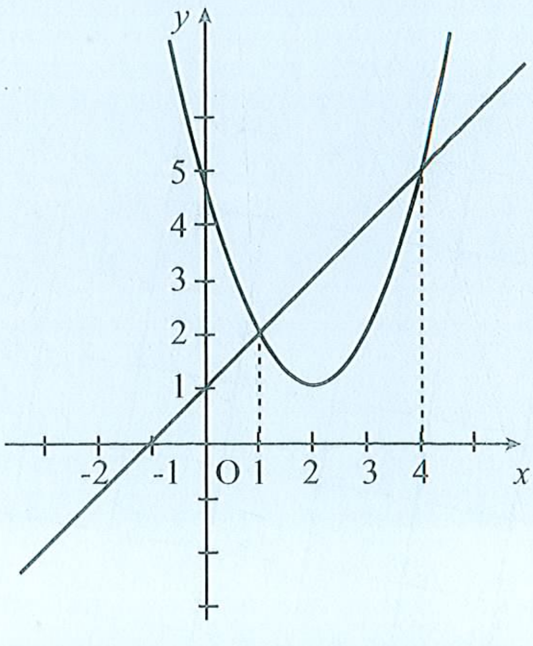
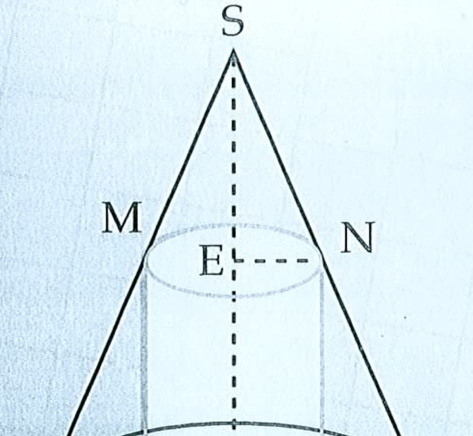
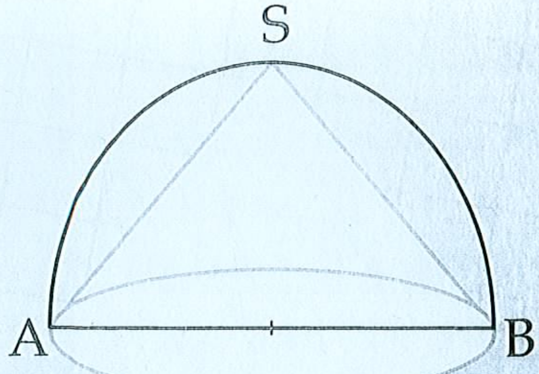
Neritan Babamusta
Edmond Lulja

MATEMATIKË

Përgatitje për maturën shtetërore sipas kurrikulës me kompetenca







BOTIME pegi

MATEMATIKË

BOTIME

pegi

Autorë: Neritan BABAMUSTA, Edmond LULJA
Korrektor letrar: Arlon LIKO
Paraqitja grafike: Elidor KRUJA
Shtypi: Shtypshkronja Pegi, Lundër, Tiranë
ISBN: 978-9928-233-09-7

Botime Pegi: tel: +355/ 042 468 833; cel: +355/ 069 40 075 02;
e-mail: botimepegi@botimepegi.al; web: www.botimepegi.al
Sektori i shpërndarjes: cel: +355/ 069 20 267 73; 069 60 778 14;
e-mail: marketing@botimepegi.al
Shtypshkronja Pegi: cel: +355/ 069 40 075 01;
e-mail: shtypshkronjapegi@yahoo.com

HYRJA

Tashmë në shkollën e mesme që prej 12 vitesh, vlerësimi i njohurive të nxënësve në shkollën e mesme si dhe përzgjedhja e tyre për në shkollën e lartë realizohet nëpërmjet maturës shtetërore.

Risi për vitin shkollor 2018-2019 është përfundimi i zbatimit të programeve e teksteve të reja, të realizuara nga shtëpitë botuese Oksord, Kembrixh e Pirson të Mbretërisë së Bashkuar.

Qëllimi i këtij botimi është të ndihmojë nxënësit e shkollës së mesme për t'u përgatitur për provimin e maturës shtetërore, qoftë në mënyrë të organizuar e të drejtuar nga mësuesi/ja brenda klasës, qoftë edhe individualisht e në mënyrë të pavarur. Ai është hartuar në përputhje me programin përkatës të matematikës për shkollën e mesme. Konceptimi dhe ndërtimi i tij është kushtëzuar logjikisht prej vetë përmbajtjes dhe frymës së këtij programi, duke mundësuar gradualitetin e nevojshëm në shtjellimin si dhe lidhjen organike me tekstet bazë.

Në përfundim të shkollës së mesme, nxënësi duhet të jetë i aftë jo vetëm për zgjidhjen e ushtrimeve, por edhe për të përvetësuar e shtruar në mënyrë të pjekur pjesën teorike të lëndës. Është edhe ky një nga qëllimet tona në hartimin e këtij botimi, duke i mundësuar nxënësit që të fitojnë parapërgatitje matematikore.

Mënyra e konceptimit të këtij botimi bën që me të të nisë puna që në fillim dhe të vazhdojë gjatë gjithë vitit shkollor.

Teksti është ndarë në 18 krerë, ku 17 krerët e parë trajtojnë në mënyrë tematike tërë lëndën e matematikës të zhvilluar gjatë tri viteve të shkollës së mesme.
Në fillim të secilit kre jepen përmbledhtas njohuritë teorike të domosdoshme për zgjidhjen e ushtrimeve. Përdoruesi i tij, para fillimit të secilit kre, duhet të studiojë me kujdes pjesën teorike si dhe ushtrimet e zgjidhura, dhe vetëm pas kësaj të kalojë tek ushtrimet për punë të pavarur e individuale.

Në ushtrimet e zgjidhura është synuar jo vetëm në tipizimin e tyre, por edhe duke ërdorur e sugjeruar e madje stimuluar metoda të ndryshme zgjidhjeje, shoqëruar edhe e argumentimet e domosdoshme. Janë përdorur ushtrime të larmishme, herë-herë ıke iu shmangur kërkesave tradicionale. Gjithashtu janë përdorur edhe formulime të lryshme për ushtrime të të njëjtit tip.

Më pas jepet një numër i konsiderueshëm ushtrimesh për vetëkontroll, për të cilat jepen edhe udhëzime për zgjidhjen si dhe përgjigjet, në mënyrë që përdoruesi të verifikojë saktësinë e zgjidhjes. Nëpërmjet modeleve të ndryshme, përdoruesi i tij mund të zbulojë mangësitë dhe veprimet e veçanta të cilat nuk janë zotëruar mjaftueshëm. Gjithashtu mësuesi/ja mund të krijojë njohje më të thella për nxënës të veçantë.

Një mënyrë e tillë e ndërtimit i jep përdoruesit të tij mundësi të gjera për punë aktive, si dhe ekonomizon kohën e përgatitjes.

Në kreun 18 janë dhënë 25 teste të kombinuara, të ngjashëm, me atë të dhënë në maturën shtetërore të virit 2019. Në secilin prej tyre, 20 ushtrime janë me alternativa dhe 12 janë me zhvillim e arsyetim. Këto mund të përdoren si nga mësuesit (testime provë) ashtu edhe nga nxënësit (për vetvlerësim). Në fund të tekstit jepet teza e maturës shtetërore të vitin 2019.

Në mënyrë të veçantë në vitin e parë të zbatimit të tij, autorët do të mirëprisnin sugjerime për përmirësimin e tij.

AUTORËT

KREU 1

BASHKËSITË

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$1 \in A; 5 \in A$ 1, 2 janë elemente të bashkësisë A.
$8 \notin A$; 8 nuk është element i bashkësisë A.
$B = \{1, 3, 5\}$ $B \subset A$ B është nënbashkësi e bashkësisë A.
ϕ **bashkësia boshe.** Ajo nuk ka asnjë element.
Prerje e bashkësive A, B: $A \cap B = \{x/x \in A$ **dhe** $x \in B\}$, fig. 1.1
Bashkim i bashkësive A, B: $A \cup B = \{x/x \in A$ **ose** $x \in B\}$, fig. 1.2

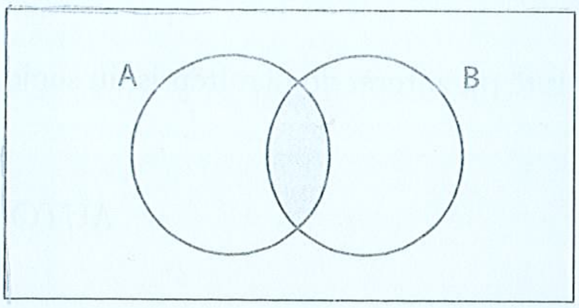


Fig. 1.1

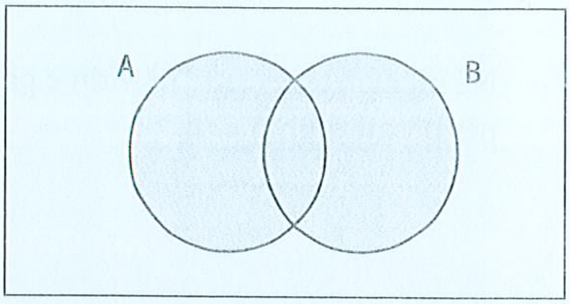


Fig 1.2

Prodhim kartezian i bashkësive A,B: $A \times B = \{(x, y) / x \in A$ dhe $y \in B\}$.
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$

Bashkësitë numerike

Bashkësia e numrave **natyrorë**: $N = \{1; 2; 3; 4; \ldots.\}$
Bashkësia e numrave **të plotë**: $Z = \{\ldots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$
Bashkësia e numrave **racionalë**: $Q = \{\frac{m}{n}\}$ ku $m \in Z$ dhe $n \in N$.

Bashkësia e numrave **irracionalë**: $I = \{\sqrt{2}; \sqrt{3}; \ldots \pi; \ldots\}$
(nuk mund të shkruhen në trajtën $\frac{m}{n}$).
Bashkësia e numrave **realë**: $R = Q \cup I$.

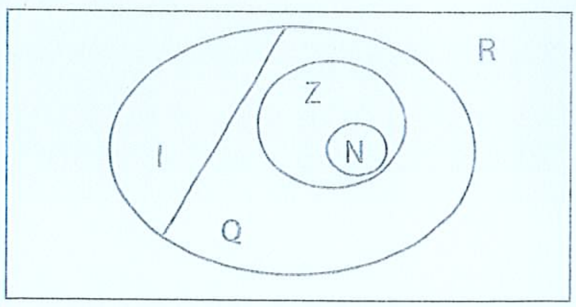


Fig. 1.3

Intervalet numerike

Intervali $]a, b[$: $\{x \in R / a < x < b\}$.

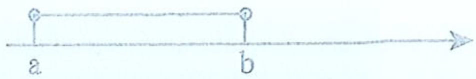


Fig. 1.4/a

Segmenti $[a, b]$: $x \in R / a \leq x \leq b\}$.

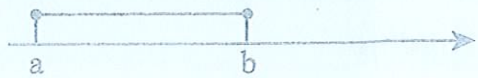


Fig. 1.4/b

Gjysmësegmenti $[a, b[$: $\{x \in R / a \leq x < b\}$.

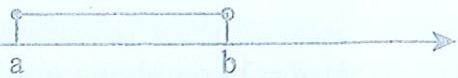


Fig. 1.4/c

Gjysmintervali $]a.b]$: $\{x \in R / a < x \leq b\}$.

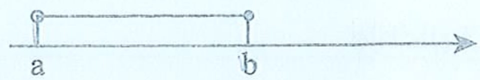


Fig. 1.4/d

$[3, +\infty[$: $\{x \in R / x \geq 3\}$.

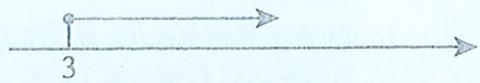


Fig. 1.4/e

$]-\infty, 1[$: $\{x \in R / x < 1\}$.

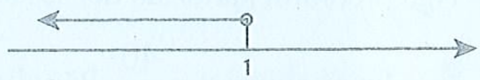


Fig. 1.4/f

Ushtrime të zgjidhura

1 Jepen bashkësitë:

A: "Bashkësia e rombeve". B: "Bashkësia e drejtkëndëshave". Gjeni $A \cap B$.

Zgjidhje

Bashkësia $M = A \cap B$ është bashkësia që formohet nga ata katërkëndësha që janë edhe drejtkëndësha, edhe rombe. Kjo është bashkësia e katrorëve.

2 Jepen $A =]1, 5]$ dhe $B = \{1, 5\}$.

a Gjeni $A \cap B$. **b** Sa numra të plotë ka në bashkësinë $A \cup B$?

Zgjidhje

a Kemi $A \cap B = \{5\}$ **b** Kemi $A \cup B = [1, 5]$. Në $A \cup B$ ka pesë numra të plotë.

3 Jepen bashkësitë $A =]2, 5[$ dhe $B = [3, 7]$. Gjeni $A \cap B$ dhe $A \cup B$.

Zgjidhje

Bashkësitë e dhëna i paraqesim në boshtin numerik (fig. 1.5).

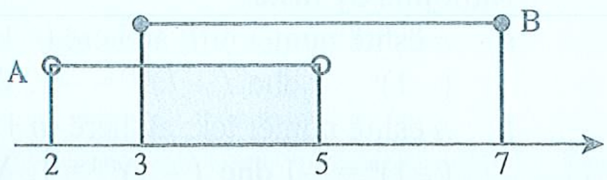


Fig. 1.5

Vëmë re se $A \cap B=\{x \in R/3 \leq x<5\}$ dhe $A \cup B=\{x \in R/2<x \leq 7\}$.

4 Jepet $A=\{x \in R/-2 \leq x<5\}$ dhe $B=\{x \in R/2<x \leq 7\}$. Gjeni $A \cap B$ dhe $A \cup B$.

Zgjidhje

Kemi $A \cap B =]2, 5[$ dhe $A \cup B = [-2, 7]$ (fig. 1.6).

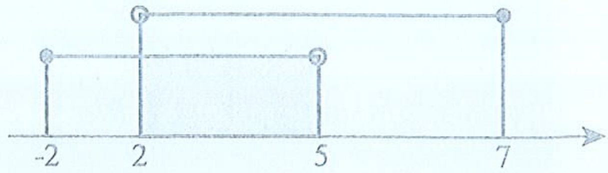


Fig. 1.6

5 Jepet $A =]-\infty,3]$ dhe $B =]1,7]$. Gjeni $A \cap B$ dhe $A \cup B$.

Zgjidhje

$A \cap B =]1, 3]$ dhe $A \cup B =]-\infty,7]$ (fig. 1.7)

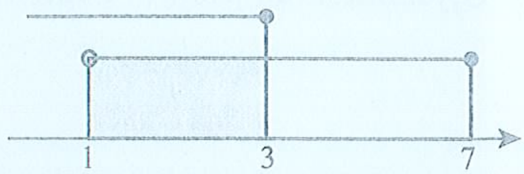


Fig. 1.7

6 Jepet A x B $=\{(a,b); (b,b); (c,b); (a,c); (b,c); (c,c)\}$. Gjeni A ∩ B.

Zgjidhje

Nga prodhimi kartezian del se A=$\{a, b, c\}$ dhe B = $\{b, c\}$. Në këtë mënyrë A ∩ B = $\{b, c\}$

7 Jepet numri $x = \frac{40}{n}$. Për ç'vlera të n kemi $x \in$ N?

Zgjidhje

Pjesëtuesit e numrit 40 janë 1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 40. Nëse n merr këto vlera, del se x është numër natyror.

8 Vërtetoni që:

a Katrori i çdo numri natyror çift është numër natyror çift.

b Nëse katrori i një numri natyror është tek, atëherë ky numër është tek.

Zgjidhje

a Nëse p është numër çift, ai shkruhet në trajtën $p = 2k$, ku k është numër i plotë. Kemi:
$p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$. Pra p^2 është numër çift.

b Supozojmë se katrori i numrit p është tek, por numri p nuk është tek. Atëherë p do të jetë çift, kështu do të dilte që edhe katrori i p do të ishte çift, gjë që është në kundërshtim me kushtin.

9 Gjeni vlerën e shprehjes $(-1)^n + (-1)^{n+1}$, ku n është numër natyror.

Zgjidhje

Dallojmë dy raste.

a n është numër çift; atëherë $(n + 1)$ është numër tek. Kemi:
$(-1)^n = 1$ dhe $(-1)^{n+1} = -1$. Vlera e shprehjes është $1 - 1 = 0$.

b n është numër tek; atëherë $(n + 1)$ është numër çift. Kemi:
$(-1)^n = -1$ dhe $(-1)^{n+1} = 1$. Vlera e shprehjes është $-1 + 1 = 0$.

10 Vërtetoni që për çdo vlerë natyrore të n, shprehja $n^2 + n$ plotpjesëtohet me 2.

Zgjidhje

Shkruajmë $n^2 + n = n(n+1)$

Nëse n është çift, ai plotpjesëtohet me 2, prandaj edhe prodhimi $n(n + 1)$ plotpjesëtohet me 2.

Nëse n është tek, atëherë $(n + 1)$ është çift, prandaj prodhimi $n(n + 1)$ plotpjesëtohet me 2.

11 Në një klasë me 30 nxënës, 18 luajnë volejboll, 14 luajnë basketboll, ndërsa 5 nuk luajnë asnjë nga këto lojëra. Gjeni numrin e nxënësve që luajnë volejboll dhe basketboll.

Zgjidhje

Shënojmë:

E – bashkësia e nxënësve të klasës. V – bashkësia e nxënësve të klasës që luajnë volejboll. B – bashkësia e nxënësve të klasës që luajnë basketboll.

x – numri i nxënësve që luajnë volejboll dhe basketboll.

Në diagramin e Venit (fig. 1.8) kemi:

$n(E) = 30,\quad n(V) = 18,\quad n(B) = 14.$

Shkruajmë $(18 - x) + x + (14 - x) + 5 = 30$,

prej ku $x = 7$.

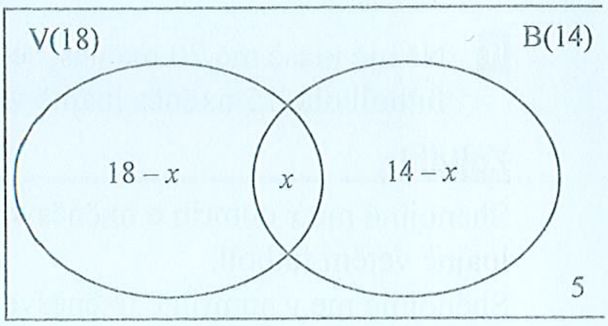


Fig. 1.8

12 Shënojmë:

A – bashkësia e deleve;

B – bashkësia e kuajve;

C – bashkësia e kafshëve inteligjente;

D – bashkësia e kafshëve të zeza.

a Shprehni në gjuhën e bashkësive fjalitë e mëposhtme:

– Asnjë nga delet nuk është kafshë inteligjente: $A \cap C = \phi$.

– Të gjithë kuajt janë të zinj: $B \subset D$.

– Disa dele janë të zeza: $A \cap D \neq \phi$.

b Interpretoni shënimet e mëposhtme:

– $B \subset C$: të gjithë kuajt janë kafshë inteligjente.

– $B \cup C = D$: kafshët e zeza janë ose kuaj ose kafshë inteligjente.

13 Shkruani të gjitha nënbashkësitë e bashkësisë $A = \{a, b, c\}$.

Zgjidhje

Nënbashkësi me asnjë element: ϕ.

Nënbashkësi me një element: $\{a\}$; $\{b\}$; $\{c\}$.

Nënbashkësi me dy elemente: $\{a,b\}$; $\{b,c\}$; $\{a,c\}$.

Nënbashkësi me tri elemente: $\{a, b, c\}$.

Gjithsej 8 nënbashkësi.

14 Bashkësitë A dhe B nuk kanë asnjë element të përbashkët. Jepet $n(A \cup B) = 12$ dhe $n(A) = 7$. Sa elemente që nuk bëjnë pjesë në bashkësinë A, bëjnë pjesë në bashkësinë B?

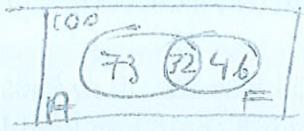
Zgjidhje

Meqë $A \cap B = \phi$ kemi $n(A \cup B) = n(A) + n(B) \Rightarrow n(B) = n(A \cup B) - n(A) = 12 - 7 = 5$.

15 Nga 100 nxënës të një shkolle, 73 mësojnë anglisht, 46 mësojnë frëngjisht, 32 nxënës mësojnë dhe anglisht dhe frëngjisht.

a Sa nxënës mësojnë të paktën një nga këto gjuhë?

b Sa nxënës nuk mësojnë asnjë nga këto gjuhë?



b) $41+14+32=87$ nx
$100-87=13$ nx

Zgjidhje a) $73-32=41$ nx Ang $46-32=14$ nx Frëng $\Rightarrow 41+14=55$ nx
$+32$
87 nx

Shënojmë me A bashkësinë e nxënësve që mësojnë anglisht; $n(A) = 73$.
Shënojmë me B bashkësinë e nxënësve që mësojnë frëngjisht; $n(B) = 46$.
Bashkësia e nxënësve që mësojnë anglisht dhe frëngjisht është $A \cap B$.
Është dhënë $n(A \cap B) = 32$.
Bashkësia e nxënësve që mësojnë të paktën një nga këto gjuhë është $A \cup B$. Kërkohet $n(A \cup B)$. Kemi: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 73 + 46 - 32 = 87$.

a 87 nxënës mësojnë të paktën një nga këto gjuhë.

b $100 - 87 = 13$ nxënës nuk mësojnë asnjë nga këto gjuhë.

16 Në një klasë me 20 nxënës, secili luan futboll dhe/ose volejboll. 12 nxënës luajnë futboll dhe 15 nxënës luajnë vetëm një sport. Sa nxënës luajnë volejboll?

Zgjidhje

Shënojmë me x numrin e nxënësve që luajnë vetëm futboll.
Shënojmë me y numrin e nxënësve që luajnë vetëm volejboll.
Shënojmë me z numrin e nxënësve që luajnë futboll dhe volejboll.
Në figurën 1.9 paraqiten këto bashkësi me diagrame të Venit.

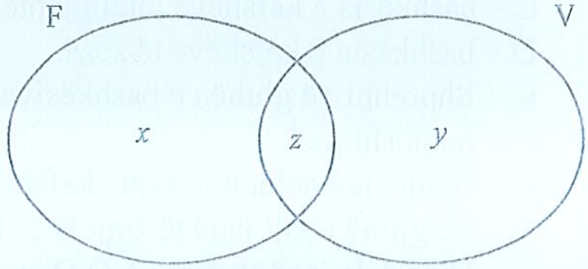


Fig. 1.9

Nga të dhënat e problemës kemi:

(1) $x + z = 12$, sepse 12 nxënës luajnë futboll.

(2) $x + y = 15$, sepse 15 nxënës luajnë vetëm një sport.

(3) $x + y + z = 20$, sepse klasa ka 20 nxënës.

Në ekuacionin e tretë, duke zëvendësuar $x + z = 12$ (nga ekuacioni i parë), gjejmë $y = 8$.
Më pas, nga ekuacioni i dytë gjejmë $x = 7$ dhe nga ekuacioni i parë, gjejmë $z = 5$.
Numri i nxënësve që luajnë volejboll është $z + y = 5 + 8 = 13$.

17 Në një grup prej 39 nxënësish, numri i nxënësve që luajnë futboll është 2 herë më i madh se numri i nxënësve që luajnë volejboll. Nëntë nxënës luajnë edhe futboll edhe volejboll. Në qoftë se dihet që çdo nxënës është i angazhuar në njërën lojë, sa është numri i nxënësve që luajnë vetëm futboll?

Zgjidhje

Shënojmë me x numrin e nxënësve që luajnë vetëm futboll. Meqë 9 nxënës luajnë edhe futboll edhe volejboll, del se numri i nxënësve që luajnë vetëm volejboll është $39 - 9 - x = 30 - x$.

Në figurën 1.10 paraqiten bashkësitë përkatëse me diagrame të Venit.

Nga kushti kemi:

$x + 9 = 2(39 - x)$ nga ku $x = 23$.

Vetëm futboll luajnë 23 nxënës.

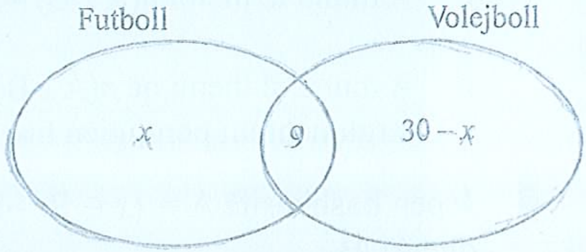


Fig. 1.10

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Renditni të gjitha elementet e bashkësive të mëposhtme:

a Numrat natyrorë më të mëdhenj se 10 dhe më të vegjël ose të barabartë me 17.
b Numrat e thjeshtë më të vegjël se 50.
c Numrat natyrorë më të vegjël se 50 që janë shumëfisha të numrit 3.
d Numrat një ose dyshifrorë që janë katrorë të plotë.

2 Duke përdorur bashkësitë e ushtrimit paraardhës, gjeni:

a $A \cap B$ b $C \cap D$ c $A \cap B \cap C$ d $A \cap B \cap D$

P. [a) $A \cap B = \{11, 13, 17\}$; b) $A \cap B \cap D = \phi$]

3 Në bashkësitë e mëposhtme, elementet gëzojnë një veti. Gjeni elementin që nuk e gëzon këtë veti.

a $\{1; 9; 25; 64; 81; 99; 100\}$; b $\{2; 7; 11; 37; 61, 83, 91; 97\}$
c {Erzen, Seman, Shkumbin, Vjosa, Vlora}; d $\{a; o; u; v; zh; k; t\}$.
Argumentoni përgjigjen tuaj.

4 Në pohimet e mëposhtme, dalloni ato që janë të vërteta (V) dhe ato që janë të gabuara (G).

		V	G
a	Diferenca e dy numrave natyrorë është numër natyror.	☐	☐
b	Prodhimi i dy numrave natyrorë është numër natyror.	☐	☐
c	Prodhimi i dy numrave racionalë është numër racional.	☐	☐
d	Prodhimi i dy numrave irracionalë është numër irracional.	☐	☐
e	Raporti i dy numrave të plotë është numër i plotë.	☐	☐
f	Rrënja katrore e një numri të plotë është numër racional.	☐	☐
g	Shuma e dy numrave irracionalë është numër irracional.	☐	☐

5 Jepen bashkësitë:

A: Bashkësia e katërkëndëshave; B: Bashkësia e paralelogrameve;
C: Bashkësia e drejtkëndëshave; D: Bashkësia e rombeve; E: Bashkësia e katrorëve.
Gjeni:

a $C \cap D$ b $D \cap E$ c $D \cup E$ d $B \cap C$
e $B \cup C$ f $E \cup D$ g $E \cap D$

6 Jepen bashkësitë $A = \{a, b, c\}$ dhe $B = \{2, 3\}$. Gjeni $A x B$ dhe $B x A$.
a A mund të themi $n(A x B) = n(B x A)$?

b A mund të themi që $n(A x B) = n(B x A)$ për çdo dy bashkësi A dhe B? Argumentoni përgjigjen tuaj.
P. [b) po]

7 Jepen bashkësitë $A = \{x \in R / -1 \leq x < 1\}$ dhe $B = \{x \in R / 0 < x < 2\}$. Gjeni $A \cap B$ dhe $A \cup B$.

8 Jepen bashkësitë $A = [-2, 1\}$ dhe $B = [0, +\infty[$.
a Gjeni $A \cap B$ dhe $A \cup B$.
b Në bashkësinë $A \cup B$, gjeni:
i Elementin më të vogël. ii Elementin më të madh.
P. [b i 2; ii Nuk ekziston.]

xhesiang

9 Jepet bashkësia $P = \{x \in N / 4 \leq x < 17\}$. Për ç'vlera të x nga kjo bashkësi, $\sqrt{x}$ është numër racional?

10 Jepen bashkësitë $A = \{x \in R / 2 - x \geq 0\}$ dhe $B = \{x \in R / 4x - 12 > 0\}$. Gjeni $A \cap B$.
P. [ϕ]

11 Për bashkësitë A, B dhe C jepet $n(A) = 5$; $n(B) = 6$ dhe $n(C) = 11$. Gjeni numrin maksimal të mundshëm të elementeve të bashkësisë $A \cap B \cap C$.
P. [5]

12 Jepet $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dhe $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Gjeni numrin maksimal M dhe minimal m të mundshëm të elementeve të bashkësisë B.
P. [$M = 6$; $m = 2$]

13 Jepen bashkësitë $A = \{x \in N / (x^2 - 25)(x - 7) = 0\}$ dhe $B = \{x \in Z / x - 4 > 0\}$. Gjeni $A \cap B$.

P.[{5,7}]

14 Në një grup prej 25 nxënësish, 15 pinë vetëm çaj, 11 pinë vetëm kafe dhe 5 pinë edhe çaj edhe kafe. Sa nxënës nuk pinë as çaj e as kafe?
P. [4]

15 Jepet $A = \{x \in Z / -5 < x < 5\}$ dhe $B = \{x \in Z / (x^2 - 25) \leq 0\}$. Gjeni $A \cap B$ dhe $A \cup B$.
P. [$A \cap B = A$; $A \cup B = B$]

16 Jepet $A \cap B = \phi$; $n(A \cup B) = 15$; $n(B) = 9$. Sa elemente që nuk bëjnë pjesë në bashkësinë B, bëjnë pjesë në bashkësinë A?
P. [6]

17 A është bashkësia e numrave natyrorë më të vegjël se 13. B është bashkësia e numrave në fushën e sahatit të qytetit. A mund të themi që $A = B$? Diskutoni!

18 Në një grup prej 20 nxënësish, 8 luajnë shah, por jo ping-pong dhe 15 luajnë shah. Në qoftë se secili nxënës luan të paktën një lojë, sa nxënës luajnë ping-pong, por jo shah?
P. [5]

19 Në një qytet, 40% e banorëve kanë syze, 25% janë mëngjarashë, 10% kanë syze dhe janë mëngjarashë. Sa për qind e banorëve nuk kanë syze dhe nuk janë mëngjarashë?

P. [45%]

20 Jepen bashkësitë $A = [-2, 6[$ dhe $B = [1, 9]$.

a Gjeni prerjen $A \cap B$ të tyre.

b Sa numra të plotë që bëjnë pjesë në bashkësinë B, nuk bëjnë pjesë në bashkësinë A?

c Sa numra të plotë që bëjnë pjesë në bashkësinë A, nuk bëjnë pjesë në bashkësinë B?

d Sa numra të plotë bëjnë pjesë edhe në bashkësinë A, edhe në bashkësinë B?

P. [a) [1, 6[; b) 4; c) 3; d) 5]

21 Në një klasë me 40 nxënës u zhvillua testim në matematikë dhe fizikë. U arrit kalueshmëria 80% në matematikë dhe 60% në fizikë. Sa është numri i nxënësve që u shpallën fitues në të dy testimet?

P. [16]

22 A është bashkësia e numrave të trajtës $2m$; B është bashkësia e numrave të trajtës n^2; C është bashkësia e numrave të trajtës $10k$. Në qoftë se $m, n, k \in N$, cili nga numrat e mëposhtëm bën pjesë në bashkësinë $A \cap B \cap C$?

A 1 B 4 C 25 D 100

23 Cilën bashkësi paraqet pjesa e vijëzuar në figurën 1.11? Zgjidhni alternativën e saktë.

A) $M \cap N \cap P$ B) $(M \cup N) \cap P$

C) $(M \cap N) \cup P$ D) $(P \cap N) \cup M$

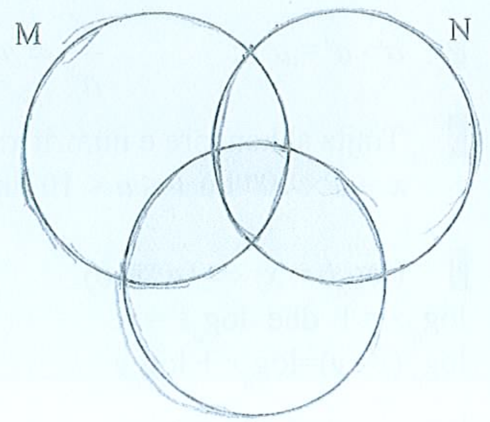


Fig. 1.11

24 Në figurën 1.12 gjeni numrin elementeve të bashkësisë $Q \cap (P \cup R)$.

P. [17]

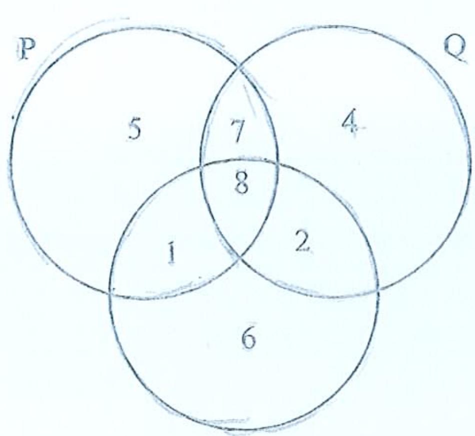


Fig. 1.12

Xhesi

lessy

KREU 2

RRËNJËT, FUQITË, LOGARITMET

1 $a^n = a \cdot a \cdots a$ (n faktorë): $a \in R$ dhe $n \in N$.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n};\ a^0 = 1;\ a^1 = a : a \neq 0;\ a \in R \text{ dhe } n \in N.$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} : a, b > 0 \text{ dhe } n, m \in N$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{për } a \geq 0 \\ -a & \text{për } a < 0 \end{cases}$$

2 $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $\quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; $\quad (a^x)^y = a^{xy}$; $\quad a^x \cdot b^x = (ab)^x$; $\quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

3 Trajta shkencore e numrit x:
$x = a \times 10^m$ ku $1 \leq a < 10$ dhe $m \in Z$.

4 $(\log_a b = x) \Leftrightarrow (a^x = b)$
$\log_a a = 1$ dhe $\log_a 1 = 0$.
$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
$\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x \qquad (\alpha \in R)$
$\log_{10} x = \log x$
$\log_e x = \ln x \qquad (\ln x \approx 2{,}3 \cdot \log x)$
$\log_a b = \frac{\log b}{\log a} \qquad (a > 0;\ b \neq 1)$

Ushtrime të zgjidhura

1 Masa e atomit të hidrogjenit është 0,00 000 000 000 000 000 000 000 167g. Në trajtë standarde, ajo shkruhet $1{,}67 \times 10^{-24}$g. Në këtë rast, $a = 1{,}67$ dhe $m = -24$.

2 Kryeni veprimet e mëposhtme me numrat e shkruar në trajtë standarde.
a $(3{,}1 \times 10^3) \times (2{,}3 \times 10^4) = (3{,}1 \times 2{,}3)10^{3+4} = 7{,}13 \times 10^7$.

b $\dfrac{4{,}8\cdot10^2}{1{,}5\cdot10^8}=\dfrac{4{,}8}{1{,}5}10^{2-8}=3{,}2\cdot10^{-6}$

c $(8\times10^3)\times(4{,}5\times10^4)=8\times4{,}5\times10^{3+4}=36\times10^7=3{,}6\times10^8.$

3 Paraqitni në trajtë standarde numrat:
75000; 750; 75; 0,75; 0,075.

Zgjidhje

$75000=75\cdot1000=7{,}5\cdot10\cdot10^3=7{,}5\cdot10^4;\quad 750=75\cdot10=7{,}5\cdot10\cdot10=7{,}5\cdot10^2;$

$75=7{,}5\cdot10=7{,}5\cdot10^1;\quad 0{,}75=\dfrac{75}{100}=\dfrac{7{,}5\cdot10}{100}=7{,}5\cdot10^{-1};$

$0{,}075=\dfrac{75}{1000}=\dfrac{7{,}5\cdot10}{10^3}=7{,}5\cdot10^{-2}.$

4 Njehsoni $\dfrac{12^6}{6^6}$.

Zgjidhje

$\dfrac{12^6}{6^6}=\left(\dfrac{12}{6}\right)^6=2^6=64.$

5 Shkruani numrin 328 si një shprehje që përmban fuqi të dhjetës.

Zgjidhje

$328=3\cdot100+2\cdot10+8\cdot1$ d.m.th.,
$328=3\cdot10^2+2\cdot10^1+8\cdot10^0$

6 Paraqitni shprehjen $(8^4)^3:(4^3)^2$ si një fuqi me bazë 2.

Zgjidhje

Vëmë re që $8=2^3$.

Atëherë $8^4=(2^3)^4$, d.m.th., $8^4=2^{12}$.

Prandaj $(8^4)^3=(2^{12})^3$, d.m.th., $(8^4)^3=2^{36}$.

Kurse $4=2^2$, prandaj $4^3=(2^2)^3$.

Kemi $4^3=2^6$ dhe $(4^3)^2=(2^6)^2$ d.m.th., $(4^3)^2=2^{12}$.

Kështu që $(8^4)^3:(4^3)^2=2^{36}\cdot2^{12}=2^{24}$.

7 Krahasoni: $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ me $\sqrt{0{,}7}$.

Zgjidhje

Krahasojmë në fillim $\dfrac{3}{7}$ me 0,7, d.m.th., $\dfrac{3}{7}$ me $\dfrac{7}{10}$.

I kthejmë thyesat në emërues të përbashkët.

Kemi $\frac{3}{7}=\frac{30}{70}$ dhe $\frac{7}{10}=\frac{49}{70}$.

Pra $\frac{3}{7}<0{,}7$. Në këtë mënyrë $\sqrt{\frac{3}{7}}<\sqrt{0{,}7}$.

8 Paraqitni më thjeshtë shprehjet e mëposhtme.

a $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1$ (sepse $\sqrt{2}-1>0$)

b $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}=|3-\sqrt{10}|=-(3-\sqrt{10})=\sqrt{10}-3$ sepse $3-\sqrt{10}<0$.

9 Krahasoni numrat.

a $\sqrt[3]{3}$ dhe $\sqrt[6]{5}$ b $\sqrt{2}$ dhe $\sqrt[6]{7}$ c $\sqrt[3]{2}$ dhe $\sqrt[12]{45}$

d $5^{1,3}$ me $5^{1,5}$ e $(\frac{1}{5})^2$ me $(\frac{1}{5})^6$ f $3^{-0,5}$ me $3^{-1,5}$

Zgjidhje

c I kthejmë rrënjët në të njëjtët tregues, duke gjetur ShVP e treguesve 3 dhe 12. Ky është 12.

Kemi $\sqrt[3]{2}=\sqrt[3\cdot4]{2^4}=\sqrt[12]{16}$.
Krahasojmë numrat nën rrënjë.

Nga $16<45$ rrjedh $\sqrt[12]{16}<\sqrt[12]{45}$.

Si përfundim $\sqrt[3]{2}<\sqrt[12]{45}$.

d $5^{1,3}<5^{1,4}$ (sepse $5>1$ dhe $1,3<1,4$)

e $(\frac{1}{5})^2>(\frac{1}{5})^6$ (sepse $\frac{1}{5}<1$ dhe $2<6$)

10 Gjeni vlerën e shprehjes $A=\frac{(4^2)^3\cdot(2^{-3})^2}{8^3}$.

Zgjidhje

Vëmë re se të gjitha fuqitë mund të paraqiten në trajtën e fuqive me bazë 2. Kemi:

$$A=\frac{(4^2)^3\cdot(2^{-3})^2}{8^3}=\frac{4^{12}\cdot2^{-6}}{8^3}=\frac{(2^2)^{12}\cdot2^{-6}}{(2^3)^3}=\frac{2^{24}\cdot2^{-6}}{2^9}=\frac{2^{18}}{2^9}=2^{18-9}=2^9$$

11 Zgjidhni ekuacionin: $2^x=\frac{1}{16}$

Zgjidhje

$2^x=\frac{1}{16}$

Kemi $\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}=2^{-4}$

Pra: $2^x=2^{-4}\Rightarrow x=-4$

12 Numrat 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 paraqitini si shumë fuqish me bazë 2.

Shembull

$4 = 2^2$; $5 = 4 + 1 = 2^2 + 2^0$; $7 = 4 + 2 + 1 = 2^2 + 2^1 + 2$ etj.

13 Jepet $A = 2^7 + 2^7 + 2^7$ dhe $B = 3^8 + 3^8 + 3^8 + 3^8$. Gjeni $A \times B$.

Zgjidhje

Kemi $A = 2^7 + 2^7 + 2^7 = 3 \times 2^7$ dhe $B = 3^8 + 3^8 + 3^8 + 3^8 = 4 \times 3^8$

$A \times B = 3 \times 2^7 \times 4 \times 3^8 = 3 \times 2^7 \times 2^2 \times 3^8 = 3^9 \times 2^9 = 6^9$

14 Duke përdorur përkufizimet ose vetitë e fuqive, gjeni me dy mënyra:

a $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-3}$ b $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Zgjidhje

a $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-3} = \dfrac{4^{-3}}{9^{-3}} = \dfrac{\dfrac{1}{64}}{\dfrac{1}{243}} = \dfrac{243}{64}$. $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-3} = \left(\dfrac{9}{4}\right)^3 = \dfrac{243}{64}$.

15 Shkruani si fuqi me bazë $\dfrac{1}{2}$ numrat e mëposhtëm:

a) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{32}$ b $\sqrt{2}, \sqrt{2^3}, \sqrt[3]{4}$ c $1, 2, 4, 8, 16, 32$ d $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, \dfrac{1}{\sqrt[4]{2^3}}, \dfrac{1}{\sqrt[5]{16}}$

Zgjidhje

a $2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-5}$ b $2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{3}{2}}, 2^{\frac{2}{3}}$ d $2^{-\frac{1}{3}}, 2^{-\frac{3}{4}}, 2^{-\frac{4}{5}}$

16 Gjeni logaritmet me bazë 2 të numrave të mëposhtëm:

$2; 8; \dfrac{1}{2}; \sqrt{2}; 2\sqrt{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Zgjidhje

Shënojmë $\log_2 2\sqrt{2} = x$. Sipas përkufizimit të logaritmit kemi: $2^x = 2\sqrt{2}$ d.m.th.,

$$2^x = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

17 Njehsoni:

a $\log_6 2 + \log_6 3$ b $\log_3 7 - \log_3 \dfrac{7}{9}$ c $\log_5 100 - \log_5 4$

Zgjidhje

a $\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 2 \cdot 3 = \log_6 6 = 1$

c $\log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 \frac{100}{4} = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$

18 Vërtetoni që $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$, kur $x > 0$ $(0 < a \neq 1)$

Zgjidhje

Kemi $\log_a \frac{1}{x} = \log_a 1 - \log_a x = 0 - \log_a x = -\log_a x$

19 Gjeni x në qoftë se:

a $\log x = 3\log a + \log b$ b $\log x = \frac{1}{2}\log 5 - \log 3$ c $x = 4\log 2 - \log 11$

Zgjidhje

b $\log x = \frac{1}{2}\log 5 - \log 3 = \log 5^{\frac{1}{2}} - \log 3 = \log \frac{5^{\frac{1}{2}}}{3} = \log \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

20 Krahasoni:

a $\log(4 + 7)$ me $\log 4 + \log 7$ b $1 + 2\log 2$ me $3\log 7 - \log 3$

Zgjidhje

a $\log(4 + 7) = \log 11$, kurse $\log 4 + \log 7 = \log(4 \cdot 7) = \log 28$.
Prandaj $\log(4 + 7) < \log 4 + \log 7$

b $1 + 2\log 2 = \log 10 + \log 2^2 = \log 10 + \log 4 = \log 40$

$3\log 7 - \log 3 = \log 7^3 - \log 3 = \log \frac{7^3}{3} = \log \frac{343}{3} = \log 114\frac{1}{3}$

Prandaj $1 + 2\log 2 < 3\log 7 - \log 3$

21 Përcaktoni shenjën e shprehjes: a $\log_4 5$ b $\log_{\frac{1}{2}} 3$

Zgjidhje

a Kemi $5 > 1$, prandaj $\log_4 5 > \log_4 1$, d.m.th., $\log_4 5 > 0$.

b Kemi $3 > 1$, prandaj $\log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} 1$, d.m.th., $\log_{\frac{1}{2}} 3 < 0$.

22 Paraqitni më thjesht:

a $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$. b $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

c $\sqrt{\frac{32}{25}} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{16 \cdot 2}}{5} = \frac{\sqrt{16} \cdot \sqrt{2}}{5} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$. d $\sqrt{3a^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2} = a\sqrt{3}$ (kur $a > 0$).

23 Paraqitni më thjesht shprehjen $\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{5}\right)^2$.

Zgjidhje

$$\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{5}\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\cdot\left(3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{5}\right)+\left(2\sqrt{5}\right)^2=$$

$$=3^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2-12\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+2^2\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2=9\cdot2-12\sqrt{10}+4\cdot5=38-12\sqrt{10}$$

24 Zhdukni rrënjën nga emëruesi i thyesës: $\dfrac{3\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}$ (kur $x>0$, $y>0$).

Zgjidhje

Shumëzojmë numëruesin dhe emëruesin me të koniuguarin e emëruesit d.m.th., me

$\sqrt{x}-2\sqrt{y}$.

Kemi:

$$\frac{3\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}=\frac{\left(3\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)}=\frac{3\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}-6\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}-\sqrt{y}\cdot\sqrt{x}+2\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(2\sqrt{y}\right)^2}=$$

$$=\frac{3x-7\sqrt{xy}+2y}{x-4y}$$

25 Paraqitni më thjesht shprehjen $\dfrac{20}{\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$.

Zgjidhje

$$\frac{20}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=\frac{20\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}+\frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\frac{20\sqrt{5}}{5}+\frac{5-4\sqrt{5}-4}{5-4}=4\sqrt{5}+1-4\sqrt{5}=1$$

26 Jepet $2^{n+3}+2^{n+2}-2^{n+1}-2^n=144$. Gjeni n.

Zgjidhje

Nga vetitë e fuqive kemi:

$2^{n+3}=2^n\cdot2^3$; $2^{n+2}=2^n\cdot2^2$; $2^{n+1}=2^n\cdot2$. Zëvendësojmë në ekuacionin e dhënë.

$2^n\cdot2^3+2^n\cdot2^2-2^n\cdot2-2^n=144\Rightarrow2^n(2^3+2^2-2-1)=144$

$\Rightarrow2^n\cdot9=144\Rightarrow2^n=16\Rightarrow2^n=2^4\Rightarrow n=4$

27 Zgjidhni ekuacionet:

a $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b $2^x=4\cdot\sqrt{2}$ c $3^x=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$

d $\log_2(x+1)=\log_2 6$ e $\log(x^2-4)=\log(x+2)$

Zgjidhje

a $(\frac{1}{3})^x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow(\frac{1}{3})^x=\dfrac{1}{3^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow(\frac{1}{3})^x=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

b $2^x = 4\cdot\sqrt{2} \Rightarrow 2^x = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^x = 2^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

c $3^x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}} \Rightarrow 3^x = 3^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

d Kemi $\log_2(x+1) = \log_2 6 \Rightarrow x+1 = 6 \Rightarrow x = 5$.

e Kemi $\log(x^2-4) = \log(x+2) \Rightarrow \begin{cases} x^2-4 = x+2 \\ x^2-4>0 \\ x+2>0 \end{cases}$.

Nga ekuacioni i parë kemi $x_1 = -2$; $x_2 = 3$. Dy kushtet e tjera i plotëson vetëm vlera $x = 3$, prandaj kjo është e vetmja rrënjë e ekuacionit.

28 Zgjidhni ekuacionin eksponencial, duke bërë zëvendësimin e ndryshorit:

a $5^{2x} - 6\cdot 5^x + 5 = 0$ b $4^x + 2^x - 6 = 0$

Zgjidhje

a Bëjmë zëvendësimin $5^x = t$ dhe kemi $t^2 - 6t + 5 = 0$.

Marrim $t = 1$ ose $t = 5$, pra $5^x = 1$ ose $5^x = 5$. Kështu $x = 0$ ose $x = 1$.

b Bëjmë zëvendësimin $2^x = t$. Duke patur parasysh që $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = t^2$, ekuacioni merr trajtën $t^2 + t - 6 = 0$.

Marrim $t = -3$ ose $t = 2$, d.m.th., $2^x = -3$ ose $2^x = 2$. Ekuacioni $2^x = -3$ nuk ka zgjidhje, kurse nga ekuacioni $2^x = 2$ marrim $x = 1$.

29 Jepet $\log 2 = a$. Gjeni $\log 5$.

Zgjidhje

$\log 10 = 1 \Rightarrow \log 2\cdot 5 = 1 \Rightarrow \log 2 + \log 5 = 1 \Rightarrow \log 5 = 1 - \log 2 \Rightarrow \log 5 = 1 - a$

30 Jepet $3^{x+1} = a$. Gjeni 9^x.

Zgjidhje

$3^{x+1} = a \Rightarrow 3^x\cdot 3 = a \Rightarrow 3^x = \frac{a}{3}$

$9^x = (3^2)^x = (3^x)^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{9}$

31 Fortësia e betonit, x ditë pasi ai është hedhur, llogaritet sipas formulës $R(x) = R(30)\cdot\log_{30}x$, ku: $R(30)$ është fortësia e tij në moshën 30-ditore.

Sa ditë duhet të kalojnë që fortësia e betonit të jetë dy herë më e madhe se në moshën 30-ditore?

Zgjidhje

Në barazimin $R(x) = R(30)\cdot\log_{30}x$, kërkohet të përcaktojmë x në mënyrë që $R(x) = 2R(30)$. Kemi $2R(30) = R(30)\cdot\log_{30}x$.

Pra, $\log_{30}x = 2 \Rightarrow x = 30^2$ pra, $x = 900$ ditë.

32 Jepet $x = 6 - \sqrt{5}$. Gjeni $\sqrt{20}$.

Zgjidhje

$x = 6 - \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5} = 6 - x$

$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5} = 2(6 - x) = 12 - 2x$

33 Zgjidhni ekuacionin $(\log x)^2 - 3\log x + 2 = 0$.

Zgjidhje

Zëvendësojmë $\log x = t$. Kemi:
$t^2 - 3t + 1 = 0$. Rrënjët e këtij ekuacioni janë $t = 1$ ose $t = 2$.
$\log x = 1 \Rightarrow x = 10$; $\log x = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100$

34 Jepet $\log_{a+2} 16 = 2$. Gjeni a.

Zgjidhje

Nga përkufizimi i logaritmit kemi:
$(a + 2)^2 = 16 \Rightarrow a + 2 = 4 \Rightarrow a = 2$ ($a + 2$ nuk mund të jetë e barabartë me -4, sepse është bazë e logaritmit).

35 Thjeshtoni shprehjen

$$\frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+2^{-x}}.$$

Zgjidhje

$$\frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+2^{-x}} = \frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+\frac{1}{2^x}} = \frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{\frac{2^x+1}{2^x}} = \frac{1}{1+2^x} + \frac{2^x}{1+2^x} = \frac{1+2^x}{1+2^x} = 1$$

36 Jepet $\log 2 = a$ dhe $\log 3 = b$. Gjeni $\log_5 6$.

Zgjidhje

$$\log_5 6 = \frac{\log 6}{\log 5} = \frac{\log 2 \cdot 3}{\log \frac{10}{2}} = \frac{\log 2 + \log 3}{\log 10 - \log 2} = \frac{a+b}{1-a}$$

37 Vëllimi i lëndës drusore të një pylli, për çdo vit shtohet me 10% të vlerës që ai ka në fillim të vitit.

a Tregoni që vëllimi i lëndës drusore, pas t vjetësh, jepet nga formula $V = V_0(1{,}1)^t$ ku V_0 është vëllimi i lëndës drusore në çastin fillestare (kur $t = 0$).

b Nëse $V_0 = 10\,000$ m^3, sa do të jetë V pas 4 vjetëve?

c Pas sa vjetësh do të kemi $V = 12\,100$ m^3?

Zgjidhje

a Pas një viti, vëllimi i lëndës drusore është $V_1 = V_0 + \frac{10}{100} V_0$ d.m.th.,

$V_1 = V_0(1,1)$. Pas dy vjetësh, vëllimi i lëndës drusore është

$V_2 = V_1 + \frac{10}{100} V_1 = V_1(1,1)$ d.m.th., $V_2 = V_0(1,1)^2$.

Duke vazhduar arsyetimet, gjejmë që pas t vjetësh, vëllimi i lëndës drusore do të jetë $V_t = V_0(1,1)^t$.

b Pas katër vjetëve, do të kemi

$V = V_0(1,1)^4$ d.m.th., $V = 10000(1,4641) = 14641\ m^3$.

c Kërkojmë t, duke ditur $V_0 = 10000$ dhe $V_t = 12100$. Kemi $V_t = V_0(1,1)^t$ d.m.th., $12100 = 10000(1,1)^t$ që nga $(1,1)^t = 1,21 \Rightarrow (1,1)^t = (1,1)^2 \Rightarrow t = 2$.

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 $\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{9}}\cdot\sqrt{\frac{1}{9}-\frac{1}{25}} =$ P. $[\frac{1}{9}]$

2 Jepet $\sqrt{2} = x$. Gjeni $\sqrt{50}+\sqrt{32}-\sqrt{72}$. P. $[3x]$

3 $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-\frac{6}{\sqrt{6}}-\frac{7}{\sqrt{7}}$ P. $[0]$

4 $4\sqrt{8}+5\sqrt{18}-3\sqrt{72}+\sqrt{50} =$ P. $[10\sqrt{2}]$

5 Zhdukni rrënjën nga emëruesi i thyesës:

a $\frac{1}{\sqrt{6}-3}$ b $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ P. [a $-(\sqrt{6}+3)$ b $(\sqrt{7}+\sqrt{5})$]

6 $\frac{5^{-1}+3^{-1}}{5^{-1}-3^{-1}} =$ P. $[-4]$

7 $\frac{10^8-10^6}{5^8-5^6} =$ P. $[264]$

8 $3^{x+1}+3^{x+2} = k \times 3^x \quad k = ?$ P. $[12]$

9 $2^x - 2^{x+1} + 2^{x+2} = 12 \quad x = ?$ P. $[2]$

10 Jepet $3^a = 25$ dhe $3^b = 5$. Gjeni $\frac{a}{b}$. P. $[2]$

11 $\frac{x^{m+2}\cdot x^{n-1}}{x^{m+n}} =$ P. $[x]$

12 $3^x + \frac{2}{3^{-x}} = 81 \quad x = ?$ P. $[3]$

13 Jepet $9^x = m$. Gjeni 3^{2x+1}. P. $[3m]$

14 $\log 20 + 2\log 2 - 3\log 2 =$ P. [1]

15 $\log_9 27 =$ P. $[\frac{3}{2}]$

16 Zgjidhni ekuacionin a $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ b $2(\log x)^2 - 3\log x + 1 = 0$

P. [a $x = 0; x = 1$ b $x = 10; x = \sqrt{10}$]

Udhëzim. Zëvendësoni $3^x = t$

17 Zgjidhni ekuacionet:

a $5^x = \frac{\sqrt{5}}{25}$ b $49^x = 7\sqrt{7}$ P. [a) $-\frac{3}{2}$; b) $\frac{3}{4}$]

18 Masa e majasë dyfishohet çdo ditë. Pas sa ditëve kjo masë do të trefishohet? P. [1,6 ditë]

19 Thjeshtoni thyesën $\frac{5^{n+1}+5^{n-1}}{5^n - 5^{n-2}}$. P. $[\frac{65}{12}]$

20 Shprehni më thjeshtë: $\frac{20}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} =$ P. [9]

21 Thjeshtoni thyesën $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{15}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ P. $[\sqrt{5}]$

22 Jepet $x^y = \sqrt{5}$. Gjeni x^{-2y}. P. $[\frac{1}{5}]$

23 Jepet $6^{x-1} = 3^{x-2}$. Gjeni 2^x. P. $[\frac{2}{3}]$

24 Jepet $\log 20 = a$. Gjeni $\log 5$. P. [2—a]

25 Thjeshtoni shprehjen $M = \frac{1}{1-3^x} + \frac{1}{1-3^{-x}}$ P. [1]

26 Zgjidhni në bashkësinë R ekuacionin:

a $(\frac{1}{3})^x = \frac{1}{3}$ b $(\frac{1}{3})^x = 3$ c $(\frac{1}{3})^x = \frac{1}{9}$ d $(\frac{1}{3})^x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $x^{-1} = 2^{-1} + 3^{-1}$

P. [a) $x = 1$; b) $x = -1$; c) $x = 2$; d) $x = \frac{1}{2}$ e) $x = \frac{6}{5}$]

27 Treguesi hidrogjenor i tretësirës pH jepet nga formula $p\text{H} = -\log x$, ku x është përqendrimi i joneve të hidrogjenit në tretësirë.
Tretësira konsiderohet asnjanëse, kur $p\text{H} = 7$; acide, kur $p\text{H} < 7$; bazike, kur $p\text{H} > 7$. Si duhet të jetë përqendrimi i joneve të hidrogjenit në tretësirë, në mënyrë që ajo të jetë acide? Bazike? P. [a) $x > 10^7$; b) $x < 10^7$]

KREU 3

EKUACIONE. SISTEME EKUACIONESH

Ekuacioni i fuqisë së parë me një ndryshore $ax = b$ (ku a, b janë numra racionalë).

1 $a \neq 0$. Ekuacioni ka vetëm një rrënjë, $x = \frac{b}{a}$.

2 $a = 0$ dhe $b \neq 0$. Ekuacioni nuk ka asnjë rrënjë (sepse për çdo vlerë të x, ana e majtë është zero, kurse e djathta e ndryshme nga zero).

3 $a = 0$ dhe $b = 0$. Ekuacioni ka si rrënjë çdo numër.

Ekuacioni i fuqisë së dytë $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

Dallori $D = b^2 - 4ac$.

1 $D > 0$. Ekuacioni ka dy rrënjë reale të ndryshme:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a};\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

2 $D = 0$. Ekuacioni ka dy rrënjë reale të barabarta:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

3 $D < 0$, Ekuacioni nuk ka rrënjë reale.

Ushtrime të zgjidhura

1 Zgjidhni ekuacionin

$$\frac{2+x}{3} - \frac{x-1}{6} = x + 2.$$

Zgjidhje

$6\left(\frac{2+x}{3} - \frac{x-1}{6}\right) = 6(x+2)$ Shumëzojmë të dyja anët e ekuacionit me 6.

$6\frac{2+x}{3} - 6\frac{x-1}{6} = 6x + 12$ Thjeshtojmë.

$2(2 + x) - (x - 1) = 6x + 12$ Kryejmë shumëzimet.

$4 + 2x - x + 1 = 6x + 12$ Kalojmë kufizat e panjohura në anën e majtë dhe kufizat e njohura në anën e djathtë.

$\Rightarrow 2x - x - 6x = 12 - 4 - 1$ Reduktojmë.

$-5x = 7$ Pjesëtojmë të dyja anët e ekuacionit me -5.

$x = -\frac{7}{5}$ Zgjidhja e ekuacionit është $x = -\frac{7}{5}$

2 Zgjidhni ekuacionin $(x+2)^2-(x-2)^2=3x+1$

a në R; b në N.

Zgjidhje

a Ekuacioni shkruhet:

$x^2+4x+4-(x^2-4x+4)=3x+1 \Rightarrow 8x=3x+1 \Rightarrow 5x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{5}$.

Në R, ky ekuacion ka vetëm një rrënjë; numrin $\frac{1}{5}$.

b Meqë $\frac{1}{5}$ nuk i përket bashkësisë N, ekuacioni nuk ka zgjidhje në N.

3 Zgjidhni ekuacionin me ndryshore x.

a $\frac{x-m}{2}=\frac{1}{3}$ b $3(x-y)+1=x+y+10$

Zgjidhje

a Shumëzojmë të dyja anët e ekuacionit me 6.

$3(x-m)=2 \Rightarrow 3x-3m=2 \Rightarrow 3x=2+3m$ nga ku $x=\frac{2+3m}{3}$.

b $3x-3y+1=x+y+10$.

Veçojmë në anën e majtë, kufizat që përmbajnë ndryshoren x dhe kemi

$3x-x=y+10+3y-1 \Rightarrow 2x=4y+9$, nga ku $x=\frac{4y+9}{2}$.

4 Jepet $(x-3)^2+(y-5)^2=0$. Gjeni $x+y$.

Zgjidhje

Secila prej kllapave të anës së majtë të ekuacionit të dhënë është jonegative dhe shuma e tyre është zero. Kjo ndodh vetëm në rastin kur secila prej tyre është e barabartë me zero. Pra:

$(x-3)^2=0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$ dhe $(y-5)^2=0 \Rightarrow y-5=0 \Rightarrow y=5$

nga ku $x+y=3+5=8$.

5 Rrënja e ekuacionit $\frac{x+1}{2}=3$ plotëson kushtin $ax-2=28$. Gjeni a.

Zgjidhje

$\frac{x+1}{2}=3 \Rightarrow x+1=6 \Rightarrow x=5$. Duke zëvendësuar këtë vlerë të x në kushtin $ax-2=28$, gjejmë a.

$a\cdot 5-2=28 \Rightarrow 5a=30 \Rightarrow a=6$

6 Jepet $x+3=2-y=z-1$. Gjeni $(x+y)(y+z)(x-z)$.

Zgjidhje

$x+3=2-y \Rightarrow x+y=-1$; $2-y=z-1 \Rightarrow y+z=3$; $x+3=z-1 \Rightarrow x-z=-4$.

Përfundimisht $(x+y)(y+z)(x-z)=(-1)\cdot 3\cdot(-4)=12$

7 Zgjidhni ekuacionin $4x^2 - 3x + 7 = 2x^2 + x + 7$.

a në R; **b** në N.

Zgjidhje

Duke i kaluar të gjitha kufizat në anën e majtë, marrim ekuacionin
$4x^2 - 3x + 7 - 2x^2 - x - 7 = 0$ ose $2x^2 - 4x = 0$.
$2x(x - 2) = 0$ nga ku $2x = 0$ ose $x - 2 = 0$.

a Në R, ekuacioni ka dy rrënjë: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

b Në N, ekuacioni ka një rrënjë: $x = 2$.

8 Zgjidhni ekuacionet:

a $2x^2 - 3x + 5 = 0$ **b** $2x^2 - 3x + 1 = 0$ **c** $2x^2 - 4x + 2 = 0$

Zgjidhje

a Kemi $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$
$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 - 40 = -31$. Ekuacioni nuk ka rrënjë.

b Kemi $a = 2$, $b = -3$, $c = 1$
$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$, pra $D = 1$.

Ekuacioni ka dy rrënjë. Meqenëse $\sqrt{D} = 1$, kemi:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) - 1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) + 1}{2 \cdot 2} = 1.$$

c Kemi $a = 2$, $b = -4$, $c = 2$.

$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$. Ekuacioni ka dy rrënjë të barabarta, $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2 \cdot 2} = 1$.

9 Pa njehsuar dallorin, zgjidhni ekuacionin $x = x^2 + \dfrac{1}{4}$.

Zgjidhje

Duke shumëzuar të dyja anët me emëruesin e përbashkët (4), marrim ekuacionin
$4x = 4x^2 + 1$ ose $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

Ky shkruhet $(2x - 1)^2 = 0$ nga ku $2x - 1 = 0$ pra $x = \dfrac{1}{2}$.

Ekuacioni ka dy rrënjë të barabarta me $\dfrac{1}{2}$.

10 Sillni ekuacionin në trajtën $f(x) \cdot g(x) = 0$ dhe pastaj zgjidheni atë.

a $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ **b** $x^3 + 3x^2 = 2x + 6$.

Zgjidhje

a Kemi $(x^3 - x^2) - (4x - 4) = 0 \Rightarrow x^2(x - 1) - 4(x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 - 4) = 0$.
$f(x) = x - 1$; $g(x) = x^2 - 4$.
$f(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$, pra $x = 1$.
$g(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$ pra $x = 2$ ose $x = -2$.
Bashkësia e rrënjëve të ekuacionit të dhënë është $\{-2, 2, 1\}$.

b $x^2(x + 3) = 2(x + 3) \Rightarrow (x + 3)(x^2 - 2) = 0$.

Bashkësia e rrënjëve të ekuacionit të dhënë është $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -3\}$.

11 Zgjidhni ekuacionin me ndryshore x.
$2x^2 - 5ax + 3a^2 = 0 \quad (a > 0)$.

Zgjidhje

Kemi një ekuacion të fuqisë së dytë. Rolin e koeficienteve a, b, c e luajnë përkatësisht $2, -5a, 3a^2$.

$D = (-5a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3a^2 = 25a^2 - 24a^2 = a^2. \qquad \sqrt{D} = \sqrt{a^2} = a$ sepse $a > 0$.

$$x_1 = \frac{5a + a}{2 \cdot 2} = \frac{6a}{4} = \frac{3a}{2} \qquad x_2 = \frac{5a - a}{2 \cdot 2} = a.$$

12 Zgjidhni sistemin e ekuacioneve:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$$

Zgjidhje

Nga ekuacioni i dytë kemi $y = 5x - 3$.
Duke zëvendësuar në ekuacionin e parë kemi:
$3x + 2(5x - 3) = 7 \Rightarrow 3x + 10x - 6 = 7 \Rightarrow x = 1$ nga ku $y = 5 \cdot 1 - 3 = 2$.

Zgjidhja e sistemit është $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

13 Zgjidhni sistemin $\begin{cases} 2x - 4y = -10 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$.

Zgjidhje

Nga ekuacioni i fuqisë së parë $2x - 4y = -10$ shprehim x nëpërmjet y.
Kemi $2x - 4y = -10 \Rightarrow 2x = 4y - 10 \Rightarrow x = 2y - 5$.
E zëvendësojmë këtë shprehje në ekuacionin e dytë dhe kemi
$(2y - 5)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow 5y^2 - 20y = 0 \Rightarrow$ pra $y^2 - 4y = 0$.
Ky ekuacion ka dy rrënjë: $y_1 = 0$; $y_2 = 4$.
Për secilën vlerë të y, gjejmë vlerën përgjegjëse të x, sipas barazimit $x = 2y - 5$.
Kemi $x_1 = 2 \cdot 0 - 5 = -5$; $x_2 = 2 \cdot 4 - 5 = 3$.
Sistemi ka dy zgjidhje që janë çiftet $(-5, 0)$ dhe $(3, 4)$.

14 Caktoni koeficientet a, b, në mënyrë që grafikët e funksioneve $y = ax + 2$ dhe $y = bx + 5$ të priten në pikën M $(1, 3)$.

Zgjidhje

Pika M, me koordinatat e saj do të vërtetojë secilin nga ekuacionet (sepse ndodhet në secilin prej grafikëve). Prandaj kemi $\begin{cases} 3 = a \cdot 1 + 2 \\ 3 = b \cdot 1 + 5 \end{cases}$.
Nga ky sistem gjejmë $a = 1$, $b = -2$.

15 Për ç'vlera të m, ekuacioni $m^2x - m = x + 1$ me ndryshore x:

a ka një rrënjë të vetme; **b** nuk ka rrënjë; **c** ka si rrënjë çdo numër real?

Zgjidhje

Duke kaluar në anën e majtë të gjitha kufizat me ndryshoren x, marrim
$m^2x - x = m + 1 \Rightarrow x(m^2 - 1) = m + 1$.
Ekuacioni ka trajtën $ax = b$, ku $a = m^2 - 1$ dhe $b = m + 1$.
Shohim kur bëhet $a = 0$ d.m.th., $m^2 - 1 = 0$, pra $m^2 = 1$.
Kjo ndodh për $m = 1$ ose $m = -1$.

a Kur $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{cases}$ kemi $a \neq 0$, prandaj ekuacioni ka vetëm një rrënjë, që jepet nga barazimi $x = \dfrac{m+1}{m^2-1}$, d.m.th., $x = \dfrac{1}{m-1}$.

b Kur $m = 1$, ekuacioni ka trajtën $0 \cdot x = 2$, pra nuk ka rrënjë.

c Kur $m = -1$, ekuacioni ka trajtën $0 \cdot x = 0$, pra ka si rrënjë çdo numër real.

16 Për ç'vlera të koeficientit m, ekuacioni $mx^2 - 4x + 3 = 0$:

a ka dy rrënjë të ndryshme reale; b nuk ka rrënjë reale;

c ka dy rrënjë reale të barabarta?

Zgjidhje

a Që ekuacioni të ketë dy rrënjë reale të ndryshme, duhet e mjafton që dallori i ekuacionit të jetë pozitiv dhe $m \neq 0$.

$a = m$; $b = -4$; $c = 3$ D $= 16 - 12m$.

Pra, që ekuacioni të ketë dy rrënjë reale të ndryshme duhet e mjafton që

$\begin{cases} m \neq 0 \\ 16 - 12m > 0 \end{cases}$ d.m.th., $\begin{cases} m < \dfrac{4}{3} \\ m \neq 0 \end{cases}$.

b Që ekuacioni të mos ketë rrënjë reale duhet e mjafton që

$\begin{cases} D < 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$ d.m.th., $\begin{cases} 16 - 12m < 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$ pra $\begin{cases} m > \dfrac{4}{3} \\ m \neq 0 \end{cases}$ d.m.th., $m > \dfrac{4}{3}$.

c Që ekuacioni të ketë dy rrënjë reale të barabarta duhet e mjafton që

D $= 0$ d.m.th., $16 - 12m = 0$, pra $m = \dfrac{4}{3}$.

17 Jepet ekuacioni $x^3 + mx^2 - 5 = 0$.

a Për ç'vlerë të m ekuacioni ka si rrënjë numrin 1?

b Për vlerën e gjetur të m, gjeni dhe rrënjët e tjera të ekuacionit.

Zgjidhje

a Duhet e mjafton të vërtetohet barazimi $1^3 + m \cdot 1^2 - 5 = 0$, që nga $m = 4$.

b Marrim ekuacionin $x^3 + 4x^2 - 5 = 0$, për të cilin dihet që ka si rrënjë numrin 1. Atëherë, ana e majtë e tij plotpjesëtohet me $(x - 1)$.

Duke kryer pjesëtimin e $x^3 + 4x^2 - 5$ me $(x - 1)$ marrim
$x^3 + 4x^2 - 5 = (x - 1)(x^2 + 5x + 5)$.

Ekuacioni shkruhet $(x-1)(x^2+5x+5)=0$.
Ekuacioni $x-1=0$ ka si rrënjë numrin 1.
Ekuacioni $x^2+5x+5=0$ ka dallor negativ, pra nuk ka rrënjë reale.
Si përfundim, ekuacioni i dhënë ka vetëm një rrënjë; numrin 1.

18 Shuma e 3 numrave të njëpasnjëshëm natyrorë është 78. Gjeni numrat.

Zgjidhje

Shënojmë numrin më të vogël me x. Numrat e tjerë do të jenë $x+1$ dhe $x+2$.
Shkruajmë ekuacionin: $x+(x+1)+(x+2)=78$.
Zgjidhim ekuacionin. Kemi $3x+3=78$, pra $3x=75$ d.m.th., $x=25$.
Tre numrat e kërkuar janë 25, 26, 27.
Prova: $25+26+27=78$.

19 Gjatësia e një drejtkëndëshi është sa trefishi i gjerësisë dhe perimetri i tij është 36 cm. Gjeni gjerësinë e drejtkëndëshit.

Zgjidhje

Shënojmë gjerësinë e drejtkëndëshit me x; atëherë gjatësia e tij është $3x$.
Formojmë ekuacionin $x+3x+x+3x=36$.
Zgjidhim ekuacionin. Kemi $8x=36$, pra $x=4{,}5$. Gjerësia është 4,5 cm.
Prova: Kur gjerësia është 4,5 cm, gjatësia është $3\cdot 4{,}5=13{,}5$ cm.
$4{,}5+4{,}5+13{,}5+13{,}5=36$ cm.

20 Një person niset në orën 16:42 drejt postës që është 6 km larg dhe arrin atje në orën 17:30. Ai bën një pjesë të rrugës me hap me shpejtësi 5 km/orë dhe pjesën tjetër me vrap me shpejtësi 10 km/orë. Sa km vrapoi ai?

Zgjidhje

Shënojmë largesën që ai vrapoi x (km); atëherë largesa e bërë me hap është $(6-x)$ km.

Koha e vrapimit është $\frac{x}{10}$ orë; koha e ecjes me hap është $\frac{6-x}{5}$ orë.

Koha e përgjithshme e udhëtimit është 17:30 – 16:42 = 48 minuta d.m.th., $\frac{4}{5}$ orë.

Kemi ekuacionin $\frac{x}{10}+\frac{6-x}{5}=\frac{4}{5}$.

Zgjidhim ekuacionin. Duke shumëzuar të dyja anët e tij me 10, marrim
$2(6-x)+x=8$, pra $12-2x+x=8$, pra $x=4$.
Largesa e vrapimit është 4 km.

Prova: Koha për të vrapuar (4 km) është $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ orë.

Koha për të ecur (2 km) është $\frac{2}{5}$ orë.

Koha e përgjithshme është $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$ orë.

21 Brinjët e drejtkëndëshit A janë 7 dhe $(x + 3)$ cm.
Brinjët e drejtkëndëshit B janë $(x - 1)$ dhe $(x + 2)$ cm.
Syprina e drejtkëndëshit A është 16 cm^2 më e madhe se syprina e drejtkëndëshit B. Gjeni x.

Zgjidhje

Syprina e drejtkëndëshit A është $7 \cdot (x + 3)$ cm^2.
Syprina e drejtkëndëshit B është $(x - 1) \cdot (x + 2)$ cm^2.
Sipas kushtit të problemit, kemi: $(x - 1)(x + 2) + 16 = 7 \cdot (x + 3)$.
Zgjidhim këtë ekuacion.
Kemi $x^2 + 2x - x - 2 + 16 = 7x + 21 \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow (x - 7)(x + 1) = 0$
Pra $x = 7$ ose $x = -1$ (kjo nuk pranohet).

Ekuacioni bikuadrat dhe trinom

Ekuacioni $ax^4 + bx^2 + c = 0$ sillet në ekuacion të fuqisë së dytë, me zëvendësimin $x^2 = t$.
Ekuacioni $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ sillet në ekuacion të fuqisë së dytë, me zëvendësimin $x^n = t$.

22 Zgjidhni ekuacionet:
a $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b** $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

Zgjidhje

a Zëvendësojmë $x^2 = t$. Atëherë $x^4 = t^2$. Ekuacioni i dhënë merr trajtën $t^2 - 5t + 4 = 0$. Rrënjë të tij janë $t_1 = 1$ ose $t_2 = 4$ nga ku $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ ose $x^2 = 4$ nga ku $x = \pm 2$.
Ekuacioni i dhënë ka 4 rrënjë: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$; $x_4 = 2$
b Zëvendësojmë $x^3 = t$. Atëherë $x^6 = t^2$. Ekuacioni i dhënë merr trajtën $t^2 - 9t + 8 = 0$. Rrënjë të tij janë $t_1 = 1$ ose $t_2 = 8$ nga ku $x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$ ose $x^3 = 8$ nga ku $x = 2$.
Ekuacioni i dhënë ka 2 rrënjë: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

23 Zgjidhni ekuacionin $18x^{-4} + 7x^{-2} - 1 = 0$.

Zgjidhje

Duke shënuar $x^{-2} = t$,ekuacioni merr trajtën $18t^2 + 7t - 1 = 0$.

Dallori i këtij ekuacioni është $D = 7^2 - 4 \cdot 18 \cdot (-1) = 121$ nga ku $\sqrt{D} = 11$.

Marrim $t_1 = \dfrac{11-7}{2 \cdot 18} = \dfrac{1}{9}$; $t_2 = \dfrac{-7-11}{2 \cdot 18} = -\dfrac{1}{2}$. Kështu,

$x^{-2} = \dfrac{1}{9} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$ ose $x^{-2} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x^2 = -2$, i cili nuk ka zgjidhje.

Ekuacioni ka dy rrënjë 3 ose -3.

24 Shpejtësia e lundrimit të anijes në ujë të qetë është 50 km/orë. Për të njëjtën rrugë prej 60 km, kur anija lundron kundër rrymës i duhet një kohë 0,5 orë më e madhe sesa kur lundron sipas rrymës. Sa ka qenë shpejtësia e rrymës?

Zgjidhje

Shënojmë me x km/orë shpejtësinë e rrymës ($0 < x < 50$). Kur anija lundron kundër rrymës, shpejtësia e lëvizjes së saj është $50 - x$, dhe koha e lundrimit është $\frac{60}{50-x}$ orë.

Kur anija lundron sipas rrymës, shpejtësia e lëvizjes së saj është $50 + x$, dhe koha e lundrimit është $\frac{60}{50+x}$. Sipas kushtit të problemës, kemi

$$\frac{60}{50-x} = \frac{60}{50+x} + \frac{1}{2}$$

Duke shumëzuar të dyja anët me emëruesin e përbashkët, pas thjeshtimeve marrim

$120(50 + x) = 120(50 - x) + (50 - x)(50 + x)$

$6000 + 120x = 6000 - 120x + 2500 - x^2$ d.m.th., $x^2 + 240x - 2500 = 0$.

Ky ekuacion ka dy rrënjë: $x_1 = -250$; $x_2 = 10$.

Për problemën pranohet vetëm $x_2 = 10$ km/orë.

Përgjigje

Shpejtësia e rrjedhës është 10 km/orë.

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Zgjidhni ekuacionet:

a $\frac{x-3}{4} = \frac{x+5}{5}$ b $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{3x}{4} + \frac{5x}{6} - 6$

c $(x + 2)^2 - (x - 2)^2 = 2x - 1$ d $\frac{2x-1}{3} - \frac{4-x}{2} - x = 1 + \frac{x-3}{6}$

P. [a) $x = 35$; b) $x = 8$; c) $x = -2$ d) s'ka zgjidhje]

2 Zgjidhni ekuacionet e mëposhtme me të panjohur x.

a $ax - 3x - 1 = 4 - 2x$ b $x - a = 3(x - b)$

c $x + \frac{x}{a} = b$ d $\frac{a+x}{b} - 2 = \frac{x-b}{a}$ $(a \neq b)$

P. [a) $x = \frac{3a+5}{a+2}$; b) $x = \frac{3b-a}{2}$; c) $x = \frac{ab}{a+1}$; d) $b - a$]

3 Për ç' vlera të t shprehjet $\frac{4t-9}{5} + 3$ dhe $\frac{9+5t}{6}$ janë të barabarta? **P. [-9]**

4 Ekuacioni $\frac{3x-1}{5} + x = \frac{x}{2} + a$ ka rrënjë $x = 2$. Gjeni a. **P. [$a = 2$]**

5 Ekuacioni $\frac{3x+4}{2}+\frac{x-5}{3m}=\frac{2x+1}{5m}+3$, ka rrënjë $x=2$. Gjeni m. P. [$m=1$]

6 Jepet $y=\frac{2x-1}{x-1}+2$. Shprehni x me anën e y. P. [$\frac{y-3}{y-4}$]

7 Për ç'vlera të m, ekuacioni $m^2x+m=9x-3$ me ndryshore x:
a ka një rrënjë të vetme; b nuk ka rrënjë; c ka si rrënjë çdo numër real.
P. [a) $m \neq \pm 3$; b) $m=3$; c) $m=-3$]

8 Zgjidhni sistemet e ekuacioneve.

a $\begin{cases} 3x+2y=12 \\ 5x-3y=1 \end{cases}$ b $\begin{cases} 5x+6y=13 \\ 7x+18y=-1 \end{cases}$

P. [a) $x=2$; $y=3$; b) $x=5$; $y=-2$]

9 Gjeni k dhe b, në mënyrë që grafiku i ekuacionit $y=kx+b$ të kalojë nga pikat $(1,-3)$ dhe $(-1,-7)$. P. [$k=2$; $b=-5$]

10 Ekuacioni $x^2+(m-1)x+(m-2)=0$ ka dy rrënjë të barabarta. Gjeni m. P. [3]

11 Masat e këndeve të brendshme të një trekëndëshi janë të përpjesshme me numrat 2, 3 dhe 5. Gjeni masën e këndit më të vogël të trekëndëshit.

