Ampliación de Señales y Sistemas

Tema 3: Muestreo

Antonio G. Marqués

La presentación contiene material del OCW del MIT (6.003 Signals and Systems S10, F11), así como material de A. Guerrero y A. Wilsky

Ubicándonos

- Tema 1: Señales y sistemas discretos en el dominio del tiempo
- Tema 2: Señales y sistemas discretos en el dominio de la frecuencia
- **Tema 3: Muestreo**
  - 3.1 Muestreo de señales continuas
  - 3.2 Procesamiento en tiempo discreto de señales continuas
  - 3.3 Muestreo de señales discretas: diezmado e interpolación
- Tema 4: Fundamentos de la Transformada Discreta de Fourier
- Tema 5: Transformada Z
- Tema 6: Introducción al diseño de filtros discretos

Comentarios:

- Tema fundamental en la asignatura
- Resumen: “Hay que muestrear al doble del ancho de banda e interpolar con sincs”
- Trabajo previo: TF de tren de deltas y TFI de filtro paso bajo

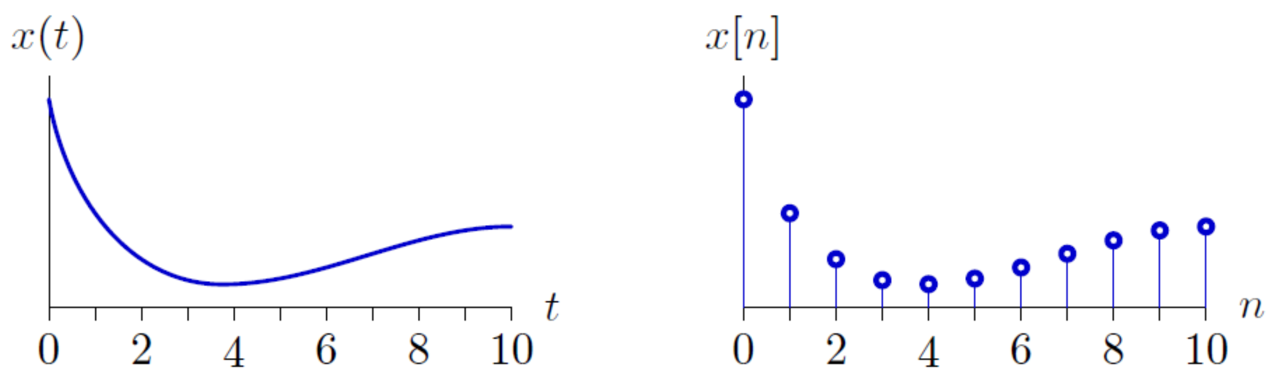
Ubicándonos

- **Tema 3: Muestreo**
  - **3.1 Muestreo de señales continuas**
    - **3.1.0 Introducción**
    - 3.1.1 Muestreo en el dominio del tiempo y de la frecuencia
    - 3.1.2 Recuperando la señal continua: interpolación
    - 3.1.3 Problemas y aspectos prácticos
  - 3.2 Procesamiento en tiempo discreto de señales continuas
  - 3.3 Muestreo de señales discretas: diezmado e interpolación

- Comentarios:
  - Bibliografía básica y complementaria: [BB2: Opp&Sch] Cap. 3, Secs. 3.0, 3.1, 3.2 y 3.4; [BB3: McC&Sch&Yod] Cap. 4, Secs. 4.1, 4.2 y 4.5; [BC3: Cha] Cap 7, Secs. 7.1, 7.2 y 7.3
  - Material de apoyo: Open course MIT (parte de la presentación utiliza material de OCW-MIT); Demos: http://users.ece.gatech.edu/mcclella/SPFirst/

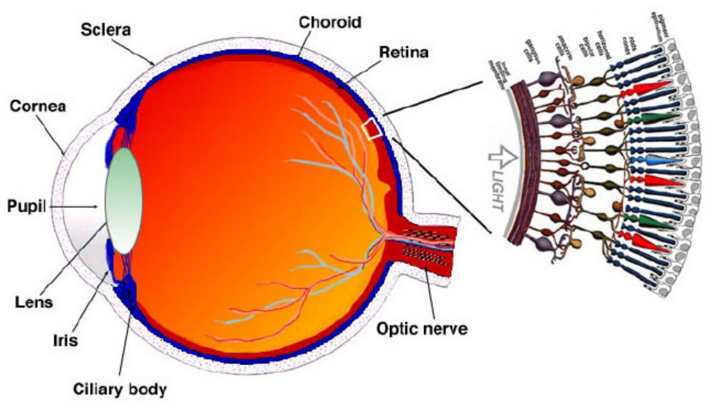
Muestreo: interfaz continuo-discreto

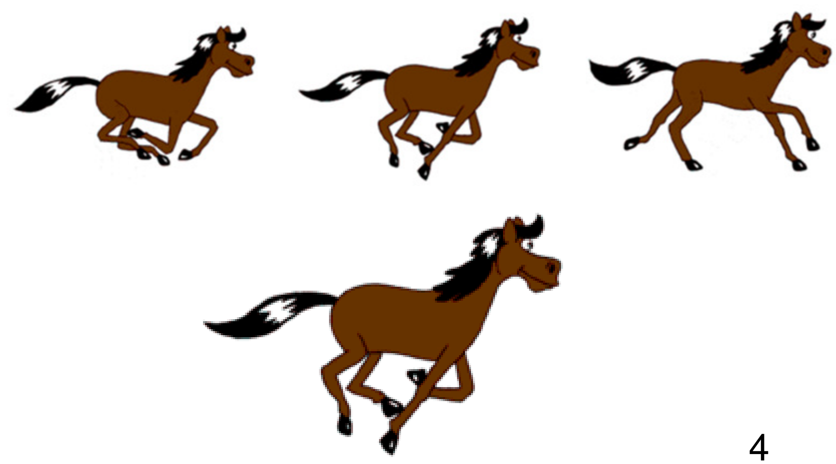
- Naturaleza de las señales: continua y discreta
  - C: voltajes, corrientes, voz, …
  - D: hora a la que se pone el sol, precio de cierre de una acción, secuencia genética
- Aparentemente, vivimos en un mundo de naturaleza continua
  - El tiempo es una variable física continua
- Los ordenadores: información digital ➔ representación discreta
  - SD pero pueden representar info de SC
- ¿Cómo convertimos una señal continua en una discreta? ➔ Muestreo



Muestreo omnipresente

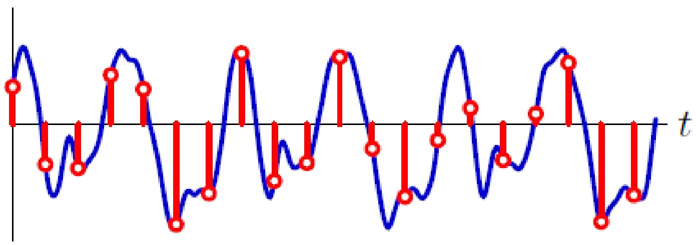
- El muestreo está presente en nuestro día a día
  - Imágenes de alta resolución
  - Dibujos animados
  - Nuestra propia retina

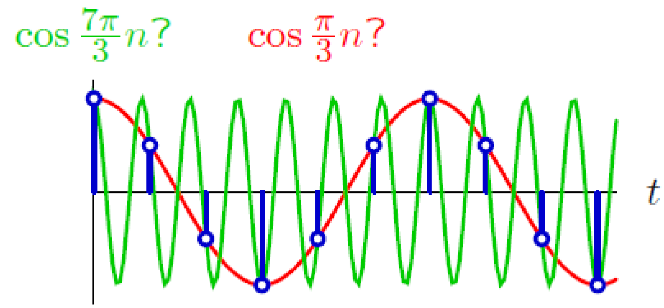




Preguntas clave

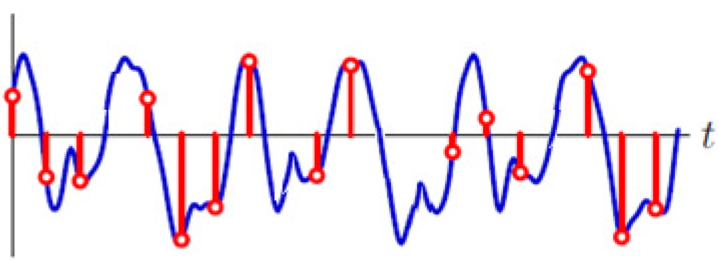
- A) Dada una señal continua ¿podemos discretizarla sin perder información?
  - ¿No perder información? ➔ Seguir representando “lo mismo”

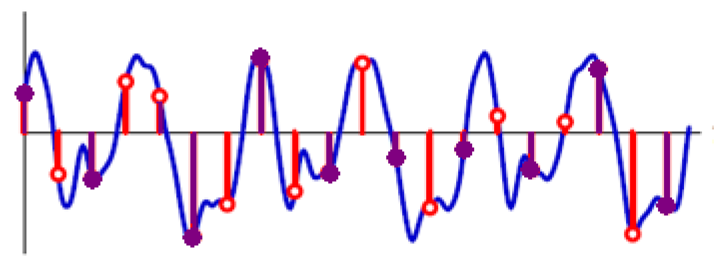




  - Para nosotros: que a partir de las muestras se pueda recuperar la señal original

- B) ¿Cómo muestreamos?





  - Para nosotros: muestreo regular ➔ Periodo de muestreo T (frecuencia $\omega_s = 2\pi/T$)

Objetivos de la primera parte

- Objetivo de esta clase: entender el proceso de muestreo
  - INGENIERÍA: MODELAR + ANALIZAR + DISEÑAR

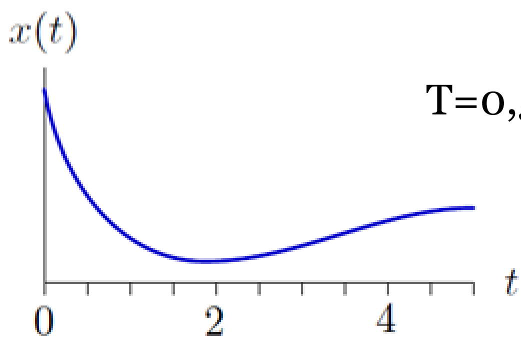
- Para ello, en la clase de hoy:
  1. Modelo del muestreo en el dominio del tiempo
  2. Análisis del muestreo en el dominio de la frecuencia
  3. Reconstrucción en el dominio de la frecuencia
  4. Reconstrucción en el dominio del tiempo
  5. Teorema de muestreo

Ubicándonos

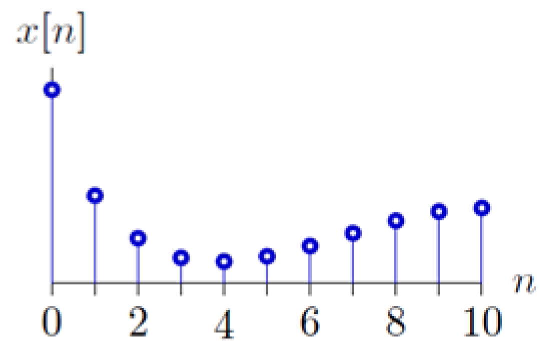
- **Tema 3: Muestreo**
  - **3.1 Muestreo de señales continuas**
    - 3.1.0 Introducción
    - **3.1.1 Muestreo en el dominio del tiempo y de la frecuencia**
    - 3.1.2 Recuperando la señal continua: interpolación
    - 3.1.3 Problemas y aspectos prácticos
  - 3.2 Procesamiento en tiempo discreto de señales continuas
  - 3.3 Muestreo de señales discretas: diezmado e interpolación

Muestreo en el dominio del tiempo

- Relación entre SC y SD muestreada a un periodo T



T=0,5 seg



$x[0] = x(0)$
$x[1] = x(0,5)$
$x[2] = x(1)$
$x[3] = x(1,5)$

$$x(t) \to x[n]$$

¿Expresión para x[n]?

Si T=0,25 seg		Si ω_s=10π rad/seg		Si T=0,5 y $x(t)=(1/4)^t u(t)$		
x[-1]	= x(-0,25)	x[-1]	= x(-0,2)	x[-1]	= x(-0,5)	= 0
x[0]	= x(0)	x[0]	= x(0)	x[0]	= x(0)	= 1
x[1]	= x(0,25)	x[1]	= x(0,2)	x[1]	= x(0,5)	= 1/2
x[2]	= x(0,50)	x[2]	= x(0,4)	x[2]	= x(1)	= 1/4

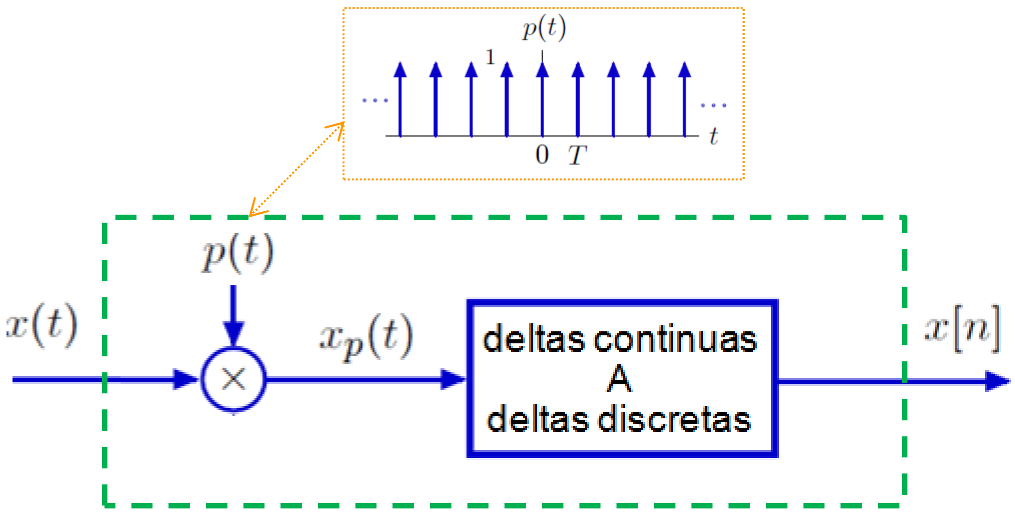
Muestreo en el dominio de la frecuencia

- ¿Relación entre la TFC de $x(t)$ y la TFD de $x[n]$?

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega) \qquad x(t) \rightarrow x[n] = x(nT)$$

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\Omega}) \qquad X(j\omega) \rightarrow X(e^{j\Omega}) = \ ?$$

- Para contestar: vamos a dividir el proceso de muestreo en dos pasos*



Paso 1: de $x(t)$ a $x_p(t)$

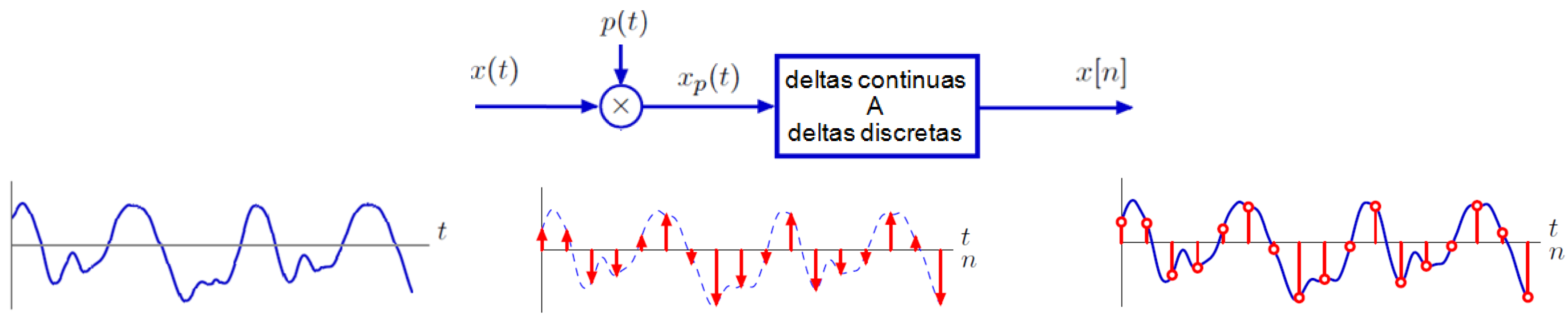
Paso 2: de $x_p(t)$ a $x[n]$

$$\boxed{x[n] = x(nT)}$$

*Importante: los sistemas reales no implementan estos dos pasos, nosotros lo modelamos así para entender mejor lo que está pasando

Muestreo en el dominio de la frecuencia

- Es decir, que vamos a modelar el muestreo como:



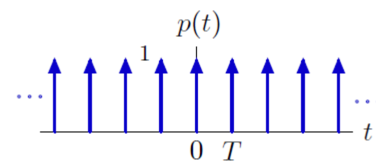
- Una vez que lo hemos separado en dos pasos:
  - Paso 1: relación entre $x(t)$ y $x_p(t)$ ➔ relación entre $X(j\omega) \rightarrow X_p(j\omega)$
  - Paso 2: relación entre $x_p(t)$ y $x[n]$ ➔ relación entre $X_p(j\omega) \rightarrow X(e^{j\Omega})$

Expresiones clave:

$$x[n] = x(nT) \qquad x_p(t) = x(t) \cdot p(t) \qquad p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Paso 1: de SC a secuencia de deltas C

- Sabemos que: $x_p(t) = x(t) \cdot p(t)$



- Analicemos:

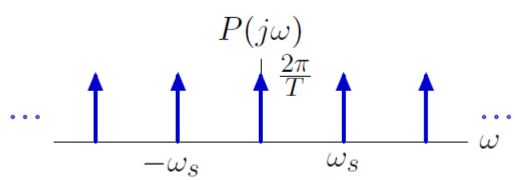
$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$\boxed{X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)}$$

Propiedad de modulación

TFC de señales periódicas (DSFC)

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$



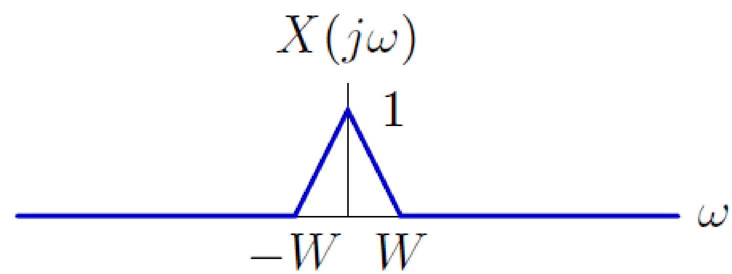
$$\boxed{X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega) * \delta(\omega - k\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))}$$

Paso 1: gráficamente

Multiplicar por un TD en tiempo

⇕

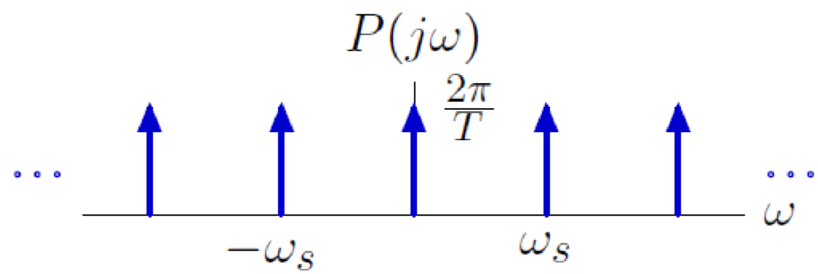
Convolucionar por un TD en frecuencia



Señal limitada en banda:

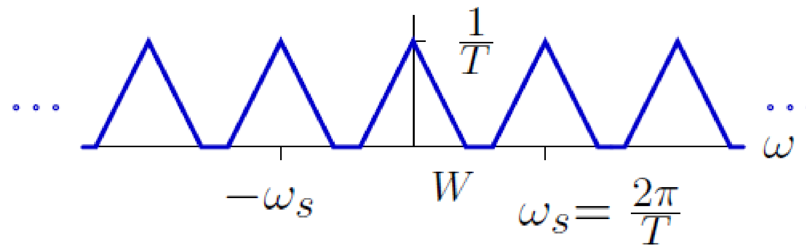
$$X(j\omega) = 0$$

$$|\omega| > W$$



Intuición: muestreo continuo genera réplicas en frecuencia

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$



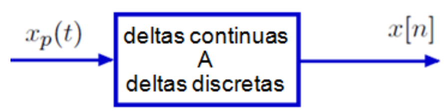
Las réplicas están centradas en la frecuencia de muestreo

Paso 2: de sec. de deltas C a sec. de deltas D

- Tiempo:

$$x_p(t) = x(t)\cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-nT)$$

- Analicemos en frecuencia:



TFC

$$X_p(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-nT)e^{-j\omega t}dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)e^{-j\omega t}dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega nT}$$

TFD

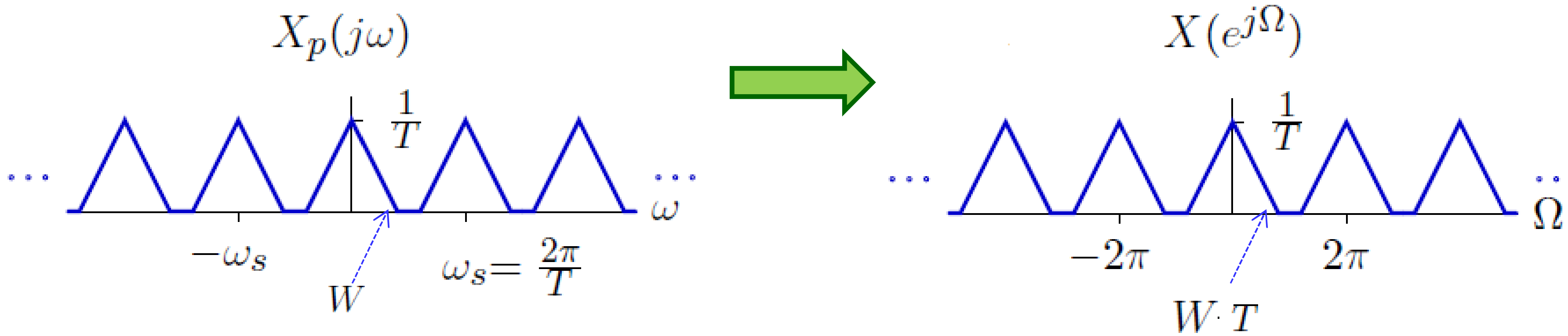
$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

<u>Intuición:</u>
consistencia de unidades

$$X_p(j\omega) = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\omega T} \qquad X(e^{j\Omega}) = X_p(j\omega)\Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}}$$

Paso 2: gráficamente

$$X(e^{j\Omega}) = X_p(j\omega)\big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}}$$



Comentarios:

- Eje de ordenadas: no cambia
- Eje de abcisas:
  - Unidades de [rad/seg] a [rad]
  - Para pasar de la izda la dcha multiplicamos por T ➔ expansión

Muestreo en frecuencia: solución

- ¿Relación entre la TF de *x(t)* y la TF de *x*[*n*]?

