第十六届北京师范大学程序设计竞赛决赛题解

2018 年 4 月 28 日

Summary

- A. 塞特斯玛斯塔–Easy
- B. 外挂使用拒绝–Medium
- C. 萌萌哒身高差–Easy
- D. 雷电爆裂之力–Medium
- E. 可以来拯救吗–Medium
- F. 汤圆防漏理论–Medium
- G. 命名规范问题–Easy
- H. 吾好梦中做题–Hard
- I. 如何办好比赛–Easy
- J. 小白兔小灰兔–Hard
- K. 好学期来临吧–Hard

A. 塞特斯玛斯塔

题意：给一些 Cytus 的判定，输出这次游戏的评价是 MILLION Master 还是 NAIVE Noob。

做法：真签到题。判断 n 个字符串是否都是”PERFECT”。

B. 外挂使用拒绝

题意：一个未知的长度为 n 的序列（模 10^9+7 意义下），做 k 次前缀和变换，得到新的序列，已知这个新的序列，求原序列。

做法：

假设有一个序列 a，那么 a 做一次前缀和变化，可以用矩阵来表示

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

那么做 k 次前缀和，显然就是做成这个矩阵的 k 次幂了。

事实上，逆前缀和同样也可以表示成这种变化（暂时不考虑取模的问题）

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

B. 外挂使用拒绝

设矩阵

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

通过找规律，可以得知

$$M^k=\begin{bmatrix} (-1)^0C_k^0 & 0 & 0 & & 0 \\ (-1)^1C_k^1 & (-1)^0C_k^0 & 0 & \cdots & 0 \\ (-1)^2C_k^2 & (-1)^1C_k^1 & (-1)^0C_k^0 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n-1}C_k^{n-1} & (-1)^{n-2}C_k^{n-2} & (-1)^{n-3}C_k^{n-3} & \cdots & (-1)^0C_k^0 \end{bmatrix} \text{（k>n 时）}$$

直观来看，实际上就是杨辉三角的第 k 行（行数从 0 开始编号），加上求逆元的复杂度，$O(n\log n)$就可以得到系数。然后 $O(n^2)$算一个矩阵乘法，即可得到初始序列 a。

C. 萌萌哒身高差

题意：$1-n$ 排列被记为 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，给定 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=2}^{n} |x_i - x_{i-1}|$，求对 $1-n$ 所有的排列的 f 值的平均数。

做法 1：枚举贡献，
$ans = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} abs(i-j) \times (n-1) \times (n-2)!$，化简得
$ans = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} abs(i-j)$，复杂度 $O(n^2)$。

做法 2：暴力计算出前十几项，不难发现 $ans = \frac{n^2-1}{3}$。

D. 雷电爆裂之力

题意：有三个长度分别为 n, m, k 的元素值严格递增的整数数组 a, b, c。求 $min(abs(a_i - b_j) + abs(b_j - c_p)) + 3$ 的值，其中 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq p \leq k$。

做法：一个比较简单的思路是枚举 b_j，通过双指针的方法，找到距离 b_j 最近的 a_i 和 c_p，更新答案。时间复杂度 $O(n)$。实际上没有卡其他做法，$O(n \log n)$ 也是能过的。

E. 可以来拯救吗

题意：给一个长为 n 的序列需要对所有长为 k 的子序列求和的平方的异或和，保证 $C_n^k \leq 10^5$。

做法：dfs 枚举。一个 trick 是，n 和 k 都可能很大，比如 $n = 100000, k = 99999$，此时正常的枚举子序列会严重超时。解决办法是当 $k \geq n/2$ 时，令 $k = n - k$，然后枚举反面即可。

F. 汤圆防漏理论

题意：有一个 n 个点 m 条边的无向图，边有边权，每次删一个点及其当前连接的所有边，花费是此次删点所删掉边的边权和，要求最小化每次花费的最大值。

做法 1：二分答案。即先二分一个花费上界然后类似 bfs 的去删点验证，看能否将所有点删掉。

做法 2：直接贪心。记每个点点权为其当前连接的所有边的边权和，每次取出最小的点，然后删掉。用 set 动态维护这个过程。

时间复杂度 $O(n \log n)$。

G. 命名规范问题

题意：给一些变量名，将符合 (题中描述的) 驼峰命名法规范的变量名转换为下划线命名法。不符合的原样输出。

做法：字符串模拟。标程用了正则表达式，大概 20 行搞定。

H. 吾好梦中做题

题意：给一个括号序列，修改操作为翻转一个括号，查询以某个括号为左端点的最长的合法区间，合法区间即合法括号序列，输出最长的长度。

做法：在线段树上二分。左括号看成“+1”，右括号看成“-1”，记 sum 为前缀和，那么区间 $[l, r]$ 是合法括号序列需要满足 $sum[r] - sum[l-1] = 0$ 且 $sum[i] \geq sum[l-1], l \leq i \leq r$。用线段树维护前缀和的最小值。修改操作即变为一段后缀 +2 或者-2。查询的话，若记查询的左端点为 x，首先用线段树上二分，找到大于等于 x 的第一个 sum 值小于 $sum[x-1]$ 的位置 pos_1。如果 pos_1 存在，那么区间 $[x, pos_1 - 1]$ 必为最长的合法括号序列，长度为 $pos_1 - x$；如果 pos_1 不存在，再用线段树上二分找到大于等于 x 的最后一个 sum 值等于 $sum[x-1]$ 的位置 pos_2，那么此时答案为 $pos_2 - x + 1$，注意 pos_2 也有可能不存在的，比如全是左括号的情况。

I. 如何办好比赛

题意：把 D 当做 1，M 当做 0，即问最少交换多少次相邻字符，才能使得逆序对数恰好为 k。

做法：首先，交换两个相同字符逆序对数是不变的，无意义，所以只能交换两个不同字符，可以发现一次交换会使逆序对数要么加一要么减一，这样就做完了。更详细一点，先统计出逆序对数，记为 x，字符 D 的个数，记为 d。如果 $d * (n - d) < k$，那么无解，否则输出 $abs(x - k)$。

J. 小白兔小灰兔

题意：给一个简单多边形和多边形外一个视点，问从这个视点能看到多边形多长的边。并且保证视点不在多边形任意一条边所在直线上

做法：一个简单的做法是把视点与多边形各个顶点连线得到 n 条直线，这些直线把多边形的各个边切成了一些线段。验证每个小线段能否被看到即可。这个验证方法是取每个小线段的中点与视点连线，如果存在与多边形的某条边规范相交则不能被看到。

K. 好学期来临吧

题意：一共有 n+m 个工作，其中 n 个工作 A[1...n] 已经排好序，剩下 m 个工作 B[1...m] 要插到这 n 个排好序的工作中，然后从这 n+m 个排好序的工作中选取若干工作，使得选出的工作快乐值尽可能大，要求相邻的工作不能同时选。

做法：如果没有后 m 个工作，就是个很简单的 DP 了，即 dp[i][0/1] 表示（现在考虑到了第 i 个工作，最后一个工作是否选出）时的最大快乐值；那么考虑后 m 个工作怎么处理：显然，对于后 m 个工作来说，快乐值越大的工作越倾向于被选择，越小则越倾向于被留下，因此 dp[i][j][k][0/1] 表示（现在考虑到了前 n 个工作的第 i 个，后 m 个工作还剩下排好序后的第 j 个到第 k 个，当前的最后一个工作是否选出）这一状态下能获得的最大快乐值，转移时如果要选，则考虑放入 B[k]，否则放入 B[j]。