P. [36°]

12 Shkruani një sistem me dy ekuacione të fuqisë së parë me dy ndryshore, zgjidhja e të cilit të jetë çifti (2, 1).

13 Zgjidhni ekuacionet e mëposhtme duke plotësuar katrorin e plotë:

a $x^2+6x+5=0$ b $4x^2+4x-15=0$ c $x^2+x-\frac{3}{4}=0$

14 Zgjidhni ekuacionet:

a $\frac{x^2+3}{6}-\frac{x+4}{3}=5$ b $2x^2-5mx+3m^2=0$ $(m>0)$

P. [$x=7$; $x=-5$; b) $x=m$; $x=\frac{3}{2}m$]

15 Gjeni pikat e prerjes së parabolës $y=6x^2-5x+1$ me boshtin e abshisave.

P. [$\left(\frac{1}{2},0\right)$; $\left(\frac{1}{3},0\right)$]

16 Gjeni pikat e prerjes së parabolave $y=2x^2-5x+1$ dhe $y=x^2-x-2$.

P. [(1, −2); (3, 4)]

17 Zgjidhni sistemet e ekuacioneve:

a $\begin{cases} 2x^2+y^2=6 \\ y=x+1 \end{cases}$ b $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y=x-3 \end{cases}$

P. [a) $x=1$; $y=2$ ose $x=-\frac{5}{3}$; $y=-\frac{2}{3}$ b) $x=2$; $y=-1$ ose $x=1$; $y=-2$]

18 Gjeni pikat e përbashkëta të rrethit $x^2 + y^2 = 10$ dhe drejtëzës $y = x - 2$.
P. [(3, 1); (−1, −3)]

19 Syprina e një kompesatoje në formë drejtkëndore është 4500 cm². Prej saj pritet katrori më i madh i mundshëm. Pjesa e mbetur ka gjatësinë 120 cm. Gjeni brinjën e katrorit.
P. [30 cm]

20 Në tabelë u shkrua një numër. Nxënësi i parë e rriti atë me 23, ndërsa nxënësi i dytë e zvogëloi me 1. Rezultati i nxënësit të parë është 7 herë më i madh se rezultati i nxënësit të dytë. Cili është ky numër?
P. [5]

21 Gjeni dy numra të njëpasnjëshëm, të tillë që prodhimi i tyre të jetë 1,5 herë më i madh se katrori i numrit më të vogël.
P. [2 dhe 3]

22 Zgjidhni ekuacionet:

a $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

P. [a) $x = \pm 2$; $x = \pm 3$ b) $x = 1$; $x = 2$]

23 Jepet $x > 0$ dhe $x^2 + \frac{1}{x^2} = 5$. Gjeni $x + \frac{1}{x}$.
P. [$\sqrt{7}$]

Udhëzim: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x\frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

24 Zgjidhni ekuacionin $e^x + 2e^{-x} = 3$.
P. [$x = 0$; $x = \ln 2$]

25 Zgjidhni ekuacionin $2(x^2 - 3)^2 - (x^2 - 3) - 1 = 0$.

Udhëzim: Zëvendësoni $x^2 - 3 = t$.
P. [$x = \pm 2$; $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$]

KREU 4

INEKUACIONE. SISTEME INEKUACIONESH

Vetitë e mosbarazimeve

1 $a > b \Rightarrow b < a$

2 $a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$

3 $a > b \Rightarrow ac > bc$ dhe $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ në qoftë se $c > 0$

4 $a > b \Rightarrow ac < bc$ dhe $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ në qoftë se $c < 0$

5 $a > b \Rightarrow a^n > b^n \quad n \in N$

6 $a > b \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \quad n \in N$

Njohuri teorike shtesë

Shenja e binomit të fuqisë së parë me një ndryshore $y = ax + b$

$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$

Studimi i shenjës së binomit skematikisht tregohet në tabelën e mëposhtme:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Shenja e binomit $y = ax + b$	Shenja e kundërt e a	0	Shenja e a

Tabela 1

Shenja e trinomit të fuqisë së dytë $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

D > 0	x		x_1		x_2	
	y	shenja e a	0	shenja e $(-a)$	0	shenja e (a)
D = 0	x		$x_1 = x_2$			
	y	shenja e a	0	shenja e a		
D < 0	x					
	y	shenja e a				

Tabela 2

Ushtrime të zgjidhura

1 Zgjidhni inekuacionin $(x-1)^2-4<x^2-4(x-1)$.

a në R; b në N.

Zgjidhje

$(x-1)^2-4<x^2-4(x-1)$	Kryejmë veprimet në secilën anë.
$(x^2-2x+1)-4<x^2-4x+4$	Reduktojmë.
$x^2-2x-3<x^2-4x+4$	Të panjohurat në njërën anë, të njohurat në anën tjetër.
$x^2-2x-x^2+4x<4+3$	Reduktojmë.
$2x<7$	Pjesëtojmë me 2.
$x<\dfrac{7}{2}$	

Përgjigje a Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit në R është $A=]-\infty,\ \dfrac{7}{2}[$.

b Bashkësia e zgjidhjeve të këtij inekuacioni në N është bashkësia e numrave natyror që plotësojnë kushtin $x<\dfrac{7}{2}$, d.m.th., është bashkësia e përbërë nga numrat 1, 2, 3.

2 Zgjidhni inekuacionin e dyfishtë $3<1-2x<7$.

Zgjidhje

$3<1-2x<7$	U zbresim 1 të 3 gjymtyrëve.
$3-1<-2x<7-1$	Reduktojmë.
$2<-2x<6$	Pjesëtojmë me (-2) duke ndërruar kahet.
$-1>x>-6$	
$-6<x<-1$	

Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit është $]-6,-1[$

3 Zgjidhni inekuacionet:

a $\dfrac{x-5}{2}-\dfrac{x}{5}>\dfrac{x}{10}+2$ b $\dfrac{2x-1}{4}>\dfrac{x+3}{2}+1$

Zgjidhje

a

$$\frac{x-5}{2}-\frac{x}{5}>\frac{x}{10}+2 \Rightarrow 5(x-5)-2x>x+20$$

$$\Rightarrow 5x-25-2x>x+20 \Rightarrow 3x-25>x+20$$

$$\Rightarrow 3x-x>20+25 \Rightarrow 2x>45$$

$$\Rightarrow x>\frac{45}{2}$$

b

$$\frac{2x-1}{4}>\frac{x+3}{2}+1 \Rightarrow 2x-1>2(x+3)+4 \Rightarrow 2x-1>2x+6+4$$

$$\Rightarrow 2x-2x>6+4+1$$

$$\Rightarrow 0\cdot x>11$$

Për çdo vlerë të x, ana e majtë del zero, e cila nuk është më e madhe se 11. Rrjedhimisht inekuacioni nuk ka zgjidhje.

4 Vërtetoni mosbarazimet:

a $(x+y)(x+y) \geq 2xy$ b $(x+3y)^2 \geq 12xy$.

Zgjidhje

a Mjafton të vërtetojmë që diferenca $(x+y)(x+y) - 2xy$ është ≥ 0.
Kemi $(x+y)(x+y) - 2xy = x^2 + 2xy + y^2 - 2xy = x^2 + y^2 \geq 0$, sepse $x^2 \geq 0$ dhe $y^2 \geq 0$.
b Mjafton të vërtetojmë që diferenca $(x+3y)^2 - 12xy$ është ≥ 0.
Kemi $(x+3y)^2 - 12xy = x^2 + 6xy + 9y^2 - 12xy = x^2 - 6xy + 9y^2 = (x-3y)^2 \geq 0$.

5 Zgjidhni inekuacionin $\frac{2x-1}{3} < 0$.

a në R; b në $]-\infty, 0[$.

Zgjidhje

$$\frac{2x-1}{3} < 0 \Rightarrow 2x - 1 < 0 \cdot 3 \Rightarrow 2x - 1 < 0 \Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}.$$

a Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit në R është $A = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$.

b Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit në $]-\infty, 0[$ është prerja e bashkësisë A me $]-\infty, 0[$ d.m.th., është $]-\infty, 0[$.

6 Për ç'vlera të x nga R, vlera e funksionit $y = \frac{2x-5}{3}$ është më e madhe se vlera e funksionit $y = \frac{x}{2}$?

Zgjidhje

Vlerat e kërkuara të x janë zgjidhjet e inekuacionit $\frac{2x-5}{3} > \frac{x}{2}$.

Zgjidhim këtë inekuacion duke shumëzuar fillimisht të dyja anët me 6.

Kemi $6\frac{2x-5}{3} > 6\frac{x}{2} \Rightarrow 2(2x-5) > 3x$ që nga $x > 10$.

7 Për ç'vlera të m, ekuacioni $(m-4)x = m(6+x) - 12$ ka:
a rrënjë pozitive; b rrënjë negative?

Zgjidhje

$$(m-4)x = m(6+x) - 12 \Rightarrow mx - 4x = 6m + mx - 12 \Rightarrow x = \frac{12-6m}{4}$$

a $\frac{12-6m}{4} > 0 \Rightarrow 12 - 6m > 0 \Rightarrow m < 2$

b $\frac{12-6m}{4} < 0 \Rightarrow 12 - 6m < 0 \Rightarrow m > 2$

Përgjigje: Ekuacioni i dhënë ka rrënjë pozitive për $m < 2$ dhe rrënjë negative për $m > 2$.

8 Për ç'vlera të m, ekuacioni $2(x + m) = -7$ ka rrënjë më të vogël se -4?

Zgjidhje

$$2(x+m) = -7 \Rightarrow 2x + 2m = -7 \quad \Rightarrow x = \frac{-7-2m}{2}$$

$$\frac{-7-2m}{2} < -4 \Rightarrow -7-2m < -8 \Rightarrow -2m < -1 \Rightarrow m > \frac{1}{2}$$

Përgjigje: Ekuacioni i dhënë ka rrënjë më të vogël se -4 për $m > \frac{1}{2}$.

9 Gjeni bashkësinë e vlerave të ndryshores x, për të cilat ka kuptim shprehja:

a $\sqrt{x-3} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ b $\sqrt{x+5} - (3-x)^{\frac{1}{2}}$.

Zgjidhje

a Bashkësia e kërkuar është ajo e vlerave të x që plotësojnë njëkohësisht kushtet $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$.

Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të parë është $A_1 = [3, +\infty[$.

Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të dytë është $A_2 =]0, +\infty[$.

Bashkësia e zgjidhjeve të sistemit është $A_1 \cap A_2 = [3, +\infty[$.

b Kemi të bëjmë me shprehjen $\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x}$. Bashkësia që kërkojmë është ajo e vlerave të x që plotësojnë njëherësh kushtet $\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases}$ d.m.th., $\begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 3 \end{cases}$.

Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të parë është $A_1 = [-5, +\infty[$.

Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të dytë është $A_2 =]-\infty, 3]$.

Bashkësia e zgjidhjeve të sistemit është $A_1 \cap A_2 = [-5, 3]$.

10 Zgjidhni shkurt inekuacionin e dyfishtë $5 < \frac{1-x}{2} < 10$.

Zgjidhje

Përpiqemi të shfaqim në gjymtyrën e mesit ndryshoren x. Duke shumëzuar të tre gjymtyrët me 2 marrim $10 < 1 - x < 20$; shumëzojmë me (-1) dhe marrim $-10 > x - 1 > -20$;
u shtojmë të tre gjymtyrëve 1 dhe kemi $-9 > x > -19$; ndryshe $-19 < x < -9$.

Përgjigje
Bashkësia e zgjidhjeve është $]-19, -9[$.

11 Vërtetoni me tri mënyra të ndryshme vetinë:

Në qoftë se $a > b$ dhe a, b kanë shenja të kundërta atëherë $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Zgjidhje

Mënyra I

Shohim diferencën $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$. Kemi $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$.

Por b − $a<0$ (sepse $a>b$) dhe $a\cdot b<0$) sepse a, b kanë shenja të kundërta). Prandaj

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$, d.m.th., $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

Mënyra II

Meqenëse a, b kanë shenja të kundërta dhe $a>b$, kemi $a>0$ dhe $b<0$. Atëherë $\frac{1}{a}>0$ dhe $\frac{1}{b}<0$, prandaj $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

Mënyra III

Pjesëtojmë të dyja anët e mosbarazimit të dhënë $a>b$ me numrin negativ $a\cdot b$ (është negativ sepse a, b kanë shenja të kundërta). Marrim $\frac{a}{ab}<\frac{b}{ab}$ d.m.th., $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$, pra $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

12 Funksioni $y=ax+3$ merr vlerë negative për $x=2$. Vërtetoni që $a<-\frac{3}{2}$.

Zgjidhje

Vlera e funksionit për $x=2$ është $a\cdot 2+3$. Sipas kushtit kemi $a\cdot 2+3<0$, që nga $a<-\frac{3}{2}$.

13 Për ç'vlera të $x\in R$:

a Vlerat e funksionit $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x-9$ janë pozitive?

b Vlerat e funksionit $y=\log_3(x-1)$ janë negative?

Zgjidhje

a $\left(\frac{1}{3}\right)^x-9\geq 0\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^x\geq 9\Rightarrow 3^{-x}\geq 3^2\Rightarrow -x\geq 2\Rightarrow x\leq -2$.

b Kemi $\log_3(x-1)<0\Rightarrow\log_3(x-1)<\log_3 1\Rightarrow\begin{cases}x-1<1\\ x-1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<2\\ x>1\end{cases}$.
Pra, $1<x<2$..

14 Për ç'vlera të x ka kuptim shprehja $\sqrt{\frac{x^2+2}{5-x}}$?

Zgjidhje

$\frac{x^2+2}{5-x}\geq 0$. Meqë numëruesi është gjithmonë pozitiv, mosbarazimi i fundit plotësohet kur $5-x>0\Rightarrow x<5$

15 Numëruesit dhe emëruesit të thyesës $\frac{3}{4}$ u shtojmë të njëjtin numër pozitiv c.
Vërtetoni që thyesa e përftuar është më e madhe se ajo e para.

Vërtetim

Thyesa e re është $\frac{3+c}{4+c}$. Për të treguar që ajo është më e madhe se $\frac{3}{4}$, mjafton të tregojmë që $\frac{3+c}{4+c}-\frac{3}{4}$ është pozitive.

Kemi $\frac{3+c}{4+c}-\frac{3}{4}=\frac{4(3+c)-3(4+c)}{4(4+c)}=\frac{c}{4(4+c)}$.

Por $c>0$ dhe $4(4+c)>0$, prandaj $\frac{c}{4(4+c)}$ është pozitive.

16 Në mesditë temperatura ishte 20°C. Deri në orën 16^{00}, temperatura u rrit 1°C për çdo orë.

a Gjeni temperaturën x orë pas mesditës.

b Për ç'vlera të x nga [12, 16] temperatura ka qenë mbi 25°C.

Zgjidhje

a x orë pas mesditës temperatura është ngritur me $x\cdot 1^0=x^0$ dhe është bërë $20+x$ (gradë Celsius).

b Kërkojmë se kur temperatura është më e madhe se 25°C.

Kjo ndodh për $20+x>25$ d.m.th., $x>5$.

Meqenëse x paraqet numrin e orëve mbi 12, kemi që temperatura është mbi 25°C për orën mbi 17, pra për asnjë orë nga [12, 16].

17 Do të blihen disa libra me çmim 200 lekë dhe 10 fletore me çmim 100 lekë. Sa është numri më i madh i librave që mund të blihen, duke ditur që nuk mund të shpenzojmë më tepër se 1750 lekë?

Zgjidhje

Shënojmë me x numrin e librave që blejmë ($x\in \mathrm{N}$).

Shpenzimet për librat janë $200x$, për fletoret $10\cdot 100$.

Shpenzimet gjithsej janë $200x+1000$.

Kërkohet vlera më e madhe e x që vërteton inekuacionin

$200x+1000\leq 1750$.

Kemi $200x\leq 750 \Rightarrow x\leq 3{,}75$.

Vlera më e madhe e $x\in \mathrm{N}$ që vërteton këtë inekuacion është $x=3$.

18 Zgjidhni sistemin e inekuacioneve:

$$\begin{cases}4(x-2)-x\geq 1\\ 2-3(x-2)\geq -13\end{cases}$$

Zgjidhje

Gjejmë bashkësinë e zgjidhjeve për secilin inekuacion.

$4(x-2)-x \geq 1 \Rightarrow 4x-8-x \geq 1 \Rightarrow x \geq 3$ $\quad A_1 = [3, +\infty[$

$2-3(x-2) \geq -13 \Rightarrow 2-3x+6 \geq -13 \Rightarrow x \leq 7$ $\quad A_2 =]-\infty, 7]$

Bashkësia e zgjidhjeve të sistemit është $A = A_1 \cap A_2 = [3, 7]$

Inekuacione të fuqisë së dytë me një ndryshore

$ax^2 + bx + c \geq 0$; $\quad ax^2 + bx + c \leq 0 \qquad (a \neq 0)$

Për zgjidhjen e inekuacionit të fuqisë së dytë me një ndryshore mbështetemi në studimin e shenjës së trinomit $ax^2 + bx + c$.

19 Zgjidhni inekuacionin $(2x-4)(5-x) < 0$.

Zgjidhje

Studiojmë shenjën e secilit prej binomeve $2x-4$ dhe $5-x$ dhe rezultatet i pasqyrojmë në tabelën 3.

Faktori i parë: $2x-4$

Rrënja: $2x-4=0 \Rightarrow x=2$

$a=2$ pra $a>0$

Faktori i dytë: $5-x$

Rrënja: $5-x=0 \Rightarrow x=5$

$a=-1$, pra $a<0$

x	$-\infty$	2		5	$+\infty$
$2x-4$	$-$	0	$+$		$+$
$5-x$	$+$		$+$	0	$-$
$(2x-4)(5-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
Inekuacioni	V				V

Tabela 3

Rreshti i fundit i tabelës na tregon se inekuacioni vërtetohet për $x < 2$ ose $x > 5$. Pra, bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit në R përbëhet prej dy pjesësh:

$]-\infty, 2[$ ose $]5, +\infty[$.

20 Studioni shenjën e trinomit.

a $y = x^2 - 6x + 5$ $\quad$ **b** $y = -3x^2 + 6x - 3$ $\quad$ **c** $y = x^2 + x + 4$

Zgjidhje

a Kemi $a = 1$ dhe $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16$. Trinomi ka dy rrënjë reale të ndryshme: $x_1 = 1$; $x_2 = 5$.

Shenja e këtij trinomi është dhënë në tabelën 4.

x		1		5	
y	$+$	0	$-$	0	$+$

Tabela 4

b Kemi $a = -3$ dhe $D = (+6)^2 - 4(-3)(-3) = 0$. Trinomi ka dy rrënjë të barabarta $x_1 = x_2 = 1$.

Shenja e trinomit është dhënë në tabelën 5.

x		1	
y	$-$	0	$-$

Tabela 5

Pra, trinomi është negativ për çdo vlerë të $x \neq 1$.

c $y = x^2 + x + 4$.

Kemi $a = 1$ dhe $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -15 < 0$.

Për çdo vlerë të x trinomi është pozitiv.

x	
y	+

Tabela 6

21 Zgjidhni inekuacionet:

a $x^2 - 3x < 0$ b $-x^2 + 8x - 16 \leq 0$

Zgjidhje

a Kemi $a = 1$. Gjejmë rrënjët e trinomit:

$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$.

x		0		3	
y	+	0	–	0	+

Tabela 7

Bashkësia e zgjidhjeve të këtij inekuacioni është]0, 3[.

b Kemi $a = 1$ dhe $D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$. Trinomi ka dy rrënjë të barabarta $x_1 = x_2 = 4$.

x		4	
y	–	0	–

Tabela 8

Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit është bashkësia R.

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Në relacionet e mëposhtme, dalloni ato që janë të vërteta (V) dhe ato që janë të gabuara (G).

		V	G
a	$m < n \Rightarrow 3m < 3n$	☐	☐
b	$m < n \Rightarrow m^2 < n^2$	☐	☐
c	$a < b$ dhe $c < d \Rightarrow a + c < b + d$	☐	☐
d	$m < n \Rightarrow -5m < -5n$	☐	☐
e	$a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	☐	☐
f	$m > n \Rightarrow m - 100 > n - 100$	☐	☐
g	$m < n \Rightarrow -3m < -3n$	☐	☐
h	$m > n \Rightarrow m^{-1} < n^{-1}$	☐	☐

2 Zgjidhni inekuacionet:

a) $4x - 3 < 2x + 7$ b) $3(x - 2) - 5 > 4x$

P. [a) $x < 5$; b) $x < -11$]

3 Zgjidhni inekuacionet:

a $0{,}6x + 0{,}07 > 2{,}5x - 0{,}12$ b $\frac{5-x}{3} + \frac{x-1}{2} < 0$

c $2x - \frac{3(x-2)}{4} < 9$ d $\frac{2x-0{,}75}{4} < \frac{0{,}125-x}{8}$

P. [a) $x < 0{,}1$; b) $x < -7$; c) $x < 6$; d) $x < 0{,}325$]

4 Për ç'vlerë të ndryshores x:

a Shprehja $\frac{5x-1}{3}$ është më e vogël se 3.

b Shprehja $\frac{x+2}{4}$ është më e madhe se $\frac{x-1}{3}$.

c Shprehja $\frac{2x-1}{8} - \frac{x}{2}$ është më e vogël se 2.

P. [a) $x < 2$; b) $x < 10$; c) $x > \frac{17}{2}$]

5 Gjeni numrin e plotë më të vogël që vërteton inekuacionin $16(0{,}7 - x) < 1 - 5x$.

P. [$x = 1$]

6 Gjeni numrin e plotë më të madh që vërteton inekuacionin $2{,}7-(4{,}2 - 1{,}2x) < 6{,}3$.

P. [$x = 6$]

7 Zgjidhni inekuacionin $4{,}2(3{,}3 - 0{,}8x) < 7x + 1{,}4$ për $x \in N$. P. [$x = 2, 3, 4, \ldots$]

8 Për ç'vlera të m, ekuacionet e mëposhtme kanë:

a zgjidhje pozitive; b zgjidhje negative.

i $7 - 3x = 8x + m$ ii $(3 - x)(x + m) = (5 - x)(x + 2m) + mx - 14$

iii $4x(m + x) = (4x + 1)(x + 3m) - 8mx - 9$

P. [i a) $m < 7$; b) $m > 7$ ii a) $m < 2$; b) $m > 2$ iii a) $m < 3$; b) $m > 3$]

9 Për ç'vlera të k ekuacioni:

a $3 - k = 4x - 8$ ka rrënjë më të vogël se 3.

b $4(x - k) = 5$ ka rrënjë më të vogël se 4.

c $2(x + 3k) = -3$ ka rrënjë më të madhe se -2.

P. [a) $k > -1$ b) $k < \frac{11}{4}$ c) $k < \frac{1}{6}$]

10 Zgjidhni inekuacionet e dyfishta:

a $5 < 3x-1 \leq 8$ b $-1 \leq 7-2x < 1$

P. [a) $2 < x \leq 3$; b) $3 \leq x < 4$]

11 Për ç'vlera të x:

a shprehja $(2x - 3)$ është më e madhe se -3, dhe më e vogël se 3.

b shprehja $\frac{2x}{3} - 2$ është më e madhe se -4, dhe më e vogël se 4.

P. [a) $0 < x < 3$; b) $-3 < x < 9$]

12 Për cilat vlera të plota të x, shprehja $S=\sqrt{2x-15}+\sqrt{37-3x}$ ka kuptim?
P. [8, 9, 10, 11, 12]

13 Gjeni numrin e plotë më të vogël që vërteton inekuacionin e dyfishtë:
$$\frac{1}{9}<\frac{5x-1}{18}<\frac{1}{2}$$
P. [$x=0$]

14 Gjeni numrin e plotë më të madh që vërteton inekuacionin e dyfishtë:
$$\frac{5}{18}<\frac{4x+3}{36}<\frac{1}{2}$$
P. [$x=3$]

15 Gjeni:
a vlerën më të vogël të funksionit $f(x)=x^2-8x+1$.
b Vlerën më të madhe të funksionit $f(x)=-x^2+6x-2$.
P. [a) −15; b) 7]

16 Me çfarë shpejtësie x duhet të ecë mesatarisht një makinë, në mënyrë që rrugën prej 150 km ta përshkojë për më pak se 3 orë?
P. [$x>50$]

17 Gjatësia e një drejtkëndëshi është 12 cm. Sa duhet të jetë gjerësia x, në mënyrë që syprina e tij të jetë më e vogël se 80 cm^2?
P. [$x<6{,}6$]

18 Jepet thyesa $\frac{2}{3}$. Çfarë numri natyror n duhet t'i shtojmë gjymtyrëve të tij, në mënyrë që vlera e saj të bëhet më e madhe se $\frac{10}{13}$?
P. [$n\geq 2$]

19 Jepet $a<b$. Provoni që $a<\frac{a+b}{2}<b$.

20 Zgjidhni sistemin e inekuacioneve:

a $\begin{cases}7x-1<0\\2x+8>20\end{cases}$ b $\begin{cases}7x+4\geq 5x-18\\3x-1\leq 20-4x\end{cases}$

P. [a) s'ka zgjidhje; b) $-11\leq x\leq 3$]

21 Zgjidhni inekuacionet:
a $x^2-4x+4\leq 0$ b $-x^2+6x-8>0$ c $-x^2+x-8<0$
P. [a) $x=2$ b) $2<x<4$ c) $x\in\mathbb{R}$]

22 Zgjidhni inekuacionet:
a $(x^2+2)(x^2-1)<0$ b $x^2-2x+8<0$ c $\frac{1}{x}<1$
P. [a) $-1<x<1$ b) s'ka zgjidhje; c) $x<0\cup x>4$]

23 Renditni nga më i vogli te më i madhi numrat $a=\frac{5}{8x}; b=\frac{11}{9x}; c=\frac{19}{15x}$ ku $x>0$.

P. [$a<b<c$]

24 Jepet inekuacioni $x^2-x<20$. Gjeni vlerën më të madhe $x \in \mathbb{N}$, e cila vërteton këtë inekuacion.

P. [$x=4$]

25 Tregoni që mosbarazimi $\frac{x^2-6x+9}{x+1} \leq 0$ vërtetohet vetëm për një vlerë të x. Cila është ajo?

P. [$x=3$]

26 Gjeni bashkësinë e vlerave të lejuara të x në shprehjet:

a $y=\log(x^2-4x-5)$ b $y=\sqrt{4x^2-4x+1}$

c $y=\frac{5}{\sqrt{7x-x^2-10}}$ d $y=\sqrt{x^2+5x+8}$

P. [a) $]-\infty,-5[\cup]1,+\infty[$; b) R; c) $]2,5[$ d) ϕ]

27 Sa zgjidhje në bashkësinë e numrave natyrorë ka inekuacioni $\frac{x^2-7x+6}{(x-3)^2}<0$.

P. [3]

28 Renditni nga më i vogli te më i madhi numrat $x=-0{,}13$; $y=-0{,}135$; $z=-0{,}1035$.

P. [$y<x<z$]

29 Zgjidhni inekuacionet:

a $\frac{1}{x^2}>\frac{1}{4}$ b $\frac{2-x}{x-1}\geq 0$ c $\frac{2x}{x-3}>\frac{1}{2}$.

P. [a) $]-2,0[\cup]0,2[$; b) $]1,2]$; c) $]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$]

30 Jepet $x<0<y$. Cili nga numrat e mëposhtëm mund të jetë i barabartë me zero?

A) $x-y$ B) $y-x$ C) x^2+y^2 D) x^3+y^3

P. [D]

KREU 5

FUNKSIONI DHE GRAFIKU I TIJ

- Relacioni f me bashkësi fillimi X dhe bashkësi mbarimi Y quhet funksion kur çdo element i X-it lidhet me një element të vetëm të Y.
- Për funksionin $f: X \to Y$, bashkësia e fytyrave quhet bashkësia e përcaktimit e funksionit.

1 Funksioni linear (drejtëza) $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ (fig. 5.1)/a,b

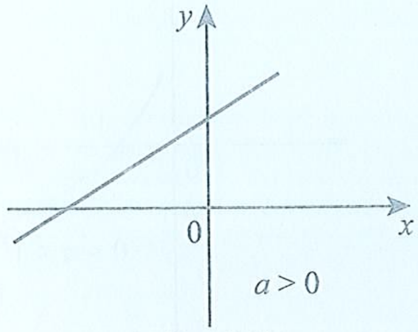


Fig. 5.1/a

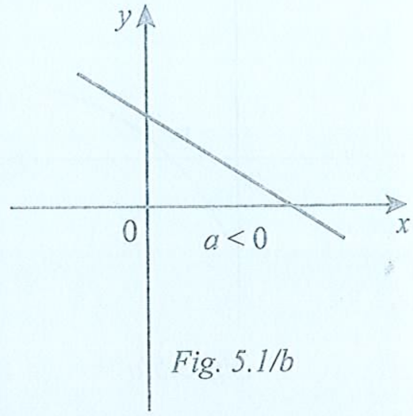


Fig. 5.1/b

2 Funksioni i fuqisë së dytë $y = ax^2 + bx + c$ (parabola) (fig. 5.2)/a,b

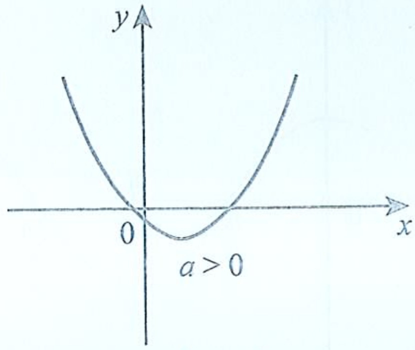


Fig. 5.2/a

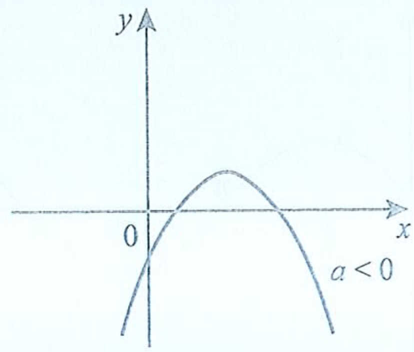


Fig. 5.2/b

3 Funksioni përpjesëtimor i zhdrejtë $y = \frac{a}{x}$ (hiperbola) (fig. 5.3)/a,b

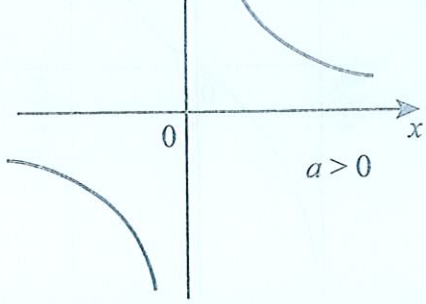


Fig. 5.3/a

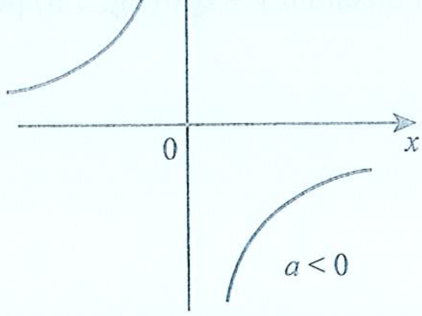


Fig. 5.3/b

4 Funksioni eksponencial $y = a^x$ (fig. 5.4)/a,b

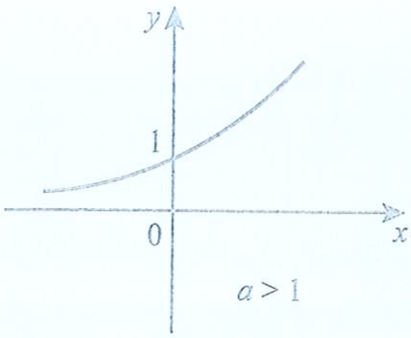


Fig. 5.4/a

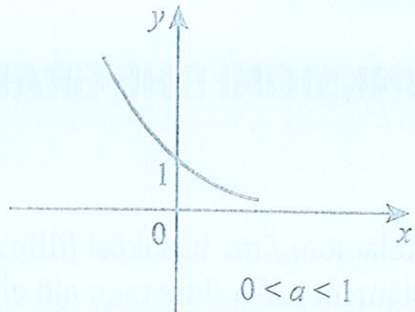


Fig. 5.4/b

5 Funksioni logaritmik $y = \ell og_a x$ (fig. 5.5)/a,b

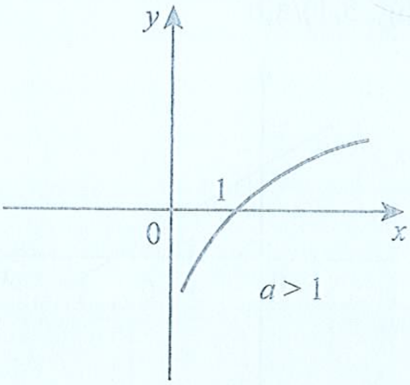


Fig. 5.5/a

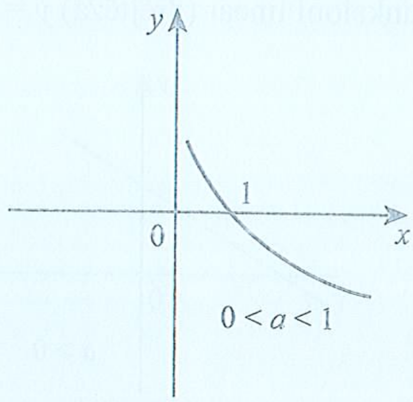


Fig. 5.5/b

6 Funksioni $y = \sin x$ (fig. 5.6, për $0 \le x \le 2\pi$)

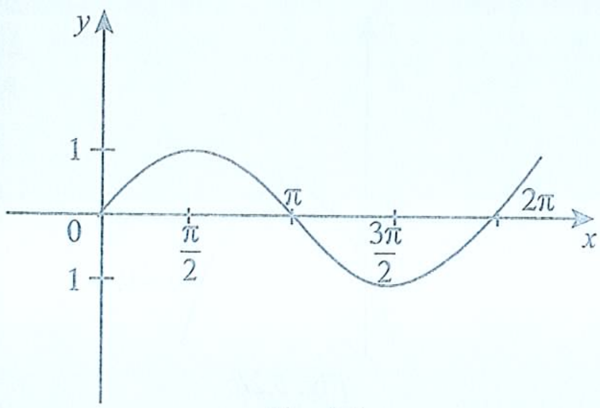


Fig. 5.6

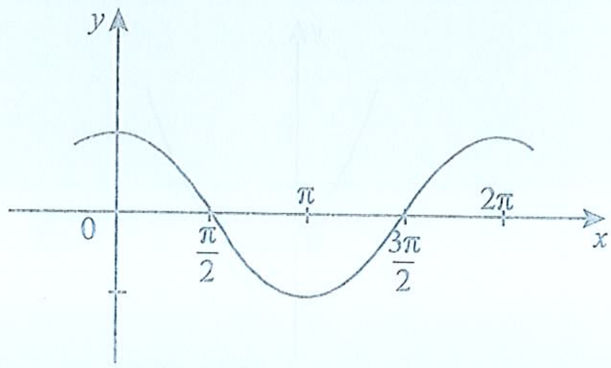


Fig. 5.7

7 Funksioni $y = \cos x$ (fig. 5.7, për $0 \le x \le 2\pi$)

8 Funksioni $y = \mathrm{tg}x$ (fig. 5.8) për $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

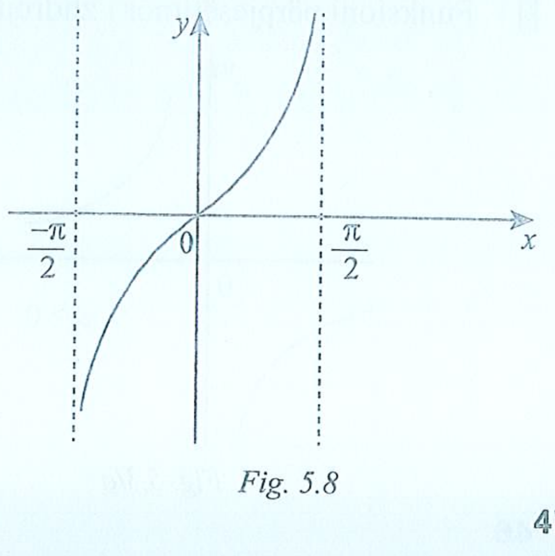


Fig. 5.8

Ushtrime të zgjidhura

1 a Gjeni koordinatat e pikave, ku grafiku i funksionit $y = 13 - x$ pret boshtet koordinative.

b A mund të kalojë nëpër këto dy pika, grafiku i një funksioni të trajtës $y = x + a$?

Zgjidhje

a Për $y = 0$ marrim $13 - x = 0$ prej ku $x = 13$. Pika e prerjes është A (13, 0).
Për $x = 0$, marrim $y = 13 - 0$ prej ku $y = 13$. Pika e prerjes është B (0, 13).
b Nuk ka grafik të trajtës $y = x + a$ që të kalojë nga dy pikat A dhe B, sepse nuk mund të kemi njëherësh $0 = 13 + a$ (d.m.th., $a = -13$) dhe $13 = 0 + a$ (d.m.th., $a = 13$).

2 Gjeni vlerat e m, n nëse dihet që grafiku i funksionit $y = mx + n$ kalon nëpër pikat:
a M (1, 3) dhe N (2, 5);
b M (–2, 0) dhe N (1, 3).

Zgjidhje

a Kemi $3 = m \cdot 1 + n$ dhe $5 = m \cdot 2 + n$.
Nga barazimi i parë nxjerrim $n = 3 - m$. Duke e zëvendësuar në barazimin e dytë, kemi $5 = m \cdot 2 + (3 - m)$ d.m.th., $m + 3 = 5$, prej ku $m = 2$.
Atëherë $n = 3 - m$ del $n = 1$. Kemi grafikun e funksionit $y = 2x + 1$.

3 Grafiku i funksionit linear $y = ax + b$ kalon nga pikat A (1, 3) dhe B (2, 5). Gjeni koeficientet a dhe b.

Zgjidhje

Meqë pika A (1; 3) ndodhet në grafikun e funksionit, kjo do të thotë që për $x = 1$, vlera e funksionit është $y = 3$, pra $3 = a \cdot 1 + b$.
Duke arsyetuar njëlloj për pikën B, marrim $5 = a \cdot 2 + b$. Kemi sistemin

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b = 3 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Funksioni jepet me formulën $y = 2x + 1$.

4 Grafiku i funksionit $y = ax^2 + bx + c$ kalon nëpër pikat A (1, 2); B (2, 3) dhe C (0, –2). Gjeni koeficientet a, b, c.

Zgjidhje

Për pikën A (1; 2) kemi:
$2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$. d.m.th., $a + b + c = 2$.
Për pikën B kemi:
$3 = a \cdot 4 + b \cdot 2 + c$
Për pikën C kemi $-2 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c$.
Kemi pra sistemin (me tri ekuacione me tri ndryshore):

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=3 \\ c=-2 \end{cases}. \quad \text{Zgjidhja e tij është} \begin{cases} a=-\dfrac{3}{2} \\ b=\dfrac{11}{2} \\ c=-2 \end{cases}$$

Funksioni është $y=-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x-2$.

5 Gjeni të anasjellin e funksionit $f:\ x\to\dfrac{5x-2}{3}$.

Zgjidhje

Kemi $y=\dfrac{5x-2}{3}$. Në këtë barazim ndërrojmë vendet e x dhe y.

Marrim $x=\dfrac{5y-2}{3}$, prej ku $3x=5y-2$ dhe $y=\dfrac{3x+2}{5}$.

I anasjelli i funksionit f është $f^{-1}:\ x\to\dfrac{3x+2}{5}$.

6 Jepet funksioni f: $y=x^2-1$

a Jepni me formulë funksionin g: $y=f(2x)$.

b Gjeni pikat ku grafiku i g pret drejtëzën $y=4x$.

Zgjidhje

a $g: y=f(2x)$ është $y=(2x)^2-1=4x^2-1$

b Pikat ku grafiku i g pret drejtëzën $y=4x$ i gjejmë duke zgjidhur sistemin

$$\begin{cases} y=4x^2-1 \\ y=4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2-1=4x \\ y=4x \end{cases}$$. Nga ekuacioni i parë nxjerrim

$x_1=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$; $x_2=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. Këto janë abshisat e pikave të prerjes.

7 Pa ndërtuar grafikët e funksioneve, gjeni pikat e prerjes së tyre:

$y=\dfrac{x-1}{2}$ dhe $y=\dfrac{3}{x}$

Zgjidhje

Pika e prerjes së grafikëve të dy funksioneve vërteton (me koordinatat e saj) secilin nga ekuacionet e grafikëve d.m.th., vërteton sistemin e formuar nga dy ekuacionet.

Sistemi $\begin{cases} y=\dfrac{x-1}{2} \\ y=\dfrac{3}{x} \end{cases}$ ka dy zgjidhje (3; 1) dhe $(-2,-\frac{3}{2})$

Pra, grafikët priten në pikat A(3; 1) dhe $B(-2,-\frac{3}{2})$.

8 Gjeni bashkësinë e përcaktimit të funksionit $y=\sqrt{(\frac{1}{2})^x-1}$

Zgjidhje

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-1\geq 0 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \geq \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 \Rightarrow x\leq 0$. Ajo është $]-\infty, 0]$.

9 Jepen funksionet f: $y=\dfrac{2x-1}{3}$ dhe g: $y=x^2$. Gjeni fog; gof.

Zgjidhje

a) $f[g(x)]=\dfrac{2\cdot g(x)-1}{3}=\dfrac{2\cdot x^2-1}{3}$ pra fog: $y=\dfrac{2x^2-1}{3}$

$g[f(x)]=(f(x))^2=\left(\dfrac{2x-1}{3}\right)^2$ pra gof: $y=\left(\dfrac{2x-1}{3}\right)^2$

10 Vërtetoni me rrugë algjebrike që vlera më e vogël e funksionit $y=(x-3)^2+2$ merret për $x=3$ dhe është 2.

Zgjidhje

Për çdo $x\in R$ kemi $(x-3)^2\geq 0$ d.m.th., $(x-3)^2+2\geq 2$. Pra, për çdo $x\in R$ kemi $f(x)\geq 2$ (dhe për $x=3, f(x)=2$). Kjo do të thotë që vlera më e vogël e funksionit f: $y=(x-3)^2+2$ merret për $x=3$ dhe është 2.

11 a Hipotenuza e një trekëndëshi kënddrejtë është 13 cm. Shënojmë me x njërin katet. Cila është bashkësia e vlerave të mundshme të x?

b Rrezja e një qarku është 10 cm. Shënojmë me x brinjën e një drejtkëndëshi të brendashkruar në qark. Cila është bashkësia e vlerave të mundshme të x?

Zgjidhje

a Gjatësia e çdo kateti është numër pozitiv, më i vogël se gjatësia e hipotenuzës, d.m.th., $0<x<13$. Pra, $X=]0, 13[$

b Për drejtkëndëshin e brendashkruar në qark, diagonalja është diametër i rrethit. Gjatësia e brinjës x është pozitive dhe më e vogël se diagonalja, pra, $0<x<20$. Kështu

$X=]0, 20[$.

12 Një trup hidhet vertikalisht përpjetë nga sipërfaqja e rrafshët e tokës me shpejtësi fillestare $V_0 = 30$ m/s. Lartësia h e ngritjes së trupit pas t sekondash është $h = 30t - 5t^2$.

a Gjeni bashkësinë E të vlerave të mundshme të t.

b Ndërtoni grafikun e funksionit $h = 30t - 5t^2$, $t \in$ E.

c Cila është lartësia më e madhe e ngjitjes?

Zgjidhje

a Bashkësia E e vlerave të mundshme të t përcaktohet nga kushtet:

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ h \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ 30t - 5t^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ 5t(6-t) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ 6-t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \leq 6 \end{cases}$$

Pra, E = [0, 6]

b Grafiku i funksionit $h = 30\,t - 5\,t^2$, $t \in [0, 6]$ është pjesë e parabolës me kulm në pikën C (m, n), ku

$$m = \frac{-30}{-10} = 3;$$

$n = f(3) = 30 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 45$, pra C (3, 45)

Dy pikat e skajeve kanë koordinata $t_1 = 0$ dhe $h_1 = 0$; $t_2 = 6$ dhe $h_2 = 0$.

Ky grafik është dhënë në figurën 5.9.

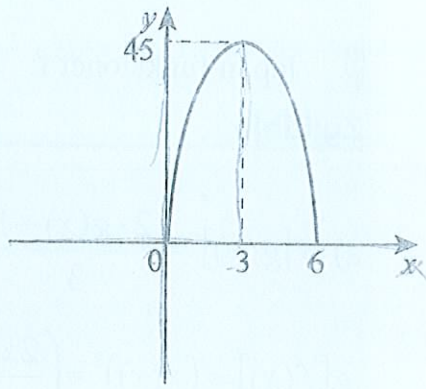


Fig. 5.9

c Vlera më e madhe e funksionit, siç duket nga grafiku, merret për $t = 3$ dhe është 45.

13 a Gjeni vlerën më të madhe për funksionin $y = x\left(\frac{5}{2} - x\right)$;

b Gjeni vlerën më të vogël për funksionin $y = (x - 3)^2$.

Zgjidhje

a $y = x\left(\frac{5}{2} - x\right) \Rightarrow y = \frac{5}{2}x - x^2$. Kemi $a = -1$, $b = \frac{5}{2}$, $c = 0$.

Vlera më e madhe e tij merret për $x = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{4}$ dhe është $f(\frac{5}{4}) = \frac{25}{16}$.

b Meqë $(x - 3)^2 \geq 0$ për çdo $x \in$ R, vlera më e vogël merret për $x = 3$ dhe ajo është $f(3) = 0$.

14 Duke ditur se për çdo $x \in$ R, $-1 \leq \sin x \leq 1$ dhe $-1 \leq \cos x \leq 1$, gjeni vlerën më të vogël dhe më të madhe të funksionit:

a $y = 1 + \sin x$ b $y = \dfrac{1}{2 + \cos x}$

Zgjidhje

a $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1+1 \leq 1+\sin x \leq 1+1 \Rightarrow 0 \leq 1+\sin x \leq 2.$
Vlera më e vogël është 0 dhe vlera më e madhe është –2.

b $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1+2 \leq 2+\cos x \leq 1+2 \Rightarrow 1 \leq 2+\cos x \leq 3$

$$\frac{1}{1} \geq \frac{1}{2+\cos x} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2+\cos x} \leq 1$$

Vlera më e vogël është $\frac{1}{3}$, dhe vlera më e madhe është 1.

15 Në figurën 5.10 është dhënë grafiku i parabolës f: $y = ax^2 + bx + c$. Gjeni $f(-3)$.

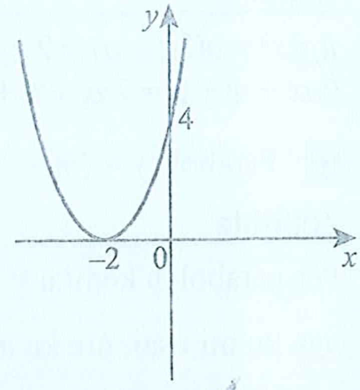


Fig. 5.10

Zgjidhje

Pika B(0, 4) ndodhet në grafikun e funksionit pra $f(0) = 4$
$\Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 4 \Rightarrow c = 4$
Pika A(–2, 0) gjithashtu ndodhet në grafikun e funksionit pra:
$a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 0 \Rightarrow 4a - 2b + 4 = 0$

Pika A është kulm i parabolës, prandaj $-\dfrac{b}{2a} = -2 \Rightarrow b = 4a$.
a dhe b janë zgjidhje të sistemit:

$$\begin{cases} 4a - 2b + 4 = 0 \\ b = 4a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}.$$

Ekuacioni i parabolës është f: $y = x^2 + 4x + 4$ nga ku $f(-3) = (-3)^2 + 4 \cdot (-3) + 4 = 1$

16 Funksioni i dhënë me formulën $y = ax^2 + b$ ka bashkësi përcaktimi $[-2, 2]$ dhe bashkësi vlerash $[-1, 7]$. Gjeni a, b. Sa zgjidhje ka problema?

Zgjidhje

Dallojmë dy raste:
i Nëse $a > 0$, grafiku është parabolë e kthyer nga lart dhe vlerën më të vogël (–1) do ta marrë te kulmi ($x = 0$), kurse vlerën më të madhe (7) do ta marrë në skajet.

Kemi kështu $\begin{cases} a \cdot 2^2 + b = 7 \\ a \cdot 0^2 + b = -1 \end{cases}$. Gjejmë $b = -1$ dhe $a = 2$.

ii Nëse $a < 0$, grafiku është parabolë e kthyer nga poshtë. Vlera më e madhe (7) do të merret tek kulmi ($x = 0$), kurse vlera më e vogël (–1) në skajet.

Kemi $\begin{cases} a \cdot 0^2 + b = 7 \\ a \cdot 2^2 + b = -1 \end{cases}$. Gjejmë $b = 7$ dhe $a = -2$.

17 Jepet $f(x) = x^3$ dhe $g(x) = 3^x$. Zgjidhni ekuacionin $f(g(x)) = g(f(x))$

Zgjidhje

$f(g(x)) = (3^x)^3 = 3^{3x}$; $g(f(x)) = g(f(x)) = 3^{x^3}$

$f(g(x)) = g(f(x)) \Rightarrow x^3 = 3x \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ose $x = \pm\sqrt{3}$

Rrënjët e ekuacionit janë $0; \pm\sqrt{3}$.

18 Jepet $f(x) = 3 \cdot 2^{x-2}$. Gjeni $f^{-1}(24)$.

Zgjidhje

Kemi $3 \cdot 2^{x-2} = 24 \Rightarrow 2^{x-2} = 8 \Rightarrow 2^{x-2} = 2^3 \Rightarrow x - 2 = 3 \Rightarrow x = 5$

19 Jepet $f(x) = ax + 2$ dhe $g(x) = 2x + a$. Për ç'vlera të a kemi $f(g(x)) = g(f(x))$?

Zgjidhje

$f(g(x)) = a(2x + a) + 2 = 2ax + a^2 + 2$; $g(f(x)) = 2(ax + 2) + a = 2ax + 4 + a$

$2ax + a^2 + 2 = 2ax + 4 + a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a_1 = -1$ ose $a_2 = 2$

20 Parabola $y = (m - 1)x^2 + 3mx + 1$ ka si bosht simetrie drejtëzën $x = -3$. Gjeni m.

Zgjidhje

Për parabolën kemi $a = (m - 1)$; $b = 3m$ dhe $c = 1$. Boshti i simetrisë së parabolës kalon nga kulmi i saj, pra ka abshisën $x = -\dfrac{b}{2a}$. Kemi

$-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3m}{2(m-1)}$. Nga kushti $-\dfrac{3m}{2(m-1)} = -3 \Rightarrow m = 2$

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 A ndodhen në një drejtëz pikat:
a A(–2, 2) B(1, –1) C(3, –3)
b A(1, 2) B(2, 3) C(–1, 0)?
P. [a) po; b) po]

2 Gjeni koordinatat e pikës ku priten grafikët e funksioneve:
a $y = 2x$ dhe $y = -2x + 8$;
b $y = 1 - 2x$ dhe $y = x - 5$.
P. [a) (2,4); b) (2,-3)]

3 Jepni me formulë funksionin linear, si grafik i të cilit shërben drejtëza që kalon nëpër pikën A (2; 3) dhe është paralele me grafikun e funksionit $y = 1{,}5x - 3$. P. [$y = 1{,}5x$]

4 Pikat A(m, –1); B($1 - m$, $2m + 1$) dhe C($m + 1$, –3) ndodhen në një drejtëz. Gjeni m.
P. [$m = 2$]

5 Vijat $y = x^2$; $y = 2x - 1$ dhe $y = mx + 3$ kalojnë nga e njëjta pikë. Gjeni m.
P. [$m = -2$]

6 Caktoni koeficientet a, b në mënyrë që grafiku i funksionit $y = ax^2 + bx - 48$ të kalojë nëpër pikat A(1; 2) dhe B(2; 10). P. [$a = -21$; $b = 71$]

7 Për ç'vlera të m, grafikët e funksioneve $y = x^2 - mx + 1$ dhe $y = mx$ nuk kanë asnjë pikë të përbashkët?
P. [$-1 < m < 1$]

8 Jepet $f(x)=\dfrac{3}{4x-2}$ dhe $f^{-1}(x)=\dfrac{ax+3}{4x}$. Gjeni a. P. [$a = 2$]

9 Gjeni funksionin e anasjellë të funksionit:

a $f(x)=\dfrac{4+7x}{5}$ b $f(x)=3^{x-1}+2$

P. [a) $f(x)=\dfrac{5x-4}{7}$; b) $f(x)=1+\log_3(x-2)$]

10 Në figurën 5.11 paraqitet funksioni $y = k - x^2$, ku k është konstante. Syprina e trekëndëshit ABC është 64 njësi katrore. Gjeni k. P. [$k = 16$]

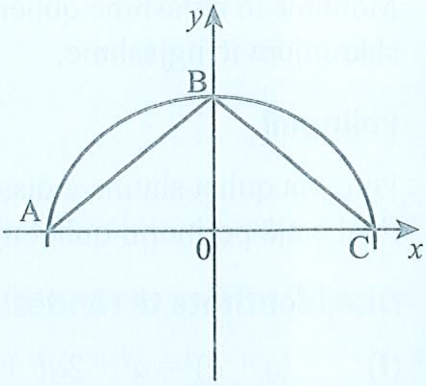


Fig. 5.11

11 Jepet funksioni $f(x) = 2^{2x-3}$. Gjeni rrënjën e ekuacionit $f(x)=16f(\frac{x}{2})$. P. [$x = 1$]

12 Jepet $f(x) = 3x - 7$ dhe $f(f(a)) = a$. Gjeni a. P. [$\frac{7}{2}$]

13 Gjeni $f(x)$ në qoftë se $f(2x-4) = mx - 4$ dhe $f(-2) = -2$. P. [$f(x) = x$]

14 Parabola $y = 2x^2 - 4x + (a + 1)$ ka minimum të barabartë me -3. Gjeni a.

P. [$a = -2$]

15 Për ç'vlera të m, parabola $y=2x^2 + mx + 2$ është tangjente me boshtin e abshisave?

P. [$m = \pm 4$]

16 Minimumi i parabolës $y = mx^2 + (m - 1)x + 3$ ndodhet në boshtin e ordinatave. Gjeni m. P. [$m = 1$]

17 Në figurën 5.12 jepet grafiku i parabolës f: $y = ax^2 + bx + c$. Gjeni ordinatën e maksimumit të saj.

P. [$\frac{9}{2}$]

18 Parabola $f(x)= x^2 - 4x+3$ e ka kulmin në pikën $(2,-1)$. Gjeni kulmin e parabolës $g(x) = f(x + 2)$.

P. [$(0,-1)$]

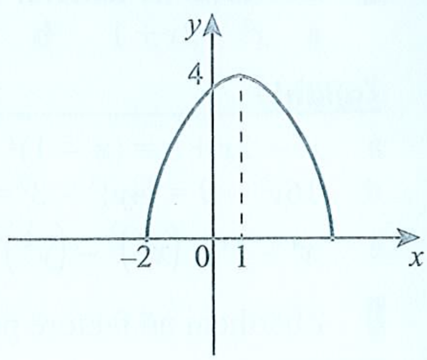


Fig. 5.12

KREU 6

SHPREHJET ME NDRYSHORE. POLINOMET

Monomi

Monom quhet shprehja që merret duke kryer mbi numrat dhe ndryshoret vetëm veprimet e shumëzimit dhe të ngritjes në fuqi.
Monome të ngjashme quhen monomet që në trajtat e rregullta të tyre i kanë pjesët shkronjore të ngjashme.

Polinomi

Polinom quhet shuma e disa monomeve.
Fuqi e një polinomi quhet më e madhja nga fuqitë e monomeve që e përbëjnë atë.

Disa identitete të rëndësishme

(I) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(II) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(III) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(IV) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(V) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

(VI) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

(VII) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Ushtrime të zgjidhura

1 Gjeni shumën e polinomeve $(3x^2 + 5x - 6)$ dhe $(x^2 - 2x + 1)$.

Zgjidhje

$(3x^2 + 5x - 6) + (x^2 - 2x + 1) = (3x^2 + x^2) + (5x - 2x) + (-6 + 1) = 4x^2 + 3x - 5$

2 Zbërtheni në faktorë: **a** $x^3 + 8$ **b** $x^3 - 8y^3$

Zgjidhje

a $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

b $x^3 - 8y^3 = (x)^3 - (2y)^3 = (x - 2y)[x^2 + x(2y) + (2y)^2] = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

3 Zbërtheni në faktorë:

a $x^2 - 2x + 1$ **b** $4x^2 + 4x + 1$ **c** $x^2 - 9$ **d** $16y^2 - 9$ **e** $x^4 - y^4$

Zgjidhje

a $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ **b** $4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$ **c** $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$

d $16y^2 - 9 = (4y)^2 - 3^2 = (4y - 3)(4y + 3)$

e $x^4 - y^4 = \left(x^2\right)^2 - \left(y^2\right)^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$

4 Zbërtheni në faktorë polinomin $x^3 + 4x^2 + x + 4$.

Zgjidhje

Mënyra I: $x^3 + 4x^2 + x + 4 = (x^3 + 4x^2) + (x + 4) = x^2(x+4) + (x+4) = (x+4)(x^2+1)$.

Mënyra II: $x^3 + 4x^2 + x + 4 = (x^3 + x) + (4x^2 + 4) = x(x^2 + 1) + 4(x^2 + 1) = (x+4)(x^2+1)$.

5 Zbërtheni në faktorë polinomin $3x^3 - 48x$.

Zgjidhje

$3x^3 - 48x = 3x(x^2 - 16) = 3x(x - 4)(x + 4)$.

6 Jepen polinomet $P(x) = 3x - 6$ dhe $Q(x) = (a - 1)x + b$. Gjeni a dhe b, në mënyrë që për çdo $x \in R$ të ketë vend barazimi $P(x) = Q(x)$.

Zgjidhje

Për këtë duhet e mjafton që $\begin{cases} a - 1 = 3 \\ b = -6 \end{cases}$ d.m.th., $\begin{cases} a = 4 \\ b = -6 \end{cases}$.

7 Gjeni herësin dhe mbetjen e pjesëtimit të polinomit x^3 me $x - 3$.

Zgjidhje

Le të jetë $Q(x)$ herësi i pjesëtimit dhe r mbetja e tij.
Kemi $x^3 = (x - 3) \cdot Q(x) + r$ ku $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Kemi:
$x^3 = (x - 3)(ax^2 + bx + c) + r \Rightarrow x^3 = (ax^3 + bx^2 + cx - 3ax^2 - 3bx - 3c) + r \Rightarrow$
$x^3 = ax^3 + x^2(b - 3a) + x(c - 3b) + r - 3c$
Koeficientet pranë fuqive të njëjta të ndryshores në anën e majtë dhe në anën e djathtë janë të barabarta, prandaj:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = 0 \\ c - 3b = 0 \\ r - 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 3 \cdot 1 = 0 \\ c - 3b = 0 \\ r - 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c - 3 \cdot 3 = 0 \\ r - 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 9 \\ r - 3 \cdot 9 = 0 \end{cases}$$

Përfundimisht kemi $a = 1$; $b = 3$; $c = 9$; $r = 27$
Prandaj $x^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9) + 27$

8 Jepen $a = -2$, $b = 3$, $c = -3$. Gjeni vlerën e:

a $\dfrac{2a(b^2 - a)}{c}$ **b** $\sqrt{a^2 + b^2}$

Zgjidhje

a $b^2 - a = 9 - (-2) = 11$, prandaj $\dfrac{2a(b^2 - a)}{c} = \dfrac{2 \cdot (-2) \cdot 11}{-3} = 14\dfrac{2}{3}$

b $a^2 + b^2 = (-2)^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$, prandaj $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$

9 Zbërtheni kllapat:

a $(x + 5)(x + 3)$ **b** $(2x - 3)(4y + 3)$ **c** $3(x + 1)(x - 2)$

Zgjidhje

a $(x + 5)(x + 3) = x(x + 3) + 5(x + 3) = x^2 + 3x + 5x + 15 = x^2 + 8x + 15$
b $(2x - 3)(4y + 3) = 2x(4y + 3) - 3(4y + 3) = 8xy + 6x - 12y - 9$
c $3(x + 1)(x - 2) = 3 \cdot [x \cdot (x - 2) + 1 \cdot (x - 2)] = 3 \cdot [x^2 - 2x + x - 2] = 3x^2 - 3x - 6$

9 Zbërtheni në faktorë shprehjet:

a $ah + ak + bh + bk$ b $6mx - 3nx + 2my - ny$ c $x^2 + 6x + 8$

Zgjidhje

a $ah + ak + bh + bk = a\cdot (h + k) + b\cdot (h + k) = (h + k) \cdot(a + b)$

b $6mx - 3nx + 2my - ny = 3x\cdot(2m - n) + y\cdot (2m - n) = (2m - n) \cdot (3x + y)$

c $x^2 + 6x + 8 = x^2 + 4x + 2x + 8 = x(x + 4) + 2(x + 4) = (x + 4)(x + 2)$

10 Thjeshtoni shprehjen: $3x(4 - x) - (2x - 3)(5 - x)$.

Zgjidhje

$3x(4 - x) - (2x - 3)(5 - x) = 12x - 3x^2 - (10x - 2x^2 - 15 + 3x) =$
$= 12x - 3x^2 - 10x + 2x^2 + 15 - 3x) = -x^2 - x + 15$

11 Gjeni vlerën e shprehjes numerike $\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{100}\right)$.

Zgjidhje:

Shprehja shkruhet $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{99}{100}=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$.

12 Sillni në trajtë të rregullt monomin:

a $(-2\,a^2\,b)^3$ b $0,3x^2\cdot\left(-\frac{1}{3}x^4y\right)^2$ c $-x^2y\cdot 4x^2y^2\,(-5xy)$

Zgjidhje

a $(-2a^2b)^3 = (-2)^3\cdot(a^2)^3\cdot b^3 = -8a^6b^3$

b $0,3x^2\cdot\left(-\frac{1}{3}x^4y\right)^2 = 0,3x^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(x^4\right)^2\cdot y^2 = 0,3x^2\cdot\frac{1}{9}\cdot x^8y^2 = \frac{1}{30}x^{10}y^2$

c $-x^2\cdot y\cdot 4x^2\cdot y^2\,(-5xy) = (-5\cdot 4)\cdot(x^2\cdot x^2\cdot x)\,(y\cdot y^2\cdot y) = -20x^5\cdot y^4$.

13 Vërtetoni që për çdo vlerë të x, vlera e shprehjes $(x-6)\,(x+8) -2\,(x-25)$ është pozitive.

Zgjidhje

Kemi $(x-6)\,(x+8) -2\,(x-25) = x^2 + 8x - 6x - 48 - 2x + 50 = x^2 + 2$. Për çdo vlerë të x kemi $x^2 \geq 0$, prandaj $x^2 + 2 > 0$.

14 Duke ditur që çdo numër tek paraqitet në trajtën $2n + 1$ (ku n – i plotë), vërtetoni që katrori i çdo numri tek është numër tek.

Zgjidhje

Kemi $t = 2n + 1$, që nga $t^2 = (2n + 1)^2 \Rightarrow t^2 = 4n^2 + 4n + 1 \Rightarrow t^2 = 2\,(2n^2 + 2n) + 1$, i cili është numër tek.

15 Thjeshtoni shprehjen dhe gjeni vlerën e saj:

a $(x - 10)^2 - x(x + 80)$ për $x = 0,97$

b $(2x + 9)^2 - x(4x + 31)$ për $x = -16,2$

Zgjidhje

a Shprehja është identike me $(x^2-20x+100)-x^2-80x=-100x+100$. Vlera e saj për $x=0{,}97$ është $-100\cdot(0{,}97)+100=-97+100=3$.

b Shprehja është identike me $(4x^2+36x+81)-4x^2-31x=5x+81$. Vlera e saj për $x=-16{,}2$ është $5(-16{,}2)+81=-81+81=0$.

16 Nëse është e mundur, paraqitni shprehjen si katror binomi:

a $\frac{1}{4}x^2+3x+9$ b $4a^2-2a+1$

Zgjidhje

a $\frac{1}{4}x^2+3x+9=(\frac{1}{2}x)^2+2\cdot\frac{1}{2}x\cdot3+3^2=(\frac{1}{2}x+3)^2$.

b $4a^2-2a+1=(2a)^2-2a+1^2$. Vëmë re që $2\cdot2a\cdot1=4a\neq2a$ prandaj shprehja nuk shkruhet dot në trajtën $(2a-1)^2$.

17 Kryeni shkurt shumëzimet: a $(-x-y)(x-y)$ b $99\cdot101$

Zgjidhje

a $-x-y=-(x+y)$;
$(-x-y)(x-y)=-(x+y)(x-y)=-(x^2-y^2)=y^2-x^2$.

b Shkruajmë $99=100-1$ dhe $101=100+1$.
$99\cdot101=(100-1)(100+1)=100^2-1^2=9999$.

18 Paraqitni në trajtë prodhimi $(2x+y)^2-(x-2y)^2$.

Zgjidhje

$(2x+y)^2-(x-2y)^2=(2x+y+x-2y)(2x+y-x+2y)=(3x-y)(x+3y)$.

19 Zbërtheni në faktorë: a $x^2-a^2b^2$ b $x^4-\frac{1}{16}$.

Zgjidhje

a $x^2-a^2b^2=x^2-(ab)^2=(x-ab)(x+ab)$

b $x^4-\frac{1}{16}=x^4-\left(\frac{1}{4}\right)^2=(x^2)^2-\left[\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2=\left[x^2-\left(\frac{1}{4}\right)\right]\cdot\left[x^2+\left(\frac{1}{4}\right)\right]=$
$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{4}\right)$.

20 Zbërtheni në faktorë: a $y^2+2y+1-a^2$ b a^2-x^2+6x-9
c $a^2-b^2+2(a+b)^2$.

Zgjidhje

a $(y^2+2y+1)-a^2=(y+1)^2-a^2=(y+1+a)(y+1-a)$.

b $a^2-x^2+6x-9=a^2-(x^2-6x+9)=a^2-(x-3)^2=(a+x-3)(a-x+3)$.

c $a^2 - b^2 + 2(a+b)^2 = (a-b)(a+b) + 2(a+b)^2$
$= (a+b)[(a-b) + 2(a+b)] = (a+b)(3a+b).$

21 Zbërtheni në faktorë polinomin $2a^3 + 12a^2 + 18a$.

Zgjidhje

$2a^3 + 12a^2 + 18a = 2a(a^2 + 6a + 9) = 2a(a+3)^2$

22 Gjeni vlerën e shprehjes $x^2y - y + xy^2 - x$ për $x = 4$ dhe $y = 0{,}25$.

Zgjidhje

$x^2y - y + xy^2 - x = (x^2y + xy^2) - (x+y) = (xy)(x+y) - 1 \cdot (x+y) = (x+y)(xy-1)$.
Për $x = 4$ dhe $y = 0{,}25$ kemi $(4 + 0{,}25)(1-1) = 0$.

23 Vërtetoni që për çdo vlerë natyrore të n, vlera e shprehjes $n(n+2) - (n-7)(n-5)$ është shumëfish i numrit 7.

Zgjidhje

Kemi $n(n+2) - (n-7)(n-5) = n^2 + 2n - (n^2 - 5n - 7n + 35)$
$= n^2 + 2n - n^2 + 5n + 7n - 35 = 14n - 35 = 7(2n-7)$. Shprehja e fundit e ka si faktor numrin 7, pra plotpjesëtohet me 7.

24 Zgjidhni ekuacionin $(1-2x)(1-3x) = (6x-1)x - 1$.

Zgjidhje

$(1-2x)(1-3x) = (6x-1)x - 1 \Rightarrow 1 - 3x - 2x + 6x^2 = 6x^2 - x - 1$

$\Rightarrow -5x + 6x^2 - 6x^2 + x = -1 - 1 \Rightarrow -4x = -2 - \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

25 Vërtetoni që për çdo x, vlerat e trinomit $4x^2 + 4x + 2$ janë pozitive.

Zgjidhje

$4x^2 + 4x + 2 = (4x^2 + 4x + 1) + 1 = (2x+1)^2 + 1 > 0$.

26 Për të gjitha vlerat e $x \in R$, të tilla që $\begin{cases} x+5 \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$ ka vend barazimi

$\dfrac{x-1}{(x+5)(x-2)} = \dfrac{a}{x+5} + \dfrac{b}{x-2}$. Gjeni a dhe b.

Zgjidhje

Në bashkësinë e vlerave të shqyrtuara të ndryshores x, kemi:

$\dfrac{x-1}{(x+5)(x-2)} = \dfrac{a(x-2) + b(x+5)}{(x+5)(x-2)}$ nga ku

$x - 1 = a(x-2) + b(x+5)$. Duke barazuar koeficientet pranë fuqive të njëjta të x te polinomet identike të barazimit të mësipërm, marrim:

$1 = a + b$ dhe $-1 = -2a + 5b$ nga ku $a = \dfrac{6}{7}; b = \dfrac{1}{7}$.

27 Tregoni që polinomi $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$ plotpjesëtohet me $(x-1)(x-2)$.

Zgjidhje

Meqenëse vlera e polinomit për $x = 1$ është 0, ky polinom plotpjesëtohet me $(x - 1)$ pra $P(x) = (x - 1)\cdot Q(x)$. Edhe për $x = 2$, vlera e polinomit $P(x)$ bëhet 0, pra
$P(2) = (2 - 1)\cdot Q(2) = 0$ nga ku $Q(2) = 0$.
Kjo tregon se edhe polinomi $Q(x)$ plotpjesëtohet me $(x - 2)$, pra $Q(x) = (x - 2) \cdot H(x)$.
Del $P(x) = (x - 1)(x - 2) \cdot H(x)$.

28 a Polinomi $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + mx - 3$ plotpjesëtohet me $x - 2$. Gjeni m.
b Polinomi $P(x) = mx^2 - 15x + n$ ka si faktorë $(2x - 1)$ dhe $(x - 2)$. Gjeni m dhe n.

Zgjidhje

a Nga kushti $P(2) = 0$. Kemi $P(2) = 16 - 24 + 8 + 2m - 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$

b Kemi $P(2) = 0$ dhe $P(\frac{1}{2}) = 0$. $P(2) = 4m - 30 + n = 0$; $P(\frac{1}{2}) = \frac{m}{4} - \frac{15}{2} + n = 0$.

Duke zgjidhur sistemin $\begin{cases} 4m - 30 + n = 0 \\ \frac{m}{4} - \frac{15}{2} + n = 0 \end{cases}$, gjejmë $m = 6$ dhe $n = 6$.

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Duke përdorur formulën $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, faktorizoni shprehjet:
a $4a^2 - b^2$ b $3x^2 - 27y^2$.

P. [a) $(2a - b)(2a + b)$; b) $3(x - 3y)(x + 3y)$]

2 Zbërtheni në faktorë polinomet: a $5x + 5y + ax + ay$ b $x^2 - 7x + 12$

P. [a) $(x + y)(5 + a)$; b) $(x - 3)(x - 4)$]

3 Zbërtheni në faktorë: a $25 - x^2$ b $4a^2 - 9b^2$ c $\frac{1}{4} - x^4$

P. [a) $(5 - x)(5 + x)$; b) $(2a - 3b)(2a + 3b)$ c) $\left(\frac{1}{2} - x^2\right)\left(\frac{1}{2} + x^2\right)$]

4 Zbërthenit në faktorë polinomin $5x^3 - 20x$. P. [$5x(x - 2)(x + 2)$]

5 Zbërtheni në faktorë $xb^3 - 3b^3 + xb^2y - 3b^2y$ P. [$b^2(x - 3)(b + y)$]

6 Zbërtheni në faktorë polinomin $x^2 - 4x - y^2 + 4$. P. [$(x - 2 + y)(x - 2 - y)$]

7 Zbërtheni në faktorë:
a $7a - 7b + ax - bx$ b $x^3 - x^2 + x - 1$ c $y^3 - 2y^2 + y - 2$

P. [a) $(a - b)(7 + x)$; b) $(x - 1)(x^2 + 1)$; c) $(y - 2)(y^2 + 1)$]

8 Zbërtheni në faktorë: a $x^2 - 4x + 3$ b $x^2 + 6x + 8$

P. [a) $(x-1)(x-3)$; b) $(x+2)(x+4)$]

9 Zbërtheni në faktorë: a $4x^2 + 8xy + 4y^2$ b $-4a - 4 - a^2$
c $x^3 - x^2y + x^2 - xy$

P. [a) $4(x-y)^2$; b) $-(a+2)^2$; c) $x(x-y)(x+1)$]

10 Gjeni koeficientet a, b, c të polinomit $P(x) = ax^2 + bx + c$, duke ditur që $P(x+1) + P(x-1) = 8x^2 - 6x + 10$.

Udhëzim: Kemi $P(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c = ax^2 + (2a+b)x + a + b + c$ dhe në mënyrë të ngjashme:
$P(x-1) = ax^2 + (-2a+b)x + a - b + c$. Përdorim më tej metodën e koeficienteve të pacaktuara.

P. [$a = 4$; $b = -6$; $c = 1$]

11 Dy rrënjë të polinomit $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ janë 2 dhe -3. Gjeni dy rrënjët e tjera të polinomit.

Udhëzim: Polinomi plotpjesëtohet me $(x-2)$ dhe me $(x+3)$, prandaj shkruhet në trajtën $P(x) = (x-2)(x+3) \cdot Q(x)$, ku $Q(x)$ është polinom i fuqisë së dytë $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Për gjetjen e koeficienteve a, b, c përdorni metodën e koeficienteve të pacaktuara.

P. [$a = 1$; $b = 0$; $c = -1$]

12 Thjeshtoni shprehjen $P = \sqrt{\frac{a^2}{49} - \frac{2ab}{35} + \frac{b^2}{25}}$. P. [$\frac{|5a-7b|}{35}$]

13 Tregoni që vlera e shprehjes $\frac{ab+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{a-b}$ është konstante për çdo vlerë të a dhe b $(a \neq b)$.

14 Polinomi $P(x) = 9x^4 - 3(m-1)x^2 - x + 1$ ka rrënjë $x = 1$. Gjeni $P(-1)$. P. [2]

15 Thjeshtoni shprehjen $\left(\frac{x+1}{x^2-1} - \frac{x+1}{x^2-x}\right) \cdot (x - x^2)$. P. [1]

16 Jepet $P(x) = \frac{x+a}{x+b}$ dhe $P(2) = 4$; $P(-1) = 7$. Gjeni a dhe b. **P. [$a = 8$; $b = 2$]**

17 Gjeni vlerat m dhe n, në qoftë se polinomi $P(x) = mx^2 - 22x + n$, ka si faktorë $(3x-2)$ dhe $(x-3)$.

P. [$m = 6$; $n = 12$]

18 Gjeni vlerën e shprehjes $\frac{6x^2 + 6y^2}{3x^2 - 3y^2}$ për $x = 6{,}5$ dhe $y = 2{,}5$. **P. [16,125]**

KREU 7

VARGJET. TEOREMA BINOMIALE

Jepet bashkësia e numrave 5; 9; 13; 17; 21; …

Rregulla: Kufizë pas kufize:	$u_{n+1} = u_n + 4$; $u_1 = 5$; "Shto 4"
Rregulla: Kufiza e $n^{\text{të}}$:	$u_n = 4n + 1$
Vargu rritës:	$u_{n+1} > u_n$ për çdo $n \in N$
Vargu zbritës:	$u_{n+1} < u_n$ për çdo $n \in N$
Vargu periodik:	Blloqe kufizash që përsëriten.
Vargu i numrave katrorë:	1; 4; 9; 16; …
Vargu i numrave kubikë:	1; 8; 27; 64; …
Vargu Fibonaçi:	1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; …
Progresioni aritmetik:	$u_{n+1} - u_n = d$
Kufiza e përgjithshme:	$u_n = u_1 + (n-1)d$
Progresioni gjeometrik	$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = r$
Kufiza e përgjithshme:	$u_n = u_1 r^{n-1}$
Vargu kuadratik:	$T(n) = an^2 + bn + c$
Kombinacioni:	$C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-p+1)}{p\cdot(p-1)\cdot(p-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$

Trekëndëshi i Paskalit

ZBËRTHIMI	KOEFICIENTET
$(a+b)^0 = 1$	1
$(a+b)^1 = 1a + 1b$	1 1
$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$	1 5 10 10 5 1

Ushtrime të zgjidhura

1
- **a** Shkruani vargun e numrave çift dyshifrorë.
- **b** Jepni këtë varg me formulë.
- **c** A është kufizë e këtij vargu numri 92? Numri 79? Numri 104?

Zgjidhje

a 10, 12, 14, ..., 98

b Vargu mund të jepet me formulën $u_n = 2n + 8$

c Le të shohim nëse është kufizë e vargut numri 92, pra të shohim nëse ekziston ndonjë vlerë natyrore e n për të cilën $u_n = 92$ (d.m.th., $2n + 8 = 92$).
Nga barazimi $2n + 8 = 92$ gjejmë $n = 42$.
Kështu, numri 92 është kufizë e vargut dhe pikërisht kufiza e 42-të e tij.

2 Vargu është dhënë me formulën $u_n = 2n - 3$. Gjeni kufizën e vargut me tregues:
a 1 b 7 c k d $2k - 1$

Zgjidhje

a Në formulën $u_n = 2n - 3$, duke zëvendësuar n me 1, gjejmë $u_1 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$.

d Në formulën $u_n = 2n - 3$, duke zëvendësuar në vend të n shprehjen $2k - 1$, gjejmë $u_{2k-1} = 2(2k - 1) - 3 = 4k - 5$.

3 Për secilin nga vargjet:
a 4, 7, 10, 13, ...; b 1, 4, 9, 16, ...
- përshkruani vargun;
- shkruani 3 kufizat pasuese;
- shkruani kufizën e 50-të.

Zgjidhje

a Vargu 4, 7, 10, 13, fillon me 4 dhe çdo kufizë merret nga e mëparshmja, duke i shtuar 3.

Tri kufizat pasuese janë $\begin{pmatrix} 13+3=16 \\ 16+3=19 \\ 19+3=2 \end{pmatrix}$ pra, 16, 19, 22.

Meqenëse kufizat rriten çdo herë me nga 3, krahasojmë vargun me atë të shumëfishave të numrit 3.
Vargu ynë: 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22
Vargu i shumëfishave të numrit 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21
Vëmë re që çdo kufizë e vargut tonë është 1 njësi më e madhe se shumëfishi përkatës i numrit 3.
Pra, kufizat e vargut tonë janë:
E para: $1 \cdot 3 + 1 = 4$
E dyta: $2 \cdot 3 + 1 = 7$
E treta: $3 \cdot 3 + 1 = 10$
....
E pesëdhjeta: $3 \cdot 50 + 1 = 151$

4 Plotësoni tabelën për vargun e mëposhtëm, të ndërtuar sipas rregullës: "Shumëzo çdo numër me 2, pastaj shtoji 3".

Hyrje	1	2	3	4	5
Dalje					

Zgjidhje

Duke përdorur rregullën e përshkruar, marrim tabelën e mëposhtme, sepse:
$1 \cdot 2 + 3 = 5$; $2 \cdot 2 + 3 = 7$; $3 \cdot 2 + 3 = 9$ etj.

Hyrje	1	2	3	4	5
Dalje	5	7	9	11	13

5 a Tregoni 4 kufizat e para për secilin nga vargjet:

$$u_n = \frac{n+1}{n} \qquad u_n = 2n - 5 \qquad u_n = 1 + \sqrt{n}$$

b Për secilin varg, gjeni u_{n+1}; u_{n-1}

c Për secilin varg, gjeni $u_n + 1$; $u_n - 1$; $\frac{1}{u_n}$

Zgjidhje

b Për vargun $u_n = \frac{n+1}{n}$ kemi

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \text{ dhe } u_{n-1} = \frac{(n-1)+1}{n-1} = \frac{n}{n-1}$$

c Për vargun me $u_n = 1 + \sqrt{n}$ kemi

$$u_n + 1 = 1 + \sqrt{n} + 1 = 2 + \sqrt{n}$$

$$u_n - 1 = 1 + \sqrt{n} - 1 = \sqrt{n}$$

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{1+\sqrt{n}} = \frac{1-\sqrt{n}}{1-n}$$

6 Gjeni treguesit e kufizave të vargut të dhënë me formulën $u_n = 3n + 2$, $n \in N$, të cilat plotësojnë kushtin:

a $u_n > 17$ b $u_n \leq 38$ c $80 \leq u_n \leq 180$

Zgjidhje

a Zgjidhim në N inekuacionin $u_n > 17$ d.m.th., $3n + 2 > 17$. Gjejmë $n > 5$.

c Zgjidhim në N inekuacionin e dyfishtë $80 \leq u_n \leq 180$ d.m.th.,

$$80 \leq 3n + 2 \leq 180$$

$$\Downarrow$$

$$78 \leq 3n \leq 178$$

$$\Downarrow$$

$$26 \leq n \leq 59\frac{1}{3}$$

Pra, $26 \leq n \leq 59$ $(n \in N)$

7 Duke filluar nga cili tregues, kufizat e vargut $u_n = n^2 - 16$ janë:

a pozitive?

b më të vogla se 200?

Zgjidhje

a Zgjidhim në N inekuacionin $u_n > 0$ d.m.th., $n^2 - 16 > 0$, pra $n^2 > 16 \Rightarrow n > 4$ (ose $n \geq 5$).

b Zgjidhim në N inekuacionin $u_n < 200$ d.m.th., $n^2 - 16 < 200$, pra, $n^2 < 216 \Rightarrow < \sqrt{216}$, pra $n \leq 14$, ($n \in$ N).