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega) \qquad x(t) \rightarrow x[n] = x(nT)$$

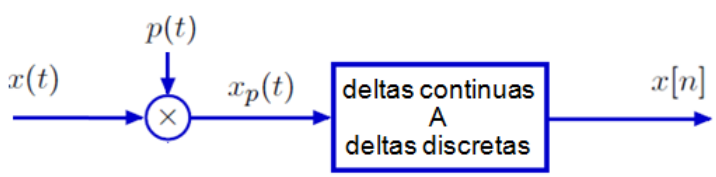
$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\Omega}) \qquad X(j\omega) \rightarrow X(e^{j\Omega}) = \text{?}$$

- Paso 1 + Paso 2

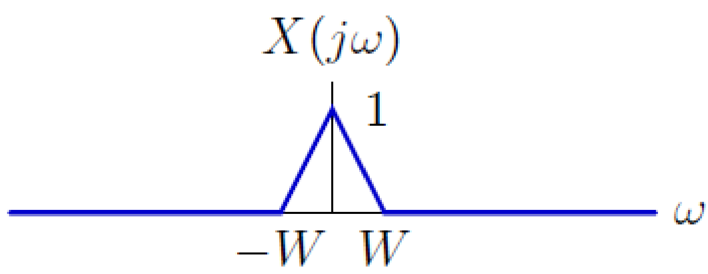
$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

$$X(e^{j\Omega}) = X_p(j\omega)\big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}}$$

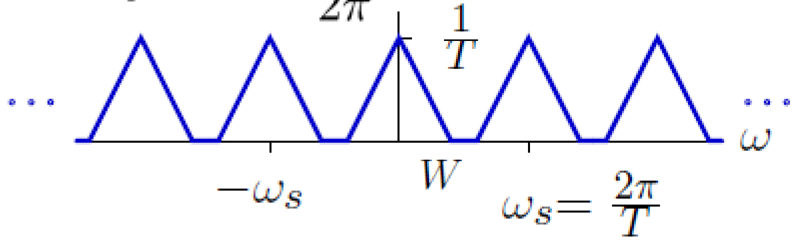
$$\boxed{X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\frac{\Omega}{T} - k\frac{2\pi}{T}\right)\right)}$$



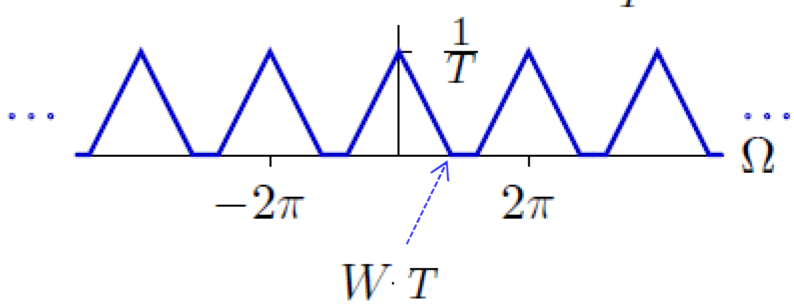
Muestreo en frecuencia: solución (gráficamente)



$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$



$$X(e^{j\Omega}) = X_p(j\omega)\Big|_{\omega=\frac{\Omega}{T}}$$



Efectos:

- Periódica con periodo 2π
- Divide su amplitud por un factor T
- Se expande por un factor T

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\frac{\Omega}{T} - k\frac{2\pi}{T}\right)\right)$$

Recapitulemos

- Preguntas clave:
  - A) ¿Cuándo podemos recuperar la SC a partir de la SD?
  - B) ¿Cómo muestreamos?

- Clave: MODELAR + ANALIZAR + DISEÑAR

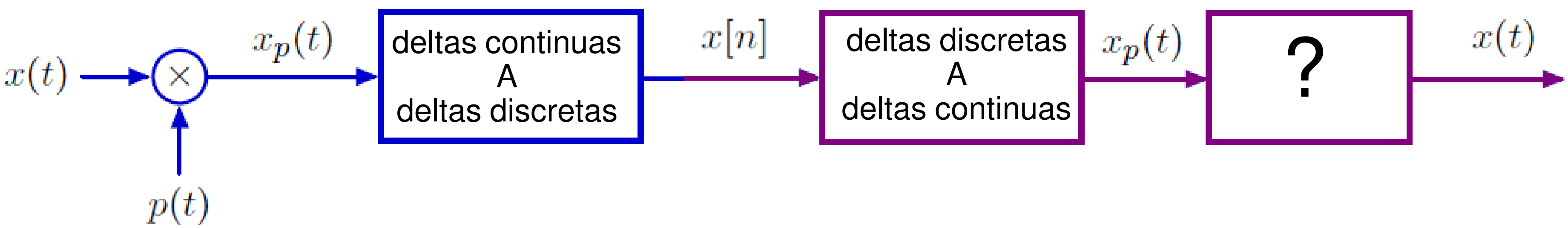
- Durante la clase de hoy:
  1. Modelo del muestreo en el dominio del tiempo
  2. Análisis del muestreo en el dominio de la frecuencia
  3. Reconstrucción en el dominio de la frecuencia
  4. Reconstrucción en el dominio del tiempo
  5. Teorema de muestreo

Ubicándonos

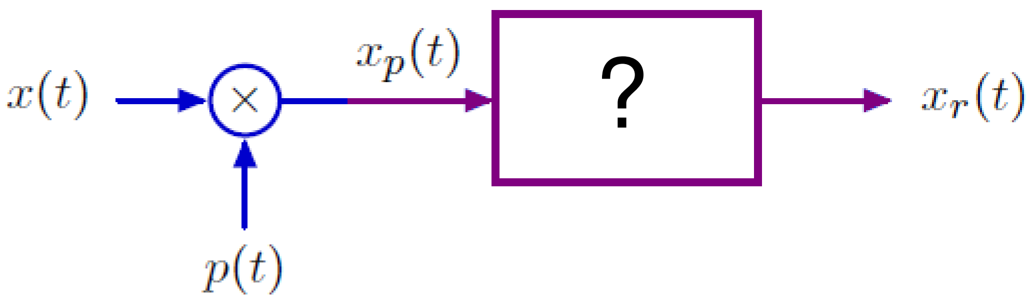
- **Tema 3: Muestreo**
  - **3.1 Muestreo de señales continuas**
    - 3.1.0 Introducción
    - 3.1.1 Muestreo en el dominio del tiempo y de la frecuencia
    - **3.1.2 Recuperando la señal continua: interpolación**
    - 3.1.3 Problemas y aspectos prácticos
  - 3.2 Procesamiento en tiempo discreto de señales continuas
  - 3.3 Muestreo de señales discretas: diezmado e interpolación

Recuperando la señal continua

- ¿De SD a SC? ➔ Camino contrario al de SC a SD ➔ Interpolar



- Bastará con que analicemos

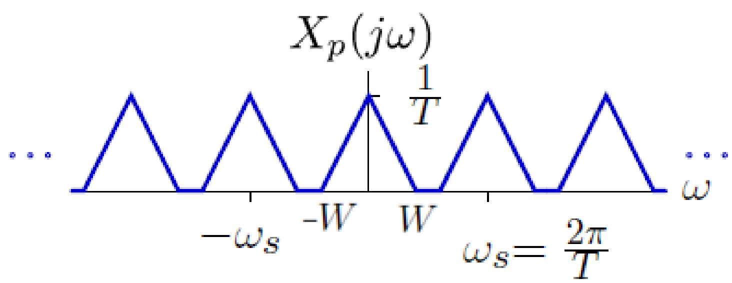


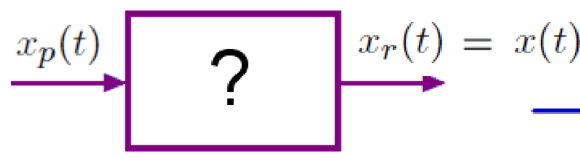
Objetivo de diseño:

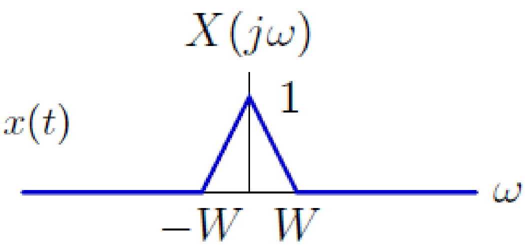
$$x_r(t) = x(t)$$

- Primero lo analizaremos en el dominio de la frecuencia

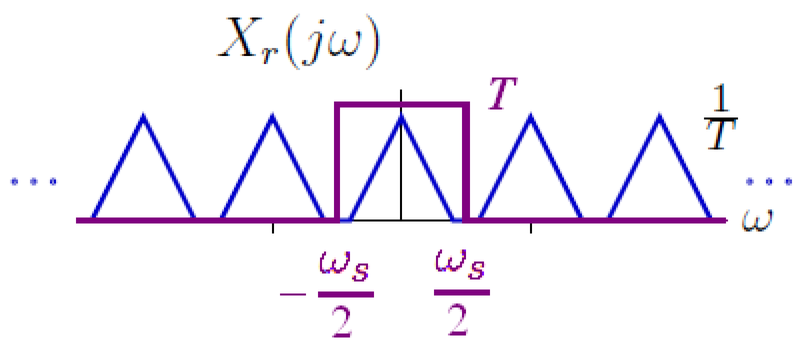
Recuperando la señal continua: gráficamente







- **Queremos** (subrayado): misma forma, eliminar las réplicas, cambiar la amplitud ➔
  - Solución: Filtro paso bajo



$$H(j\omega) = \begin{cases} T & \text{si } \; |\omega| < \omega_s/2 \\ 0 & \text{si } \; |\omega| \geq \omega_s/2 \end{cases}$$

$$X_r(j\omega) = H(j\omega) X_p(j\omega)$$

Recuperando la señal continua: tiempo

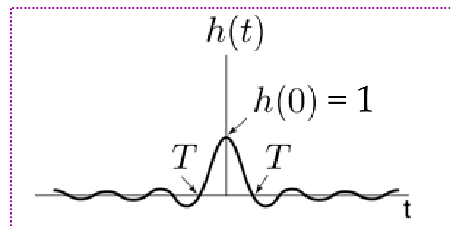
$$x_p(t) \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow x_r(t) = x(t)$$

$$H(j\omega) = \begin{cases} T & \text{si} \quad |\omega| < \omega_s/2 \\ 0 & \text{si} \quad |\omega| \geq \omega_s/2 \end{cases}$$

$$X_r(j\omega) = H(j\omega)X_p(j\omega)$$

- Filtro paso bajo ➔ Convolucionar con la respuesta al impulso

$$x(t) = x_p(t) * h(t) \quad \text{donde} \quad h(t) = \frac{T\sin(\pi t/T)}{\pi t}$$

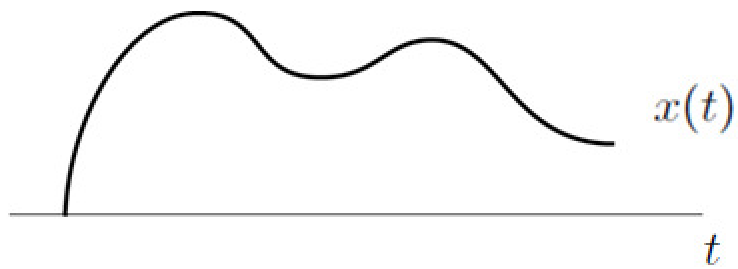


$$= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) \right) * h(t)$$

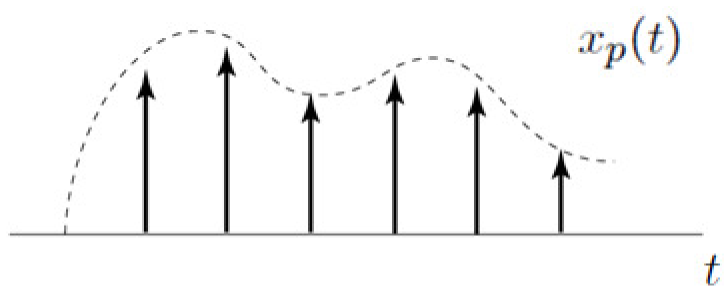
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \, \frac{T\sin(\pi(t/T-n))}{\pi(t-nT)}$$

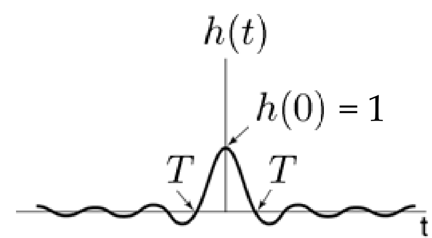
Recuperando la SC: tiempo gráficamente

SC original

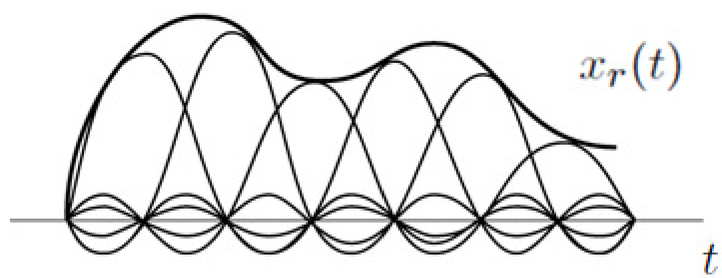


Muestreada



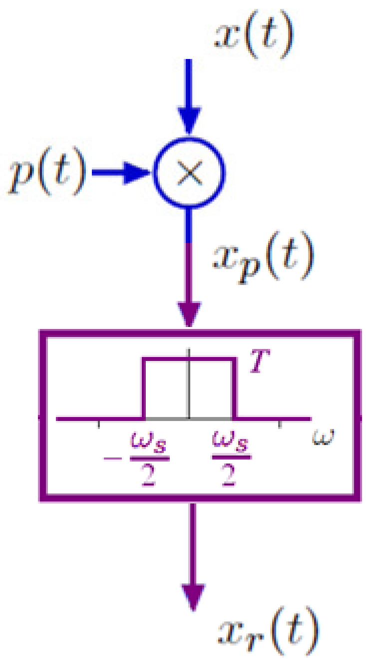


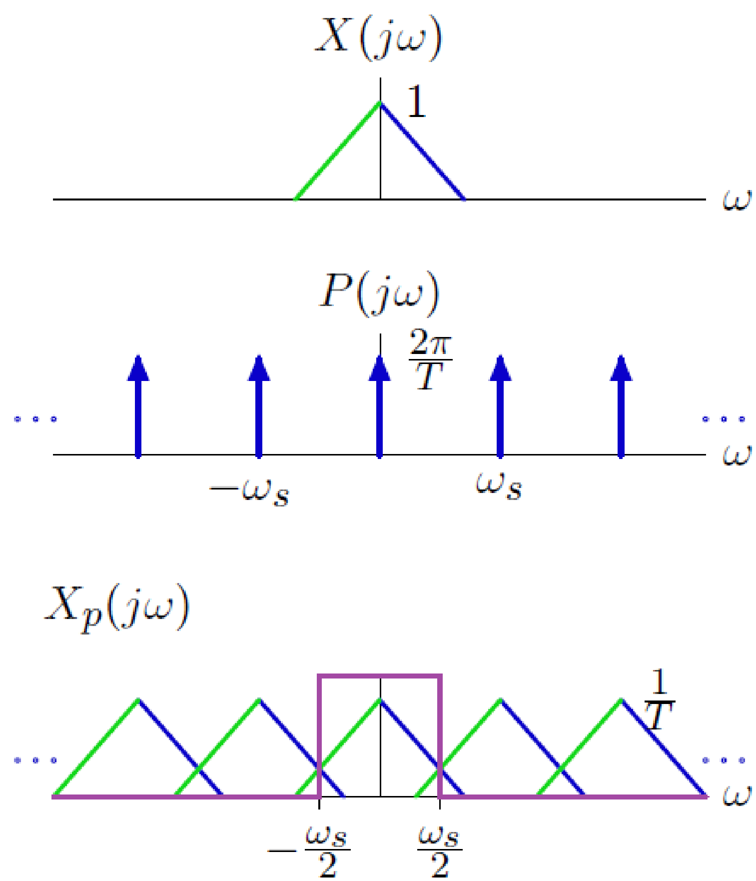
Reconstruida (tras pasar por FPB)



Problemas en la reconstrucción

- Pero… ¿podemos siempre recuperar la señal original?



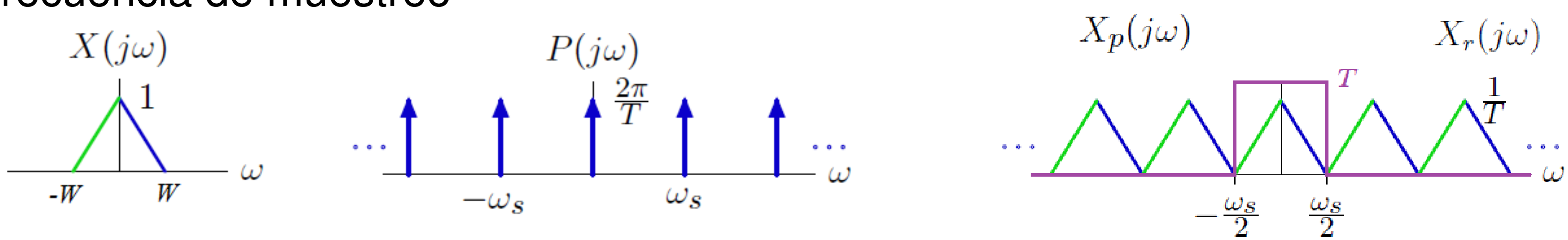


¡Solapamiento espectral!

$$X_r(j\omega) = H(j\omega)X_p(j\omega) \neq X(j\omega)$$

Solapamiento y Teorema de muestreo

- Podremos recuperar la señal original en función del BW de la señal y de la frecuencia de muestreo



  - ¿Qué pasa si W es muy grande? ➔ No podemos
  - ¿Qué pasa si la señal no es de banda limitada? ➔ No podemos

- **<u>Teorema de muestreo (Nyquist-Shannon)</u>:**

Sea $x(t)$ una señal limitada en banda, es decir $x(t)$ satisface $X(j\omega) = 0 \ \forall \ |\omega| > W$

Entonces, $x(t)$ puede recuperarse a partir de sus muestras $x[n]=x(nT)$ si se cumple que

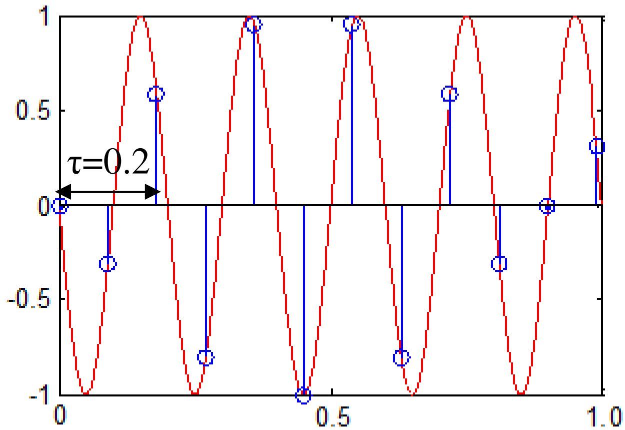
$$\omega_s/2 > W \Rightarrow \omega_s > 2W \Rightarrow T < \pi/W$$

