1),pchisq(chi2,n-1,lower.tail=F))

}

if (alternative=="greater") #右侧检验

{ chisq.critical.value=qchisq(1-alpha,n-1) #右侧检验临界值

p=pchisq(chi2,n-1,lower.tail=F)

}

if (alternative=="less") #左侧检验

{ chisq.critical.value=qchisq(alpha,n-1) #左侧检验临界值

p=pchisq(chi2,n-1,lower.tail=T)

}

list(var=s2,chisq=chi2,df=n-1,chisq.critical.value=chisq.critical.value,p.value=p)

}

x<-c(42,65,75,78,59,71,57,68,54,55)

my.chisq.test(x,sigma.sq=80)

5.4列联表的独立性检验（P185 7.3.1）

**原理回顾：**

随机变量X，Y 的分布函数分别为F1(x)和F2(x),且联合分布F(x,y)，则X与Y相互独立性归结于假设检验问题：

 

对于X和Y为分类变量，等价于检验下面列联表的独立性:

r×s列联表

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Y1 | Y2 | … | Ys | 总和 |
| X1 | n11 | n12 |  | n1s | n1.. |
| … |  |  |  |  |  |
| Xr | nr1 | nr1 |  | nrs | nr. |
| 总和 | n.1 | n.2 |  | n.s | n |

检验统计量

**R软件实现**：内置函数chisq.test()可实现独立性检验。

**例：教材P187例7.3.1**

对63个肺癌患者和43个非肺癌患者调查他们吸烟的情况，问总体中吸烟和患肺癌是否有关？）

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 吸烟 | 不吸烟 |
| 肺癌患者 | 60 | 3 |
| 非肺癌患 | 32 | 11 |

程序：

x<-matrix(c(60,32,3,11),nr=2)

dimnames(x)<-list(c("cancer","normal"),c("smoke","not smoke"))

x

chisq.test(x,correct=TRUE)

输出：

> x

smoke not smoke

cancer 60 3

normal 32 11

> chisq.test(x,correct=TRUE)

Pearson's Chi-squared test with Yates' continuity correction

data: x

X-squared = 7.93273, df = 1, p-value = 0.0048548

结论：因为p值=0. 0048548<,故拒绝原假设，即认为吸烟和患肺癌有关。

本节学习的R函数小结

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 第5章 区间估计与假设检验的主要函数 | | |
| 函数 | 功能 | 示例 |
|  |  |  |
|  |  |  |

**作业：练习本节所有命令**

* 区间估计部分：P157 5.3
* 假设检验部分：P175 6.1 6.2
* 列联表独立性检验：P198 7.4