8 Jepet vargu $u_n = \dfrac{(x-1)n+2}{5n+1}$. Për ç'vlerë të x ai është varg konstant?

Zgjidhje

Gjejmë dy kufizat e para të vargut. Kemi:

$$u_1 = \frac{x-1+2}{5\cdot 1+1} = \frac{x+1}{6}; \quad u_2 = \frac{(x-1)\cdot 2+2}{5\cdot 2+1} = \frac{2x-2+2}{10+1} = \frac{2x}{11}.$$ Nga kushti:

$$\frac{x+1}{6} = \frac{2x}{11} \Rightarrow 11(x+1) = 12x \Rightarrow x = 11$$

Për $x = 11$ kemi $u_n = \dfrac{(11-1)n+2}{5n+1} = \dfrac{10n+2}{5n+1} = \dfrac{2(5n+1)}{5n+1} = 2$

9 Jepet progresioni aritmetik $-10, -8, \ldots$ Gjeni u_{21}.

Zgjidhje

Kemi $u_1 = -10$ dhe $d = -8 - (-10) = 2$. Prandaj:

$u_{21} = u_1 + (21-1)d = -10 + 20 \cdot 2 = 30.$

10 Gjeni kufizën e parë dhe diferencën e progresionit aritmetik, në qoftë se njihen kufiza e pestë dhe e dyzetë e tij $u_5 = 2$ dhe $u_{40} = 142$.

Zgjidhje

Kemi $\begin{cases} u_5 = 2 \\ u_{40} = 142 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 2 \\ u_1 + 39d = 142 \end{cases}$.

Duke zgjidhur këtë sistem me dy ndryshore u_1 dhe d, gjejmë $u_1 = -14$; $d = 4$.

11 Plotësoni vendet bosh në progresionin aritmetik:

a 2; □; 5; □ b 3; □; □ ; 7; □ c □ ; 6; □; 12; □

Zgjidhje

c Kemi të dhënë $u_2 = 6$ dhe $u_4 = 12$. $\begin{cases} y_1 + d = 6 \\ y_1 + 3d = 12 \end{cases} \Rightarrow d = 3;\ u_1 = 3$

Pra, progresioni është 3, 6, 9, 12, …

12 Në progresionin aritmetik, kemi $u_1 = -15$ dhe $d = 1{,}5$. Për ç'vlera të n ka vend mosbarazimi $u_n \geq 0$?

Zgjidhje

Kemi $u_n = -15 + (n-1) \cdot 1{,}5 \Rightarrow u_n = 1{,}5n - 16{,}5$.

$1{,}5n - 16{,}5 \geq 0 \qquad 1{,}5n \geq 16{,}5 \qquad n \geq \dfrac{16{,}5}{1{,}5}$ pra, $n \geq 11$.

13 Në një progresion aritmetik jepen $\begin{cases} u_6 + u_7 = -16 \\ u_2 + u_{10} = -20 \end{cases}$.

a Gjeni u_1 dhe d.

b Cila është kufiza e parë pozitive e këtij progresioni?

Zgjidhje

a $\begin{cases} u_6 + u_7 = -16 \\ u_2 + u_{10} = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + 5d + u_1 + 6d = -16 \\ u_1 + d + u_1 + 9d = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_1 + 11d = -16 \\ 2u_1 + 10d = -20 \end{cases}$

Duke zbritur nga ekuacioni i parë, ekuacionin e dytë gjejmë $d = 4$.
Duke zëvendësuar $d = 4$, në ekuacionin e parë gjejmë $u_1 = -30$
b Kërkojmë n të tillë që $u_n > 0$.
$u_n = u_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow u_n = -30 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 34$
$4n - 34 > 0 \Rightarrow n > 8{,}5$, pra $n = 9$ (Pse?)
Kufiza e parë pozitive e progresionit është kufiza e nëntë. Ajo është:
$u_9 = u_1 + 8d = -30 + 8 \cdot 4 = -30 + 32 = 2$

14 Numrat log 2; log 2^x dhe log $(2^x + 4)$ formojnë progresion aritmetik. Gjeni x.

Zgjidhje

Meqë numrat log 2; log 2^x dhe log $(2^x + 4)$ formojnë progresion aritmetik kemi:

$\log 2^x - \log 2 = \log(2^x + 4) - \log 2^x$. Nga vetitë e logaritmeve shkruajmë:

$$\log\frac{2^x}{2} = \log\frac{2^x + 4}{2^x} \Rightarrow \frac{2^x}{2} = \frac{2^x + 4}{2^x}.$$

Duke zëvendësuar $2^x = t$ kemi: $\dfrac{t}{2} = \dfrac{t+4}{t} \Rightarrow t^2 = 2t + 8 \Rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0$.

Rrënjë të këtij ekuacioni janë $t_1 = -2$ ose $t_2 = 4$.
Vlera e parë nuk pranohet sepse $2^x > 0$.
Për $t = 4$ kemi $2^x = 4$ nga ku $x = 2$.

15 Shufra e hekurit që në 0°C ka gjatësinë 1 metër, rrit gjatësinë e saj me 0,00012 metra çdo dy gradë të rritjes së temperaturës.

a Tregoni se vargu $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$, ku l_n shpreh gjatësinë e shufrës në temperaturën n°C, është progresion aritmetik.

b Gjeni gjatësinë e shufrës në temperaturën 100°C; në temperaturën n°C.

Zgjidhje

a Kemi $l_n = 1 + 0{,}000006\,n$ prandaj $l_{n+1} = 1 + 0{,}000006\,(n + 1)$.
Kështu $l_{n+1} - l_n = 0{,}000006$ (konstante) për çdo $n \in \mathbb{N}$.
Vargu (l_n) është progresion aritmetik me diferencë $d = 0{,}000006$.
b Kemi $l_{100} = 1 + 100 \cdot 0{,}000006 = 1{,}0006$ m.

16 Gjeni të gjithë trekëndëshat kënddrejtë, brinjët e të cilëve formojnë progresion aritmetik.

Zgjidhje

Le të kemi një trekëndësh kënddrejtë, brinjët e të cilit formojnë progresion aritmetik. Shënojmë me x brinjën më të vogël të tij ($x > 0$) dhe me d diferencën e progresionit ($d > 0$). Brinjët e tjera janë $x + d$, $x + 2d$.
Zbatojmë teoremën e Pitagorës dhe kemi:
$(x + 2d)^2 = x^2 + (x + d)^2 \Rightarrow \quad x^2 + 4xd + 4d^2 = x^2 + x^2 + 2xd + d^2 \Rightarrow$
$x^2 - 2xd - 3d^2 = 0$
Duke zgjidhur këtë ekuacion të fuqisë së dytë me ndryshore x, gjejmë $x_1 = 3d$, $x_2 = -d$. (Rrënja x_2 nuk pranohet për problemën).
Pra, brinjët e trekëndëshit janë $3d$, $4d$, $5d$ ku d është numër real pozitiv çfarëdo.

17 Në një progresion gjeometrik me kufiza pozitive, jepen $u_{12} = 4$ dhe $u_{16} = 64$. Gjeni r.

Zgjidhje

$u_{12} = u_1 r^{11} = 4; \quad u_{16} = u_1 r^{15} = 64$. Duke pjesëtuar anë për anë kemi:

$$\frac{u_1 r^{15}}{u_1 r^{11}} = \frac{64}{4} = 16 \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = 2$$

18 Për ç'vlerë pozitive të x, numrat $1 - x$; $6x$ dhe $19 - 2x$ formojnë progresion gjeometrik?

Zgjidhje

Numrat u_1; u_2; u_3 formojnë progresion gjeometrik në qoftë se $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2}$. Kemi:

$$\frac{6x}{1-x} = \frac{19-2x}{6x} \Rightarrow 36x^2 = 19 - 19x - 2x + 2x^2 \Rightarrow$$

$34x^2 + 21x - 19 = 0$. Rrënjët e këtij ekuacioni janë $x_1 = \frac{1}{2}$ ose $x_2 = -\frac{76}{68}$

Për kushtet e problemës pranohet vetëm rrënja e parë, pra $x = \frac{1}{2}$.

19 Në progresionin gjeometrik gjeni u_1 dhe r, kur jepet $\begin{cases} u_4 - u_2 = 18 \\ u_5 - u_3 = 36 \end{cases}$

Zgjidhje

Sistemi $\begin{cases} u_4 - u_2 = 18 \\ u_5 - u_3 = 36 \end{cases}$ shkruhet $\begin{cases} u_1 r^3 - u_1 r = 18 \\ u_1 r^4 - u_1 r^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 r(r^2 - 1) = 18 \\ u_1 r^2 (r^2 - 1) = 36 \end{cases}$.

Duke pjesëtuar anë për anë ekuacionin e dytë me të parin marrim $r = 2$. Pastaj nga ekuacioni i parë nxjerrim $u_1 \cdot 2(2^2 - 1) = 18 \Rightarrow u_1 = 3$.

20 Një kapital c_0 i vendosur në bankë me një **interes të thjeshtë** vjetor p $(0 \leq p \leq 1)$ në fund të n viteve bëhet $C_n = c_0(1 + n \cdot p)$. Po ky kapital, i vendosur me një **interes të përzier** vjetor p, në fund të n viteve bëhet $T_n = c_0(1 + p)^n$.
Banka i ofron një personi që do të depozitojë në të një sasi 20 000 dollarë për një periudhë prej 9 vitesh dy mundësi:

a depozitim me interes të thjeshtë me përqindje vjetore 11%;
b depozitim me interes të përzier me përqindje vjetore 8%.

Cila është mundësia më e leverdisshme?

Zgjidhje

Kërkohet të krahasohet $C_9 = 20000(1 + 0{,}11 \cdot 9)$ me $T_9 = 20000(1 + 0{,}08)^9$. Raporti

$\frac{C_9}{T_9} = \frac{C_9}{T_9} = \frac{1{,}99}{(1{,}08)^9} < 1$. Më me leverdi është mundësia e dytë.

21 Tri kufizat e para të një vargu kuadratik janë 0; 7; 18. Gjeni kufizën e përgjithshme të vargut.

Zgjidhje

E kërkojmë këtë kufizë në trajtën $u_n = an^2 + bn + c$. Duke zëvendësuar $n = 1$; $n = 2$ dhe $n = 3$ kemi:

$$u_1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$$

$$u_2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c$$

$$u_3 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 9a + 3b + c$$

Meqenëse tri kufizat e para janë përkatësisht 0, 7, 18 marrim sistemin:

$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 18 \end{cases}$. Zgjidhje e tij është $a = 2$; $b = 1$; $c = -3$.

Pra, $u_n = 2n^2 + n - 3$.

22 Zbërtheni $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^5$.

Zgjidhje

Nga trekëndëshi i Paskalit, koeficientet e zbërthimit janë 1; 5; 10; 10; 5; 1. Kemi:

$$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^5=(x^2)^5+5(x^2)^4(\frac{2}{x})+5(x^2)^3(\frac{2}{x})^2+5(x^2)^2(\frac{2}{x})^3+5(x^2)(\frac{2}{x})^4+(\frac{2}{x})^5=$$

$$=x^{10}+10x^7+20x^4+40x+\frac{80}{x^2}+\frac{32}{x^5}$$

23 Gjeni koeficientin e kufizës së pestë në zbërthimin $\left(\frac{3a}{2}-\frac{2b}{3}\right)^8$.

Zgjidhje

Kemi

$$T_5=C_{8,4}(\frac{3a}{2})^{8-4}(-\frac{2b}{3})^4=C_{8,4}(\frac{3}{2})^4a^4(-\frac{2}{3})^4b^4=C_{8,4}a^4b^4.$$

Koeficienti i kësaj kufize është $C_{8,4}=70$.

24 Në zbërthimin $\left(x^2+\frac{2}{x^5}\right)^7$, cila është kufiza që nuk përmban x?

Zgjidhje

$$T=C_{7,k}(x^2)^{7-k}(\frac{2}{x^5})^k=C_{7,k}\cdot x^{14-2k}\cdot\frac{2^k}{x^{5k}}=2^k\cdot C_{7,k}\cdot x^{14-7k}$$

Kjo kufizë është konstante kur $14-7k=0\Rightarrow k=2$. Koeficienti i saj është $2^2\cdot C_{7,2}=4\cdot 21=84$.

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Shkruani 5 kufizat e para të secilit varg duke përdorur rregullën kufizë pas kufize.

a Kufiza e parë 7. Rregulla kufiza pas kufize: Shto 0,5.

b Kufiza e parë 5. Rregulla kufiza pas kufize: Shumëzo me (–2).

c Kufiza e parë 20. Rregulla kufiza pas kufize: Zbrit (–5).

d Kufiza e parë 64. Rregulla kufiza pas kufize: Pjesëto me 2.

2 Në vargjet e mëposhtme përcaktoni nëse janë apo jo progresione (aritmetike, gjeometrike) apo varg Fibonaçi.

a $5; 9; 13; 17; \ldots$

b $90; 30; 10; \ldots$

c $5; 6; 11; 17; 28; \ldots$

d $3; 3^2; 3^3; 3^4; \ldots$

e $2; 2; 2; 2; \ldots$

f $2; -4; 8; -16; \ldots$

g $\sqrt{3};\ 2\sqrt{3};\ 3\sqrt{3};\ 4\sqrt{3}\ ;\ldots$

3 Tregoni një formulë për kufizën e $n^{të}$ të vargut:

a $2, 4, 6, 8, 10, 12$ b $1, 3, 5, 7$ c $4, 8, 12, 16, 20, 24$

d $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}$

P. [a) $u_n = 2n$; b) $u_n = 2n - 1$; c) $u_n = 4n$; d) $u_n = \frac{n}{n+1}$]

4 Vargu numerik është dhënë me anë të formulës $u_n = n^2 - 1$. A është kufizë e këtij vargu numri 143? Po numri 102?

P. [143 po; 102 jo]

5 Në vargjet e mëposhtme dalloni nëse janë rritës, zbritës apo periodikë.

a $u_n = \frac{1}{n}$ b $u_n = \log n$ c $u_n = \cos n\pi$ d $u_n = \frac{n}{n+1}$

P. [a) zbritës; b) rritës; c) periodik; d) rritës]

6 Në vargjet e mëposhtme gjeni kufizën e dhjetë dhe kufizën e $n^{të}$.

a $1; 3; 5; \ldots$ b $1; 2; 4; 8; 16; \ldots$ c $96; 92; 88; 84; \ldots$

P. [a) $u_{10} = 29$; $u_n = 2n - 1$; b) $u_{10} = 2^9 = 512$; $u_n = 2^{n-1}$; c) $u_{10} = 60$; $u_n = 100 - 4n$]

7 Në vargjet kuadratike të mëposhtme, në vend të pikave vendosni numrat që mungojnë:

a $4; 10; 18; \ldots..; 40; \ldots..$

b $0; 2; \ldots..; \ldots..; 20; \ldots..$

8 Për ç'vlerë të x, vargu $u_n = \frac{5n+1}{(x-4)n+2}$ është konstant? P. [$x = 14$]

9 Cila kufizë e vargut $u_n = \frac{2n+3}{3n-1}$ është $\frac{15}{17}$? P. [$n = 6$]

10 Sa kufiza të vargut $u_n = \frac{n^2 + 2n - 9}{n}$ janë numra të plotë? P. [3]

11 Sa kufiza të vargut $u_n = \frac{3}{n}$ ndodhen në intervalin $\left]\frac{1}{2}, 2\right[$? P. [4]

12 Ndërmjet numrave -5 dhe 10 vendosni katër numra të tjerë, në mënyrë që të gjashtë numrat të formojnë progresion aritmetik. P. [-2; 1; 4; 7]

13 Për ç'vlerë të x, numrat $(x + 1)$; $(3x - 3)$ dhe $(4x - 2)$ janë tri kufiza të njëpasnjëshme të një progresioni aritmetik? P. [$x = 5$]

14 Në progresionin aritmetik të mëposhtëm gjeni u_{15} dhe u_n:

a $2, 4, 6, \ldots$ b $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \ldots$

P. [a) $u_{15} = 30$; $u_n = 2n$; b) $u_{15} = \frac{29}{4}$; $u_n = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$]

15 Në progresionin aritmetik, kufiza e parë është 7 dhe ajo e teta është 35. Shkruani progresionin.

P. [7, 11, 15, ...]

16 A është progression gjeometrik vargu i dhënë më formulën $u_n = 2^n$) P. [po]

17 Në progresionin gjeometrik me $u_1 = \frac{3}{5}$ dhe $r = \frac{1}{2}$ gjeni u_5. P. [$\frac{3}{80}$]

18 Në tabelën e mëposhtme plotësoni kutizat boshe:

Nr.	Lloji i vargut	Rregulla	Kufiza e parë	Kufiza e tretë	Kufiza e gjashtë
1	Progresion aritmetik	Shto 5	20		
2	Progresion aritmetik	Zbrit 6		70	
3	Progresion aritmetik	Shto 2			54
4	Progresion gjeometrik	Shumëzo me (–2)	1		
5	Progresion gjeometrik	Pjesëto me 2		12	
6	Progresion gjeometrik	Shumëzo me 3			243
7	Progresion gjeometrik	Shumëzo me $\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$		

19 Në progresionin gjeometrik 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$,... gjeni u_5 dhe u_{10}. P. [$\frac{3}{16}$; $\frac{3}{512}$]

20 Në një progresion gjeometrik jepen $u_{12} = 4$ dhe $u_{16} = 64$. Gjeni r. P. [$r = 2$]

21 Për ç'vlerë të $x > 0$ numrat $(1 - x)$; $6x$ dhe $(9 - 2x)$ formojnë progresion gjeometrik?

P. [$x = \frac{1}{2}$]

22 Jepen numrat 2; x; y; 9.
Tri të parët formojnë progresion aritmetik, ndërsa tri të fundit formojnë progresion gjeometrik. Gjeni numrat x dhe y duke ditur qe ata janë numra pozitivë.

P. [$x = 4$; $y = 6$]

23 Në progresionin gjeometrik gjeni u_1 dhe r, kur jepet

a $\begin{cases} u_2 - u_1 = -4 \\ u_3 - u_1 = 8 \end{cases}$ b $\begin{cases} \dfrac{u_5}{u_2} = 64 \\ u_4 = 8 \end{cases}$

P. [a) $u_1 = 1$; $r = -3$; b) $u_1 = \frac{1}{8}$; $r = 4$]

24 Gjeni numrin e kufizave të progresionit gjeometrik në të cilin $u_1 = 3$, $r = \frac{1}{2}$, $u_n = \frac{3}{64}$

P. [$n = 5$]

25 Shuma e tri numrave që formojnë progresion aritmetik është 12. Në qoftë se numrit më të madh i shtojmë 2, atëherë numrat formojnë progresion gjeometrik. Gjeni këta numra. P. [2; 4; 6]

26 Gjeni kufizën e $n^{të}$ të vargut kuadratik 3; 8; 15; 24; … P. [$u_n = n^2 + 2n$]

27 Tri kufizat e para të një progresioni gjeometrik janë $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[8]{3}$ dhe 1. Gjeni kufizën e katërt të tij. P. [$\frac{1}{\sqrt[8]{3}}$]

28 Gjeni koeficientin e kufizës së tretë në zbërthimin $(b + 2a)^7$. P. [84]

29 Gjeni koeficientin e kufizës së tretë nga fundi në zbërthimin $(x + y)^8$. P. [28]

30 Në zbërthimin $(2x^2 - y^3)^n$ njëra nga kufizat është $a \cdot x^6 \cdot y^{12}$. Gjeni a. P. [280]

KREU 8

GJEOMETRIA NË PLAN

Kongruenca e trekëndëshave

Dy trekëndësha janë kongruentë në qoftë se kanë:
1 tri brinjë të barabarta (BBB);
2 dy brinjë dhe këndin ndërmjet tyre të barabartë (BKB);
3 një brinjë dhe këndet anëshkruar saj të barabarta (KBK).

Ngjashmëria e trekëndëshave
Dy trekëndësha janë të ngjashëm në qoftë se kanë:
1 të gjithë këndet të barabarta;
2 të gjitha brinjët të përpjesshme.

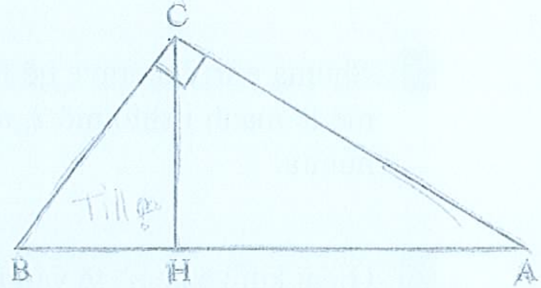


Fig. 8.1

Teorema e Pitagorës: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (Figura 8.1)
Teoremat e Euklidit: $CH^2 = AH \cdot HB$;
$AC^2 = AB \cdot AH$; $BC^2 = AB \cdot BH$ (Figura 8.1)
Diagonalja d e katrorit me brinjë a: $d = a\sqrt{2}$
Syprina e trekëndëshit me bazë b dhe lartësi h: $S = \frac{1}{2} b \cdot h$
Syprina e paralelogramit me bazë b dhe lartësi h: $S = b \cdot h$
Formula e Heronit: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ku $p = \frac{a+b+c}{2}$
Syprina e trapezit me baza B dhe b dhe lartësi h: $S = \frac{1}{2} h(B+b)$
Syprina e rombit me diagonale d_1 dhe d_2: $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$
Perimetri i rrethit me rreze R: $P = 2\pi R$
Syprina e qarkut me rreze R: $S = \pi R^2$
Gjatësia e harkut n^0: $l = \frac{\pi R n}{180^0}$
Syprina e sektorit qarkor: $S = \frac{\pi R^2 n}{360^0}$

Xhesiana
Lamaj

Ushtrime të zgjidhura

1 Në figurën 8.2 jepen BC = AD dhe $\angle 1 = \angle 2$.
Gjeni AB dhe BC, në qoftë se AD = 15 cm dhe DC = 12 cm.

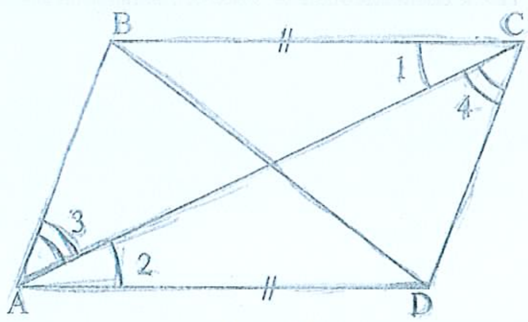


Fig. 8.2

Zgjidhje
Trekëndëshat ADC dhe ABC janë kongruentë, sepse:
1. AC e përbashkët 2. AD = BC 3. $\angle 1 = \angle 2$.

Në trekëndëshat kongruentë, përballë këndeve kongruentë ($\angle 1 = \angle 2$ dhe $\angle 3 = \angle 4$) ndodhen brinjë kongruente.
Prandaj AB = CD = 12 cm dhe BC = AD = 15 cm.

2 Në bazën BC të trekëndëshit dybrinjënjëshëm ABC janë marrë pikat M, N, të tilla që BM = CN (fig. 8.3). Tregoni që trekëndëshi AMN është dybrinjënjëshëm.

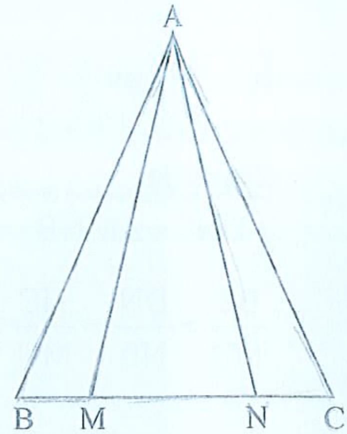


Fig.8.3

Vërtetim

Trekëndëshat ABM dhe ACN janë kongruentë, sepse:
1. AB = AC (nga kushti); 2. $\angle ABM = \angle ACN$ (si kënde të bazës të trekëndëshit dybrinjënjëshëm); 3. BM = CN (nga kushti).
Në trekëndëshat kongruentë, përballë këndeve kongruentë ($\angle ABM = \angle ACN$) ndodhen brinjë kongruente. Prandaj AM = AN dhe trekëndëshi AMN është dybrinjënjëshëm.

3 Brinjët e një trekëndëshi rrinë si 5:6:8. Perimetri i një trekëndëshi të ngjashëm me të është 38 cm.

a Gjeni brinjët e trekëndëshit të dytë.
b Gjeni brinjët e trekëndëshit të parë, në qoftë se brinja më e madhe e tij është 12 cm më e madhe se brinja më e vogël.

Zgjidhje

a Shënojmë me a, b, c brinjët e trekëndëshit të parë dhe a_1, b_1 dhe c_1 brinjët përkatësisht homologe të trekëndëshit të dytë. Kemi:
$a = 5x$; $b = 6x$; $c = 8x$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} \Rightarrow \frac{5x}{a_1} = \frac{6x}{b_1} = \frac{8x}{c_1} = \frac{5x+6x+8x}{a_1+b_1+c_1} = \frac{19x}{38} = \frac{1}{2}x$$. Rrjedhimisht:

$$\frac{5x}{a_1} = \frac{1}{2}x \Rightarrow a_1 = 10 \text{ cm}; \quad \frac{6x}{b_1} = \frac{1}{2}x \Rightarrow b_1 = 12 \text{ cm}; \quad \frac{8x}{c_1} = \frac{1}{2}x \Rightarrow c_1 = 16 \text{ cm}.$$

b Kemi:
$a = 5x$; $b = 6x$; $c = 8x$
Nga kushti $c = a + 12$ kemi $8x = 5x + 12 \Rightarrow x = 4$ dhe
$a = 5 \times 4 = 20$ cm; $b = 6 \times 4 = 24$ cm dhe $c = 8 \times 4 = 32$ cm.

4 Në figurën 8.4 jepet CA = CB dhe AB = CD. Gjeni këndet e trekëndëshit ABC.

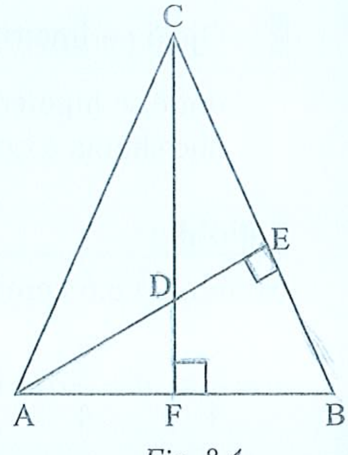


Fig. 8.4

Zgjidhje

Kemi:

$$\begin{cases} \angle BAE = 90^0 - \angle ABE \\ \angle FCB = 90^0 - \angle ABE \end{cases} \Rightarrow \angle BAE = \angle FCB$$

Kemi: $\Delta ABE = \Delta BCF$ (pse?). Nga kjo rrjedh se $CE = AE$.
Trekëndëshi ACE është kënddrejtë dybrinjënjëshëm prandaj $\angle ACB = 45^0$. Kemi:

$$\angle CAB = \angle CBA = \frac{180^0 - 45^0}{2} = 67{,}5^0$$

5 Në figurën 8.5, ABCD është paralelogram. Jepet $AM = MB$; $BN = 2$ cm; $NC = 6$ cm. Gjeni DN dhe MN.

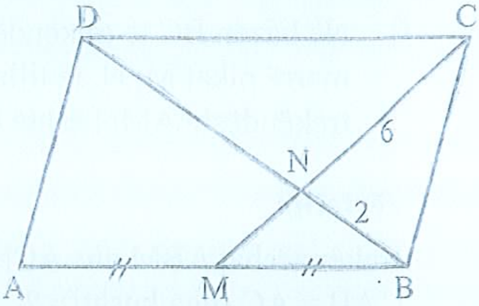


Fig. 8.5

Zgjidhje

$\Delta DNC \sim \Delta MNB$

$$\frac{DC}{MB} = \frac{DN}{NB} = \frac{NC}{MN} \Rightarrow \frac{2MB}{MB} = \frac{DN}{2} = \frac{6}{MN} = 2 \Rightarrow DN = 4 \text{ cm}; \ MN = 3 \text{ cm}$$

6 Dy cilindra të ngjashëm kanë lartësi 3 cm dhe 6 cm. Nëse vëllimi i cilindrit të vogël është 30 cm^3, gjeni vëllimin e cilindrit të madh.

Zgjidhje

Nëse raporti i ngjashmërisë është k (sa raporti i lartësive), atëherë raporti i vëllimeve është k^3.
Kemi $k = \frac{6}{3} = 2$. Prandaj $\frac{V}{v} = k^3$ d.m.th., $\frac{V}{30} = 2^3$. Del $V = 240$ cm^3.

7 Dy sfera prej të njëjtit material kanë masa përkatësisht 32 kg dhe 108 kg. Rrezja e sferës së madhe është 9 cm. Gjeni rrezen e sferës së vogël.

Zgjidhje

Raporti i vëllimeve = raporti i masave.

$\frac{V}{v} = \frac{108}{32} = k^3$ (k = raporti i ngjashmërisë $= \frac{R}{r}$).

Pra $\left(\frac{R}{r}\right)^3 = \frac{108}{32}$ del $\frac{R}{r} = \sqrt[3]{\frac{108}{32}} = \frac{3}{2}$. Kështu $\frac{9}{r} = \frac{3}{2}$. Del $r = 6$ cm.

8 Gjeni perimetrin e një trekëndëshi kënddrejtë, në qoftë se hipotenuza e tij është sa $\frac{5}{4}$ e njërit katet, dhe shuma e tyre është 117 cm.

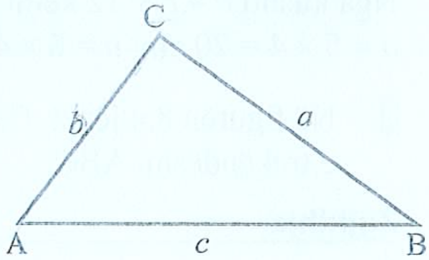


Fig. 8.6

Zgjidhje:

Në figurën 8.6 kemi:

$$c = \frac{5}{4}a; \ a + \frac{5}{4}a = 117 \Rightarrow \frac{9}{4}a = 117 \Rightarrow a = 52 \text{ cm nga ku } c = \frac{5}{4}a = \frac{5}{4} \cdot 52 = 65 \text{ cm}$$

Për të gjetur katetin tjetër, zbatojmë teoremën e Pitagorës. Kemi:

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{4225-2704}=\sqrt{1521}=39 \text{ cm}.$$

Gjejmë, perimetrin e trekëndëshit:
$P=a+b+c=52+39+65=156$ cm

9 Në figurën 8.7, jepet $BD=AD=4\sqrt{3}$ cm dhe $\angle ABD=15^0$. Gjeni DC.

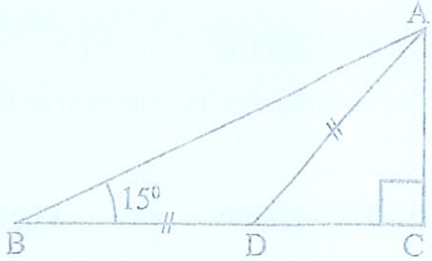


Fig. 8.7

Zgjidhje

Trekëndëshi ABD është dybrinjënjëshëm, prandaj $\angle ABD=\angle BAD=15^0$.
Kemi: $\angle ADC=\angle ABD+\angle BAD=15^0+15^0=30^0$ (si kënd i jashtëm i trekëndëshit ABD). Në trekëndëshin kënddrejtë ADC, kateti AC ndodhet përballë këndit 30^0, prandaj $AC=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$. Për të gjetur DC, në këtë trekëndësh zbatojmë teoremën e Pitagorës. Kemi:

$$DC=\sqrt{AD^2-AC^2}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{48-12}=\sqrt{36}=6 \text{ cm}.$$

10 Në trekëndëshin dybrinjënjëshëm, brinja anësore është 10 cm, kurse baza 12 cm. Gjeni lartësinë mbi bazë dhe syprinën e trekëndëshit.

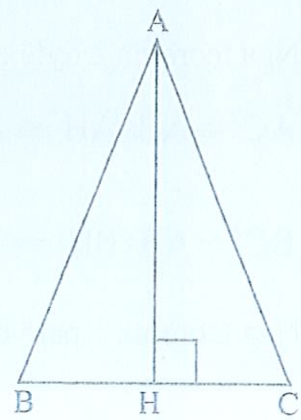


Fig. 8.8

Zgjidhje

Në figurën 8.8 kemi AB = AC = 10 cm dhe BC = 12 cm.

Lartësia AH është mesore e bazës, prandaj $HC=\frac{1}{2}BC=6$ cm.

Zbatojmë në trekëndëshin kënddrejtë AHC teoremën e Pitagorës. Kemi:
$AC^2=AH^2+HC^2$ d.m.th., $10^2=AH^2+6^2$, që nga
$AH^2=10^2-6^2=64$.
Atëherë $AH=\sqrt{64}=8$ cm.
Syprina e trekëndëshit është $S=\frac{1}{2}AH\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12=48$ cm^2.

11 Gjeni syprinën e trekëndëshit barabrinjës me brinjë a.
Le të jetë ABC një trekëndësh barabrinjës me brinjë a (fig. 8.9).

Lartësia AH është mesore e bazës, prandaj $HC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$.

Zbatojmë teoremën e Pitagorës në trekëndëshin AHC. Kemi:

$AH^2+HC^2=AC^2$ d.m.th., $AH^2+(\frac{1}{2}a)^2=a^2$ nga ku

$AH^2=a^2-\frac{1}{4}a^2=\frac{3}{4}a^2$. Del $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

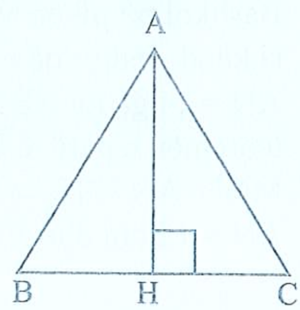


Fig. 8.9

Syprina e trekëndëshit barabrinjës ABC është

$$S=\frac{1}{2}BC\cdot AH=\frac{1}{2}a\cdot a\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Mbani mend:

Në trekëndëshin barabrinjës me brinjë a:

Lartësia është $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ Syprina është $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

12 Në trekëndëshin kënddrejtë ABC (fig. 8.10) jepen katetet AC = 15 cm dhe BC = 20 cm. Gjeni hipotenuzën, projeksionet e kateteve, si dhe lartësinë mbi hipotenuzë.

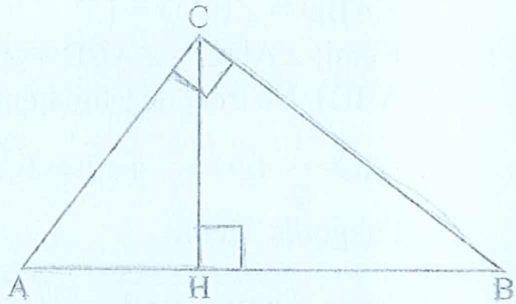


Fig. 8.10

Zgjidhje

Nga teorema e Pitagorës kemi:

$$AB^2=AC^2+BC^2 \Rightarrow AB=\sqrt{15^2+20^2}=\sqrt{225+400}=\sqrt{625}=25 \text{ cm}.$$

Nga teorema e dytë e Euklidit kemi:

$$AC^2=AB\cdot AH \Rightarrow AH=\frac{AC^2}{AB}=\frac{225}{25}=9 \text{ dhe}$$

$$BC^2=AB\cdot BH \Rightarrow BH=\frac{BC^2}{AB}=\frac{400}{25}=16$$

Nga teorema e parë e Euklidit kemi:

$$CH^2=AB\cdot BH \Rightarrow CH=\sqrt{AB\cdot BH}=\sqrt{9\cdot 16}=\sqrt{144}=12 \text{ cm}.$$

13 Nga pika M e një gjysmërrethi ndërtohet segmenti MN, pingul me diametrin AB të rrethit (fig. 8.11). Gjeni segmentet AN dhe NB në qoftë se NB − AN = 15 cm dhe MN = 18 cm.

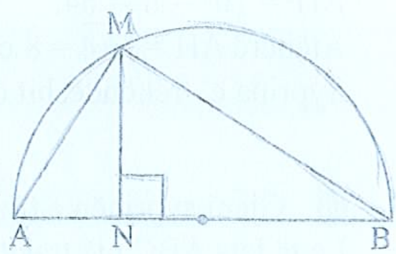


Fig. 8.11

Zgjidhje

Bashkojmë pikën M me pikat A dhe B. Kemi $\angle AMB = 90^0$, si kënd rrethor që mbështetet në diametrin e rrethit. Shënojmë $AN = x$ nga ku $NB = 15 + x$. Në trekëndëshin AMB, zbatojmë teoremën e parë të Euklidit. Kemi:

$MN^2 = AN \cdot NB \Rightarrow 18^2 = x\cdot(15+x) \Rightarrow x^2 + 15x - 324 = 0 \Rightarrow x = 12$ cm. Përfundimisht AN = 12 cm dhe NB = 27 cm.

14 Një drejtkëndësh ka perimetër 218 cm dhe diferenca e përmasave është 30 cm. Gjeni syprinën.

Zgjidhje

Shënojmë x cm përmasën më të vogël; përmasa tjetër do të jetë $30 + x$.
Perimetri është $2 \cdot x + 2 \cdot (30 + x)$ e dihet që është 218 cm.
Kemi $2x + 60 + 2x = 218$, prej ku $x = 37$ cm.
Përmasat janë 37 cm; 67 cm dhe syprina është 2479 cm^2.

15 Gjeni përmasat e gjithë drejtkëndëshave me syprina 48 cm^2, duke ditur që ato janë numra natyrorë.

Zgjidhje

Duke shënuar me a, b përmasat, kemi $a \cdot b = 48$, ku a, b janë numra natyrorë. Kërkohen pra pjesëtues natyrorë të numrit 48. Zgjidhjet e mundshme janë (për përmasat):
1 cm dhe 48 cm; 2 cm dhe 24 cm; 3 cm dh e 16 cm; 4 cm dhe 12 cm; 6 cm dhe 8 cm.

16 Në trekëndëshin EKF jepen EK = 12 cm;
EF = 18 cm. Gjeni syprinën e trekëndëshit nëse:
a $\angle E = 45^0$ b $\angle E = 60^0$.

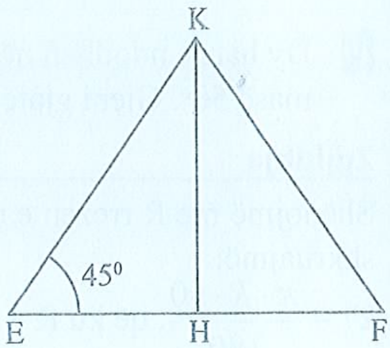


Fig. 8.12

Zgjidhje

a Shqyrtojmë figurën 8.12, ku EK = 12 cm; EF = 18 cm dhe $\angle E = 45^0$.
Heqim lartësinë $KH \perp EF$ dhe shënojmë me x gjatësinë e kësaj lartësie. Trekëndëshi kënddrejtë EKH e ka njërin nga këndet e ngushtë 45^0, prandaj edhe këndi tjetër i ngushtë është 45^0. Ky del trekëndësh kënddrejtë dybrinjënjëshëm dhe EH = KH = x.
Në trekëndëshin kënddrejtë EKH, zbatojmë teoremën e Pitagorës dhe marrim $x^2 + x^2 = EK^2$ pra $2x^2 = 12^2$, prej ku $x^2 = 72$ dhe $x = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ cm.
Pra, $KH = 6\sqrt{2}$ cm.
Atëherë, syprina e trekëndëshit EKF është
$$S = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot KH = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 6\sqrt{2} \text{ d.m.th., } S = 54\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

17 Një barkë duhet të kalojë nga njëra anë (pika A) në tjetrën (pika B) të një lumi të gjerë 104 m. Për shkak të rrjedhës, barka ecën pjerrtas duke përshkruar 130 m dhe duke mbërritur në një pikë C (fig. 8.13). Sa është largesa ndërmjet pikave B dhe C?

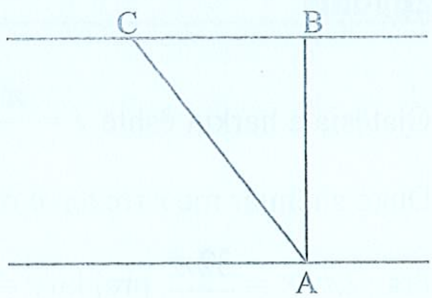


Fig. 8.13

Zgjidhje

Në trekëndëshin kënddrejtë ABC (ku AB = 104 m dhe AC = 130 m) zbatojmë teoremën e Pitagorës dhe kemi:
$BC^2 = AC^2 - AB^2 = 130^2 - 104^2 = (130 - 104) \cdot (130 + 104) = 26 \cdot 234 = 2 \cdot 13 \cdot 18 \cdot 13 = 13^2 \cdot 6^2$.

Prandaj $BC = \sqrt{13^2 \cdot 6^2} = 13 \cdot 6 = 84$ m.

18 a Korda e një rrethi është 8 cm dhe largesa e saj nga qendra e rrethit është 7,5 cm. Gjeni rrezen e rrethit.

b Rrezja e një rrethi është 6 cm. Gjeni gjatësinë e një korde që e ka largesën nga qendra 4,8 cm.

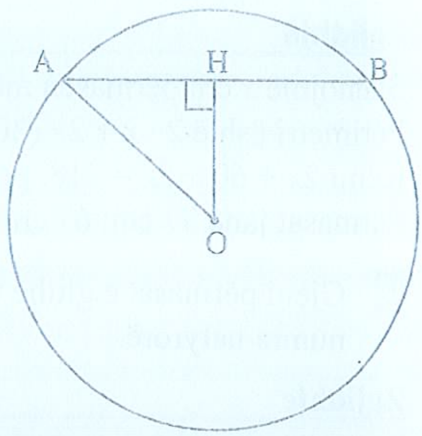


Fig.8.14

Zgjidhje

a Shqyrtojmë figurën 8.14, në të cilën kemi $AB = 8$ cm dhe $OH = 7{,}5$ cm (ku $OH \perp AB$).
Dihet që OH e ndan segmentin AB në dy pjesë të barabarta, pra $AH = 4$ cm. Rrezen OA të rrethit e gjejmë duke zbatuar teoremën e Pitagorës në trekëndëshin kënddrejtë AOH.
Kemi $OA^2 = AH^2 + OH^2 = 4^2 + (7{,}5)^2 = 16 + 56{,}25 = 72{,}25$.
Del $OA = \sqrt{72{,}25} = 8{,}5$ cm.

19 Dy harqe ndodhen në të njëjtin rreth, i pari prej tyre ka një gjatësi prej 27 cm dhe masë 50°. Gjeni gjatësinë e harkut të dytë, duke ditur që ai ka masën 160°.

Zgjidhje

Shënojmë me R rrezen e rrethit. Për harkun e parë, me gjatësi 27 cm e kënd qendror 50°, shkruajmë:

$27 = \dfrac{\pi \cdot R \cdot 50}{180}$, që ku $R = \dfrac{27 \cdot 180}{\pi \cdot 50}$, pra $R = \dfrac{27 \cdot 18}{\pi \cdot 5}$.

Gjatësia e harkut të dytë, me masë 160°, është $\ell = \dfrac{\pi \cdot R \cdot 160}{180}$.

Pra $\ell = \dfrac{\pi \cdot 8}{9} \cdot R = \dfrac{\pi \cdot 8}{9} \cdot \dfrac{27 \cdot 18}{\pi \cdot 5} = \dfrac{16 \cdot 27}{5} = \dfrac{432}{5}$ cm.

20 Harku me masë 120° në rrethin me rreze R = 16 cm "mblidhet" duke formuar një rreth. Gjeni rrezen e këtij rrethi.

Zgjidhje

Gjatësia e harkut është $\ell = \dfrac{\pi \cdot R \cdot n}{180} = \dfrac{\pi \cdot 16 \cdot 120}{180} = \dfrac{32\pi}{3}$.

Duke shënuar me r rrezen e rrethit në të cilin ai "mblidhet", kemi $\ell = 2\pi \cdot r$.

Pra, $2\pi \cdot r = \dfrac{32\pi}{3}$, prej ku $r = \dfrac{16}{3}$ cm.

21 Harku i një sektori qarkor ka gjatësi 82 cm dhe rrezja e rrethit është 15 cm. Gjeni syprinën e sektorit qarkor.

Zgjidhje

Për harkun e shqyrtuar, barazimi $l = \frac{\pi \cdot R \cdot n}{180}$ merr pamjen $82 = \frac{\pi \cdot 15 \cdot n}{180}$, prej ku

$n = \frac{82 \cdot 180}{\pi \cdot 15}$, pra $n = \frac{82 \cdot 12}{\pi}$.

Syprina e sektorit qarkor është $S = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot n}{360} = \frac{\pi \cdot 15^2}{360} \cdot \frac{82 \cdot 12}{\pi} = 615$ cm^2.

22 Gjeni syprinën e katrorit të brendashkruar në rrethin me rreze R.

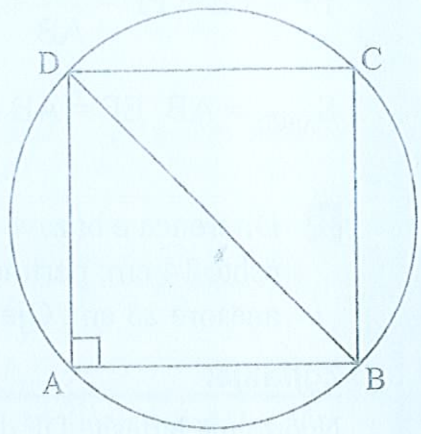


Fig. 8.15

Zgjidhje:

Në (fig. 8.15) kemi:
Meqë $\angle DAB = 90^0$, del se [DB] është diametër i rrethit. (pse?) Në trekëndëshin kënddrejtë ADB kemi:
$AD = AB = x$ dhe $DB = 2R$. Zbatojmë teoremën e Pitagorës:
$AD^2 + AB^2 = (2R)^2 \Rightarrow x^2 + x^2 = 4R^2 \Rightarrow 2x^2 = 4R^2 \Rightarrow x^2 = 2R^2$
$S_{ABCD} = x^2 = 2R^2$

23 Në figurën 8.16 jepet: $AB = BD$; $\angle CAD = 30^0$; $\angle CDA = 90^0$ dhe $S_{ACD} = 18\sqrt{3}$ cm^2. Gjeni gjatësitë e segmenteve AB; BD; CD; BC dhe AC.

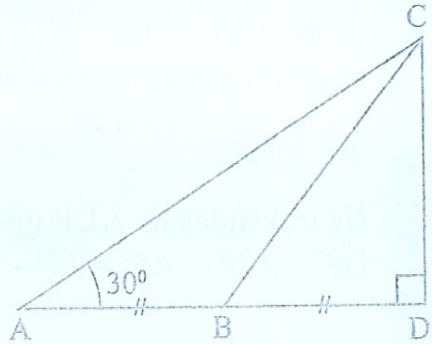


Fig. 8.16

Zgjidhje

Shënojmë $CD = x$ nga ku $AC = 2x$ (kateti përballë këndit 30° është sa gjysma e hipotenuzës).
Në trekëndëshin kënddrejtë ACD zbatojmë teoremën e Pitagorës.

$AD^2 = AC^2 - CD^2x - = (2x)^2 - x^2 = 3x^2 \Rightarrow AD = x\sqrt{3}$.

Kemi:

$S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CD = \frac{1}{2} x\sqrt{3} \cdot x = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$ nga ku $x = 6$ cm

Pra, CD = 6 cm. Kemi gjithashtu $AC = 2x = 12$ cm dhe

$AD = x\sqrt{3}$ nga ku $AB = BD = 3\sqrt{3}$ cm.
Së fundi, gjejmë BC në trekëndëshin kënddrejtë BDC. Kemi:
$BC^2 = BD^2 + DC^2 = (3\sqrt{3})^2 + 6^2 = 27 + 36 = 63$ nga ku $BC = \sqrt{63}$ cm.

24 Brenda paralelogramit merret pika P (fig. 8.17). Jepet $S_{PAB} = 5$ cm²; $S_{PCD} = 8$ cm². Gjeni syprinën e paralelogramit.

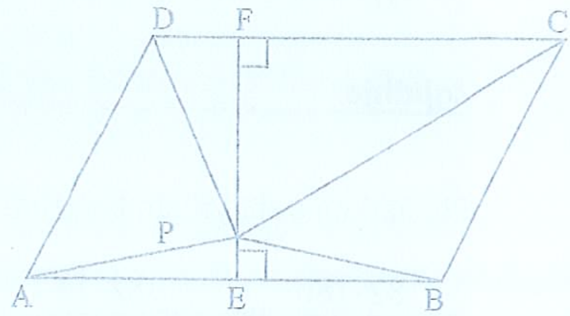


Fig. 8.17

Zgjidhje

Nga pika P ndërtojmë EF pingule me AB dhe DC.
Kemi:

$$S_{PAB} = \frac{1}{2} AB \cdot PE \Rightarrow PE = \frac{2S_{PAB}}{AB} = \frac{10}{AB}$$

$$S_{PDC} = \frac{1}{2} DC \cdot PF \Rightarrow PF = \frac{2S_{PDC}}{DC} = \frac{16}{AB}$$

$$EF = PE + PF = \frac{10}{AB} + \frac{16}{AB} = \frac{26}{AB} \quad \text{nga ku}$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot EF = AB \cdot \frac{26}{AB} = 26 \ \text{cm}^2$$

25 Diferenca e bazave të trapezit dybrinjënjëshëm është 14 cm; perimetri 110 cm dhe brinja anësore 25 cm. Gjeni syprinën e tij.

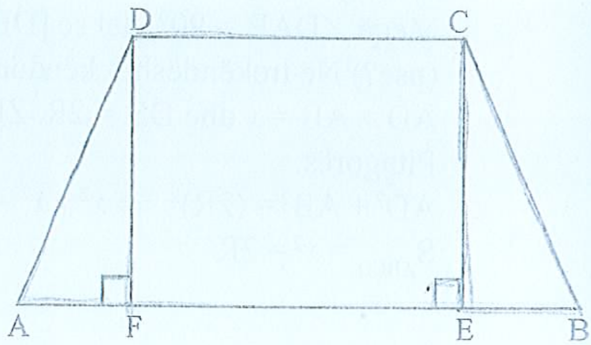


Fig. 8.18

Zgjidhje:

Ndërtojmë lartësitë DF dhe CE të trapezit (fig. 8.18).
Kemi:
$P_{ABCD} = AB + DC + 2AD = AB + DC + 50$
$\Rightarrow AB + DC = 60.$
Nga ana tjetër, $AB - DC = 14$. Formojmë sistemin:

$$\begin{cases} AB + DC = 60 \\ AB - DC = 14 \end{cases}$$ zgjidhja e të cilit është $AB = 37$ dhe $DC = 23$.

Nga kongruenca e trekëndëshave ADF dhe CEB (pse?) kemi:

$$AF = EB = \frac{37 - 23}{2} = 7.$$

Në trekëndëshin ADF gjejmë lartësinë DF. Kemi:
$DF^2 = AD^2 - AF^2 = 25^2 - 7^2 = 625 - 49 = 576 \Rightarrow DF = 24$. Së fundi:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot DF = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 24 = 720 \ \text{cm}^2.$$

26 Në (fig. 8.19) jepet BD = 8 cm; AD = 6 cm; $\angle ADB = 60^0$ dhe $\angle DAC = 30^0$. Gjeni syprinën e trekëndëshit ABC.

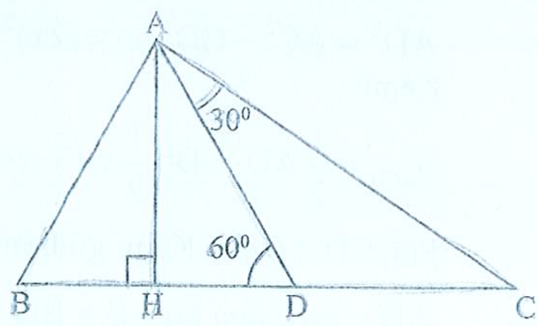


Fig. 8.19

Zgjidhje

Ndërtojmë $[AH] \perp [BC]$. Në trekëndëshin AHD kemi:

$\angle ADH = 60^\circ \Rightarrow \angle HAD = 30^\circ \Rightarrow$

$HD = \frac{1}{2}AD \frac{1}{2}\cdot 6 = 3$. Gjejmë AH:

$AH^2 = AD^2 - HD^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow AH = 3\sqrt{3}$

$\angle HAC = \angle HAD + \angle DAC = 30^0 + 30^0 = 60^0 \Rightarrow \angle ACH = 90^0 - 60^0 = 30^0$

$\angle DAC = \angle ADC = 30^0 \Rightarrow DC = AD = 6$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AH = \frac{1}{2}\cdot(8+6)\cdot 3\sqrt{3} = 21\sqrt{3}\ cm^2$

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1. Në figurën 8.20 gjeni $AH = x$.

P. [6 cm]

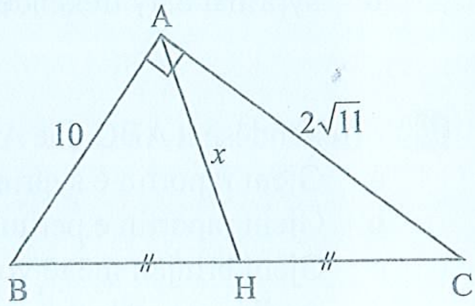


Fig. 8.20

2. Një pasqyrë, së bashku me kornizën e saj, është 105 cm e gjerë dhe 60 cm e lartë, kurse vetë korniza është 4 cm e gjerë. Sa është syprina e vetë pasqyrës?

P. [5044 cm²]

3. Në një drejtkëndësh, perimetri është 130 cm dhe njëra brinjë është sa $\frac{8}{5}$ e brinjës tjetër. Gjeni syprinën.

P. [1000 cm²]

4. Në trekëndëshin dybrinjënjëshëm (AB = AC), baza është 6 cm, kurse lartësia 4 m. Gjeni largesën e kulmit B të trekëndëshit nga brinja anësore AC. P. [4,8 cm]

5. Në drejtkëndëshin ABCD, njihen brinjët AB = 28 cm, AD = 21 cm. Nga kulmi D është hequr lartësia DH mbi diagonalen AC. Njehsoni gjatësitë e segmenteve AH, HC.

P. $[\frac{411}{35}; \frac{814}{35}]$

6. Në figurën 8.21, AD është përgjysmore e këndit A. Jepet BD = 4 cm dhe AC = 12 cm. Gjeni S_{ADC}.

P. [24 cm²]

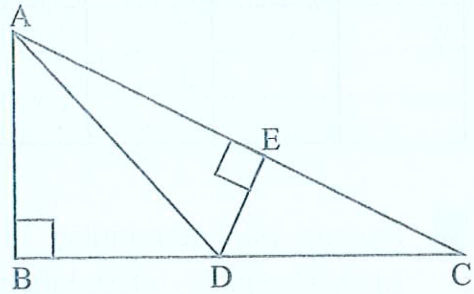


Fig. 8.21

7 Një trekëndësh kënddrejtë ka një katet 72 cm. Duke ditur që kateti tjetër është sa $\frac{4}{5}$ e hipotenuzës, gjeni syprinën dhe perimetrin e trekëndëshit.

P. [3456 cm²; 288 cm]

8 Në figurën 8.22 jepet AB = BC; BC = 2HB dhe $AC = 12\sqrt{3}$ cm. Gjeni S_{ABC}.

P. [$54\sqrt{3}$ cm²]

Udhëzim: Shënojmë HB = x nga ku BC = AB = $2x$. Në trekëndëshin AHB gjejmë AH në varësi të x.

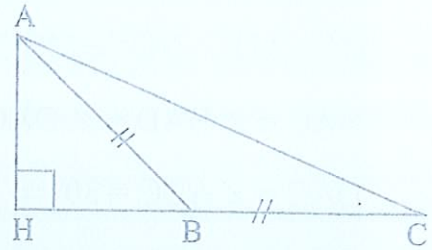


Fig. 8.22

9 Katetet e një trekëndëshi kënddrejtë janë 3 cm dhe 4 cm. Hipotenuza e një trekëndëshi të ngjashëm me të është 15 cm. Gjeni:

a katetet e trekëndëshit të dytë;

b syprinat e dy trekëndëshave.

P. [a) 9 cm; 12 cm; b) 6 cm²; 54 cm²]

10 Trekëndëshat ABC dhe $A_1B_1C_1$ janë të ngjashëm me koeficient ngjashmërie 1,5.

a Gjeni raportin e syprinave të tyre. **P. [2,25]**

b Gjeni raportin e perimetrave të tyre. **P. [1,5]**

c Gjeni brinjën më të vogël të trekëndëshit të parë, në qoftë se ajo është 7 cm më e madhe se brinja më e vogël e trekëndëshit të dytë. **P. [14 cm]**

d Gjeni brinjët e trekëndëshit të parë, në qoftë se ato janë 7 cm; 8 cm dhe 10 cm me të mëdha se brinjët homologe të trekëndëshit të dytë.

P. [21cm; 24 cm; 30 cm]

11 Jepet trekëndëshi kënddrejtë ABC (fig. 8.23).
Plotësoni tabelën e mëposhtme:

AC	BC	AB	CH	AH	HB
15	20				
100		125			
	65	169			
6				3,6	
		3			2
				2	18

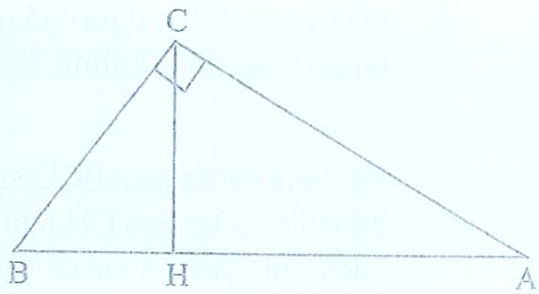


Fig. 8.23

12 Nga një pikë që ndodhet 35 cm larg qendrës së një rrethi me rreze 7 cm, hiqen ndaj tij dy tangjente. Gjeni largesën ndërmjet pikave të takimit. **P. [13,44 cm]**

13 Në anë të ndryshme të qendrës së rrethit me rreze 30 cm, jepen dy korda paralele AB = 36 cm dhe CD = 48 cm (fig. 8.24). Gjeni largesën MN ndërmjet tyre.

P. [6 cm]

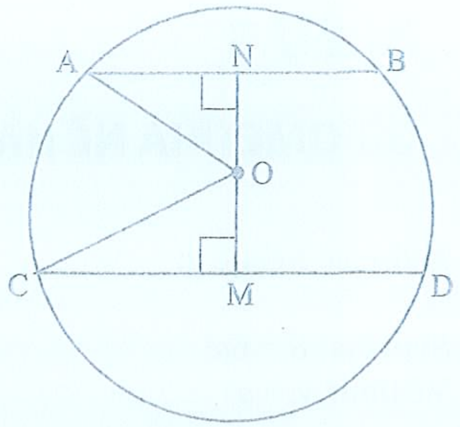


Fig. 8. 24

14 Jepet trekëndëshi me bazë 14 cm dhe brinjë anësore 13 cm dhe 15 cm. Gjeni:

a lartësinë mbi bazë;

P. [12 cm]

b projeksionet e brinjëve anësore mbi bazë.

P. [5cm; 9 cm]

15 Në figurën 8.25 gjeni syprinën e vijëzuar, në qoftë se brinja e katrorit është 4 cm.

P. [$(8\pi-16)$ cm^2]

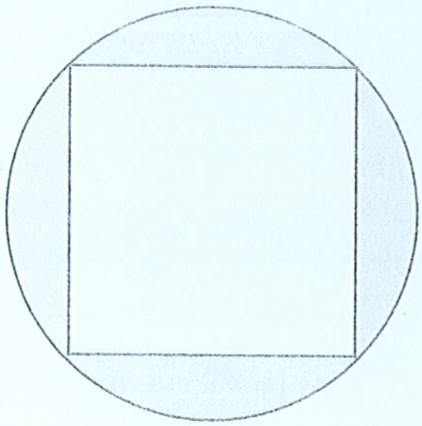


Fig. 8. 25

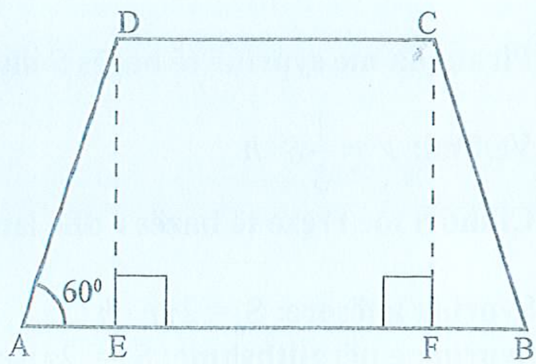


Fig. 8. 26

16 Në fig. 8.26, ABCD është trapez dybrinjënjëshëm. Jepen AB = 12 cm; DC = 6 cm dhe $\angle DAB = 60^o$. Gjeni:

a lartësinë e trapezit;

b diagonalet e trapezit.

P. [a) $3\sqrt{3}$ cm; b) $6\sqrt{3}$ cm]

17 Në figurën 8.27, ABC është trekëndësh kënddrejtë me katete AC = a dhe BC = b, ndërsa CDEF është katror. Gjeni perimetrin e katrorit.

P. [$\dfrac{4ab}{a+b}$]

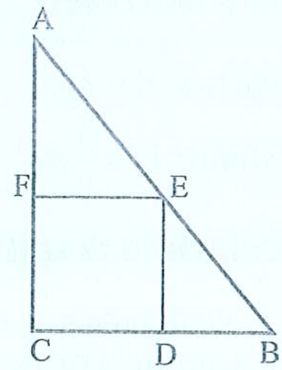


Fig. 8.27

KREU 9

GJEOMETRIA NË HAPËSIRË

Kubi me brinjë a:

Syprina: $S = 6a^2$
Vëllimi: $V = a^3$

Kuboidi me përmasa a, b, c:

Syprina: $S = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$
Vëllimi: $V = a \cdot b \cdot c$

Prizmi me syprinë të bazës S dhe lartësi h.
Vëllimi: $V = S \cdot h$

Piramida me syprinë të bazës S dhe lartësi h.

Vëllimi: $V = \frac{1}{3} S \cdot h$

Cilindri me rreze të bazës r dhe lartësi h.

Syprina anësore: $S_a = 2\pi r \cdot h$
Syprina e përgjithshme: $S_p = 2\pi r(r + h)$
Vëllimi: $V = \pi r^2 \cdot h$

Koni me rreze të bazës r, lartësi h dhe përftuese l.

Syprina anësore: $S_a = \pi r \cdot l$
Syprina e përgjithshme: $S_p = \pi r(r+l)$
Vëllimi: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

Sfera me rreze r.

Syprina: $S = 4\pi r^2$

Vëllimi: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Ushtrime të zgjidhura

1 Në figurën 9.1, ABCDMNPQ është kuboid me bazë katrorin ABCD. Jepet AM = 5 cm dhe $S_p = 112$ cm². Gjeni brinjën AB të katrorit.

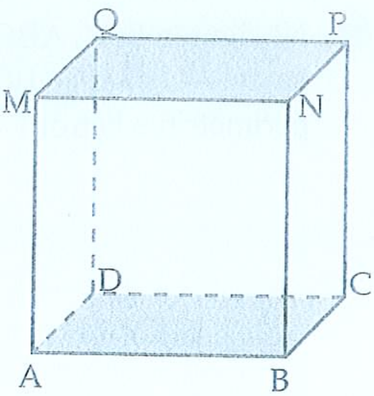


Fig. 9.1

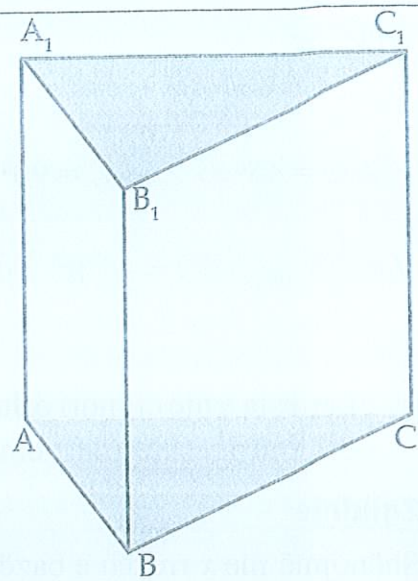


Fig. 9.2

Zgjidhje

Shënojmë $AB = x$. kemi $S_{ABCD} = x^2$ dhe $S_a = 4x \cdot 5 = 20x$.
Nga kushti:
$2x^2 + 20x = 112 \Longrightarrow 2x^2 + 20x - 112 = 0 \Longrightarrow x = 4$.
Brinja e katrorit është 4 cm.

2 Gjeni vëllimin e prizmit me lartësi h, nëse baza e tij është trekëndësh barabrinjës me brinjë a.
Jepet $AB = BC = AC = a$ dhe $AA_1 = BB_1 = CC_1 = h$ (fig. 9.2).

Zgjidhje

Kemi $V = S_{ABC} \times h$; Kemi: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Longrightarrow V = \dfrac{a^2 \cdot h \cdot \sqrt{3}}{4}$

3 Si bazë e prizmit $ABCA_1B_1C_1$ (fig. 9.3/a) shërben trekëndëshi dybrinjënjëshëm ABC, me brinjë AB = 10 cm dhe CA = CB = 13 cm. Lartësia e prizmit është $AA_1 = 10$ cm. Gjeni vëllimin e tij.

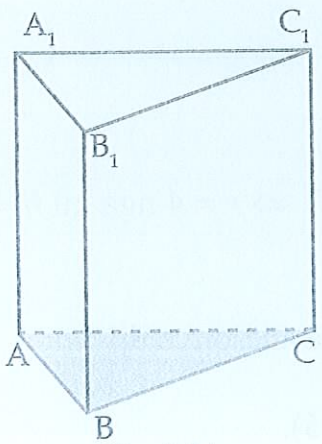


Fig. 9.3/a

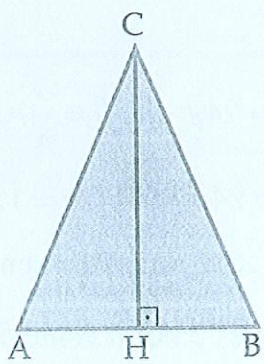


Fig. 9.3/b

Zgjidhje

Në figurën 9.3/b është ndërtuar trekëndëshi ABC i bazës së prizmit. Ndërtojmë $CH \perp AB$.
Kemi AH = HB = 5 cm (pse?). Në trekëndëshin ACH kemi:
$CH^2 = CA^2 - AH^2 = 169 - 25 = 144 \Longrightarrow CH = 12$ cm.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$ nga ku

$V = S_{ABC} \cdot AA_1 = 60 \cdot 10 = 600\ cm^3$.

4 Jepet piramida SABCD me bazë katrorin ABCD dhe lartësi SO (fig. 9.4). Gjeni vëllimin e saj, në qoftë se brinja e katrorit është 6 cm dhe $\angle SCO = 45°$.

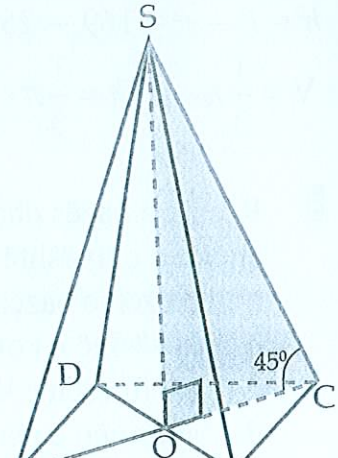


Fig. 9.4

Zgjidhje

Kemi $AC = 6\sqrt{2} \Rightarrow OC = 3\sqrt{2}$. Në trekëndëshin SOC kemi:

$\angle SCO = 45^0 \Rightarrow \angle OSC = 90^0 - 45^0 = 45^0$ nga ku $SO = OC = 3\sqrt{2}$

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2}\ cm^3.$$

5 Lartësia e një cilindri është 10 cm më e madhe se rrezja e bazës. Syprina e përgjithshme e cilindrit është 144π cm². Gjeni rrezen e bazës dhe lartësinë e cilindrit.

Zgjidhje

Shënojmë me x rrezen e bazës, nga ku lartësia është $(x + 10)$. Kemi:
$S_p = 2\pi r(r + l) = 144\pi$. Duke zëvendësuar r dhe l kemi:
$2\pi x(x + x + 10) = 144\pi \Rightarrow 4x^2 + 20x - 144 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 36 = 0 \Rightarrow x = 4$. Pra, $r = 4$ cm dhe $l = r + 10 = 4 + 10 = 14$ cm.

6 Syprina anësore e një cilindri është 24π cm². Lartësia e tij është sa $\frac{3}{4}$ e rrezes së bazës. Gjeni vëllimin e cilindrit.

Zgjidhje

Janë dhënë $S_a = 24\pi$ dhe $h = \frac{3}{4}r$. Kemi:

$S_a = 2\pi \cdot r \cdot h = 24\pi \Rightarrow r \cdot h = 12 \Rightarrow r \cdot \frac{3}{4}r = 12 \Rightarrow r = 4$ nga ku $h = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$

$V = \pi r^2 \times h = \pi \times 16 \times 3 = 48\pi$ cm³.

7 Rrezja e bazës e konit është 5 cm dhe syprina anësore e tij është 65π cm². Gjeni vëllimin e konit.
Janë dhënë $r = 5$cm dhe $S_a = 65\pi$ cm² (fig. 9.5).

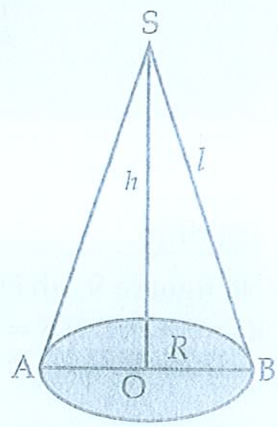


Fig. 9.5

Zgjidhje:

Kemi:
$S_a = \pi r \times l = 65\pi \Rightarrow 5\pi \cdot l = 65\pi \Rightarrow l = 13$ cm.
Në trekëndëshin SOB kemi:
$h^2 = l^2 - r^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow h = 12$ cm.

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 25 \cdot 12 = 100\pi\ cm^3.$$

8 Rrezja e bazës dhe lartësia e konit janë në raportin 3:4. Syprina anësore e tij është 60π cm² (fig. 9.6). Gjeni:

a rrezen e bazës së konit;
b lartësinë e konit;
c përftuesen e konit;
d syprinën e përgjithshme të konit.

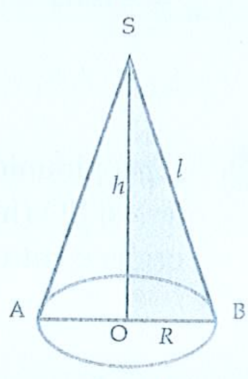


Fig. 9.6

Zgjidhje

$\frac{r}{h}=\frac{3}{4} \Rightarrow r=3x$ dhe $h=4x$. Në trekëndëshin SOB kemi:

$SB^2=SO^2+OB^2=16x^2+9x^2=25x^2 \Rightarrow SB=l=5x$

$S_a=60\pi \Rightarrow \pi r\, l=60\pi \Rightarrow r\, l=60 \Rightarrow 3x\times 5x=60 \Rightarrow x=2$ nga ku:

a $r=3\cdot 2=6$ cm; b $h=4\cdot 2=8$ cm; c $l=5\cdot 2=10$ cm;

d $S_p=S_a+S_b=60\pi+36\pi=96\pi$ cm².

9 Në një kon është brendashkruar cilindri (fig. 9.7). Lartësia e konit është SF = 6 cm dhe e cilindrit është EF = 2 cm. Gjeni raportin e vëllimeve të konit me cilindrin.

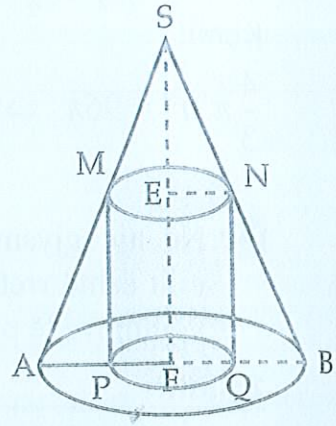


Fig. 9.7

Zgjidhje

Kemi:

SE = SF − EF = 6 − 2 = 4 cm

Shënojmë me R rrezen e bazës së konit dhe r- rrezen e bazës së cilindrit.

$$\Delta SEN \approx \Delta SFB \Rightarrow \frac{SE}{SF}=\frac{EN}{FB} \Rightarrow \frac{2}{6}=\frac{r}{R} \Rightarrow R=3r.$$ Kemi:

$$V_k=\frac{1}{3}\pi\cdot FB^2\cdot SF=\frac{1}{3}\pi\cdot R^2\cdot 6=2\pi\cdot R^2=2\pi\cdot(3r)^2=18\pi\cdot r^2$$

$V_c=\pi\cdot EN^2\cdot EF=\pi\cdot r^2\cdot 4=4\pi\cdot r^2$ nga ku

$$\frac{V_k}{V_c}=\frac{18\pi\cdot r^2}{4\pi\cdot r^2}=\frac{9}{2}$$

10 Cilindri me rreze të bazës R dhe lartësi H mbushet me ujë. Ky ujë derdhet në një cilindër të dytë me rreze të bazës 2R (fig. 9.8). Në ç'lartësi do të ngjitet uji në cilindrin e dytë?

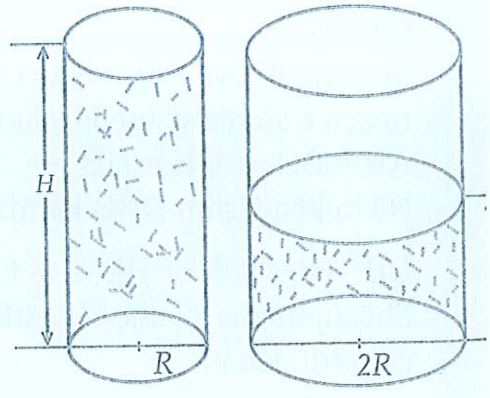


Fig. 9.8

Zgjidhje

Shënojmë me h lartësinë e ujit në cilindrin e dytë.

Për cilindrin e parë kemi $V_1=\pi\cdot R^2\cdot H$, ndërsa për cilindrin e dytë kemi $V_1=\pi\cdot(2R)^2\cdot h=4\pi\cdot R^2\cdot h$.

Vëllimet e ujit në të dy cilindrat janë të barabartë;

$V_1=V_2$. Kemi:

$4\pi\cdot R^2\cdot h=\pi\cdot R^2\cdot H$ nga ku $h=\frac{H}{4}$

11 Dy sfera prej bakri me rreze $R_1=2$ cm dhe $R_2=4$ cm shkrihen dhe me to formohet një sferë e re. Sa është rrezja e kësaj sfere?

Zgjidhje

Kemi:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot R_1^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8 = \frac{32}{3}\pi$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot R_2^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 64 = \frac{256}{3}\pi$$

Vëllimi i sferës së re është sa shuma e vëllimeve të dy sferave të dhëna.

$V = V_1 + V_2 = \frac{32}{3}\pi + \frac{256}{3}\pi = \frac{288}{3}\pi = 96\pi\ \text{cm}^3$. Shënojmë me r rrezen e kësaj sfere. Kemi:

$$\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 96\pi \Rightarrow r^3 = 72 \Rightarrow r = \sqrt[3]{72} \approx 4{,}2\text{cm}.$$

12 Në një gjysmësferë është brendashkruar koni, baza e të cilit është rrethi i madh i sferës (fig. 9.9). Gjeni raportin e vëllimeve të pjesëve në të cilat ndahet gjysmësfera.

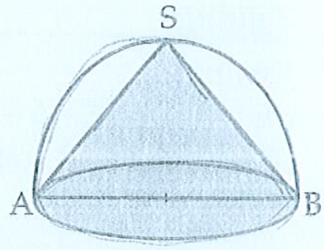


Fig. 9.9

Zgjidhje

Shënojmë me R rrezen e gjysmësferës, V_s vëllimin e saj dhe V_k vëllimin e konit. Kemi:

$V_s = \frac{2}{3}\pi \cdot R^3$ dhe $V_k = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot R = \frac{1}{3}\pi \cdot R^3$. Vëmë re se vëllimi i gjysmësferës është i barabartë me dyfishin e vëllimit të konit. Kjo tregon se ajo ndahet në dy pjesë të barabarta nga koni. Kështu që raporti i kërkuar është i barabartë me 1.

13 Cilindrit i brendashkruhet dhe i jashtëshkruhet sfera (fig. 9.10). Gjeni raportin e vëllimeve të këtyre sferave.

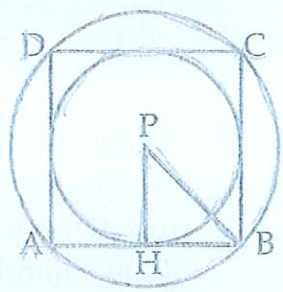


Fig. 9.10

Zgjidhje

Shënojmë OB = R, rrezen e sferës së jashtëshkruar dhe OH = r, rrezen e sferës së brendashkruar. Kemi

$AB = BC \Rightarrow OH = HB = r$

Në trekëndëshin OHB kemi:

$OB^2 = R^2 = OH^2 + HB^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$ nga ku $R = r\sqrt{2}$.

Shënojmë me V_j dhe V_b përkatësisht vëllimet e sferës së jashtëshkruar dhe brendashkruar cilindrit. Kemi:

$V_j = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (r\sqrt{2})^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi \cdot r^3$ dhe $V_b = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ nga ku:

$$\frac{V_b}{V_j} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot r^3}{\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi \cdot r^3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

14 Një enë cilindrike me diametër të bazës 24 cm dhe lartësi 50 cm është e mbushur përgjysmë me ujë. Në të zhytet një sferë metalike me rreze 6 cm. Me sa cm do të ngrihet niveli i ujit në enë?

Zgjidhje

Rritja e vëllimit të ujit në enë është e barabarta me vëllimin e sferës. Kemi:

$$V_s = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi \text{ cm}^3$$

Ky vëllim është i barabartë me vëllimin e cilindrit me rreze të bazës 12 cm dhe lartësi h. Kemi:

$V_c = \pi \times r^2 \times h = 144\pi \times h \text{ cm}^3$. Sipas kushtit $V_s = V_c$ nga ku:

$144\pi \times h = 288\pi \Rightarrow h = 2$ cm.

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Baza e kuboidit ka përmasa 3 cm dhe 4 cm. Lartësia e tij është 10 cm. Gjeni:
- a syprinën anësore të kuboidit; P. [140 cm^2]
- b syprinën e përgjithshme të kuboidit; P. [164 cm^2]
- c vëllimin e kuboidit. P. [120 cm^3]

2 Një depozitë uji ka formë cilindrike me diametër të bazës 1,2 m dhe gjatësi 2 m. Sa litra ujë nxë depozita? P. [≈2260 litra]

3 Kërkohet ndërtimi i një depozite cilindrike me diametër të bazës 160 cm, që të ketë kapacitet 4000 litra ujë.
- a Sa do të jetë gjatësia e depozitës? P. [≈1,99 m]
- b Sa m^2 llamarinë do të harxhohet për ndërtimin e saj, në qoftë se nga prerjet e ngjitjet humbet 10% e materialit? P. [≈15 m^2]

4 Pesha e 25 metra tel bakri është 100,17 g. Gjeni diametrin e telit (Dendësia e bakrit 9,8g/cm^3). P. [0,72 mm]

5 Një depozitë uji përbëhet prej një gjysmësfere me diametër 1,4 m dhe një cilindri me diametër të bazës sa diametri i gjysmësferës. Ç'lartësi duhet të ketë pjesa cilindrike, në mënyrë që depozita të ketë kapacitetin 1200 litra ujë.

P. [≈0,3 m]

6 Syprina dhe vëllimi i sferës janë numerikisht të barabarta. Gjeni rrezen e sferës.

P. [3]

7 Jepet një cilindër me rreze të bazës R dhe lartësi h. Krahas tij jepet një cilindër i dytë me rreze të bazës 2 herë më të madhe dhe lartësi 2 herë më të vogël.
- a Tregoni se syprinat anësore të të dy cilindrave janë të barabarta.
- b Tregoni se vëllimi i cilindrit të dytë është 2 herë më i madh se vëllimi i cilindrit të parë.

8 Një kuti cilindrike me rreze të bazës 10 cm dhe lartësi 20 cm është e mbushur me bojë. Sa sfera me rreze 5 cm mund të lyhen me këtë bojë, në qoftë se për 1 m^2 harxhohet 0,2 kg bojë? (Dendësia e bojës 2,5 g/cm^3) **P. [≈2500 sfera]**

9 Rrezja e diellit është 109 herë më e madhe se rrezja e tokës. Sa herë më e madhe është sipërfaqja dhe vëllimi i diellit, në krahasim me sipërfaqen dhe vëllimin e tokës? **P. [$109^2 \approx 11800$ herë; $109^3 \approx 1300000$ herë]**

10 Prerja boshtore e cilindrit është katror me syprinë 12 cm^2. Gjeni syprinën anësore, syprinën e përgjithshme dhe vëllimin e cilindrit.