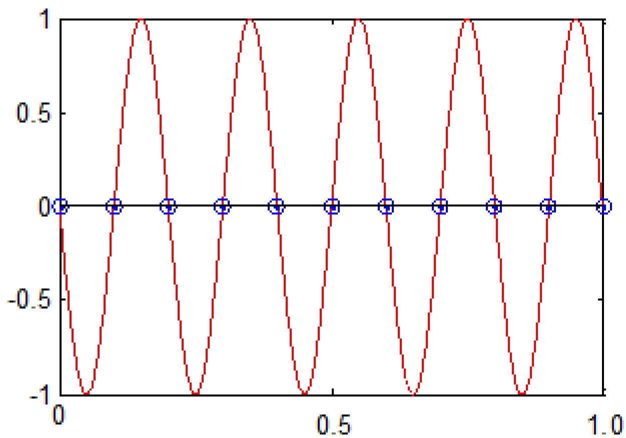
<u>¡Hay que muestrear a más del doble del ancho de banda de la señal!</u>

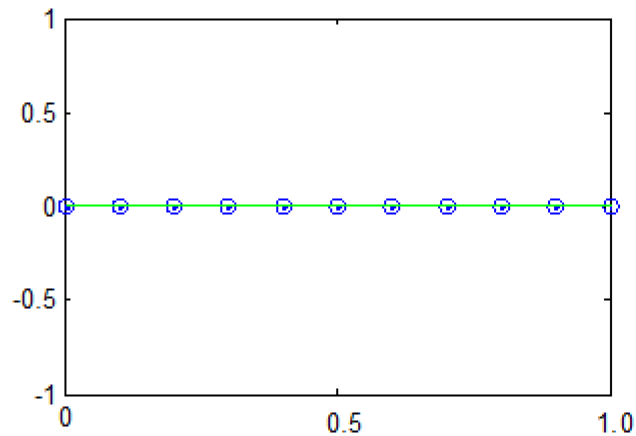
Ejemplos de señales mal muestreadas

- Con una única sinusoide:

$$W=2\pi/\tau \rightarrow \omega_s>2W \rightarrow 2\pi/T>4\pi/\tau \rightarrow T<\tau/2$$



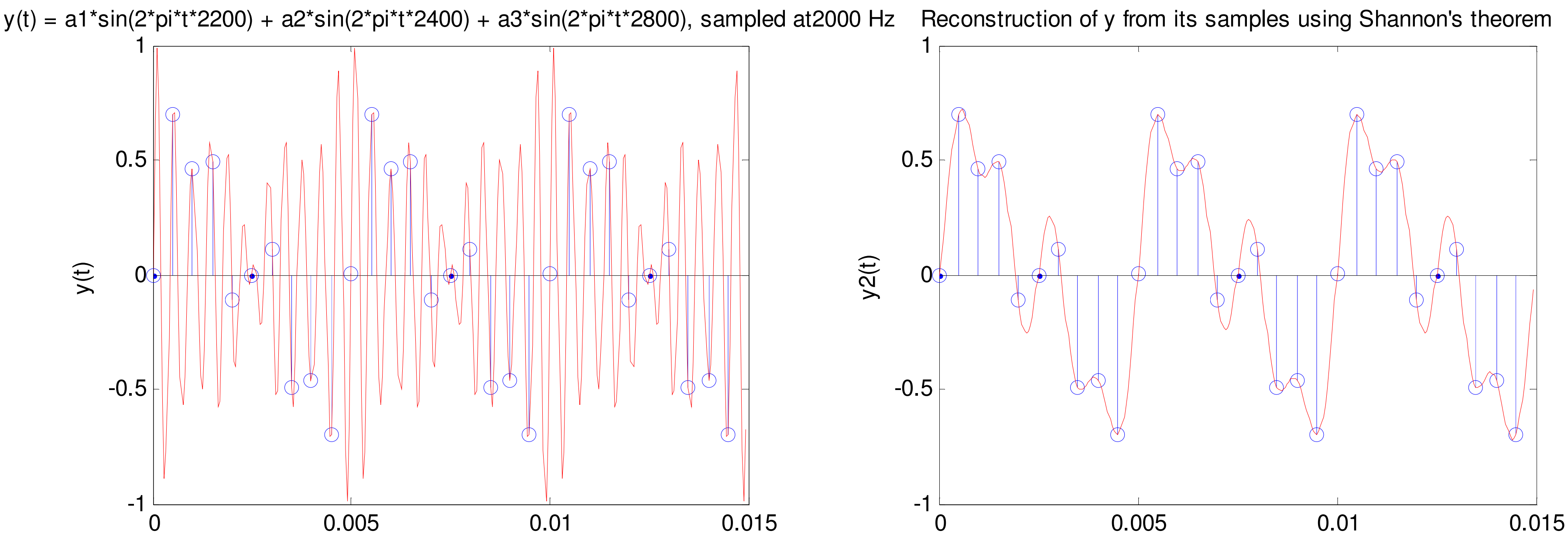




No se cumple teorema de muestreo (por muy poco) ➔ NO FUNCIONA

Ejemplos de señales mal muestreadas

- Con suma de sinusoides:

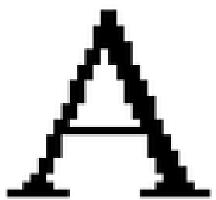


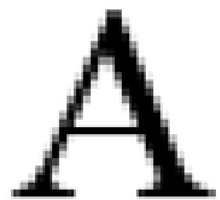
- ➢ Muestreamos siempre a 2000Hz ➔ Tendremos problemas en cuanto la SC tenga un BW mayor que 1000Hz

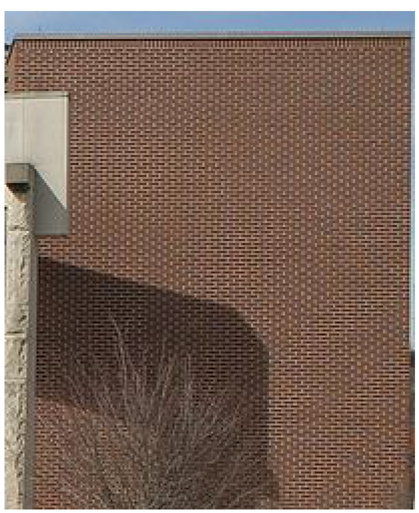
Demo disponible en:
http://www-mmdb.iai.uni-bonn.de/lehre/BIT/ss03_DSP_Vorlesung/matlab_demos/index.html

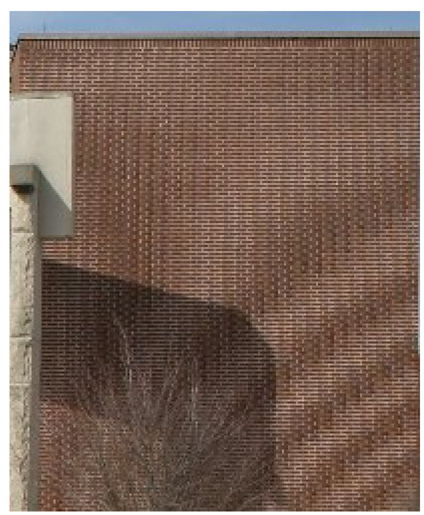
Ejemplos de señales mal muestreadas

- ❑ Con imágenes:









- ❑ Con vídeos:

http://www.youtube.com/watch?v=UiTUiop9etk&feature=related

Muestreo e interpolación ideal: resumen

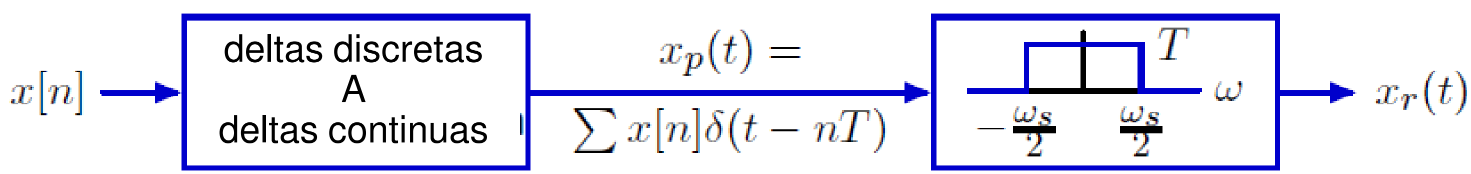
- Muestreo interfaz continuo-discreto: ¿cómo muestreamos? ¿cuándo podemos recuperar la SC a partir de la SD?

- Para entender el proceso de muestreo: M1) Muestreo en tiempo 2) Muestreo en frecuencia 3) Reconstrucción en frecuencia 4) Reconstrucción en tiempo

- <u>Tres resultados fundamentales para recordar:</u>

- **Muestreo** $x(t) \rightarrow x[n] = x(nT)$

- **Recons-trucción**



- **Teorema de muestreo** Si $X(j\omega) = 0 \ \forall \ |\omega| > \frac{\omega_s}{2}$, entonces $x_r(t) = x(t)$

Clave: $X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\frac{\Omega}{T} - k\frac{2\pi}{T}\right)\right)$

Ubicándonos

- **Tema 3: Muestreo**
  - **3.1 Muestreo de señales continuas**
    - 3.1.0 Introducción
    - 3.1.1 Muestreo en el dominio del tiempo y de la frecuencia
    - 3.1.2 Recuperando la señal continua: interpolación
    - **3.1.3 Problemas y aspectos prácticos**
  - 3.2 Procesamiento en tiempo discreto de señales continuas
  - 3.3 Muestreo de señales discretas: diezmado e interpolación

- Comentarios:
  - Material de lectura:
    - [BB2: Opp&Sch] Secs. 3.4 y 3.7; [BB3: McC&Sch&Yod] Secs. 4.3, 4.4; [BC3: Cha] Secs. 7.4, 7.5

Problemas y aspectos prácticos

- Potenciales problemas y cuestiones prácticas que vamos a estudiar
  - A) Solapamiento espectral y filtros antisolapamiento
  - B) Interpolación subóptima
  - C) Cuantificación

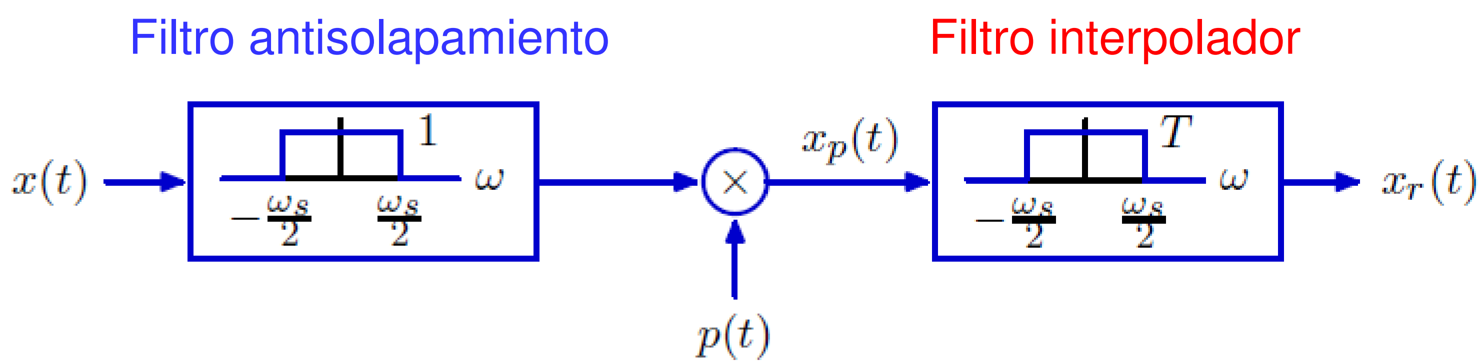
- Comenzando por A), el teorema de muestreo no decía que si:
  - La señal está limitada en banda
  - Muestreamos al doble del ancho de banda de la señal
- Podemos recuperar la señal original a partir de sus muestras

- ¿Qué ocurre si alguna de las dos condiciones no se cumple? ➔ Solapamiento (Aliasing) ➔ La señal recuperada y original no coinciden

- ¿Hay alguna manera de mitigarlo? ¿Alguna manera de que esas señales “se parezcan” más.

Filtro antisolapamiento

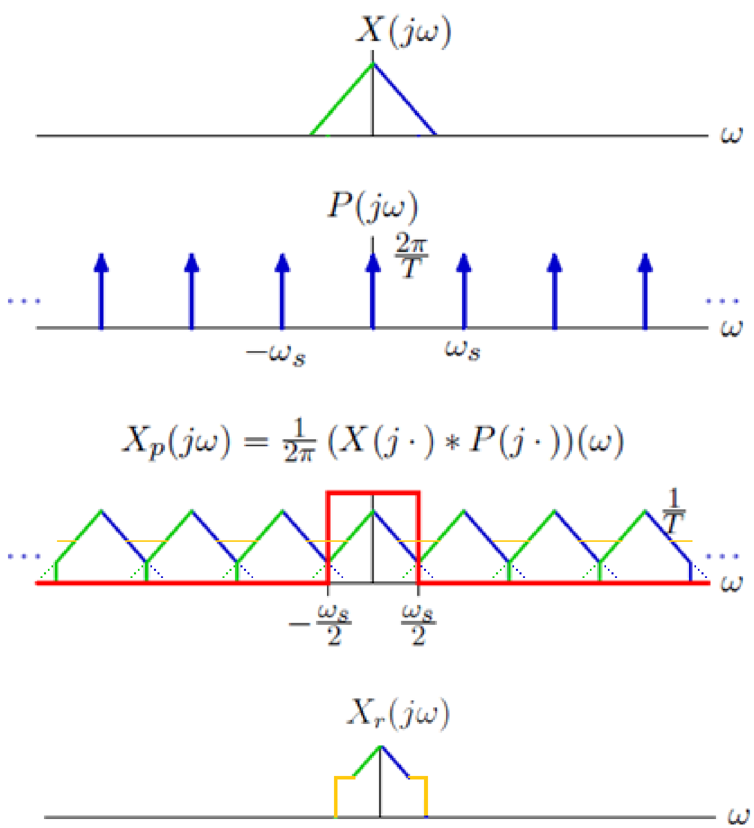
- Idea básica: antes de muestrear filtramos paso bajo de manera que garantizamos que no haya solapamiento



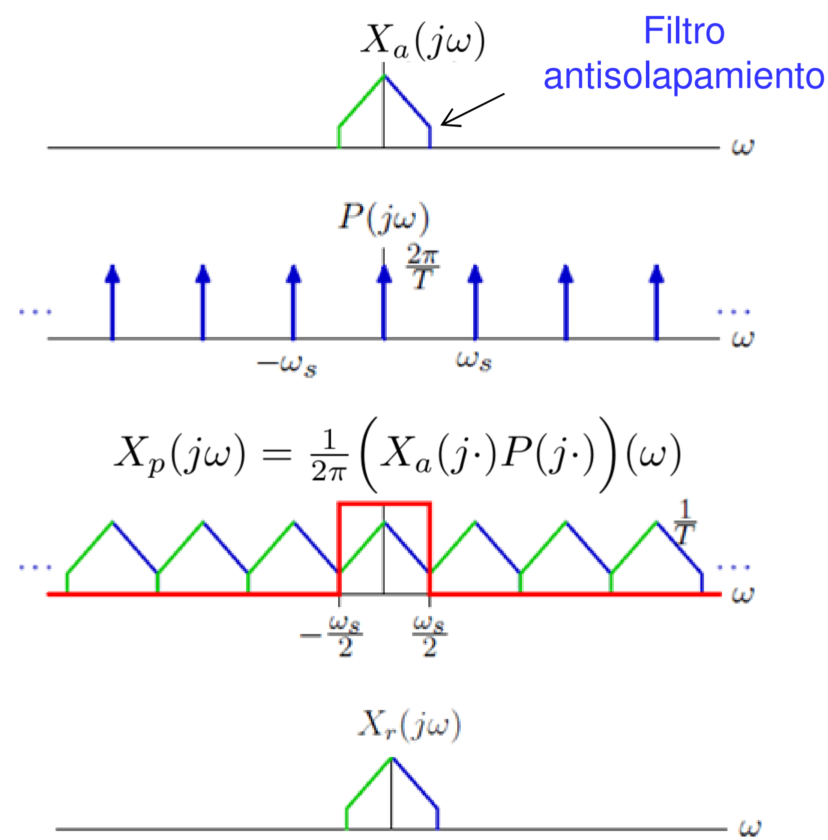
- ¿Por qué esto consigue que la señal se parezca más a la original? ➔ Toda la distorsión (diferencia) se debe al filtro paso bajo, pero el muestreo en sí ya no produce distorsión porque ya no hay solapamiento ➔ Véase la transparencia siguiente

Filtro antisolapamiento

- Sin filtro antisolapamiento



Con filtro antisolapamiento

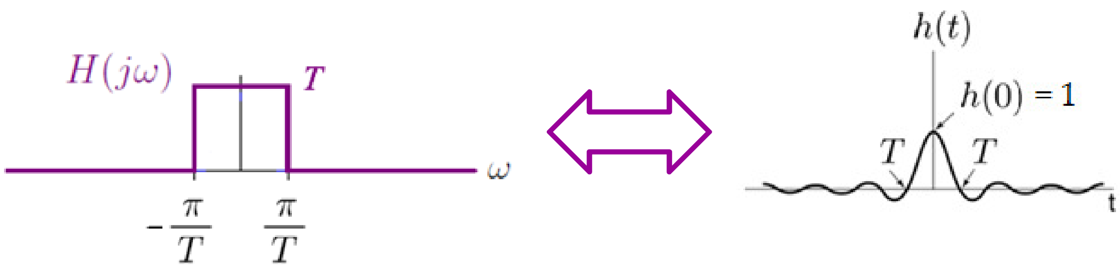


-las frecuencias más altas de $x(t)$ se pierden
-la señal original y recuperada coinciden en los instantes de muestreo: $x(nT)=x_r(nT)$

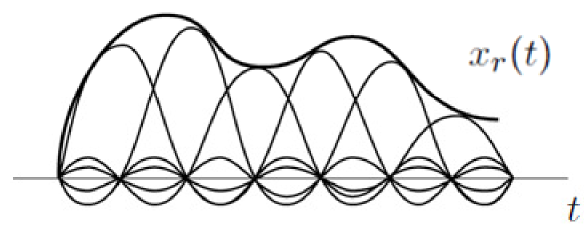
-se parece más a la señal original
-la señal original y recuperada no coinciden en los instantes de muestreo

Interpolación subóptima

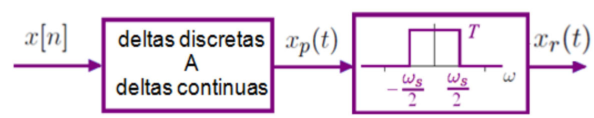
- Habíamos llegado a la conclusión de que el interpolador ideal es:



En el tiempo, esto supone que utilizamos sincs de anchura T y cuya amplitud se modifica en función de la muestra correspondiente



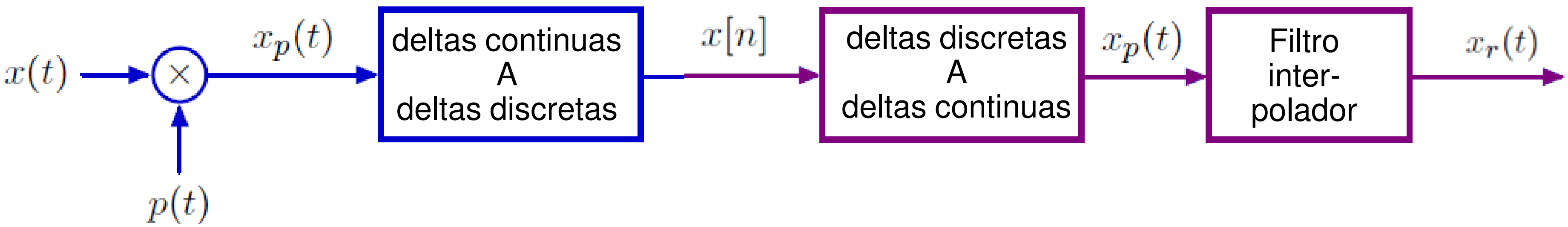
- Problemas:
  - La sinc tiene longitud infinita
  - La sinc es anticausal



- Posibles soluciones:
  - Utilizar sincs de longitud finita y “retrasar” la interpolación de la señal
  - Utilizar otros interpoladores
  - “Precio a pagar” la señal recuperada no coincidirá con la original

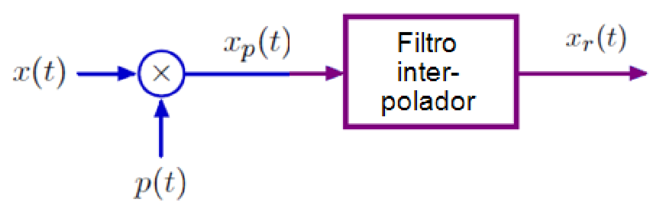
Interpolación subóptima

- ¿Cómo vamos a analizar el efecto de esos nuevos interpoladores?
  - Hay que entender lo que pasa tanto en tiempo como en frecuencia
  - Mantendremos la estructura básica de interpolación como