P. [12π cm^2; 18π cm^2; $6\sqrt{3}\pi$ cm^3]

11 Syprina anësore e cilindrit është trefishi i syprinës së bazës. Gjeni vëllimin e cilindrit, në qoftë se rrezja e bazës është 6 cm. **P. [324π cm^3]**

12 Lartësia dhe përftuesja e konit janë në raportin 4:5. Vëllimi i konit është 96π cm^3. Gjeni syprinën e përgjithshme të konit. **P. [96π cm^2]**

13 Gjeni syprinën e përgjithshme të konit me vëllim 320π cm^3 dhe lartësi 15 cm.

P. [200π cm^2]

14 Nga një kub druri me brinjë 10 cm, duke e punuar në torno, nxirret cilindri më i madh i mundshëm, bazat e të cilit ndodhen në dy faqe të përkundrejta të kubit. Sa për qind e lëndës së drurit humbet gjatë këtij punimi? **P. [21,5%]**

15 Rrezet e tri sferave janë në raportin 1:2:3. Tregoni se vëllimi i sferës më të madhe është tri herë më i madh se shuma e vëllimeve të dy sferave më të vogla.

16 Hipotenuza dhe katetet e një trekëndëshi kënddrejtë shërbejnë si diametra të tri sferave. Tregoni që syprina e sferës së madhe është e barabartë me shumën e syprinave të dy sferave më të vogla.

17 Një copë plumbi në formë kuboidi me përmasa 10 cm, 15 cm dhe 20 cm shkrihet dhe me të formohen sfera gjuetie me diametër 10 mm. Sa sfera të tilla formohen? **P. [2500 sfera]**

18 Një sferë me diametër 18 cm është bosh përbrenda. Trashësia e cipës është 3 cm. Gjeni vëllimin e cipës. **P. [≈2148 cm^3]**

KREU 10

TRIGONOMETRI

Funksionet trigonometrike të këndit të ngushtë

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad a = c \cdot \sin\alpha$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad b = c \cdot \cos\alpha$

$tg\alpha = \frac{a}{b}$ $\quad a = b \cdot tg\alpha$

$\cot g\alpha = \frac{b}{a}$ $\quad b = a \cdot cotg\alpha$

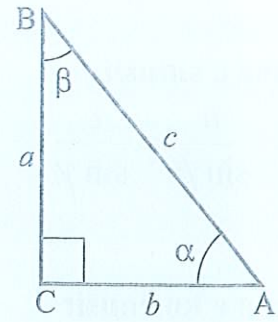


Fig. 10.1

Rrethi trigonometrik

$\cos\alpha = x_P$

$tg\alpha = \frac{y_P}{x_P}$

$\cot g\alpha = \frac{x_P}{y_P}$

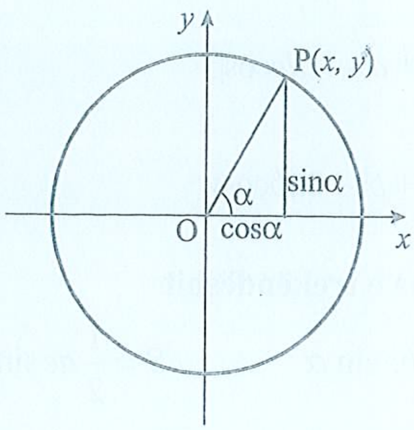


Fig. 10.2

Shenjat e funksioneve trigonometrike

KUADRANTI	sinα	cosα	tgα	cotgα
I	+	+	+	+
II	+	—	—	—
III	—	—	+	+
IV	—	+	—	—

Formulat

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (Formula themelore e trigonometrisë)

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $cotg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $tg\alpha \cdot cotg\alpha = 1$

$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$; $tg(90^0 - \alpha) = cotg\alpha$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha} \qquad \sin^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$

$tg(90^0 - \alpha) = cotg\alpha$ $\qquad$ $tg(180^0 - \alpha) = -tg\alpha$

Teorema e sinusit

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

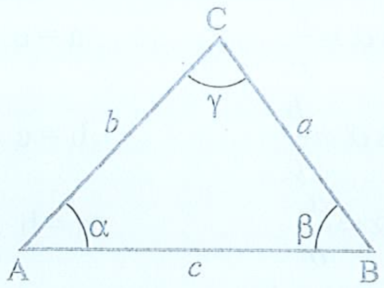


Fig. 10.3

Teorema e kosinusit

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $\qquad$ $\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\qquad$ $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Syprina e trekëndëshit

$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ $\qquad$ $S = \frac{1}{2}ac\sin\beta$ $\qquad$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

Vlerat e funksioneve trigonometrike të disa këndeve

α(gradë)	α(radian)	sinα	cosα	tgα	cotgα
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	?	0
180^0	π	0	−1	0	?
270^0	$\frac{3\pi}{2}$	−1	0	?	0
360^0	2π	0	1	0	?

Grafikët e funksioneve trigonometrikë

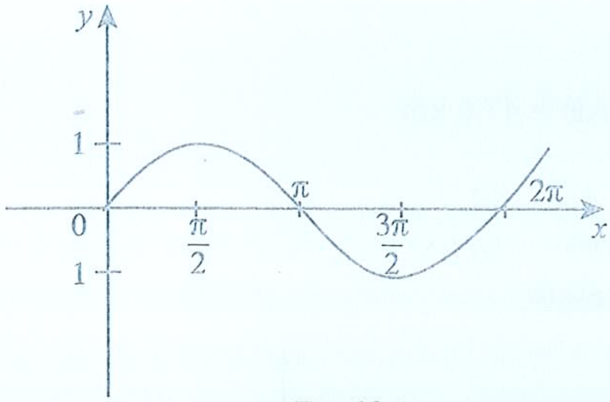


Fig. 10.4

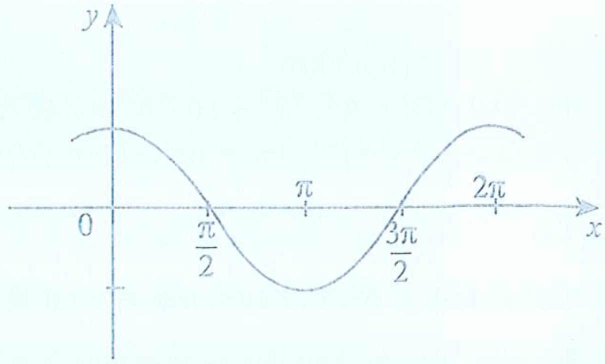


Fig. 10.5

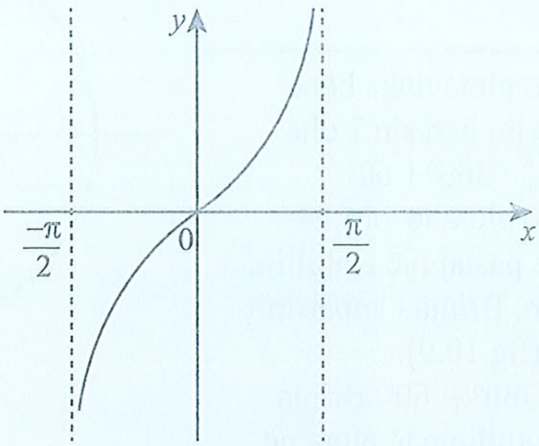


Fig. 10.6

$y = \sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$ $\qquad y = \cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$ $\qquad y = \mathrm{tg}x \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$

Ushtrime të zgjidhur

1 Gjeni brinjën x në trekëndëshin kënddrejtë në figurë (fig. 10.7).

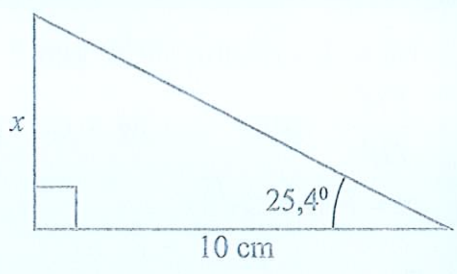


Fig. 10.7

Zgjidhje

Shkruajmë $\frac{x}{10} = \mathrm{tg}25,4^0 \Rightarrow \frac{x}{10} = 0,4748 \Rightarrow x = 4,748$ cm.

2 Një anije largohet 22 km prej pikës A me një kurs prej 42^0 dhe më tej për 30 km me një kurs prej 90^0 dhe arrin në B. Sa është largesa AB dhe kursi nga A drejt B? (fig. 10.8).

Zgjidhje

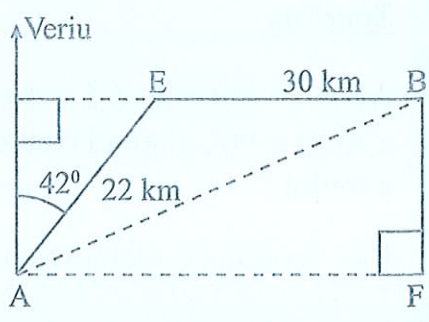


Fig. 10.8

Në trekëndëshin kënddrejtë ADE shkruajmë:

$$\frac{DE}{22} = \sin 42^0 \Rightarrow \mathrm{DE} = 22 \cdot \sin 42^\circ = 14,72 \text{ km}.$$

Shkruajmë $\frac{AD}{22} = \cos 42^0 \Rightarrow \mathrm{AD} = 22 \cdot \cos 42^\circ = 16,3$ km

Në trekëndëshin kënddrejtë ABF shkruajmë:
$AB^2 = AF^2 + BF^2$ dhe $AF = DE + EB$, pra
$AF = 14{,}72 + 30 = 44{,}72$ km.
$BF = AD = 16{,}35$ km.
Prandaj $AB^2 = 44{,}72^2 + 16{,}35^2 = 2267{,}2 \Rightarrow AB = 47{,}6$ km.
Kursi nga A drejt B jepet nga këndi DAB.

Por $\angle DAB = \angle ABF$. Shkruajmë $tg\angle ABF = \dfrac{AF}{BF} = \dfrac{44{,}72}{16{,}35} = 2{,}7353$.

Del $\angle ABF = 69{,}9°$. Kursi nga A drejt B është $69{,}9°$.

3 Në cilin kuadrant ndodhet brinja e mbarimit e këndit AOM me vlerë
a 780°? b −780°?

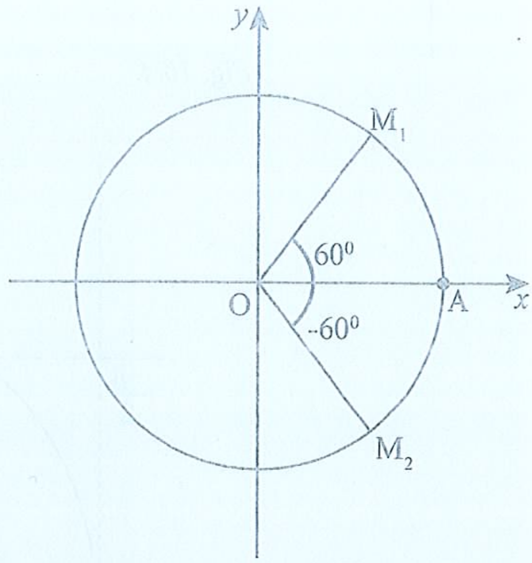


Fig. 10.9

Zgjidhje

a Veçojmë rrotullimet e plota duke bërë pjesëtimin me 360°. Marrim herësin 2 dhe mbetjen 60°. Pra, $780° = 2 \cdot 360° + 60°$
Janë bërë dy rrotullime të plota të OM në drejtimin kundërorar dhe pastaj një rrotullim me 60^0 në po këtë drejtim. Brinja e mbarimit ndodhet në kuadrantin I (fig.10.9).
b Kemi: $-780° = -2 \cdot 360° - 60°$. Brinja e mbarimit ka bërë dy rrotullime të plota në drejtimin orar dhe pastaj një rrotullim me 60° po në këtë drejtim. Ajo ndodhet në kuadrantin IV (fig. 10.9).

4 Në figurën 10.10 jepen M(5, n) dhe $\angle MOP = 60^0$. Gjeni n.

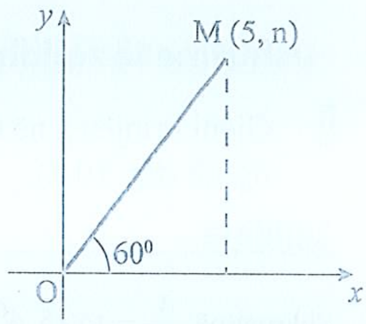


Fig. 10.10

Zgjidhje

Në trekëndëshin MOP kemi:

$$\frac{PM}{OP} = tg60^0 \Rightarrow PM = OP \cdot tg60^0 = 5\sqrt{3}.$$

$n = PM = 5\sqrt{3}$

5 Në figurën 10.11, AB është diametër i rrethit me rreze 6,5 cm. Jepet AC = 5 cm. Gjeni funksionet trigonometrike të këndit α.

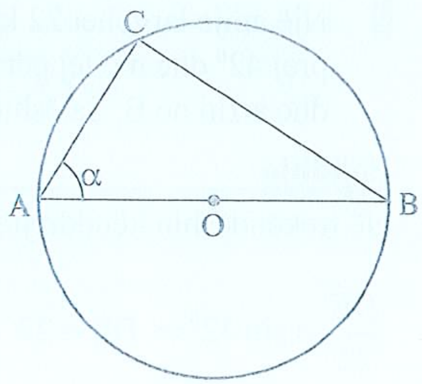


Fig. 10.11

Zgjidhje

$AB = 2 \cdot AO = 2 \cdot 6{,}5 = 13$ cm
$\angle ACB = 90^0$, si kënd rrethor që mbështetet në diametrin e rrethit.

Nga Teorema e Pitagorës, në trekëndëshin ACB kemi:

$BC^2 = AB^2 - AC^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 44$ nga ku BC = 12 cm.

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}; \quad \cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}; \quad tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{5}; \quad \cot g\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{12}$$

6 Në figurën 10.12, PA është tangjente me rrethin me qendër O dhe rreze 15 cm. Jepet PB = 2 cm. Gjeni funksionet trigonometrike të këndit α.

Zgjidhje

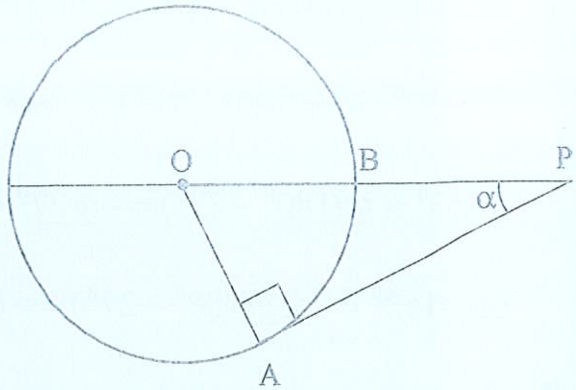


Fig. 10.12

Tangjentja ndaj rrethit është pingule me rrezen e tij që kalon nga pika e takimit. Pra $PA \perp OA$.

Vëmë re se OP = OB + BP = 15 + 2 = 17 cm.

Nga teorema e Pitagorës në trekëndëshin OAP kemi:

$AP^2 = OP^2 - OA^2 = 17^2 - 15^2 = 289 - 225 = 64$
nga ku AP = 8 cm.

$$\sin\alpha = \frac{OA}{OP} = \frac{15}{17}; \quad \cos\alpha = \frac{AP}{OP} = \frac{8}{17}; \quad tg\alpha = \frac{OA}{AP} = \frac{15}{8}; \quad \cot g\alpha = \frac{AP}{OA} = \frac{8}{15}$$

7 Në trekëndëshin kënddrejtë ABC (figura 10.13) jepet

$\sin B = \frac{2}{3}$ dhe AB + AC = 10 cm. Gjeni BC.

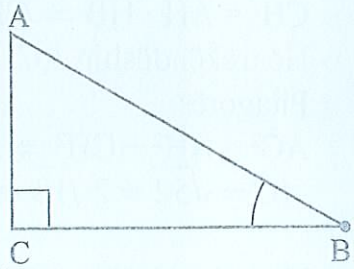


Fig. 10.13

Zgjidhje

Shënojmë AC = x nga ku AB = $10 - x$.

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x}{10-x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x = 20 - 2x \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4$$

AC = 4 cm dhe AB = 10 – 4 = 6 cm.

Nga teorema e Pitagorës në këtë trekëndësh kemi:

$BC^2 = AB^2 - AC^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$ nga ku $BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm.

8 Jepet $\cos 27^0 = p$. Gjeni:

a Funksionet e tjerë trigonometrikë të këndit 27^0.

b Funksionet trigonometrike të këndit 63^0.

c Funksionet trigonometrike të këndit 153^0.

Zgjidhje

a $\sin 27^0 = \sqrt{1 - \cos^2 27^0} = \sqrt{1 - p^2}$

$$tg 27^0 = \frac{\sin 27^0}{\cos 27^0} = \frac{\sqrt{1-p^2}}{p}; \quad \cot g 27^0 = \frac{\cos 27^0}{\sin 27^0} = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$$

b $\sin 63^0 = \sin(90^0 - 27^0) = \cos 27^0 = p$

$$\cos 63^0 = \cos(90^0 - 27^0) = \sin 27^0 = \sqrt{1-p^2}$$

$$tg63^0 = \frac{\sin 63^0}{\cos 63^0} = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}; \quad \cot g63^0 = \frac{\cos 63^0}{\sin 63^0} = \frac{\sqrt{1-p^2}}{p}$$

c $\sin 153^0 = \sin(180^0 - 27^0) = \sin 27^0 = \sqrt{1-p^2}$

$$\cos 153^0 = \cos(180^0 - 27^0) = -\cos 27^0 = -p$$

$$tg153^0 = tg(180^0 - 27^0) = -tg27^0 = -\frac{\sqrt{1-p^2}}{p}$$

$$\cot g153^0 = \cot g(180^0 - 27^0) = -\cot g27^0 = -\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$$

9 Në trekëndëshin kënddrejtë ABC, me kënd të drejtë në kulmin C (fig. 10.14) jepen AH = 4 cm dhe BH = 9 cm. Gjeni sinα · tgβ.

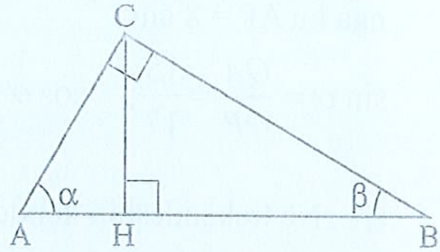


Fig. 10.14

Zgjidhje

Nga teorema e Euklidit në trekëndëshin ABC kemi:
$CH^2 = AH \cdot HB \Rightarrow CH^2 = 4 \cdot 9 = 36$ nga ku CH = 6 cm.
Në trekëndëshin ACH gjejmë AC me anën e teoremës së Pitagorës.
$AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow AC^2 = 16 + 36 = 52$ nga ku
$AC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ cm.

Në trekëndëshin ACH: $\sin\alpha = \frac{CH}{AC} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

Në trekëndëshin CBH: $tg\beta = \frac{CH}{HB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$$\sin\alpha \cdot tg\beta = \frac{3\sqrt{13}}{13} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

10 Gjeni, në bazë të përkufizimeve, $\sin 150^0$ dhe $\cos 150^0$.
Në figurën 10.15 kemi $\angle AOP = 150^0$, prandaj $\angle MOP = 30^0$.

Meqë OM = 1, del $PM = \frac{1}{2}$;

Pra, $\sin 150^o = y_P = PM = \frac{1}{2}$;

Gjithashtu $\cos 30^0 = \frac{OM}{OP} \Rightarrow OM = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 150^o = x_P = -OM = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

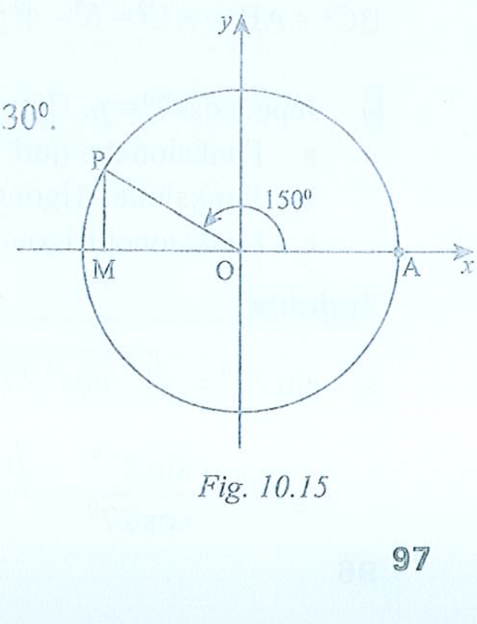


Fig. 10.15

11 Jepet $\sin x = \frac{1}{2}$, dhe $90^0 < x < 180^0$. Gjeni $\cos x$.

Zgjidhje

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Meqë x është kënd i kuadrantit të dytë, kemi $\cos x < 0$. Pra,

$$\cos x = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

12 Shprehni $\cos x$ nëpërmjet tgx.

Zgjidhje

Nga formula themelore $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, duke pjesëtuar të dyja anët me $\cos^2 x$, marrim

$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$, që nga $\cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x}$.

13 Jepet $tgx = \sqrt{3}$ dhe $180^0 < x < 270^0$. Gjeni $\cos x$.

Zgjidhje

$\cos^2 x = \frac{1}{1 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$ sepse x është kënd i kuadrantit të tretë.

14 Gjeni vlerën më të vogël dhe më të madhe të funksioneve:

a $y = \sin(2x - 40^o)$ b $y = \frac{1}{3}\cos x$ c $y = 2\sin\frac{x}{2}$.

Zgjidhje

a Vlera më e madhe është 1; vlera më e vogël është -1.

b Vlera më e madhe është $\frac{1}{3}$; vlera më e vogël është $-\frac{1}{3}$.

c Kemi $-1 \le \sin(\frac{x}{2}) \le 1$, që nga $-2 \le 2\sin(\frac{x}{2}) \le 2$.

Vlera më e madhe është 2; vlera më e vogël është -2.

15 Gjeni vlerën më të vogël dhe më të madhe të funksioneve:

a $y = 1 - \sin x$ b $y = \frac{1}{3 + \sin x}$

Zgjidhje

a Kemi $-1 \le \sin x \le 1$, që nga $1 \ge -\sin x \ge -1$ dhe $2 \ge 1 - \sin x \ge 0$ ose $0 \le 1 - \sin x \le 2$

Vlera më e madhe e funksionit është 2; vlera më e vogël është 0.

b Kemi $-1 \le \sin x \le 1$, prandaj $2 \le 3 + \sin x \le 4$, që nga $\frac{1}{2} \ge \frac{1}{3 + \sin x} \ge \frac{1}{4}$ ose

$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+3\sin x} \leq \frac{1}{2}$.

Vlera më e madhe e funksionit $y = \frac{1}{3+\sin x}$ është $\frac{1}{2}$; vlera më e vogël është $\frac{1}{4}$.

16 Zgjidhni ekuacionin $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ për $0 < x < 360^0$

Zgjidhje

Meqë $\cos x > 0$ del se këndi x është kënd i kuadrantit të parë ose të katërt.

Nga tabela, vlerës së kosinusit $\frac{\sqrt{2}}{2}$, i korrespondon këndi 45^o. Gjithashtu edhe këndi $360^0 - 45^0 = 315^0$, ka të njëjtin kosinus.
Rrjedhimisht $x = 45^0$ ose $x = 360 - 45^0 = 315^0$.

17 Zgjidhni ekuacionin $\text{tg}(x - 60^0) = \sqrt{3}$ për $0 < x < 360^0$

Zgjidhje

Tangjenti i këndit është pozitiv në kuadrantin e parë ose të tretë.
Nga tabela, vlerës së tangjentit $\sqrt{3}$, i korrespondon këndi 60^o, gjithashtu edhe këndi $180^o + 60^0 = 240^0$. Pra:
$x - 60^0 = 60^0 \Rightarrow x = 120^0$, ose $x - 60^0 = 240^0 \Rightarrow x = 300^0$

18 Zgjidhni ekuacionin $2\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$ për $0 < x < 360^0$

Zgjidhje

Shënojmë $\cos x = t$ dhe marrim ekuacionin e fuqisë së dytë me ndryshore t:
$t^2 + 3t + 2 = 0$.
Duke zgjidhur këtë ekuacion, gjejmë $t = -2$ ose $t = -1$. Pra, $\cos x = -2$ ose $\cos x = -1$.
Ekuacioni $\cos x = -2$ nuk ka zgjidhje.
$\cos x = -1 \Rightarrow x = 180^o$.

19 Zgjidhni ekuacionet për $-180^o < x < 180^o$

a $2\cos^2 x - \sin x = 1$ b $\cos^2 x = \sin^2 x$

Zgjidhje

a $2\cos^2 x - \sin x = 1 \Rightarrow 2(1 - \sin^2 x) - \sin x = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$
Duke zëvendësuar $\sin x = t$, marrim ekuacionin $2t^2 + t - 1 = 0$, i cili ka dy rrënjë: $t_1 = -1$; $t_2 = \frac{1}{2}$.
Pra, $\sin x = -1 \Rightarrow x = -90^o$ ose $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 30^o$ ose $x = 150^0$.

b Ekuacioni $\cos^2 x = \sin^2 x$ (ku $\cos x \neq 0$) sillet në trajtën $\text{tg}^2 x = 1$
d.m.th., ($\text{tg}x = 1$ ose $\text{tg}x = -1$).
Zgjidhja e ekuacionit $\text{tg}x = 1$ është $x = 45^0$ ose $x = -135^0$.
Zgjidhja e ekuacionit $\text{tg}x = -1$ është $x = -45^0$ ose $x = 135^0$.

20 Zgjidhni ekuacionin:

$tg^2x - tgx = 0$ për $0^0 \leq x \leq 360^0$

Zgjidhje

$tg^2x - tgx = 0 \Rightarrow tg\,x(tgx - 1) = 0$
$tgx = 0 \Rightarrow x = 0^0;\ 180^0;\ 360^0$
$tgx - 1 = 0$
$tgx = 1 \Rightarrow x = 45^0;\ 225^0$

21 Zgjidhni ekuacionin $\sin x = \cos x$ për $0 < x < 360^0$.

Zgjidhje

Nëse për ekuacionin do të kishim $\cos x = 0$, prej tij do të dilte $\sin x = 0$, pra $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$, gjë që është e pamundur.

Meqë $\cos x \neq 0$, mund të pjesëtojmë të dyja anët e ekuacionit me $\cos x$, duke përftuar ekuacionin $\frac{\sin x}{\cos x} = 1$, d.m.th., $tgx = 1$.

Zgjidhjet e këtij, pra edhe zgjidhjet e ekuacionit fillestar janë $x = 45^\circ$ ose $x = 225^\circ$.

22 Vërtetoni identitetet:

a $(1 + cotg^2\alpha) \cdot \sin^2\alpha = 1$

b $(tg\alpha + cotg\alpha)^2 - (tg\alpha - cotg\alpha)^2 = 4$

c $\frac{tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha$

d $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

e $\cos^2 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^4 x = 1$.

Vërtetim

a $(1+cotg^2\alpha)\sin^2\alpha = (1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha})\sin^2\alpha =$

$= \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\sin^2\alpha = \sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$

b $(tg\alpha + cotg\alpha)^2 - (tg\alpha - cotg\alpha)^2 =$

$= (tg^2\alpha + 2tg\alpha cotg\alpha + cotg^2\alpha) - (tg^2\alpha - 2tg\alpha cotg\alpha + cotg^2\alpha) = 4tg\alpha cotg\alpha = 4$

c $\frac{tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$

d $\cos^4 x + \sin^4 x = \cos^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^4 x - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x =$
$= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x.$

e $\cos^2 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^4 x = \cos^2 x + \sin^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x + \sin^2 x \cdot 1 = 1.$

23 Brinjët e një trekëndëshi janë $a = \sqrt{5}$ cm; $b = (\sqrt{2}+1)$ cm dhe $c = (\sqrt{2}-1)$ cm. Gjeni këndin α, përballë brinjës a të tij.

Zgjidhje

Nga teorema e kosinusit kemi:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Rightarrow (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{2}+1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2 - 2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\cos\alpha \Rightarrow$

$5 = 2+1+2\sqrt{2}+2+1-2\sqrt{2}-2(2-1)\cos\alpha \Rightarrow$

$\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^0$

24 Në figurën 10.16 jepen: AB = 6 cm; AC = 7 cm; BC = 2 cm; DC = 4 cm; CE = 1 cm. Gjeni $DE^2 = x^2$.

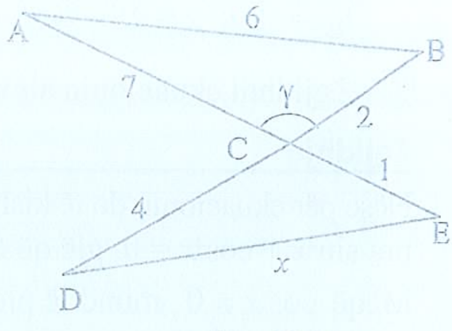


Fig. 10.16

Zgjidhje

Në trekëndëshat ABC dhe ACE zbatojmë teoremën e kosinusit. Kemi:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos\gamma \Rightarrow$

$36 = 49 + 4 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{17}{28}$

$DE^2 = DC^2 + CE^2 - 2 \cdot DC \cdot CE \cdot \cos\gamma \Rightarrow x^2 = 16 + 1 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{17}{28} \Rightarrow x^2 = 17 - \frac{34}{7} = \frac{85}{7}$

25 Në trekëndëshin ABC jepen $c = 4$ cm; $\sin\alpha = \frac{3}{2}\sin\gamma$ dhe $\cos\gamma = \frac{3}{4}.c$ Gjeni brinjët a dhe b.

Zgjidhje

Nga teorema e sinusit kemi:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{4 \cdot \frac{3}{2}\sin\gamma}{\sin\gamma} = 6$$

Nga teorema e kosinusit kemi:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \Rightarrow 16 = 36 + b^2 - 2 \cdot 6 \cdot b \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow b^2 - 9b + 20 = 0 \Rightarrow b = 4 \text{ cm ose } b = 5 \text{ cm}$$

26 Në figurën 10.17 jepet BD = DC.

Gjeni raportin $\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$.

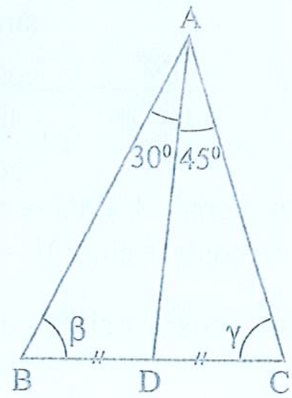


Fig. 10.17

Zgjidhje

Të trekëndëshat ABD dhe ACD zbatojmë teoremën e sinusit. Kemi:

Në trekëndëshin ABD: $\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{BD}{\sin 30^0} \Rightarrow BD = \frac{AD \cdot \sin 30^0}{\sin\beta}$.

Në trekëndëshin ACD: $\frac{AD}{\sin\gamma} = \frac{DC}{\sin 45^0} \Rightarrow DC = \frac{AD \cdot \sin 45^0}{\sin\gamma}$.

Ng kushti BD = DC shkruajmë:

$$\frac{AD\cdot\sin30^0}{\sin\beta}=\frac{AD\cdot\sin45^0}{\sin\gamma}\Rightarrow\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{\sin30^0}{\sin45^0}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

27 Në figurën 10.18 gjeni syprinën e trekëndëshit PQR.

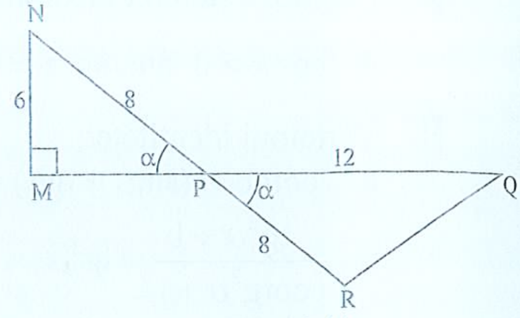


Fig. 10.18

Zgjidhje

Në trekëndëshin MNP kemi: $\sin\alpha=\frac{MN}{PM}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

Në trekëndëshin PQR kemi:

$$S_{PQR}=\frac{1}{2}\cdot PQ\cdot PR\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot8\cdot12\cdot\frac{3}{4}=36\ cm^2.$$

28 Në figurën 10.19 jepen $a=4x+1$; $b=5x$ dhe $c=3x-1$. Gjeni x dhe brinjët e trekëndëshit ABC, në qoftë se $\angle CAB=\alpha=60^0$.

Zgjidhje

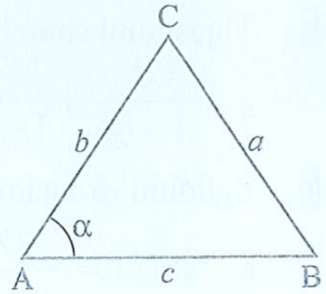


Fig. 10.19

Në trekëndëshin ABC nga teorema e kosinusit kemi:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$

$$(4x+1)^2=(5x)^2+(3x-1)^2-2\cdot5x\cdot(3x-1)\cdot\frac{1}{2}$$

$16x^2+8x+1=25x^2+9x^2-6x+1-15x^2+5x$

Duke reduktuar kufizat e ngjashme përftojmë ekuacionin;

$3x^2-9x=0\Rightarrow3x(x-3)=0\Rightarrow x=3$ ose $x=0$ (nuk pranohet)

Për $x=3$ kemi:

$a=4\cdot3+1=13$ cm; $b=5\cdot3=15$ cm dhe $c=3\cdot3-10\ 8$ cm.

Brinjët e trekëndëshit ABC janë 13cm; 15 cm dhe 8 cm.

29 Të dy akrepat e orës janë të mbivendosur në orën 12. Pas sa kohe do të mbivendosen përsëri akrepat?

Zgjidhje

Shënojmë me c gjatësinë e rrethit të sahatit. Shpejtësia këndore e akrepit të madh është e barabartë me c; kurse shpejtësia këndore e akrepit të vogël është 12 herë më e vogël, pra $\frac{c}{12}$. Nëse shënojmë me x kohën e kërkuar (për mbivendosjen e parë), akrepi i madh ka përshkruar rrugën cx, kurse i vogli rrugën $\frac{c}{12}x$; ndërkaq i madhi ka përshkruar një rreth më tepër se i vogli. Prandaj $cx-\frac{c}{12}x=c$, nga ku del $x=\frac{12}{11}$.

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Jepet $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ dhe $tg\alpha < 0$. Gjeni $\cos\alpha$. P. [$-\frac{4}{4}$]

2 Jepet $-90^0 < x < 90^0$. Gjeni $\cos x$, në qoftë se $tgx = -\frac{3}{4}$. P. [$\frac{4}{5}$]

3 Në cilin kuadrant mbaron harku trigonometrik, kur masa e tij x plotëson kushtet

a $\cos x > 0$ dhe $\sin x = -\frac{1}{3}$; b $\sin x < 0$ dhe $\cos x = -\frac{2}{7}$. P. [a) IV; b) III]

4 Vërtetoni identitetet:

a $\cot g\alpha = (\sin\alpha + tg\alpha) = 1 + \cos\alpha$

b $\dfrac{tg^2\alpha+1}{\cot g^2\alpha+1} = tg^2\alpha$ c $\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}+tg\alpha\right)^2 = \dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$

d $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = tg\alpha - \cot g\alpha$ e $1-\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha} = \sin\alpha$

f $\dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = 2\cos^2\alpha - 1$ g $\dfrac{tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha$

5 Thjeshtoni shprehjet e mëposhtme:

a $\dfrac{1}{1-tgx}+\dfrac{1}{1-\cot gx}$ b $\dfrac{\sin x+tgx}{\sin x-tgx}-\dfrac{2}{\cos x-1}$ P. [a) 1; b) 1]

6 Zgjidhni ekuacionet për $-180^0 < x < 180^0$

a $\sin 3x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b $\cos(2x-60^0) = \dfrac{1}{2}$.

P. [a) $x = -135^0$; $x = -15^0$; $x = 75^0$; $x = 105^0$; b) $x = -90^0$; $x = -30^0$; $x = 90^0$; $x = 150^0$]

7 Zgjidhni ekuacionet për $0 < x < 180^0$.

a $tg(2x-10^0) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b $tg(180^0 - 2x) = -1$.

P. [a) $x = 80^0$; $x = 170^0$ b) $x = 112{,}5^0$; $22{,}5^0$

8 Zgjidhni ekuacionet:

a $2\sin^2x - 3\sin x + 1 = 0$, për $0^0 \le x \le 360^0$ P. [$x = 90^0$; 30^0; 150^0]

b $2\cos^2x - \cos x = 0$, për $0^0 \le x \le 180^0$ P. [$x = 90^0$; 60^0]

c $tg^2x - (\sqrt{3}+1)tgx + \sqrt{3} = 0$, për $0^0 \le x \le 180^0$ P. [$x = 45^0$; 60^0]

9 Gjeni vlerën më të vogël të funksionit në $[0, 2\pi]$.

a $y = \dfrac{5}{1-2\sin\frac{x}{2}}$ b $y = \cos^2x - 2\cos x - 5$. P. [a) $\frac{5}{3}$; b) -6]

10 Në trekëndëshin ABC jepen $a = 4$ cm; $c = 6$ cm dhe këndi ndërmjet tyre $\beta = 120^0$.
Gjeni b. P. [$2\sqrt{19}$ cm]

11 Në figurën 10.20 jepen AC = 6 cm; BC = 8 cm dhe AD = 5 cm. Gjeni funksionet trigonometrike të këndit $\angle DAB = \alpha$.

P. [$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$]

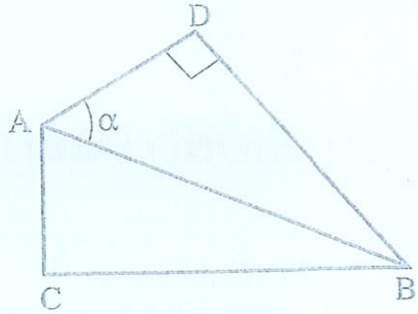


Fig. 10.20

12 Në figurën 10.21, jepet rombi ABCD në të cilin AB = 20 cm dhe BD = 32 cm. Gjeni:

a diagonalen tjetër AC të rombit;

b këndet α dhe β që diagonalja formojnë me brinjët e rombit.

P. [a) 24 cm; b) $\sin\alpha = \frac{4}{5}; \sin\beta = \frac{3}{5}$

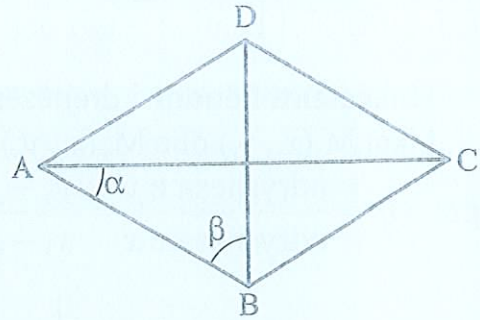


Fig. 10.21

13 Gjeni këndin A në trekëndëshin ABC, në qoftë se $a = \sqrt{13}$ cm, $b = 4$ cm dhe $c = 3$ cm.

P. [60^0]

14 Në trekëndëshin ABC jepen a= 8 cm; $\angle A = 30^0$ dhe $\angle B = 45^0$. Gjeni b.

P. [$8\sqrt{2}$ cm]

15 Në trekëndëshin ABC jepen b = 6 cm; c = 8 cm dhe këndi ndërmjet tyre $\alpha = 30^0$. Gjeni:

a syprinën e trekëndëshit ABC;

b brinjën *a*.

P. [a) 12 cm²; b) $2\sqrt{25-12\sqrt{3}}$ cm]

16 Gjeni syprinën e paralelogramit me brinjë *m*, *n* dhe kënd α ndërmjet tyre.

P. [$S = m \cdot n \cdot \sin\alpha$]

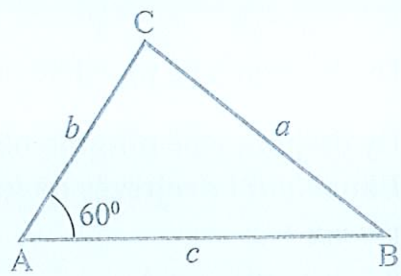


Fig. 10.22

17 Në trekëndëshin ABC (fig. 10.22) jepen $a = 3x + 1$; $b = 4x$; $c = 2x + 1$ dhe $\angle CAB = 60^0$. Gjeni *x* dhe brinjët e trekëndëshit.

P. [$x = 2$]

18 Në figurën 10.23 gjeni $BD = x$.

P. [$4\sqrt{3}$ cm]

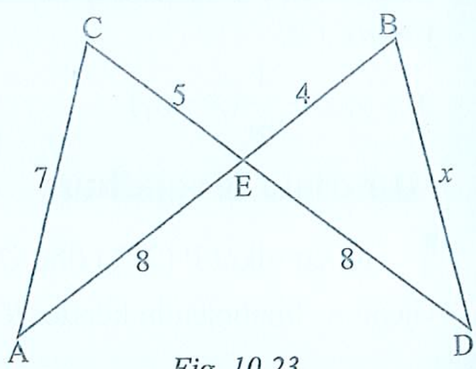


Fig. 10.23

KREU 11

EKUACIONI I DREJTËZËS

- Ekuacioni $y = m \cdot x + c$ është ekuacioni i drejtëzës.

m është koeficienti këndor (gradienti) i drejtëzës.
c është ordinata në origjinë.
Në figurën 11.1 kemi $m = \text{tg}\alpha$ dhe $c = OP$.

- Koeficienti këndor i drejtëzës që kalon nga pikat $M_1(x_1, y_1)$ dhe $M_2(x_2, y_2)$

$$\text{tg}\alpha = m = \frac{\text{ndryshesa e } y}{\text{ndryshesa e } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

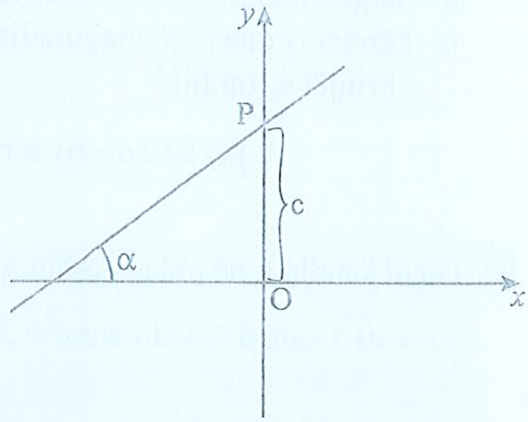


Fig. 11.1

Mezi M i segmentit M_1M_2.
$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_{M_1} + x_{M_2}}{2} \\ y_M = \dfrac{y_{M_1} + y_{M_2}}{2} \end{cases}$$

- Ekuacioni i drejtëzës me koeficient këndor m dhe që kalon nga pika $M_1(x_1, y_1)$
$y - y_1 = m(x - x_1)$.

- Largesa ndërmjet pikave $M_1(x_1, y_1)$ dhe $M_2(x_2, y_2)$ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

- Ekuacioni i drejtëzës që kalon nga pikat $M_1(x_1, y_1)$ dhe $M_2(x_2, y_2)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Dy drejtëza janë paralele nëse $m_1 = m_2$.

Dy drejtëza janë pingule nëse $m_1 \cdot m_2 = -1$.
Ekuacioni i drejtëzës që kalon nga pika (x_1, y_1) dhe është paralel me drejtëzën $y = mx + c$:
$y - y_1 = m(x - x_1)$

Ekuacioni i drejtëzës që kalon nga një pika (x_1, y_1) dhe është pingul me drejtëzën $y = mx + c$:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

Ushtrime të zgjidhura

1 Jepen pikat P (2, 1) dhe Q (6, 4).
Gjeni: a koeficientin këndor të drejtëzës PQ; b largesën PQ; c mesin e segmentit PQ.

Zgjidhje

a $m=\dfrac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}=\dfrac{4-1}{6-2}=\dfrac{3}{4}$;

b $PQ=\sqrt{(x_Q-x_P)^2+(y_Q-y_P)^2}=\sqrt{(6-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$

c $x_M=\dfrac{x_P+x_Q}{2}=\dfrac{6+2}{2}=4;\quad y_M=\dfrac{y_P+y_Q}{2}=\dfrac{4+1}{2}=\dfrac{5}{2}$. Pra, $M\left(4,\dfrac{5}{2}\right)$.

2 Gjeni koeficientin këndor dhe ordinatën në origjinë për drejtëzën $x+2y-6=0$.

Zgjidhje

Kemi $2y=-x+6,\Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}x+3$. Pra, $m=-\dfrac{1}{2}$ dhe $c=3$.

3 Shkruani ekuacionin e drejtëzës që kalon nga pikat (1, 3) dhe (3, 7).

Zgjidhje

E kërkojmë ekuacionin në trajtën $y=mx+c$. Kemi:

$$m=\frac{7-3}{3-1}=\frac{4}{2}=2.$$

Ekuacioni i drejtëzës me koeficient këndor 2 dhe që kalon nga pika (1, 3) është
$y-3=2(x-1)$ ose $y=2x+1$

4 Gjeni ekuacionin e drejtëzës pingule me drejtëzën d: $y=3x-5$, që kalon nëpër pikën (2, 2).

Zgjidhje

Koeficienti këndor $m_d=3$. Koeficienti këndor m i drejtëzës së kërkuar plotëson kushtin
$m\cdot m_d=-1$; pra $m\cdot 3=-1$ nga ku $m=-\dfrac{1}{3}$.
Ekuacioni i drejtëzës së kërkuar është

$$y-2=-\frac{1}{3}(x-2)\text{ ose } y=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}.$$

5 Jepet trekëndëshi me kulme

$A(1,0)$; $B(-4,3\sqrt{3})$ dhe $C(2,\sqrt{3})$ (fig. 11.2).

a Vërtetoni se ABC është trekëndësh këndrejtë.

b Gjeni këndet që drejtëzat CA dhe CB formojnë me boshtin e abshisave.

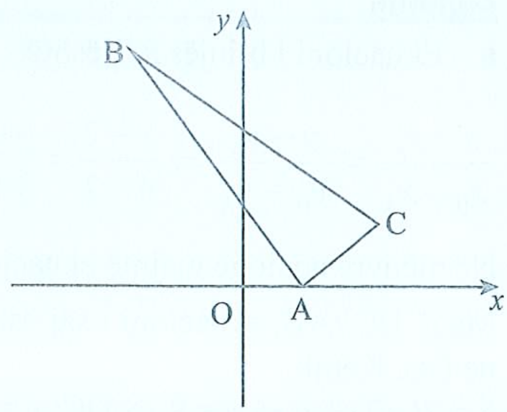


Fig. 11. 2

Zgjidhje

a Gjejmë gjatësitë e brinjëve të trekëndëshit ABC.

$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(2-1)^2+(\sqrt{3}-0)^2}=\sqrt{1+3}=2$$

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-4-1)^2+(3\sqrt{3}-0)^2}=\sqrt{25+27}=\sqrt{52}$$

$$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(2+4)^2+(\sqrt{3}-3\sqrt{3})^2}=\sqrt{36+12}=\sqrt{48}$$

Vëmë re se $AC^2+BC^2=48+4=52=AB^2$ që tregon se trekëndëshi ABC është kënddrejtë në kulmin C.

b Gjejmë koeficientet këndore të drejtëzave CA dhe BC. Kemi:

Për drejtëzën CA: $m_1=\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\dfrac{\sqrt{3}-0}{2-1}=\sqrt{3}=\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \alpha=60^0$

Për drejtëzën CB: $m_2=\dfrac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\dfrac{\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{2-(-4)}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\operatorname{tg}\beta \Rightarrow \beta=150^0$

6 Shkruani ekuacionin e drejtëzës që kalon nga pikat e prerjes së saj me boshtet e koordinatave (fig. 11.3).

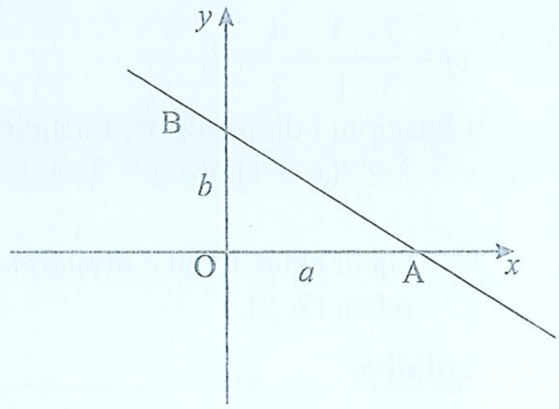


Fig. 11.3

Zgjidhje

Kemi A(a, 0) dhe B(0, b). Ekuacioni i drejtëzës AB është:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}\Rightarrow\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}\Rightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Barazimi i fundit quhet edhe **ekuacioni i drejtëzës në segmente.**

7 Në figurën 11.4, ABCD është paralelogram. Jepen tri kulme të tij A(2, –1); B(4, 3) dhe D(–2, 5).

a Shkruani ekuacionet e brinjëve të tij.

b Gjeni koordinatat e kulmit C.

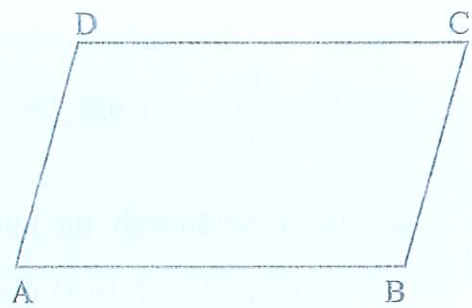


Fig. 11.4

Zgjidhje

a Ekuacioni i brinjës AB është:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}\Rightarrow\frac{x-2}{4-2}=\frac{y+1}{3+1}\Rightarrow 2x-y-5=0\Rightarrow AB: y=2x-5$$

Në mënyrë analoge gjejmë ekuacionin e brinjës AD. Kemi: AD: $y=-\dfrac{3}{2}x+2$

Meqë DC//AB, ekuacioni i saj është $y=2x+c$. Gjejmë c me kushtin që pika D ndodhet ne DC. Kemi:

$5=2(-2)+c\Rightarrow c=9\Rightarrow$ DC: $y=2x+9$

Në mënyrë analoge gjendet ekuacioni i brinjës BC. Kemi: BC: $y=-\frac{3}{2}x+9$

b Koordinatat e kulmit C gjenden si prerje e brinjëve DC dhe BC. Kemi:

$$\begin{cases} y=2x+9 \\ y=-\frac{3}{2}x+9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=9 \end{cases} \Rightarrow D(0,9)$$

8 Gjeni pikën simetrike të pikës M(3, –2) në lidhje me drejtëzën që kalon nga pikat A(1, 3) dhe B(–1, 5) (fig. 11.5).

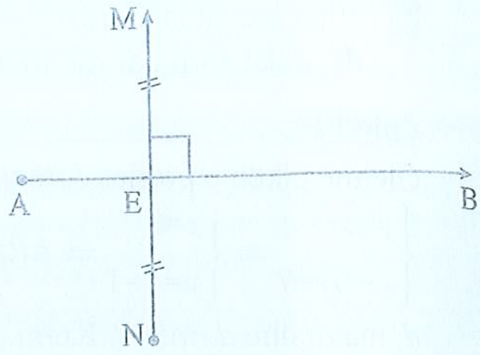


Fig. 11.5

Zgjidhje

Kërkohen koordinatat e pikës N. Meqë pikat M dhe N janë simetrike në lidhje me drejtëzën AB kemi MN⊥AB dhe ME = EN.

- Gjejmë fillimisht ekuacionin e drejtëzës AB (ekuacioni i drejtëzës që kalon nëpër dy pika të dhëna).

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A} \Rightarrow \frac{x-1}{-1-1}=\frac{y-3}{5-3} \Rightarrow x+y-4=0 \Rightarrow y=-x+4$$

- MN është drejtëza që kalon nga pika M, pingule me drejtëzën AB.

MN: $y=x+c$. Zëvendësojmë koordinatat e pikës M.

$-2=3+c \Rightarrow c=-5 \Rightarrow$ MN: $y=x-5$

- Gjejmë pikëprerjen E të drejtëzave AB dhe MN. Kemi:

$$\begin{cases} y=-x+4 \\ y=x-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{9}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{9}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

- Së fundi gjejmë koordinatat e pikës N, simetrike të pikës M, duke ditur se pika E është mezi i segmentit MN. Kemi:

$$x_E=\frac{x_M+x_N}{2} \Rightarrow x_N=2\cdot x_E-x_M=2\cdot\frac{9}{2}-3=6$$

$$y_E=\frac{y_M+y_N}{2} \Rightarrow y_N=2\cdot y_E-y_M=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2=1 \text{ nga ku } N(6,1)$$

9 Në boshtin e abshisave gjeni pikën M të baraslarguar nga pikat A(1, 1) dhe B(3, 7).

Zgjidhje

Shënojmë M(a, 0) (Meqë pika ndodhet në boshtin e abshisave, ordinata e saj është e barabartë me zero). Kemi:

$AM^2 = (a-1)^2 + (0-1)^2 = a^2 - 2a + 1 + 1 = a^2 - 2a + 2$
$BM^2 = (a-3)^2 + (0-7)^2 = a^2 - 6a + 9 + 49 = a^2 - 6a + 58$. Meqë nga kushti $MA^2 = MB^2$, kemi:
$a^2 - 2a + 2 = a^2 - 6a + 58 \Rightarrow 4a = 56 \Rightarrow a = 14$. Pra, M(14, 0).

10 Vijat me ekuacione $d_1: y = 3x - 1$; $d_2: x - 7y = 7$ dhe $d_3: x + y = -7$ priten dy nga dy, duke formuar një trekëndësh. Përcaktoni llojin e tij.

Zgjidhje

Gjejmë pikën e prerjes A të vijave d_1 dhe d_2. Kemi:

$$\begin{cases} y=3x-1 \\ x-7y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow A(0,-1).$$ Në mënyrë analoge gjejmë pikat e prerjes së vijave d_1 me d_3 dhe d_2 me d_3. Kemi:

$$\begin{cases} y=3x-1 \\ x+y=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow B(-\frac{3}{2},-\frac{11}{2}); \quad \begin{cases} x-7y=7 \\ x+y=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{21}{4} \\ y=-\dfrac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow C(-\frac{21}{4},-\frac{7}{4}).$$

Gjejmë tani gjatësitë e brinjëve të trekëndëshit ABC. Kemi:

$$AB=\sqrt{(-\frac{3}{2}-0)^2+(-\frac{11}{2}+1)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{2}; \quad AC=\sqrt{(-\frac{21}{4}-0)^2+(-\frac{7}{4}+1)^2}=\frac{15\sqrt{2}}{4};$$

$$BC=\sqrt{(-\frac{21}{4}+\frac{3}{2})^2+(-\frac{7}{4}+\frac{11}{2})^2}=\frac{15\sqrt{2}}{4}$$

Meqë AC = BC, trekëndëshi është dybrinjënjëshëm.

11 Pikat $A(a, -1)$; $B(1-a, 2a+1)$ dhe $C(a+1, -3)$ ndodhen në një drejtëz. Gjeni a.

Zgjidhje

Koeficienti këndor i drejtëzës AB është $m_1 = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2a+1+1}{1-a-a} = \dfrac{2a+2}{1-2a}$.
Koeficienti këndor i drejtëzës AC është

$$m_2 = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-3+1}{a+1-a} = -\frac{2}{1} = -2.$$

Meqë të tria pikat ndodhen në një drejtëz kemi $m_1 = m_2$.

$$\frac{2a+2}{1-2a} = -2 \Rightarrow 2a+2 = -2+4a \Rightarrow a=2$$

12 Shkruani ekuacionin e përmesores d të segmentit AB me kulme A(−1, 4) dhe B(3, 2) (fig. 11.6).

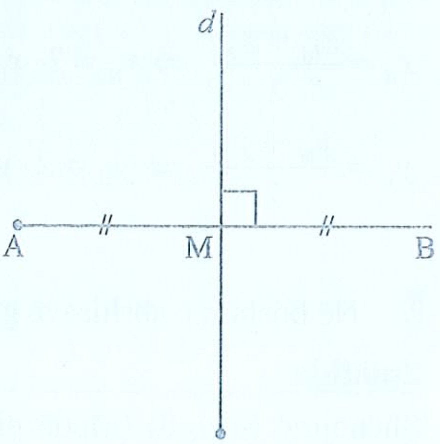


Fig. 11.6

Zgjidhje

Përmesorja d e segmentit AB, kalon nga mesi M, i segmentit dhe është pingul me të. Gjejmë fillimisht koordinatat e pikës M. Kemi:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1 \text{ dhe } y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4+2}{2} = 3 \Rightarrow M(1,3).$$

Gjejmë ekuacionin e drejtëzës që kalon nga pikat A dhe B. Kemi:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Rightarrow \frac{x+1}{3+1} = \frac{y-4}{2-4} \Rightarrow x + 2y - 7 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$m_{AB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_d = 2 \text{ (sepse } m_{AB} \cdot m_d = -1)$$

Ekuacioni i përmesores d të segmentit AB është:
$y - 3 = 2(x - 1)$ ose $y = 2x + 1$

13 Gjeni largesën e pikës A(6, 11) nga drejtëza d me ekuacion $y = -\frac{5}{12}x - \frac{7}{12}$.

Zgjidhje

Largesa e pikës A nga drejtëza d është segmenti AE, i pingules së hequr nga pika A në drejtëzën d (fig. 11.7).

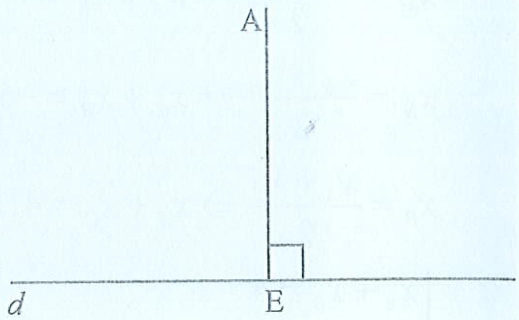


Fig. 11.7

Gjejmë fillimisht ekuacionin e drejtëzës AE. Kemi:

$$y - 11 = \frac{12}{5}(x - 6) \Rightarrow y = \frac{12}{5}x - \frac{17}{5}$$

Gjejmë tani koordinatat e pikës E. Kemi:

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{12}x - \frac{7}{12} \\ y = \frac{12}{5}x - \frac{17}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow E(1,-1)$$

Së fundi gjejmë largesën AE, kemi:

$$AE = \sqrt{(x_A - x_E)^2 + (y_A - y_E)^2} = \sqrt{(6-1)^2 + (11+1)^2} = \sqrt{169} = 13$$

14 Shkruani ekuacionin e drejtëzës që kalon nga pika M(4, −3) dhe formon me boshtet koordinative trekëndësh me syprinë 3 njësi katrore.

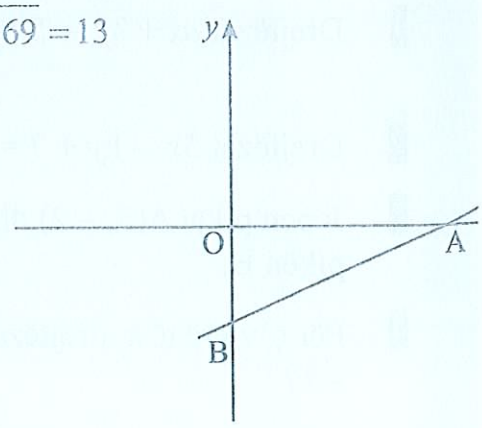


Fig. 11.8

Zgjidhje

Ekuacioni i drejtëzës së kërkuar AB është:
$y + 3 = m(x - 4) \Rightarrow y = mx - 4m - 3$ (fig. 11.8)

Gjejmë koordinatat e pikave A dhe B. Kemi:

$$x_A = 0 \Rightarrow y_A = -4m - 3 \Rightarrow A(0, -4m - 3)\ ; \quad y_B = 0 \Rightarrow x_B = \frac{4m+3}{m} \Rightarrow B(\frac{4m+3}{m}, 0)$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{4m+3}{m} \cdot (-4m - 3) = 3 \Rightarrow m_1 = -\frac{3}{2} \text{ ose } m_2 = -\frac{3}{8};$$

$$m_1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow AB: 3x+2y-6=0; \ m_2 = -\frac{3}{8} \Rightarrow AB: 3x+8y+12=0.$$

15 Jepen meset e brinjëve të trekëndëshit M (2, 4); N(−3, 0); P(2, 1). Gjeni koordinatat e kulmeve të tij (fig. 11.9).

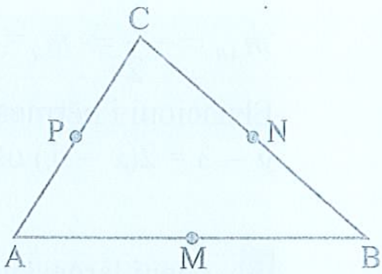


Fig. 11.9

Zgjidhje

Kemi:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_A + x_B = 4$$

$$x_N = \frac{x_C + x_B}{2} \Rightarrow x_C + x_B = -6$$

$$x_P = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_A + x_C = 4 \text{. Formojmë sistemin:}$$

$$\begin{cases} x_A + x_B = 4 \\ x_C + x_B = -6 \\ x_A + x_C = 4 \end{cases}$$

Duke mbledhur anë për anë këto ekuacione kemi:

$2(x_A + x_B + x_C) = 2 \Rightarrow x_A + x_B + x_C = 1 \Rightarrow x_A = 7; \quad x_B = -3; \ x_C = -3.$

Në mënyrë analoge gjejmë $y_A = 5; \quad y_B = 3; \ y_C = -3.$

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Drejtëzat $ax + 3y - 5 = 0$ dhe $2x - by + 7 = 0$ janë paralele. Gjeni $a \cdot b$.
P. [$a \cdot b = -6$]

2 Drejtëzat $5x - ky + 7 = 0$ dhe $3x + y - 6 = 0$ janë pingule. Gjeni k. P. [$k = 15$]

3 Jepen pikat A(3, −2) dhe B(−4, 3). Gjeni pikën simetrike e pikës A në lidhje me pikën B.
P. [(-11, 8)]

4 Për ç'vlerë të k, drejtëzat $y = -3x + 2$ dhe $y = kx + 7$ priten në një pikë me abshisë −1?
P. [$k = 2$]

5 Shkruani ekuacionin e drejtëzës, e cila kalon nga pika M(−1, −2) dhe është:

a paralele me drejtëzën $2x - y - 1 = 0$;

b pingule me drejtëzën $3x + 2y + 5 = 0$;

c paralele me boshtin e abshisave.

P. [a) $2x - y = 0$; b) $2x - 3y - 4 = 0$; c) $y = -2$]

6 Pika P(3, k) ndodhet në drejtëzën që kalon nga pikat Q(0, 2) dhe R(−1, 1). Gjeni k.

P. [$k = 5$]

7 Pikat $(4u - 3, v)$ dhe $(-u - 3, v)$ janë simetrike në lidhje me origjinën e koordinatave. Gjeni (u, v).

P. [(2, 5)]

8 Jepen pikat A(−3, 2); B(1, −2) dhe M(4, 3). Gjeni:

a Projeksionin E të pikës M në drejtëzën AB.

b Simetriken N të pikës M në lidhje me AB.

P. [a E(0, -1); b) N(-4, -5)]

9 Jepen pikat A(−1, 2) dhe B(3, 6).

a Shkruani ekuacionin e drejtëzës AB.

b Shkruani ekuacionin e përmesores së segmentit AB.

c Në këtë përmesore gjeni pikën P me abshisë pozitive, të tillë që PA = 4 njësi.

P. [a) $x - y + 3 = 0$; b) $x + y - 5 = 0$; c) P(3, 2)]

10 Gjeni këndin që formon me boshtin e abshisave drejtëza që kalon nga pikat M(−3, 1) dhe N(2, −4). P. [135°]

11 Jepet drejtëza $2x - 5y + 10 = 0$.

a Gjeni pikat e prerjes së saj përkatësisht A me boshtin e abshisave dhe B me boshtin e ordinatave.

b Gjeni syprinën e trekëndëshit OAB.

c Shkruani ekuacionet e drejtëzave që kalojnë nga pikat A dhe B dhe janë pingule me drejtëzën e dhënë.

P. [a) (−5, 0); (0, 2); b) 5 njësi katrore; c) $5x + 2y + 25 = 0$; $5x + 2y - 4 = 0$]

12 Jepen drejtëzat d_1: $2x - 3y - 8 = 0$ dhe d_2: $x + 2y + 3 = 0$. Shkruani ekuacionin e drejtëzës d_3, e cila kalon nga pikëprerja e drejtëzave d_1 dhe d_2 dhe nga origjina e koordinatave.

P. [$y = -2x$]

13 Brinjët e trekëndëshit kanë ekuacione $y = 5x - 1$; $2x - 3y + 6 = 0$ dhe $3x + 2y - 2 = 0$. Gjeni këndet e tij. P. [45°; 45°; 90°]

14 Jepet trekëndëshi me kulme A(2, 3); B(4, −1) dhe C(−2, −3). Shkruani ekuacionin e drejtëzës që kalon nga meset e brinjëve AB dhe AC të tij. P. [$x + y - 4 = 0$]

15 Projeksioni i pikës P(−8, 12) në drejtëzën AB është Q(−12, 5). Shkruani ekuacionin e drejtëzës AB. P. [$4x + 7y + 13 = 0$]

16 Për ç'vlerë të k, vijat $y = x^2$ dhe $y = x - 2k$ kanë:

a dy pika të përbashkëta; b një pikë të përbashkët;

c asnjë pikë të përbashkët.

P. [a) $k < \frac{1}{8}$ b) $k = \frac{1}{8}$ c) $k > \frac{1}{8}$]

17 Vijat $y = x^2$; $y = 2x - 1$ dhe $y = kx + 3$ kalojnë nga e njëjta pikë. Gjeni k.

P. [$k = -2$]

18 Në paralelogramin ABCD jepen A(2, −3); B(−2, −2); C(−1, 3). Gjeni koordinatat e kulmit D të kundërt me B. P. [D(3, 2)]

19 Cila është pika e drejtëzës $y = x$ më afër me pikën (6, 2)? P. [(4, 4)]

20 Gjeni bashkësinë e pikave të baraslarguara nga pikat A(−1, 4) dhe B(3, 2).

P. [$2x - y + 1 = 0$]

KREU 12

VEKTORËT

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(\overrightarrow{-b})$

$\vec{a}=k\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}//\vec{b}$ dhe $|\vec{a}|=|k|\cdot|\vec{b}|$

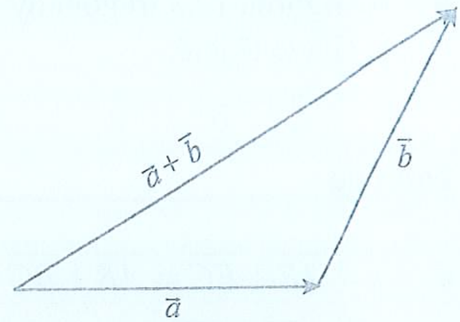


Fig. 12.1

Vektori njësi $\vec{a}_1=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$.

Koordinatat e vektorit

$$A(x_1, y_1);\ B(x_2, y_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}$$

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Prodhimi i vektorit me numër

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow k\vec{a}=\begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{pmatrix}$$

Moduli i vektorit

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

Shuma dhe ndryshesa e vektorëve

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ dhe } \vec{b}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}\pm\vec{b}=\begin{pmatrix} x_1\pm x_2 \\ y_1\pm y_2 \end{pmatrix}$$

Kushti i paralelizmit të vektorëve

$$\vec{a}//\vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$$

Ushtrime të zgjidhura

1 Pika N është mes i segmentit EF. Shkruani dy barazime vektoriale që rrjedhin nga ky fakt.

Zgjidhje

Nga figura 12.2 mund të shkruajmë:

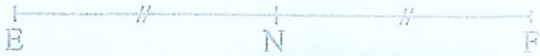


Fig. 12.2

a $\overrightarrow{EN}=\overrightarrow{NF}$ b $\overrightarrow{NE}=\overrightarrow{FN}$.

2 Në figurën 12.3 tregoni dy vektorë, shuma e të cilave të jetë:

a $\vec{x}$ b $\vec{y}$ c $\overrightarrow{AD}$

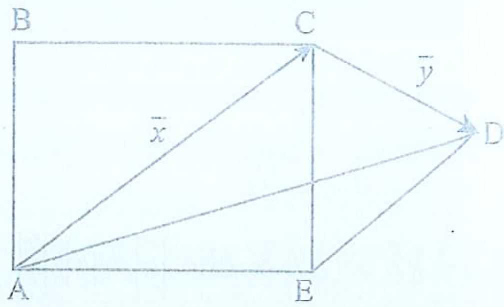


Fig. 12.3

Zgjidhje

a $\vec{x}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

b $\vec{y}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{ED}$

c $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$

3 Jepet katërkëndëshi ABCD (fig. 12.4).

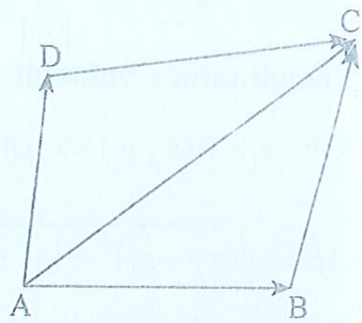


Fig. 12.4

Vërtetoni që $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$.

Vërtetim

Kemi: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ dhe $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AC}$. Pra, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$.

4 Diagonalet e paralelogramit ABCD priten në pikën O (fig. 12.5). Gjeni shumat:

a $\overrightarrow{DO}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})$ b $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OA}$

c $(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OA})+\overrightarrow{DO}$.

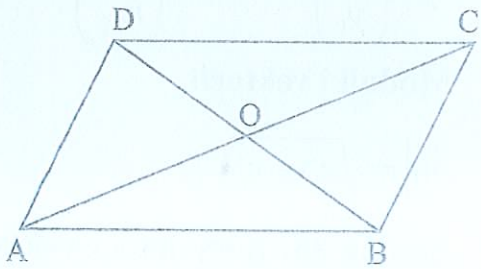


Fig. 12.5

Zgjidhje

a Kemi $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$, prandaj

$\overrightarrow{DO}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DB}$.

b Kemi $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CO}$, prandaj $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{BO}$.

c $(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OA})+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{DO}=\vec{O}$, sepse vektorët $\overrightarrow{BO}$ dhe $\overrightarrow{DO}$ janë të kundërt.

5 Pikat M, N, P e ndajnë rrethin me qendër O në tri pjesë të barabarta (fig. 12.6). Shënohet me K mesi i harkut MN.

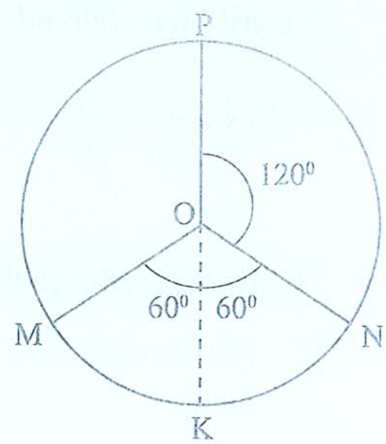


Fig. 12.6

a Vërtetoni që $\overrightarrow{OK}=-\overrightarrow{OP}$.

b Gjeni shumën $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}$.

Zgjidhje

a Kemi $\angle POK = \angle POM + \angle MOK = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

Pikat P, O, K shtrihen në një drejtëz dhe OP = OK, prandaj $\overrightarrow{OK} = -\overrightarrow{OP}$

b Kemi $\angle MON = 120^\circ$, prandaj $\angle MOK = \angle KON = 60^\circ$. Trekëndëshat dybrinjënjëshëm OMK, OKN kanë këndin në kulm nga 60°, prandaj ata janë barabrinjës. Katërkëndëshi OMKN i ka të katër brinjët të barabartë, prandaj është romb. Sipas rregullit të paralelogramit kemi $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$.

6 Në figurën 12.7 është dhënë paralelogrami ABCD dhe është hequr drejtëza (CE)||(BD). Vërtetoni që:

a $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

b $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE}$

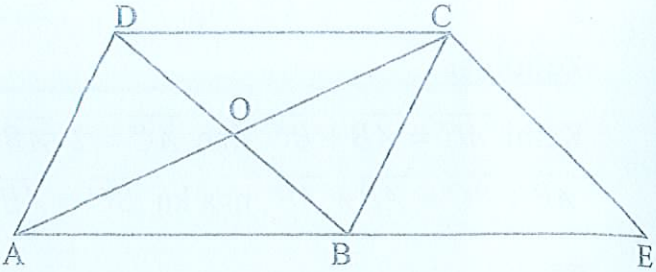


Fig. 12.7

Zgjidhje

a Katërkëndëshi BDCE është paralelogram, sepse i ka brinjët e kundërta dy nga dy paralele. Prandaj $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CE}$ dhe $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$.
Kemi $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BE}$, prandaj $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$. Pra, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

b $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$. Pra,
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE}$.

7 Për ç'vlera të k vektori $\vec{b} = k\vec{a} + \vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{o})$ është:

a i barabartë me $\vec{a}$; b me drejtim të kundërt me $\vec{a}$.

Zgjidhje

Kemi $\vec{b} = (k+1) \cdot \vec{a}$.

a $(k+1) \cdot \vec{a} = \vec{a} \Rightarrow k+1 = 1 \Rightarrow k = 0$

b $k+1 < 0 \Rightarrow k < -1$

8 Në trekëndëshin AB pika M është mesi i brinjës AB (fig. 12.8). Vërtetoni që $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$.

Vërtetim

Figura 12.8.

Kemi: $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$ dhe $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM}$. Mbledhim anë për anë këta dy barazime.

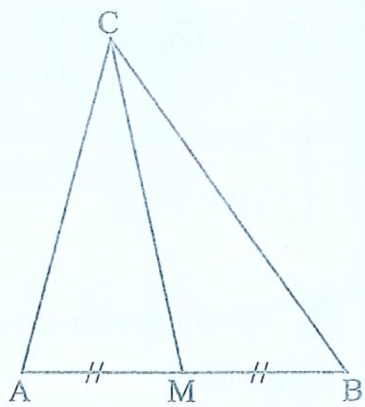


Fig. 12.8

$\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CM}=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}) \Rightarrow 2\cdot\overrightarrow{CM}=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM})$. Për vektorët $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}$ janë vektorë të kundërt (pse?), prandaj $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{O}$. Kështu,

$2\cdot\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$, që nga $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$.

9 Jepet $\overrightarrow{AC}=2\cdot\overrightarrow{AB}$ (fig. 12.9). Vërtetoni që $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.

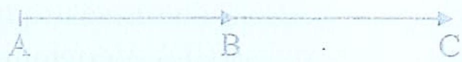


Fig. 12.9

Zgjidhje:

Kemi $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ dhe $\overrightarrow{AC}=2\cdot\overrightarrow{AB}$. Marrim

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$, nga ku $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$.

10 Në planin koordinativ janë dhënë pikat A(2, 1), B(−3, 4) dhe C(2, 5).

a Gjeni koordinatat e vektorëve $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$.

b Shprehni këta vektorë me anën e vektorëve njësi $\vec{i}, \vec{j}$.

Zgjidhje

a $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-3-2\\4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}2-(-3)\\5-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

b $\overrightarrow{AB}=-5\vec{i}+3\vec{j}$; $\overrightarrow{BC}=5\vec{i}+\vec{j}$.

11 Jepen pikat A(3, 5) dhe B(−2, 4). Gjeni pikën M(x; y), të tillë që

$\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Zgjidhje

$\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}x-3\\y-5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{MB}=\begin{pmatrix}-2-x\\4-y\end{pmatrix} \Rightarrow 3\overrightarrow{MB}=\begin{pmatrix}-6-3x\\12-3y\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{MB}=\begin{pmatrix}-2x-9\\-2y+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{cases}-2x-9=0\\-2y+7=0\end{cases}$, që nga $x=-\frac{9}{2}; y=\frac{7}{2}$. Pra, $M(-\frac{9}{2},\frac{7}{2})$.

12 Gjeni koordinatat e pikës M, nëse $\overrightarrow{NM}=\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$ dhe N (2, −4).

Zgjidhje

Shënojmë M (x, y). Atëherë $\overrightarrow{NM}=\begin{pmatrix}x-2\\y-(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2\\y+4\end{pmatrix}$. Por $\overrightarrow{NM}=\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$, prandaj kemi $\begin{cases} x-2=-1 \\ y+4=-5 \end{cases}$, që nga $\begin{cases} x=1 \\ y=-9 \end{cases}$.

13 Në planin koordinativ janë dhënë pikat A(2; 1), B(−5; 3). Gjeni pikën M të tillë që $\overrightarrow{AM}=2\cdot\overrightarrow{BM}$.

Zgjidhje

Shënojmë M(*x*, *y*). Kemi $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$ dhe $\overrightarrow{BM}=\begin{pmatrix} x+5 \\ y-3 \end{pmatrix}$, prandaj

$2\cdot\overrightarrow{BM}=\begin{pmatrix} 2x+10 \\ 2y-6 \end{pmatrix}$. Nga barazimi $\overrightarrow{AM}=2\cdot\overrightarrow{BM}$, $\Rightarrow \begin{cases} x-2=2x+10 \\ y-1=2y-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-12 \\ y=5 \end{cases}$.

14 Në trekëndëshin ABC, pikat M, N janë përkatësisht meset e brinjëve AC, BC (fig. 12.10).Vërtetoni që $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

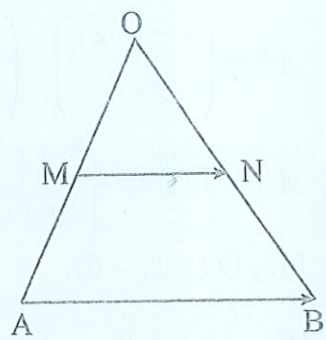


Fig. 12.10

Zgjidhje

Kemi $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ dhe $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. Në trekëndëshin CMN kemi:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Kjo tregon që (MN)||(AB) dhe MN = $\frac{1}{2}$AB

(Veti të njohura të vijës së mesme të trekëndëshit).

15 Në katërkëndëshin ABCD, pikat E dhe F janë përkatësisht meset e brinjëve AB dhe CD (fig. 12.11). Jepen $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$ dhe $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Tregoni që $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$.

Zgjidhje

Në katërkëndëshin EADF kemi:

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}$.

Në katërkëndëshin EBCF kemi:

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}$. Duke mbledhur anë për anë këto barazime kemi:

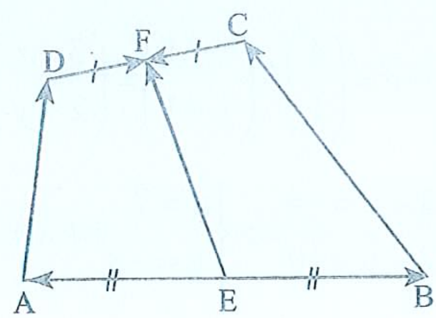


Fig. 12.11

$2\overrightarrow{EF}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB})+(\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CF})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$. Por

$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$ dhe $\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$ (sepse janë vektorë të kundërt), prandaj

$2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$ nga ku

$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

16 Jepen koordinatat e tri kulmeve të paralelogramit ABCD A(−2, 1); B(4, 3); C(5, −4). Gjeni koordinatat e kulmit të katërt D, i cili ndodhet përballë B.

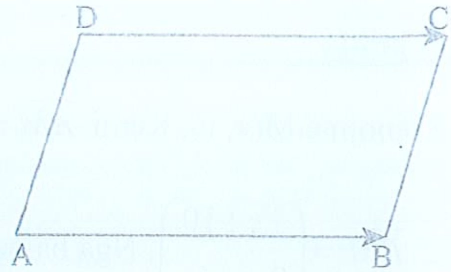


Fig. 12.12

Zgjidhje

Në figurën 12.12 është paraqitur paralelogrami ABCD.

Shënojmë D $(x; y)$. Kemi:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-(-2) \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 5-x \\ -4-y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} 5-x=6 \\ -4-y=2 \end{cases} \text{ nga ku } x=-1; y=-6.$$

Pra, D $(-1; -6)$.

17 Vërtetoni se pikat A(2, 1), B(4, 3), C(1, 0) ndodhen në një drejtëz.

Zgjidhje

Kemi $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dhe $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Vëmë re se $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$, që tregon se A, B dhe C pikat janë në një drejtëz.

18 Jepet $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$ dhe $\vec{a} - \vec{c} = 2\vec{b}$. Gjeni $x+y$.

Zgjidhje

$\vec{a} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-x \\ 2-y \end{pmatrix}$. Nga kushti $\begin{pmatrix} 3-x \\ 2-y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3-x=-4 \\ 2-y=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-8 \end{cases} \Rightarrow x+y=-1$$

19 Kulmet e katërkëndëshit ABCD (fig. 12.13) kanë për rrezevektorë:

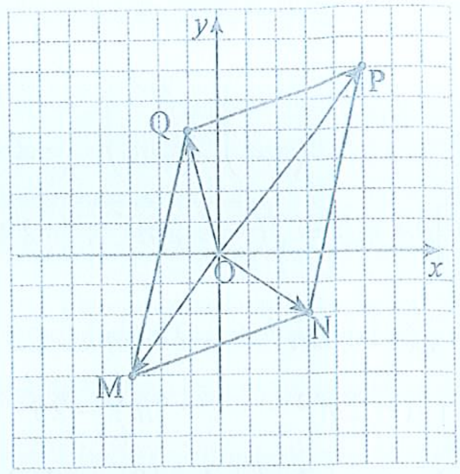


Fig. 12.13

M: $\vec{m}=\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$ N: $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ P: $\vec{p}=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

Q: $\vec{q}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$.

Tregoni që katërkëndëshi MNPQ është paralelogram.

Zgjidhje

Gjejmë koordinatat e vektorëve që janë brinjë të katërkëndëshit të dhënë.

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{ON}=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix}$$

Vëmë re se $\overrightarrow{MN}//\overrightarrow{PQ}$, sepse koordinatat e tyre janë të përpjesshme. $(\frac{6}{-6}=\frac{2}{-2})$.

Gjithashtu $\overrightarrow{NP}//\overrightarrow{QM}$, sepse koordinatat e tyre janë të përpjesshme: $(\frac{2}{-2}=\frac{8}{-8})$

Në këtë mënyrë, katërkëndëshi MNPQ është paralelogram.

20 Jepen vektorët $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ dhe $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Gjeni vlerën pozitive të m, për të cilën $|\vec{a}+m\vec{b}|=5$.

Zgjidhje

$$\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\Rightarrow m\vec{b}=\begin{pmatrix}2m\\3m\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}+m\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2m\\3m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2m\\-2+3m\end{pmatrix}$$

$\left|\vec{a}+m\vec{b}\right|=\sqrt{(-1+2m)^2+(-2+3m)^2}$. Nga kushti:

$\sqrt{(-1+2m)^2+(-2+3m)^2}=5$. Duke ngritur të dy anët në katror kemi:

$(-1+2m)^2+(-2+3m)^2=25$

$1-4m+4m^2+4-12m+9m^2=25$

$13m^2-16m-20=0.$

Duke zgjidhur këtë ekuacion gjejmë $m_1=-\frac{5}{13}$ dhe $m_2=2$.

Për kushtet e problemit pranohet $m=2$.

21 Rrezevektorët e pikave M dhe N janë $\vec{m}=3\vec{i}+7\vec{j}$ dhe $\vec{n}=-6\vec{i}-5\vec{j}$.

Gjeni:

a largesat e pikave M dhe N nga origjina e koordinatave;

b largesën ndërmjet pikave M dhe N.

Zgjidhje

$$OM=\left|\vec{m}\right|=\sqrt{3^2+7^2}=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$$

$$ON=\left|\vec{n}\right|=\sqrt{(-6)^2+(-5)^2}=\sqrt{36+25}=\sqrt{61}$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=(-6\vec{i}-5\vec{j})-(3\vec{i}+7\vec{j})=-9\vec{i}-12\vec{j}$$

$$MN=\sqrt{9^2+12^2}=\sqrt{81+144}=\sqrt{225}=15$$

22 Jepet $\begin{cases}2\vec{a}+3\vec{b}=14\vec{i}+11\vec{j}\\ \vec{a}-4\vec{b}=-4\vec{i}-22\vec{j}\end{cases}$ ku $\vec{i}$ dhe $\vec{j}$ janë vektorë njësi. Duke zgjidhur sistemin:

a Shprehni vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ me anën e vektorëve njësi $\vec{i}$ dhe $\vec{j}$.

b Gjeni gjatësitë e vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$.

Zgjidhje

$$\begin{cases} 2\vec{a}+3\vec{b}=14\vec{i}+11\vec{j} \\ \vec{a}-4\vec{b}=-4\vec{i}-22\vec{j} \end{cases}$$

Duke shumëzuar ekuacionin e dytë me 2 kemi:

$$\begin{cases} 2\vec{a}+3\vec{b}=14\vec{i}+11\vec{j} \\ 2\vec{a}-8\vec{b}=-8\vec{i}-44\vec{j} \end{cases}$$

Zbresim nga ekuacioni i parë, ekuacionin e dytë:

$3\vec{b}+8\vec{b}=14\vec{i}+11\vec{j}+8\vec{i}+44\vec{j} \Rightarrow 11\vec{b}=22\vec{i}+55\vec{j}$ nga ku: $\vec{b}=2\vec{i}+5\vec{j}$.

Nga ekuacioni i dytë kemi:

$$\vec{a}=4\vec{b}-4\vec{i}-22\vec{j}=4(2\vec{i}+5\vec{j})-4\vec{i}-22\vec{j}=8\vec{i}+20\vec{j}-4\vec{i}-22\vec{j}=4\vec{i}-2\vec{j}$$

b $\vec{a}=4\vec{i}-2\vec{j} \Rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\vec{b}=2\vec{i}+5\vec{j} \Rightarrow |\vec{b}|=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Në drejtëzën d janë marrë pikat A, B, C (B ndërmjet A dhe C) të tilla që AB = 2 cm dhe BC = 3 cm. Gjeni numrin k të tillë që:

a $\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$ b $\overrightarrow{BC}=k\cdot\overrightarrow{BA}$ P. [a) $k=\frac{5}{3}$; b) $k=-\frac{3}{2}$]

2 Në trapezin ABCD (AB//CD) jepen AB = 7 cm, CD = 4 cm. Për ç'vlera të k janë të vërteta barazimet:

a $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{DC}$ b $\overrightarrow{CD}=k\cdot\overrightarrow{AB}$? P. [a) $k=\frac{7}{4}$; b) $k=-\frac{4}{7}$]

3 Jepen pikat A(2; 3), B(0; 1), C(−4; −3). Tregoni që vektorët $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{AC}$ janë bashkëvizorë.

4 Jepen pikat A(3; 6) dhe B (−2; 4). Gjeni x, në mënyrë që pika M(x; 0) të ndodhet në drejtëzën AB. P. [$x=-12$]

5 Në gjashtëkëndëshin e rregullt ABCDEF shënojmë $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ dhe $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$. Shprehni vektorët $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ me anë të vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$.

6 Në trapezin ABCD, baza AB është 2 herë më e madhe se baza DC. Shprehni vektorët $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$ nëpërmjet vektorëve $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ dhe $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

P. $[\overrightarrow{DC} = \vec{a} - \vec{b};\ \overrightarrow{AC} = 2\vec{a} - \vec{b};\ \overrightarrow{DB} = \vec{a} - 2\vec{b}]$

7 Pikat A, B, C dhe D ndodhen në një drejtëz dhe

$2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC} = 6\overrightarrow{CD}$ dhe $\overrightarrow{AD} = k \cdot \overrightarrow{CD}$. Gjeni k. P. $[k = 6]$

8 Në figurën 12.14 jepet $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ dhe $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{DC}$. Shprehni $\overrightarrow{AD}$ me anën e $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$.

P. $[\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}(\vec{a} + 3\vec{b})]$

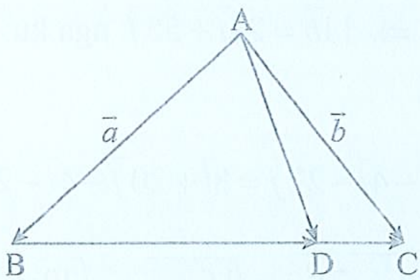


Fig. 12.14

9 Jepen pikat A(3, −1) dhe B(1, 3). Gjeni koordinatat e pikës $M(x, y)$ të tillë që $\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{BM}$ P. $[M(\frac{5}{3}, \frac{5}{3})]$

10 Jepet $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2a+3 \\ 2b+a \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2a+c \\ a+8 \end{pmatrix}$; $\vec{t} = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$ dhe $\vec{u} = \vec{v}$. Gjeni $|\vec{t}|$. P. $[|\vec{t}| = 5]$

11 Jepet $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dhe $\vec{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ ku $\vec{c} = m\vec{a} - n\vec{b}$. Gjeni $m \cdot n$. P. $[m \cdot n = 12]$

12 Jepet $\begin{cases} 3\vec{a} + 5\vec{b} = 2\vec{i} - 9\vec{j} \\ 7\vec{a} - \vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} \end{cases}$. Gjeni $|5\vec{a} + 2\vec{b}|$. P. [5]

13 Jepen vektorët $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dhe $2\vec{a} + k\vec{b} = \vec{c}$. Gjeni k. P. $[k = 3]$

14 Jepet $3\vec{i} + \vec{j} = a(\vec{i} - 3\vec{j}) + b(3\vec{i} + \vec{j})$. Gjeni $a + b$. P. $[a + b = 1]$

15 Jepen vektorët $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ dhe $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$.

a Gjeni $3\vec{u} - \vec{v}$.

b Gjeni $|3\vec{u} - \vec{v}|$. P. [b) 5]

16 Jepen vektorët $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ dhe $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

a Shkruani vektorin njësi, i cili ka drejtimin e vektorit $\overrightarrow{OA}$.

b Gjeni koordinatat dhe gjatësinë e vektorit $\overrightarrow{AB}$.

P. [a $\begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{12}{13} \end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$; 5]

17 Provoni se katërkëndëshi me kulme A(2, 5); B(4, 1); C(0, 1) dhe D(–2, 3) është romb.

18 $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ x \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}$ është vektor njësi. Gjeni x me kushtin që $x < 0$.

P. [$x = -\frac{3}{7}$]

19 Vërtetoni se katërkëndëshi me kulme A(2, 2); B(–1, 6); C(–5, 3) dhe D(–2, –1) është katror.

KREU 13

DERIVATET

Derivat i funksionit f në pikën a quhet limiti $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ai shënohet $f'(a)$.

Tabela e derivateve

$(c)' = 0$

$(ax + b)' = a$

$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Rregullat e derivimit

$(cf)' = c f'$

$(f \pm g)' = f' + g'$

Nëse vlerat e një madhësie y lidhen me vlerat e madhësisë x me relacionin funksional $y = f(x)$, atëherë shpejtësia e ndryshimit të madhësisë y, me rritjen e x, në çastin kur $x = a$, jepet nga derivati i y në lidhje me x në pikën a.

- Nëse pika materiale kryen lëvizje drejtvizore sipas ligjit $x = x(t)$, atëherë shpejtësia e saj në çastin a, është sa derivati i x (zhvendosjes) në lidhje me kohën (t) në pikën a.

- Nëse funksioni f ka derivat në pikën x, atëherë për h mjaft afër zeros mund të shkruajmë afërsisht: $f(x + h) \approx f(x) + h \cdot f'(x)$

Ekuacioni i tangjentes ndaj grafikut të funksionit $y = f(x)$ në pikën $(a, f(a))$ është $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Ushtrime të zgjidhura

1 Gjeni derivatin në pikën x dhe pastaj në pikën 4 për funksionin:

a $y = x^2 + 2\sqrt{x} - 4$ b $y = \dfrac{1}{x} + x^2 - \sqrt{x}$ c $y = c + x + x^2 + x^3$

d $y = 3c + x^3 - \sqrt{x}$ e $y = c + 3x - \sqrt{x}$

Zgjidhje

b $$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' + \left(x^2\right)' - \left(\sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} + 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2 Gjeni vlerat e x për të cilat $f'(x) = 0$ nëse f është:

a $y = x^3 - 2x$ b $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ c $y = x^4 + 4x^3 - 8x^3 - 8x^2 - 5$.

Zgjidhje

b Kemi $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$; $12x(x^2 - x - 2) = 0$, d.m.th., ($12x = 0$ ose $x^2 - x - 2 = 0$).
Rrënjët janë $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$.

c Kemi $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x$; $4x(x^2 - 3x - 4) = 0$. Rrënjët janë $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 4$.

3 Gjeni derivatin e funksioneve të mëposhtëm.

a $y = \dfrac{1}{x^5}$ b $y = \sqrt{x^3}$ c $y = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{x}}$.

Zgjidhje

a Shkruajmë $y = \dfrac{1}{x^5} = x^{-5}$; $y' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = \dfrac{-5}{x^6}$

b Shkruajmë $y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$; $y' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$.

4 Gjeni me rrugën më të thjeshtë derivatin e funksionit $y = (2x + \sqrt{x})(1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}})$

a në pikën x ($x > 0$) b në pikën $x = 4$

Zgjidhje

Funksioni shkruhet $y = (2x + \sqrt{x})(1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}) = 2x + \sqrt{x} - 4\sqrt{x} - 2 = 2x - 3\sqrt{x} - 2$

a $y' = 2 - \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$ b $y'(4) = 2 - \dfrac{3}{2\sqrt{4}} = 2 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{4}$

5 Një pikë materiale kryen lëvizje drejtvizore në boshtin Ox sipas ligjit $x(t) = t^2 + b \cdot t + c$ (x matet në metra, t në sekonda).

a Gjeni b, c duke ditur që në çastin $t = 5$ sek., abshisa ka qenë 100 m dhe shpejtësia $v = 20$ m/s.

b Në cilin çast shpejtësia ka qenë zero?

Zgjidhje

a Kemi $v(t) = 2t + b$ sepse $v(t) = x'(t)$
Nga kushti, $x(5) = 100$ dhe $v(5) = 20$ kemi:

$$\begin{cases} 5^2 + b \cdot 5 + c = 100 \\ 2 \cdot 5 + b = 20 \end{cases}$$ që nga $b = 10$, $c = 25$.

6 Gjeni koeficientin këndor të tangjentes ndaj vijës $y = x^2 + x - 6$ në pikat ku ajo pret

a Boshtin Oy; b Boshtin Ox.

Zgjidhje

a Pika e prerjes së vijës $y = x^2 + x - 6$ me boshtin Oy gjendet duke zgjidhur sistemin

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^2 + x - 6 \end{cases}.$$

Ajo është A(0; −6). Kemi $f'(x) = 2x + 1$; $f'(0) = 1$.
Ekuacioni i tangjentes në pikën A është:
$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$ d.m.th., $y + 6 = 1(x - 0)$ ose $y - x + 6 = 0$.

b Pika e prerjes së vijës me boshtin Ox gjendet duke zgjidhur sistemin

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 + x - 6 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x = -3 \text{ ose } x = 2).$$

Kemi pra dy pika të tilla B (−3; 0) C (2; 0).
Ekuacioni i tangjentes në pikën B është $y - f(-3) = f'(-3) \cdot (x + 3)$.
Por, $f(-3) = 0$ dhe $f'(-3) = -5$.
Ekuacioni shkruhet $y - 0 = -5(x + 3) \Rightarrow 5x + y + 15 = 0$.
Ekuacioni i tangjentes në pikën C shkruhet $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$.
Por, $f(2) = 0$ dhe $f'(2) = 5$.
Ekuacioni është $y - 0 = 5(x - 2) \Rightarrow 5x - y - 10 = 0$.

7 Në cilën pikë tangjentet ndaj vijave $y = x^2$ dhe $y = x^3$ përputhen?

Zgjidhje

Për funksionin f: $y = x^2$ kemi $f'(x) = 2x$. Për funksionin g: $y = x^3$ kemi $g'(x) = 3x^2$.
Le të jetë $M_0(x_0, y_0)$ pika ku tangjentet përputhen.
Së pari, kjo pikë është e përbashkët për të dy vijat, prandaj

$$\begin{cases} y_0 = x_0^2 \\ y_0 = x_0^3 \end{cases} \Rightarrow x_0^2 = x_0^3 \text{ d.m.th., } x_0=0 \text{ ose } x_0=1.$$

Së dyti, tangjentet ndaj vijave në këtë pikë kanë të njëjtin koeficient këndor, d.m.th., $f'(x_0) = g'(x_0)$ pra $2x_0 = 3x_0^2$.
Barazimin e fundit e vërteton vetëm $x_0 = 0$ (dhe jo $x_0 = -1$).
Pika e kërkuar është O (0; 0).

8 Jepet parabola $y = \frac{1}{2}x^2 + x$.

a Gjeni pikat e prerjes së saj me boshtin e abshisave.
b Gjeni ekuacionet e tangjenteve ndaj parabolës në këto pika.
c Tregoni se këto dy tangjente janë pingule ndërmjet tyre.

Zgjidhje

a Pikat e prerjes me boshtin e abshisave janë zgjidhje të sistemit të ekuacioneve:

$$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}x^2+x \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2+x=0 \Rightarrow -x^2+2x=0 \Rightarrow x(-x+2)=0 \Rightarrow x=0 \text{ ose } x=2$$

Pikat e prerjes janë (0,0) dhe B(2,0).

b Gjejmë derivatin e funksionit $y=-\frac{1}{2}x^2+x$. Kemi:

$y'=-\frac{1}{2}\cdot 2x+1 \Rightarrow y=-x+1$

Në pikën A: $f'(0)=0+1=1$, pra $k_1=1$

Në pikën B: $f'(2)=-2+1=-1$, pra $k_2=-1$.

Ekuacioni i tangjentes në një pikë të vijës ka trajtën $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

Në pikën A(0,0) ekuacioni i tangjentes është:

$y-0=1(x-0)$ ose $y=x$.

Në pikën B ekuacioni i tangjentes është:

$y-0=-1(x-2)$ ose $y=-x+2$.

c Koeficientët këndorë të tangjenteve janë $k_1=1$ dhe $k_2=-1$.

Vemë re se $k_1\cdot k_2=-1$ gjë që tregon se tangjentet janë pingule ndërmjet tyre.

9 Për ç'vlera të a grafiku i funksionit $y=\dfrac{ax-x^2}{4}$ e pret boshtin Ox nën këndin 45°?

Zgjidhje

Pikat e prerjes së grafikut me boshtin Ox i gjejmë duke zgjidhur sistemin:

$$\begin{cases} y=\dfrac{ax-x^2}{4} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow (ax-x^2)=0 \text{ d.m.th., } (x=0 \text{ ose } x=a).$$

Ato janë O (0, 0); A(a, 0).

Meqenëse $f'(x)=\dfrac{a-2x}{4}$, koeficientet këndore të tangjenteve në këto pika janë:

$k_O=f'(0)=\dfrac{a}{4}$. $\quad k_A=f'(a)=-\dfrac{a}{4}$.

Kërkojmë që ndonjëri nga këto koeficiente këndore të jetë sa tg45° = 1.

Pra, $\dfrac{a}{4}=1$ ose $\dfrac{a}{4}=-1$ d.m.th., $a=4$ ose $a=-4$.

10 Për ç'vlera të a dhe b drejtëza $y=7x-2$ është tangjente me grafikun e funksionit $y=ax^2+bx+1$ në pikën A(1; 5)?

Zgjidhje

Kemi $f'(x)=2ax+b$

Së pari, grafiku i funksionit $y=ax^2+bx+1$ duhet të kalojë nëpër pikën A(1; 5) d.m.th.,

$5 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1$.

Së dyti, koeficienti këndor i tangjentes ndaj grafikut në këtë pikë (d.m.th., $f'(1) = 2a + b$ duhet të jetë sa koeficienti këndor i drejtëzës (d.m.th., = 7).

Nga sistemi $\begin{cases} 5 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1 \\ 2a + b = 7 \end{cases}$ gjejmë $a = 3$; $b = 1$.

11 Jepet funksioni $y = mx^3 + nx + p$.
Gjeni m, n dhe p duke ditur se:

a Grafiku i tij kalon nga pika A(1,0)

b Në pikën më abshisë –1 funksioni ka tangjente paralele me boshtin Ox.

c Në pikën me abshisë 2 funksioni ka tangjente pingule me drejtëzën d_1: $x + 9y = 0$

Zgjidhje

a Koordinatat e pikës A vërtetojnë ekuacionin e vijës. Kemi

$0 = m + n + p$ (1)

b

$y' = 3mx^2 + n$

$y'(-1) = 3m + n$. Nga kushti

$3m + n = 0$ (2) (Sepse tangjentja është paralele me boshtin Ox)

$y'(2) = 12m + n$. Nga kushti:

$12m + n = 9$ (3) (Sepse tangjentja është pingule me drejtëzën $x + 9y = 0$ (ose $y = -\frac{1}{9}x$)

Më ekuacionet (1); (2); dhe (3) formojmë sistemin:

$\begin{cases} m + n + p = 0 \\ 3m + n = 0 \\ 12m + n = 9 \end{cases}$. Zgjidhja e tij është $m = 1$; $n = -3$ dhe $p = 2$

12 Vërtetoni që për çdo vlerë të a ekziston tangjentja ndaj grafikut të funksionit $y = x^2 - ax$, e cila është pingule me drejtëzën $y = -x$.

Zgjidhje

Kemi $f'(x) = 2x - a$ (Ky është koeficienti këndor i tangjentes në pikën me abshisë x). Koeficienti këndor i drejtëzës $y = -x$ është –1. Për çdo vlerë të a ekziston një vlerë e x për të cilën $k_t \cdot k_d = -1$ (ku tangjentja është pingule me drejtëzën). Kjo vlerë e x gjendet nga barazimi:

$f'(x) \cdot (-1) = (-1)$ d.m.th., $2x - a = 1 \Rightarrow x = \frac{a+1}{2}$.

13 Drejtëza (d) është tangjente ndaj hiperbolës $y = \frac{4}{x}$ në pikën me abshisë 1. Gjeni syprinën e trekëndëshit të kufizuar nga kjo drejtëz dhe nga boshtet koordinative.

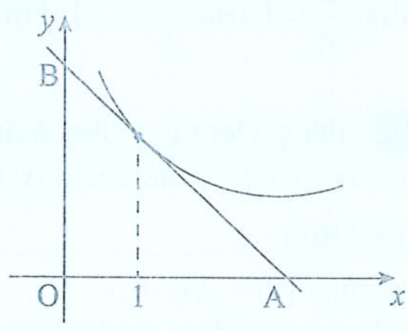


Fig. 13.1

Zgjidhje

Shkruajmë ekuacionin e tangjentes së vijës $y=\frac{4}{x}$ në pikën me abshisë $x = 1$. Kemi $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$ dhe $f'(1) = -4$; $f(1) = \frac{4}{1} = 4$.

Ekuacioni është $y - 4 = -4(x - 1)$ d.m.th., $4x + y - 8 = 0$. Gjejmë pikat ku kjo tangjente pret boshtet koordinatave.

$$A:\begin{cases} y=0 \\ 4x+y-8=0 \end{cases} \qquad A\ (2;\ 0)$$

$$B:\begin{cases} x=0 \\ 4x+y-8=0 \end{cases} \qquad B\ (0;\ 8)$$

Syprina e trekëndëshit OAB është $S=\frac{OA\cdot OB}{2}=\frac{x_A\cdot y_B}{2}=\frac{2\cdot 8}{2}=8.$

14 Gjeni ekuacionin e tangjentes ndaj grafikut të funksionit f, duke ditur që kjo tangjente kalon nëpër pikën M, kur:

a $\quad f\colon y=\frac{1}{x} \qquad$ M(0, 3)

b $\quad f\colon y=x^2-4x+1 \qquad$ M(−1, −3)

Zgjidhje

a Shënojmë $A(a, y_A)$ pikën e takimit. Kemi $y_A = \frac{1}{a} = f(a)$. Meqë $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, del $f'(a)=-\frac{1}{a^2}$.

Ekuacioni i tangjentes në pikën A është

$y - f(a) = f'(a)\cdot(x - a)$ d.m.th., $y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a) \qquad (1)$

Dihet që pika M(0; 3) ndodhet në këtë tangjente, prandaj koordinatat e saj vërtetojnë ekuacionin e tangjentes (1).

Pra $3-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(0-a)$ d.m.th., $3-\frac{1}{a}=\frac{1}{a} \Rightarrow a=\frac{2}{3}$. Atëherë ekuacioni (1) i tangjentes është $y-\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}(x-\frac{2}{3})$.

15 Tregoni pozicionin e tangjentes, në pikën $x = 0$, në lidhje me grafikun e funksionit: $y=x^3+x+2$.

Zgjidhje

Ekuacioni i tangjentes në pikën $x = 0$ është $y - f(0) = f'(0)\cdot(x - 0)$.

Kemi $f'(x) = 3x^2 + 1$ dhe $f'(0) = 1$; kurse $f(0) = 2$.

Ekuacioni i tangjentes $y - 2 = 1(x - 0)$ d.m.th., $y = x + 2$.
Krahasojmë funksionet f: $y = x^3 + x + 2$ dhe g: $y = x + 2$.
Marrim diferencën $f(x) - g(x) = x^3$.
Shohim që për $x > 0$, $f(x) > g(x)$, pra vija ndodhet mbi tangjenten.
Për $x < 0$, $f(x) < g(x)$, pra vija ndodhet nën tangjenten.

16 Jepen funksionet $y = \frac{2}{x}$ dhe $y = x^2 - 3$.

a Tregoni që pika (2, 1) është pikë e përbashkët e grafikëve të tyre.

b Gjeni pikat e tjera të përbashkëta të grafikëve të këtyre funksioneve.

c Në cilën pikë, grafikët e këtyre funksioneve kanë tangjente të përbashkët?

d Shkruani ekuacion e kësaj tangjenteje.

Zgjidhje

a Zëvendësojmë koordinatat e pikës (2, 1) në të dy funksionet. Kemi:

$\frac{2}{2} = 1$ dhe $2^2 - 3 = 1$. Këto barazime tregojnë se pika (2, 1) ndodhet në grafikët e të dy funksioneve.

b Për të gjetur pika të tjera të përbashkëta zgjidhim sistemin:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ y = x^2 - 3 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{2}{x} = x^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 3x - 2 = 0.$$

Polinomi $P(x) = x^3 - 3x - 2$ ka rrënjë $x = 2$, prandaj ai plotpjesëtohet me $(x - 2)$.

Duke kryer pjesëtimin gjejmë që $x^3 - 3x - 2 = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 1) = (x - 2) \cdot (x + 1)^2$.

$(x - 2) \cdot (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ose $x = -1$.

Për $x = -1$ kemi $y = -2$.

Pika tjetër e përbashkët e grafikëve të funksioneve të dhënë është $(-1, -2)$.

c Gjejmë koeficientet këndore të tangjenteve ndaj grafikëve të funksioneve në pikat e tyre të përbashkëta, të cilat janë të barabarta me derivatet e funksioneve përkatës në këto pika.

$$y = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^2}$$

$$y = x^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = 2x$$

Gjejmë tani vlerat e këtyre derivateve në pikat e përbashkëta:

Në pikën (2, 1) kemi:

Për funksionin $y=\frac{2}{x}$: $y'=-\frac{2}{x^2} \Rightarrow k_1=\frac{-2}{2^2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$.

Për funksionin $y=x^2-3$: $y'=2x \Rightarrow k_2=2\cdot 2=4$.

Vëmë re se $k_1 \neq k_2$, kështu që tangjentet ndaj grafikëve respektivë nuk përputhen.

Në pikën $(-1, -2)$ kemi:

Për funksionin $y=\frac{2}{x}$: $y'=-\frac{2}{x^2} \Rightarrow k_3=\frac{-2}{(-1)^2}=\frac{-2}{1}=-2$.

Për funksionin $y=x^2-3$: $y'=2x \Rightarrow k_4=2\cdot(-1)=-2$.

Vëmë re se $k_3=k_4$.

Rrjedhimisht në pikën $(-1, -2)$ grafikët e këtyre funksioneve kanë tangjente të përbashkët.

d Ekuacioni i kësaj tangjenteje është:

$y+2=-2(x+1)$ ose $y=-2x-4$.

17 a Në cilën pikë të parabolës $y=2x^2$, tangjentja është paralele me drejtëzën d; $y=2x+5$?

b Shkruani ekuacionin e kësaj tangjenteje.

Zgjidhje

Koeficienti këndor i drejtëzës d është 2. Koeficienti këndor i tangjentes ndaj grafikut të funksionit në një pikë është sa derivati i funksionit në këtë pikë. Kemi:

$$y'=\frac{dy}{dx}=4x$$

$$4x=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Për $x=\frac{1}{2}$, vlera përkatëse e funksionit është:

$$y=2\cdot(\frac{1}{2})^2=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Pika e kërkuar është $M(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

b Ekuacioni i tangjentes në pikën M është:

$$y-\frac{1}{2}=2(x-\frac{1}{2}) \Rightarrow y=2x-\frac{1}{2}$$

18 Në figurën 13.2 është vizatuar dega e djathtë e hiperbolës $y=\frac{1}{x}$ dhe pika e çfarëdoshme $M(a,\frac{1}{a})$ në të. Në pikën M është ndërtuar tangjentja me hiperbolën, e cila pret boshtet e koordinatave në pikat A dhe B. Vërtetoni që MA = MB.

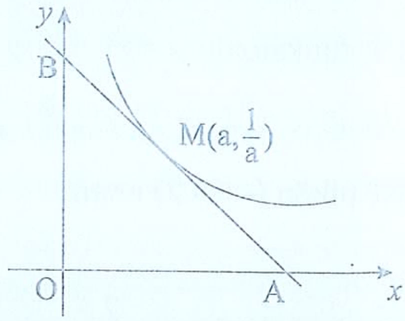


Fig. 13.2

Zgjidhje

Ekuacioni i tangjentes me hiperbolën në pikën e çfarëdoshme $M(a,\frac{1}{a})$ ka trajtën:

$y-\frac{1}{a}=m(x-a)$ ku m = f'(a).

Gjejmë derivatin e funksionit $y=\frac{1}{x}$:

$$y=\frac{1}{x} \Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}.$$

Në pikën M kemi: $y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{a^2}$.

Ekuacioni i tangjentes është: $y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)$.

Gjejmë pikat e prerjes së kësaj tangjenteje me boshtet koordinatave.

Në pikën A kemi $y_A=0$

$0-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a) \Rightarrow -a=-x+a \Rightarrow x=2a$. Pra $A(2a, 0)$

Në pikën B kemi $x_B=0$.

$y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(0-a) \Rightarrow y=\frac{2}{a}$. Pra $B(0,\frac{2}{a})$.

Vëmë re se:

$$x_M = a = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2a+0}{2} = a$$

$$y_M = \frac{1}{a} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+\frac{2}{a}}{2} = \frac{1}{a}$$

Dy barazimet e fundit tregojnë që pika M është mesi i segmentit AB.

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Gjeni derivatin e funksioneve të mëposhtme:

a $y = \sqrt{x} + x^2 - 7x$ b $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

c $y = x^2(x - \sqrt{x})$ d $y = \frac{x^2}{2}(x^3 - \frac{4}{3}\sqrt{x}) + x^5$

P. [a) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x - 7$; b) $x^3 - x^2 + x - 1$; c) $3x^2 - \frac{5}{2}x\sqrt{x}$; d) $\frac{15}{2}x^4 - \frac{5}{3}x\sqrt{x} + 5x^4$]

2 Jepet $f(x) = x^3 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}$. Gjeni $f'(1)$; $f'(4)$. P. [$\frac{1}{2}$; $\frac{179}{16}$]

3 Jepet $f(x) = 2x^2 + 3x$. Për ç'vlera të x kemi $f'(x) = f(x)$? P. [$x = 3$; $x = -\frac{1}{2}$]

4 Jepet funksioni $f(x) = x^4 - ax^2 + 8$. Gjeni a në mënyrë që $f'(1) = 0$. P. [$a = 2$]

5 Jepet $f(x) = (x^4 - 2x)^5$. Gjeni $f'(1)$. P. [10]

6 Jepet $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$; $f'(1) = -2$; $f'(2) = 0$. Gjeni b. P. [$b = 2$]

7 Gjeni koeficientin këndor të tangjentes ndaj vijës $y = -x^4 + 3x^2 - x + 2$ në pikën $x = 2$. P. [−21]

8 Shkruani ekuacionin e tangjentes ndaj vijës $y = x^3$ në origjinën e koordinatave.

P. [$y = 0$]

9 Gjeni këndin që formon me boshtin e abshisave tangjentja ndaj vijës $y = x - x^2$ në origjinën e koordinatave. P. [45°]

10 Në cilat pika tangjentja ndaj vijës:
a $y = 3x^2$ b $y = x^2 - 3x + 2$ c $y = (3x - 2)(2x - 1)$
formon me boshtin e abshisave këndin 45°?

P. [a $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ b (2,0) c $(\frac{2}{3}, 0)$]

11 Gjeni ekuacionin e tangjentes dhe pingules ndaj vijës $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ në pikën $x = 1$.
P. [$y = 11x + 4$; $y = -\frac{1}{11}x - \frac{78}{11}$]

12 Gjeni pikën në të cilën tangjentja ndaj vijës $y = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2$ është paralele me boshtin e abshisave.
P. [$(-3, \frac{45}{2})$]

13 Jepet funksioni $f(x) = (m - 1)x^2 + 3x - 4$. Për ç'vlerë të m, tangjentja ndaj grafikut të tij në pikën $x = 3$, formon me boshtin e abshisave këndin 135°?
P. [$m = \frac{1}{3}$]

14 Në cilën pikë të vijës $y = x^2 - 2x$, tangjentja është paralele me boshtin e abshisave?
P. [(1, −1)]

15 Gjeni ordinatën e pikës në të cilën tangjentja me grafikun e funksionit $y = x^3 - 3x + 1$ në pikën (2, 3) e pret boshtin e ordinatave.
P. [−15]

16 Për ç'vlerë të k, parabola $y = x^2 + kx + 1$ në pikën me abshisë 1 ka tangjente paralele me drejtëzën $y = x$?
P. [$k = -1$]

17 Jepet parabola $y = ax^2 + bx + c$. Gjeni a, b, c, në mënyrë që ajo të jetë tangjente me drejtëzën $y = x$ në pikën $x = 1$ dhe të kalojë nga pika (−1, 0).

P. [$a = \frac{1}{4}$; $b = \frac{1}{2}$; $c = \frac{1}{4}$]

18 Jepet $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$.
a Tregoni se $x=1$ është rrënjë e ekuacionit $f'(x) = f(x)$.
b Zgjidhni ekuacionin $f'(x) = f(x)$.

19 Në parabolën $y = -3x^2 + 5x + 4$ është ndërtuar tangjentja paralele me drejtëzën $y = -x + 2$. Gjeni pikëprerjen e kësaj tangjenteje me boshtin e abshisave. P. [(7, 0)]

20 Gjeni a, b, c, në mënyrë që parabola $y = ax^2 + bx + c$ pret boshtin e ordinatave në pikën (0, 2), pret boshtin e abshisave në pikën (3, 0) dhe tangjentja e saj në pikën me abshisë 4, formon me boshtin e abshisave këndin 45°.

P. [$a = \frac{1}{3}$; $b = -\frac{5}{3}$; $c = 2$]

KREU 14

ZBATIME TË DERIVATEVE

- Nëse në $]a, b[$ kemi $f'(x) > 0$ $\left(\frac{dy}{dx} > 0\right)$, atëherë f është rritës në $]a, b[$.
- Nëse në $]a, b[$ kemi $f'(x) < 0$, $\left(\frac{dy}{dx} < 0\right)$, atëherë f është zbritës në $]a, b[$.

Nëse pika A me abshisë a është pikë stacionare (pra $f'(a) = 0$), atëherë:
- nëse kemi ende $f''(a) < 0$, pika A me abshisë a është pikë maksimumi;
- nëse kemi ende $f''(a) > 0$, pika A me abshisë a është pikë minimumi.
- nëse $f''(a) = 0$, funksioni mund të ketë ose jo ekstremume. Për të konkluduar, në raste të tilla kërkohen arsyetime shtesë.

Ushtrime të zgjidhura

1 Gjeni ekstremumet e funksionit $f(x) = x^2 - 4x + 1$ për $x \in R$.

Zgjidhje

Gjejmë derivatin e këtij funksioni dhe vlerën x për të cilën derivati bëhet zero

$f'(x) = 2x - 4$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

Gjemë derivatin e dytë:

$f''(x) = 2$ për çdo $x \in R$. Rrjedhimisht $f''(2) = 2 > 0$. Kjo tregon se $x = 2$ është pikë minimumi.

Vlera e minimumit është $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$.

2 Gjeni ekstremumet e funksionit $f(x) = 4x^3 - 3x$ për $x \in R$.

Zgjidhje

Gjejmë derivatin e funksionit dhe vlerën e x-it për të cilën derivati bëhet zero (gjejmë pikat stacionare të funksionit).

$f'(x) = (4x^3 - 3x)' = 12x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$ ose $x_2 = \frac{1}{2}$.

Gjejmë derivatin e dytë të funksionit në pikat stacionare.

$f''(x) = (12x^2 - 3)' = 24x$

Në pikën $x_1 = -\frac{1}{2}$ kemi $f''(-\frac{1}{2}) = 24(-\frac{1}{2}) = -12 < 0$ funksioni ka maksimum.

Vlera e maksimumit është $f(-\frac{1}{2}) = 4(-\frac{1}{2})^3 - 3(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$

Në pikën $x_2 = \frac{1}{2}$ kemi $f''(\frac{1}{2}) = 24(\frac{1}{2}) = 12 > 0$ funksioni ka minimum.

Vlera e minimumit është $f(\frac{1}{2}) = 4(\frac{1}{2})^3 - 3(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

3 Jepet funksioni f: $y = x^3$, grafiku i të cilit paraqitet në figurën 14.1.

Derivati i funksionit është $f'(x) = 3x^2$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (Pika stacionare)

Gjejmë derivatin e dytë të funksionit.

$f''(x) = (3x^2)' = 6x$

Në pikën $x = 0$ kemi $f''(0) = 6 \cdot 0 = 0$, dhe nuk mund të themi nëse është apo jo pikë ekstremumi. Nga grafiku në figurën 14.1 vëmë re se $x = 0$ nuk është pikë ekstremumi.

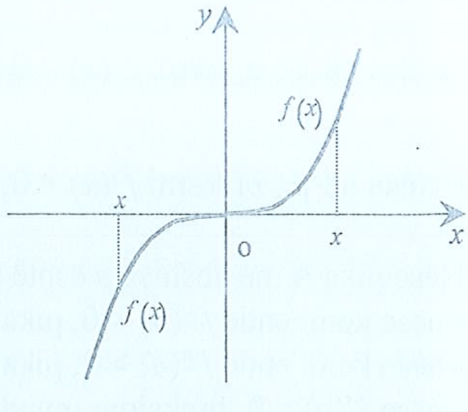


Fig. 14.1

4 Gjeni ekstremumet e funksionit f: $y = -4x^3 + 12x - 1$.

Zgjidhje

Gjejmë derivatin e funksionit dhe vlerën e x-it për të cilën derivati bëhet zero.

$f'(x) = (-4x^3 + 12x - 1)' = -12x^2 + 12$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -12x^2 + 12 = 0 \Rightarrow -12x^2 = -12 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ose $x = -1$ janë pika stacionare të funksionit.

Gjejmë derivatin e dytë të funksionit: $y'' = (-12x^2 + 12)' = -24x$.

Në pikën $x = -1$ kemi $y'' = (-24) \cdot (-1) = 24 > 0$, pra në këtë pikë kemi minimum.

Në pikën $x = 1$ kemi $y'' = (-24) \cdot (1) = -24 < 0$, pra në këtë pikë kemi maksimum.

Gjejmë vlerat e funksionit te minimumi dhe maksimumi:

$f(-1) = -4(-1)^3 + 12(-1) - 1 = -9$ dhe $f(1) = -4(1)^3 + 12 \cdot 1 - 1 = 7$

5 Gjeni ekstremumet e funksionit f: $y = -3x^3 + 9x^2 - 9x + 6$.

Zgjidhje

Gjejmë derivatin e funksionit dhe vlerën e x-it për të cilën derivati bëhet zero.

$f'(x) = (-3x^3 + 9x^2 - 9x + 6)' = -9x^2 + 18x - 9$

$f'(x) = 0 \Rightarrow = -9x^2 + 18x - 9 = 0 \Rightarrow -9(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ (pika stacionare)

Gjejmë derivatin e dytë: $f''(x) = -18x + 18$

Në pikën $x = 1$ kemi $f''(x) = -18x + 18 = -18 \cdot 1 + 18 = 0$

Pika stacionare $x = 1$, nuk është pikë ekstremumi.

6 Gjeni ekstremumet e funksionit f: $y = x + \frac{1}{x}$.

Zgjidhje

a Bashkësia e përcaktimit është bashkësia e vlerave të x që plotësojnë kushtin $x \neq 0$.

b Për çdo $x \neq 0$ ekziston $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$.

c $f'(x) = 0 \Rightarrow (x^2 - 1 = 0) \Rightarrow x = 1$ ose $x = -1$.

d $f''(x) = (1 - \frac{1}{x^2})' = (1 - x^{-2})' = -(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

e $f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0$; $f''(1) = \frac{2}{(1)^3} = 2 > 0$

f Në pikën $x = -1$ funksioni ka maksimum; Maksimumi është $f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2$.

Në pikën $x = 1$ funksioni ka minimum; Minimumi është $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$.

7 Tregoni që funksioni f: $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ nuk ka ekstremume.

Zgjidhje

$y' = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$
$3(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ (pika stacionare)
$y'' = 6x - 6$
$y''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$. Pika $x = 1$ nuk është pikë ekstremumi. Rrjedhimisht funksioni nuk ka ekstremume. Ai është gjithmonë funksion rritës (sepse $y' > 0$).

8 Për cilat vlera të a, b dhe c, parabola $y = ax^2 + bx + c$ ka ekstremum në pikën $(1, 3)$ dhe kalon nga pika $(0, 5)$.

Zgjidhje

Meqë parabola kalon nga pika $(0, 5)$, koordinatat e kësaj pike vërtetojnë ekuacionin e parabolës. Kemi:
$5 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$ nga ku $c = 5$.
Meqë parabola kalon gjithashtu edhe nga pika $(1, 3)$ kemi:
$3 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Rightarrow a + b + c = 3$ dhe meqë $c = 5$ kemi $a + b + 5 = 3$ nga ku $a + b = -2$.
Funksioni $y = ax^2 + bx + c$ ka ekstremum në pikën $(1, 3)$, kështu që derivati i tij në këtë pikë është i barabartë me zero.
$y' = 2ax + b$
$y' = 0 \Rightarrow 2 \cdot a \cdot 1 + b = 0$, pra $2a + b = 0$.

Për të gjetur a dhe b zgjidhim sistemin e ekuacioneve:

$\begin{cases} a+b=-2 \\ 2a+b=0 \end{cases}$. Shumëzojmë të dy anët e ekuacionit të parë me 2:

$\begin{cases} 2a+2b=-4 \\ 2a+b=0 \end{cases}$. Nga ekuacioni i parë zbresim ekuacionin e dytë:

$2a + 2b - (2a + b) = -4 - 0 \Rightarrow 2a + 2b - 2a - b = -4 \Rightarrow b = -4.$

Duke zëvendësuar këtë vlerë të b, në ekuacionin e parë kemi:

$a - 4 = -2 \Rightarrow a = 2.$

Përfundimisht $a = 2$; $b = -4$ dhe $c = 5$.

9 Jepet funksioni $y = ax^4 + bx^2 + 3$, i cili ka ekstremum në pikën (1, 2).

a Gjeni a dhe b.

b Për vlerat e gjetura të a dhe b, gjeni ekstremumet e tjera të funksionit (në qoftë se ka).

c Skiconi grafikun e këtij funksioni.

Zgjidhje

a Pika (1, 2) ndodhet në grafikun e këtij funksioni, prandaj:

$2 = a \cdot 1^4 + b \cdot 1^2 + 3 \Rightarrow 2 = a + b + 3$ nga ku $a + b = -1$.

Funksioni ka ekstremum në pikën (1, 3), prandaj derivati i tij në këtë pikë është i barabartë me zero.

$y' = 4ax^3 + 2bx$

$0 = 4a \cdot 1^3 + 2b \cdot 1 \Rightarrow 0 = 4a + 2b$, pra $4a + 2b = 0$

Për të gjetur a dhe b zgjidhim sistemin e ekuacioneve:

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+4b=-4 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow 2b=-4 \Rightarrow b=-2$$

Duke zëvendësuar këtë vlerë të b në ekuacionin e parë kemi:

$a - 2 = -1$ nga $a = 1$.

Funksioni është $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

b Për të gjetur ekstremumet e tjera të funksionit (në qoftë se ka), gjejmë fillimisht pikat stacionare.

$y = x^4 - 2x^2 + 3$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 4x = 4x \cdot (x^2 - 1)$$

$y' = 0 \Rightarrow 4x \cdot (x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ose $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$

Për $x = 0$ kemi $y = 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 3 = 3$

Për $x = \pm 1$ kemi $y = (\pm 1)^4 - 2 \cdot (\pm 1)^2 + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$

Funksioni ka tri pika stacionare: (0, 3); (–1, 2) dhe (1, 2)

Gjejmë derivatin e dytë të funksionit.

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 4$$

Në pikën (0, 3)

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -4 < 0$$. Funksioni ka maksimum.

Në pikën (–1, 2).

$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = 12 - 4 = 8 > 0$. Funksioni ka minimum.

Në pikën (1,2).

$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = 12 - 4 = 8 > 0$. Funksioni ka minimum.

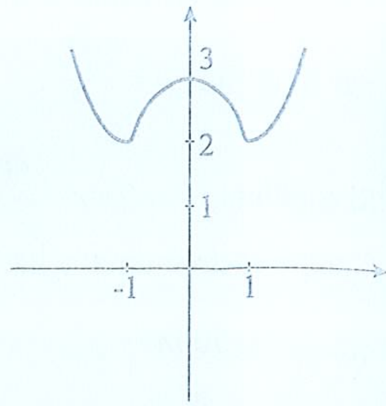


Fig. 14.2

c Në figurën 14.2 është skicuar grafiku i funksionit.

10 Studioni monotoninë e funksionit $y = \sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Zgjidhje

Funksioni është i përcaktuar për $x > 0$.

Funksionin e dhënë e shkruajmë në trajtën $y = x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$.
Gjejmë derivatin e tij.

$$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)$$

Studiojmë shenjën e derivatit.

Vëmë re se $\dfrac{1}{\sqrt{x}} > 0$.

Për $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x} > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{x} \Rightarrow x > 2$ kemi $y' > 0$, pra funksioni është rritës.

Për $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x} < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{x} \Rightarrow x < 2$ kemi $y' < 0$. Funksioni është zbritës.

Përfundimisht funksioni i dhënë është zbritës në]0, 2[dhe rritës në]2, +∞[.

11 Duhet të ndërtohet një kuti në formën e cilindrit rrethor të drejtë, e mbyllur lart e poshtë dhe me vëllim të njohur, 250π cm^3. Të caktohen përmasat e kutisë në mënyrë që për ndërtimin e saj, të harxhohet sasia më e vogël e materialit.

Zgjidhje

Harxhimi i materialit do të jetë më i vogli kur syprina e përgjithshme e kutisë të jetë më e vogla.

Shënojmë me $x = OA$ rrezen e bazës së cilindrit rrethor të drejtë dhe me $h = AA_1$ lartësinë e tij

(Është e kuptueshme që $x > 0$; $h > 0$) (fig. 14.3).

Të shprehim syprinën e përgjithshme nëpërmjet x. Ajo është:

$S = S_a + 2 \cdot S_b$ d.m.th. $S = 2\pi x \cdot h + 2\pi x^2$.

Vëllimi i kutisë është $V = \pi x^2 \cdot h$. Kemi pra, $\pi x^2 \cdot h = 250 \cdot \pi$, që nga nxjerrim: $h = \dfrac{250}{x^2}$.

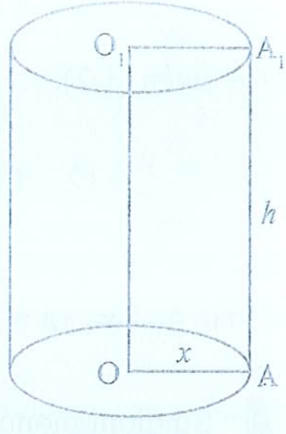


Fig. 14.3

Si rrjedhim, $S = 2\pi x \cdot \dfrac{250}{x^2} + 2\pi x^2$ d.m.th., $S = \dfrac{500\pi}{x} + 2\pi x^2$.

Gjejmë ekstremumet e këtij funksioni.

$$S'(x) = -\frac{500\pi}{x^2} + 4\pi x = \frac{-500\pi + 4\pi x^3}{x^2} = \frac{4\pi(x^3 - 125)}{x^2}$$

$S'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 125 = 0 \Rightarrow x = 5.$

Gjejmë derivatin e dytë të funksionit $S(x)$.

Kemi: $S''(x) = \left(-\dfrac{500\pi}{x^2} + 4\pi x\right)' = \dfrac{1000\pi}{x^3} + 4\pi$ dhe $S''(5) = \dfrac{1000\pi}{125} + 4\pi = 12\pi > 0$

Rrjedhimisht për $x = 5$ arrihet minimumi i funksionit. Për $x = 5$ cm kemi:

$$h = \frac{250}{5^2} = 10.$$

Përgjigje: Për ndërtimin e kutisë cilindrike do të harxhohet më pak material në qoftë se lartësia e saj të jetë sa diametri i bazës.

12 Në figurën 14.4 është dhënë grafiku i funksionit $y = 9 - x^2$.
Në harkun AC të parabolës merret një pikë M dhe prej saj hiqet pingulja MN me boshtin Ox. Gjeni abshisën $x = ON$ të pikës M, në mënyrë që syprina e trapezit ONMC të jetë më e madhja.

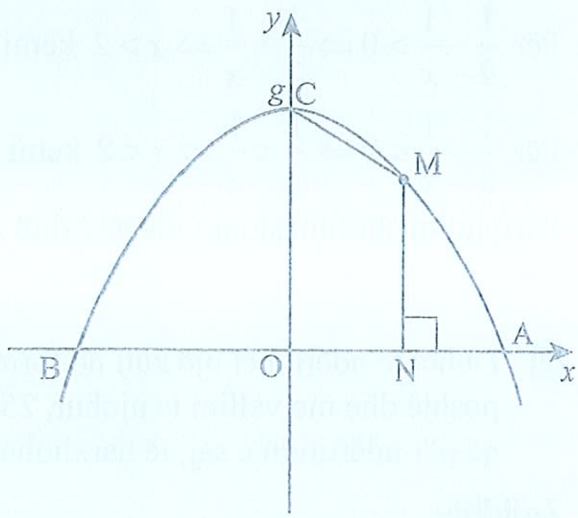


Fig. 14.4

Zgjidhje

Syprina e trapezit kënddrejtë ONMC është:

$$S = \frac{OC + MN}{2} \cdot ON \text{ (pse?)}$$

E shprehim këtë syprinë nëpërmjet x.

Meqenëse pika M ndodhet në parabolë, koordinatat e saj vërtetojnë ekuacionin e parabolës, prandaj:

$y_M = 9 - x_M$ d.m.th., $y_M = 9 - x^2$, pra $NM = 9 - x^2$

$x_M = ON$ d.m.th., $ON = x$; $OC = 9$.

Kështu, syprina e trapezit ONMC është: $S = \frac{9 + (9 - x^2)}{2} \cdot x$ d.m.th., $S = \frac{1}{2}(18x - x^3)$.

$S' = \frac{1}{2}(18 - 3x^2)$; $S' = 0 \Rightarrow 18 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$ (është e kuptueshme që $x = -\sqrt{6}$ nuk pranohet).

$S''(x) = \left[\frac{1}{2}(18 - 3x^2)\right]' = -3x$ dhe $S''(\sqrt{6}) = -3\sqrt{6} < 0$.

Syprina e kërkuar ka vlerën maksimale për $x = \sqrt{6}$.

13 Nga një copë kartoni me brinjë 12 cm kërkohet të bëhet një kuti pa kapak, duke prerë nëpër qoshe katrorë të barabartë dhe duke përthyer pjesët e dala për të formuar faqet anësore të kutisë. Sa duhet të merret brinja për katrorët që priten, në mënyrë që vëllimi i kutisë së formuar të jetë më i madhi?

Zgjidhje

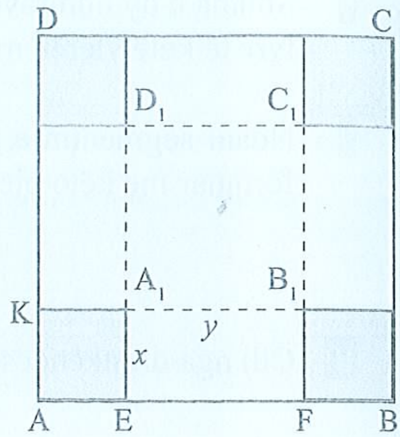


Fig. 14.5

Shënojmë me x brinjën e katrorit që pritet në një qoshe ($x = A_1E = A_1K$). Shprehim vëllimin V të kutisë nëpërmjet x (fig. 14.5).

Shënojmë me y brinjën e bazës së kutisë ($y = A_1B_1$).

Kutia e përftuar është kuboid, prandaj vëllimi i saj është i barabartë me prodhimin e lartësisë me syprinën e bazës (baza është katrori $A_1B_1C_1D_1$).

$V = y^2 \cdot x$

Nga kushti kemi: LE = 12 cm, d.m.th. $x + y + x = 12$, që nga $y = 12 - 2x$.

Si rrjedhim, $V = (12 - 2x)^2 \cdot x$ ose

$V = (144 - 48x + 4x^2) \cdot x = 144x - 48x^2 + 4x^3$

Kemi $V'(x) = 144 - 96x + 12x^2$

$V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 96x + 144 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$.

Ky ekuacion ka dy rrënjë reale: $x_1 = 2$; $x_2 = 6$.

Është e kuptueshme se x nuk mund të jetë i barabartë me 6, sepse në këtë rast nuk mund të përftohet kutia. Pra, mbetet $x = 2$.

Duke studiuar shenjën e derivatit të dytë për $x = 2$, bindemi se në këtë rast funksioni arrin maksimumin.

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Gjeni ekstremumet e funksionit $y = (1 - x^2)^3$. **P. [(0, 0) maksimum]**

2 Gjeni ekstremumet e funksionit $y = x^3 - 4x^2 + 2x$. **P. [(2, 0) min.; $(\frac{3}{2}, \frac{32}{27})$ maks.]**

3 Gjeni ekstremumet e funksionit $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

P. [(0,3) maksimum; (–1,2) minimum; (1,2) minimum)]

4 Funksioni $y = x^3 + mx + n$ ka ekstremum të barabartë me 0 në pikën me abshisë 1. Gjeni $m - n$.

P. [−5]

5 Jepet funksioni $y = mx^2 + nx + p$. Gjeni m, n, p, në mënyrë që funksioni për $x = 3$ të ketë minimum të barabartë me −2 dhe të kalojë nga pika (1, 2).

P. [$m = 1$; $n = -6$; $p = 7$]

6 Në cilën pikë të vijës $y = x^3 + 6x^2 - 3x - 19$, koeficienti këndor i tangjentes ka vlerën më të vogël?

P. [(−2, 3)]

7 Tangjentja ndaj vijës $y = (x - 2)^3$ në pikën (3, 1) e pret vijën në pikën B. Gjeni koordinatat e pikës B.

P. [(0, −8)]

8 Shuma e dy numrave është 18. Gjeni këta numra në mënyrë që shuma e katrorëve të tyre të ketë vlerën më të vogël.

P. [numrat të barabartë nga 9]

9 Ndani segmentin e dhënë d, në dy pjesë, në mënyrë që syprina e drejtkëndëshit të formuar me këto pjesë, të ketë vlerën më të madhe.

P. [dy pjesët të barabarta nga $\frac{d}{2}$]

10 Cili nga drejtkëndëshat me perimetër të dhënë p, ka syprinë më të madhe?

P. [katrori]

11 Jepet parabola $y = ax^2 + bx + c$, e cila në pikën me abshisë −1 ka maksimum të barabartë me 3 dhe koeficienti këndor i tangjentes në pikën me abshisë 1 është i barabartë me 8. Gjeni a, b dhe c.

P. [$a= -2$; $b=-4$; $c=1$]

12 Parabola $y = ax^2 + bx + c$ ka minimium në pikën (1,0) dhe kalon nga pika (0,2). Shkruani ekuacionin e saj.

P. [$2(x-1)^2$]

KREU 15

INTEGRALET

Integrali i pacaktuar

$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + c$, ku c është konstantja e integrimit.

Vetitë

1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

2 $\int [f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + ... + \int f_n(x)dx$

Tabela e integraleve

1. $\int dx = x + c$

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

3. $\int \dfrac{1}{x^2} dx = -\dfrac{1}{x} + c$

4. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$

Formula e Njuton-Laibnicit

$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ ku $F'(x)=f(x)$

Syprina e figurës

$S = \int_a^b f(x)dx$ (Figura kufizohet nga grafiku i funksionit $f(x)$, boshti i abshisave dhe drejtëzat $x = a$ dhe $x = b$) (fig. 15.1).

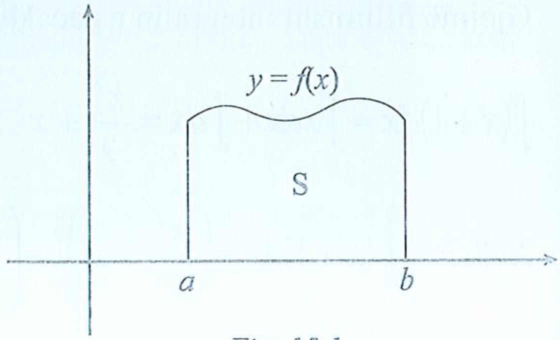


Fig. 15.1

Ushtrime të zgjidhura

1 Njehsoni : $\int (3x^2 - 2x + 5)dx$

Zgjidhje

$$\int (3x^2 - 2x + 5)dx = \int 3x^2dx - \int 2xdx + \int 5dx = 3\int x^2dx - 2\int xdx + 5\int dx =$$

$$= \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 5x + c = x^3 - x^2 + 5x + c$$

2 Njehsoni: $\int \frac{x^3-1}{x-1}dx$

Zgjidhje

$$\int \frac{x^3-1}{x-1}dx=\int \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx=\int (x^2+x+1)dx=\int x^2dx+\int xdx+\int dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+c$$

3 Njehsoni: $\int\left(\frac{2x^4-3x^2-x}{x}\right)dx$

Zgjidhje

$$\int\left(\frac{2x^4-3x^2-x}{x}\right)dx=\int\left(\frac{2x^4}{x}-\frac{3x^2}{x}-\frac{x}{x}\right)dx=\int 2x^3dx-\int 3xdx-\int dx=$$

$$=\frac{2x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}-x+c=\frac{x^4}{2}-\frac{3x^2}{2}-x+c$$

4 Njehsoni: $\int_1^2 (x+1)dx$

Zgjidhje

Gjejmë fillimisht integralin e pacaktuar të funksionit $f: y=x+1$

$$\int (x+1)dx=\int xdx+\int dx=\frac{x^2}{2}+x$$

Atëherë: $\int_1^2 (x+1)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_1^2=\left(\frac{2^2}{2}+2\right)-\left(\frac{1^2}{2}+1\right)=2+2-\frac{1}{2}-1=\frac{5}{2}$

5 Njehsoni : $\int_1^3\left(x^2+x+\frac{1}{x^2}\right)dx$

Zgjidhje

$$\int_1^3\left(x^2+x+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^3=\left(\frac{3^3}{3}+\frac{3^2}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}-1\right)=$$

$$=9+\frac{9}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{40}{3}.$$

6 Jepet $\int_2^5 f(x)dx = 3$. Gjeni $\int_2^5 [f(x)+2x]dx$.

Zgjidhje

$$\int_2^5 [f(x)+2x]dx = \int_2^5 f(x)dx + \int_2^5 2xdx = \int_2^5 f(x)dx + x^2\Big|_2^5 = 3+(25-4) = 3+21 = 24$$

7 Jepet $\int_1^3 [x+f(x)]dx = 10$. Gjeni $\int_1^3 f(x)dx$.

Zgjidhje

$$\int_1^3 [x+f(x)]dx = 10 \Rightarrow \int_1^3 xdx + \int_1^3 f(x)dx = 10 \Rightarrow \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 + \int_1^3 f(x)dx = 10$$

$$\Rightarrow \left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right) + \int_1^3 f(x)dx = 10 \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = 6$$

8 Jepet $\int_1^m (2x+1)dx = 18$. Gjeni m me kushtin $m > 1$.

Zgjidhje

$\int_1^m (2x+1)dx = (x^2+x)\Big|_1^m = m^2+m-(1+1) = m^2+m-2$. Nga kushti:

$m^2+m-2 = 18 \Rightarrow m^2+m-20 = 0$.

Duke zgjidhur këtë ekuacion gjejmë $m_1 = -5$ ose $m_2 = 4$.

Për kushtet e ushtrimit pranohet $m = 4$.

9 Njehsoni syprinën e figurës së kufizuar nga parabola $y = x^2 - 2x$, boshti i abshisave dhe drejtëzat $x = 2$ dhe $x = 3$.

Zgjidhje

Zona, së cilës duam t'i gjejmë syprinën, është dhënë në figurën 15.2.

Vëmë re se ajo ndodhet mbi boshtin e abshisave.

Kemi:

$$S = \int_2^3 (x^2-2x)dx =$$

$$\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_2^3 = \left(\frac{27}{3}-9\right)-\left(\frac{8}{3}-4\right) = \frac{4}{3} \text{ njësi katrore}$$

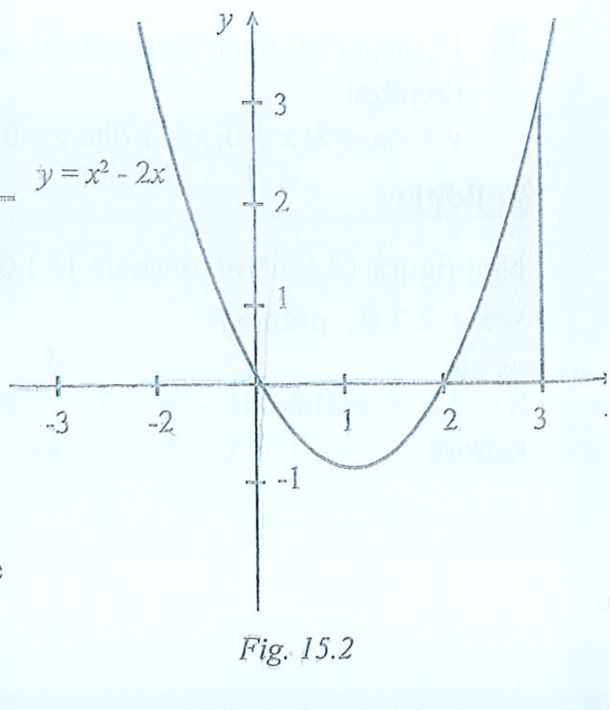


Fig. 15.2

10 Njehsoni syprinën e figurës kufizuar nga parabola $y=x^2-2x$, boshti i abshisave dhe drejtëzat $x=0$ dhe $x=2$.

Në figurën 15.3 vëmë re që zona ndodhet nën boshtin e abshisave, prandaj:

$$S=\int_0^2 -\left(x^2-2x\right)dx=-\int_0^2\left(x^2-2x\right)dx$$

$$=-\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_0^2=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=\left(4-\frac{8}{3}\right)-0=\frac{4}{3}$$

njësi katrore.

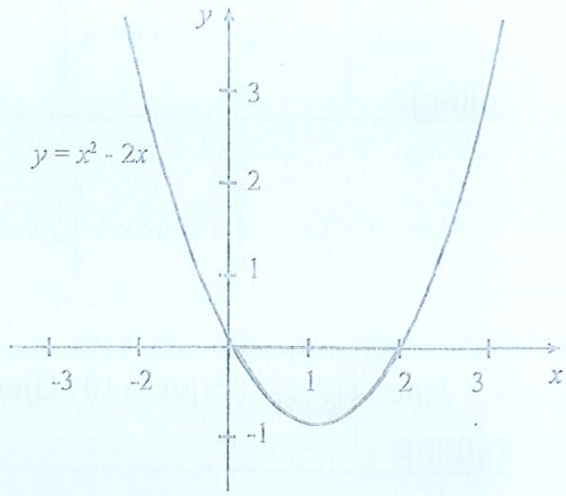


Fig. 15.3

11 Njehsoni syprinën e figurës së kufizuar nga parabola $y=x^2-2x$, boshti i abshisave dhe drejtëza $x=3$.

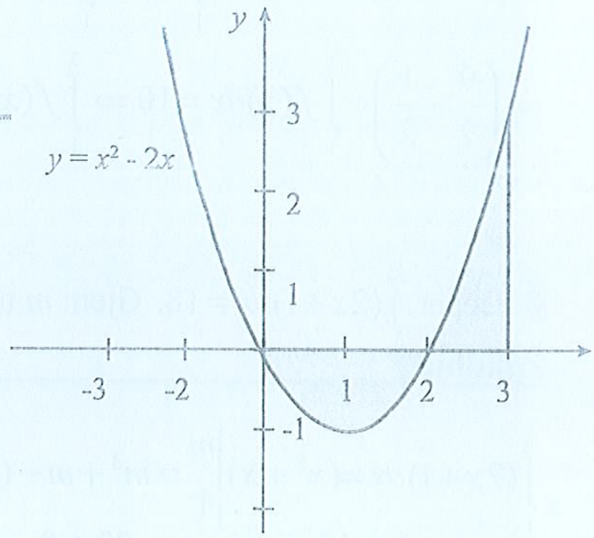


Fig. 15.4

Zgjidhje

$x^2-2x\geq 0$

Nga figura 15.4 vëmë re se në $[0, 2]$ kemi $x^2-2x\leq 0$, ndërsa në $[2, 3]$ kemi $x^2-2x\geq 0$, prandaj

$$S=\int_0^2 -\left(x^2-2x\right)dx+\int_2^3\left(x^2-2x\right)dx.$$ Duke marrë

përfundimet e ushtrimeve 6 dhe 7, kemi

$$S=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

12 Njehsoni syprinën e figurës së kufizuar nga drejtëzat $y=-x+2;\ x=0;\ x=1$ dhe $y=0$.

Zgjidhje

Nga figura 15.5 vëmë re se në $[-1,0]$ kemi $-x+2\geq 0$, prandaj:

$$S=\int_{-1}^{0}(-x+2)dx=\left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$ njësi katrore

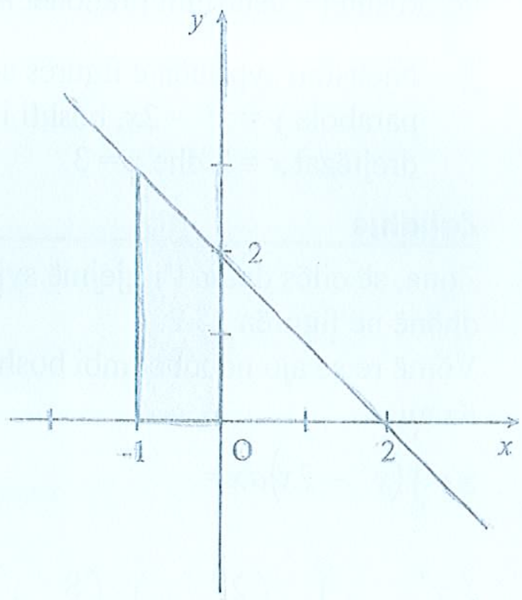


Fig. 15.5

Xhesiana

Orami

13 Njehsoni syprinën e figurës së kufizuar nga vija $y = -x^2 + 2x$ dhe boshti i abshisave.

Zgjidhje

Gjejmë pikat e prerjes së vijës $y = -x^2 + 2x$ me boshtin Ox.

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow -x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0; x = 2$$

Nga figura 15.6 vihet re se në $[0,2]$ $-x^2 + 2x \geq 0$

prandaj, $S = \int_0^2 (-x^2 + 2x)dx$

$$S = \int_0^2 (-x^2 + 2x)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Big|_0^2 = -\frac{2^3}{3} + 2^2 = \frac{4}{3}$$

njësi katrore.

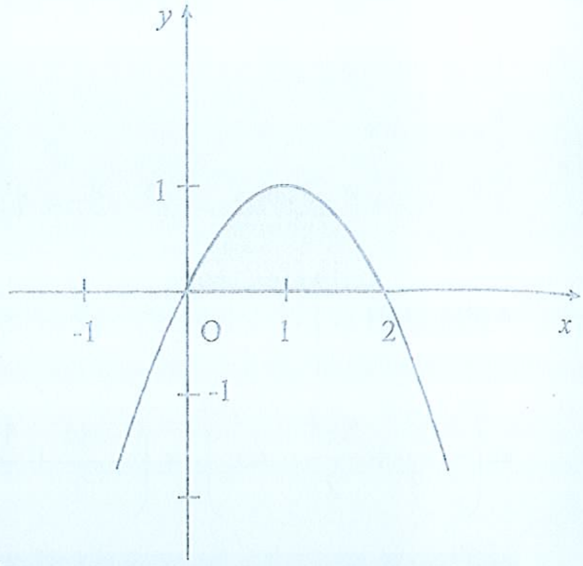


Fig. 15.6

14 Njehsoni syprinën e figurës së kufizuar nga parabola $y = x^2 + 4x$ dhe drejtëza $y = 0$.

Zgjidhje

Gjejmë pikat ku grafiku pret boshtin Ox. Për këtë formojmë sistemin:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 + 4x \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x = -4; x = 0$$

Nga figura 15.7 duket se në $[-4,0]$ $x^2 + 4x \leq 0$

prandaj $S = \int_{-4}^{0} -(x^2 + 4x)dx$

Atëherë: $S = \int_{-4}^{0} -(x^2 + 4x)dx = \left(-\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\Big|_{-4}^{0}$

$$= 0 - \left(-\frac{(-4)^3}{3} - 2(-4)^2\right) = \frac{32}{3} \text{ njësi katrore.}$$

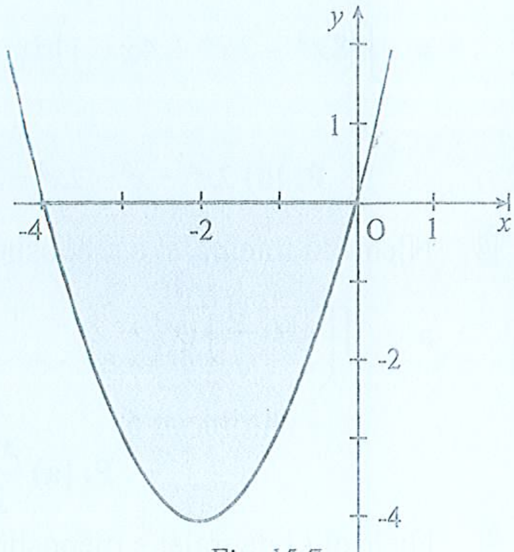


Fig. 15.7

15 Njehsoni syprinën e figurës së kufizuar nga vijat $y = x^2 - 4x + 5$ dhe $y = x + 1$ (fig. 15.8).

Zgjidhje

Gjejmë pikat e prerjes së grafikëve, abshisat e të cilave, do të jenë kufijtë e integrimit

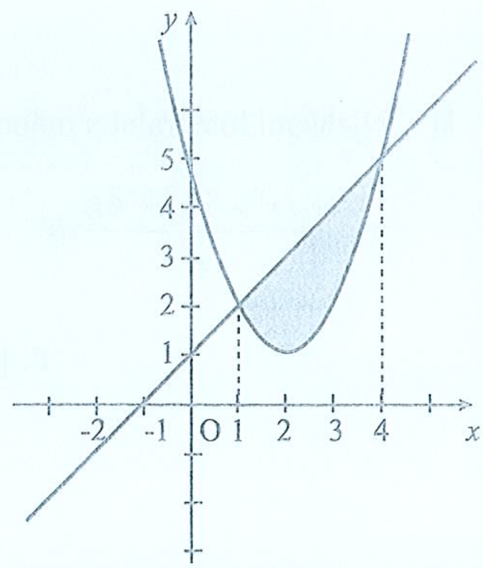


Fig. 15.8

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 5 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 4$$

Atëherë: $S = \int_1^4 \left[x + 1 - \left(x^2 - 4x + 5\right)\right]dx = \int_1^4 \left(-x^2 + 5x - 4\right)dx$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right)\Bigg|_1^4 = \left(-\frac{64}{3} + \frac{5\cdot 16}{2} - 16\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4\right) = \frac{9}{2} \text{ njësi katrore}$$

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Njehsoni integralet e mëposhtme:

a $\int\left(8x^3 - 3x^2 + 4x - 1\right)dx$ b $\int(1 - \sqrt{x})^2 dx$ c $\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x}} dx$

P. [a) $2x^4 - x^3 - 2x^2 - x + c$; **b)** $x - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + c$; **c)** $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + c$**]**

2 Njehsoni integralet e mëposhtme:

a $\int\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ b $\int \frac{1 + 2\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} dx$

P. [a) $\frac{x^3}{3} + \frac{4x\sqrt{x}}{3} + \ln|x| + c$; **b)** $-\frac{2}{\sqrt{x}} + 12\sqrt[6]{x} - 3\ln|x| + c$**]**

3 Njehsoni integralet e mëposhtme:

a $\int(3 + x)(3 - x)dx$ b $\int \frac{(x - 1)(x + 2)}{x} dx$

P. [a) $9x - \frac{x^3}{3} + c$; **b)** $\frac{x^2}{2} + x - 2\ln|x| + c$**]**

4 Njehsoni integralet e mëposhtme:

a $\int \frac{7x^4 - 3x^2 + 4x}{x^2} dx$ b $\int \frac{x^4 + 2x^2 + 2x - 1}{x} dx$

P. [a) $\frac{7x^3}{3} - 3x + 4\ln|x| + c$; **b)** $\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} - \frac{1}{3}\ln|x| + c$**]**

5 Pasi të realizoni thjeshtimet e duhura, njehsoni integralet:

a $\int \frac{x^2-1}{x+1}dx$ b $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$ c $\int \frac{x^3-1}{x^2+x+1}dx$

P. [a) $\frac{x^2}{2}-x+c$; b) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+c$; c) $\frac{x^2}{2}-x+c$]

6 a Jepet $f'(x)=3x^2-2x+5$ dhe $f(1)=0$. Gjeni $f(2)$.

b Jepet $f'(x)=\frac{2}{x}+3x^2-2x$ dhe $f(1)=4$. Gjeni $f(2)$.

P. [a) 9; b) 2ln2 + 8]

7 Njehsoni:

a $\int_0^1 (3x^2-4x+2)dx$ b $\int_1^2 \frac{3x^3-2x^2+2}{x}dx$ c $\int_0^2 (2x-4)^2 dx$

P. [a) 1 b) 4 + 2ln2 c) $\frac{32}{3}$]

8 Gjeni a, në qoftë se $\int_0^1 (3x^2-2x-2)dx = \int_0^a (x+2)dx$. P. [$a = -2$]

9 Gjeni syprinën e figurës së kufizuar nga grafiku i funksionit $y = x^2$, boshti i abshisave dhe drejtëzat $x = 1$ dhe $x = 2$. P. [$\frac{7}{3}$]

10 Gjeni syprinat e figurave të kufizuara nga vijat:

a $y = 5x; y = 0; x = 2; x = 4$ b $y = -x^2; y = 0; x = -3$

c $y = x^2 - x; y = 0$ d $y = -x^2 - 1; y = 0; x = 0; x = 2$

P. [a) 30; b) 9; c) $\frac{1}{6}$; d) $\frac{14}{3}$]

11 Jepet $\int_0^1 (2x+1)dx = \int_1^a dx$. Gjeni a. P. [$a = 3$]

12 Jepet $\int_0^1 [1+f(x)]dx = 4$. Gjeni $\int_0^1 f(x)dx$. P. [3]

KREU 16

PROBABILITETI

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$$

$n(A)$ numri i rezultateve të favorshme; $n(E)$ numri i rezultateve të mundshme

$0 \leq p(A) \leq 1$

S: **ngjarje e sigurt:** $\Rightarrow p(S) = 1$

D: **ngjarje e pamundur:** $\Rightarrow p(D) = 0$

A': **ngjarja e kundërt** e ngjarjes A: $\Rightarrow p(A') = 1 - p(A)$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

A, B **ngjarje të papajtueshme:** $\Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

A, B **ngjarje të pavarura:** $\Rightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Probabiliteti me kusht

$$p(B / A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \Rightarrow p(A \cap B) = p(B/A) \cdot p(A)$$

Përcaktimet kryesore dhe shënimet përkatëse në lidhje me ngjarjet

Në vend të:	ne themi:	dhe shënojmë:
A është nënbashkësi e E	A është një ngjarje	$A \subset E$
A është boshe	ngjarja A është e pamundur	$A = \Phi$
A është E	ngjarja A është e sigurt	$A = E$
C është bashkimi i A me B	C është ngjarja (A ose B)	$C = A \cup B$
C është prerje e A me B	C është ngjarja (A dhe B)	$C = A \cap B$
A dhe B nuk priten	A dhe B janë ngjarje të papajtueshme	$A \cap B = \Phi$
A dhe B janë plotës të njëra-tjetrës	A dhe B janë ngjarje të kundërta	$B = A'$

Ushtrime të zgjidhura

1 Hidhet një zar i rregullt kubik. Tregoni se probabiliteti që të bjerë numër më i vogël se 3 është $\frac{1}{3}$.

Zgjidhje

Kur zari është i rregullt, rëniet e numrave nga 1 në 6 kanë secila mundësi të barabarta që të ndodhin, prandaj

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$$

$$P\text{ (rezultati} < 3) = p(1 \text{ ose } 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

2 Një zar i zi, dhe një zar i bardhë kubik hidhen njëkohësisht. Paraqitni të gjithë rezultatet e mundshme. Gjeni probabilitetin e ngjarjes:

a Shuma e pikëve në të dyja zaret është 5.

b Shuma e pikëve në të dyja zaret është numër i thjeshtë.

c 2 pikë te zari i zi dhe 6 pikë te zari i bardhë.

d Dy zaret tregojnë të njëjtin numër pikësh.

e Shuma e pikëve në të dyja zaret është shumëfish i numrit 3.

Zgjidhje

Ka gjithsej 36 rezultate të mundshme (çifte të radhitura numrash) që paraqiten në tabelën e mëposhtme (në secilën kllapë shifra e parë tregon numrin e pikëve në zarin e zi dhe e dyta tregon numrin e pikëve në zarin e bardhë).

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

Në të gjitha rastet $n(E) = 36$

a Ka 4 çifte që japin shumën 5: $A = \{(1, 4); (2, 3); (3, 2); (4, 1)\}$ $p(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

b Ka 15 çifte shuma e të cilëve është numër i thjeshtë:

B: $\{(1, 1); (1, 2); (1, 4); (1, 6); (2, 1); (2, 3); (2, 5); (3, 2); (3, 4); (4, 1); (4, 3); (5, 2); (5, 6); (6, 1); (6, 5)\}$ $p(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

c Ka vetëm një çift që tregon 2 pikë te zari i zi dhe 6 pikë te zari i bardhë.

C: $\{(2, 6)\}$ $p(C) = \frac{1}{36}$

d Ka 6 çifte kur të dyja zaret tregojnë të njëjtin numër pikësh:

D: $\{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6)\}$ $p(D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

e Ka 12 çifte ku shuma e numrit të pikëve është shumëfish i numrit 3:
E={(1, 2); (1, 5); (2, 1); (2, 4); (3, 3); (3, 6); (4, 2); (4, 5); (5, 1); (5, 4); (6, 3); (6, 6)}

$$p(E)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

3 Hidhet një monedhë dhe një zar kubik. Gjeni probabilitetin:
a Bie stemë dhe numër tek. b Bie lek dhe numër më i madh se 4.

Zgjidhje

Ka gjithsej 12 raste të mundshme që paraqiten në tabelën e mëposhtme:

Monedha	L	L	L	L	L	L	S	S	S	S	S	S
Zari	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6

a Ka tri çifte që tregojnë stemë dhe numër tek. A: {(S, 1); (S, 3); (S, 5)}.

$$p(A)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

b Ka dy çifte që tregojnë lek dhe numër më të madh se 4.

B:{(L, 5); (L, 6)} $p(B)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

4 Ngjarjet A dhe B janë të pavarura. Jepet $p(A)=\frac{1}{3}$; $p(A\cap B)=\frac{1}{4}$. Gjeni $p(A\cup B)$.

Zgjidhje

Meqë A dhe B janë ngjarje të pavarura kemi $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$ nga ku

$$p(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$ Atëherë:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{5}{6}$$

5 Një kuti përmban 5 sfera të kuqe dhe 3 sfera jeshile. Nga kutia, nxirret rastësisht një sferë, rikthehet dhe pastaj nxirret rastësisht një sferë tjetër. Sa është probabiliteti që të dyja sferat të jenë jeshile.

Zgjidhje

Në figurën 16.1 është ndërtuar një diagram-pemë për këtë situatë (hapi i parë – nxjerrja e parë; hapi i dytë – nxjerrja e dytë). Dega e shënuar me (*) i përgjigjet ngjarjes që të dyja sferat e nxjerra të jenë jeshile. Probabiliteti i kësaj ngjarje është sa prodhimi i numrave që janë në këtë degë, d.m.th., $\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{64}$.