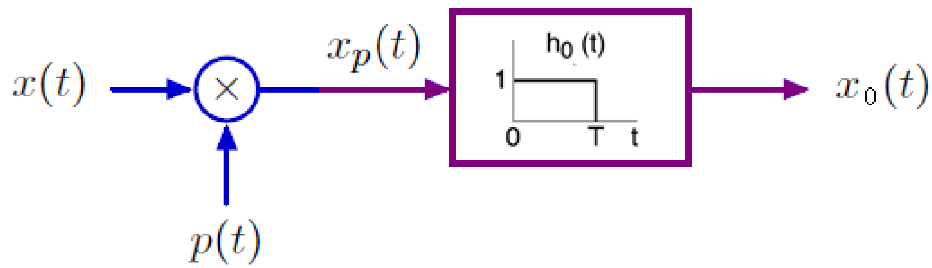
- Objetivos:
  - Que la señal recuperada (interpolada) se parezca a la original
  - Que el filtro interpolador sea sencillo de construir

- Como ocurría en el caso ideal, bastará con que analicemos:

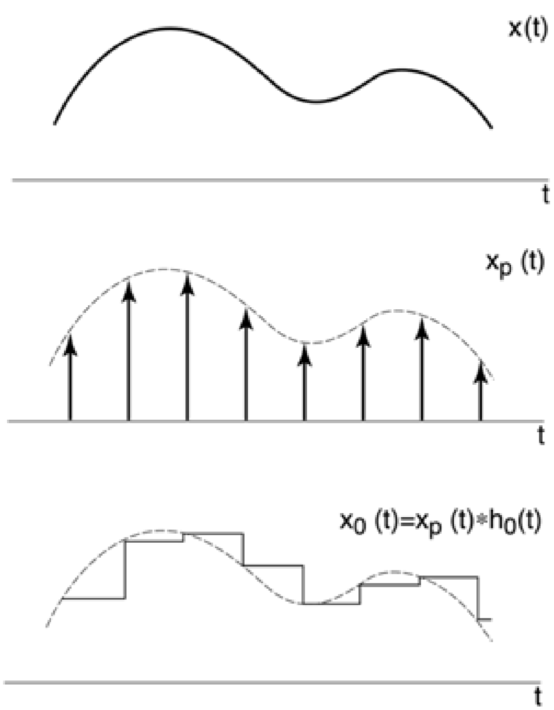


Caso 1: interpolador de orden cero

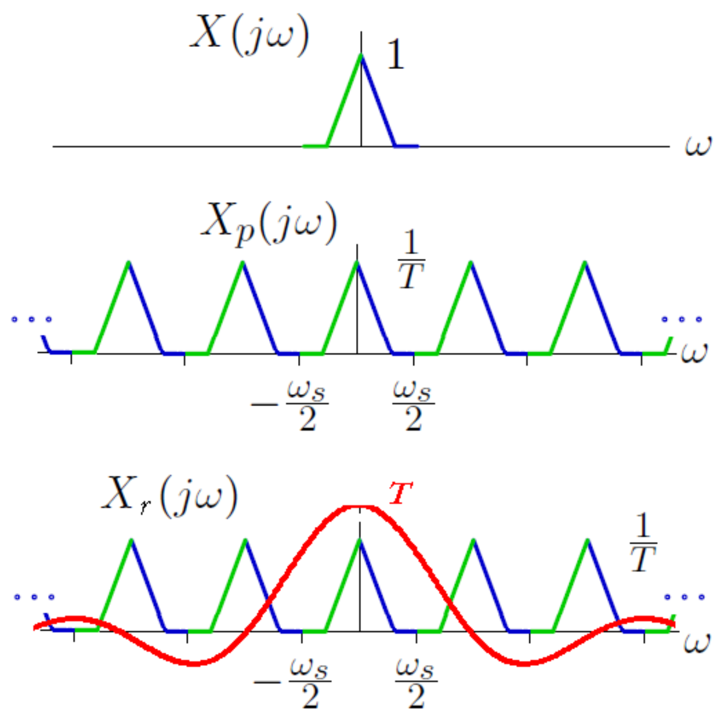
- ¿Cuál es la estructura de un interpolador de orden cero?



Dominio del tiempo

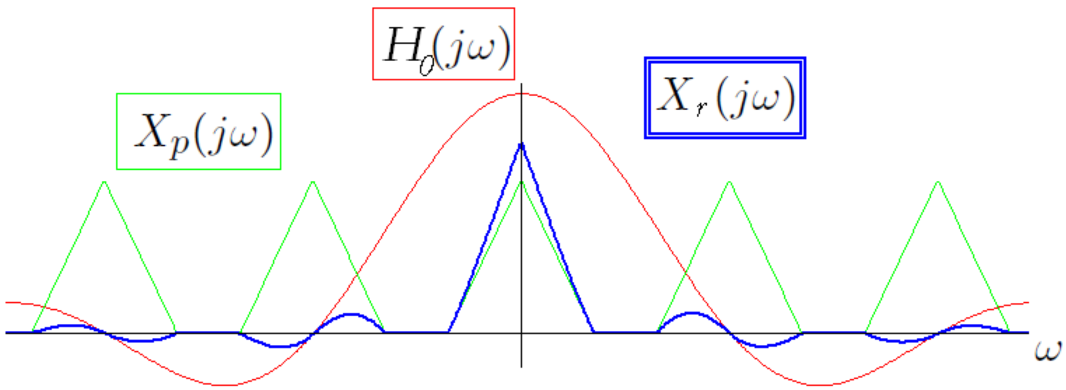


Dominio de la frecuencia



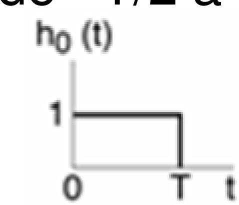
TF de un pulso de anchura T es una sinc de anchura $4\pi/T$

Caso 1: interpolador de orden cero



- Dos efectos principales:
  - Se nos "cuelan" frecuencias altas (lógico porque la señal en el tiempo tiene variaciones bruscas)
  - La réplica principal se distorsiona ligeramente (menor distorsión cuanto más hayamos sobremuestreado la señal original) ➔ Si usamos interpolador de orden cero es mejor muestrear más rápido

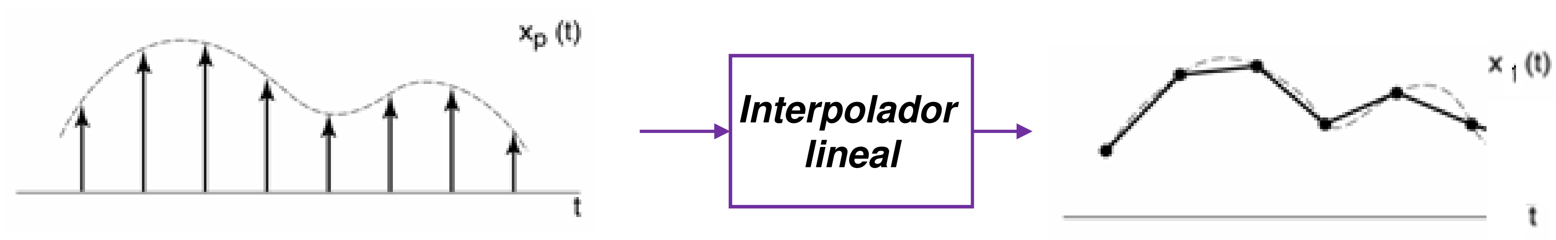
- En lugar de ir de 0 a T, el filtro interpolador puede ir de –T/2 a T/2 (a este interpolador se le llama "vecino más cercano")



Caso 2: interpolador de orden uno

- Interpolador de orden uno = Interpolador lineal
  - ¿En qué consiste? ➔ Unir dos puntos (amplitudes) con una recta
  - Es la interpolación más “intuitiva en el dominio del tiempo”
  - Es la que utiliza Matlab cuando hacemos un plot

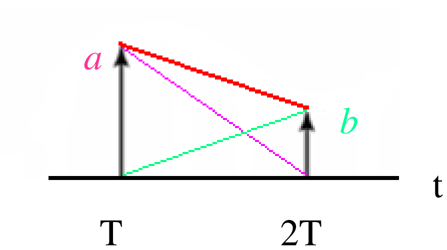
Dominio del tiempo



- Preguntas:
  - ¿Cuál es la estructura (modelo) del interpolador lineal?
  - ¿Cuál es el efecto en frecuencia?

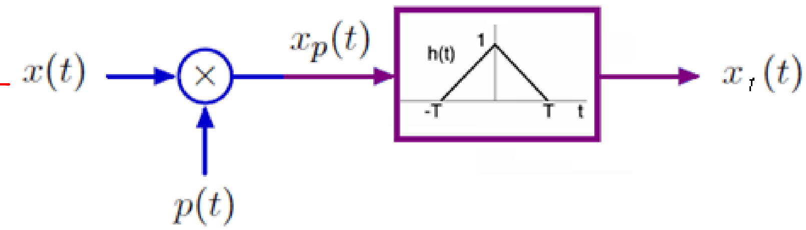
Caso 2: interpolador de orden uno

- ¿Cuál es la estructura de un interpolador de orden uno?

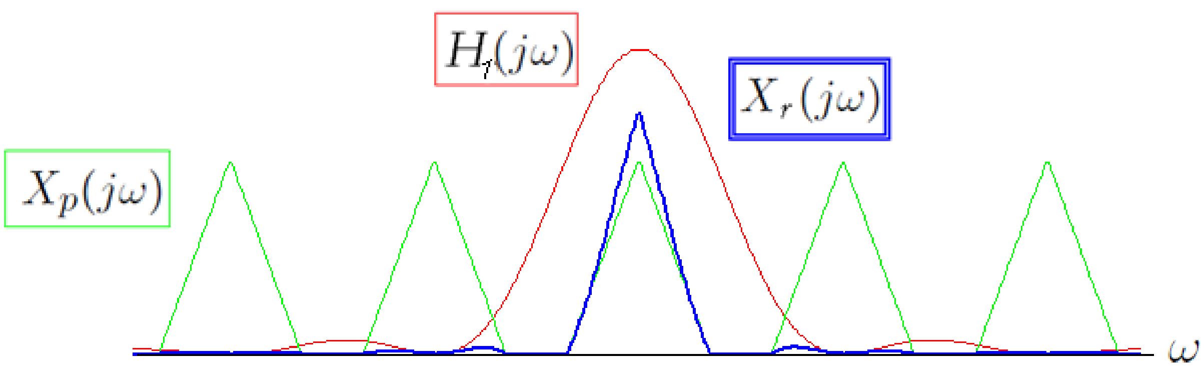


¿Cuánto vale la señal en t=1.4T?

$x_1(1.4T) = 0.6 \cdot a + 0.4 \cdot b$



- ¿TF de un triángulo de anchura 2T? ➔ Cuadrado de la TF de un pulso rectangular de anchura T ➔ Sinc de anchura $4\pi/T$ al cuadrado



-Se vuelven a “colar” frecuencias altas (pero menos)
-Distorsión de la primera réplica algo mayor
-Si se sobremuestrea (doble/triple del mínimo) ➔ Calidad OK

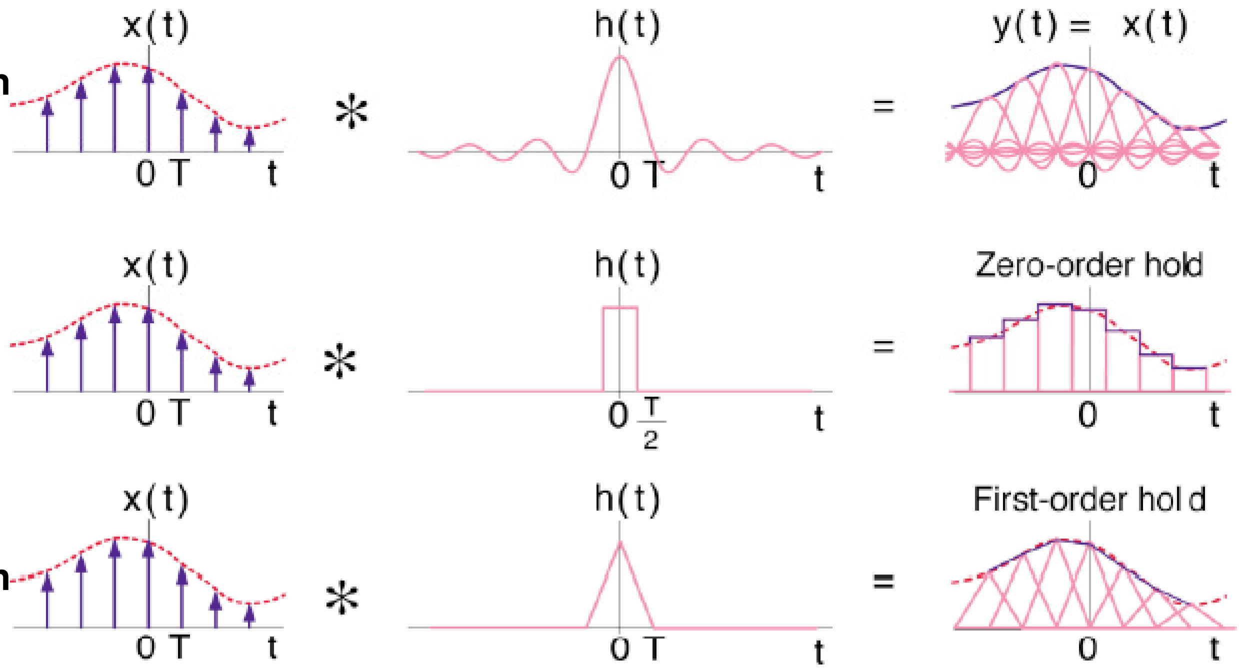
Interpolación subóptima: resumen

- En tiempo

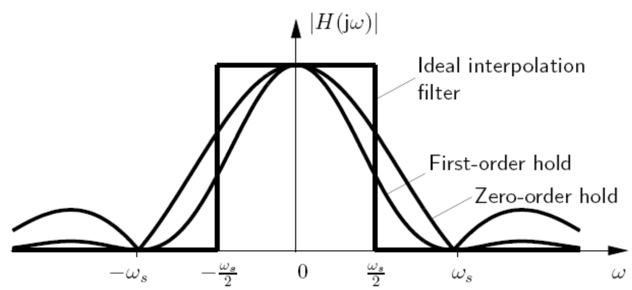
Interpolación ideal

Interpolación de orden cero

Interpolación lineal



- En frecuencia:



Interpolación subóptima: ejemplo

- ❑ Imagen (señal en 2D)

Hay muchas otras alternativas: splines, pulsos gaussianos ➔ Véase Sec. 4.4 de [BB3 – “Signal Processing First”]

Imagen original

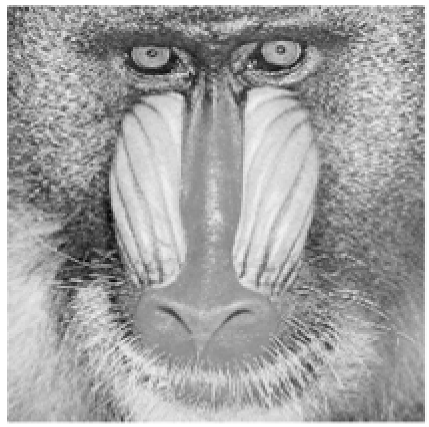


Imagen reconstruida con un interpolador de orden cero

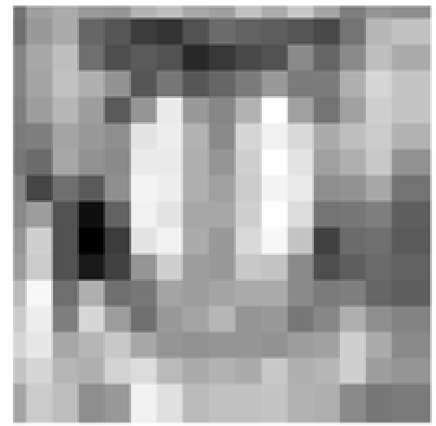


Imagen muestreada

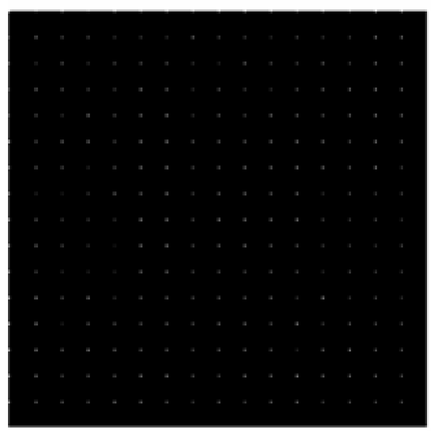
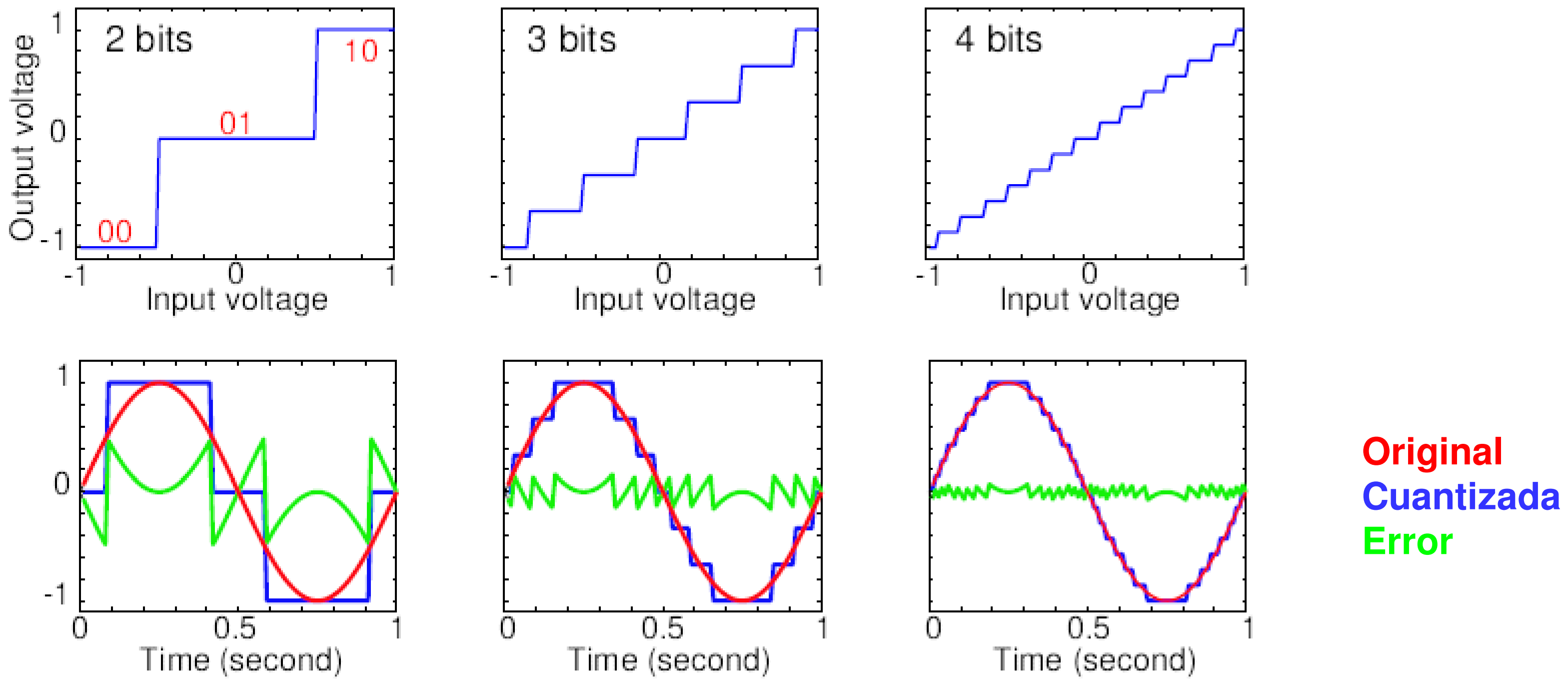


Imagen reconstruida con un interpolador lineal

Discretizando la amplitud: cuantificación

- Para almacenar y procesar digitalmente señales: no sólo hay que discretizar el tiempo, sino también cuantificar (cuantizar) su amplitud



Cuantificación

- Ejemplo: CD de audio (todavía se usan??)

$$2\,\text{channels} \times 16\,\frac{\text{bits}}{\text{sample}} \times 44,100\,\frac{\text{samples}}{\text{sec}} \times 60\,\frac{\text{sec}}{\text{min}} \times 74\,\text{min} \approx 6.3\,\text{G bits} \approx 0.78\,\text{G bytes}$$

- En la práctica hay muchas maneras de cuantificar, la mayoría más sofisticada que la ilustrada en las gráficas anteriores
  - Cuantificación uniforme vs. no uniforme
  - Cuantificación diferencial

Importante: análisis y caracterización del error de cuantificación

- Desde un punto de vista más general, codificación de fuente:
  - BMP vs. JPG
  - Se verá en más detalle en Comunicaciones Digitales (Transmisión Digital)