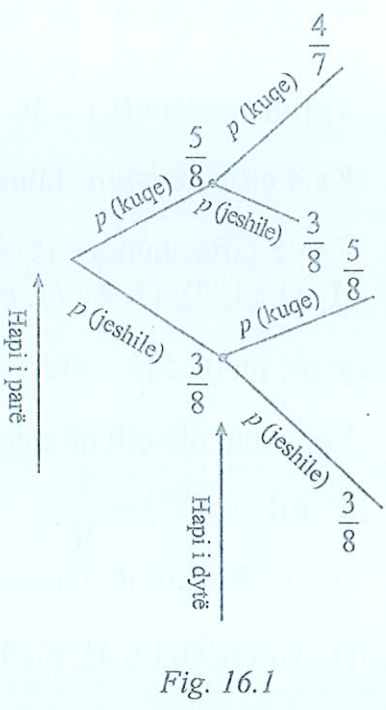


Fig. 16.1

6 Një kuti përmban 5 sfera të kuqe dhe 3 jeshile. Një sferë nxirret rastësisht pa kthim. Pastaj nxirret një sferë tjetër. Gjeni probabilitetin e ngjarjes që:

a të dyja sferat të jenë jeshile;

b një sferë të jetë e kuqe dhe tjetra jeshile.

Zgjidhje

Në figurën 16.2 është paraqitur diagrami-pemë për këtë situatë.

a Probabiliteti që të dyja sferat të jenë jeshile është $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$.

b Probabiliteti që njëra e kuqe, tjetra jeshile është $\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{15}{28}$.

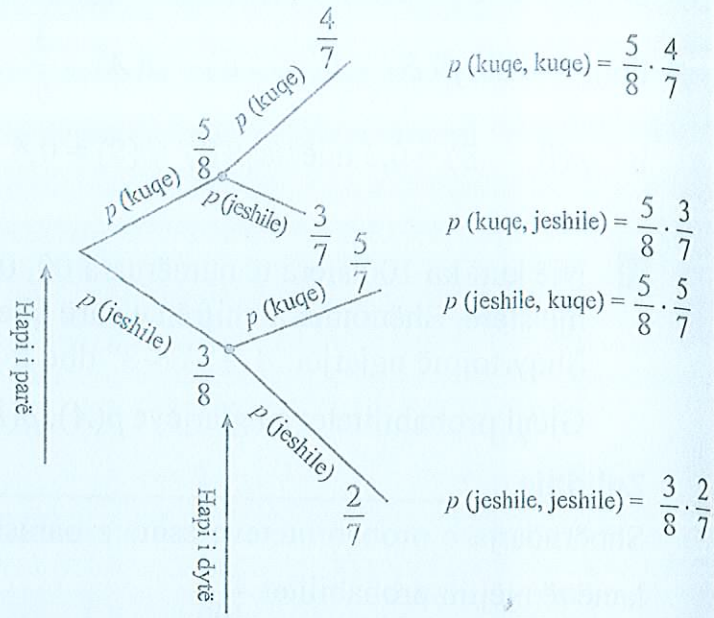


Fig. 16.2

7 Në kutinë e parë janë katër sfera të kuqe dhe pesë sfera të bardha; në kutinë e dytë janë dy sfera të kuqe dhe tri sfera të bardha. Nga secila prej kutive nxirret nga një sferë. Gjeni probabilitetin që sferat:

a të jenë të dyja të kuqe; b njëra të jetë e bardhë dhe tjetra e kuqe.

Zgjidhje

Le të jenë K_1, K_2, B_1, B_2 ngjarjet e kuqe nga kutia 1, e kuqe nga kutia 2, e bardhë nga kutia 1, e bardhë nga kutia 2. Kemi:

$$p(K_1)=\frac{4}{9};p(K_2)=\frac{2}{5};p(B_1)=\frac{5}{9};p(B_2)=\frac{3}{5};$$

Ngjarjet K_1, K_2 janë të pavarura ndërmjet tyre

a $p(\text{dy të kuqe})=P(K_1\cap K_2)=P(K_1)\cdot P(K_2)=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{5}=\frac{8}{45}$.

Nuk ka rëndësi radhitja e kuqe apo e bardhë.

b Sfera e parë e kuqe dhe e dyta e bardhë ose sfera e parë e bardhë dhe e dyta e kuqe.

$p(\text{njëra e kuqe dhe tjetra e bardhë})=p[(K_1\cap B_2 \text{ ose } B_1\cap K_2)]=$

$$=p(K_1)\cdot p(B_2)+p(B_1)\cdot p(K_2)=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{5}+\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{5}=\frac{22}{45}$$

10 a A dhe B janë dy ngjarje të lidhura me një eksperiment të rastit. Gjeni probabilitetin e B, në qoftë se $p(A)=\frac{1}{3}, p(A\cap B)=0$ dhe $p(A\cup B)=\frac{3}{5}$.

b R dhe S janë dy ngjarje të lidhura me një eksperiment të rastit. Duke ditur që $p(R) = 0,4$; $p(S) = 0,7$ dhe $p(R \text{ dhe } S) = 0,3$, tregoni që R dhe S nuk janë të pavarura.

Zgjidhje

a $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, sepse ngjarjet A dhe B janë të papajtueshme.

Prej këtu del $p(B) = p(A \cup B) - p(A) = \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$

b $p(R \cap S) = 0,3$ ndërsa $p(R) \cdot p(S) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28$ pra R dhe S nuk janë të pavarura.

11 Një kuti ka 100 sfera të numëruara 00, 01, 02, …, 99. Nga kutia nxirret rastësisht një sferë. Shënojmë X shifrën e parë dhe Y shifrën e dytë të sferës së nxjerrë. Shqyrtojmë ngjarjet: $A = \text{“}X < 3\text{”}$ dhe $B = \text{“}Y < 4\text{”}$.

Gjeni probabilitetet e ngjarjeve $p(A)$, $p(B)$, $p(A \cap B')$, $p(A \cup B')$.

Zgjidhje

Shpërndarja e probabiliteteve është e barasmundshme. Pra, të gjitha rezultatet e provës kanë të njëjtin probabilitet $\frac{1}{100}$.

- Ngjarja A përbëhet nga 30 numrat e parë: 00, 01, …, 29. Atëherë $p(A) = \frac{30}{100}$;
- Ngjarja B përbëhet nga 4 numrat e parë të çdo dhjetësheje:

  $B = \{00, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 13, \dots, 90, 91, 92, 93\}$, pra $p(B) = \frac{10 \cdot 4}{100} = \frac{40}{100}$;
- Ngjarja $A \cap B'$ përbëhet nga 6 numrat e fundit të dhjetësheve që vijojnë: nga 00 deri në 09; nga 10 deri në 19; nga 20 deri në 29. Rrjedhimisht

  $p(A \cap B')) = \frac{3 \cdot 6}{100} = \frac{18}{100}$;
- Për të gjetur $P(A \cup B')$, shkruajmë:

  $$p(A \cup B') = p(A) + p(B') - p(A \cap B')$$
  $$= p(A) + 1 - p(B) - p(A \cap B') = \frac{30}{100} + 1 - \frac{40}{100} - \frac{18}{100} = \frac{72}{100}$$

12 Një monedhë hidhet 4 herë njëra pas tjetrës. Shënojmë faqen nga bie monedha sa herë që e hedhim duke e treguar me S, kur ajo bie nga ana e stemës dhe me L, kur bie nga ana tjetër.
Rezultati i provës është një katërshe prej katër shkronjash nga shkronjat S dhe L. Për shembull: (S, S, L, S) ose (L, S, L, L) etj.
Shënojmë A ngjarjen: “bie 2 herë stemë dhe 2 herë lek” dhe B ngjarjen: “bie 3 herë stemë dhe 1 herë lek ose 1 herë stemë dhe 3 herë lek”. Cila nga ngjarjet A dhe B e ka probabilitetin më të madh për të ndodhur?

Zgjidhje

Arsyetojmë duke përdorur ***metodën e pemës***. Kjo metodë lejon të gjenden të gjitha rezultatet e provës, pra edhe numri i tyre. Skematikisht ajo është treguar në figurën 16.3.

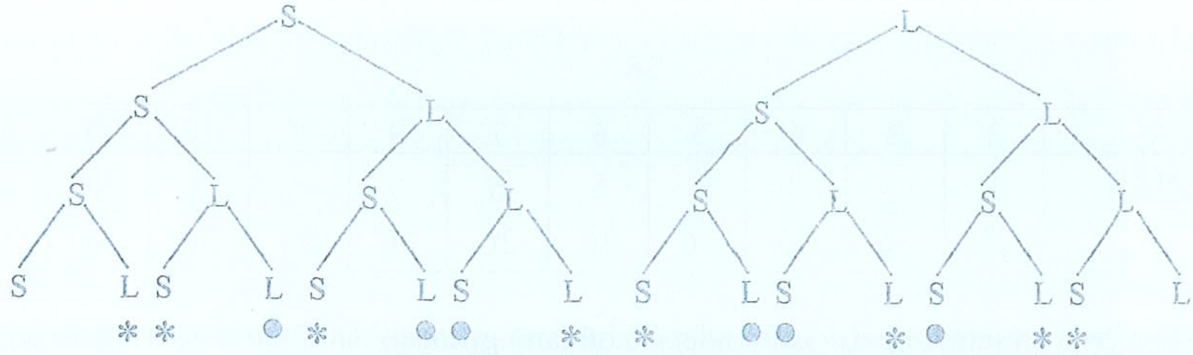


Figura 16. 3

Parimi i ndërtimit të saj është ky: Në fillim, monedha mund të bjerë *S* ose *L*. Pastaj për çdo rezultat kemi dy degë (stemë *S* dhe lek *L*) që tregojnë mundësitë e rënies së monedhës në hapin pasues.

Për të gjetur rezultatet që na interesojnë, mjafton të ecim nëpër degët dhe të numërojmë ato që na duhen. Kështu në figurë me • janë shënuar rastet, kur monedha ka rënë 2 herë stemë *S* dhe 2 herë lek *L*, dhe me * janë shënuar rastet, kur monedha ka rënë 3 herë stemë *S* dhe 1 herë lek *L* ose 1 herë *S* dhe 3 herë *L*.

Meqenëse rezultatet janë njëlloj të mundshëm, atëherë mjafton të numërojmë dhe gjejmë: probabiliteti i *A* është $p(A)=\frac{6}{16}$ ndërsa probabiliteti i *B* është $p(B)=\frac{8}{16}$. Ose $p(A)=\frac{3}{8}$ ndërsa $p(B)=\frac{1}{2}$. Rrjedhimisht *B* e ka probabilitetin më të madh se *A*.

13 Hidhen dy zare, njëri i zi e tjetri i kuq, dhe gjejmë shumën e pikëve të rëna. Gjeni shpërndarjen e probabiliteteve të ndryshores *E* "Shuma e pikëve të rëna në të dyja zaret".

Për të zgjidhur këtë ushtrim përdorim ***metodën e tabelës***.

Në një tabelë me dy hyrje vendosim në njërën anë rezultatin e rënies së njërit zar dhe në anën tjetër rezultatin e rënies së zarit tjetër. Kështu në tabelën që vijon, në shtyllën vertikale majtas janë vendosur rezultatet e rënies së zarit të zi, ndërsa në rreshtin e parë lart, janë vendosur rezultatet e rënies së zarit të kuq.

Në këtë mënyrë, tabela tregon çdo rezultat kur hidhen të dyja zaret. Veç kësaj në prerjen e rreshtave me shtyllat është vendosur shuma e pikëve. Kështu në prerjen e rreshtit 3 me shtyllën 4, është vendosur numri 7, që është shumë e 3 me 4.

Zari i kuq Zari i zi	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Tabela tregon se rezultatet e provës janë 36. Rezultatet janë njëlloj të mundshme dhe atëherë probabiliteti i secilit është i barabartë me $\frac{1}{36}$. Atëherë, shpërndarja e probabiliteteve është:

E	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(E)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Shumën 3 e gjejmë në dy raste (ndër 36 që janë gjithsej), shumën 4 në tri raste etj.

Mbani mend:

Metoda e tabelës mund të përdoret edhe kur kryhen dy prova të dalluara dhe rezultati i provës është çifti i rezultatit të provës së parë me rezultatin e provës së dytë.

14 Në një provë hidhen dy zare, njëri i zi e tjetri i kuq. Mbahet shënim numri i pikëve n në faqen e sipërme të zarit të zi dhe numri m i pikëve të shënuara në faqen e sipërme të zarit të kuq.

a A është ngjarja "$n \leq 3$" dhe B është ngjarja "$m \leq 2$". Gjeni probabilitetet e ngjarjeve A dhe B.

b Gjeni probabilitetin e ngjarjes $A \cup B$.

c Gjeni probabilitetin e ngjarjes C = "$m + n < 4$ ose $m > 2$".

Zgjidhje

Në këtë provë, rezultat është çdo çift (n, m) ku n dhe m janë numra natyrorë të tillë që $1 \leq n \leq 6$ dhe $1 \leq m \leq 6$. Kemi gjithsej $6 \cdot 6 = 36$ çifte të tilla.

Të gjitha ngjarjet elementare janë njëlloj të mundshme, sepse çdo faqe në secilin zar ka të njëjtin probabilitet për të rënë, pra po kjo është e vërtetë edhe për çdo çift (n, m).

a Ngjarja A = "$n \leq 3$" i korrespondon bashkësisë së të gjithë çifteve që ndodhen në tre rreshtat e parë, rrjedhimisht: $p(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Ngjarja B = "$m \leq 2$" i korrespondon bashkësisë së të gjithë çifteve të shkruar në dy shtyllat e para, rrjedhimisht: $p(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

b Ngjarja $A \cap B$ i korrespondon bashkësisë $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$, rrjedhimisht: $p(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Përfundimisht, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

c Ngjarja C është bashkim i ngjarjeve E = "$n + m < 4$" dhe F = "$m > 2$". Shpjegoni përse E dhe F janë të papajtueshme. Gjithashtu mund të shihni se:

$$p(E)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12} \text{ dhe } p(F)=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$$

Përfundimisht gjejmë se: $p(C)=p(E\cup F)=p(E)+p(F)=\frac{1}{12}+\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$.

15 Hidhen dy zare kubikë nga të cilët njëri bie 4. Sa është probabiliteti që zari tjetër do të bjerë një numër çift?

Le të jetë A ngjarja "një zar ka rënë 4". Atëherë
$A=\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(1,4),(2,4),(3,4),(5,4),(6,4)\}$.

Vini re se numri i rasteve kur ndodh A është 11. Pra, $p(A)=\frac{11}{36}$.

Le të jetë C ngjarja "zari tjetër bie çift". Duam probabilitetin $p(C/A)$. Sipas formulës, llogarisim $p(C\cap A)$. Meqenëse $C\cap A=\{(4,2),(4,4),(4,6),(2,4),(6,4)\}$, atëherë $p(C\cap A)=\frac{5}{36}$.

Rrjedhimisht $p(C/A)=\dfrac{p(C\cap A)}{p(A)}=\dfrac{\frac{5}{36}}{\frac{11}{36}}=\dfrac{5}{11}$.

16 Në një kuti ndodhen 4 sfera të kuqe (K) dhe 4 sfera të zeza (Z). Nga kutia nxirren njëra pas tjetrës të gjitha sferat. Gjeni probabilitetin që sferat të nxirren të gjitha të alternuara d.m.th., në renditjen KZKZKZKZ.

Zgjidhje

Probabiliteti që sfera e parë të jetë e kuqe është $\frac{4}{8}$ (Nga 8 sfera, të kuqe janë 4).

Probabiliteti që sfera e dytë të jetë e zezë është $\frac{4}{7}$ (Nga 7 sfera që mbetën, të zeza janë 4).

Probabiliteti që sfera e tretë të jetë e kuqe është $\frac{3}{6}$ (Nga 6 sfera që mbetën, të kuqe janë 3).

Duke vazhduar arsyetimin në këtë mënyrë. Kemi:

$$p=\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{4^2\cdot3^2\cdot2^2\cdot1^2}{8!}=\frac{676}{8!}$$

17 Shpërndarja e ndryshores së rastit X jepet në tabelë:

X	0	1	2	3	4	5	6
P(X)	0,12	0,24	0,30	0,08	0,16	m	n

a Gjeni vlerat e m dhe n me kushtin që $m=4n$.

b Gjeni $p(2<X<5)$.

c Gjeni $p(X>3)$.

Zgjidhje

a $p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 0{,}12 + 0{,}24 + 0{,}30 + 0{,}08 + 0{,}16 = 0{,}90$. Atëherë:
$p(5 \text{ ose } 6) = 1 - 0{,}90 = 0{,}10$

Kemi $m + n = 0{,}10 \Rightarrow 4n + n = 0{,}10 \Rightarrow n = 0{,}02 \Rightarrow m = 4 \cdot 0{,}02 = 0{,}08$

b $p(2 < X < 5) = p(X = 3) + p(X = 4) = 0{,}08 + 0{,}16 = 0{,}24$

c $p(X > 3) = p(X = 4) + p(X = 5) + p(X = 6) = 0{,}16 + 0{,}08 + 0{,}02 = 0{,}26$

18 Probabiliteti që një futbollist të shënojë në gjuajtjen e njëmbëdhjetëmetërshit është 0,8. Futbollisti gjuan njëri pas tjetrit 2 njëmbëdhjetëmetërsha. Gjeni shpërndarjen e ndryshores së rastit X: "Numri i golave të shënuar".

Zgjidhje

Probabiliteti i shënimit të golit është 0,8.
Probabiliteti i mosshënimit të golit është $1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

1 $X = 0$. Kemi rastin kur futbollisti nuk shënon as herën e parë e as herën e dytë.
$p(X = 0) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$.

2 $X = 1$. Kemi rastin kur futbollisti shënon herën e parë dhe nuk shënon herën e dytë, ose nuk shënon herën e parë dhe shënon herën e dytë.
$p(X = 1) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16 + 0{,}16 = 0{,}32$

3 $X = 2$. Kemi rastin kur futbollisti shënon edhe herën e parë edhe herën e dytë.
$p(X = 2) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$

Shpërndarja e probabiliteteve jepet në tabelën e mëposhtme.

X	0	1	2
$p(X)$	0,04	0,32	0,64

19 Hidhet një zar dhe shënojmë pikët e rëna, pastaj hidhet një monedhë dhe mbahet shënim faqja nga ka rënë, së fundi nga një kuti me katër sfera, njëra blu, tjetra e kuqe, e treta e bardhë dhe e katërta e zezë, nxirret njëra dhe shënohet ngjyra. Një rezultat prove është treshja (5; S; e bardhë). Sa rezultate të mundshme ka prova?

Zgjidhje

Zari ofron 6 mundësi, monedha dy mundësi dhe kutia 4 mundësi. Pra kjo provë ka gjithsej $6 \times 2 \times 4 = 48$ rezultate.

20 Në një kuti ka 5 etiketa të ngjashme, tre të shënuara me *b* dhe dy të shënuara me *a*. Nga kutia nxirren njëra pas tjetrës, pa kthim dy etiketa. Gjeni probabilitetin që një etiketë *b* do të nxirret para një etikete *a*.

Zgjidhje

Shënojmë A ngjarjen "etiketa *a* nxirret e dyta" dhe B ngjarjen "etiketa *b* nxirret e para".
Duam probabilitetin e ngjarjes $A \cap B$:
$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B)$.

$p(B)$ është probabiliteti që etiketa *b* nxirret e para; është e qartë se $p(B) = \frac{3}{5}$;

$p(A/B)$ është probabiliteti që etiketa a nxirret e dyta kur herën e parë është nxjerrë etiketë b. Ky është probabiliteti që të nxirret një etiketë a në një kuti në të cilën ka 2 etiketa a dhe 2 etiketa b (sepse njëra është nxjerrë herën e parë), pra $p(A/B)=\frac{2}{4}$. Rrjedhimisht $p(A\cap B)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$.

21 Një zar kubik hidhet 4 herë. Gjeni probabilitetin e ngjarjes: Bien 3 pikë të paktën një herë.

Zgjidhje

Probabiliteti që në një hedhje të bien 3 pikë është $\frac{1}{6}$. Probabiliteti që në një hedhje të mos bien 3 pikë është $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

Probabiliteti që në 4 hedhje të mos bien 3 pikë është $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Probabiliteti që në 4 hedhje të bjerë të paktën një herë 3 pikë është $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=1-\frac{625}{1296}\approx 0,52$

USHTRIME PËR VETKONTROLL

1 Njëzet etiketa me numrat nga 1 në 20 janë përzier e kthyer përmbys në tavolinë. Zgjidhet rastësisht një etiketë. Gjeni probabilitetin:

a Është etiketë me numër çift.

b Është etiketë me numër pjesëtues të numrit 24.

c Është etiketë me numër të thjeshtë.

P. [a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{2}{5}$]

2 Hidhet një zar kubik i cili bie numër jo i thjeshtë. Sa është probabiliteti që ai të jetë numër çift? P. [$\frac{1}{3}$]

3 Një shkronjë zgjidhet rastësisht nga shkronjat e fjalës MATEMATIKA. Gjeni probabilitetin e ngjarjeve:

a Është zanore

b Është bashkëtingëllore

c Është shkronja K

d Është shkronja A

P. [$p(a)=\frac{1}{2}$; $p(b)=\frac{1}{2}$; $p(c)=\frac{1}{10}$; $p(d)=\frac{3}{10}$]

4 Një zar i zi dhe një zar i bardhë kubik hidhen njëkohësisht. Gjeni probabilitetin e ngjarjes:

a Shuma e pikëve në të dyja zaret është 5

b Zari i zi bie tek dhe zari i bardhë bie 6.
c Njëri zar bie 6 dhe zari tjetër bie tek.
d Prodhimi i pikëve në të dyja zaret është numër tek.
e Të paktën një zar tregon 1 pikë.

P. [a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{11}{36}$]

5 Në një kuti janë 5 sfera të kuqe, 2 sfera të zeza dhe 4 të bardha. Gjeni probabilitetin që në nxjerrje të rastësishme të dalë sferë e kuqe ose e bardhë. P. [$\frac{9}{11}$]

6 Numrat 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i shkruajmë në etiketa. Tërheqim rastësisht njërën prej tyre. Gjeni probabilitetin:
a Numri i tërhequr është më i vogël se 6.
b Numri i tërhequr është çift.
c Numri i tërhequr është më i vogël se 6 dhe çift.
d Numri i tërhequr është më i vogël se 6 ose çift.

P. [a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{7}{8}$]

7 Jepet $p(A)=\frac{9}{20}; p(B')=\frac{3}{5}; p(A\cap B)=\frac{1}{4}$. Gjeni $p(A \cup B)$. P. [$\frac{3}{5}$]

8 Në një kuti ndodhen 30 sfera me numra nga 1 në 30. Nxirret njëra prej tyre. Gjeni probabilitetin:
a Është sferë me numër çift. b Është sferë me numër më të madh se 17.
c Është sferë me numër më të vogël se 10 dhe tek. P. [a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{13}{30}$ c) $\frac{19}{30}$]

9 Në një kuti janë 12 sfera të kuqe, të bardha e jeshile. Futim dorën në kuti dhe pa e parë tërheqim një sferë. Pasi shënojmë ngjyrën e saj, e futim përsëri në kuti dhe këtë provë e realizojmë 1000 herë. Të dhënat janë në tabelë:

Ngjyra	E kuqe	E bardhë	Jeshile
Denduria	670	245	85

Përgjigjuni pyetjeve:
a A mund të parashikoni se sa prej sferave janë të kuqe, sa të bardha e sa jeshile?
b Nëse provën e realizojmë 5000 herë, sa herë do të ndeshim secilën ngjyrë?
c Rezultatet e kërkesave a dhe b janë të sakta apo të përafërta?
d Nëse luajmë lojën gjeni ngjyrën e sferës, cilën ngjyrë do të preferonit?

10 Në një klasë me 40 nxënës, 24 janë djem dhe 16 janë vajza. Ndër to 20 djem dhe 13 vajza merren me sport. Zgjidhet rastësisht një nxënës. Gjeni probabilitetin:
a Është vajzë. b Është djalë që merret me sport.

c Është vajzë që nuk merret me sport.
d Është djalë ose vajzë që merret me sport.
e Është nxënës që nuk merret me sport.

P. [$p(a) = \frac{2}{5}$; $p(b) = \frac{1}{2}$; $p(c) = \frac{3}{40}$; $p(d) = \frac{33}{40}$; $p(e) = \frac{7}{40}$]

11 Në një klub sportiv janë 65 sportistë në tri ekipe, atletikë, volejboll dhe futboll. Futbollistë janë sa 75% të atletëve dhe volejbollistë janë 150% e atletëve.
a Sa sportistë për secilin sport ka ky klub sportiv?
b Në një ditë stërvitjeve mungoi një sportist. Gjeni probabilitetin:
i Ai është futbollist. ii Ai nuk është atlet.

P. [a) 20 atletë; 15 volejbollistë; 30 futbollistë. b) i $\frac{6}{13}$ ii $\frac{9}{13}$]

12 Një firmë prodhon llamba ndriçimi. Probabiliteti që një llambë të jetë me defekt është 0,05. Sa llamba me defekt dalin gjatë një ore, në qoftë se prodhohen 1800 llamba? **P. [90 llamba]**

13 Hidhen tri monedha të ndryshme.
a Ndërtoni pemën e dendurive. b Gjeni probabilitetin:
i Bie dy herë lek e një herë stemë. ii Bie më shumë lek se sa stemë.

P. [b) i $\frac{3}{8}$ ii $\frac{1}{2}$]

14 Në një kuti ndodhen 3 sfera të bardha dhe një sferë e kuqe. Nga kutia nxjerrim një sferë. E kthejmë atë në kuti dhe më pas nxjerrim një sferë të dytë.
a Ndërtoni pemën e dendurive.
b Paraqitni në një tabelë shpërndarjen e probabiliteteve.

P.

Rezultati	Të dyja sferat janë të bardha (B, B).	Sfera e parë është e bardhë dhe e dyta e kuqe (B, K).	Sfera e parë është e kuqe dhe e dyta e bardhë (K, B).	Të dyja sferat janë të kuqe (K, K).
Probabiliteti	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

15 Në një kuti ndodhen 5 sfera të kuqe dhe 4 sfera të zeza. Nxjerrim nga kutia një sferë dhe pa e kthyer atë në kuti nxjerrim një sferë të dytë.

Gjeni probabilitetin që të dy sferat e nxjerra të jenë të kuqe. **P. [$\frac{1}{2}$]**

16 Në një etazher ndodhen 3 libra matematike dhe 3 libra fizike. Një nxënës tërheq rastësisht një libër dhe pa e kthyer atë merr edhe një libër të dytë. Gjeni probabilitetin që të dy librat e tërhequr të jenë libra matematike.

P. [$\frac{1}{5}$]

17 Në një qitje sportive probabiliteti i goditjes së shenjës është $\frac{3}{4}$. Në qoftë se shenja goditet, atëherë bëhet një e shtënë tjetër. Probabiliteti i goditjes së dy shenjave është $\frac{1}{2}$.

Gjeni probabilitetin e goditjes së shenjës së dytë. P. [$\frac{2}{3}$]

18 Hidhen 2 zare kubike nga të cilët njëri prej tyre bie 4. Gjeni probabilitetin që shuma e pikëve në të dyja zaret të jetë 7. P. [$\frac{2}{11}$]

19 Në një kuti ndodhen 3 sfera të kuqe dhe 1 sferë e zezë. Nga kutia nxirret një sferë dhe pa e kthyer atë nxirret një sferë e dytë. Gjeni probabilitetin që në fillim të nxirret sfera e kuqe e pastaj sfera e zezë. P. [$\frac{1}{4}$]

20 Hidhen tri zare kubike. Gjeni probabilitetin që në të tria zaret të bjerë i njëjti numër.

P. [$\frac{1}{36}$]

21 Një ndryshore e rastit merr vlerat 1, 2, 3, 4. Jepen: $p(X > 3) = \frac{1}{5}$. $p(X < 3) = \frac{1}{2}$. $p(X = 2) = 2p(X = 1)$. Gjeni shpërndarjen e saj.

P.

X	1	2	3	4
p(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

22 Në një anketim u regjistrua numri i fëmijëve në 300 familje të një qyteti. Të dhënat jepen në tabelë:

Numri i fëmijëve	0	1	2	3	4	5
Numri i familjeve	28	62	80	71	35	24

Shënojmë me X ndryshoren e rastit: "Numri i fëmijëve në familje".

a Gjeni shpërndarjen e saj.

b Gjeni $p(X) > 2$.

c Gjeni $p(X < 3)$. P. [b) $p(X > 2) = \frac{130}{300}$ c) $p(X < 3) = \frac{170}{300}$]

KREU 17

STATISTIKË

Popullata është bashkësia e të gjithë elementeve që ju po studioni.
Kampioni është nënbashkësi e popullatës.
Parametri është një numër që përshkruan të gjithë popullatën.
Treguesi statistikor është një numër i përftuar nga një kampion i vetëm – një ose disa të tillë mund të përdoren për të vlerësuar një parametër.

Karakteristikat e vendndodhjes: Moda, mesorja, kuartilet dhe mesatarja.
Karakteristikat e shpërndarjes: Amplituda, ndryshesa ndërkuartilore.
Moda: Vlera me dendurinë më të madhe.
Mesorja: Vlera e mesit, kur të dhënat janë renditur nga më e vogla te më e madhja.
Mesatarja: Raporti i shumës së të dhënave me numrin e tyre.
Kuartili i parë: Vlera e mesit ndërmjet vlerës më të vogël dhe mesores.
Kuartili i tretë: Vlera e mesit ndërmjet mesores dhe vlerës më të madhe.
Amplituda: Diferenca ndërmjet vlerës më të madhe me vlerën më të vogël.
Ndryshesa ndërkuartilore: Diferenca ndërmjet kuartilit të tretë dhe të parë.

Shembull

Parametri	1	2	3	4	5
Denduria	3	5	6	4	1

Renditja: 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 5

Moda: 2 **Mesorja:** 3 **Kuartili i parë:** 2 **Kuartili i dytë:** 4 **Mesatarja:** 2,73
Amplituda: $5 - 1 = 4$ **Ndryshesa ndërkuartilore:** $4 - 2 = 2$

Ushtrime të zgjidhura

1. Jepet vargu i numrave 5, 4, 10, 3, 3, 4, 7, 4, 6, 5. Gjeni, modën, mesoren, mesataren dhe amplitudën.

Zgjidhje

Duke i radhitur numrat nga më i vogli te më i madhi kemi:
3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 10.

Mesatarja është $\frac{5+4+10+3+3+4+7+4+6+5}{10} = \frac{51}{10} = 5{,}1$.
Mesorja është 4,5.
Moda është 4.
Amplituda është 7.

2 Notat e marra nga 100 studentë në një test jepen në tabelë.

Nota x	0	1	2	3	4
Denduria f	4	19	25	29	23

Gjeni mesataren, mesoren, klasën modale.

Zgjidhje

$$\text{Mesatarja} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f} = \frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 19 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 29 + 4 \cdot 23}{100} = \frac{248}{100} = 2{,}48.$$

Mesorja është gjysmëshuma e numrave që zënë vendet 50 e 51 në radhitjen rritëse. Të dy ata janë 3, pra mesorja $\frac{3+3}{2} = 3$.
Klasa modale është 3.

3 Të dhënat e grupuara për rezultatet e 51 nxënësve në një test jepen në këtë tabelë dendurish.

Pikët	30–39	40–49	50–59	60–69
Denduria	7	14	21	9

Gjeni mesataren, mesoren, klasën modale.

Zgjidhje

Gjejmë pikën e mesit për secilën klasë. Ato janë 34,5; 44,5; 54,5; 64,5.

$$\text{Mesatarja është } \frac{34{,}5 \cdot 7 + 44{,}5 \cdot 14 + 54{,}5 \cdot 21 + 64{,}5 \cdot 9}{51} \approx 50{,}7.$$

Mesorja është rezultati i 26[të] që ndodhet në intervalin 50–59 (nuk mund të gjejmë mesoren e saktë).
Klasa modale është [50, 59[(nuk mund të gjejmë vlerën e saktë të modës).

4 Në një çerdhe fëmijësh, u mat gjatësia e 24 fëmijëve si më poshtë:

79	80	86	78	78	76	81	80
75	79	81	85	77	78	80	77
88	89	73	71	70	89	80	71

a Gruponi këto të dhëna në klasa sipas intervaleve $70 \leq a < 75$; $75 \leq a < 80$; $80 \leq a < 85$; $85 \leq a < 90$.
Gjeni: **i** klasën modale;

ii klasën në të cilën bën pjesë mesorja;
iii mesataren aritmetike të përafërt.

Zgjidhje

Grupimi	$70 \leq a < 75$	$75 \leq a < 80$	$80 \leq a < 85$	$85 \leq a < 90$
Denduria	4	9	6	5
Përqindja	21%	29%	25%	25%

Klasa modale: [75, 80[
Klasa në të cilën bën pjesë mesorja: [75, 80[
Mesatarja aritmetike (e përafërt).

$$m = \frac{72{,}5 \cdot 4 + 77{,}5 \cdot 9 + 82{,}5 \cdot 6 + 87{,}5 \cdot 5}{24} = 80$$

5 Një studiues vëzhgoi 1800 persona të një qyteti (1200 djem dhe 800 vajza) për të parë sa prej tyre ishin mëngjarashë. Pas kësaj hartoi tabelën e mëposhtme:

	Gjithsej	Mëngjarashë
Djem	1000	80
Vajza	800	50

Përgjigjuni pyetjeve:
a Sa % e djemve janë mëngjarashë?
b Sa % e vajzave janë mëngjarashe?
c Nga përfundimi i parë a mund të themi që në një klasë me 12 djem, një prej tyre është mëngjarash? Pse?
d A mund të themi që në 3600 banorë të qytetit rreth 260 prej tyre janë mëngjarashë?
e A mund të themi që rreth 7% e banorëve të vendit tonë janë mëngjarashë?

Zgjidhje

a 80 : 1000 = 8% e djemve janë mëngjarashë.
b 50 : 800 = 6,25% e vajzave janë mëngjarashe.
c Jo. Sepse 12 banorë janë përfaqësi e vogël për 1600 banorë.
d Po. Këto të dhëna janë për 1800 banorë dhe e përfaqësojnë mirë qytetin që ka 3600 banorë.
d Jo, sepse 1600 banorë nuk e përfaqësojnë vendin tonë me rreth 3000000 banorë.

6 Në një ndërmarrje të vogël punojnë 10 vetë. Paga mujore e secilit nga punonjësit tregohet në tabelë:

Paga	Numri i punonjësve	Kualifikimi
35500	5	punëtor
36500	1	punëtor
37000	2	punëtor
40000	1	drejtues
40000	1	drejtues

Paga e njërit nga drejtuesit rritet nga 30000 në 40000 dhe e të tjerëve mbetet e pandryshuar.

a A ka ndryshuar mesorja?

b A ka ndryshuar mesatarja?

Shpjegoni përgjigjet që do të jepni.

Zgjidhje

a Mesorja nuk ka ndryshuar, sepse ajo është $\frac{35500+36500}{2}$ dhe mbetet po kaq edhe pas rritjes së pagës për një nga drejtuesit.

b Mesatarja ka ndryshuar, sepse ka ndryshuar paga e njërit.

7 Jepet $x+y+z=4a$. Mesatarja e numrave x, y dhe z është 12. Gjeni a.

Zgjidhje

Kemi:

$\frac{x+y+z}{3}=\frac{4a}{3}$. Nga kushti $\frac{4a}{3}=12 \Rightarrow a=9$

8 Në rrugë, AB paraqitet me ngjitje e zbritje. Një makinë, rrugën nga A në B e bën me shpejtësi 40 km/orë, ndërsa rrugën nga B në A e bën me shpejtësi 80 km/orë.

Gjeni shpejtësinë mesatare të makinës gjatë gjithë rrugës.

Zgjidhje

Shënojmë me x gjatësinë e rrugës. Koha për rrugën nga A në B është $t_1=\frac{x}{40}$, ndërsa koha për rrugën nga B në A është $t_2=\frac{x}{80}$. Koha gjatë gjithë rrugës (vajtje-ardhje) është $t_1+t_2=\frac{x}{40}+\frac{x}{80}=\frac{3x}{80}$, ndërsa rruga është $x+x=2x$.

Në këtë mënyrë, shpejtësia mesatare (vajtje-ardhje) është:

$$\frac{2x}{t_1+t_2}=\frac{2x}{\frac{3x}{80}}=\frac{160}{3}=53\frac{1}{3}\text{ km/orë}$$

9 Mesatarja e numrave a dhe b është 5; Mesatarja e numrave b dhe c është 12. Mesatarja e numrave a dhe c është 10. Gjeni mesataren e numrave a, b dhe c.

Zgjidhje

Kemi

$$\frac{a+b}{2}=5 \Rightarrow a+b=10; \quad \frac{b+c}{2}=12 \Rightarrow b+c=24; \quad \frac{a+c}{2}=10 \Rightarrow a+c=20$$

Duke mbledhur anë për anë këto tri barazime kemi:

$$a+b+b+c+a+c=10+24+20 \Rightarrow 2(a+b+c)=54 \Rightarrow a+b+c=27 \Rightarrow$$

$$\frac{a+b+c}{3}=9$$

10 Në një klasë me 45 nxënës, në testimin e matematikës u arrit nota mesatare 8,6. Mesatarja e djemve ishte 8, ndërsa mesatarja e vajzave ishte 9. Sa djem e sa vajza kishte klasa?

Zgjidhje

Shënojmë me x numrin e djemve të klasës. Atëherë numri i vajzave është $45 - x$. Pikët e përgjithshme djemve janë $8x$; të vajzave janë $9(45 - x)$, ndërsa të klasës janë $45 \cdot 8{,}6$. Formojmë ekuacionin:

$8x + 9(45 - x) = 45 \cdot 8{,}6 \Rightarrow x = 18$

Klasa ka 18 djem dhe 27 vajza.

11 Në një klasë, 40% e nxënësve janë vajza. Në një testim morën nota kaluese 60% e vajzave dhe 40% e djemve. Gjeni përqindjen kaluese të klasës.

Zgjidhje

Shënojmë me $100x$ numrin e nxënësve të klasës. Atëherë $40\,x$ janë vajza dhe $60\,x$ janë djem.

Morën nota kaluese $40x \cdot \frac{60}{100} = 24x$ vajza dhe $60x \cdot \frac{40}{100} = 24x$ djem

Morën nota kaluese gjithsej $24x + 24x = 48x$ nxënës

Përqindja kaluese është $\frac{48x}{100x} \cdot 100 = 48\%$

12 Jepet $2 \le x \le 5$ dhe $4 \le y \le 9$. Shënojmë me m mesataren e numrave x dhe y, me p mesataren e numrave $\frac{1}{x}$ dhe $\frac{1}{y}$, dhe me q mesataren e numrave $\frac{2}{x}$ dhe $\frac{3}{y}$. Provoni se:

a $3 \le m \le 7$ b $\frac{7}{45} \le p \le \frac{3}{8}$ c $\frac{11}{30} \le q \le \frac{7}{8}$

Zgjidhje

a Kemi $2 \le x \le 5$ dhe $4 \le y \le 9$. Duke mbledhur anë për anë këto mosbarazime kemi: $6 \le x + y \le 14$. Duke pjesëtuar me 2 kemi $3 \le \frac{x+y}{2} \le 7 \Rightarrow 3 \le m \le 7$.

b $2 \le x \le 5 \Rightarrow \frac{1}{5} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{2}$

$4 \le y \le 9 \Rightarrow \frac{1}{9} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{4}$. Duke mbledhur anë për anë dy mosbarazimet e fundit kemi:

$\frac{1}{5} + \frac{1}{9} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{14}{45} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \le \frac{3}{4}$. Duke pjesëtuar me 2 mosbarazimin e fundit kemi:

$$\frac{7}{45} \le \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2} \le \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{7}{45} \le p \le \frac{3}{8}$$

c $\quad 2 \leq x \leq 5 \Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{2}{x} \leq 1$

$4 \leq y \leq 9 \Rightarrow \frac{1}{9} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{9} \leq \frac{3}{y} \leq \frac{3}{4}$ Duke mbledhur anë për anë dy mosbarazimet e fundit kemi:

$\frac{2}{5} + \frac{3}{9} \leq \frac{2}{x} + \frac{3}{y} \leq 1 + \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{11}{15} \leq \frac{2}{x} + \frac{3}{y} \leq \frac{7}{4}$. Duke pjesëtuar me 2 mosbarazimin e fundit kemi:

$$\frac{11}{15} \leq \frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{y}}{2} \leq \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{11}{30} \leq q \leq \frac{7}{8}$$

13 Në figurën 17.1 jepet grafiku i mungesave të nxënësve të një shkolle gjatë gjithë muajve të vitit shkollor.

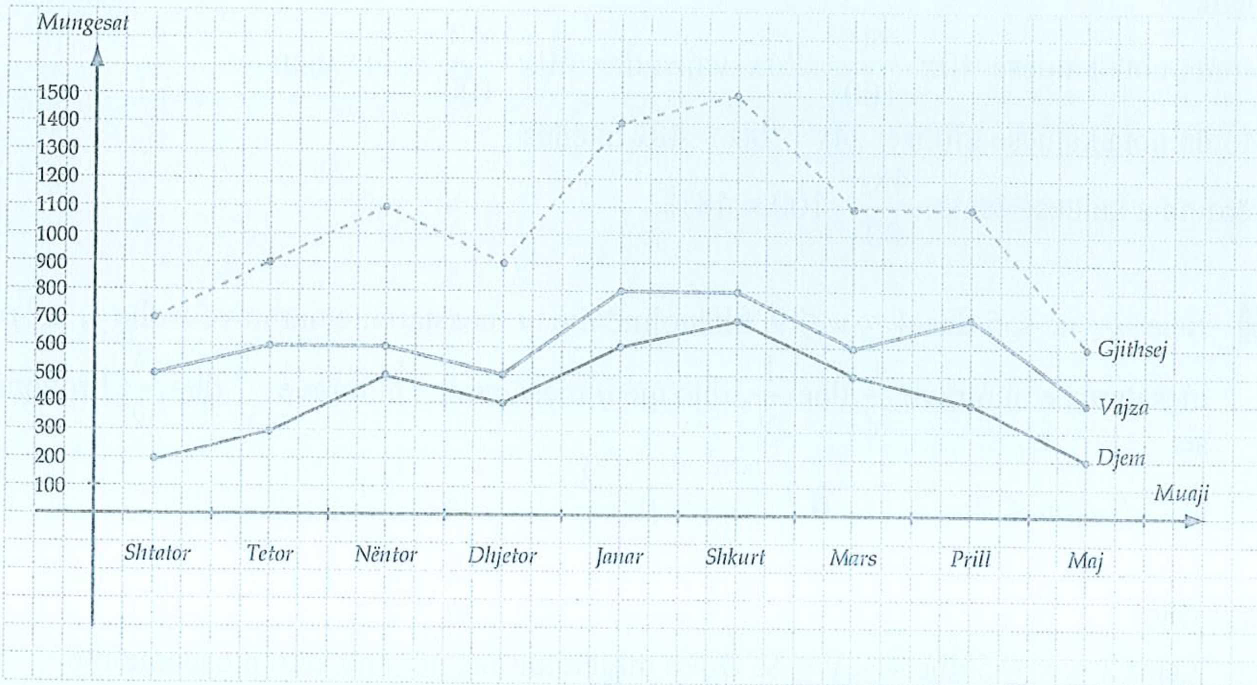


Fig. 17.1

Përgjigjuni pyetjeve:

a $\quad$ Në cilin muaj numri i mungesave të vajzave ishte më i vogël? Më i madh?

Zgjidhje

Në grafik, muajit me numrin më të vogël të mungesave për vajzat, i përgjigjet ajo pikë e tij, e cila e ka ordinatën më të vogël. Vëmë re se ajo i takon muajit shtator dhe muajit maj. Të dy këtyre muajve u korrespondojnë 200 mungesa.
Në të njëjtin grafik, ordinata më e madhe është ajo e muajit shkurt. Rrjedhimisht numri më i madh i mungesave për vajzat është arritur në muajin shkurt me 700 mungesa.

b Në cilin muaj numri i mungesave të nxënësve ishte minimal? Maksimal?

Zgjidhje

Më i vogël: Muaji maj me 600 mungesa.
Më i madh: Muaji shkurt me 1500 mungesa.

c Në cilin muaj numri i mungesave gjithsej, ishte më i vogël sesa në muajin paraardhës?

Zgjidhje

Muajt nëntor-dhjetor; shkurt-mars; prill-maj.

d Në muajin dhjetor, sa për qind më i madh ishte numri i mungesave të djemve në krahasim me atë të vajzave?

Zgjidhje

Në këtë muaj vëmë re se numri i mungesave për vajzat është 400, ndërsa për djemtë është 500. Në përqindje, numri i mungesave të djemve është $\frac{500-400}{400}=25\%$ më i madh sesa i vajzave.

e Sa është numri mesatar i mungesave për vajzat, për djemtë dhe gjithsej?

Zgjidhje

Për vajzat: $m_V=\frac{200+300+500+400+600+700+500+400+200}{9}=\frac{3800}{9}=422$

Për djemtë:

$$m_D=\frac{500+600+600+500+800+800+600+700+400}{9}=\frac{5500}{9}=611$$

Gjithsej:

$$m=\frac{3800+5500}{18}=517$$

f Me sa për qind u ul numri i mungesave të vajzave në periudhën nëntor-dhjetor?

Zgjidhje

Në periudhën nëntor-dhjetor për vajzat kemi këtë situatë:
Nëntor 500 mungesa; dhjetor 400 mungesa.

Në përqindje, numri i mungesave është ulur me $\frac{500-400}{500}=20\%$.

g Me sa për qind u rrit numri i mungesave të djemve në periudhën dhjetor-janar?

Zgjidhje

$$\frac{800-500}{500}=60\%$$

h Sa është diferenca e mungesave ndërmjet muajit me mungesa më të shumta me atë më të pakta për vajzat, për djemtë dhe gjithsej?

Për vajzat: 700 – 200 = 500 (shkurt-shtator (maj))
Për djemtë: 800 – 400 = 400 (janar-shkurt)-maj
Gjithsej: 1500 – 600 = 900 (shkurt-maj)

14 Në tabelën e mëposhtme jepen të dhëna për kërkesën e një produkti në varësi të çmimit të tij.

Çmimi x (në mijë lekë)	Kërkesa y (në kv)
10	1
9	1,5
8	2
7	3
6	4
5	5

a Paraqitni grafikisht të dhënat e kësaj tabele.
b Ndërtoni drejtëzën e përafrimit më të mirë.
c Përshkruani llojin e korrelacionit që vini re.

Zgjidhje

a Në figurën 17.2/a të dhënat e kësaj tabele paraqiten grafikisht.
Në boshtin e abshisave janë vendosur vlerat e çmimit dhe në boshtin e ordinatave janë vendosur vlerat përkatëse të kërkesës.
b Në figurën 17.2/b tregohet drejtëza e përafrimit më të mirë.

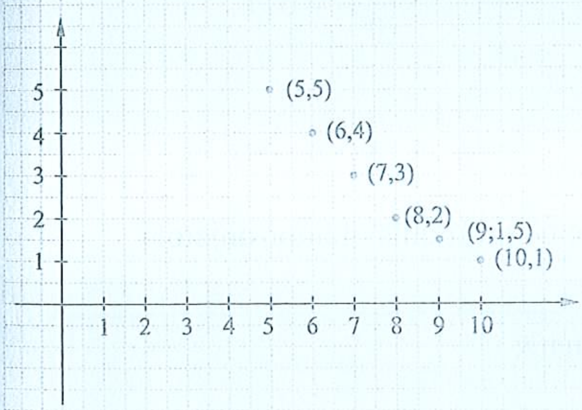


Fig. 17.2/a

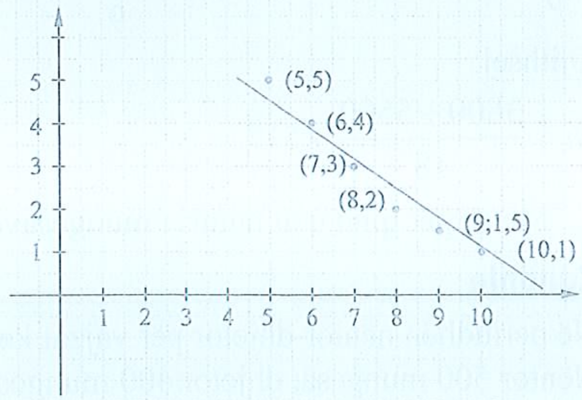


Fig. 17.2/b

c Vihet re korrelacion i fortë negativ, dukuri që është e shpjegueshme sepse me rritjen e çmimit kemi ulje të kërkesës.

15 Janë matur kohët që i duhen secilit në një grup prej 15 nxënësish për të përfunduar një test. Kohët e tyre (në minuta) ishin: 32, 34, 33, 37, 39, 39, 42, 45, 41, 40, 40, 44,13, 36, 36.

a Njehsoni modën, mesoren dhe mesataren aritmetike të të dhënave.
b Tregoni që ka vetëm një vlerë të jashtëndodhur për këto të dhëna.

c Jepni një arsye të mundshme për:
 i heqjen e vlerës së jashtëndodhur;
 ii lënien e vlerës së jashtëndodhur.

d Një mësues vendosi ta hiqte vlerën e jashtëndodhur. Pa kryer njehsime të tjera, shpjegoni si do të ndikojë kjo në përgjigjet e kërkesës a.

Zgjidhje

a Moda = 36, 39 dhe 40; Mesorja = 39; Mesatarja aritmetike = 36,7

b Vlerë e jashtëndodhur 13.

c i Vlera e jashtëndodhur mund të jetë marrë nga një gabim. Për shembull, koha mund të jetë regjistruar gabim; ose nxënësi mund të ketë patur ndonjë lloj ndihme, që do të thotë se kjo vlerë e kohës nuk është një rezultat i vlefshëm. Në të dyja rastet, mbajtja e kësaj vlere shtrembëron rezultatet.
 ii Në qoftë se kjo është një vlerë e vërtetë, heqja e saj do të japë pamje të gabuar për kohët e përfundimit të testit, çka do të nënvlerësonte ndryshimin e rezultateve.

d Moda dhe mesorja nuk ndryshojnë, mesatarja aritmetike rritet.

16 Për të kontrolluar cilësinë e llambave u mat koha e punës e 180 llambave. Të dhënat jepen në tabelë.

Koha e punës (në orë)	Numri i llambave
501-600	32
601-700	48
701-800	60
801-900	24
901-1000	16

Paraqitini këto të dhëna me histogram dhe diagram rrethore.

Zgjidhje

Në figurën 17.3 jepet histograma.

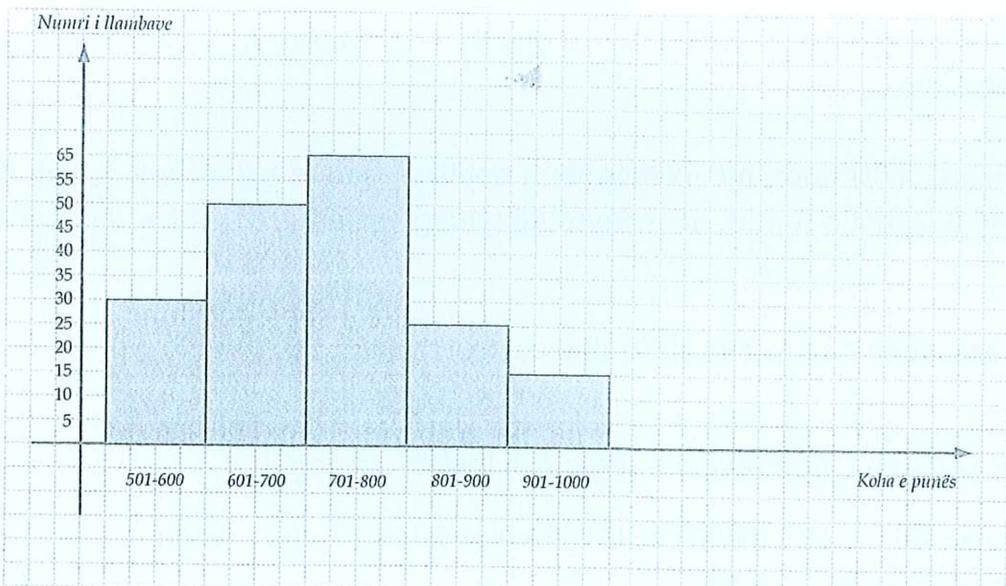


Fig. 17.3

Për të ndërtuar diagramin rrethor, llogaritim se sa gradë i takon një llambe.
$360^\circ : 180 = 2^\circ$
Rrjedhimisht sektorët e qarkut do të ndahen si më poshtë:
$32 \times 2 = 64^\circ$ është harku i sektorit që i përket 32 llambave me kohë pune 501-600 orë.
$48 \times 2 = 96^\circ$ është harku i sektorit që i përket 48 llambave me kohë pune 601-700 orë.
$60 \times 2 = 120^\circ$ është harku i sektorit që i përket 60 llambave me kohë pune 701-800 orë.
$24 \times 2 = 48^\circ$ është harku i sektorit që i përket 24 llambave me kohë pune 801-900 orë.
$16 \times 2 = 32^\circ$ është harku i sektorit që i përket 16 llambave me kohë pune 901-1000 orë.
Në Figurën 17.4 jepet diagrami rrethor.

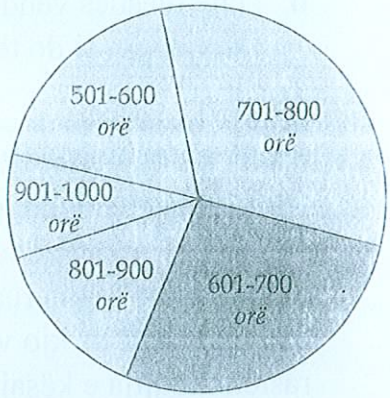


Fig. 17.4

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Në testimin e matematikës, të 25 nxënësit e një klase u vlerësuan me notat:
5, 6, 8, 7, 4, 9, 7, 9, 7, 6, 10, 8, 9, 7, 8, 19, 9, 5, 5, 6, 6, 8, 7, 9, 6
Sistemojini këto të dhëna në tabelën e mëposhtme:

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Numri i nxënësve							
Denduria (%)							

Përgjigjuni pyetjeve:
a Sa nxënës ishin kalues?
b Sa ishte përqindja kaluese e klasës?
c Sa nxënës u vlerësuan me notën 10?
d Cila notë ndeshet më shpesh?
e Cila notë ndeshet më rrallë?
f Sa është nota mesatare e klasës në këtë testim?
g Paraqitini këto të dhëna në diagram me shtylla dhe diagram rrethor.

2 Jepen numrat x; $3x - 1$; $2x + 1$; $x + 3$ dhe $4x - 1$. Mesatarja e tyre është 3. Gjeni mesoren e tyre. P. [3]

3 Në 10 lëndë mësimore, një nxënës arriti notën mesatare 8,3. Çfarë notash duhet të marrë në 2 lëndët e fundit, në mënyrë që nota mesatare e të gjitha lëndëve të jetë 8,5? P. [9 dhe 10]

4 Gjeni mesataren e numrave $\sin^2\alpha$ dhe $\cos^2\alpha$. P. [$\frac{1}{2}$]

5 Gjeni mesataren e numrave $a = \log 2$; $b = \log 25$; $c = \log 20$. P. [1]

6 Mosha mesatare e tetë nxënësve të një klase është 17 vjeç. Sa do të jetë mosha mesatare e tyre pas 5 vitesh? P. [22 vjeç]

7 Mesatarja e tri numrave është 6. Mesatarja e dy prej tyre është 7. Gjeni numrin e tretë.

P. [4]

8 Në tabelën e mëposhtme janë sistemuar të dhënat lidhur me gjatësinë e 300 vajzave të moshës 10 vjeç.

Gjatësia (në cm)	Numri
115-120	8
121-125	32
126-130	58
131-135	82
136-140	60
141-145	54
146-150	6

Gjeni:

a Klasën modale.

b Klasën në të cilën bën pjesë mesorja.

c Mesataren aritmetike të përafërt.

9 Gjatë prodhimit të një detali, u mat pesha e 40 prej tyre (në gram). Të dhënat jepen në tabelën e mëposhtme:

402404	395	397	400	402	398	400	401	402
399400	407	395	401	394	396	405	406	410
402405	399	400	398	401	395	397	398	398
401399	402	404	405	400	399	400	397	403

I sistemoni këto të dhëna duke i grupuar në klasa me gjatësi 3 ($394 \leq a < 396$ etj.).

Gjeni:

a klasën modale;

b klasën në të cilën bën pjesë mesorja;

c mesataren aritmetike të përafërt.

10 Duke matur shtatlartësinë e 40 fëmijëve njëvjeçarë në një konsultore u gjetën këto të dhëna (në cm):

75,3	81,4	85,3	70	93,2	76,8
84,5	84,2	85,1	77,6	83,1	81,2
87,9	83	82,8	71,7	89,2	88
78	72,3	88,1	78,5	71,4	82
89	84,1	85,3	83,2	87,1	81,4
83	77,4	75	81	85,1	70,4
76	90,1	84	77,6		

Sistemojini të dhënat në një tabelë duke formuar klasat $70 \leq a < 75$; $75 \leq a < 80$ etj.

Gjeni:

a klasën modale;

b klasën në të cilën bën pjesë mesorja;

c mesataren aritmetike të përafërt.
Cila klasë ka dendurinë më të madhe? Po më të vogël? Sa fëmijë e kanë gjatësinë më pak se 85 cm? Po më shumë se 85 cm?

11 Në tabelë është treguar sasia e pikëve të fituara nga nxënësit e një klase në një testim. Të dhënat janë grupuar në intervale:

Pikët	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	35-40
Numri i nxënësve	1	2	11	17	25	18	3	4

Gjeni numrin mesatar të pikëve të fituara nga një nxënës i klasës.

12 Në tabelë janë përmbledhur të grupuara të dhënat për perimetrin (në cm) të pemëve të dy pyjeve, A dhe B. Gjeni perimetrin mesatar të pemëve për secilin pyll:

Perimetri	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120	120-140	140-160
Pylli A	3	17	22	25	19	7	5	2
Pylli B	5	3	6	11	18	24	26	7

13 Pesha e fëmijëve të porsalindur në vitin 2011 (në gramë) dhe sipas seksit ishte:

Pesha (gr.)	Vajzat (%)	Djemtë (%)
deri 1500	0,29	0,25
1500-2000	0,77	0,69
2000-2500	3,86	2,72
2500-3000	21,31	14,84
3000-3500	44,64	40,36
3500-4000	24,00	31,38
mbi 4000	5,13	9,76

Krahasoni modat, mesoret dhe mesataret. Interpretojini këta tregues.

14 Numrat 1; x; y; z; 16 formojnë progresion gjeometrik.
a Gjeni mesataren e numrave x; y ; z.
b Gjeni mesataren e numrave $\log_2 x$; $\log_2 y$; $\log_2 z$. P. [a) $\frac{14}{3}$ b) 2]

15 Grafiku në figurën 17.5 tregon gjatësitë mesatare të të rinjve në një qytet në vitin 2017 (Me vija të plota grafiku është për djemtë dhe me vija të ndërprera për vajzat). Përgjigjuni pyetjeve:
a Në krahasim me vitin 2000, gjatësia mesatare e vajzave 13 vjeç është rritur me 1 cm. Sa ka qenë ajo në vitin 2000?
b A mund të shpjegoni duke u bazuar në grafik se rritja mesatare e vajzave ngadalësohet pas moshës 13 vjeçare?

c Duke u bazuar në grafik në cilën moshë djemtë janë më të gjatë se vajzat?

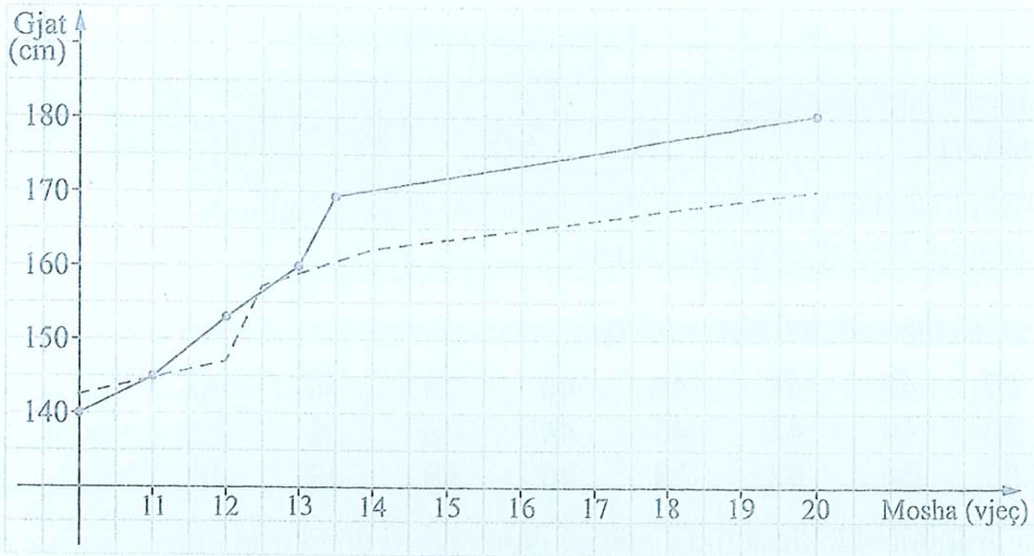


Fig. 17.5

16 Më poshtë janë sistemuar të dhënat për shtat lartësinë e 300 djemve dhjetëvjeçarë (në cm):

Shtatlartësia	Numri i djemve
120 deri 125	4
125 deri 130	21
130 deri 135	64
135 deri 140	93
140 deri 145	74
145 deri 150	32
150 deri 155	12

Llogaritni denduritë e grumbulluara dhe bëni paraqitjen grafike të tyre.

17 Për të kontrolluar cilësinë e llambave u mat koha e punës për 200 llamba. Të dhënat jepen në tabelë:

a Gjeni mesataren.

b Sa për qind e llambave e kanë kohën e punës mbi 700 orë? Nën 600 orë?

Koha e punës (në orë)	Numri i llambave
400-500	20
501-600	32
601-700	48
701-800	60
801-900	24
901-1000	16

18 Një grup prej 24 nxënësish zhvilloi qitje sportive. Pikët e arritura nga secili jepen në tabelë:

17	6	12	25	14	27	22	23	28	23	25	17
24	25	6	18	15	6	28	21	22	19	26	20
13	21	30	22	6	16						

a Formoni intervalet $6 \leq a < 12$; $12 \leq a < 18$; $18 \leq a < 24$; $24 \leq a < 30$.

b Sa për qind e nxënësve kanë grumbulluar më pak se 15 pikë? Më shumë se 24 pikë?

c Gjeni mesataren aritmetike m të pikëve të grumbulluara nga secili nxënës.

d Paraqitini këto të dhëna grafikisht.

19 Një zar kubik u hodh 3000 herë. Në tabelë janë treguar rezultatet përkatëse:

Numri i pikëve të zarit	1	2	3	4	5	6
Denduria	529	513	497	501	482	478

Ndërtoni tabelën e dendurive dhe dendurive të grumbulluara.
I paraqitini këto të dhëna grafikisht.

20 U mat pesha e 30 nxënësve në kg:

50	50	46	44	48	40	38	44	40	46
48	50	48	48	46	44	40	38	42	44
44	50	44	42	38	40	48	48	48	46

Bëni grupimin në klasa me gjatësi 4 dhe tregoni denduritë dhe denduritë e grumbulluara përkatëse.
Paraqitini këto të dhëna grafikisht.

21 Në figurën 17.6 jepen të dhëna për marrëdhëniet tregtare me jashtë shtetit të një firme (import dhe eksport).

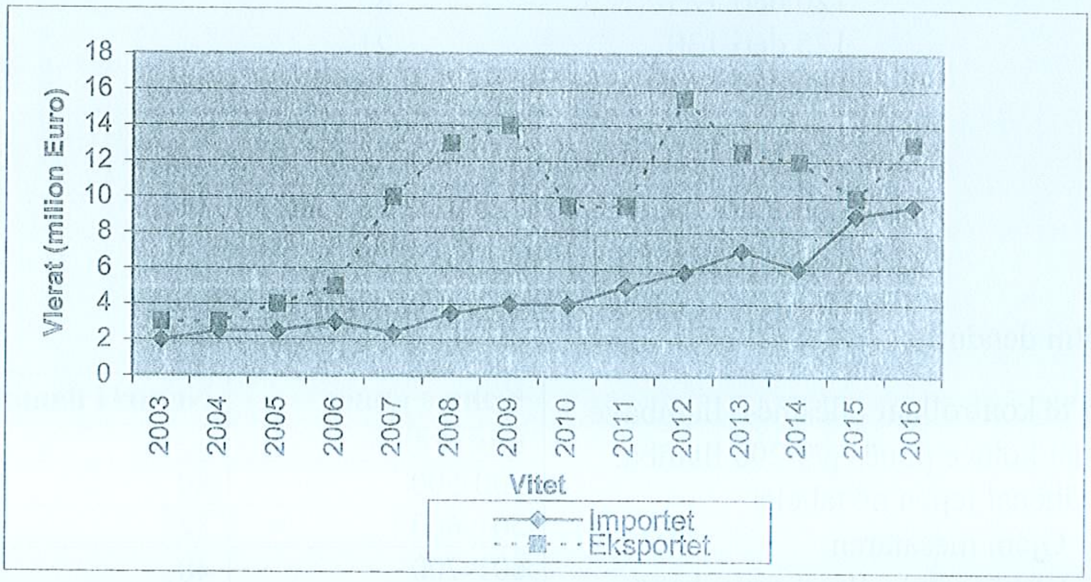


Fig. 17.6

Përgjigjuni pyetjeve:

a Për cilin nga vitet e shqyrtuar eksportet e kësaj firme u rritën më shumë në krahasim me një vit më parë?

b Sa për qind më shumë (në EURO) përbënin eksportet në krahasim me importet në vitin 2008?

c Supozojmë se në vitin 2013 importet ishin 3 milion EURO (pra jo sa paraqitet në grafik). Me këtë të dhënë me sa do të zvogëlohej mesatarja aritmetike e importeve gjatë gjithë viteve?

22 Në grafikun e figurës 17.7 jepet temperatura në datën 1 ora 12^{00} të çdo muaji për një qytet.

Fig. 17.7

Përgjigjuni pyetjeve:

a Në cilin muaj temperatura shënoi rritjen më të vogël në krahasim me një muaj më parë.

b Në cilin muaj temperatura shënoi zbritjen më të madhe në krahasim me një muaj më parë?

c Sa është ndryshesa ndërmjet temperaturës më të lartë me atë më të ulët?

d Në cilët muaj temperatura ka qenë e barabartë? Sa është kjo temperaturë?

e Në cilin muaj është shënuar temperatura më e ulët. Sa është kjo temperaturë?

23 Në tabelë jepen të dhëna për varësinë ndërmjet lartësisë nga niveli i detit dhe temperaturës.

Lartësia x (në km)	**Temperatura y (në gradë Celsius)**
1	8° C
2	2° C
3	−5° C
4	−12° C
6	−25° C
9	−45° C

Paraqitini këto të dhëna grafikisht dhe ndërtoni drejtëzën e përafrimit më të mirë.

24 Në tabelë jepen të dhëna për peshën në kg të 10 personave para dhe pas një diete një mujore.

Personi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pesha para dietës	65	64	53	73	68	75	80	70	58	77
Pesha pas dietës	63	63	50	73	65	77	75	66	59	72

Paraqitini këto të dhëna grafikisht duke vendosur në boshtin e abshisave peshën para dietës dhe në boshtin e ordinatave peshën pas dietës. Më pas, ndërtoni drejtëzën e përafrimit më të mirë.

25 Një grup prej 10 nxënësish zhvilluan provim në matematikë dhe kimi. Notat përkatëse jepen në tabelë:

Nxënësi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nota e matematikës	5	7	5	8	6	8	6	7	4	6
Nota e kimisë	6	6	7	6	7	7	7	6	5	7

Paraqitini këto të dhëna grafikisht duke vendosur në boshtin e abshisave notën e matematikës dhe në boshtin e ordinatave notën e kimisë. Më pas ndërtoni drejtëzën e përafrimit më të mirë.

TESTET

TEST 1

Rrethoni vetëm alternativën e saktë, në ushtrimet 1–13. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Numri $9^{\frac{1}{2}}$ është i barabartë me:
A 1 B 3
C 9 D 81

2 Koeficienti këndor i drejtëzës që kalon nga origjina dhe nga pika A(10; 3) është:
A 0 B 0,3 C 0,5 D 1

3 Vlera e palejuar e x në shprehjen $\frac{x}{2x-4}$ është:
A 0 B 1 C 2 D 3

4 Më i vogli numër i plotë që i përket bashkimit të bashkësive $A =]-1, 3[$ dhe $B = [0, 5]$ është:
A -1 B 0 C 3 D 5

5 Në një trekëndësh kënddrejtë, projeksionet e kateteve mbi hipotenuzë janë 4 cm dhe 9 cm. Lartësia mbi hipotenuzë është:
A 1 cm B 4 cm
C 6 cm D 9 cm

6 Shprehja $(x+2)^2+(x-2)^2$ është e barabartë me shprehjen:
A $2x^2+8$ B $8x$
C $8x+16$ D $(x+4)^2$

7 Jepet ekuacioni $2\sin x - 1 = 0$. Rrënjë e tij është numri:
A $\frac{\pi}{2}$ B $\frac{\pi}{3}$
C $\frac{\pi}{4}$ D $\frac{\pi}{6}$

8 Inekuacioni $-\frac{x}{2} > 3$ është i njëvlershëm me inekuacionin:
A $-x > 6$ B $x > 6$
C $x < -6$ D $-6 < x < 6$

9 Hipotenuza e një trekëndëshi kënddrejtë është 10 cm, kurse njëri katet është 5 cm. Këndi përballë këtij kateti është:
A 90° B 60°
C 45° D 30°

10 $(-1)^{101} =$
A 101 B 1
C 0 D -1

11 $\log_3 15 - \log_3 5 =$
A $\log_3 75$ B 2
C 1 D 0

12 Derivati i funksionit $y = x^3 - 3x^2 + 1$ në pikën $x = 1$ është:
A -3 B -2
C -1 D 0

13 Integrali i caktuar $\int_0^1 4x^3 dx$ është i barabartë me:
A 4 B 3
C 1 D 0

14 Jepet $a + a + a + a = b$.
Atëherë $4b - a =$
A 0 B $3a$
C $15a$ D $16a$

15 Sa për qind e 50 është numri 40?

A 40% B 50%

C 60% D 80%

16 Raporti i rrezeve të të dy rrathëve është 1:2. Raporti i perimetrave të tyre është:

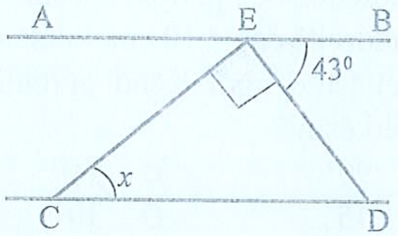
A 1:4 B 1:3

C 1:2 D 1:1

17 Në figurë jepen AB//CD dhe CE⊥ED. Këndi x është i barabartë me:

A 43^0 B 47^0

C 53^0 D 37^0



18 Në qoftë se $f(x)=x+\frac{1}{x}$, atëherë $f(\frac{1}{x})=$

A $x+\frac{1}{x}$ B 1

C $x^2+\frac{1}{x^2}$ D $\frac{x^2+1}{x^2}$

19 Këndi që formojnë akrepat e sahatit në orën 4:30 është:

A 45^0 B 60^0

C 75^0 D 90^0

20 Formula $F=\frac{9}{5}C+32$ kthen gradët Celsius në gradë Fahrenheit. Temperaturës -20^0C, në gradë Fahrenheit i korrespondon temperatura:

A 0^0F B -4^0F

C 4^0F D 12^0F

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet 21–32.

21 Zgjidhni inekuacionin $\frac{2x-1}{3}-\frac{x-2}{4}>\frac{1-5x}{2}-1$ dhe paraqitni bashkësinë e zgjidhjeve të tij në boshtin numerik.

3 pikë

22 Thjeshtoni shprehjen $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^{-2}+y^{-2}}}$ për $x>0$ dhe $y<0$.

3 pikë

23 Jepet funksioni $y=x^3-mx$.

a Gjeni m, në mënyrë që grafiku i tij të kalojë nga pika $(-1, 5)$.

1 pikë

b Për vlerën e gjetur të m, gjeni ekstremumet e funksionit.

2 pikë

24 Shuma e dy numrave është 19, kurse ndryshesa e tyre është 9. Gjeni numrat.

3 pikë

25 Jepen vektorët

$\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ dhe $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$. Gjeni gjatësinë e vektorit $3\vec{u}-2\vec{v}$

2 pikë

26 Pikat A(2, –5); B(–4, 1) dhe C(4, –3) janë kulme të njëpasnjëshme të paralelogramit ABCD. Gjeni:

a Koordinatat e pikës së prerjes së diagonaleve të tij.

2 pikë

b Koordinatat e kulmit D të paralelogramit.

2 pikë

27 Jepet funksioni $y = x^3 - 2x + 1$.

a Gjeni ekuacionin e tangjentes me grafikun e tij në pikën me abshisë 1.

2 pikë

b Gjeni koordinatat e pikës në të cilën kjo tangjente pret përsëri grafikun e funksionit.

2 pikë

28 Një zar kubik hidhet 2 herë. Gjeni probabilitetin:

a Të dyja herët, zari tregon 5 pikë.

1 pikë

b Zari tregon 5 pikë vetëm një herë.

1 pikë

c Zari asnjëherë nuk tregon 5 pikë.

1 pikë

d Zari tregon 5 vetëm herën e dytë.

1 pikë

29 Rezultatet vjetore të nxënësve të një klase në matematikë paraqiten në tabelën e mëposhtme:

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Numri i nxënësve	5	6	5	6	6	5	2

a Ç'përqindje e nxënësve kanë notë më të lartë se nota mesatare e klasës?

2 pikë

b Gjeni mesoren e vargut të notave.

1 pikë

c Gjeni modën e vargut të notave.

1 pikë

30 Në një progresion aritmetik, shuma e kufizës së tretë me kufizën e njëmbëdhjetë është –6, ndërsa shuma e kufizës së parë me kufizën e shtatë është –24. Gjeni:

a kufizën e parë dhe diferencën e progresionit;

2 pikë

b kufizën e parë pozitive të progresionit.

2 pikë

31 Jepet trapezi dybrinjënjëshëm me baza 20 cm; 10 cm dhe me brinjë anësore 13 cm.

a Gjeni lartësinë e trapezit.

2 pikë

b Gjeni syprinën e trapezit.

1 pikë

32 Jepet funksioni $y = x^2 - 1$.

a Gjeni pikat e prerjes se grafikut të tij me boshtet koordinatave.

1 pikë

b Gjeni syprinën e figurës së kufizuar nga grafiku i funksionit dhe boshti i abshisave.

2 pikë

TEST 2

Rrethoni vetëm alternativën e saktë, në ushtrimet 1–13. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Vlera e $\frac{3^5}{3^7}$ është e barabartë me:

A 3^{-2} B 3^2
C 3^{12} D 3^{35}

2 n është numër natyror. Cili nga numrat e mëposhtëm është me siguri pozitiv?

A $(-1)^{4n+1}$ B $(-2)^{n+1}$
C $(-3)^{1-n}$ D $(-5)^{10-2n}$

3 Me cilin prej inekuacioneve më poshtë është i njëvlershëm inekuacioni $-3x \geq 6$?

A $x \geq -2$ B $x \geq 2$
C $x \leq -2$ D $x < -2$

4 Mesi i segmentit AB, ku A(3, 5) dhe B(7, 11) është pika me koordinata:

A (5, 8) B (7, 6)
C (0, 0) D (10, 16)

5 Gjeni vlerën e shprehjes $\sin^2 110^0 + \cos^2 110^0$

A -2 B -1
C 0 D 1

6 Grafiku i funksionit $y = \sqrt{x-3}$ kalon nga pika me koordinata:

A $(4, -1)$ B (4, 1)
C (3, 1) D (0, 0)

7 Vëllimi i kubit është i barabartë me 8 m^3. Syprina në m^2 e njërës prej faqeve të tij është:

A 2 B 4
C 8 D 64

8 Nëse për çdo $x \in R$ kemi $f(x) = x^2 - 5x$, atëherë $f(-x)$ është:

A $x^2 - 5x$ B $x^2 + 5x$
C $-x^2 + 5x$ D $-x^2 - 5x$

9 Derivati i funksionit $y = 3x^4$ në pikën x është:

A $12x$ B $12x^2$
C $12x^3$ D $12x^5$

10 $\int_0^1 5x^4 dx$ është:

A 0 B 1
C 4 D 15

11 Pingule me drejtëzën $2x + y - 1 = 0$ është drejtëza:

A $y = x$ B $y = -x$
C $y = -2x$ D $y = \frac{1}{2}x$

12 Probabiliteti i ngjarjes që në rrokullisjen e një zari kubik të dalë një numër i thjeshtë është:

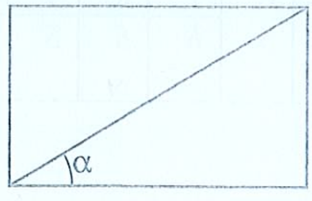
A 0 B 0,5
C 0,6 D 1

13 Në një paralelogram, dy kënde fqinje janë x dhe $3x$. Këndi më i vogël i paralelogramit është:

A 30^0 B 45^0
C 60^0 D 90^0

14 Në figurë, ABCD është drejtkëndësh në të cilin AC = 10 cm dhe BC = 5 cm. Këndi α është i barabartë me:

A 30^0 B 45^0
C 60^0 D 75^0



15 Në qoftë se $\log_a b = x$, atëherë:

A $b = a^x$ B $a = b^x$
C $x = a^b$ D $x = b^a$

16 Raporti i perimetrit të rrethit me diametrin e tij është:

A 1 B π

C 2π D $\frac{\pi}{2}$

17 Koeficienti këndor i drejtëzës që kalon nga origjina e koordinatave dhe pika (2, 1) është:

A 3 B 2

C 1 D $\frac{1}{2}$

18 Jepet $f(x) = \frac{1}{x}$. Atëherë $f^{1}(x) =$

A $-x$ B x

C $-\frac{1}{x}$ D $\frac{1}{x}$

19 90% e $\frac{1}{9}$ është e barabartë me:

A $\frac{1}{90}$ B $\frac{1}{10}$

C $\frac{1}{11}$ D $\frac{1}{45}$

20 Këndi 270⁰, i shprehur në radian është:

A $\frac{\pi}{2}$ B $\frac{3\pi}{2}$

C π D 2π

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet 21–32.

21 Jepet inekuacioni $(2x-1)^2-(x-3)(1-4x)+5<0$

a Kontrolloni nëse $x = 3$ e vërteton inekuacionin.

1 pikë

b Zgjidhni inekuacionin.

2 pikë

22 Skiconi grafikun e funksionit $y = x^2 - 2x - 3$, duke gjetur kulmin dhe pikat e prerjes me boshtin Ox.

3 pikë

23 Jepet vargu $u_n = 3n + 2$.

a Tregoni që vargu është progresion aritmetik.

1 pikë

b Gjeni u_1 dhe d.

1 pikë

c A është numri 62 kufizë e progresionit?

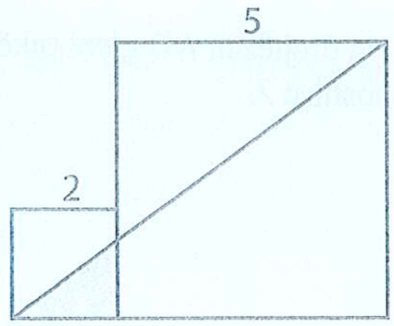
1 pikë

d Gjeni kufizën e 15^të^ të progresionit.

1 pikë

24 Katrorët me brinjë 2 cm dhe 5 cm janë vendosur si në figurë. Gjeni syprinën e trekëndëshit të ngjyrosur në figurë me përmasa të dhëna në cm.

3 pikë



25 Jepen rrezevektorët $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dhe $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a Shkruani vektorin njësi që ka drejtimin e $\overrightarrow{OA}$.

1 pikë

b Gjeni koordinatat e vektorit $\overrightarrow{AB}$.

1 pikë

c Gjeni gjatësinë e vektorit $2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$.

2 pikë

26 Jepet funksioni $y = x + \frac{k}{x}$

a Gjeni k, në mënyrë që grafiku i tij të kalojë nga pika $(-1, -2)$.

1 pikë

b Për vlerën e gjetur të k, gjeni ekstremumet e funksionit.

3 pikë

27 Një monedhë hidhet tri herë njëra pas tjetrës.

a Renditni të gjitha rezultatet e mundshme.

2 pikë

b Gjeni probabilitetin që vetëm një herë të bjerë lek. 1 pikë

28 Jepen pikat A(–1, –2) dhe B(3, 3).

a Gjeni ekuacionin e drejtëzës AB.

1 pikë

b Në drejtëzën AB gjeni pikën me abshisë 2.

1 pikë

c Në drejtëzën AB gjeni pikën me ordinatë 5.

1 pikë

d Gjeni pikën e prerjes së drejtëzës AB me boshtin e abshisave.