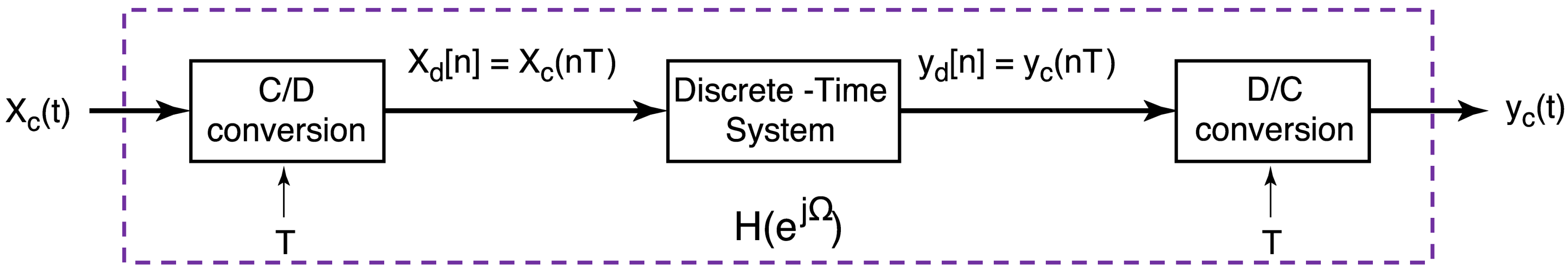
Ubicándonos

- **Tema 3: Muestreo**
  - 3.1 Muestreo de señales continuas
    - 3.1.0 Introducción
    - 3.1.1 Muestreo en el dominio del tiempo y de la frecuencia
    - 3.1.2 Recuperando la señal continua: interpolación
    - 3.1.3 Problemas y aspectos prácticos
  - **3.2 Procesamiento en tiempo discreto de señales continuas**
  - 3.3 Muestreo de señales discretas: diezmado e interpolación

- Comentarios:
  - Bibliografía básica: [BB2: Opp&Sch] Cap. 3, Secs. 3.4 (la 3.5 está relacionada, aunque nosotros no la tratamos)

Procesamiento discreto de señales continuas

- ¿Cómo se procesa habitualmente una señal continua?
  - Se muestrea y se le "mete" a un ordenador/DSP
  - Se procesa en discreto
  - Se vuelve a transformar en una señal continua

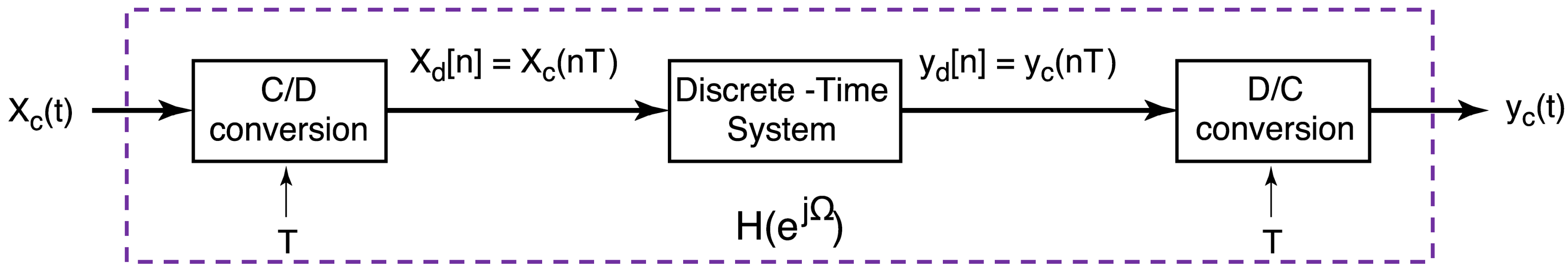


- ¿Por qué? ➔ Más barato, más sencillo, más flexible, mayor control,…

- Entenderlo en el sistema del tiempo parece fácil, pero
  - ¿Es un problema que haya "trozos" en continuos y otros en discreto?
  - ¿Qué ocurre en el dominio de la frecuencia?
  - ¿Cuál es realmente el sistema continuo equivalente? ➔ Dominio de la frecuencia

Procesamiento discreto de señales continuas

- Vamos a encontrar primero la relación en el dominio de la frecuencia y luego la “traduciremos” al dominio del tiempo

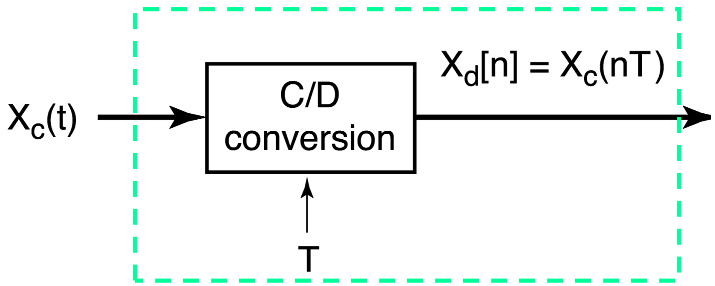


- Dividiremos el análisis en tres pasos (uno por bloque):
  - (1) Expresar la TF de $x_d[n]$ en función de la TF de $x_c(t)$
  - (2) Expresar la TF de $y_d[n]$ en función de la TF de $x_d[n]$
  - (3) Expresar la TF de $y_c(t)$ en función de la TF de $y_d[n]$
  - Juntando (1)+(2)+(3) ➔ Expresaremos la TF de $y_c(t)$ en función de la TF de $x_c(t)$ ➔ Respuesta en frecuencia del sistema continuo

- Los pasos (1) y (3) ya los hemos analizado en el apartado anterior, “lo novedoso” es el paso (2) que es muy sencillo

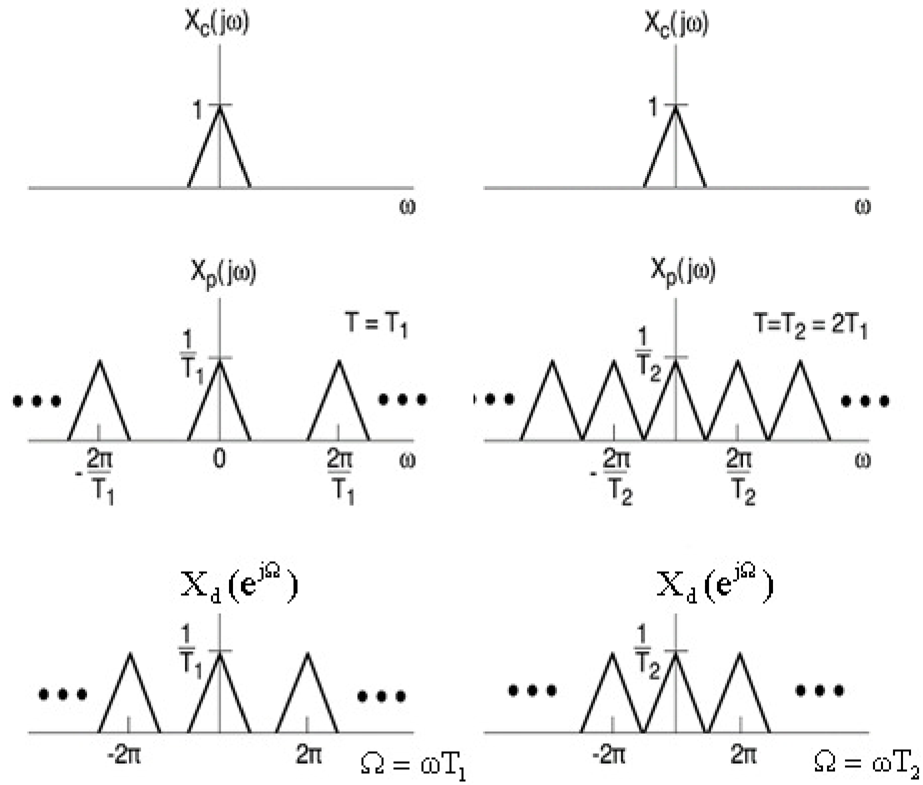
Procesamiento discreto SC: Paso (1)

- (1) Expresar la TF de $x_d[n]$ en función de la TF de $x_c(t)$



➢Si revisamos las transparencias de la sección 3.1.1

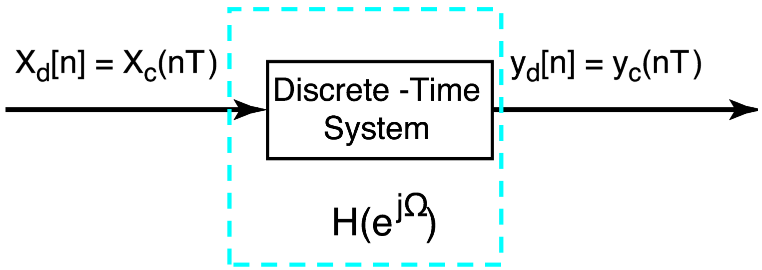
$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\Omega}{T} - k\frac{2\pi}{T}\right)\right)$$



Dividimos la amplitud por T, el eje lo multiplicamos por T y creamos réplicas en 2π

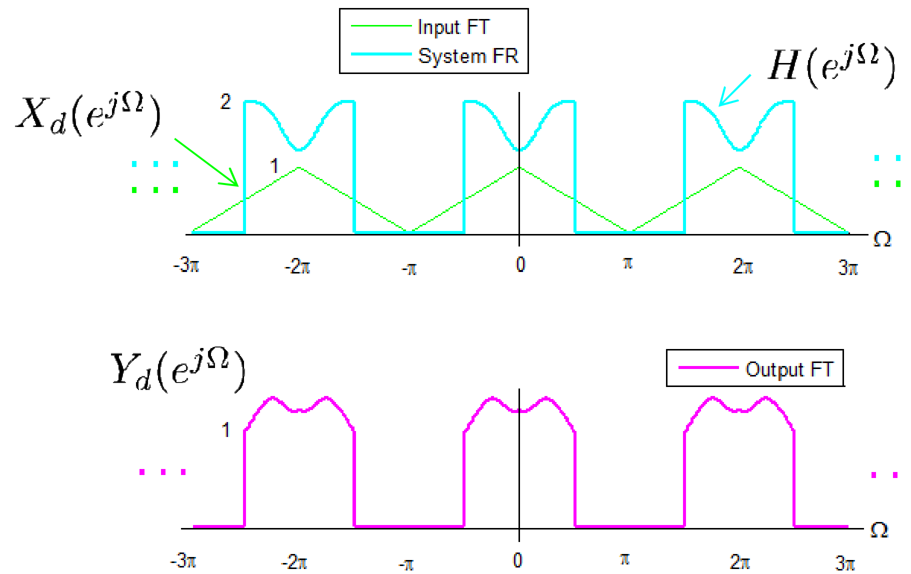
Procesamiento discreto SC: Paso (2)

- (2) Expresar la TF de $y_d[n]$ en función de la TF de $x_d[n]$



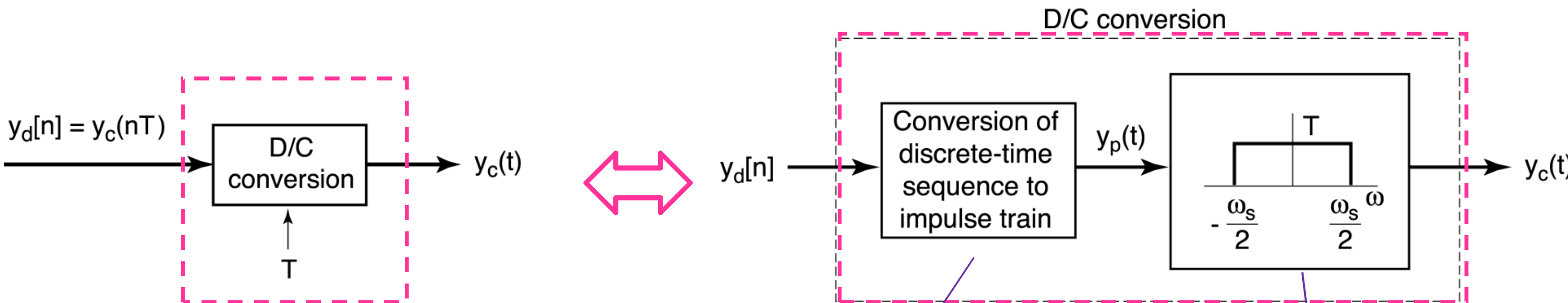
- Facilísimo: La TF de la salida el la TF de la entrada por la RF del filtro

$$Y_d(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})X_d(e^{j\Omega})$$



Procesamiento discreto SC: Paso (3)

- (3) Expresar la TF de $y_c(t)$ en función de la TF de $y_d[n]$



$$Y_p(j\omega) = Y_d(e^{j\omega T})$$

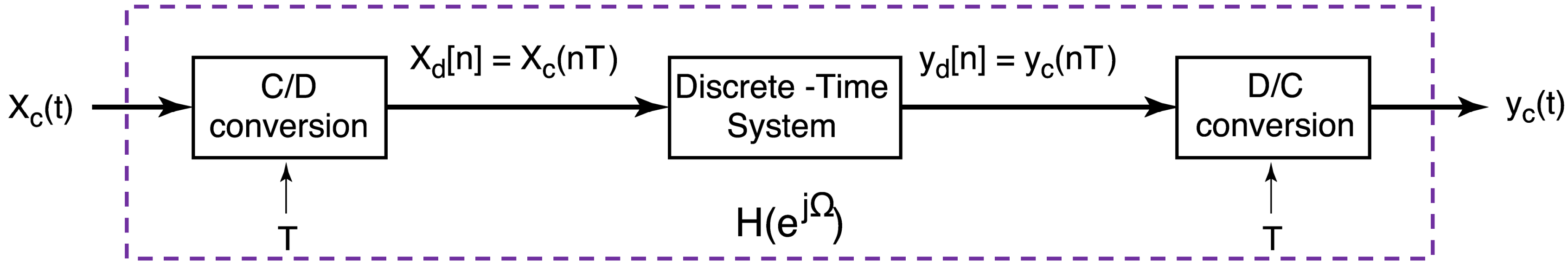
$$Y_c(j\omega) = \begin{cases} T\, Y_p(j\omega), & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

- Si revisamos las transparencias de la secciones 3.1.1 y 3.1.2

$$\boxed{Y_c(j\omega) = \begin{cases} T Y_d(e^{j\omega T}), & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & \text{resto} \end{cases}}$$

Procesamiento discreto de SC: Pasos (1,2,3)

- Esquema básico



- **(1)** Expresar la TF de $x_d[n]$ en función de la TF de $x_c(t)$

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\Omega}{T} - k\frac{2\pi}{T}\right)\right) \quad \star$$

- **(2)** Expresar la TF de $y_d[n]$ en función de la TF de $x_d[n]$

$$Y_d(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})X_d(e^{j\Omega}) \quad \star$$

- **(3)** Expresar la TF de $y_c(t)$ en función de la TF de $y_d[n]$

$$Y_c(j\omega) = \begin{cases} TY_d(e^{j\omega T}), & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad \star$$

Procesamiento discreto de SC: Pasos (1,2,3)

- Si no hay solapamiento, al juntar (1) (2) y (3) tenemos que:

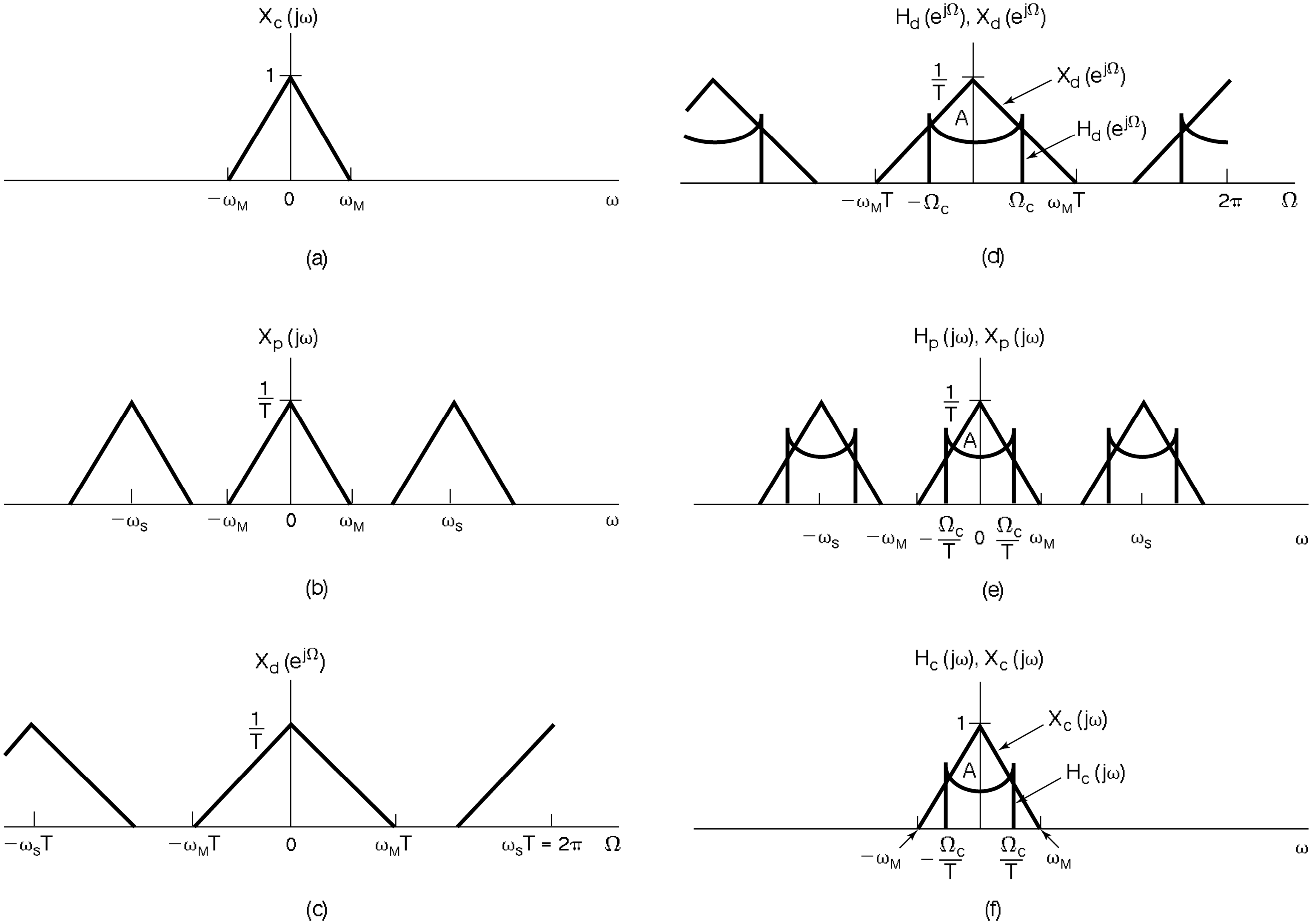
$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\Omega}{T}-k\frac{2\pi}{T}\right)\right) \qquad Y_d(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})X_d(e^{j\Omega}) \qquad Y_c(j\omega) = \begin{cases} TY_d(e^{j\omega T}), & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

  - Supongamos que nos centramos en: $|\omega| < \omega_s/2 \Rightarrow |\omega| < \pi/T \Rightarrow |\Omega| < \pi/T$

$$Y_c(j\omega) = TY_d(e^{j\omega T}) = TH(e^{j\omega T})X_d(e^{j\omega T}) = TH(e^{j\omega T})\frac{1}{T}X_c\left(j\left(\frac{\omega T}{T}\right)\right) = H(e^{j\omega T})X_c(j\omega)$$

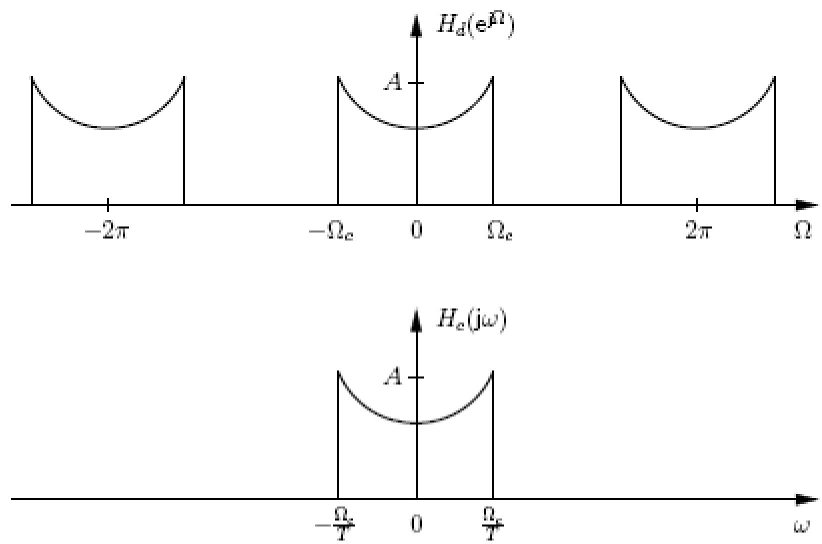
  - Podemos concluir por tanto que: $$\boxed{H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}), & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}}$$
    - "Truco": consistencia de unidades
      - RF continua rad/seg, RF discreta
      - Si queremos expresar el SC en función del SD, las unidades serán rad/seg
      - Si queremos expresar el SD en función del SC, las unidades serán rad

Procesamiento discreto de SC: gráficamente



Procesamiento discreto de SC: gráficamente

- Resumiendo:



- Si queremos expresar la RF inferior en función de la superior:
  - Hay que quedarse sólo con la primera réplica
  - La amplitud no cambia
  - El eje de frecuencias sí cambia (dividir por T)

$$\boxed{H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}), & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}}$$

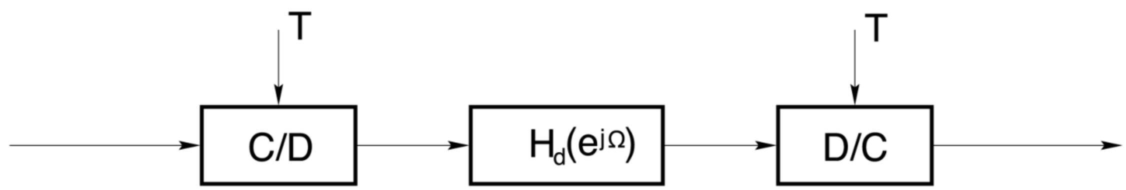
Obviamente, obtenemos lo mismo que antes

Procesamiento discreto de SC: ejemplo

- Queremos implementar un sistema continuo cuya salida sea la derivada de la entrada ➔ La RF de este sistema sería

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} j\omega, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

- ¿Cuál es la RF del sistema discreto?



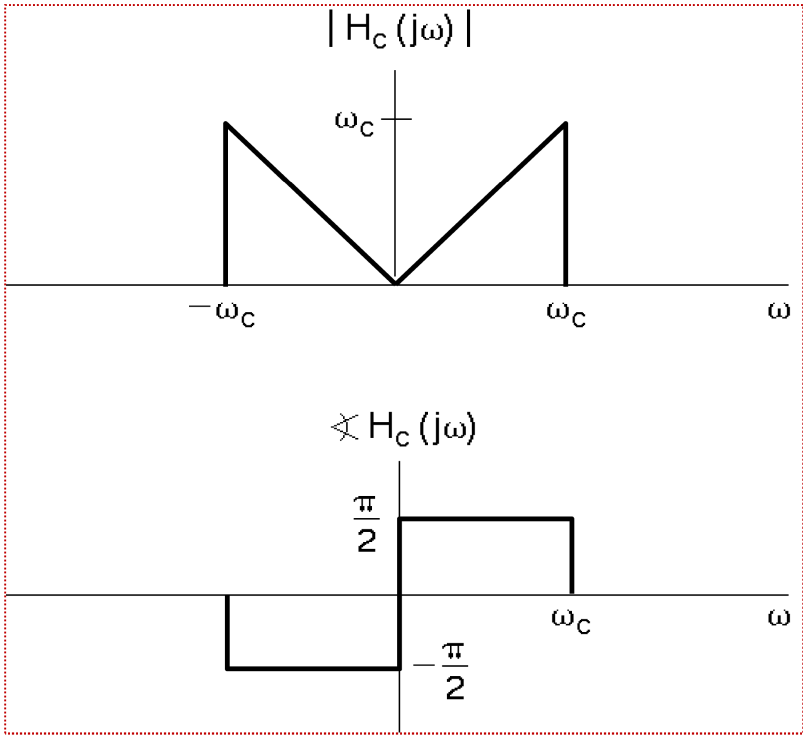
  - Utilizando las transparencias anteriores:

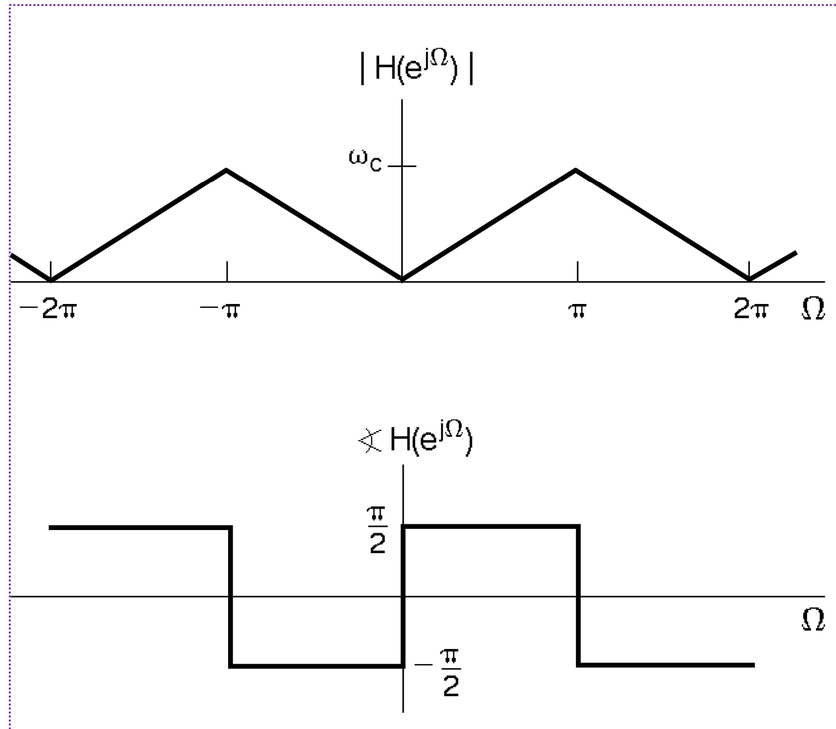
$$\begin{aligned} H_d(e^{j\Omega}) &= \begin{cases} H_c(j\Omega/T), & |\Omega| < \pi \\ \text{periodic}, & |\Omega| \geq \pi \end{cases} \\ &= j\left(\frac{\Omega}{T}\right) = j\omega_c\left(\frac{\Omega}{\pi}\right) \quad |\Omega| < \pi \end{aligned}$$

¿Y cómo es esto en el dominio del tiempo? ¿Cuál es $h_d[n]$? ➔
Comprobad que no es $h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$

Procesamiento discreto de SC: ejemplo

- Gráficamente





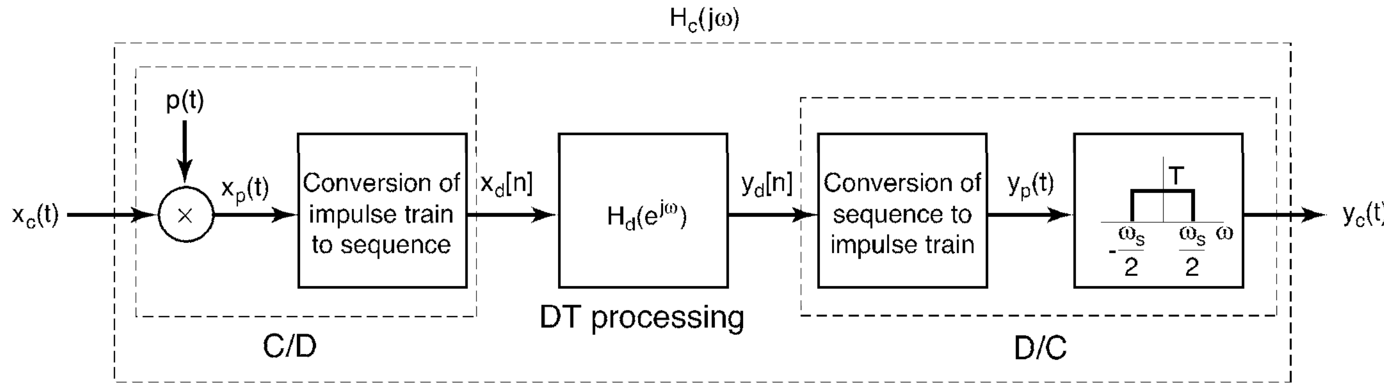
Sistema en TC deseado

Sistema en TD a implementar

Procesamiento discreto de SC: ejemplo

- ¿Para qué se usa un diferenciador? ➔ En procesamiento de imágenes, para detectar bordes

Procesamiento discreto de SC: recapitulando



- Sistema completo que se usa para procesar una SeñC con un SistD
- Cuando la entrada $x_c(t)$ es de banda limitada ($X(j\omega) = 0$ para $|\omega|>\omega_M$) y se cumple el teorema de muestreo, ($\omega_s > 2\,\omega_M$) ➔ El sistema completo es equivalente a un sistema LTI continuo, y por lo tanto queda descrito por su RF y/o por su RI:

$$Y_c(j\omega) = H_c(j\omega)X_c(j\omega) \longleftrightarrow y_c(t) = h_c(t) * x_c(t) \qquad \text{LTI}$$

- La RF del SistC se relaciona con la RF del SistD

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}), & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Si queremos encontrar la relación de las RI ➔ Utilizamos la de la RF y tomamos TF inversas

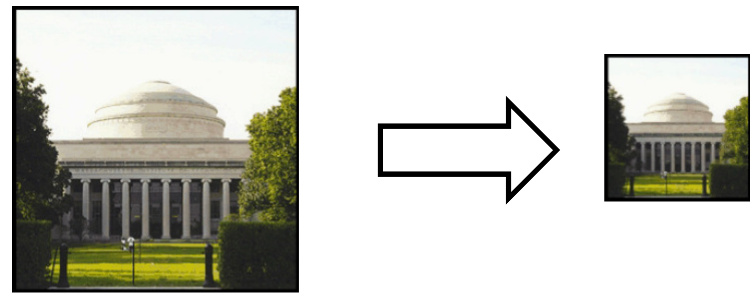
Ubicándonos

- **Tema 3: Muestreo**
  - 3.1 Muestreo de señales continuas
    - 3.1.0 Introducción
    - 3.1.1 Muestreo en el dominio del tiempo y de la frecuencia
    - 3.1.2 Recuperando la señal continua: interpolación
    - 3.1.3 Problemas y aspectos prácticos
  - 3.2 Procesamiento en tiempo discreto de señales continuas
  - **3.3 Muestreo de señales discretas: diezmado e interpolación**

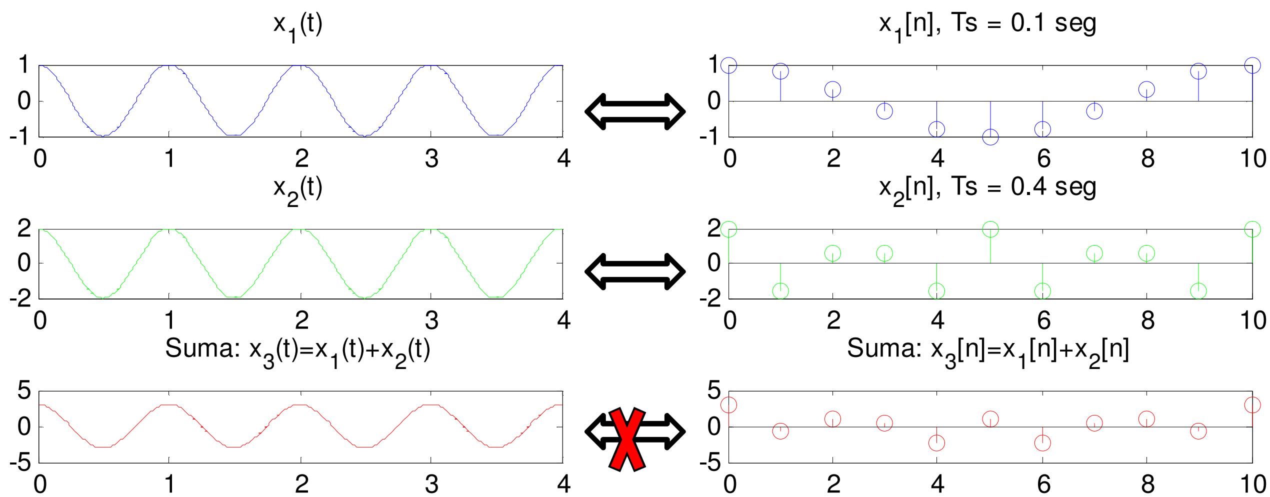
- Comentarios:
  - Bibliografía básica: [BB2: Opp&Sch] Cap. 3, Sec. 3.6

Muestreo de señales discretas

- ¿Para qué?
  - Compresión: Muestrear señales discretas es una forma de “comprimir la información”



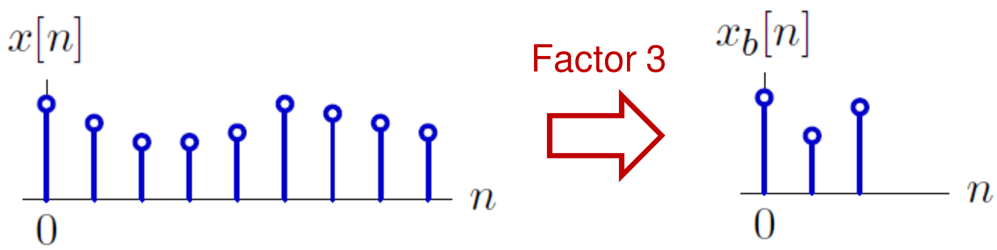
  - Para poder procesar en discreto señales continuas que han sido muestreadas a distintas tasas



  - Desde un punto de vista de análisis, los pasos son muy parecidos a los seguidos con el muestreo e interpolación de señales continuas

Muestreo de señales discretas: diezmado

- Al igual que en el caso continuo, describir el muestreo en el tiempo es muy sencillo



$$x_b[n] = x[nN]$$

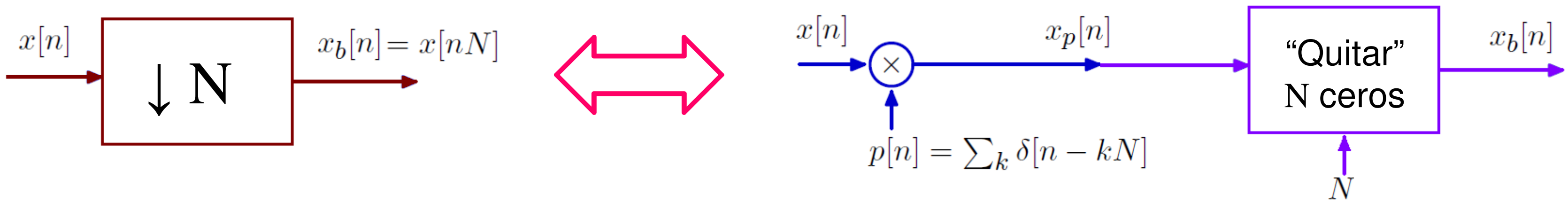
$x_b[-1] = x[-3]$
$x_b[0] = x[0]$
$x_b[1] = x[3]$
$x_b[2] = x[6]$
...

- Las preguntas claves son:
  - ¿Qué pasa en frecuencia?
  - ¿Cuándo puedo recuperar a partir de las señal muestreada la señal original?

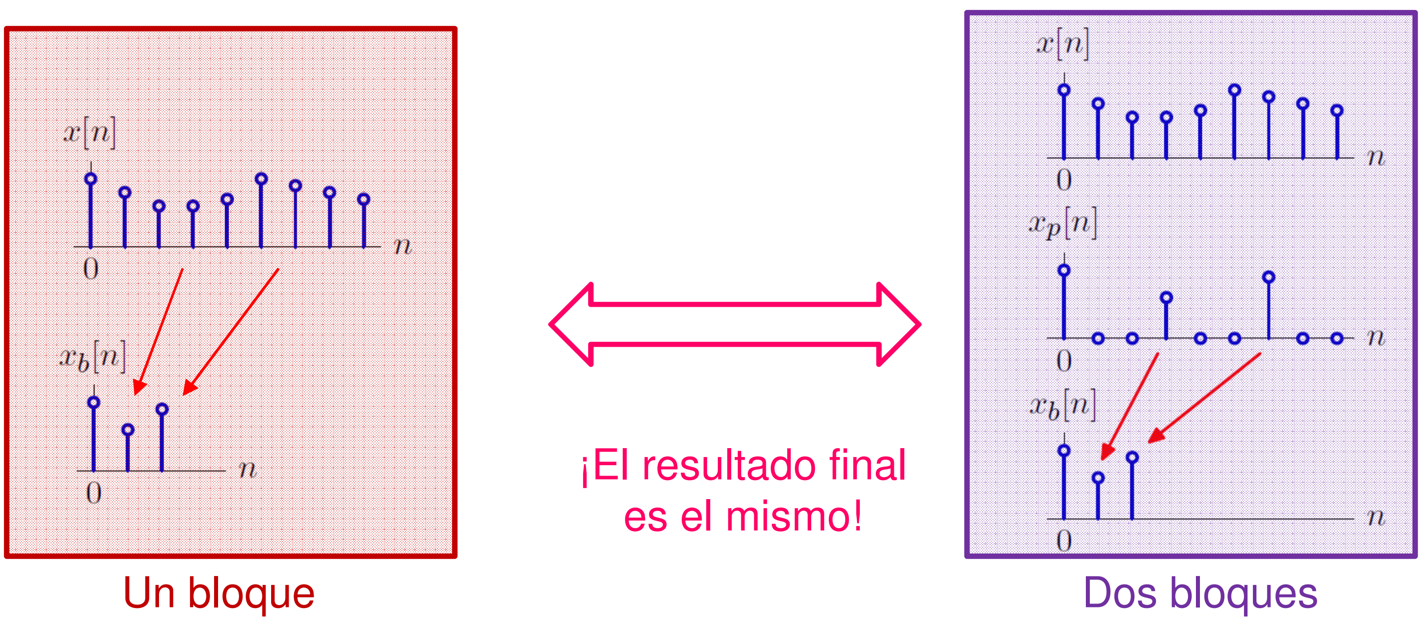
- Otras observaciones:
  - Al muestreo discreto en ocasiones se le llama diezmado (sobre todo si tenemos SD de longitud finita) ➔ Diezmamos la señal, la hacemos más corta
  - Del mismo modo, cuando no podemos recuperar la señal original, se dice que el proceso de diezmado ha provocado una pérdida de información

Diezmado en tiempo

- Al igual que en el caso continuo, entendemos el diezmado como la aplicación sucesiva de dos bloques

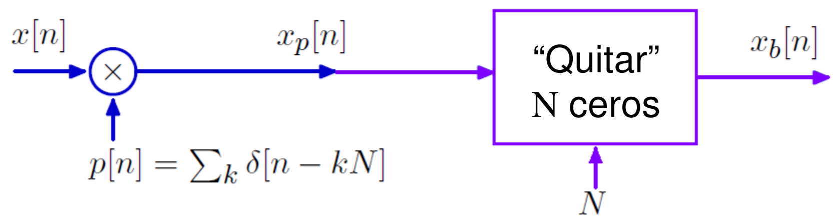


- En el dominio del tiempo, la señal es la misma ➔ Gráficamente



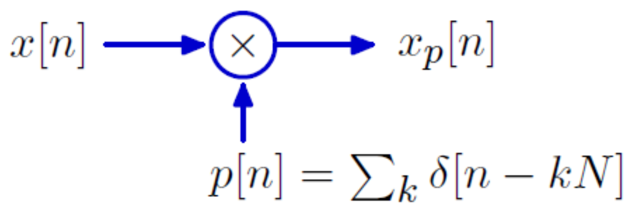
Diezmado en frecuencia

- Queremos relacionar la TF de x[n] con la de $x_b[n]$ ➔ Dos pasos



  - (1) Expresar la TF de $x_p[n]$ a partir de la TF de x[n] $\quad X(e^{j\Omega}) \to X_p(e^{j\Omega})$
  - (2) Expresar la TF de $x_b[n]$ a partir de la TF de $x_p[n]$ $\quad X_p(e^{j\Omega}) \to X_b(e^{j\Omega})$

- Paso (1):



$$P(e^{j\Omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

$$x_b[n] = x[n] \cdot p[n]$$

$$\Downarrow$$

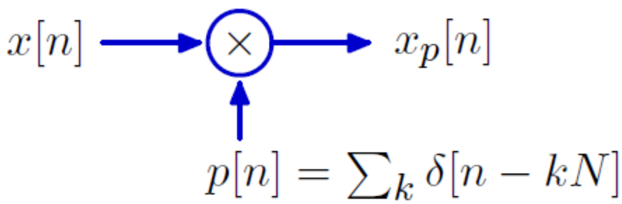
$$X_p(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\theta}) P(e^{j(\Omega-\theta)}) d\theta$$