1 pikë

29 Jepet katrori me brinjë 9 cm. Gjeni syprinën e gjashtëkëndëshit të rregullt, perimetri i të cilit është i barabartë me perimetrin e katrorit.

3 pikë

30 Në një klasë me 35 nxënës, $\frac{3}{7}$ janë vajza. Mesatarja e notës së vajzave në matematikë është 7,5 kurse mesatarja e notës së djemve është 8. Gjeni mesataren e notës për klasën.

3 pikë

31 Vërtetoni identitetin $\frac{8^{4x-1}.4^{x+4}}{2^{5+13x}} = 2^x$

3 pikë

32 Sipërfaqet e dy sferave janë në raportin 4:25. Në ç' raport janë vëllimet e tyre? 3 pikë

TEST 3

Rrethoni vetëm alternativën e saktë, në ushtrimet 1–13. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Numri 2^{-1} është i barabartë me:

A 2 B 1
C 0,5 D −1

2 Jepet ekuacioni $x^2 + 6x + 8 = 0$.
Numri i rrënjëve reale të tij është:

A 3 B 2
C 1 D 0

3 a është numër pozitiv dhe b është numër negativ. Cili nga numrat e mëposhtëm është negativ?

A $|ab|$ B $a|b|$
C $|a|b$ D $a+|b|$

4 Në një drejtkëndësh, diagonalja është 10 cm, kurse njëra nga brinjët është 6 cm. Syprina e drejtkëndëshit në cm^2 është:

A 100 B 80
C 60 D 48

5 Gjeni vlerën më të madhe të mundshme të funksionit y = 3 + sin$x$, $x \in$ R.

A 4 B 3
C 2 D 1

6 Vlera e x është shtatë herë më e vogël se vlera e y. Cili nga relacionet e mëposhtme i përgjigjet kësaj varësie?

A $x < 7y$ B $y < 7x$
C $x = 7y$ D $y = 7x$

7 Bashkësia e përcaktimit të funksionit $y = \sqrt{x-3}$ është:

A $]-\infty, +\infty[$ B $]-\infty, 3[$
C $[3, +\infty[$ D $]-3, 3[$

8 Derivati i funksionit $y = \dfrac{1}{x^2}$ në pikën $x \neq 0$ është:

A $-\dfrac{1}{x}$ B $-\dfrac{2}{x^2}$
C $-\dfrac{2}{x^3}$ D $-\dfrac{3}{x^4}$

9 Integrali $\int 2x\,dx$ është:

A $x + c$ B $x^2 + c$
C $x^3 + c$ D $x^4 + c$

10 Grafiku i funksionit $y = x^3 - 2x + 3$ kalon nëpër pikën me koordinata:

A $(-1, 0)$ B $(-1, 6)$
C $(-1, 4)$ D $(-1, 5)$

11 Zgjidhje e sistemit $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 6 \end{cases}$ është çifti i radhitur:

A (1, 2) B (2, 1)
C (2, 4) D (4, 2)

12 Koeficienti këndor i drejtëzës $2x + 2y + 1 = 0$ është:

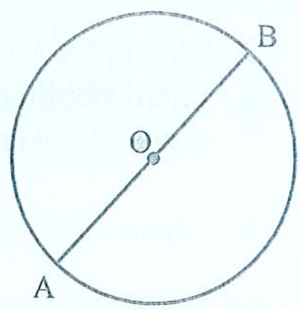
A 0 B −1
C −2 D −3

13 Numri i numrave të thjeshtë që ndodhen ndërmjet 20 dhe 30 është:

A 5 B 4
C 3 D 2

14 Në figurë, AB është diametër i rrethit. Jepet A(–3, 3) dhe B(–1, 1). Koordinatat e qendrës O të rrethit janë:

A (–2, 2)
B (–4, 4)
C (–6, –6)
D (–9, –9)



15 Shuma e syprinave të të gjitha faqeve të kubit është 54 cm^2. Vëllimi i tij në cm^3 është:

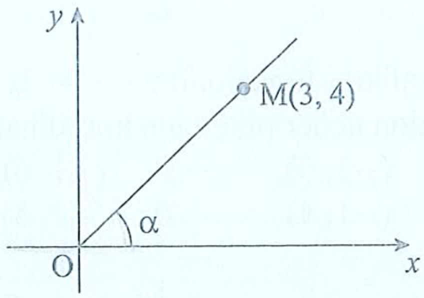
A 27 B 18

C 9 D 3

16 Në figurë gjeni $\sin\alpha$.

A $\frac{3}{4}$ B $\frac{4}{3}$

C $\frac{3}{5}$ D $\frac{4}{5}$



17 Jepet $2c = -1$. Gjeni $(4 - 4c)^2$

A 6 B 36

C 4 D 2

18 k është numër tek. Cili nga numrat e mëposhtëm është çift?

A $3k$ B k^3

C $k^2 + 1$ D $k + 2$

19 7% e numrit n është 7. Numri n është:

A 1 B 7

C 70 D 100

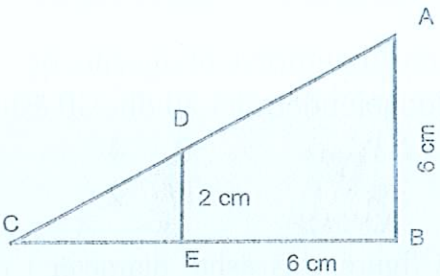
20 Jepet $g(x) = x^2 - x$. $g(a - 1) =$

A $a^2 - 3a + 2$ B $a^2 - a + 1$

C $a^2 - a + 2$ D $a^2 - 3a - 2$

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet nga 21–32.

21 Në trekëndëshin kënddrejtë ABC, DE është paralele me AB. Gjatësitë e brinjëve janë AB = 6 cm, DE = 2cm dhe BE = 6 cm. Gjeni gjatësinë e CE.



3 pikë

22 Gjatësitë e brinjëve të një trekëndëshi janë 5 cm; $5\sqrt{3}$ cm dhe 10 cm.

a Gjeni këndin më të vogël të trekëndëshit.

2 pikë

b Gjeni syprinën e trekëndëshit.

1 pikë

23 Vektorët $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ dhe $\vec{b} = 5\vec{i} + 12\vec{j}$, ku $\vec{i}$ dhe $\vec{j}$ janë vektorë njësi, janë brinjë të njëpasnjëshme të një paralelogrami.

a Gjeni gjatësitë e brinjëve të paralelogramit.

1 pikë

b Shprehni me anën e vektorëve $\vec{i}$ dhe $\vec{j}$ diagonalet e paralelogramit.

2 pikë

c Gjeni gjatësitë e këtyre diagonaleve.

1 pikë

24 a Shkruani ekuacionin e drejtëzës d që kalon nga pikat (2, 5) dhe (–1, –4).

1 pikë

b Shkruani ekuacionin e drejtëzës që kalon nga pika (1, 3) dhe është paralele me drejtëzën d.

1 pikë

c Shkruani ekuacionin e drejtëzës që kalon nga pika (1, 3) dhe është pingule me drejtëzën d.

1 pikë

25 Kuboidi me bazë katrore me brinjë 3 cm dhe me lartësi 10 cm është mbushur përgjysmë me ujë. Në të hidhet sfera metalike me rreze 1 cm.
Me sa cm (me saktësi deri në të qindta) ngrihet niveli i ujit në kuboid?

4 pikë

26 a Gjeni vlerën e m në barazimin $\log_m 4 = 2$. 1 pikë

b Nga barazimi $2\log x = 1 - 2\log y$, gjeni prodhimin $x \cdot y$.

2 pikë

27 Jepet funksioni f: $y = 2x^2 - 3x + 2, x \in R$

a Shqyrtoni monotoninë e funksionit f.

2 pikë

b Gjeni pikën në të cilën tangjentja është paralele me drejtëzën $y = 2x - 5$.

2 pikë

28 Zgjidhni sistemin e inekuacioneve:

$$\begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ \dfrac{3x - 2}{4} > -1 \end{cases}$$

3 pikë

29 Derivati i funksionit f për çdo x, është $f'(x) = 6x^2$. Gjeni funksionin f, duke ditur që grafiku i tij kalon nga pika M(1, 3).

3 pikë

30 a Kryeni pjesëtimin e polinomit $x^3 + 3x - 4$ me $(x - 1)$ 2 pikë

b Zgjidhni ekuacionin $x^3 + 3x - 4 = 0$ 2 pikë

31 Rrokullisen njëri pas tjetrit dy zare. Gjeni probabilitetin e ngjarjes që numri i pikëve në zarin e dytë të jetë më i madh se ai në zarin e parë.

3 pikë

32 Këndi x është i kuadrantit të tretë dhe $\text{tg}x = 2$. Njehsoni $\cos x$.

3 pikë

TEST 4

Rrethoni vetëm alternativën e saktë, në ushtrimet 1–13. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Ekuacioni $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \neq 0$ dhe $x \in R$) nuk mund të ketë më shumë se:

A një zgjidhje B dy zgjidhje
C tri zgjidhje A katër zgjidhje

2 Jepet progresioni gjeometrik 16, 8, 4, … . Kufiza e pestë e tij është:

A 2 B 1

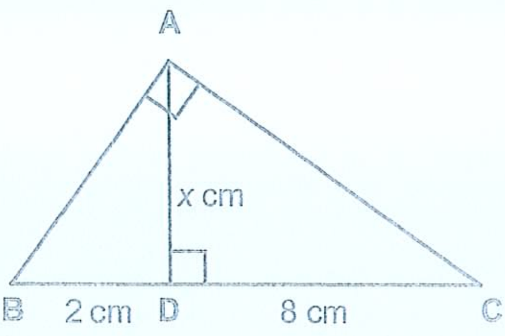
C $\frac{1}{2}$ D $\frac{1}{4}$

3 Gjeni vlerën e shprehjes $\log_3 1 + \log_3 3$:

A 1 B 3
C −1 D −3

4 Në figurë jepet trekëndëshi kënddrejtë ABC.
Vlera e x në cm është:

A 2 B 4
C 6 D 8



5 Inekuacioni $7 - x < 2x$ është i njëvlershëm me inekuacionin:

A $7 < 3x$ B $7 \leq 3x$
C $7 > 3x$ D $7 \geq 3x$

6 Pika C(3, 2) është mesi i segmentit me skaje A(1, 4) dhe B(5, y). Gjeni vlerën e y.

A 0 B 1 C 2 D 3

7 Jepet funksioni $y = 2x^2 + 1$. Gjeni vlerën e derivatit të funksionit në pikën $x = -1$.

A −4 B −1
C 3 D 4

8 Koeficienti këndor i drejtëzës që kalon nga pikat A(1; 1) dhe B(2; 2) është:

A −2 B −1
C 1 D 2

9 Zgjidhje e ekuacionit $2^{-x} = \frac{1}{2}$ është numri:

A −1 B −0,5
C 0,5 D 1

10 Shuma e rrënjëve të ekuacionit $x^2 - 16x$ është:

A 32 B 16
C −32 D 0

11 Këndi x është i kuadrantit të parë dhe $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vlera e $\cos x$ është:

A 1 B 0,5
C 0,2 D 0

12 $\frac{x^8}{x^3} = x^y$ $y = ?$

A $\frac{8}{3}$ B $\frac{3}{8}$

C 3 D 5

13 Paralelogram është katërkëndëshi që i ka diagonalet:

A të barabarta; B pingule;
C që formojnë kënd të shtrirë;
D që priten në mesin e tyre.

14 Jepet $x = y = -1$.
Gjeni $3(x + y) - (3x - y)$.

A -1 B -3
C -4 D -8

15 $\sqrt{96} - \sqrt{54} =$

A $\sqrt{21}$ B $\sqrt{42}$
C $7\sqrt{6}$ D $\sqrt{6}$

16 Vëllimi i sferës është numerikisht i barabartë me syprinën e saj. Rrezja e sferës është:

A 9 B π
C 3 D 1

17 Ekuacioni i boshtit të simetrisë së parabolës $y = 2x^2 - 3$ është:

A $x = \frac{2}{3}$ B $x = -\frac{3}{2}$
C $x = -\frac{2}{3}$ D $x = 0$

18 Rrezja e rrethit me ekuacion $2x^2 + 2y^2 = 72$ është:

A 2 B 4
C 6 D 8

19 Madhësitë x dhe y janë në përpjesëtim të drejtë. Për $x = 3$ kemi $y = 4$. Gjeni y për $x = 4$.

A $\frac{16}{3}$ B $\frac{4}{3}$
C $\frac{8}{3}$ D 3

20 Baza e një piramide ka 5 kulme. Sa kulme ka piramida?

A 5 B 6
C 10 D 12

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet 21–32.

21 Zgjidhni inekuacionin $x(x - 2) < 0$.

3 pikë

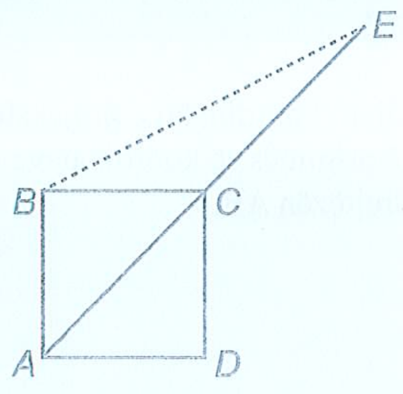
22 Jepet sistemi $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 - y = 15 \end{cases}$

Gjeni të gjitha zgjidhjet e sistemit.

3 pikë

23 Katrori ABCD në figurë e ka syprinën të barabartë me 1. Diagonalja AC zgjatet përtej C në mënyrë që AC = CE. Gjeni gjatësinë e BE.

4 pikë



24 Jepet $\text{tg}x - \text{cotg}x = 5$. Gjeni vlerën e shprehjes $\text{tg}^2x + \text{cotg}^2x$. 3 pikë

25 Jepet funksioni $y = 10 + 27x - x^3$

a Gjeni ekstremumet e funksionit.

2 pikë

b Shkruani ekuacionin e tangjentes ndaj grafikut të hequr në pikën ku grafiku pret boshtin Oy. 2 pikë

26 Njehsoni:

a $\int (x-5)dx$

1 pikë

b $\int_{-1}^{1} (x+4)^2\, dx$

2 pikë

27 Jepet paralelogrami me kulme P(1, 0), Q(0, 2), R(–1, 1) dhe T(x, y). Gjeni koordinatat e kulmit T, i cili ndodhet përballë kulmit Q.

3 pikë

28 Tregoni se vlera e shprehjes

$S = \dfrac{1}{1+3^x} + \dfrac{1}{1+3^{-x}}$ nuk varet nga x.

3 pikë

29 Zgjidhni për $0^0 \le x \le 360^0$ ekuacionin $\sin x = \cos x$.

3 pikë

30 Jepen pikat A(1, 2) dhe B(3, 4).

a Shkruani ekuacionin e drejtëzës AB.

1 pikë

b Gjeni koordinatat e projeksionit të origjinës së koordinatave në drejtëzën AB.

3 pikë

31 Në tabelë jepen të dhëna për pagat e 100 punonjësve të një firme.

Paga p (lekë)	Denduria
$30000 < p \le 35000$	4
$35000 < p \le 40000$	7
$40000 < p \le 45000$	24
$45000 < p \le 50000$	40
$50000 < p \le 55000$	15
$55000 < p \le 60000$	10

Gjeni:

a klasën modale;

1 pikë

b klasën në të cilën bën pjesë mesorja; 1 pikë

c pagën mesatare të përafërt.

1 pikë

32 a Tregoni se $x = -2$ është rrënjë e polinomit $2x^3 + 10x^2 + 4x - 16$.

1 pikë

b Zgjidhni ekuacionin $2x^3 + 10x^2 + 4x - 16 = 0$.

3 pikë

TEST 5

Rrethoni vetëm alternativën e saktë, në ushtrimet 1–13. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Vlera e shprehjes $\frac{2^4}{2^7}$ është e barabartë me:

A 2^{-11} B 2^{-3}
C 2^3 D 2^{28}

2 Jepet inekuacioni $2x^2 > x^2 + 1, x \in R$. Cila nga vlerat e mëposhtme nuk është zgjidhje e tij?

A -3 B -2
C 0 D 2

3 Syprina (në cm^2) e qarkut me rreze π cm është:

A π B π^2
C π^3 D 3π

4 Jepet $a = \sin^2 0^0 + \cos^2 0^0$. Gjej vlerën e a-së.

A 1 B 0
C -1 D -2

5 Pika P(2, 0) është mesi i segmentit me skaje M(x, 3) dhe N(1, -3). Vlera e x është:

A -3 B -2
C 2 D 3

6 Derivati i funksionit $y = \sqrt{x}$ në pikën $x = 4$ është:

A 1 B 0,5
C 0,25 D 0,125

7 Për çdo vlerë të $x \in R$, kemi $f(x) = x^2 + x$.
Shprehja $f(-x)$ është e barabartë me:

A $x^2 - x$ B $x^2 + x$
C $-x^2 + x$ D $2x^2$

8 Shprehja $(3x - 2)^2 - (3x + 2)^2$ është identike me:

A $-24x$ B $-12x$
C $12x$ D $24x$

9 Grafiku i funksionit $y = -x^3 + 1$ kalon nëpër pikën:

A $(-1, 0)$ B $(1, 0)$
C $(0, -1)$ D $(0, 2)$

10 Diagonalja në cm e drejtkëndëshit me brinjë 5 cm dhe 12 cm është:

A 17 B 15
C 13 D 11

11 Shprehja $x^2 + \frac{1}{4}x + m$ është katror i plotë për vlerën e m:

A $\frac{1}{8}$ B $\frac{1}{2}$
C $\frac{1}{64}$ D $\frac{1}{16}$

12 Numri më i vogël i kulmeve të një piramide është:

A 6 B 5
C 4 D 3

13 Numri i rrënjëve të ekuacionit $(x - 1)^2 = -1$ është:

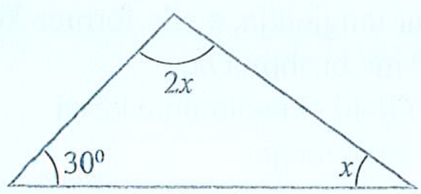
A 3 B 2
C 1 D 0

14 Jepet $3a + 2b = 2a + 3b$. Atëherë $b =$

A -1 B 0
C $5a$ D a

15 Gjeni këndin x në figurë:

A 20^0 B 30^0
C 40^0 D 50^0



16 Sa për qind e 25 është 5.

A 25% B 20%

C 5% D 1%

17 Në cilin kuadrant ndodhet këndi $\frac{2\pi}{3}$ radian?

A I B II

C III D IV

18 Jepet A(2, 3) dhe $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Koordinatat e pikës B janë:

A (0, 8) B (–4, 2)

C (4, –2) D (0, –8)

19 Largesa ndërmjet pikave (–6, 2) dhe (1, 5) është:

A $\sqrt{58}$ B 10

C $\sqrt{10}$ D 58

20 log (–100) =

A 2 B 10

C -2 D Nuk ekziston

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet 21–32.

21 Gjeni vlerën e m në barazimet e mëposhtme:

a $2^{-1} \cdot 2^m = 2^4$

1 pikë

b $\log_m 4 = 2$ 1 pikë

c $\sqrt[m]{16} = 2$ 1 pikë

22 Jepet funksioni $y = \frac{1-2x}{7}$ Për ç'vlera të x:

a vlerat e tij janë jonegative;

1 pikë

b vlerat e tij ndodhen në intervalin]–1, 3[2 pikë

23 Ndaj grafikut të funksionit $y = \frac{1}{x}$ (që ndodhet në kuadrantin e parë) është hequr tangjentja, e cila formon këndin 135^0 me boshtin Ox.

a Gjeni ekuacionin e kësaj tangjenteje.

3 pikë

b Gjeni pikat e prerjes së saj me boshtet koordinatave.

1 pikë

24 Brinjët e një trekëndëshi janë 7 cm; $7\sqrt{3}$ cm; 14 cm.

Gjeni kosinusin e këndit më të madh të trekëndëshit.

2 pikë

25 a Shkruani ekuacionin e drejtëzës d, e cila kalon nga pikat

$(0, -\frac{1}{2})$ dhe $(\frac{1}{4}, 0)$. 1 pikë

b Shkruani ekuacionin e drejtëzës, e cila kalon nga pika (–1, 2) dhe është paralele me drejtëzën d.

1 pikë

c Shkruani ekuacionin e drejtëzës, e cila kalon nga pika (–1, 2) dhe është pingule me drejtëzën d.

1 pikë

26 Rrezja e bazës së një cilindri dhe rrezja e një sfere janë nga 6 cm. Syprina anësore e cilindrit është e barabartë me syprinën e sferës. Gjeni lartësinë e cilindrit.

3 pikë

27 Në një progresion aritmetik jepet:

$$\begin{cases} u_1 + u_5 = -36 \\ u_8 + u_{11} = 8 \end{cases}.$$

a Gjeni kufizën e parë u_1 dhe diferencën d të progresionit.

2 pikë

b Sa kufiza të këtij progresioni janë negative?

2 pikë

28 Jepet polinomi $P(x) = x^3 - 3x + 2$.

a Vërtetoni se ai mund të paraqitet në trajtën $P(x) = (x - 1)^2 (x + 2)$.

2 pikë

b Zgjidhni ekuacionin $P(x) = 0$.

1 pikë

29 Parabola $y = x^2 + mx + n$ kalon nga pikat $A(1, 3)$ dhe $B(-1, 15)$.

a Gjeni m dhe n. 2 pikë

b Për vlerat e gjetura të m dhe n, gjeni koordinatat e kulmit të parabolës. 1 pikë

c Gjeni syprinën e figurës së kufizuar nga parabola dhe boshti i abshisave. 2 pikë

30 Në një kuti ndodhen 5 sfera të bardha dhe 3 sfera të kuqe. Nxirren nga kutia njëra pas tjetrës 2 sfera (pa kthim). Gjeni probabilitetin që:

a sfera e parë të jetë e bardhë dhe e dyta, e kuqe; 1 pikë

b të dyja sferat të jenë të kuqe;

1 pikë

c njëra sferë të jetë e bardhë dhe tjera e kuqe; 1 pikë

d të dyja sferat të jenë të bardha. 1 pikë

31 Në një klasë me 40 nxënës, 40% janë vajza. Në një testim, 75% e vajzave dhe 50% e djemve morën notë kaluese. Sa është përqindja kaluese e klasës? 3 pikë

32 Tri dyqane shisnin të njëjtin mall me të njëjtin çmim. Ata vendosën të bënin ulje çmimi.
I pari bëri ulje çmimi 35%; i dyti e uli çmimin me $\frac{1}{3}$ e tij; i treti, për çdo copë të blerë, e shiste copën tjetër me gjysmë çmimi. Genti do të blejë dy copë nga ky mall në njërin dyqan. Në cilin dyqan i leverdis të blejë?

3 pikë

TEST 6

Rrethoni vetëm alternativën e saktë në ushtrimet 1–13. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Jepet progresioni aritmetik me kufizë të parë 2 dhe me diferencë 3. Kufiza e dhjetë e tij është:

A 10 B 29
C 30 D 45

2 Pika O(0, 0) është mesi i segmentit me skaje A(1, −1) dhe B(−1, y). Vlera e y është:

A 1 B 2
C 3 D 4

3 Shuma log2 + log3 − log6 është e barabartë me:

A −1 B 0
C 1 D 2

4 Zgjidhje e inekuacionit $\frac{x-5}{2} > 3$ është numri:

A 0 B 5
C 10 D 15

5 Drejtëza $2x - 3y + 6 = 0$ e pret boshtin Ox në pikën me abshisë:

A −3 B 0
C 2 D 3

6 Vlera e $\int_1^4 \sqrt{x}dx$ është:

A 0 B $\frac{4}{3}$
C $\frac{14}{3}$ D 5

7 Hipotenuza e trekëndëshit kënddrejtë është 10 cm, kurse njëri katet është 6 cm. Syprina e trekëndëshit në cm^2 është:

A 24 B 36
C 48 D 60

8 Derivati i funksionit $y = 3x - \sqrt{2}$ në pikën x është:

A 3 B $\sqrt{2}$
C 1 D 0

9 Numri $(9^{-1})^{-\frac{1}{2}}$ është i barabartë me:

A 9 B 3
C 1 D 0

10 Shprehja $(4x-1)^2 - (4x-1)(4x+1)$ është identike me:

A $-8x$ B $-8x+2$
C $8x$ D $8x-2$

11 $\sin^2 x + \sin^2(90^0 - x)$ është e barabartë me:

A $2\sin^2 x$ B $2\cos^2 x$
C 1 D 2

12 Brinjët e një trekëndëshi janë 4 cm, 5 cm, 6 cm. Brinja më e madhe e një trekëndëshi të ngjashëm me të është 18 cm. Brinja më e vogël në cm e këtij trekëndëshi është:

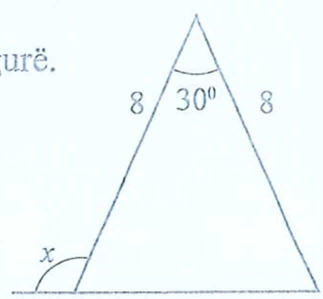
A 8 B 12
C 15 D 16

13 Syprina e një kubi dhe vëllimi i tij shprehen me të njëjtin numër. Brinja e kubit është:

A 3 B 4
C 6 D 10

14 Gjeni këndin x në figurë.

A 60^0
B 90^0
C 100^0
D 105^0



15 Vëllimi i një kubi është 8 cm^3. Syprina (në cm^2) e një faqeje të tij është:

A 2 B 4
C 8 D 16

16 Jepet $f(x) = -3x^3 - 3\sqrt[3]{x}$. Gjeni $f(-1)$.

A 0 B
C 6 D 9

17 Jepet $\frac{7}{3} = \frac{1}{m}$ dhe $\frac{1}{m} = R$. Gjeni $\frac{1}{R}$.

A $\frac{3}{7}$ B 1
C 2 D $\frac{7}{3}$

18 Cila nga pikat e mëposhtme ndodhet në rrethin $x^2 + y^2 = 49$?

A (0, 0) B (3, 4)
C (–4, 3) D (0, 7)

19 Pesëfishi i a është i barabartë me trefishin e b. Gjeni raportin $\frac{b}{a}$.

A 5 B 3
C $\frac{5}{3}$ D $\frac{3}{5}$

20 Numrat $(6a - 2)$; $3a$ dhe $(a + 2)$ formojnë progresion aritmetik. Gjeni a.

A 0 B 1
C 2 D 4

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet nga 21–32.

21 Është dhënë inekuacioni $3x - 5 \leq x + 2$.

a Zgjidhni inekuacionin dhe tregoni bashkësinë e zgjidhjeve në boshtin numerik. **2 pikë**

b Gjeni të gjitha zgjidhjet e tij, që janë numra natyrorë. **1 pikë**

22 Është dhënë funksioni $y = 4x - x^2, x \in R$.

a Gjeni pikën ku funksioni ka ekstremum. **2 pikë**

b Shkruani ekuacionet e tangjenteve me grafikun e këtij funksioni në pikat e prerjes së tij me boshtin e abshisave. **2 pikë**

23 Jepet

$$\frac{1}{3^x} + \frac{1}{3^{x-1}} = k \cdot 3^{-x}.$$ Gjeni k.

3 pikë

24 Jepet trekëndëshi me brinjë 15 cm; 20 cm dhe 25 cm.

a Përcaktoni llojin e trekëndëshit. **1 pikë**

b Gjeni lartësinë më të vogël të trekëndëshit. **2 pikë**

25 I njëjti test u është dhënë dy klasave. Në njërën klasë, me 20 nxënës, mesatarja e pikëve të marra është 12,3 kurse në klasën tjetër, me 30 nxënës, mesatarja e pikëve të marra është 14,8. Sa është mesatarja e pikëve të marra për të gjithë popullimin e nxënësve të testuar? **3 pikë**

26 Koni i drejtë me bazë rreth e ka lartësinë 10 cm. Përftuesja e tij formon këndin 60^0 me bazën. Gjeni:

a syprinën anësore të konit;

2 pikë

b syprinën e përgjithshme të konit;

1 pikë

b vëllimin e konit.

2 pikë

27 Gjeni ekuacionin e përmesores së segmentit AB, ku A(3, 5) dhe B(2, 4).

3 pikë

28 Zgjidhni sistemin e ekuacioneve $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

3 pikë

29 a Faktorizoni polinomin $2x^3 + 4x - 6$

2 pikë

b Zgjidhni ekuacionin $2x^3 + 4x - 5 = 1$

2 pikë

30 Thjeshtoni shprehjen

$$(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}})$$

3 pikë

31 Jepet funksioni $y = 9 - x^2$.

a Gjeni pikat e prerjes së tij me boshtet koordinatave.

1 pikë

b Gjeni syprinën e figurës që kufizohet nga grafiku i këtij funksioni dhe boshti Ox.

2 pikë

32 Një zar ka formën e një piramide të rregullt trekëndore, në faqet e së cilës janë shënuar numrat 1, 2, 3, 4. Zari hidhet dy herë rresht.

a Renditni të gjitha rezultatet e mundshme.

2 pikë

b Gjeni probabilitetin e ngjarjes që shuma e pikëve të rëna të jetë 6.

1 pikë

TEST 7

Rrethoni vetëm alternativën e saktë në ushtrimet 1–13. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Numri $3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+5\sqrt{2}$ është i barabartë me:

A 0 B $10\sqrt{2}$
C $6\sqrt{2}$ D $2\sqrt{2}$

2 Shprehja $\log x^2+2\log\sqrt{x}+5\log x$ për $x>0$ është identike me shprehjen:

A $8\log x$ B $2\log x^2$
C $7\log\sqrt{x}$ D $\log x^3$

3 Nëse $f(x)=2x+5$, atëherë $f(x)+f(-x)$ është identike me:

A $4x+10$ B $4x$
C 10 D $-(2x+5)$

4 Inekuacioni $-3x+12\geq 0$ është i njëvlershëm me inekuacionin:

A $x\geq 0$ B $x\leq 0$
C $x\leq 4$ D $x\geq -4$

5 Ekuacioni $2^x-1=\log_2(x+1)$ vërtetohet nga vlera:

A $x=0{,}5$ B $x=1$
C $x=2$ D $x=9$

6 Drejtëza që kalon nga origjina dhe formon këndin 45^0 me boshtin Ox ka ekuacion:

A $x+y=0$ B $y=x$
C $y=2x$ D $2x+y=0$

7 Vektorët me fillim në origjinë dhe me mbarime në pikat M(3, –4) dhe N(6, –8):

A kanë gjatësi të barabarta;
B janë kolinearë;
C janë vektorë njësi;
D janë të barabartë.

8 Në grafikun e funksionit $y=2^{x-1}$ ndodhet pika:

A (2, 1) B (3, 4)
C (4, 5) D (5, 6)

9 Jepet $\sin x=0{,}6$ dhe x është kënd i ngushtë. Vlera e $\cos x$ është:

A 0,2 B 0,4
C 0,6 D 0,8

10 Lartësia në cm e trekëndëshit dybrinjënjëshëm me bazë 16 cm dhe brinjë anësore 10 cm është:

A 6 B 8
C 10 D 16

11 Derivati i funksionit $y=\sqrt{x^5}+\ln 2$, në pikën $x>0$ është:

A $\frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}}$ B $\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}}$
C $\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$ D $5x$

12 Syprina në cm^2 e rombit me diagonale 10 cm dhe 12 cm është:

A 120 B 90
C 60 D 30

13 Në trekëndëshin kënddrejtë, hipotenuza është 10 cm dhe njëri katet 6 cm. Kosinusi i këndit përballë këtij kateti është:

A $\frac{1}{5}$ B $\frac{2}{5}$
C $\frac{3}{5}$ D $\frac{4}{5}$

14 Jepet $21^n = 3^5 \cdot 7^5$. Gjeni n.

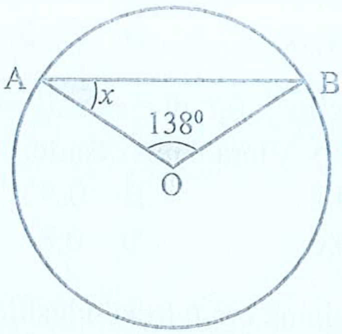
A 5 B 10

C 25 D 125

15 Gjeni këndin x në figurë.

A 69^0 B 42^0

C 38^0 D 21^0



16 Vlera e shprehjes $\dfrac{\frac{x}{4}}{\left(\frac{4}{x}\right)}$ për $x \neq 0$ është:

A $\dfrac{1}{4}$ B 4

C $\dfrac{x}{4}$ D $\dfrac{x^2}{4}$

17 Jepet $y = 3x$ dhe $2x + 3y = 22$. Atëherë $y =$

A 2 B 3

C 5 D 6

18 Mesi i segmentit AB ku A(–2, 5) dhe B(8, –1) ka koordinatat:

A (3, 2) B (10, 6)

C (5, 3) D (4, 2)

19 Vlera më e madhe e funksionit $y = 4 - x^2$ është:

A 4 B 2

C 0 D Nuk ekziston.

20 Katrorit me brinjë 10 cm i brendashkruhet rrethi. Rrezja e këtij rrethi (në cm) është:

A 5 B 10

C $5\sqrt{2}$ D $10\sqrt{2}$

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet nga 21–32.

21 a Jepet $4^a = t$. Gjeni 2^a.

1 pikë

b Jepet $\text{tg}x + \text{cotg}x = 2$. Gjeni $\text{tg}x$.

2 pikë

22 Zgjidhni inekuacionin $x \leq \dfrac{9}{x}$.

3 pikë

23 Jepet $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$

dhe $\vec{a} - \vec{c} = 2\vec{b}$. Gjeni $x+y$.

3 pikë

24 Jepen pikat A(4, 3) dhe B(1, 0).

a Shkruani ekuacionin e drejtëzës AB.

2 pikë

b Gjeni këndin që kjo drejtëz formon me boshtin e abshisave.

1 pikë

c Shkruani ekuacionin e drejtëzës paralele me drejtëzën AB, e cila kalon nga origjina e koordinatave.

1 pikë

d Shkruani ekuacionin e pingules me drejtëzën AB, që kalon nga origjina e koordinatave. **1 pikë**

25 Jepet funksioni $y = x^2 - 10x$.

a Gjeni ekstremumet e tij.

1 pikë

b Skiconi grafikun e tij.

1 pikë

c Shkruani ekuacionin e asaj tangjenteje ndaj grafikut, e cila kalon nga pika M(0, −1).

2 pikë

d Gjeni syprinën e figurës së kufizuar nga grafiku i funksionit, boshti i abshisave dhe drejtëzat $x = 2$ dhe $x = 6$.

2 pikë

26 Radhiten në mënyrë të rastësishme shkronjat O, K, T. Sa është probabiliteti i ngjarjes që të formohet fjala "TOK"?

3 pikë

27 Dy djem nisen njëkohësisht drejt njëri-tjetrit nga dy objekte që ndodhen në largesë 7,5 km. Shpejtësia e njërit prej tyre është sa $\frac{2}{3}$ e shpejtësisë së tjetrit. Gjeni shpejtësitë e secilit, në qoftë se ata takohen pas 1,5 orësh.

3 pikë

28 Për cilat vlera të k ekuacioni $4x^2 - kx + 1 = 0$ ka:

a dy rrënjë të ndryshme;

1 pikë

b dy rrënjë të barabarta;

1 pikë

c nuk ka rrënjë.

1 pikë

29 Katetet e një trekëndëshi kënddrejtë janë 5 cm dhe 12 cm. Hipotenuza e një trekëndëshi të ngjashëm me të është 39 cm. Gjeni:

a katetet e trekëndëshit të dytë;

2 pikë

b syprinat e secilit trekëndësh.

1 pikë

30 Një enë cilindrike me diametër të bazës 24 cm dhe lartësi 50 cm është mbushur përgjysmë me ujë. Në të zhytet një sferë metalike me rreze 6 cm. Me sa centimetra do të ngrihet niveli i ujit në enë?

4 pikë

31 Faktorizoni shprehjet:

a $9x^2 - 1$

b $x^3 - 2x^2 + x - 2$

c $x^2 - 4x + 3$

3 pikë

32 Histogrami në figurë paraqet numrin e orëve të shpenzuara për përsëritje për një provim nga një grup nxënësish. Gjeni:

a klasën modale;

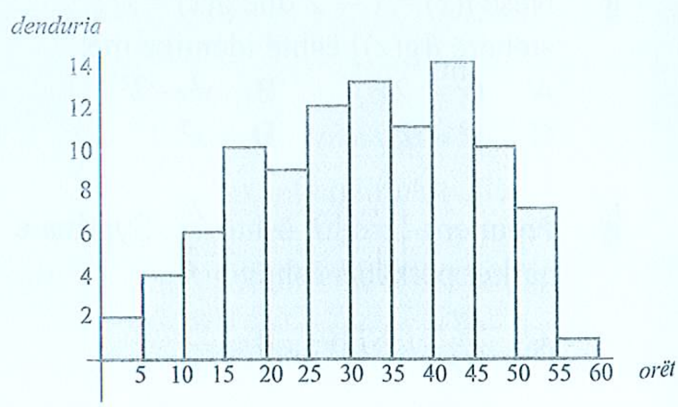
1 pikë

b klasën në të cilën bën pjesë mesorja;

1 pikë

c kohën mesatare (të përafërt) për përsëritje.

1 pikë



TEST 8

Rrethoni vetëm alternativën e saktë, në ushtrimet 1–13. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Jepen bashkësitë $A = \{1, 2, 4\}$ dhe $B = [1, 3]$. Numri i elementeve të $A \cap B$ është:

A 2 B 3
C 4 D 5

2 Në një trekëndësh kënddrejtë, njëri nga katetet është 8 cm, kurse hipotenuza është 10 cm. Gjeni kosinusin e këndit përballë katetit.

A 0,8 B 0,6
C 0,5 D 0,25

3 Në një varg numerik, kufiza e $n^{të}$ jepet nga formula $u_n = 2n + 1$. Kufiza e dhjetë është:

A 10 B 20
C 21 D 40

4 Në një drejtkëndësh, diagonalja është 20 cm dhe njëra nga brinjët është 12 cm. Brinja tjetër është:

A 16 cm B 15 cm
C 12 cm D 10 cm

5 Qendra e rrethit $(x-5)^2 + y^2 = 4$ është pika me koordinata:

A (0, 0) B (5, 0)
C (0, 5) D (5, 4)

6 Nëse $f(x) = x - 2$ dhe $g(x) = x^2$, atëherë $f[g(x)]$ është identike me:

A $(x-2)^2$ B $x^2 - 2^2$
C $x^2 - 2$ D x^2

7 Perimetri i rrethit është $\frac{\pi}{2}$. Syprina e qarkut përkatës është:

A $\frac{\pi}{16}$ B $\frac{\pi}{4}$
C $\frac{\pi}{2}$ D π

8 Derivati i funksionit $y = \frac{2}{x}$ në pikën $x \neq 0$ është:

A $-\frac{1}{2x^2}$ B $-\frac{2}{x^2}$
C $\frac{2}{x^2}$ D $\frac{1}{2x^2}$

9 $[(-4)^{-\frac{2}{3}}]^{-3}$ është:

A −16 B −4
C 4 D 16

10 Koeficienti këndor i përgjysmores së kuadrantit të parë e të tretë është:

A −1 B 1
C 2 D 3

11 Në grafikun e funksionit $y = \log(2x - 1)$ ndodhet pika me koordinata:

A (2, 2) B (1, 0)
C (10, 1) D (5, 2)

12 PMP i numrave 32 e 48 është:

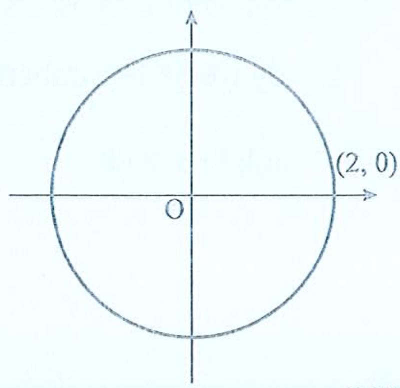
A 8 B 12
C 16 D 32

13 Ekuacioni $x^2 - 2x + k = 0$ ka dy rrënjë reale të barabarta. Vlera e k është:

A 8 B 4
C 2 D 1

14 Syprina e qarkut në figurë është:

A π
B 2π
C 3π
D 4π



15 Në qoftë se $\frac{a}{b}=k$, atëherë $\frac{a+b}{b}=$

A $\frac{k}{k+1}$ B $\frac{k+1}{k-1}$

C $\frac{k+1}{k}$ D $k+1$

16 Cili nga ekuacionet e mëposhtme nuk ka zgjidhje?

A $2x+4=2(x+4)$

B $4(2x+6)=2(4x+12)$

C $3(x+1)=2x+3$

D $x=0$

17 $\sqrt{48}+\sqrt{75}=$

A $\sqrt{123}$ B $6\sqrt{3}$

C $9\sqrt{3}$ D $18\sqrt{3}$

18 Cili nga relacionet e mëposhtme nuk është i vërtetë?

A $\sin 135^0 > 0$

B $\cos 140^0 < 0$

C $\mathrm{tg}145^0 < 0$

D $\cos 89^0 < 0$

19 Jepen numrat 6; 6,5; 8,5; 6 dhe 8. Cili relacion është i vërtetë?

A mesorja < mesatarja

B mesorja = mesatarja

C mesorja < moda

D mesorja = moda

20 Në qoftë se $f(x)=2-|x|+x^2$ atëherë $f(-2)=$

A 0 B 4

C 2 D −2

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet nga 21–32.

21 Syprinat e tri faqeve të një kuboidi janë përkatësisht 6, 8, 12 cm^2. Gjeni vëllimin e kuboidit.

4 pikë

22 Jepen pikat A(1, 1) dhe B(3, 3).

a Gjeni koeficientin këndor të drejtëzës AB.

1 pikë

b Shkruani ekuacionin e rrethit me diametër AB.

2 pikë

23 a Zgjidhni ekuacionin $3^{2x}=\sqrt{3}$

1 pikë

b Jepet $3^x=m$. Gjeni 9^{x-1}.

2 pikë

24 Gjeni integralet:

a $\int(2x-\sqrt{5})dx$ 1 pikë

b $\int_{-3}^{3}(\frac{1}{2}x^3-\ln 7)dx$ 2 pikë

25 Është dhënë funksioni $y=x^3-12x+7$

a Gjeni ekstremumet e tij.

2 pikë

b Shkruani ekuacionin e tangjentes me grafikun e tij, në pikën e prerjes me boshtin e ordinatave.

2 pikë

26 Jepet vargu $u_n=\frac{n^2+n+30}{n}$. Sa kufiza të tij janë numra të plotë?

3 pikë

27 Gjeni projeksionin e pikës M(−4, 11) në drejtëzën d: $3x-4y+31=0$

3 pikë

28 a Skiconi grafikun e funksionit

$y = \sin x$, për $0^0 \leq x \leq 360^0$

1 pikë

b Skiconi grafikun e funksionit

$y = \sin(x - 60^0)$, për $0^0 \leq x \leq 360^0$

2 pikë

29 Zgjidhni ekuacionin

$(1 - \log x)(x^2 - 4x - 5) = 0$

3 pikë

30 Dy cilindra prej bronxi, i pari me rreze të bazës 4 cm e lartësi 8 cm dhe i dyti me rreze të bazës 2 cm e lartësi 40 cm, shkrihen dhe me to formohet një sferë. Gjeni rrezen e sferës.

4 pikë

31 Një katet i trekëndëshit kënddrejtë është 20 cm, kurse lartësia mbi hipotenuzë është 12 cm. Gjeni syprinën e trekëndëshit.

3 pikë

32 Probabiliteti që një qitës të godasë shenjen është 0,3. Ai kryen dy të shtëna. Gjeni probabilitetin:

a Shenja goditet herën e parë dhe nuk goditet herën e dytë.

1 pikë

b Shenja goditet vetëm një herë.

1 pikë

c Shenja nuk goditet.

1 pikë

d Shenja goditet dy herë.

1 pikë

TEST 9

Rrethoni vetëm alternativën e saktë, në ushtrimet 1–13. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Gjatësia e vektorit $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ është:

A 2 B 3
C 4 D 5

2 Vlera numerike e shprehjes $4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$ është:

A 0 B $7\sqrt{3}$
C $6\sqrt{3}$ 16 D $3\sqrt{3}$

3 Prerja e bashkësive të shkronjave të fjalëve "DITA" dhe "TEK" ka:

A 1 element B 2 elemente
C 3 elemente D 4 elemente

4 Bashkësia e vlerave të x për të cilat ka kuptim shprehja $\sqrt{3-x}$ është:

A R B $]-\infty, 3]$
C $]3, +\infty[$ D $[-3, 3]$

5 Kufiza e parë e progresionit gjeometrik është 1 dhe herësi është $\frac{1}{2}$. Kufiza e tretë e tij është:

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{1}{4}$
C 2 D 4

6 Derivati i funksionit $y = x^3 - 3x$ në pikën $x = 1$ është i barabartë me:

A 0 B 1
C 3 D -2

7 Numri më i vogël natyror që vërteton inekuacionin e dyfishtë $18 < x \leq 22$ është

A 17 B 18
C 19 D 22

8 Në grafikun e funksionit $y = x^3 - x$ ndodhet pika me koordinata:

A (1, 1) B (2, 1)
C (1, 2) D $(-1, 0)$

9 Zgjidhje e inekuacionit $\frac{2x-1}{3} < -1$ është numri:

A 1 B 0
C -1 D -2

10 Barazimi $2^x + 3 = m$ është i mundur për vlerën e m.

A 1 B 2
C 3 D 5

11 Nuk është e vërtetë fjalia:

a Të gjitha paralelogramet janë katërkëndësha.
b Të gjithë katrorët janë drejtkëndësha.
c Të gjithë drejtkëndëshat janë paralelograme.
d Të gjithë paralelogramet kanë diagonale pingule.

12 $\sqrt{x^2}$ është identike me:

A x B $-x$
C $|x|$ D $-|x|$

13 Vlera më e madhe e shprehjes $1 - \sin 2x$ është:

A -1 B 0
C 2 D 3

14 Në qoftë se $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = a$, atëherë $x^2+\frac{1}{x^2}=$

A a B $a-2$

C a^2 D $\sqrt{a}$

15 Në qoftë se $\log_a 2 = x;\ \log_a 3 = y$, atëherë $\log_a 6 =$

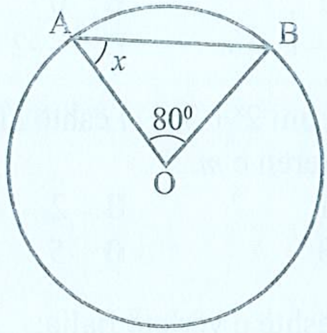
A xy B $2x+3y$

C $x+y$ D $3x+2y$

16 Gjeni këndin x në figurë.

A 50^0 B 40^0

C 30^0 D 20^0



17 Jepet $\sin x < 0$ dhe $\text{tg}x > 0$. Atëherë këndi x ndodhet në kuadrantin e:

A I B II

C III D IV

18 Koeficienti këndor i drejtëzës pingule me drejtëzën $2x + 4y = 5$ është:

A 4 B 2

C 1 D $\frac{1}{2}$

19 Raporti i syprinë së sferës me rreze R, me vëllimin e saj është:

A $3\pi R$ B $\frac{3}{R}$

C πR D 9R

20 $(k+1)$ është numër tek. Cili nga numrat e mëposhtëm është gjithashtu tek?

A $2(k+1)$ B $(k+1)(k+3)$

C $(k+1)(k+2)$ D $k(k+1)$

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet nga 21–32.

21 Mesatarja e 5 numrave të plotë të njëpasnjëshëm është 6. Gjeni numrin më të madh ndërmjet tyre.

3 pikë

22 Krahasoni:

a $(0,3)^{3,1}$ me $(0,3)^{3,11}$

1 pikë

b $\sin 140^0$ me $\sin 150^0$

1 pikë

c $(\frac{1}{2})^4$ me $(\frac{1}{3})^4$.

1 pikë

23 Zgjidhni sistemin e inekuacioneve:

$$\begin{cases} x-1 \geq 2 \\ \frac{5-2x}{3} \geq -1 \end{cases}$$

3 pikë

24 Njehsoni integalet e pacaktuara:

a $\int \frac{x^3-1}{x^2}dx$ b $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$

3 pikë

25 Është dhënë funksioni $y = x^2 - 6x$.

a Gjeni ekstremumet e tij.

2 pikë

b Gjeni syprinën e figurës që kufizohet nga grafiku i funksionit, boshti Ox dhe pjesa që ndodhet në të djathtë të drejtëzës $x = 1$.

3 pikë

26 Brinjët e një trekëndëshi janë 9 cm, 12 cm, 15 cm.

a Tregoni që trekëndëshi është kënddrejtë?

1 pikë

b Gjeni segmentet në të cilat e ndan hipotenuzën lartësia e hequr mbi të nga kulmi i këndit të drejtë.

2 pikë

27 Në trekëndëshin ABC shënojmë

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Meset e brinjëve AB dhe AC janë përkatësisht M, N.

a Shprehni vektorët $\overrightarrow{BC}$ dhe $\overrightarrow{MN}$ nëpërmjet vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$

1 pikë

b Vërtetoni që vija e mesme MN e trekëndëshit është paralele me brinjën e tretë dhe sa gjysma e saj.

2 pikë

28 Gjeni vlerën më të madhe të funksionit $y = \cos^4 x - \sin^4 x$.

3 pikë

29 a Gjeni dhe paraqitni në planin koordinativ xOy pesë pika të grafikut të funksionit $y = 4^x$. Bashkojini ato me vijë të lëmuar për të skicuar grafikun e funksionit.

2 pikë

b Skiconi në po atë figurë grafikun e funksionit $y = 4^{x-1}$

2 pikë

30 Nga pika A(2, 3) ndërtojmë pingulen me drejtëzën $3x + 4y = 0$. Gjeni gjatësinë e kësaj pinguleje.

3 pikë

31 Zgjidhni ekuacionin

$$\sqrt{x-2} \cdot (2x^2 - x - 1) = 0$$

3 pikë

32 Në një kuti ndodhen 5 sfera të bardha dhe 4 të kuqe. Tërhiqen njëra pas tjetrës 2 sfera (pa kthim). Gjeni probabilitetin:

a Sfera e parë është e bardhë dhe e dyta e kuqe.

1 pikë

b Të dyja sferat janë të bardha.

1 pikë

c Të dyja sferat janë të kuqe.

1 pikë

d Sferat janë të së njëjtës ngjyrë.

1 pikë

TEST 10

Rrethoni vetëm alternativën e saktë, në ushtrimet 1–13. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Gjeni vlerën e shprehjes $\log_2 4 + \log_2 1 =$

A 5 B 4
C 3 D 2

2 Jepet bashkësia M = {0, 1, 2, 3}. Cili nga pohimet është i vërtetë?

A $2 \notin M$
B $\{0, 1, 3\} = M$
C $2 \in M$ dhe $3 \notin M$
D $1 \in M$ dhe $2 \in M$

3 Në sa pika e pret boshtin e abshisave grafiku i funksionit $y = 2(x-1)$?

A 0 B 1
C 2 D 3

4 Jepet inekuacioni $|x-1| < 1$. Gjeni cila nga vlerat e mëposhtme bën pjesë në bashkësinë e zgjidhjeve të tij.

A 1 B 3
C 5 D 7

5 Nëse $x - 3 = 6$, atëherë vlera e shprehjes $x^2 - 6x + 9$ është:

A 64 B 60
C 48 D 36

6 $\int_0^1 e\,dx =$

A 0 B 1
C e D $e + 1$

7 Gjeni vlerën më të madhe të funksionit $y = \cos^2 x$, $x \in R$.

A 0 B 1
C 2 D 3

8 Numri më i vogël i kulmeve të një prizmi është:

A 3 B 4
C 5 D 6

9 Koeficienti këndor i drejtëzës që kalon nga pikat A(3, 1) dhe B(4, 2) është:

A −1 B 0
C 1 D 2

10 $\cos^2 x + \cos^2(90^0 - x)$ është e barabartë me:

A −1 B 0
C 1 D 2

11 Këndi që formon me boshtin Ox tangjentja ndaj grafikut të funksionit $y = -\frac{1}{x}$ në pikën me abshisë 1 është:

A 30^0 B 45^0
C 60^0 D 90^0

12 Diagonalja e drejtkëndëshit është 13 cm, kurse gjatësia e tij është 12 cm. Syprina e paralelogramit në cm² është:

A 130 B 120
C 60 D 30

13 Në progresionin aritmetik me kufizë të parë 2 dhe kufizë të tretë 8, kufiza e katërt është:

A 16 B 15
C 12 D 11

14 Jepen vektorët

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} m \\ -6 \end{pmatrix}$ dhe $\vec{u} // \vec{v}$.

Vlera e m është:

A 4 B 8

C −8 D −4

15 Ekuacioni i rrethit me qendër në origjinën e koordinatave dhe që kalon nga pika (4, 3) është:

A $x^2 + y^2 = 9$ B $x^2 + y^2 = 16$

C $x^2 + y^2 = 25$ D $x^2 + y^2 = 43$

16 Jepet $\frac{x^2}{6} = 4p$. Gjeni 12p.

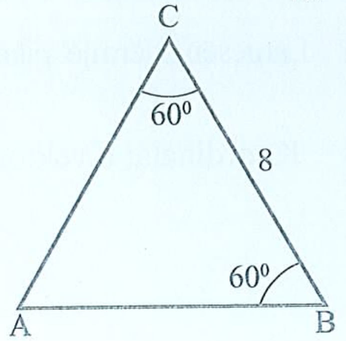
A $\frac{x^2}{3}$ B $\frac{x^2}{2}$

C x^2 D $2x^2$

17 Perimetri i trekëndëshit në figurë është:

A 24 B 20

C 18 D Nuk mund të gjendet.



18 Pika (a, b) ndodhet në kuadrantin e katërt. Në cilin kuadrant ndodhet pika $(a, a - b)$?

A I B II C III D IV

19 x është numër real. Cili nga numrat e mëposhtëm nuk mund të jetë zero?

A $x^2 - 1$ B $|x|$ C $x^3 + 1$

D $2x^2 + 3$

20 Këndi i brendshëm i një pesëkëndëshi të rregullt është:

A 90^0 B 108^0

C 120^0 D 135^0

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet nga 21–32.

21 Gjeni bashkësinë e përcaktimit për secilin nga funksionet më poshtë:

a $y = \ln(x - 1)$ **1 pikë**

b $y = \sqrt{x^2 + 1}$ **2 pikë**

22 a Skiconi grafikun e funksionit $y = x^2 - 1$. **1 pikë**

b Njehsoni syprinën e figurës së kufizuar nga grafiku i funksionit $y = x^2 - 1$, e cila ndodhet në të majtë të boshtit të ordinatave. **3 pikë**

23 Zgjidhni sistemin e ekuacioneve:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 - y^2 + 2xy + 1 = 0 \end{cases}$$ **4 pikë**

24 Jepet rrethi me diametër 26 cm. Në të njëjtën anë të diametrit janë ndërtuar dy korda paralele me gjatësi 24 cm dhe 10 cm. Gjeni largesën ndërmjet këtyre kordave. **4 pikë**

25 Zgjidhni ekuacionet:

a $3^{x+3} = 9^{2x}$ **2 pikë**

b $2\cos x - \sqrt{3} = 0$, për $0 < x < \frac{\pi}{2}$

2 pikë

26 Pikat A(2, 1); B(3, 3) dhe $C(a + 1, a)$ shtrihen në drejtëzën (d). Gjeni vlerën e a.

3 pikë

27 Klasa ka 30 nxënës, nga këta 12 janë djem. Nota mesatare e vajzave në provimin e matematikës ishte 8,5. Nota mesatare e djemve ishte 7. Gjeni notën mesatare të klasës.

2 pikë

28 Pikat A (– 2, 8) ; B (– 1, 1) dhe C (6, 2) janë kulmet e një trekëndëshi. Vërtetoni që trekëndëshi është kënddrejtë.

3 pikë

29 Lartësia e një cilindri është 10 cm më e madhe se rrezja e bazës së tij. Sipërfaqja e përgjithshme e cilindrit është 144π cm^2. Gjeni rrezen e bazës dhe lartësinë e cilindrit.

4 pikë

30 Thjeshtoni shprehjen

$\sqrt{8} - 2\sqrt{50} + \sqrt{48} - 4\sqrt{27}$

2 pikë

31 Në një kuti ndodhen 5 sfera të bardha dhe 3 të kuqe. Nga kutia nxirret një sferë dhe pasi shihet ngjyra e saj, kthehet përsëri në kuti. Më pas nga kutia nxirret përsëri një sferë. Gjeni probabilitetin:

a Të dyja sferat janë të kuqe.

1 pikë

b Sfera e parë është e kuqe dhe e dyta e bardhë. **1 pikë**

c Sfera e parë është e bardhë dhe e dyta e kuqe. **1 pikë**

d Të dyja sferat janë të bardha.

1 pikë

32 Rrezevektorët e pikave A dhe B janë përkatësisht $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ dhe $\vec{b} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$. Gjeni:

a Largesën e pikave A dhe B nga origjina e koordinatave.

1 pikë

b Largesën ndërmjet pikave A dhe B.

1 pikë

c Koordinatat e vektorit $\overrightarrow{AB}$.

1 pikë

TEST 11

Rrethoni vetëm alternativën e saktë në ushtrimet 1–13.
Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Jepet $\sin x < 0$ dhe $\mathrm{tg}x > 0$. Në cilin kuadrant ndodhet këndi x?

A I B II
C III D IV

2 Vlera numerike e shprehjes $4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$ është:

A 0 B $7\sqrt{3}$
C $6\sqrt{3}$ D $3\sqrt{3}$

3 Prerja e bashkësive të shkronjave të fjalëve "JETA" dhe "TRE" ka:

A 1 element
B 2 elemente
C 3 elemente
D 4 elemente

4 Shprehja $2\log\sqrt{x} - 2\log x + \log x^3$ për $x > 0$ është identike me:

A 0 B $-\log x$
C $2\log x$ D $3\log x$

5 Jepet $5^x = 5$. Atëherë 5^{-x} është:

A 10 B 1
C $\frac{1}{5}$ D 5

6 Ekuacioni $x^2 = 4$ është i njëvlershëm me:

A $(x-2)(x+2) = 0$ B $x = 2$
C $x = -2$ D $x = 4$

7 Me cilin nga funksionet e mëposhtme është i barabartë funksioni $y = x$?

A $y = |x|$ B $y = \sqrt{x^2}$
C $y = (\sqrt{x})^2$ D $y = (\sqrt[3]{x})^3$

8 Vlera e derivatit të funksionit $y = x^4 - x$ në pikën $x = -1$ është:

A -6 B -5
C -4 D -3

9 $\int_{-1}^{1} x^3 dx$ është i barabartë me:

A -2 B -1
C 0 D 1

10 Zgjidhje e sistemit $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$ është çifti i radhitur:

A (1, 1)
B (1, 2)
C (2, 2)
D (2, 1)

11 Këndi i brendshëm i një gjashtëkëndëshi të rregullt është:

A 90^0
B 105^0
C 120^0
D 110^0

12 Pingule me drejtëzën $x + y - 5 = 0$ është drejtëza:

A $x + 2y = 0$
B $x - 2y = 0$
C $x - y = 0$
D $x + 3y = 0$

13 Gjatësia e segmentit AB ku A(4; 1) dhe B(1; 5) është:

A 2
B 3
C 4
D 5

14 Jepet funksioni $y=\dfrac{5x}{2x+3}$. Cili nga numrat e mëposhtëm nuk bën pjesë në bashkësinë e përcaktimit të tij?

A $-\dfrac{3}{2}$ B 2

C 3 D $\dfrac{3}{2}$

15 Raporti i perimetrave të dy katrorëve është 3:2. Raporti i syprinave të tyre është:

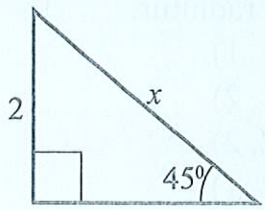
A 3:2 B 2:3

C 4:9 D 9:4

16 Gjeni x në figurë.

A $2\sqrt{2}$ B 4

C 6 D Nuk mund të gjendet



17 Rrethi $x^2+y^2=m^2$ kalon nga pika (–3,5). Vlera e m është:

A 4 B $\sqrt{34}$

C 3 D 5

18 $\sin\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{4}=$

A $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C $\sqrt{3}$ D $\sqrt{2}$

19 Këndi në gradë që i korespondon këndit π radian është:

A 180^0 B 0^0

C $3{,}14^0$ D 360^0

20 Jepet $f(x)=x^2$ dhe $g(x)=2^x$. Atëherë $g(f(x))=$

A 2^{2x^2} B 2^{x^2}

C 2^{x^3} D x^{2x}

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet nga 21–32.

21 Mesatarja e 6 numrave të plotë të njëpasnjëshëm është 4,5. Gjeni numrin më të madh ndërmjet tyre.

2 pikë

22 Thjeshtoni shprehjet:

a $\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}+\dfrac{a}{a-1}$

b $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$

3 pikë

23 Është dhënë funksioni $y=4x-x^2$

a Gjeni ekstremumet e funksionit.

2 pikë

b Gjeni syprinën e figurës që kufizohet nga grafiku i funksionit, boshti Ox dhe drejtëzat $x=1$ e $x=3$.

3 pikë

24 Jepen pikat A(2, 2) B(4, 4) dhe C(1, 0).

a Gjeni ekuacionin e drejtëzës (AB).

1 pikë

b Gjeni ekuacioni e mesores CM.

2 pikë

c Gjeni ekuacionin e lartësisë CH.

1 pikë

25 Në rrethin me diametër AB = 25 cm është marrë një pikë C, që ndodhet në largesën 12 cm nga drejtëza AB. Gjeni syprinën e trekëndëshit ABC.

3 pikë

26 Zgjidhni ekuacioni $\sin 2x = \frac{1}{2}$ për $0 \leq x \leq 180^0$.

3 pikë

27 Cilindrit të drejtë rrethor me rreze të bazës R dhe lartësi h i është bërë një gërryerje në formë kuboidi që ka si bazë katrorin e brendashkruar në bazën e cilindrit dhe lartësi sa ajo e cilindrit.
Shprehni nëpërmjet R dhe h vëllimin e pjesës së mbetur të cilindrit.

4 pikë

28 Në një progresion aritmetik jepen $u_6 + u_{12} = 38$ dhe $u_{10} + u_{15} = 52$.

a Gjeni kufizën e parë dhe diferencën e progresionit. 2 pikë

b Gjeni shumën $u_9 + u_{16}$. 2 pikë

29 Duke përdorur një ndryshore ndihmëse, zgjidhni ekuacionin $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. 3 pikë

30 Për cilat vlera të x ka kuptim shprehja $\log(9 - \frac{1}{3^{x-1}})$? 3 pikë

31 Në paralelogramin ABCD shënohen $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ dhe $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Shënohet M mesi i diagonales AC.

a Shprehni nëpërmjet $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ vektorët $\overrightarrow{AM}$ dhe $\overrightarrow{MC}$.

1 pikë

b Vërtetoni me rrugë vektoriale që pika M është edhe mesi i diagonales BD.

2 pikë

32 Në një kuti ndodhen 5 sfera të bardha dhe 4 sfera të zeza. Nxirren një nga një të gjitha sferat e kutisë. Gjeni probabilitetin që sferat të nxirren në renditjen e para e bardhë, e dyta e zezë dhe kështu me radhë në mënyrë të alternuar një e bardhë dhe një e zezë.

3 pikë

TEST 12

Rrethoni vetëm alternativën e saktë, në ushtrimet 1–13. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Numri $(2^{-3})^2$ është i barabartë me:

A 2^{-5} B 2^{-6}

C 2^{-9} D 2^{-32}

2 Numri $7\sqrt{2}-\sqrt{50}$ është i barabartë me:

A $10\sqrt{2}$ B $12\sqrt{2}$

C $2\sqrt{2}$ D $-6\sqrt{2}$

3 Ekuacioni $x^2+2x+a=0$ ka dy rrënjë reale të barabarta. Vlera e a është:

A 4 B 2

C 1 D 0

4 Cila fjali është teoremë?

A Çdo paralelogram është drejtkëndësh.

B Çdo paralelogram është romb.

C Çdo romb është katror.

D Çdo katror është paralelogram.

5 Pika ku priten drejtëzat

$y=x$ dhe $y=3-2x$ e ka abshisën:

A 1 B 2

C 3 D 4

6 Vektorët $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ dhe $\vec{v}=\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}$

gëzojnë vetinë:

A kanë gjatësi të barabarta;

B janë kolinearë;

C janë vektorë njësi;

D janë të barabartë.

7 Derivati i funksionit $y=2\sqrt{x}$ në pikën $x=1$ është:

A 3 B 2

C 1 D 0

8 Mesi i segmentit AB, ku A(−2; 3) dhe B(0; 7) është pika me koordinata:

A (2, 5) B (−1, 4)

C (−1, 5) D (−2, 5)

9 Në grafikun e funksionit $y=3^{2x-1}$ ndodhet pika:

A (1, 9) B (1, 3)

C (2, 3) D (2, 9)

10 Është pingule me drejtëzën $x+2y-3=0$ drejtëza:

A $y=x$ B $y=2x$

C $y=-x$ D $y=-2x$

11 Vlera e $\int_1^4 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ është:

A 1 B 2

C 3 D 4

12 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ dhe x është kënd i kuadrantit të dytë. Vlera e $\cos x$ është:

A −1 B −0, 5

C 0, 5 D 1

13 Në trekëndëshin dybrinjënjëshëm me bazë 8 cm dhe brinjë anësore 5 cm, lartësia në cm është:

A 3 B 4

C 5 D 6

14 Jepet $a = \frac{x}{1-x}$. Shprehni x me anën e a.

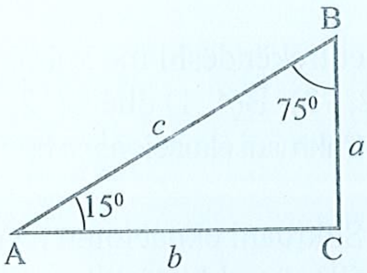
A a B $\frac{a}{a-1}$

C $\frac{a}{1-a}$ D $\frac{a}{a+1}$

15 Cili relacion është i vërtetë për figurën?

A $a<b<c$ B $c<b<a$

C $b<a<c$ D $a<c<b$



16 Brinja e katrorir është a. Diagonalja e tij është:

A $2a$ B $a\sqrt{2}$ C $a\sqrt{3}$

D $a+\sqrt{2}$

17 Madhësitë x dhe y janë në përpjesëtim të drejtë. Për $x = 6$ jepet $y=15$. Gjeni x për $y = 25$.

A 8 B 9

C 10 D 12

18 Jepet $\log 7 = p$. Gjeni $\log 70$.

A $10p$ B $10+p$

C $p-1$ D $p+1$

19 Sa përqind e numrit 12 është numri 18:

A 40% B 80%

C 120% D 150%

20 I anasjelli i funksionit $y = 3x + 1$ është:

A $y = \frac{x-1}{3}$ B $y = \frac{1}{3x+1}$

C $y = \frac{3}{3x+1}$ D $y = \frac{x+1}{3}$

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet nga 21–32.

21 Zgjidhni grafikisht inekuacionin

$x^2 - 6x - 7 < 0$

3 pikë

22 Jepet vargu $u_n = \frac{2n-1}{n+2}$

a Sa kufiza të tij janë më të vogla se 1,8?

1 pikë

b Sa kufiza të tij janë më të vogla se 2? **2 pikë**

23 Zgjidhni ekuacionin $\sin^2 x + \sin x = 2$.

3 pikë

24 Jepet funksioni $y = x^2 - 10x$.

a Gjeni koordinatat e pikës ku funksioni ka ekstremum.

2 pikë

b Shkruani ekuacionin e tangjentes ndaj grafikut të funksionit, të hequr në origjinën e koordinatave.

1 pikë

c Në cilën pikë të grafikut duhet ndërtuar tangjentja, në mënyrë që ajo të formojë me boshtin e abshisave këndin 45^0?

2 pikë

25 Jepet $\begin{cases} 3\vec{a}+2\vec{b}=7\vec{i}-8\vec{j} \\ 4\vec{a}-\vec{b}=13\vec{i}-18\vec{j} \end{cases}$ ku

$\vec{i}$ dhe $\vec{j}$ janë vektorë njësi.

a Duke zgjidhur sistemin shprehni vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ me anën e vektorëve njësi $\vec{i}$ dhe $\vec{j}$.

3 pikë

b Gjeni gjatësitë e vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$.

1 pikë

26 Gjeni bashkësinë e vlerave të x për të cilat ka kuptim shprehja $\sqrt{\log\ (1-x)}$

3 pikë

27 Merren të gjitha radhitjet treshe pa përsëritje të shkronjave I, R, A, B.

a Me anë të diagramit-pemë shkruani të gjitha këto radhitje.

2 pikë

b Sa është probabiliteti i ngjarjes që të formohet fjala "BAR"?

1 pikë

28 Në një gjysmësferë është brendashkruar koni, bazë e të cilit është rrethi i bazës së gjysmësferës. Gjeni raportin e vëllimeve të konit me gjysmësferën.

4 pikë

29 Duke përdorur një ndryshore ndihmëse, zgjidhni ekuacionin

$$1-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^4}=0.$$

3 pikë

30 Bazat e një trapezi kënddrejtë janë 16 cm dhe 36 cm, kurse brinja e tij anësore, që nuk është pingule me bazat, është 25 cm. Gjeni:

a syprinën e trapezit;

2 pikë

b diagonalet e trapezit. 2 pikë

31 Jepet trekëndëshi me kulme A(2, –3); B(4, 1) dhe C(–2, 5).

a Shkruani ekuacionin e brinjës AB.

1 pikë

b Shkruani ekuacionin e lartësisë CH të trekëndëshit.

2 pikë

32 40% e numrit x është 8 njësi më e madhe se 0,35 e x. Gjeni vlerën e x.

2 pikë

● TEST 13

Rrethoni vetëm alternativën e saktë, në ushtrimet 1–13. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Vlera e shprehjes $\frac{5^{-11}}{5^5}$ është e barabartë me:

A 5^{-16} B 5^{-7}

C 5^{-6} D 5^{16}

2 Jepet inekuacioni $|x-2| \leq 3,\ x \in R$. Cila nga vlerat e mëposhtme të x nuk është zgjidhje e tij?

A -1 B 0

C 3 D 6

3 Ordinata e mesit të segmentit AB, ku A(0, 3) dhe B(2, 5), është:

A 1 B 2

C 3 D 4

4 Vlera e x-it në ekuacionin $2^{x+1} = 2$ është:

A -4 B -3

C 0 D 3

5 Numri më i madh natyror që vërteton inekuacionin e dyfishtë $20 \leq x < 25$ është:

A 23 B 24

C 25 D 26

6 Në një trekëndësh kënddrejtë, kateti përballë këndit 30° është 4 cm. Hipotenuza në cm është:

A 2 B 4

C 6 D 8

7 Drejtëza $y = \frac{1}{2}x + 1$ e pret boshtin Ox në pikën me abshisë:

A -2 B -1

C 0 D $\frac{1}{2}$

8 Shprehja log 2 + 0,5 · log 25 është:

A 0 B 0,5

C 1 D 2

9 Koeficienti këndor i tangjentes ndaj grafikut të funksionit $y = -3x^2 + 4x$ në pikën $x = 1$ është:

A -3 B -2

C -1 D 0

10 Zgjidhje e ekuacionit $x^3 - x + 6 = 0$ është numri:

A 1 B 2

C -1 D -2

11 Brinjët e një trekëndëshi janë 3 cm, 4 cm, 6 cm. Perimetri i një trekëndëshi të ngjashëm me të është 26 cm. Brinja më e vogël e trekëndëshit të dytë është:

A 4 cm B 6 cm

C 8 cm D 12 cm

12 Perimetri i rrethit me rreze π është :

A 2π B $2\pi^2$

C $\pi + 2$ D $2\pi + 2$

13 Funksioni i anasjellë i funksionit $y = 2x + 4$ është:

A $y = \frac{x-2}{4}$ B $y = \frac{x-2}{2}$

C $y = \frac{x-4}{2}$ D $y = \frac{x-4}{4}$

14 Drejtëzat d_1 dhe d_2 janë pingule. Koeficienti këndor i drejtëzës d_1 është

$-\frac{2}{3}$. Koeficienti këndor i drejtëzës d_2 është:

A $\frac{2}{3}$ B 6

C $\frac{3}{2}$ D $-\frac{3}{2}$

15 Jepet $\frac{2}{5}x = \frac{4}{7}y$. Gjeni $\frac{x}{y}$.

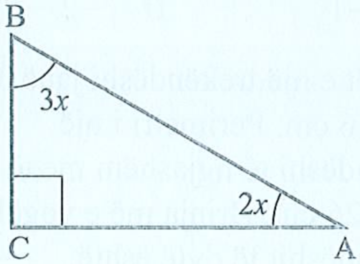
A $\frac{10}{7}$ B $\frac{7}{10}$

C $\frac{8}{35}$ D $\frac{35}{8}$

16 Masa e këndit A në figurë është

A 18^0 B 36^0

C 54^0 D 72^0



17 Jepet $a = 3b - 5$ dhe $b = 4a - 2$. Gjeni a.

A 1 B 2

C 3 D −1

18 Këndi që formojnë akrepat e orës në orën 2:00 është:

A 10^0 B 20^0

C 30^0 D 60^0

19 Në qoftë se $3x > -2x$ atëherë:

A $x < 0$ B $x > 0$

C $x \leq 0$ D $x \geq 0$

20 Bashkësitë A dhe B kanë përkatësisht 5 dhe 7 elemente. Sa është numri maksimal i mundëshëm i elementeve të bashkësisë $A \cap B$?

A 0 B 5

C 7 D 12

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet nga 21–32.

21 Jepet ekuacioni $x^2 + 6x + m = 0$.

a Për ç'vlera të m, ekuacioni ka dy rrënjë reale të ndryshme?

1 pikë

b Për ç'vlera të m, njëra rrënjë e ekuacionit është $x = 2$?

1 pikë

22 Në një progresion aritmetik jepen:

$$\begin{cases} u_2 + u_{10} = 22 \\ u_5 + u_8 = 24 \end{cases}.$$

a Gjeni u_1 dhe d.

3 pikë

b Gjeni u_{25}. 1 pikë

23 Jepet funksioni $y = x^3 - 27x + 1$, $x \in R$

a Gjeni ekuacionin e tangjentes së grafikut në pikën e tij me abshisë $x = 1$. 2 pikë

b Gjeni ekstremumet e funksionit.

2 pikë

24 Mesatarja aritmetike e 6 numrave është 24, kurse mesatarja aritmetike e pesë numrave të parë është 20. Gjeni numrin e gjashtë.

2 pikë

25 Jepet $0 < x < \frac{\pi}{2}$ dhe $\sin x = \frac{4}{5}$. Gjeni vlerën e shprehjes

$\sin(\pi - x) + \cos(\pi - x)$. 3 pikë

26 Ana dhe Vera filluan të lexojnë njëkohësisht të njejtin libër me 180 faqe. Duke lexuar çdo ditë 2 faqe më shumë se Ana, Vera e mbaroi librin 1 ditë me shpejt. Sa faqe në ditë lexoi secila nga vajzat?

3 pikë

27 Jepen pikat A (−1, 4) dhe B (3, 2).

a Shkruani ekuacionin e drejtëzës AB. 1 pikë

b Shkruani ekuacionin e përmesores së segmentit AB. 3 pikë

28 Këndi ndërmjet lartësisë dhe përftueses së një koni është 30^0. Gjeni syprinën e përgjithshme të konit, në qoftë se lartësia e tij është 10 cm.

4 pikë

29 Jepet polinomi

$P(x) = x^4 - 2x^3 - x + 2$.

a Faktorizoni polinomin.

2 pikë

b Zgjidhni ekuacionin $P(x) = 0$.

2 pikë

30 Në gjashtëkëndëshin e rregullt ABCDEF jepen vektorët $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ dhe $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$. Shprehni nëpërmjet $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ vektorët e diagonaleve të gjashtëkëndëshit që fillojnë në pikën A.

3 pikë

31 Gjatësia e një drejtkëndëshi është zmadhuar me 15%, ndërsa gjerësia e tij është zmadhuar me 12%. Me sa për qind është zmadhuar syprina e drejtkëndëshit?

3 pikë

32 Në një kuti ndodhen pesë sfera të kuqe (K), katër të bardha (B) dhe shtatë të verdha (V). Nga kutia nxirret rastësisht një sferë dhe pa e kthyer atë nxjerrim një sferë të dytë. Gjeni probabilitetin.

a Të dyja sferat janë të kuqe. 1 pikë

b Sfera e parë është e kuqe dhe e dyta e bardhë. 1 pikë

c Sfera e parë është e bardhë dhe e dyta është e verdhë. 1 pikë

d Sferat janë të së njejtës ngjyrë. 1 pikë

TEST 14

Rrethoni vetëm alternativën e saktë, në ushtrimet 1–13. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Vlera e shprehjes $\log 100 + \log 1$ është:

A 5 B 4
C 3 D 2

2 Numri i rrënjëve reale të ekuacionit $x^2 - 4x = 0$ është:

A 3 B 2
C 1 D 0

3 Numri i pikave ku e pret boshtin e abshisave grafiku i funksionit $y = 3(x-2)$ është:

A 0 B 1
C 2 D 3

4 Në një drejtkëndësh, diagonalja është 13 cm, kurse njëra nga brinjët është 12 cm.
Brinja tjetër është:

A 10 cm B 8 cm
C 5 cm D 2 cm

5 Jepet vektori $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ai është kolinear me vektorin:

A $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
C $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ D $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

6 Nëse vëllimi i një kubi është 64 cm^3, atëherë syprina e çdo faqeje në cm^2 është:

A 12 B 16
C 32 D 64

7 Vlera më e madhe e funksionit $y = \cos 4x$, $x \in R$ është:

A 0 B 1
C 2 D 4

8 Derivati i funksionit $y = \frac{1}{3}x^3 + x - 2$ në pikën $x = -1$ është:

A 0 B -1
C 1 D 2

9 Shprehja $\sqrt[3]{x^3}$ është identike me:

A x B $-x$
C $|x|$ D $-|x|$

10 Vlera e funksionit $y = (\frac{1}{2})^{2x-3}$ në pikën $x = 1$ është:

A 4 B 2
C 0,5 D 0, 25

11 Drejtëza $x - y + 3 = 0$ formon me boshtin Ox këndin:

A 30^0 B 45^0
C 60^0 D 90^0

12 Jepet $\sin x < 0$ dhe $\cos x > 0$. Këndi x është në kuadrantin e:

A I B II
C III D IV

13 Rrotullimi me qendër O dhe kënd 180^0 është:

A simetri boshtore;
B zhvendosje paralele;
C simetri qendrore;
D zmadhim.

14 Cili relacion shpreh mardhënien: x është 3 herë më i madh se y?

A $x > 3y$ B $y > 3x$
C $y = 3x$ D $x = 3y$

15 $7^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{7} =$

A 49 B 14

C 7 D 1

16 Zgjidhje e ekuacionit $9 - \frac{2}{a} = 5$ është vlera e $a =$.

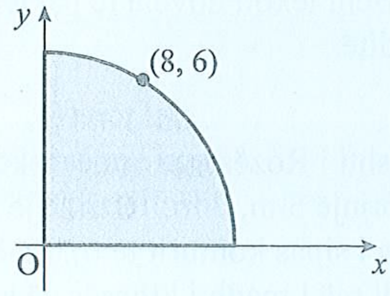
A $\frac{1}{2}$ B $-\frac{1}{2}$

C 2 D −2

17 Syprina e çerekrrethit me qendër në origjinën e koordinatave në figurë është:

A 100π B 80π

C 50π D 25π



18 Bashkësia A ka 4 elemente, ndërsa bashkësia B ka 5 elemente. Cili është numri minimal i mundëshëm i elementeve të bashkësisë A∪B?

A 1 B 2

C 6 D 9

19 Tri kufizat e para të një progresioni aritmetik janë $(x + 1)$; 6 dhe $(x + 9)$. Gjeni x.

A 1 B 2

C 6 D 9

20 Në qoftëse $2x + 1 = 5$, atëherë $(2x - 3)^2 =$

A 3 B 2

C 1 D 0

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet nga 21–32.

21 Gjeni bashkësinë e përcaktimit për funksionin $y = \dfrac{x}{\log_2(x-1)}$.

3 pikë

22 Jepet katrori me perimetër 24 cm. Një trekëndësh barabrinjës e ka perimetrin të barabartë me perimetrin e katrorit. Gjeni:

a Brinjën e trekëndëshit

1 pikë

b Lartësinë e trekëndëshit

2 pikë

c Syprinën e trekëndëshit.

1 pikë

23 Në cilën pikë, tangjentja ndaj parabolës $y = x^2$:

a formon me boshtin Ox këndin 45^0;

1 pikë

b formon me boshtin Ox këndin 120^0;

1 pikë

c është paralele me boshtin Ox.