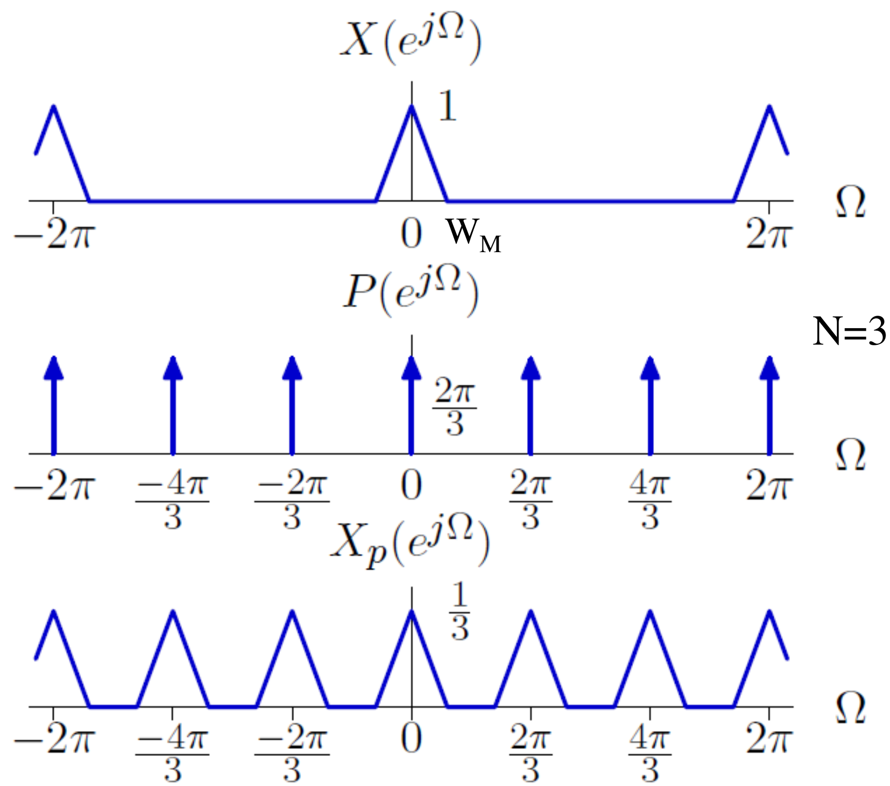
$$\Downarrow$$

$$X_p(e^{j\Omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{j(\Omega - \frac{2\pi}{N}k)})$$

Diezmado en frecuencia

- El paso (1) gráficamente





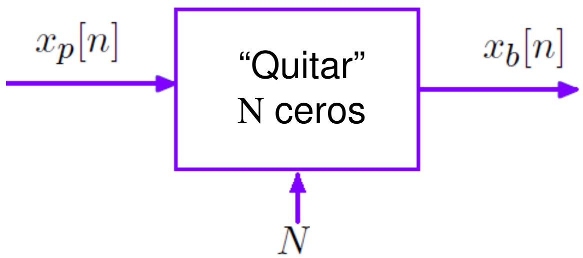
Nos aparecen réplicas en los múltiplos de $2\pi/N$ ➔ Ojo porque se pueden solapar

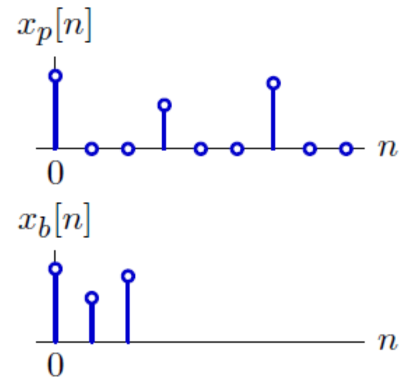
$$X_p(e^{j\Omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{j(\Omega-\frac{2\pi}{N}k)})$$

Si W_M es el BW de la señal x[n] habrá solape si: $W_M > 2\pi/N - W_M$ ➔ $2W_M > 2\pi/N$ ➔ $N > 2\pi/W_M$

Diezmado en frecuencia

- Paso (2):





  - Opción 1: a través de propiedades (expansión/compresión)
  - Opción 2: a través de la fórmula de análisis

$$X_b(e^{j\Omega}) = \sum_n x_b[n]e^{-j\Omega n} = \sum_n x_p[3n]e^{-j\Omega n} = \sum_k x_p[k]e^{-j\Omega k/3} = X_p(e^{j\Omega/3})$$

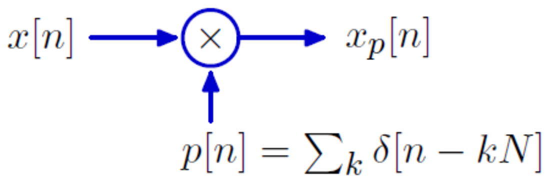
  - Para el caso general

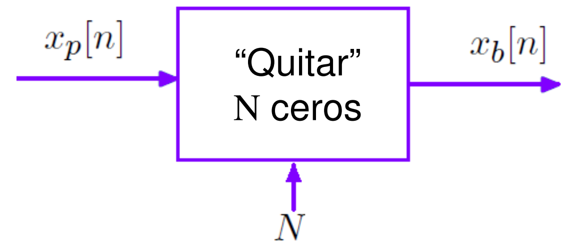
$$\boxed{X_b(e^{j\Omega}) = X_p(e^{j\Omega/N})}$$

¡Comprimir en el tiempo equivale a expandir en frecuencia!

Diezmado en frecuencia

- Pasos (1) + (2):





$$X_p(e^{j\Omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j(\Omega-\frac{2\pi}{N}k)}\right)$$

$$X_b(e^{j\Omega}) = X_p(e^{j\Omega/N})$$

- Réplicas y expansión:

$$X_b(e^{j\Omega}) = X_p(e^{j\Omega/N}) = \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j(\frac{\Omega}{N}-\frac{2\pi}{N}k)}\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(e^{j(\frac{\Omega-2\pi k}{N})}\right)$$

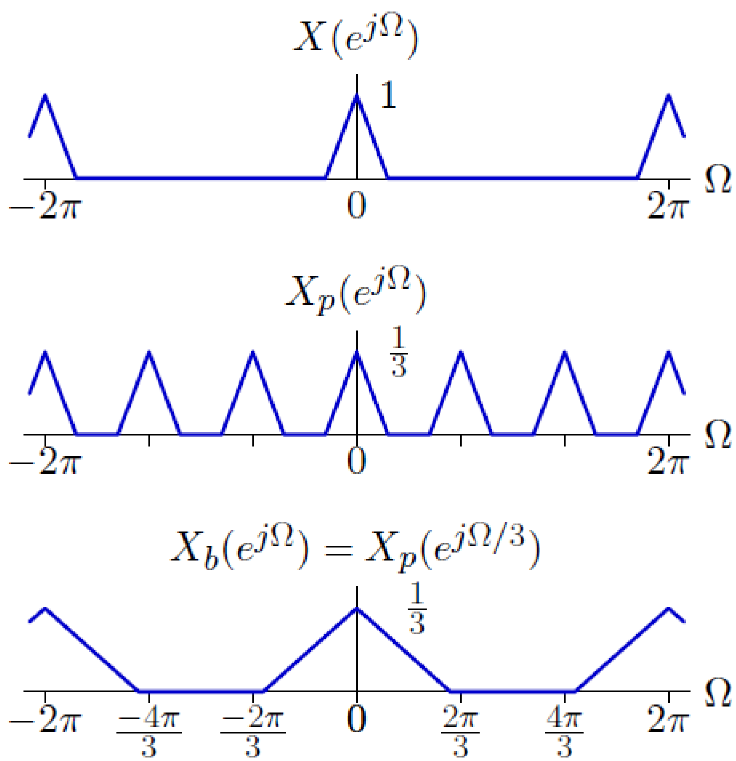
Recuérdese que el orden del desplazamiento compresión es importante ➔ Las fórmulas nos están diciendo que las réplicas están en los múltiplos de 2π

Diezmado en frecuencia: gráficamente

- Pasos (1) + (2):

Paso (1):

Paso (2):



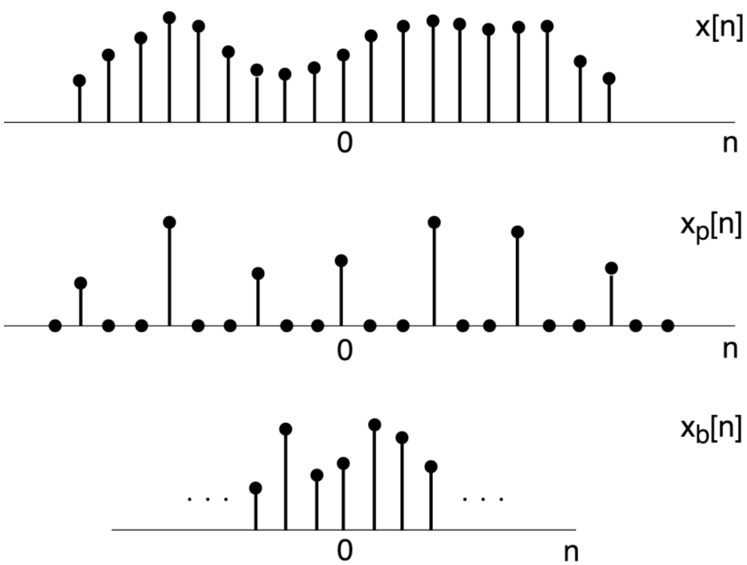
Cambio de amplitud (1/N)

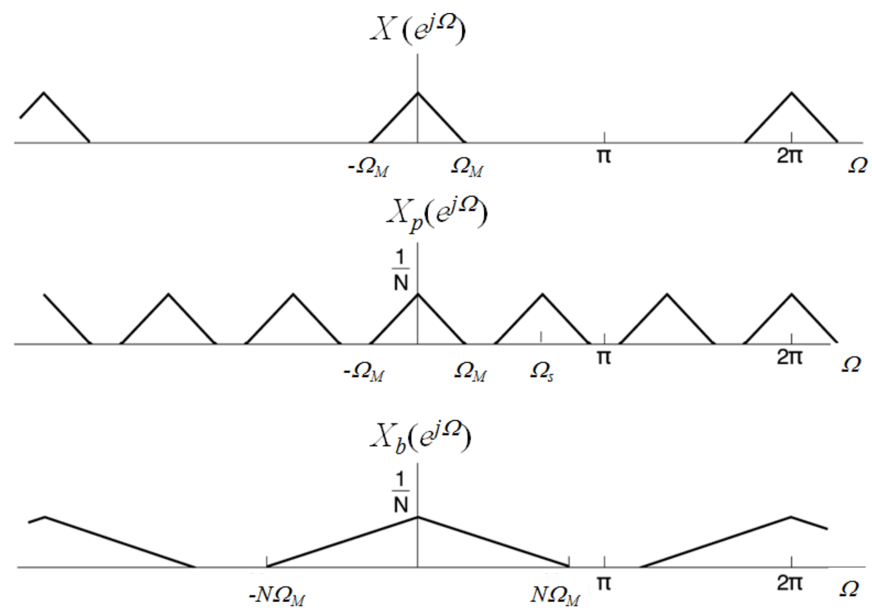
Ensanchamiento (por un factor N)

- Si no hay solape, es muy sencillo, si hay solape a veces nos liamos ➔ Método "universal"
  a) Nos quedamos con la señal original entre $-\pi$ y π
  b) Dividimos la amplitud por N y ensanchamos por un factor N
  c) Replicamos la señal obtenida en los múltiplos de 2π

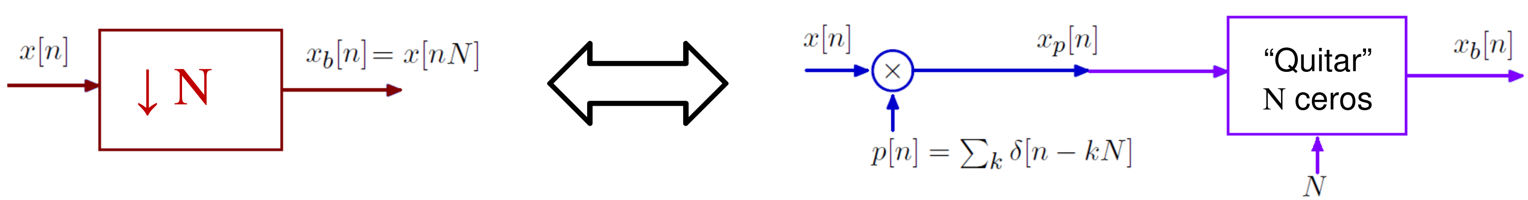
Diezmado: gráficas tiempo y frecuencia

- Pasos (1) + (2):



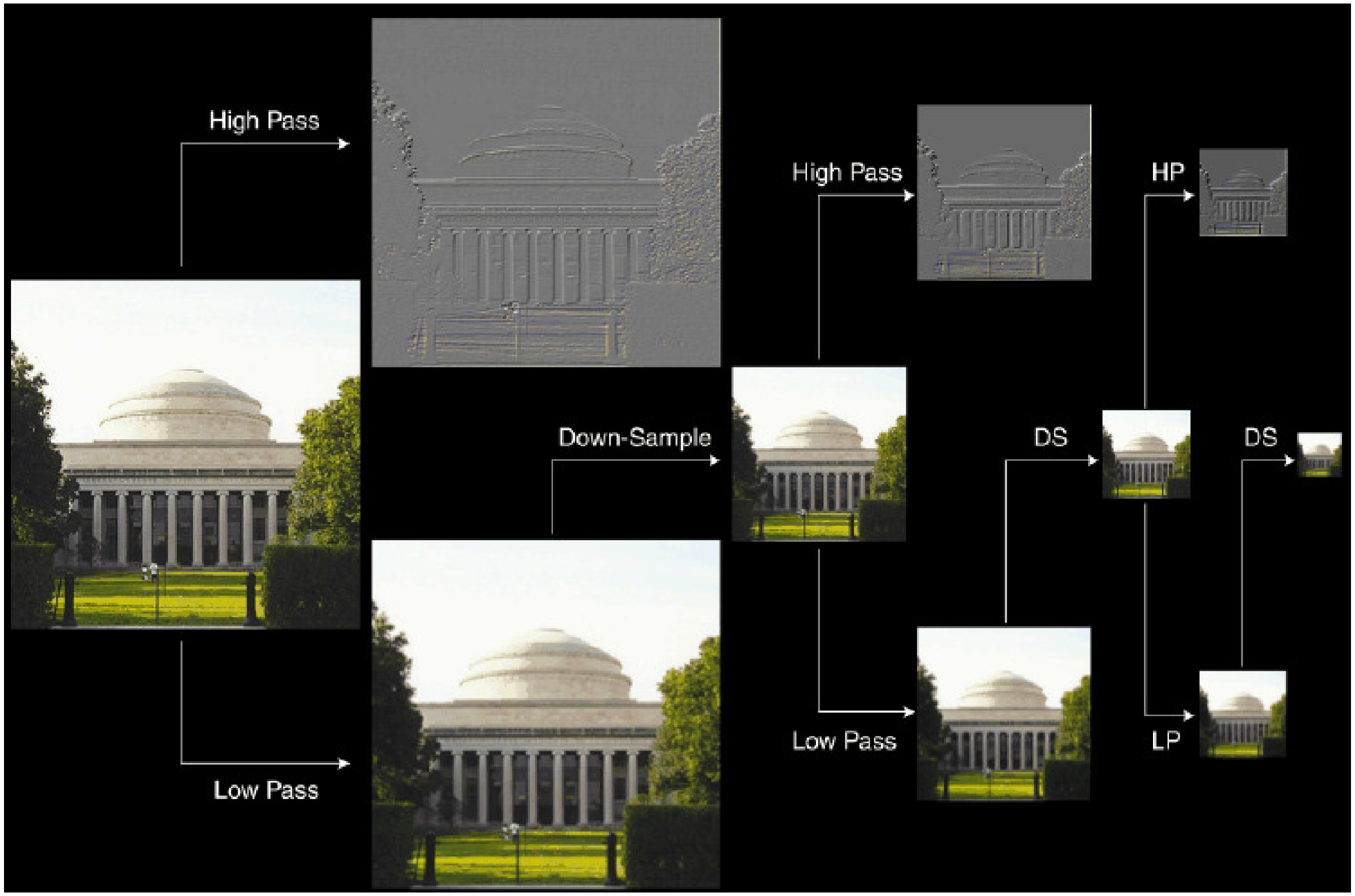


➢ Recordemos que la señal intermedia no existe, simplemente la dibujamos para entender mejor lo que está pasando ➔ "Dibujamos un bloque, para entenderlo lo dividimos en dos"



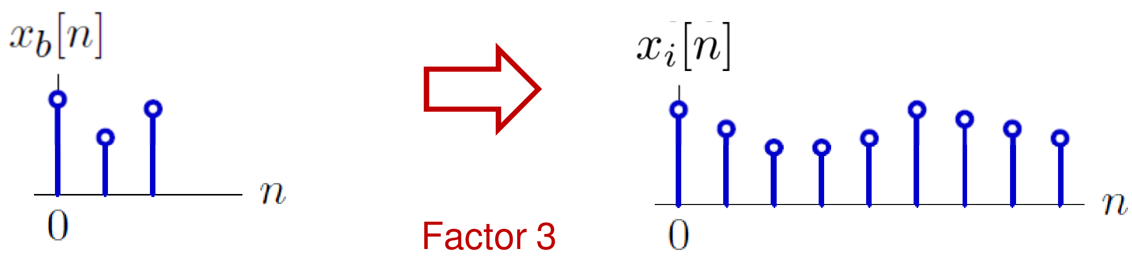
Diezmado: cuestiones prácticas

- Si el ancho de banda es menor que π/N no hay solapamiento
- Al igual que en el caso continuo, conviene poner un filtro paso bajo antisolapamiento ➔ frecuencia del filtro π/N
- Ejemplo:

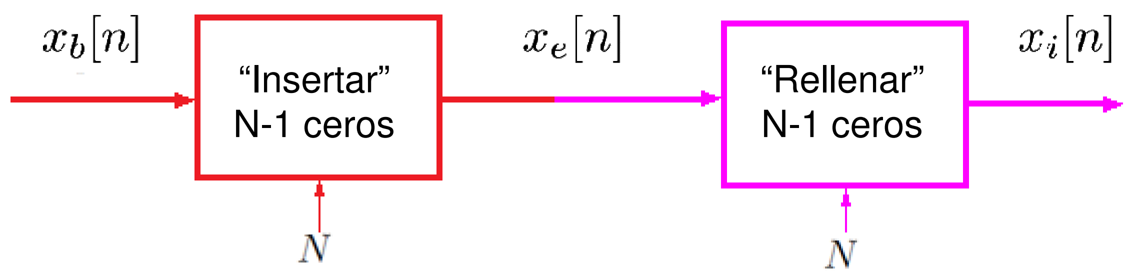


Interpolación de señales discretas

- Interpolación de señales discretas: ¿para qué?
  - Para recuperar una señal previamente diezmada
  - Para "expandir" una señal discreta
  - Para conseguir una señal equivalente a haber muestreado más rápido

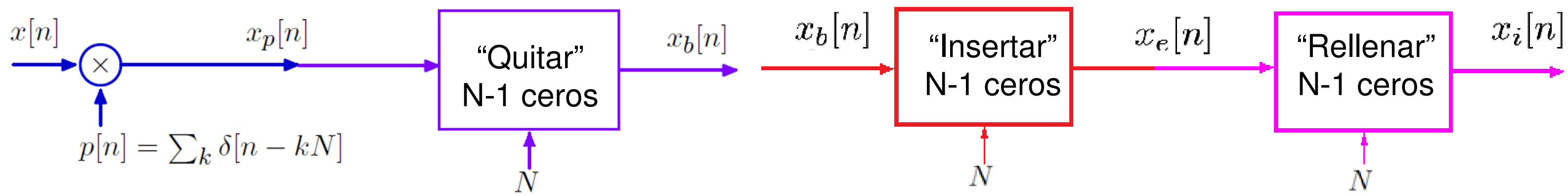


- Lo ejecutamos en dos pasos y, además, "utilizamos" dos bloques
  - Paso/Bloque (1): "inserta ceros" Paso/Bloque (2): "rellena ceros"

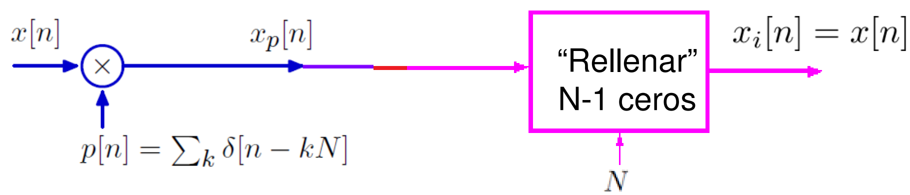


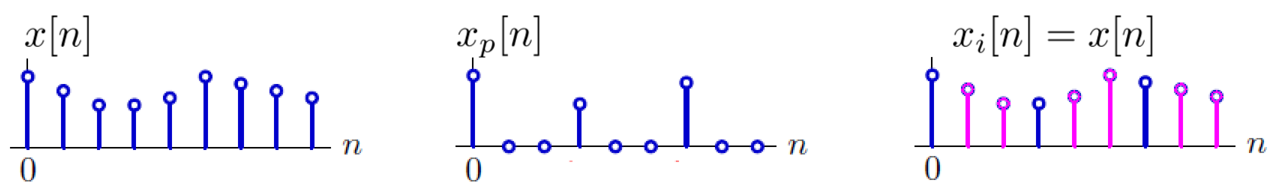
Interpolación de señales discretas

- ¿Cómo diseñamos esos bloques? ➔ Idea: recuperar señal diezmada



- Observaciones:
  - El objetivo de diseño es conseguir que $x_i[n]=x[n]$
  - Las señales $x_p[n]$ y $x_e[n]$ son iguales ➔ Para conseguir nuestro objetivo basta con analizar y diseñar



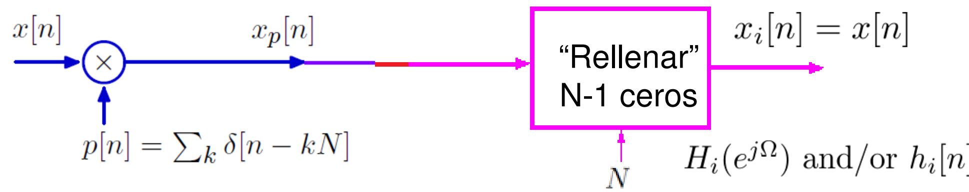


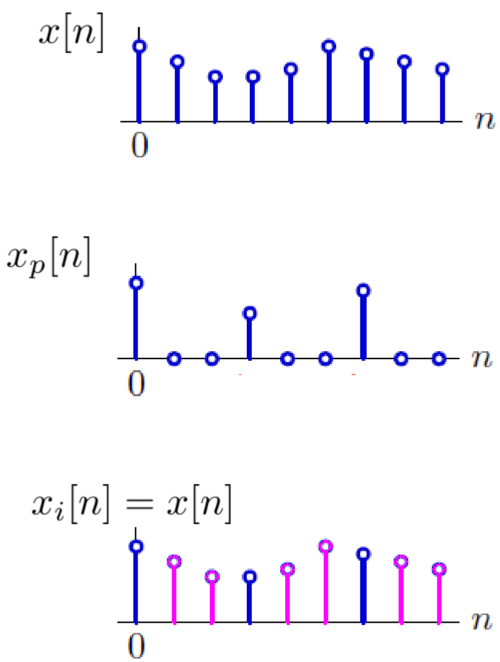
  - Asumiremos que el bloque a diseñar es LTI y por lo tanto nos bastará con especificar su RI o su RF ➔ Lo haremos en frecuencia porque es más fácil

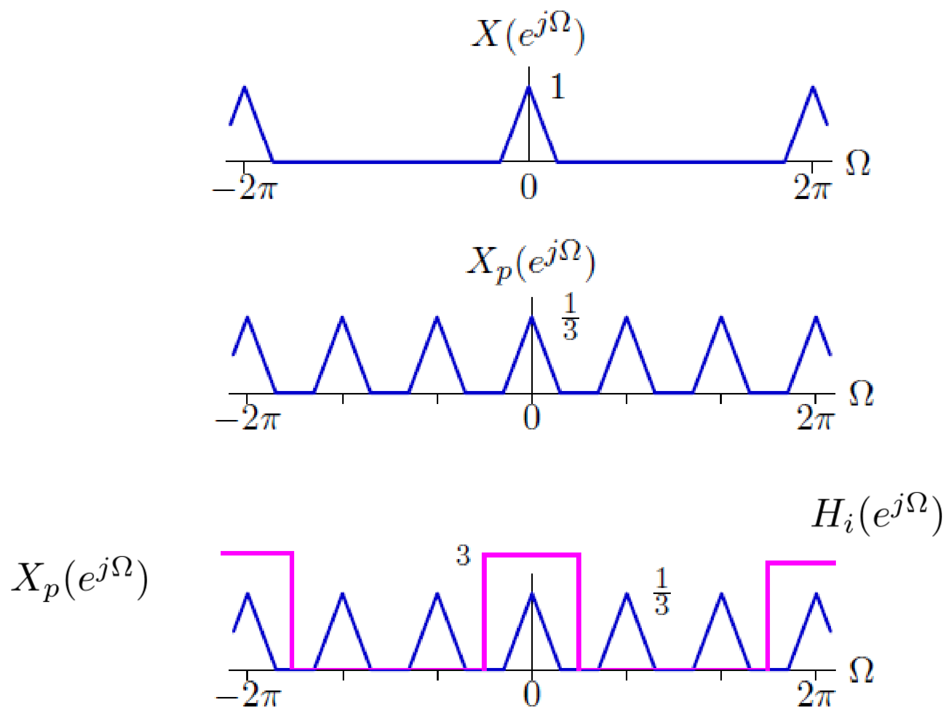
Interpolación de SD: dominio de la frecuencia

- Lo analizamos y diseñamos en el dominio de la frecuencia

$$H_i(e^{j\Omega}) \Rightarrow h_i[n]$$



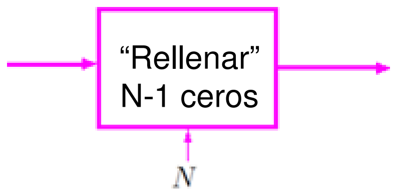


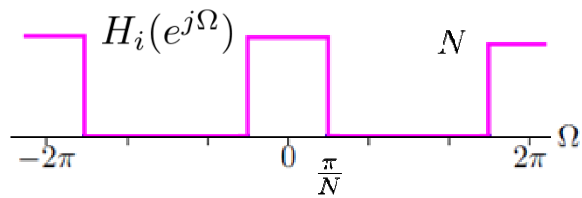


$$X_i(e^{j\Omega}) = H_i(e^{j\Omega}) X_p(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})$$

Interpolador ideal de SD

- En frecuencia el interpolador ideal es un filtro paso bajo de ganancia N





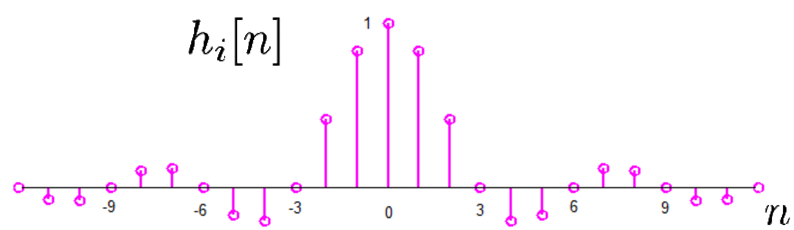
$$H_i(e^{j\Omega}) = \begin{cases} N, & |\Omega| \le \pi/N \\ 0, & \pi/N \le |\Omega| \le \pi \end{cases}$$

periódica 2π

- ¿En tiempo? ➔ $h_i[n] = TF^{-1}\left\{H_i(e^{j\Omega})\right\}$

$$h_i[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/N}^{\pi/N} N \cdot e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{N}{2\pi}\frac{2j sin(\pi n/N)}{jn} = \frac{sin(\pi n/N)}{\pi n/N} = sinc(n/N)$$

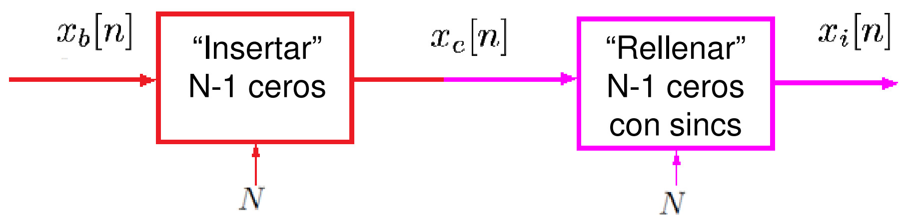
- ¡¡Vuelve a ser una sinc!!

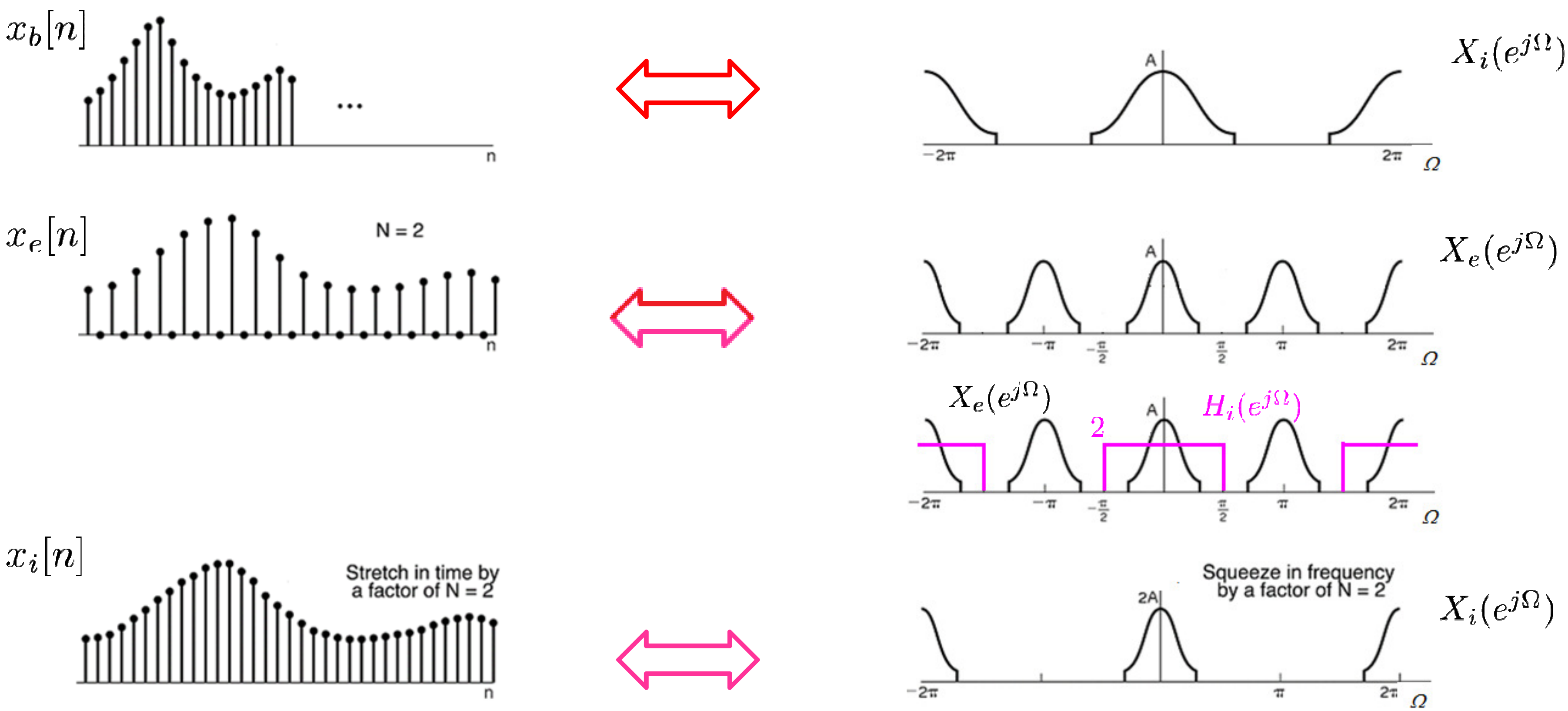


Vale cero en los múltiplos de N

- Podemos volver a utilizar interpoladores subóptimos (orden cero, lineal, sincs truncadas) ➔ Todo igual que en el caso continuo

Interpolación SD: gráficamente



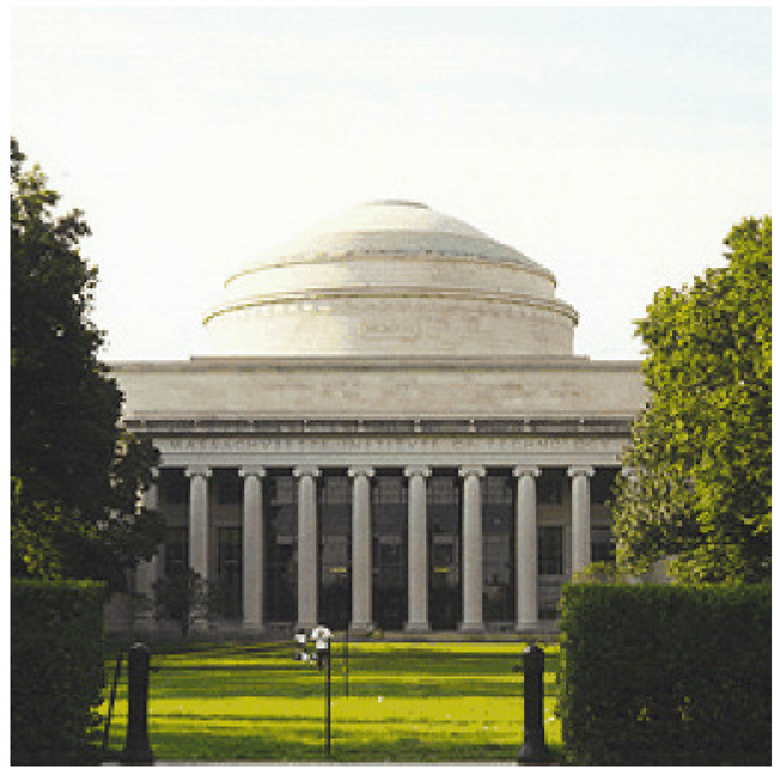


TIEMPO **FRECUENCIA**

Ejemplo de interpolación en imágenes

$\uparrow 2$

$\uparrow 2$

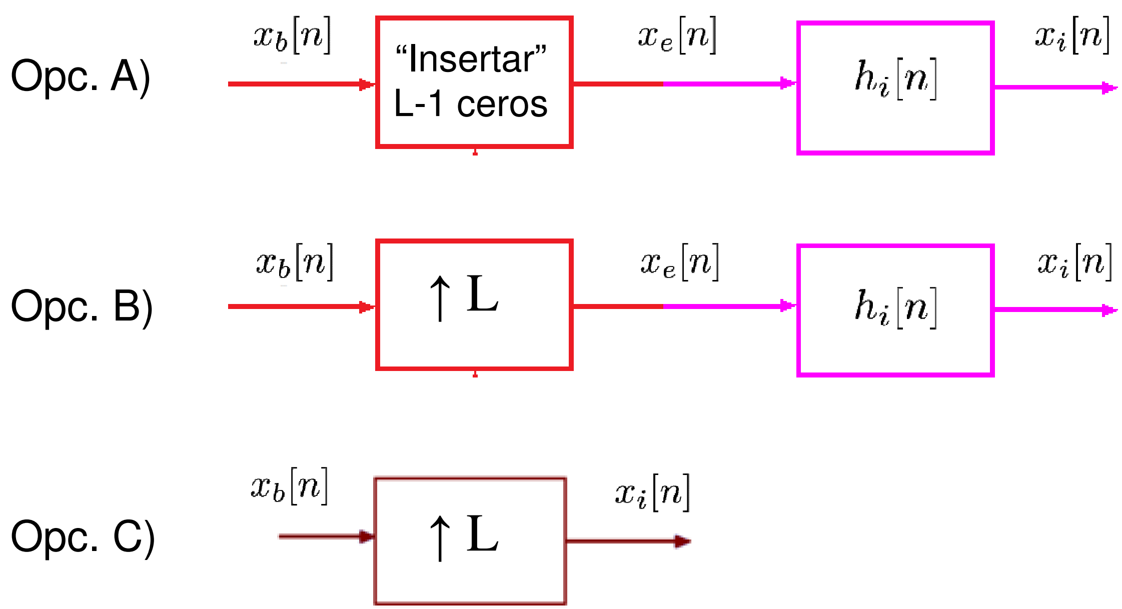


¿Qué estamos viendo en esta imagen? ¿Dónde está este edificio?

Muestreo/Interpolación: otros aspectos

- Cuando se utilizan diagramas de bloques:
  - El diezmador suele aparecer como un único bloque:

  - El interpolador suele aparecer como dos (aunque no siempre):



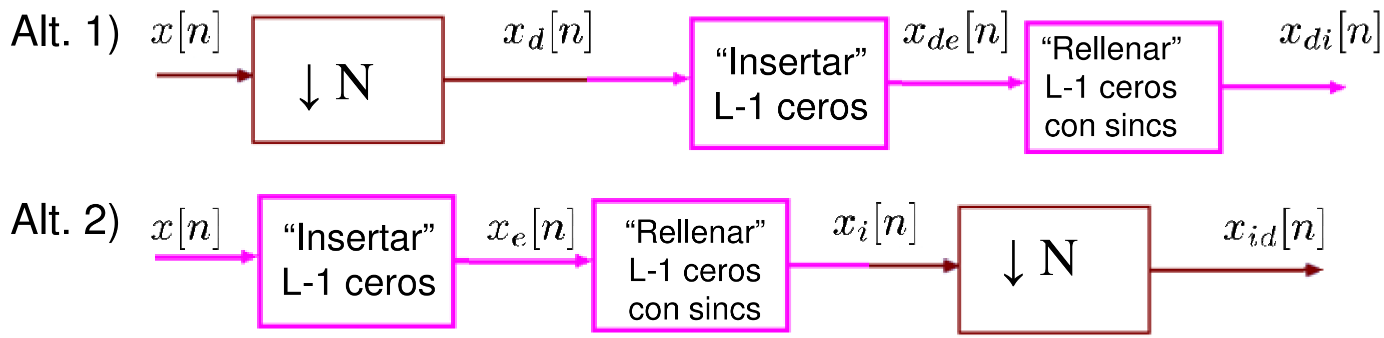
En la opción B), el bloque "↑L" equivale al primer bloque de la opción A)

En la opción C), el bloque "↑L" equivale a los dos bloques de la opción A)

Leer con cuidado lo que nos diga el enunciado/libro/página web

Muestreo/Interpolación: otros aspectos

- Muestreo/interpolación fraccional ➔ Remuestreo



En ambos casos L≠N

- Si x[n] proviene de muestrear una SC x(t) con un periodo T y no hay solape:
  - La señal a la salida de las dos alternativas es la misma: $x_{id}[n]=x_{di}[n]$
  - $x_{id}[n]$ puede interpretarse como haber muestreado x(t) con un periodo $T_{eq}=T \cdot N/L$
- Recordemos que el diezmado puede producir pérdida de información (solapamiento) pero el muestreo no ➔ ¿Cuándo podemos perder información?
  - Si N>L ➔ SÍ
  - Si L≥N y hacemos primero la interpolación ➔ NO
  - Si L≥N y hacemos primero el diezmado ➔ SÍ

En estos casos puede que $x_{id}[n] \neq x_{di}[n]$

- Conclusión: si podemos elegir, haremos siempre antes la interpolación (Alt. 2)

Muestreo/Interpolación de SD: Recapitulando

- Muy similar al caso continuo
  - Diezmado: fácil de describir en el tiempo, difícil en frecuencia
  - Existe una tasa máxima de diezmado (si se supera, hay solapamiento)
  - La interpolación consiste en dos pasos: "insertar ceros" y "rellenar ceros"
  - Hay distintas alternativas para "rellenar los ceros": orden cero, lineal, cuadrático, …
  - La forma óptima de "rellenar ceros" es con sincs. Esto es difícil de ver en el dominio del tiempo pero fácil de ver en el dominio de la frecuencia

- En el diezmado se puede perder información, en la interpolación no. El diezmado puede entenderse como una forma muy rudimentaria de "comprimir" información

- Tanto el diezmado como la interpolación se pueden utilizar para re-ajustar el periodo de muestreo de una señal
  - Si diezmamos: es como si hubiéramos hecho el periodo de muestreo más grande
  - Si interpolamos: es como si hubiéramos hecho el periodo de muestreo más pequeño

Resumen del tema

- **Tema 3: Muestreo**
  - 3.1 Muestreo de señales continuas
    - 3.1.0 Introducción
    - 3.1.1 Muestreo en el dominio del tiempo y de la frecuencia
    - 3.1.2 Recuperando la señal continua: interpolación
    - 3.1.3 Problemas y aspectos prácticos
      - Filtro antisolapamiento
      - Interpoladores subóptimos
      - Cuantificación de la amplitud
  - 3.2 Procesamiento en tiempo discreto de señales continuas
  - 3.3 Muestreo de señales discretas: diezmado e interpolación
    - 3.3.1 Diezmado
    - 3.3.2 Interpolación
    - 3.3.3 Remuestreo

Resumen del tema

- Los conversores analógicos/digitales y digitales analógicos son omnipresentes
  - Parte uno: muestreadores / interpoladores (discretizan el tiempo)
  - Parte dos: cuantificadores (discretizan la amplitud)
  - En este tema/asignatura nos hemos centrado en la discretización del tiempo

- Aspectos clave:
  - La conversión continuo a discreto y la conversión discreto a continuo está dividida en varios pasos/bloques
  - Algunos de esos bloques son más fáciles de entender en el domino del tiempo y otros son más fáciles de entender en el dominio de la frecuencia
  - Debemos entenderlos en los dos dominios

- Hemos centrado nuestro análisis en señales de <u>banda limitada</u>:
  - Existe un valor mínimo de la frecuencia de muestreo que garantiza la recuperación de la señal: el doble del ancho de banda
  - Si la señal ha sido bien muestreada, el interpolador ideal es un filtro paso bajo (lo que equivale a decir que es una sinc en el dominio del tiempo)

Resumen del tema

- Aspectos prácticos:
  - Para evitar potenciales solapes, antes de muestrear se filtra paso bajo
  - El interpolador ideal no se puede construir, en la práctica se pueden utilizar sincs truncadas, vecinos más próximos, interpolación lineal ➔ En estos casos conviene haber muestreado más rápido de lo que dicta el teorema de muestreo

- Las señales continuas limitadas en banda se pueden procesar de forma fácil y barata pasándolas a discreto y luego convirtiéndolas de nuevo en continuas:
  - Existe una equivalencia entre lo que hace el sistema discreto en el dominio de la frecuencia y lo que hace el sistema continuo en el dominio de la frecuencia, la equialencia en el dominio del tiempo es más complicada

- Muestreo e interpolación de señales discretas:
  - Parecido al muestreo/interpolación de señales continuas
  - El diezmado puede provocar pérdida de información (tasa máxima para señales limitadas en banda), la interpolación no
  - Se pueden utilizar para cambiar el periodo de muestreo de una señal