1 pikë

24 Jepet funksioni $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$. Zgjidhni ekuacionin $f'(x) = 0$.

3 pikë

25 Shuma e tri numrave pozitivë që formojnë progresion aritmetik është

18. Në qoftëse numrit më të madh i shtojnmë 8, atëherë numrat formojnë progresion gjeometrik. Gjeni këta numra.

4 pikë

26 Jepet drejtëza *d*: $y=x$ dhe pika A(6,2).

a Tregoni që pika A nuk ndodhet në drejtëzën *d*.

1 pikë

b Gjeni koordinatat e këmbës së pingules së hequr nga pika A në drejtëzë d. 3 pikë

27 Zgjidhni ekuacionin:

$2^{x+3} = 4^{2x}$

2 pikë

28 Lartësia e konit është e barabartë me rrezen e bazës së tij. Një sferë e ka rrezen sa rrezja e bazës së konit. Gjeni raportin e vëllimeve të konit me sferën. 4 pikë

29 Jepet funksioni $y = -x^2 + 2x + 3$.

a Gjeni ekstremumet e tij.

1 pikë

b Gjeni syprinën e figurës së kufizuar nga grafiku i tij dhe boshti O*x*. 2 pikë

30 Çdo ditë Beni në orët 10-12 lexon ose roman, ose novela ose libër me poezi. Probabiliteti për të lexuar roman është 0,6, probabiliteti për të lexuar novela është 0,25 dhe për të lexuar libër me poezi është 0,15.

a Ndërtoni një diahgram pemë për të treguar mundësitë e Benit në dy ditë të njëpasnjëshme.

1 pikë

Gjeni probabilitetin që:

b Beni lexon libër me poezi ditën e parë dhe roman ditën e dytë.

1 pikë

c Bëni lexon roman vetëm ditën e dytë.

1 pikë

d Beni lexon novela të paktën 1 ditë.

1 pikë

31 Kopshti i Rozës ka formë trekëndëshi me brinjë 5 m, 7 m, 10 m. Një ditë, ajo eci sipas konturit të tij. Sa është këndi më i madh i kthesës që ka bërë?

3 pikë

32 Jepet $\vec{x} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ ku $|\vec{x}| = 5$ dhe $m + n = 1$.

Gjeni vektorin $\vec{x}$ me kushtin $m < 0$.

3 pikë

TEST 15

Rrethoni vetëm alternativën e saktë, në ushtrimet 1–13. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Vlera numerike e shprehjes $2\sqrt{3}-4\sqrt{3}+3\sqrt{3}+5\sqrt{3}$ është:

A 0 B $7\sqrt{3}$

C $6\sqrt{3}$ D $3\sqrt{3}$

2 Shuma e të gjitha brinjëve të një kubi është 36 cm. Vëllimi i tij në cm^3 është:

A 36 B 27

C 64 D 48

3 a është numër çift. Cili nga numrat e mëposhtëm është tek?

A $2(a+1)$

B $a(a+1)$

C $(a+2)(a+1)$

D $(a+1)(a+3)$

4 Nëse $10^{-x}=1$, atëherë 10^{x} është:

A 10 B 1

C 0,1 D 0,01

5 $\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{9}}=$

A $\frac{7}{12}$ B $\frac{5}{12}$

C $\frac{3}{12}$ D $\frac{1}{12}$

6 Këndet e një trekëndëshi janë në raportin 2 : 3 : 7. Këndi më i madh i trekëndëshit është:

A 95^{o} B 100^{o}

C 105^{o} D 110^{o}

7 Për këndin x dihet që $\sin x<0$ dhe $\cos x<0$. Kuadranti ku mbaron këndi x është:

A I B II

C III D IV

8 Koeficienti këndor i tangjentes ndaj grafikut të funksionit $y=x^4-x^3$ në pikën $x=1$ është:

A -1 B 0

C 1 D 2

9 Këndi i jashtëm i një gjashtëkëndëshi të rregullt është:

A 30^0 B 45^0

C 60^0 D 90^0

10 Mesi i segmentit me skaje në pikat A(3, −5) dhe B(1, −1) është pika me koordinata:

A (2, 3) B (3, −2)

C (2, −3) D (2, −2)

11 Vlera e $\int_1^3 2(x-4)dx$ është:

A 0 B -2

C -8 D -10

12 Është drejtkëndësh paralelogrami që ka:

A katër brinjë të barabarta;

B diagonale pingule;

C brinjët fqinjë dy nga dy të barabarta;

D një kënd të drejtë.

13 Numri i numrave të thjeshtë që ndodhen ndërmjet 50 dhe 60 është:

A 2 B 3

C 4 D 5

14 $2\sin^2 5x + 2\cos^2 5x =$

A 1 B 2

C 5 D 10

15 $1+\log_7 \frac{1}{7} =$

A 0 B 1

C –1 D –7

16 Cili nga numrat e mëposhtëm është i barabartë me $k^{\frac{3}{2}}$ për çdo k?

A $\sqrt{k^{\frac{1}{3}}}$ B $\sqrt{k^3}$

C $\sqrt[3]{k^{\frac{1}{2}}}$ D $\sqrt[3]{k^2}$

17 Jepet $a : b = 3 : 4$ dhe $c : b = 9 : 10$. Atëherë $a : c =$

A $\frac{3}{5}$ B $\frac{4}{5}$

C $\frac{6}{5}$ D $\frac{5}{6}$

18 Bashkëisa A ka 6 elemente; bashkësia B ka 8 elemente. Cili është numri minimal i mundshëm i elementeve të bashkësisë A∩B?

A 14 B 8

C 6 D 0

19 Kufiza e parë e një progresionim gjeometrik është 3 dhe herësi është 2. Shuma e dy kufizave të para të progresionit është:

A 9 B 5

C 3 D 2

20 Bashkësia e rrënjëve të ekuacionit $1-\frac{x}{2}=0$ është:

A {0,2} B {2}

C {0} D {0,–2}

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet nga 21–32.

21 Mesatarja e dy numrave të plotë është 5. Një e katërta e diferencës së numrit të madh me të voglin është 1. Gjeni këta numra.

3 pikë

22 Thjeshtoni shprehjen:

$$\left(\frac{x^2-4}{10x}\right)\cdot\left(\frac{5x^2}{x^2+2x}\right)$$

2 pikë

23 Shkruani ekuacionin e asaj tangjenteje të parabolës $y = x^2$, e cila është pingule me drejtëzën $x + 4y = 0$.

3 pikë

24 Në drejtëzën $4x + 3y - 12 = 0$, gjeni pikën e baraslarguar nga pikat $(-1, -2)$ dhe $(1, 4)$.

4 pikë

25 Është dhënë funksioni $y = 4x - x^2$

a Gjeni ekstremumet e tij.

2 pikë

b Gjeni syprinën e figurës që kufizohet nga grafiku i funksionit dhe boshti Ox.

2 pikë

26 Në trekëndëshin ABC jepet AB = 10 cm, $\angle ABC = 45^0$; $\angle ACB = 30^0$.

3 pikë

a Gjeni brinjën AC.

2 pikë

b Gjeni syprinën e trekëndëshit

2 pikë

27 Zgjidhni sistemin e inekuacioneve
$$\begin{cases}\dfrac{1-2x}{2}<2\\ \dfrac{x-5}{3}<\dfrac{1}{6}\end{cases}$$
dhe paraqitni bashkësinë e zgjidhjeve në boshtin numerik.

3 pikë

28 Kuboidi me bazë me përmasa 4 cm dhe 6 cm e me lartësi 16 cm është mbushur me ujë deri në një të katërtën e lartësisë. Në të hidhet një cilindër metalik, në të cilin diametri i bazës dhe lartësia e tij janë nga 2 cm. Me sa cm rritet vëllimi i ujit në enë?

4 pikë

29 Në trapezinABCD me baza AB dhe CD shënojmë $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ dhe $\overrightarrow{DC}=\vec{b}$.

a Shprehni nëpërmjet $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ vektorin $\overrightarrow{MN}$ të vijës së mesme të trapezit (M, mesi i AD; N, mesi i BC).

2 pikë

b Vërtetoni se vija e mesme është paralel me bazat dhe sa gjysmëshuma e tyre.

2 pikë

30 Duke përdorur një ndryshore ndihmëse, zgjidhni ekuacionin
$9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

3 pikë

31 Hidhet 4 herë rresht një monedhë.

a Me anë të diagramit pemë, gjeni numrin e rezultateve të mundshme.

2 pikë

b Gjeni probabilitetin e ngjarjes që të paktën një herë të bjerë lek.

1 pikë

32 Është dhënë funksioni f, ku $f(x) = 3x - 2$, me bashkësi përcaktimi R.

a Gjeni $f\left[f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right]$.

1 pikë

b Funksioni g është i tillë që
$$g(x)=\frac{f(x)}{f(3x)-4}$$
Provoni që $g(x)=\dfrac{1}{3}$.

2 pikë

TEST 16

Rrethoni vetëm alternativën e saktë, në ushtrimet 1–13. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 $\frac{5}{\sqrt{6}-1}$ është i barabartë me:

A $\sqrt{6}-1$ B $\sqrt{6}$

C $\sqrt{6}+1$ D 5

2 Kufiza e dhjetë e progresionit 20; 15; 10; … është:

A −35 B −30

C −25 D −20

3 Më i vogli numër i plotë që i përket bashkimit të bashkësive A =]−1, 3[dhe B = [0,5] është:

A −1 B 0

C 3 D 5

4 Shprehja $(x+3)^2-(x-3)^2$ është identike me shprehjen:

A $2x^2+18$ B $12x$

C 0 D $(2x+6)^2$

5 Grafiku i funksionit $y = \sin x$ kalon nëpër pikën:

A $(\frac{\pi}{2},1)$ B $(\pi,0)$

C $(\frac{3\pi}{2},1)$ D $(2\pi,2)$

6 Në qoftë se dihet që $x^6 \cdot x^{-3} = 8$, atëherë vlera e x është:

A −2 B 0

C 2 D 3

7 Syprina e katrorit është $4a^2$. Diagonalja e tij është:

A $2a$ B $2\sqrt{2}a$

C $4a$ D $4\sqrt{2}a$

8 Syprina e një çerek qarku është π cm². Perimetri i tij në cm është:

A π B 2π

C $\pi+2$ D $\pi+4$

9 Koeficienti këndor i drejtëzës që kalon nëpër origjinë dhe nëpër pikën A(−2, 4) është:

A −2 B −4

C 2 D 4

10 Katetet e një trekëndëshi kënddrejtë janë 5 cm; 12 cm. Syprina e një trekëndëshi të ngjashëm me të është 120 cm². Kateti më i vogël i këtij trekëndëshi është:

A 5 cm B 10 cm

C 15 cm D 20 cm

11 Vlera e derivatit të funksionit $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ në pikën x = 1 është:

A 1 B 2

C 3 D 4

12 Jepen $f(x) = x^2 - 1$ dhe $g(x) = \sin x$. Shprehja $f[g(x)]$ është identike me:

A x^2-1

B $\sin^2 x$

C $\sin^2 x - 1$

D $\sin(x^2-1)$

13 Tri kufiza të njëpasnjëshme të një progresioni gjeometrik me kufiza pozitive janë 20; x dhe 5. Gjeni x.

A 100 B 20

C 10 D 1

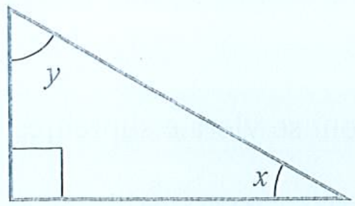
14 $8^{\frac{2}{3}} =$

A 2 B 4 C 6 D 8

15 Në figurë jepet $\cos x = \frac{2}{3}$. Gjeni $\sin y$.

A $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B $\frac{1}{3}$

C $\frac{\sqrt{3}}{5}$ D $\frac{2}{3}$



16 Ekuacioni $x^2 - kx + 12 = 0$ njërën rrënjë e ka 2. Rrënja tjetër e tij është:

A 1 B 2

C 6 D 12

17 jepet $\log 5 = m$. Atëherë $\log 50 =$

A $10m$ B $50m$

C $10 + m$ D $1 + m$

18 Cili nga numrat e mëposhtëm është negativ?

A 2^{-5} B $(-2)^{-2}$

C $(-2)^2$ D $(-2)^{-1}$

19 I anasjelli i funksionit $y = \frac{2x-1}{5}$ është funksioni:

A $y = \frac{5}{2x-1}$ B $y = \frac{2x+1}{5}$

C $y = \frac{5x+1}{2}$ D $y = \frac{5x-1}{2}$

20 Pika e përbashkët e grafikëve të funksioneve $y = 3x$ dhe $y = -3x$ është:

A $(1, 3)$ B $(3, 1)$

C $(-1, -3)$ D $(0, 0)$

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet nga 21–32.

21 Është dhënë funksioni $y = x^3 - 27x$. Gjeni ekstremumet e tij. 3 pikë

22 Jepen vektorët

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dhe $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Gjeni gjatësitë e vektorëve:

a $\vec{u} - \vec{v}$

1 pikë

b $2\vec{u} + 3\vec{v}$

2 pikë

23 Numri 4 është rrënjë e ekuacionit

$\frac{x+2}{x-a} - \frac{2x+4}{x} = -1$. Gjeni a.

2 pikë

24 Jepet $\cos x = 0{,}6$ dhe $270^0 < x < 360^0$. Gjeni vlerën e shprehjes $S = \cos(90^0 - x) + \sin(180^0 - x)$.

4 pikë

25 Shqyrtojmë bashkësinë e numrave treshifrorë, që merren nga shifrat 2, 3, 4 pa përsëritje të shifrave.

a Me diagram-pemë gjeni numrin e tyre 2 pikë

b Zgjidhet rastësisht njëri nga këta numra. Sa është probabiliteti i ngjarjes që ai të fillojë me shifrën 2? 1 pikë

26 Jepen pikat $A(-6, 0)$ dhe $B(6, 0)$.

a Shkruani ekuacionin e rrethit me diametër segmentin AB.

2 pikë

b Gjeni gjatësinë e tangjentes të hequr nga pika M(8, 6) ndaj këtij rrethi. 2 pikë

27 Baza e një piramide është drejtkëndësh me brinjë 8 cm dhe 6 cm. Të gjitha brinjët anësore të piramidës janë nga 13 cm dhe lartësia e hequr nga kulmi i piramidës e takon bazën në qendrën e drejtkëndëshit. Gjeni vëllimin e piramidës.

4 pikë

28 Jepet parabola $y = x^2$ dhe drejtëza $y = -2x + 3$.

a Gjeni koordinatat e pikave të përbashkëta A dhe B të tyre.

1 pikë

b Shkruani ekuacionin e AB.

1 pikë

c Në harkun AB të parabolës gjeni pikën M, në të cilën tangjentja me parabolën është paralele me AB.

2 pikë

d Shkruani ekuacionin e kësaj tangjenteje. 1 pikë

29 Jepet polinomi

$P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

a Gjeni P(1). 1 pikë

b Zgjidhni ekuacionin $P(x) = 0$.

2 pikë

30 Në një progresin aritmetik kufiza e katërt është 7 dhe kufiza e nëntë është 17.

a Gjeni kufizën e parë dhe herësin e progresionit.

2 pikë

b A është numri 50 kufizë e këtij progresioni?

1 pikë

31 Provoni se vlera e shprehjes

$$S = \frac{2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x}{2^{x+3} - 2^x}$$ nuk varet nga x.

3 pikë

32 Brinjët e një trekëndëshi janë $3a$; $7a$ dhe $8a$. Provoni se këndi përballë brinjës $7a$ është 60^0.

3 pikë

TEST 17

Rrethoni vetëm alternativën e saktë në ushtrimet 1–13. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Derivati i funksionit $y = \frac{1}{x}$ është:

A x B $-\frac{1}{x}$
C $\frac{1}{x^2}$ D $-\frac{1}{x^2}$

2 Nëse $4^{2x} = 4$, atëherë vlera e x është e barabartë me:

A 1 B $\frac{1}{2}$
C $\frac{1}{3}$ D $\frac{1}{4}$

3 Tri kufiza të njëpasnjëshme të një progresioni aritmetik janë 2; x; 12. Vlera e x është e barabartë me:

A 3 B 5
C 7 D 9

4 Syprina e qarkut është 169π cm^2. Perimetri i tij në cm është:

A 26π B 18π
C 13π D 10π

5 Pika M(0, 4) ndodhet në drejtëzën $3x + ay = 12$. Vlera e a është:

A 4 B 3
C 2 D 7

6 Jepet inekuacioni $7 - x > x - 7$. Nuk është zgjidhje e tij vlera e x:

A 4 B 5
C 6 D 8

7 Numri $\sqrt{2}(\sqrt{\frac{25}{2}} - \sqrt{8})$ është:

A 1 B 2
C 3 D 4

8 Derivati i funksionit

$y = \sin^2 x + \cos^2 x$ në pikën x është:

A x B x^2
C 1 D 0

9 Në grafikun e funksionit $y = \log(\frac{x}{10})$ ndodhet pika:

A $(-1, 0)$ B $(1, 0)$
C $(1, -1)$ D $(10, 0)$

10 Nëse $f(x) = 4x - 1$, atëherë $f[f(2)]$ është:

A 7 B 17
C 27 D 37

11 Shuma dhe ndryshesa e dy numrave është 5. Prodhimi i tyre është:

A 5
B 1
C 0
D nuk mund të gjendet

12 Lartësia e trekëndëshit barabrinjës me brinjë 10 cm është:

A 5 cm B $5\sqrt{3}$ cm
C 10 cm D $10\sqrt{3}$ cm

13 Ekuacioni i drejtëzës që kalon nëpër pikat A(1, 1) dhe B(3, 3) është:

A $y = 2x$ B $y = -x$
C $y = x$ D $y = -2x$

14 Diagonalja e katrorit është 2 cm. Brinja e tij (në cm) është:

A $\sqrt{2}$ B $2\sqrt{2}$

C $3\sqrt{2}$ D 1

15 Bashkësia A ka 5 elemente, ndërsa bashkësia B ka 8 elemente. Cili është numri maksimal i mundshëm i elementeve të bashkësisë A∪B?

A 5 B 8

C 13 D 8

16 Vlera ë e vogël e shprehjes $3 - \sin x$ është:

A 2 B 3

C 4 D 0

17 Cili nga këndet e mëposhtëm e ka tangentin numër negativ?

A 200^0 B 57^0

C 260^0 D 140^0

18 Këndi në kulm i një trekëndëshi dybrinjënjëshëm është 70^0. Këndi në bazë i tij është:

A 50^0 B 55^0

C 60^0 D 65^0

19 Jepet numri 402,7. Shifra 0 e tij ka vlerën e:

A qindësheve

B dhjetësheve

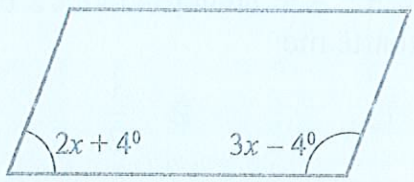
C të dhjetave

D të qindtave

20 Në figurë ABCD është paralelogram. Gjeni x.

A 9^0 B 18^0

C 27^0 D 36^0



Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet nga 21–32.

21 Thjeshtoni shprehjen

$$\frac{x-1}{x(x+2)}\cdot\frac{2x+4}{3-3x^2}$$

3 pikë

22 a Skiconi grafikun e funksionit f:

$y=\sqrt{x}$, për $x\geq 0$ 2 pikë

b Në të njëjtën figurë, skiconi grafikun e funksionit $y=-\sqrt{x-1}$, për $x\geq 1$

2 pikë

23 Jepet trekëndëshi kënddrejtë ABC me katete AC = 10 cm dhe BC = 15 cm. Në të është brendashkruar katrori me njërin kulm në pikën C dhe kulmin e kundërt në hipotenuzën AB. Gjeni syprinën e katrorit.

3 pikë

24 Jepet funksioni $y=x^2+4x$.

a Gjeni pikat ku ai ka ekstremum.

2 pikë

b Gjeni syprinën e figurës që kufizohet nga grafiku i funksionit dhe nga boshti Ox.

3 pikë

25 Jepet trekëndëshi me kulme A(0, 3); B(2, –1) dhe C(–4, 1).

a Shkruani ekuacionin e brinjës AB të tij.

1 pikë

b Shkruani ekuacioni i drejtëzës që kalon nga mesi i brinjës BC dhe është paralel me AB. **3 pikë**

c Shkruani ekuacionin e lartësisë CH të trekëndëshit. **1 pikë**

26 Shkruani ekuacionin e tangjentes ndaj grafikut të funksionit $y=-x^3+3x^2$ në pikën me abshisë $x=1$. **2 pikë**

27 Çfarë relacioni ekziston ndërmjet lartësisë dhe rrezes së bazës së cilindrit, në qoftë se syprina anësore e tij është 6 herë më e madhe se syprina e bazës? **3 pikë**

28 Gjeni mesataren aritmetike të numrave a, b, c duke ditur që

$$2^a \cdot 2^b \cdot 2^c = 16$$

2 pikë

29 Vërtetoni që nëse tek ekuacioni $ax^2 + bx + c$, koeficientet a dhe c kanë shenja të ndryshme, atëherë ekuacioni ka dy rrënjë reale të ndryshme. **2 pikë**

30 Brinjët e një trekëndëshi janë 4; 5; 6 cm.

a Gjeni kosinusin e këndit më të vogël të trekëndëshit. **2 pikë**

b Gjeni syprinën e trekëndëshit. **2 pikë**

31 Jepet polinomi $P(x) = x^3 - 3x + 2$.

a Vërtetoni se ai mund të paraqitet në trajtën $P(x) = (x-1)^2(x+2)$. **2 pikë**

b Zgjidhni ekuacionin $P(x) = 0$. **1 pikë**

32 Rrokullisen 2 zare në formë piramidash të rregullta trekndore, që kanë të shënuar në faqet e tyre numrat 1; 2; 3 dhe 4. Gjeni probabilitetin e ngjarjes:

a Nuk bie asnjë numër 4. **3 pikë**

b Bie të paktën një herë numri 4. **1 pikë**

TEST 18

Rrethoni vetëm alternativën e saktë në ushtrimet 1–13. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Jepet $n(M) = 5$ dhe $n(P) = 4$. Numri maksimali i mundshëm i elementeve të bashkësisë $M \cup P$ është:

A 1 B 4
C 5 D 9

2 $\frac{5^{x+1}}{5^x}$ është e barabartë me:

A 5^{2x} B 5
C 5^{2x+1} D 5^{x+2}

3 Vlera e x është 3,5 herë më e madhe se vlera e y. Cili nga relacionet e mëposhtme i përgjigjet kësaj varësie?

A $x > 3{,}5y$ B $y > 3{,}5x$
C $x = 3{,}5y$ D $y = 3{,}5x$

4 m është numër tek. Cili nga numrat e mëposhtëm është çift?

A $m^3 + 6m$ B $2m^3 + m$
C $4m^2 + 5m$ D $m^2 + 2m + 1$

5 Grafiku i funksionit $y = (x - 3)(x - 2)$ pret boshtin e ordinatave në pikën P. Koordinatat e saj janë:

A (6, 0) B (2, 0)
C (0, 6) D (3, 0)

6 Cili barazim nuk mund të jetë i vërtetë në asnjë rast?

A $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ B $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

C $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ D $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

7 Rrezja e rrethit $x^2 - 2x + y^2 = 0$ është:

A 4 B 2
C 1 D 0,5

8 Jepen pikat A(2, 3) dhe B(−1, 7). Gjatësia e segmentit AB është:

A 1 B 2
C 4 D 5

9 Numri i boshteve të simetrisë së paralelogramit është.

A 3 B 2
C 1 D 0

10 Pas thjeshtimit, për $a \neq 0$ dhe $b \neq 0$, shprehja $\frac{-3b(a+2)+6b}{-ab}$ bëhet:

A 0 B −2
C 1 D 3

11 Drejtëza që kalon nga origjina e koordinatave dhe nga pika M(4; 3) e ka ekuacionin:

A $y = x$ B $y = -x$
C $y = 0{,}5x$ D $y = 0{,}75x$

12 Jepet $f(x) = x - 1$ dhe $g(x) = x^2$. Vlera e $f[g(2)]$ është:

A 2 B 3
C 4 D 6

13 Vlera e derivatit të funksionit $y = 3x^2 - 2x + \pi$ në pikën $x = 0$ është:

A 3 B −2
C $\pi - 2$ D $6\pi - 2$

14 Vektorët $\vec{u}$ dhe $\vec{v}$ janë pingulë dhe kanë gjatësi 6 cm dh 8 cm. Gjatësia e vektorir $\vec{u}+\vec{v}$ (në cm) është:

A 6 B 8
C 10 D 12

15 Perimetri i një rrethi është 8 cm. Sa centimetra është perimetri i rrethit me rreze 2 herë më të vogël?

A 4 B 3
C 2 D 1

16 Cili nga ekuacionet e mëposhtëm nuk ka zgjidhje:

A $x^4 = -1$ B $x^3 = 0$
C $x^3 = -8$ D $x^2 = 4$

17 Në një trekëndësh dybrinjënjëshëm këndi i bazës është 4 herë më i madh se këndi në kulmin e tij. Këndi në kulmin e këtij trekëndëshi është:

A 10^0 B 15^0
C 20^0 D 40^0

18 Cili është më i madhi ndërmjet numrave 0,2; 15%; $\frac{1}{4}$ dhe $\frac{1}{6}$?

A $\frac{1}{4}$ B 0,2
C $\frac{1}{6}$ D 15%

19 Brinjët e një drejtkëndëshi janë 9 cm dhe 4 cm. Katrori, i cili ka të njëjtën syprinë me të, e ka brinjën (në cm)?

A 9 B 6
C 5 D 4

20 Nëse përshkojmë gjysmën e rrugës dhe mbeten akoma edhe 40 km për të përshkuar, atëherë gjatësi e rrugës (në km) është:

A 80 B 60
C 50 D 100

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet nga 21–32.

21 Drejtkëndëshi me njërën brinjë 8 cm është brendashkruar në rrethin me rreze 5 cm. Gjeni syprinën e drejtkëndëshit.

3 pikë

22 Një atlet e përshkon largesën 100 metra në 10 sekonda. Gjeni shpejtësinë e tij në km/orë.

2 pikë

23 a Gjeni ekuacionin e rrethit me qendër C(2, 3) dhe me rreze 5 njësi. 1 pikë

b Gjeni gjatësinë e kordës që ky rreth pret në boshtin O*x*.

3 pikë

24 Jepet funksioni $y = x^3 - 12x$.

a Gjeni ekstremumet e funksionit.

2 pikë

b Gjeni ekuacionin e tangjentes me grafikun e tij në pikën me abshisë -1.

1 pikë

25 Jepen vektorët

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dhe } \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a Gjeni koordinatat dhe gjatësinë e vektorit $3\vec{a} - \vec{b}$.

2 pikë

b Gjeni koordinatat e vektorit njësi që ka drejtimin e $\vec{a}$.

1 pikë

26 Në një kuti ndodhen 8 sfera të kuqe dhe 7 të zeza. Nxjerrim nga kutia një sferë dhe nuk e kthejmë më në kuti. Më pas nxjerrim një sferë të dytë. Gjeni probabilitetin:

a Të dyja sferat e nxjerra janë të kuqe. **1 pikë**

b Sferat e nxjerra janë me ngjyra të ndryshme. **1 pikë**

Më pas nxjerrim edhe një sferë të tretë. Gjeni probabilitetin:

c Të tria sferat e nxjerra nga kutia janë të së njëjtës ngjyrë. **1 pikë**

d Në tri sferat e nxjerra të ketë më shumë sfera të kuqe se sa të zeza. **1 pikë**

27 Një klasë ka 45 nxënës. Mesatarja e notave të klasës në një testim ishte 8,6. Mesatarja e notave të djemve ishte 8, kurse mesatarja e notave të vajzave ishte 9. Sa djem ka në klasë? **3 pikë**

28 Zgjidhni sistemin $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 19 \end{cases}$ **3 pikë**

29 Jepet trekëndëshi me kulme A (–5, 2); B (3, 6) dhe C (1, –4).

a Shkruani ekuacionin e brinjës AB. **1 pikë**

b Shkruani ekuacionin e lartësisë CH. **1 pikë**

c Shkruani ekuacionin e mesores BM. **2 pikë**

30 Prerja boshtore e konit e ka këndin në kulm të drejtë. Diametri i bazës së konit është 12 cm. Gjeni:

a vëllimin e konit; **1 pikë**

b syprinën e përgjithshme të konit. **2 pikë**

31 Jepet parabola $y = x^2 + mx + n$.

a Caktoni m dhe n në mënyrë që ajo të kalojë nga pikat A(4, 3) dhe B(–1, 8). **2 pikë**

b Për ç'vlera të x, kemi $y \leq 0$. **1 pikë**

c Gjeni syprinën e figurës së kufizuar nga grafiku i funksionit, boshti i abshisave dhe boshti i ordinatave. **2 pikë**

32 Në një progresion aritmetik jepen

$\begin{cases} 2u_5 - u_7 = -1 \\ u_2 + u_8 = -10 \end{cases}$. Gjeni u_1, d, u_{15}. **3 pikë**

TEST 19

Rrethoni vetëm alternativën e saktë në ushtrimet 1–13. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Jepen bashkësitë $M=\{1, 4, 5\}$ dhe $N=\{1, 5\}$. Numri i elementeve të prerjes së tyre është:

A 1 B 2
C 4 D 5

2 Ndryshoret x, y janë të ndryshme nga 0 dhe $3x = 0{,}3y$. Raporti $\frac{x}{y}$ është:

A 0,1 B 1
C 3 D 10

3 $\sin^2 0^\circ + \cos^2 0^\circ =$

A 0 B 1
C 2 D 3

4 $\int_0^1 4x^3 dx =$

A 4 B 2
C 1 D 0

5 Vlera më e madhe e funksionit $y = 5 - (x-4)^2$ në R është:

A −4 B 0
C 5 D 4

6 Jepet $\log_2 x = -1$. Vlera e x është:

A 0,5 B 2
C 4 D $\sqrt{2}$

7 Koeficienti këndor i drejtëzës $2y - 1 = x$ është:

A 2 B −2
C 0,5 D −0,5

8 Këndi i brendshëm i një pesëkëndëshi të rregullt është:

A 240° B 120°
C 108° D 90°

9 Cili nga shënimet e mëposhtme nuk është i vërtetë:

A $2^{-3} > 0$
B $2^3 + 2^3 = 2^4$
C $2^{10} : 2 = 2^9$
D $2^2 \cdot 2^4 = 2^{16}$

10 Vlera e derivatit të funksionit $y = x^3 - x^2$ në pikën $x = 2$ është:

A 12
B 8
C 4
D 2

11 Në rrethin $x^2 + y^2 = 4$ ndodhet pika:

A (0, 0)
B (−2, 0)
C (−2, −2)
D (2, 2)

12 Një e treta e gjysmës së një numri është 5. Cili është numri?

A 20
B 30
C 40
D 50

13 Numri i zgjidhjeve të ekuacionit $3^x = -1$ është:

A 0
B 1
C 2
D 3

14 Këndi i jashtëm në bazën e një trekëndëshi dybrinjënjëshëm është 110^0. Këndi në kulmin e trekëndëshit është:

A 100^0 B 80^0
C 70^0 D 40^0

15 Jepen vektorët

$\vec{u}=\begin{pmatrix}3x-1\\2\end{pmatrix}$ dhe $\vec{v}=\begin{pmatrix}5\\y+1\end{pmatrix}$ të tillë

që $\vec{u}=\vec{v}$. Gjeni $x+y$.

A 4 B 3
C 2 D 1

16 Jepet $a>0$ dhe $b<0$. Cili nga mosbarazimet e mëposhtëm është me siguri i vërtetë?

A $a+b>0$ B $a+b<0$
C $a\cdot b>0$ D $a\cdot b<0$

17 24% e kthyer në thyesë është e barabartë me:

A $\frac{6}{25}$ B $\frac{5}{24}$
C $\frac{24}{5}$ D $\frac{12}{5}$

18 Cili relacion shpreh varësinë: x është 10 herë më i vogël se y?

A $x+10=y$ B $x-10=y$
C $10x=y$ D $x<10y$

19 Brinja e katrorit është 1 cm. Sa është syprina e katrorit me brinjë sa diagonalja e katrorit të dhënë?

A 1 B 2
C 4 D 16

20 Në një rreth, kordat AB dhe AC presin harqe më masë përkatësisht 70^0 dhe 110^0. Masa e këndit A është:

A 50^0 B 70^0
C 90^0 D 110^0

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet nga 21–32.

21 Në një cilindër, diametri i bazës është i barabartë me lartësinë. Syprina e përgjithshme dhe vëllimi i tij shprehen me të njëjtin numër. Gjeni vëllimin e cilindrit. 4 pikë

22 Jepen pikat A(3, 4) dhe B(−1, −2). Gjeni pikën M, të tillë që $\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{BM}$

2 pikë

23 Drejtëzat $x+y-4=0$; $x+my-2n+2=0$ dhe $x-2y-10=0$ kalojnë nga e njëjta pikë. Gjeni $m+n$.

3 pikë

24 Jepet x është kënd i kuadrantit të tretë dhe $\cos x=0{,}6$. Gjeni prodhimin $\sin x\cdot\cos x$.

3 pikë

25 Në një trapez dybrinjënjëshëm, bazat janë 20 cm dhe 10 cm. Brinja anësore e tij është 13 cm. Gjeni:

a lartësinë e trapezit;

2 pikë

b syprinën e trapezit.

1 pikë

26 Në një kuti ndodhen 22 sfera të bardha, të kuqe e jeshile. Sfera jeshile janë një më shumë se sfera të kuqe. Sfera të bardha janë një më pak se dyfishi i sferave jeshile.

a Gjeni numrin e sferave të secilës ngjyrë.

2 pikë

Zgjedhim rastësisht një sferë. Gjeni probabilitetin:

b është e kuqe ose e bardhë;

1 pikë

c nuk është e bardhë.

1 pikë

27 Në një progresion aritmetik kemi

$u_2 + u_7 = 20$ dhe $u_4 + u_6 = 22$.

a Gjeni u_1 dhe d.

2 pikë

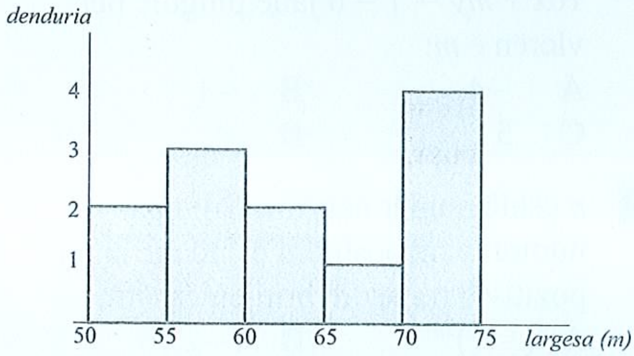
b Gjeni kufizën më të madhe dyshifrore të këtij progresioni.

2 pikë

28 Jepen pikat A(2, 3) dhe B(−2, 3). Gjeni ekuacionin e bashkësisë së pikave që janë të baraslarguara nga A dhe B.

3 pikë

29 Disa atletë morën pjesë në hedhjen e diskut. Të dhënat jepen në histogram:



a Sa atletë morën pjesë në garë?

1 pikë

b Sa atletë e hodhën diskun mbi 60 metra?

1 pikë

c Sa atletë e hodhën diskun ndërmjet 55 dhe 70 metra?

1 pikë

30 Jepet funksioni $y = x^2$ dhe dy pika A, B të grafikut të tij, me abshisa përkatësisht −3 dhe 1.

a Gjeni ekuacionin e drejtëzës AB.

1 pikë

b Gjeni pikën e grafikut në të cilën tangjentja është paralele me drejtëzën AB.

2 pikë

c Gjeni ekuacionin e kësaj tangjenteje.

1 pikë

31 Faktorizoni:

a $x^4 - 1$

b $ax^3 - bx^2 + ax - b$

c $x^3 - 4x^2 - 4x + 4$

3 pikë

32 Brinjët e trekëndëshit ABC janë AB = 10 cm; AC = 12 cm dhe BC = 14 cm.

a Gjeni kosinusin e këndit BAC.

2 pikë

b Gjeni gjatësinë e mesores BM.

2 pikë

TEST 20

Rrethoni vetëm alternativën e saktë në ushtrimet 1-14. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Jepen bashkësitë $A = [2, 5]$ dhe $B = [3, 7[$. Numri i numrave të plotë në bashkësinë $A \cup B$ është:

A 3　B 4
C 5　D 6

2 Jepen pikat M(4, −3) dhe N(2, 1). Mesi i segmentit MN ka koordinata:

A (1, −10)　B (4, 1)
C (3, −1)　D (3,1)

3 Dihet $\log p = m$; Gjeni $\log \frac{10}{p}$.

A $-m$　B $\frac{10}{m}$
C $\frac{1}{m}$　D $1 - m$

4 Nga relacionet e mëposhtme, cili është i vërtetë:

A $\sin 188° > 0$
B $\cos(-7°) < 0$
C $\operatorname{tg} 188° > 0$
D $\sin(-7°) > 0$

5 Trajta e thjeshtuar e shprehjes $\frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos x}$ është:

A $\sin x$　B $\cos x$
C $\frac{1}{\sin x}$　D $\frac{1}{\cos x}$

6 Numri i rrënjëve reale të ekuacionit $x^2 + 4 = 0$ është:

A 3　B 2
C 1　D 0

7 Në grafikun e funksionit $y = \ln(x - 3)$ ndodhet pika:

A (4, 0)　B (5, 1)
C (6, 1)　D (5, 2)

8 Syprina në cm^2 e gjysmëqarkut me diametër 12 cm është:

A 6π　B 12π
C 16π　D 18π

9 Rrezja e rrethit $x^2 + y^2 - 4y = 0$ është:

A 1　B 2
C 4　D 8

10 Derivati i funksionit $y = x^{-2} + 1$ në pikën $x = 1$ është:

A 2　B 1
C −1　D −2

11 Drejtëzat $2x - 5y + 7 = 0$ dhe $10x + my - 1 = 0$ janë pingule për vlerën e m:

A −4　B −1
C 5　D 4

12 n është numër natyror. Cili nga numrat e mëposhtëm është me siguri pozitiv?

A $(-1)^{4n+1}$　B $(-2)^{n+1}$
C $(-3)^{1-n}$　D $(-5)^{10-2n}$

13 Në qoftë se $4x = y$, atëherë vlera e shprehjes $4y - x$ është:

A 0　B $3x$
C $15x$　D $16x$

14 $\sqrt{2} + \sqrt{18} =$

A $\sqrt{20}$　B $\sqrt{12}$
C $4\sqrt{2}$　D $\sqrt{10}$

15 3% e numrit 27 është:

A 0,81 B 1,33

C 9 D 24

16 Shuma e masave të këndit rrethor dhe këndit qendror përkatës është 120^0. Masa e këndit rrethor është:

A 40^0 B 60^0

C 80^0 D 100^0

17 Mesatarja aritmetike e numrave natyrorë njëshifrorë është:

A 1 B 5

C 6 D 8

18 Brinjët e një trekëndëshi janë 3 cm; 4 cm dhe 5 cm. Në një trekëndësh të ngjashëm me të, brinja më e vogël është 12 cm. Brinja më e madhe e trekëndëshit të dytë është:

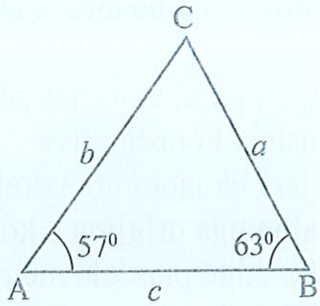
A 10 cm B 16 cm

C 20 cm D 24 cm

19 Brinja më e madhe e trekëndëshit në figurë është:

A a B b C c

D Nuk mund të gjendet.



20 Derivati i funksionit $y=\frac{1}{3}x^3-x$ në pikën $x=1$ është i barabartë me:

A 0 B 1

C 2 D 4

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet nga 21–32.

21 Zgjidhni ekuacionin

$2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=56$ 2 pikë

22 a Derivati i funksionit f për çdo vlerë të x është $f(x) = 2x$. Gjeni funksionin f duke ditur që grafiku i tij kalon nga pika A (2, 3).

2 pikë

b Gjeni syprinën e figurës së kufizuar nga grafiku i funksionit f dhe boshti i abshisave.

2 pikë

23 Jepet progresioni aritmetik 20, 17, 14, ...

a Gjeni kufizën e 100-të.

2 pikë

b Gjeni vlerën më të vogël të n, për të cilën $y_n<0$.

2 pikë

24 Grafiku i funksionit $y = mx^2 + nx + p$, kalon nga pika $(0, -5)$ dhe për $x = -1$ ka minimum të barabartë me -7.

a Gjeni koeficientet m, n, dhe p.

3 pikë

b Për vlerat e gjetura të koeficienteve, gjeni ekuacionin e tangjentes me grafikun e funksionit në pikën $(0, -5)$.

1 pikë

25 Jepet $x+\frac{1}{y}=2$ dhe $y+\frac{1}{x}=2$.

Gjeni $\frac{x}{y}$.

3 pikë

26 Lartësia dhe përftuesja e konit janë në raportin 4:5. Vëllimi i konit është

96π cm^2. Gjeni syprinën e përgjithshme të konit.

4 pikë

27 Jepet drejtëza d me ekuacion $2x - 2y + 5 = 0$.

a Gjeni këndin që kjo drejtëz formon me boshtin e abshisave.

1 pikë

b Gjeni pikat e prerjes së saj me boshtet koordinative. 1 pikë

c Gjeni ekuacionin e drejtëzës që kalon nga origjina e koordinatave dhe është paralele me drejtëzën e dhënë d. 1 pikë

d Gjeni ekuacionin e drejtëzës që kalon nga pika (1, 2) dhe është pingule me drejtëzën e dhënë d.

1 pikë

28 Tri kulme të paralelogramit ABCD janë A(2, 3); B(1, 2); C(4, 4). Gjeni koordinatat e kulmit të katërt D, i cili ndodhet përballë B.

3 pikë

29 Në një trekëndësh kënddrejtë, projeksionet e kateteve mbi hipotenuzë janë 5,4 cm dhe 9,6 cm. Gjeni:

a lartësinë mbi hipotenuzë; 1 pikë

b perimetrin e trekëndëshit. 2 pikë

30 Vërtetoni identitetin

$$\left(\frac{1}{\cos\alpha} - tg\alpha\right)^2 = \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$$

3 pikë

31 Në një kuti ndodhen 3 sfera të bardha, 4 të kuqe dhe 6 të verdha. Nxirren rastësisht nga kutia, njëra pas tjetrës 3 sfera (pa kthim). Gjeni probabilitetin që:

a të tria sferat të jenë të kuqe;

1 pikë

b sfera e parë të jetë e bardhë; e dyta, e kuqe; dhe e treta e verdhë;

1 pikë

c sferat të jenë të ngjyrave të ndryshme. 2 pikë

32 Jepen pikat A (–2, –2); B (–13); C (0, –3) dhe D (x, 7).

a Gjeni x në mënyrë që $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$.

1 pikë

b Për vlerën e gjetur të x, gjeni $\left|\overrightarrow{CD}\right|$.

1 pikë

TEST 21

Rrethoni vetëm alternativën e saktë në ushtrimet 1-14. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Elementi më i madh i prerjes së bashkësive A =]–2, 4] dhe B =]–3, 3[është:

A –3 B –2

C 3 D Nuk ekziston.

2 Gjeni numrin 10% e të cilit është 5.

A 5 B 50

C 100 D 500

3 Cili nga numrat e mëposhtëm është negativ?

A 3^{-2} B $(-3)^{-2}$

C $(-3)^2$ D $(-3)^{-1}$

4 Në qoftë se $\sqrt[3]{x} = m$, atëherë $\sqrt[3]{27x} =$

A $27m$ B $9m$

C $6m$ D $3m$

5 $\log 2 + \log 5 =$

A $\log 7$ B 1

C $\log 14$ D $\log 25$

6 Syprina e një gjysmëqarku është $\frac{\pi}{2}$ cm^2. Rrezja e tij (në cm) është:

A $\frac{1}{2}$ B 1

C 2 D 4

7 Jepet $5^{x-3} = 1$. Atëherë $x =$

A 0 B 1

C 2 D 3

8 Pika (m, n) ndodhet në kuadrantin e tretë. Në cilin kuadrant ndodhet pika $(-m, n)$?

A I B II

C III D IV

9 Rrënjë e ekuacionit $\sqrt{x+2} = x$ është numri:

A 0 B 1

C 2 D 3

10 Ekuacioni $x^2 - 6x + m = 0$ ka dy rrënjë të barabarta. Vlera e m është:

A 1 B 4

C 6 D 9

11 Trajta e thjeshtuar e shprehjes $\frac{(a^{-2})^3 \cdot b^5}{(a^2)^{-3} \cdot (b^2)^2}$ është:

A b B $\frac{1}{b}$

C a D $\frac{1}{a}$

12 Numrat 2; 8 dhe $3x + 2$ formojnë progresion gjeometrik. Vlera e x është:

A 8 B 10

C 12 D 16

13 Rombi me diagonale 4 cm dhe 8 cm ka të njëjtën syprinë me një katror. Brinja e katrorit (në cm) është:

A 4 B 6

C 8 D 12

14 Drejtëza me ekuacion $3x + y = 2$ pret boshtin e ordinatave në pikën:

A (0, 2) B (2, 0)

C (3, 0) D (0, 3)

15 Largesa e pikës (–5, –12) nga origjina e koordinatave është:

A 5 B 12

C 13 D 60

16 Grafiku i funksionit $y = \sin x$ kalon nga pika me koordinata:

A $(0, 1)$ B $(\frac{\pi}{2}, 1)$

C $(\pi, 1)$ D $(2\pi, 1)$

17 Vektorët $\bar{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ dhe $\bar{b} = \begin{pmatrix} m \\ -3 \end{pmatrix}$ janë bashkëvijorë. Vlera e m është:

A -3 B -6
C -9 D -12

18 Grafikët e funksioneve $y = 3^x$ dhe $y = 3^{-x}$ janë simetrikë:

A sipas boshtit Ox;
B sipas boshtit Oy;
C sipas origjinës së koordinatave;
D sipas drejtëzës $y = x$.

19 Koeficienti këndor i tangjentes ndaj grafikut të funksionit $y = -3x^2 + 5x - 1$, në pikën me abshisë $x = 0$ është:

A -3 B -1
C 5 D 8

20 $\int_0^1 5x^4 dx =$

A 0 B 1
C 4 D 5

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet nga 21–32.

21 Në një progresion aritmetik jepen:

$$\begin{cases} u_1 + 2u_{10} = 33 \\ 2u_3 - u_8 = 38 \end{cases}.$$

a Gjeni u_1 dhe d.

3 pikë

b Cila është kufiza e parë negative e këtij progresioni?

1 pikë

22 Mesatarja e moshave të katër nxënësve është 16 vjeç. Sa ishte mesatarja e moshave të tyre para 5 vitesh?

2 pikë

23 Jepet funksioni $f(x) = 3x - 5$. Për ç'vlerë të x kemi $f(x) = f^{-1}(x)$?

3 pikë

24 Polinomi $P(x) = x^3 + kx^2 + 12x - 8$ plotpjesëtohet me $(x - 2)$.

a Gjeni k.

1 pikë

b Për vlerën e gjetur të k, faktorizoni polinomin.

2 pikë

25 Jepet trekëndëshi me brinjë 15 cm; 20 cm dhe 25 cm.

a Tregoni që trekëndëshi është kënddrejtë.

1 pikë

b Gjeni lartësinë mbi hipotenuzën e tij.

2 pikë

26 Zgjidhni ekuacionin $\sin^2 x - \sin x = 0$ për $0 \leq x \leq 2\pi$.

3 pikë

27 Segmenti AB ku A (1, 1) dhe B (7, 11) ndahet në katër pjesë të barabarta prej pikave M, N dhe P. Gjeni koordinatat e këtyre pikave.

3 pikë

28 Jepen pikat A (1, 2) dhe B (3, 4).

a Shkruani ekuacionin e drejtëzës AB. **2 pikë** b Shkruani ekuacionin e pingules së hequr nga origjina e koordinatave në drejtëzën AB.

2 pikë

29 Jepen vektorët $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ dhe $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$.

a Gjeni vektorin $2\vec{u}-3\vec{v}$.

2 pikë

b Gjeni $\left|2\vec{u}-3\vec{v}\right|$. 1 pikë

30 Shkruani ekuacionin e tangjentes ndaj grafikut të funksionit $y=x^2-6x+4$, e cila është pingule me drejtëzën $x-4y+1=0$.

3 pikë

31 Parabola $y=mx^2+nx+5$ kalon nga pikat (2, –3) dhe (–1, 12).

a Gjeni m dhe n.

2 pikë

b Gjeni pikat e prerjes së saj me boshtet koordinatave.

1 pikë

c Skiconi parabolën.

1 pikë

d Gjeni syprinën e figurës së kufizuar nga parabola dhe boshti i abshisave.

1 pikë

32 Në një klasë me 26 nxënës, 10 luajnë futboll, 9 luajnë basketboll dhe 4 nxënës luajnë edhe futboll edhe basketboll. Zgjidhet rastësisht një nxënës. Gjeni probabilitetin:

a Nxënësi luan futboll, por jo basketboll.

1 pikë

b Nxënësi nuk luan as futboll e as basketboll.

1 pikë

c Nxënësi luan basketboll, duke ditur që ai luan futboll.

2 pikë

TEST 22

Rrethoni vetëm alternativën e saktë në ushtrimet 1-14. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Prerja e bashkësive [1, 3] dhe [2, 5] është bashkësia:

A [1, 5] B [1, 2]
C [3, 5] D [2, 3]

2 $\sqrt{12} - \sqrt{27} =$

A $-\sqrt{3}$ B $-\sqrt{15}$
C $\sqrt{3}$ D $\sqrt{15}$

3 $\frac{9!}{8!} =$

A 1! B 9
C 8 D 17!

4 Në qoftë se $-2x > 7x$ atëherë:

A $x < 0$ B $x \leq 0$
C $x > 0$ D $x \geq 0$

5 Jepet $2^x = 15$. Gjeni 2^{x+1}.

A 16 B 17
C 20 D 30

6 Jepet $\log 3 = x$. Gjeni $\log 300$.

A $300x$ B $100x$
C $100 + x$ D $2 + x$

7 Mesi i segmentit AB, ku A(–4, 2) dhe B(5, 6) ka ordinatën:

A 4 B –4
C 5 D 2

8 Në një progresion gjeometrik jepen $u_1 = 2$ dhe $u_2 = 6$. Gjeni u_4.

A 8 B 12
C 18 D 54

9 Diagonalja e një katrori është 2 cm. Brinja e tij (në cm) është:

A 1 B $\sqrt{2}$
C 2 D 4

10 Cili nga këndet e mëposhtme e ka tangentin numër negativ?

A 195^0 B 68^0
C 130^0 D 260^0

11 Perimetri rrethit është 2π cm. Syprina e tij (në cm^2) është:

A π B 2π
C 3π D 4π

12 Diagonalet e rombit janë 12 cm dhe 16 cm. Brinja e tij (në cm) është:

A 6 B 8
C 10 D 12

13 Jepet inekuacioni $x^2 \leq x + 2$. Nuk është zgjidhje e tij vlera e x:

A –2 B –1
C 0 D 2

14 Rrezja e rrethit $9x^2 + y^2 = 16$ është:

A 3 B 4
C $\frac{3}{4}$ D $\frac{4}{3}$

15 Grafikët e funksioneve $y = x^2$ dhe $y = x$ priten në:

A tri pika B 2 pika
C 1 pikë D asnjë pikë

16 Jepen funksionet f: $y=\frac{x-1}{x}$ dhe $g: y=2x$. Gjeni $f[g(2)]$.

A 0,5 B 0,75
C 1 D 4

17 I anasjelli i funksionit $y=2x-3$ është funksioni:

A $y=\frac{1}{2x-3}$ B $y=2x+3$

C $y=\frac{x+3}{2}$ D $y=\frac{x+2}{3}$

18 Pika e prerjes me boshtin Ox e funksionit $y=6\log_2 x-3$ është:

A $\sqrt{2}$ B $2\sqrt{2}$
C $3\sqrt{2}$ D $6\sqrt{2}$

19 Drejtëza me ekuacion $mx-3y=2$ është paralele me drejtëzën $4x-3y-5=0$. Vlera e m është:

A 1 B 2
C 3 D 4

20 Derivati i funksionit $y=-2\sqrt{x}$ në pikën $x=1$ është:

A 0 B 1
C –1 D –2

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet nga 21–32.

21 Zgjidhni ekuacionin $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=117$
3 pikë

22 Jepet polinomi $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$.
a Tregoni se $x=1$ është rrënjë e tij.
1 pikë
b Zgjidhni ekuacionin $P(x)=0$.
2 pikë

23 Gjeni vlerën më të madhe dhe më të vogël të funksionit $y=\frac{1}{3+2\sin x}$.
3 pikë

24 Në rrethin me rreze 5 cm, në njërën anë të qendrës së tij janë ndërtuat dy korda paralele. Gjatësitë e kordave janë 6 cm dhe 8 cm. Gjeni largesën ndërmjet kordave. **3 pikë**

25 Zgjidhni ekuacionin $\cos^2 x-\cos x=0$ për $0^0\leq x\leq 360^0$.
3 pikë

26 Prerja boshtore e konit është trekëndësh kënddrejtë dybrinjënjëshëm. Diametri i bazës së konit është 12 cm. Gjeni:
a vëllimin e konit;
2 pikë
b syprinën anësore të konit;
1 pikë
c syprinën e përgjithshme të konit.
1 pikë

27 Jepen pikat A (2, 3) dhe B (–2, 1).
a Gjeni mesin e segmentit AB.
1 pikë
b Shkruani ekuacionin e përmesores së segmentit AB.
2 pikë

28 Jepen vektorët
$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ dhe $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.
a Gjeni vektorin $\vec{x}=\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}$, të tillë që $\vec{x}=\vec{a}-4\vec{b}$.
1 pikë
b Tregoni që vektori $\vec{x}$, është bashkëvizor me vektorin $\vec{u}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$. **1 pikë**

c Gjeni gjatësinë e vektorit $\bar{x}$.

2 pikë

29 Pesë numra çift të njëpasnjëshëm e kanë mesataren 16. Gjeni numrin më të vogël.

2 pikë

30 Në cilën pikë tangjentja ndaj vijës $y = \sqrt{x}$, është pingule me drejtëzën $y = -x + 2$?

3 pikë

31 Parabola $y = px^2 + qx + r$ ka maksimum në pikën (1, 4) dhe kalon nga pika (0, 3).

a Gjeni p, q dhe r.

3 pikë

b Për vlerat e gjetura të p, q dhe r gjeni syprinën e kufizuar nga parabola dhe boshti i abshisave.

2 pikë

32 Në një kuti ndodhen 5 sfera të bardha, 4 të kuqe dhe 7 të zeza. Nxirren nga kutia njëra pas tjetrës 2 sfera (pa kthim). Gjeni probabilitetin:

a Sfera e parë është e bardhë dhe e dyta është e kuqe.

1 pikë

b Të dyja sferat janë të zeza.

1 pikë

Më pas nxirret nga kutia edhe një sferë e tretë. Gjeni probabilitetin.

c Të tria sfera e nxjerra janë të së njëjtës ngjyrë.

2 pikë

TEST 23

Rrethoni vetëm alternativën e saktë në ushtrimet 1-14. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Jepen bashkësitë M = [1, 5] dhe N =]1, 5[. Bashkësia MUN është:

A]1, 5[B [1, 5]
C [0, 5] D [0, 1]

2 Sa për qind e numrit 18 është 4,5?

A 5% B 10%
C 20% D 25%

3 Vlera e shprehjes $\frac{3^5 \cdot 3^{-3}}{3}$ është:

A 9 B 6
C 3 D 1

4 Dy këndet e ngushta të një balone janë nga 60^0 dhe 80^0. Masa e secilit prej këndeve të gjerë të saj është:

A 100^0 B 110
C 120^0 D 130^0

5 Perimetri i rrethit me rreze π cm është:

A 2π cm B π cm
C $2\pi^2$ cm D $4\pi^2$ cm

6 $2\log 7 + \log\frac{1}{49} =$

A 0 B 1
C 7 D 49

7 Këndi në gradë që i korrespondon këndit π radian është:

A 0^0 B $3{,}14^0$
C 90^0 D 180^0

8 $\sin 180^0 + \cos 180^0 =$

A -1 B 0
C 1 D 2

9 Jepet $2x - 1 = 5$. Atëherë $(3x - 1) =$

A 6 B 7
C 8 D 9

10 Numri i rrënjëve të ekuacionit $(x-1)^2 + 1 = 0$ është:

A 4 B 2
C 1 D 0

11 Jepet $x > 0$ dhe $y < 0$. Cili nga numrat e mëposhtëm është me siguri pozitiv?

A $x + y$ B $7x + y$
C $3x + 2y$ D $5x - y$

12 Në një rreth me rreze 10 cm, korda me gjatësi 10 cm tendos harkun me masë:

A 60^0 B 45^0
C 30^0 D 15^0

13 Paralelogrami me brinjë 5 cm dhe 7 cm dhe një katror kanë perimetra të barabartë. Syprina e katrorit (në cm^2) është:

A 16 B 36
C 49 D 64

14 Jepet $\sin x < 0$ dhe $\mathrm{tg}x < 0$. Në cilin kuadrant ndodhet këndi x?

A I B II
C III D IV

15 Në një progresion gjeometrik, kufiza e parë është 3 dhe herësi i tij është 2. Shuma e dy kufizave të para të progresionit është:

A 3 B 6
C 9 D 12

16 Pika M (0, 2) është mesi i segmentit AB ku A(1, y) dhe B(−1, 2). Vlera e y është:

A 3 B 2
C 1 D 0

17 Vektorët $\vec{i}$ dhe $\vec{j}$, janë vektorë-njësi pingul ndërmjet tyre. Cili nga barazimet e mëposhtme nuk është i vërtetë?

A $|\vec{i}|=1$ B $|\vec{j}|=1$

C $|\vec{i}|=|\vec{j}|$ D $\vec{i}=\vec{j}$

18 Derivati i funksionit $y=-\frac{1}{x}$ në pikën $x=1$ është:

A -1 B 0
C 1 D 2

19 Ekuacioni i boshtit të simetrisë së parabolës $y=-x^2+2x-5$ është:

A $x=1$ B $y=-1$
C $x=-2$ D $y=-2$

20 $\int_{-1}^{1} x\,dx=$

A -1 B 0
C 1 D 2

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet nga 21–32.

21 Dy rrathë me rreze përkatësisht 5 cm dhe 3 cm kanë qendër të përbashkët. Në rrethin e madh është ndërtuar një kordë, e cila është tangjente me rrethin e vogël. Gjeni gjatësinë e kësaj korde.

3 pikë

22 Zgjidhni ekuacionin $2\sin^2 x-\sin x=0$ për $0^0 \le x \le 360^0$. 3 pikë

23 Në një progresion aritmetik jepen:

$$\begin{cases} 2u_1+u_5=-59 \\ u_2+u_6=-26 \end{cases}.$$

a Gjeni u_1 dhe d.

3 pikë

b Cila është kufiza më e vogël pozitive e këtij progresioni?

1 pikë

24 Syprinat e tri faqeve të ndryshme të një kuboidi janë 6 cm²; 8 cm² dhe 12 cm². Gjeni vëllimin e kuboidit.

3 pikë

25 Pikat A (3, –2); B (7, 4) dhe C (–1, 6) janë kulme të trekëndëshit ABC.

a Shkruani ekuacionin e brinjës AB. 1 pikë

b Shkruani ekuacionin e lartësisë CH.

1 pikë

c Shkruani ekuacionin e mesores BM.

1 pikë

d Gjeni pikëprerjen e CH me BM.

1 pikë

26 Jepen vektorët

$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$ dhe $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}6\\13\end{pmatrix}$.

a Shkruani vektorin njësi, i cili ka drejtimin e vektorit $\overrightarrow{OA}$.

2 pikë

b Gjeni koordinatat dhe gjatësinë e vektorit $\overline{AB}$.

2 pikë

27 a Shkruani ekuacionin e tangjentes ndaj vijës $y = x^2 + 5x - 3$, e cila është pingule me drejtëzën $x + 7y - 6 = 0$.

3 pikë

b Gjeni pikat e prerjes së tangjentes me boshtet e koordinatave.

1 pikë

28 Për ç'vlera të p dhe q, funksioni $y = px^3 + qx - 1$, në pikën me abshisës $x = 1$, ka minimum të barabartë me 3?

3 pikë

29 Jepen parabola $y = 2x - x^2$ dhe drejtëza $y = x$.

a Gjeni pikat e përbashkëta të tyre.

1 pikë

b Gjeni syprinën e figurës së kufizuar prej tyre.

2 pikë

30 Gjeni mesataren aritmetike të numrave $5 \sin^2 x$ dhe $5 \cos^2 x$.

2 pikë

31 Për ç'vlera të m, parabola $y = mx^2 + x + 1$:

a pret boshtin e abshisave në dy pika?

1 pikë

b ka vetëm një pikë të përbashkët me boshtin e abshisave?

1 pikë

c nuk ka asnjë pikë të përbashkët me boshtin e abshisave?

1 pikë

32 Hidhet një zar kubik. Shënojmë ngjarjet:

M: {Zari tregon numër çift}

N: {Zari tregon numër më të madh se 4}

Gjeni:

a $p(M \cap N)$.

1 pikë

b $p(M \cup N)$.

1 pikë

c $p(M/N)$.

1 pikë

d $p(N/M)$.

1 pikë

TEST 24

Rrethoni vetëm alternativën e saktë në ushtrimet 1-14. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 $\sqrt{\frac{1}{9}-\frac{1}{25}}=$

A $\frac{2}{15}$ B $\frac{4}{15}$

C $\frac{6}{15}$ D $\frac{8}{15}$

2 $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}=$

A $\frac{1}{2}$ B $\sqrt{2}$

C 1 D -1

3 a dhe x janë numra natyrorë. Cili nga numrat e mëposhtëm është gjithashtu natyror?

A $\frac{1}{x^{-a}}$ B x^{-a}

C $\frac{1}{x^{a}}$ D $(\frac{1}{x})^{a}$

4 Jepet $3x = 4y$. Gjeni $\frac{4x}{3y}$.

A $\frac{4}{3}$ B $\frac{3}{4}$

C $\frac{16}{9}$ D $\frac{9}{16}$

5 Raporti i diagonales së katrorit me brinjën e tij është:

A 2 B $\sqrt{2}$

C $2\sqrt{2}$ D $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6 Këndi rrethor pret një hark sa $\frac{1}{6}$ e rrethit. Masa e tij në gradë është:

A 30^0 B 45^0

C 60^0 D 90^0

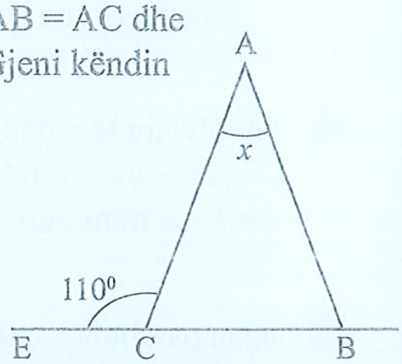
7 Në figurë jepet $AB = AC$ dhe $\angle ACE = 110^0$. Gjeni këndin $x = \angle BAC$.

A 70^0

B 60^0

C 50^0

D 40^0



8 Cili nga barazimet e mëposhtme nuk mund të ndodh në asnjë rast?

A $\cos\alpha=\frac{2}{3}$ B $\cos\alpha=-\frac{1}{15}$

C $\cos\alpha=\frac{7}{6}$ D $\cos\alpha=\frac{4}{13}$

9 Çfarë këndi formojnë akrepat e sahatit në orën 5:30?

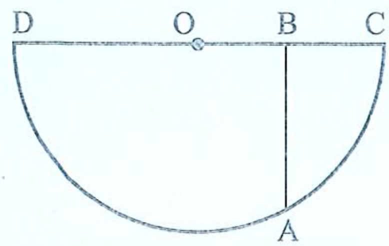
A 60^0 B 30^0

C 15^0 D 10^0

10 Në figurë në gjysmërrethin me qendër O, jepet $AB \perp CD$; $BC = 2$ cm dhe $BD = 4$ cm. Gjeni AB.

A 2 cm B 3 cm

C 4 cm D 6 cm



11 Perimetri i një trapezi është 76 cm. Brinjët e tij rrinë si 12:7:8:11. Gjeni brinjën më të vogël.

A 12 cm B 14 cm C 16 cm D 20 cm

12 Vlerë e palejuar e x në shprehjen $\frac{x+1}{2^x-1}$ është:

A 0 B 1 C –1 D 2

13 Jepet $f(x) = 7x - 4$; $g(x) = 2x + 8$ dhe $f(2a) = g(a)$. Gjeni a.

A 0 B 1
C 2 D 3

14 Simetrikja e pikës (3, –3) në lidhje me origjinën e koordinatave është pika:

A (3, 0) B (0, –3)
C (3, 3) D (–3, 3)

15 Vektorët $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ y-1 \end{pmatrix}$ dhe $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ janë të barabartë. Gjeni $x + y$.

A 1 B 2
C 3 D 4

16 Ekuacioni i drejtëzës me koeficient këndor –1 dhe ordinatë në origjinë 1 është:

A $y = x + 1$ B $y = -x + 1$
C $x = y + 1$ D $x = -y - 1$

17 Derivati i funksionit $y = 2x^{-1}$ në pikën $x = 1$ është:

A –2 B 2
C –1 D 1

18 Cila nga pikat e mëposhtme ndodhet në drejtëzën $2x + y = -1$?

A (1, –1) B (–1, 0)
C (0, –1) D (–1, –1)

19 Boshti i parabolës $y = x^2 - 4x + 5$ është drejtëza me ekuacion:

A $x = 2$ B $x = 0$
C $x = -2$ D $x = -4$

20 $\int (3x^2 - 1)dx =$

A $x^3 - 1$ B $x^3 - x + c$
C $x^3 + c$ D $x^2 - x + c$

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet nga 21–32.

21 Jepet $3^x + 3^{x+1} = y$. Shprehni 3^{x+2} me anën e y.

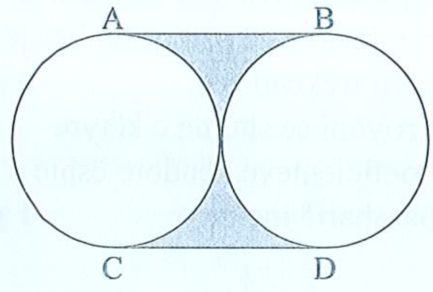
3 pikë

22 Katër numra tek të njëpasnjëshëm janë të tillë që më i madhi prej tyre është një njësi më i vogël se dyfishi i numrit më të vogël. Gjeni këtë numra.

3 pikë

23 Në figurë, rrathët janë tangjentë me njëri-tjetrin dhe secili prej tyre e ka rrezen 6 cm. Gjeni syprinën e vijëzuar.

3 pikë



24 Për ç'vlera të m, ekuacioni $(m - 3)x = m(2 + x) - 5$ ka:

a zgjidhje pozitive;

1 pikë

b zgjidhje negative;

1 pikë

c zgjidhje më të vogla se 2?

1 pikë

25 Vëllimi i konit me lartësi 15 cm është 320π cm^3. Gjeni:

a rrezen e bazës së konit;

1 pikë

b syprinën anësore të konit;

1 pikë

c syprinën e përgjithshme të konit.

1 pikë

d Gjeni lartësinë e një cilindri, i cili ka të njëjtën rreze të bazës dhe të njëjtin vëllim me konin e dhënë.

1 pikë

26 Zgjidhni ekuacionin $2\sin^2 x + 3\cos x = 3$ për $0^0 \leq x \leq 360^0$. **3 pikë**

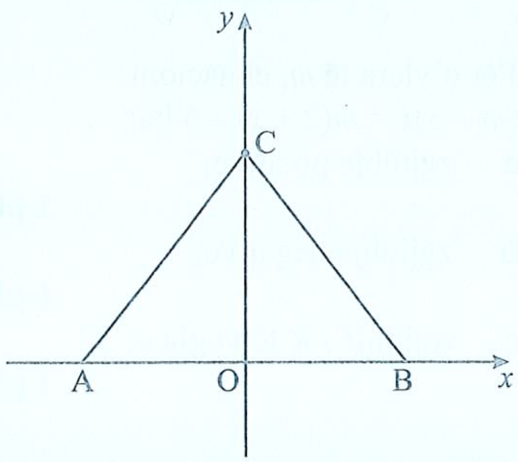
27 Jepen pikat A(4, 2) dhe B(–3, 9). Në boshtin e ordinatave gjeni pikën M, të tillë që AM = BM. **3 pikë**

28 Prodhimi i dy numrave pozitivë është 25. Gjeni këta numra, në mënyrë që shuma e tyre të ketë vlerën më të vogël. **3 pikë**

29 Në figurë jepet trekëndëshi barabrinjës ABC, në të cilin kulmet A dhe B ndodhen në boshtin e abshisave, ndërsa kulmi C në boshtin e ordinatave.

a Gjeni koeficientet këndore të drejtëzave që paraqesin brinjët e këtij trekëndëshi. **3 pikë**

b Provoni se shuma e këtyre koeficienteve këndore është e barabartë me zero. **1 pikë**



30 Në tabelë jepen rezultatet e 30 nxënësve në një testim.

Pikë	Denduria
91-100	3
81-90	11
71-80	8
61-70	6
51-60	1
41-50	1

Gjeni:

a klasën modale;

1 pikë

b klasën në të cilën bën pjesë mesorja;

1 pikë

c mesataren aritmetike të përafërt.

1 pikë

31 a Derivati i funksionit f, për çdo vlerë të x është $f'(x) = 2x - 3$. Gjeni funksionin f, në qoftë se grafiku i tij kalon nga pika M(1, –6).

2 pikë

b Gjeni syprinën e figurës së kufizuar nga grafiku i funksionit f dhe boshti i abshisave.

2 pikë

32 Funksioni i shpërndarjes së probabiliteteve të një ndryshoreje të rastit jepet nga formula:

$p(X = x) = k(x + 2)$ për $k = 1, 2, 3, 4$.

a Gjeni k.

2 pikë

b Gjeni $p(X < 3)$.

1 pikë

c Gjeni $p(X \geq 1)$.

1 pikë

TEST 25

Rrethoni vetëm alternativën e saktë në ushtrimet 1-14. Secili ushtrim vlerësohet me 1 pikë.

1 Pjesëtuesi më i madh i përbashkët e numrave 48 dhe 72 është:

A 6 B 8
C 12 D 24

2 Numri i numrave të thjeshtë që ndodhen ndërmjet 40 dhe 50 është:

A 3 B 2
C 1 D Asnjë

3 $16^{\frac{3}{4}} =$

A 8 B 4
C 2 D 1

4 $\log 2 + \log \frac{1}{2} =$

A $\log \frac{3}{2}$ B $\log \frac{2}{3}$
C 0 D 1

5 Në qoftë se $3x - 1 = 5$, atëherë $(3x-2)^2 =$

A 36 B 30
C 20 D 16

6 Jepet $x + 1 = \frac{a+x}{b}$. Gjeni x.

A $\frac{a-b}{b-1}$ B $\frac{b-1}{a-b}$
C $\frac{a+b}{b-1}$ D $\frac{a+b}{a-b}$

7 Cili nga barazimet e mëposhtme është i vërtetë?

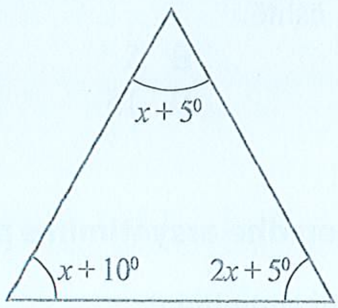
A $\sqrt{x^2} = x$ B $\sqrt{x^2} = -x$
C $\sqrt{x^2} = |x|$ D $\sqrt{x^2} = -|x|$

8 Koeficienti këndor i drejtëzës paralele me drejtëzën $3x + 2y + 4 = 0$ është:

A $\frac{3}{2}$ B $-\frac{3}{2}$
C $\frac{2}{3}$ D $-\frac{2}{3}$

9 Gjeni vlerën e x në figurë:

A 30^0 B 35^0
C 40^0 D 50^0



10 Raporti i syprinave të dy katrorëve është 16:9. Raporti i perimetrave të tyre është:

A 3:4 B 4:3
C 9:4 D 4:9

11 Cili nga relacionet e mëposhtme shpreh marrëdhënien: x është 3 njësi më i vogël se y?

A $x < 3 + y$ B $x + 3 < y$
C $x + 3 = y$ D $x - 3 = y$

12 Kufiza e tretë e një progresioni gjeometrik është 20 dhe herësi i tij është 2. Shuma e dy kufizave të para të tij është:

A 20 B 15
C 10 D 5

13 Piramida ka 7 kulme. Sa kulme ka baza e saj?

A 6 B 5

C 4 D 3

14 $3\sin^2 10^0 + 3\cos^2 10^0 =$

A 10 B 30

C 1 D 3

15 Skajet e diametrit të një rrethi janë M (2, –3) dhe N (4, 1). Koordinatat e qendrës së rrethit janë:

A (0, 0) B (3, 1)

C (3, –1) D (–3, 1)

16 Jepen pikat (0, 0); (0, –2); (–1, –1) dhe (1, –1). Sa prej tyre ndodhen në rrethin $x^2 + y^2 = 4$?

A Asnjë B 1

C 2 D 3

17 Vlera më e vogël e funksionit $y = x^2 + 5$ është:

A 0 B 5

C 10 D 15

18 I anasjelli i funksionit $y = \frac{x-2}{3}$ është funksioni:

A $y = \frac{3}{x-2}$ B $y = -\frac{x-2}{3}$

C $y = 3x+2$ D $y = 3x - 2$

19 Derivati i funksionit $y = -\frac{1}{x}$ në pikën $x = 4$ është:

A $-\frac{1}{4}$ B $-\frac{1}{8}$

C $-\frac{1}{16}$ D $\frac{1}{16}$

20 $\int_1^9 2x\,dx$

A 1 B 9

C 40 D 80

Jepni zgjidhjen dhe arsyetimin e plotë për ushtrimet nga 21–32.

21 Thjeshtoni shprehjen:

$$\frac{60}{\sqrt{10}+3} + \frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{10}+3}.$$

3 pikë

22 Zgjidhni ekuacionin $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

3 pikë

23 Brinjët e një trekëndëshi janë në raportin 4:7:10.

a Gjeni brinjët e tij, duke ditur se brinja më e madhe është 12 cm më e madhe se brinja më e vogël.

2 pikë

b Perimetri i një trekëndëshi të ngjashëm me trekëndëshin e dhënë është 63 cm. Gjeni brinjët e trekëndëshit të dytë.

1 pikë

24 Jepet $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ dhe α është kënd i kuadrantit të tretë. Gjeni funksionet e tjera trigonometrike të këndit α.

3 pikë

25 Lartësia e një koni është 12 cm. Përftuesja e tij formon këndin 30^0 me lartësinë: Gjeni:

a rrezen e bazës dhe përftuesen e konit;

1 pikë

b vëllimin e konit;

1 pikë

c syprinën anësore të konit;

1 pikë

d syprinën e përgjithshme të konit.

1 pikë

26 Jepet pika A(2, 3) dhe drejtëza $d_1: y = x$.

a Shkruani ekuacionin e drejtëzës d_2, e cila kalon nga pika A dhe është pingule me drejtëzën d_1.

1 pikë

b Gjeni pikëprerjen M të drejtëzave d_1 dhe d_2.

1 pikë

c Gjeni simetriken e pikës A në lidhje me drejtëzën d_1.

2 pikë

27 Jepen funksionet $f(x) = 2x$ dhe $g(x) = \log_2 x$.

a Tregoni që $f[g(4)] = g[f(8)]$.

1 pikë

b Zgjidhni ekuacionin $f[g(x)] = g[f(x)]$.

2 pikë

28 Jepen parabola $y = x^2$ dhe drejtëza $y = x + 2$.

a Gjeni pikat e prerjes së tyre.

1 pikë

b Gjeni syprinën e figurës së kufizuar prej tyre.

2 pikë

29 Jepet vija $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 5$.

a Shkruani ekuacionin e tangjentes ndaj kësaj vije në pikën me abshisë $x = 1$.

1 pikë

b Në cilën pikët të vijës, koeficienti këndor i tangjentes ka vlerën më të vogël?

2 pikë

30 Pikat A dhe B kanë përkatësisht rrezevektorët $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$ dhe $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Pika C ndodhet ndërmjet pikave A dhe B.

a Gjeni vektorin $\overrightarrow{BA}$.

1 pikë

b Gjeni $|\overrightarrow{BA}|$.

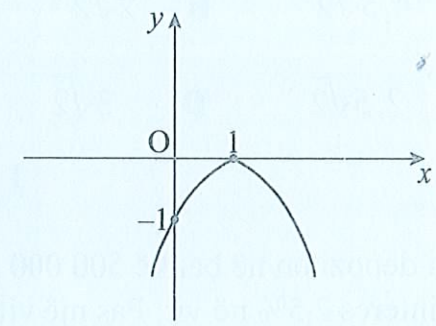
1 pikë

c Gjeni vektorin $\vec{c}$, në qoftë se AC : CB = 2 : 1.

2 pikë

31 Në figurë jepet grafiku i parabolës $y = ax^2 + bx + c$. Gjeni $f(2)$.

3 pikë



32 Kutia e parë përmban 5 sfera të kuqe e 4 të bardha. Kutia e dytë përmban 6 sfera të kuqe e 3 të bardha. Nga secila kuti nxirret rastësisht një sferë. Gjeni probabilitetin:

a Të dyja sferat janë të bardha.

1 pikë

b Të dyja sferat janë të kuqe.

1 pikë

c Njëra sferë është e bardhë e tjetra e kuqe.

1 pikë

d Sferat janë të së njëjtës ngjyrë.

1 pikë

MATURA SHTETËRORE 2019

1 Jepen bashkësitë M = {2, 3} dhe N = [2, 3]. Cili nga pohimet e mëposhtëm është i vërtetë?

A $M = N$ B $M \subset N$

C $N \subset M$ D $N \cap M = N$

1 pikë

2 Vlera e $\left(16^{\frac{1}{2}}\right)^3$ është:

A 512 B 64

C 48 D 24

1 pikë

3 Vlera e shprehjes $\frac{6}{\sqrt{72}} + \frac{8}{\sqrt{32}}$ është:

A $1,5\sqrt{2}$ B $2\sqrt{2}$

C $2,5\sqrt{2}$ D $3\sqrt{2}$

1 pikë

4 Albi depoziton në bankë 500 000 lekë me interes 2,5% në vit. Pas një viti, Albi do të ketë në llogari:

A 500 125 lekë B 500 150 lekë

C 512 500 lekë D 625 000 lekë

1 pikë

5 Një klasë ka 32 nxënës, nga të cilët 18 luajnë shah, 12 luajnë pingpong dhe 7 luajnë edhe shah edhe pingpong. Sa nxënës nuk luajnë as shah e as pingpong?

2 pikë

6 Numri 0,375 është i barabartë me thyesën:

A $\frac{1}{8}$ B $\frac{3}{8}$ C $\frac{5}{8}$ D $\frac{7}{8}$

1 pikë

7 Vlera e shprehjes $\log_5 75 - \log_5 3$ është:

1 pikë

A 2 B 3

C 4 D 5

8 Një makinë konsumon 8 litra naftë për 100 km. Për të përshkuar 250 km makina konsumon:

A 16 litra naftë B 20 litra naftë

C 24 litra naftë D 28 litra naftë

1 pikë

9 Gjeni vlerën e x në barazimin:

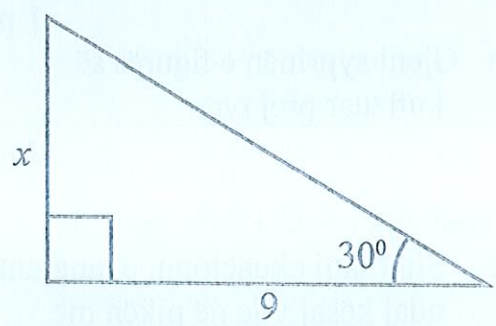
$$3^{x+1} - \frac{2}{3^{-x}} = 27$$

3 pikë

10 Vlera e x në figurë është:

A $3\sqrt{3}$ B $9\sqrt{3}$

C $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D $3\sqrt{2}$



1 pikë

11 Jepet progresioni aritmetik në të cilin $u_1 = 3$ dhe $d = 2$. Gjeni mesataren aritmetike të 10 kufizave të para të tij.

3 pikë

12 Thjeshtoni shprehjen $\sqrt{32} - \sqrt{18}$.

2 pikë

13 Në planin koordinativ jepet pika A(1,3).

a Gjeni koordinatat e pikës B, simetrike të A në lidhje me Ox.

1 pikë

b Gjeni koordinatat e pikës C, simetrike të A në lidhje me Oy.

1 pikë

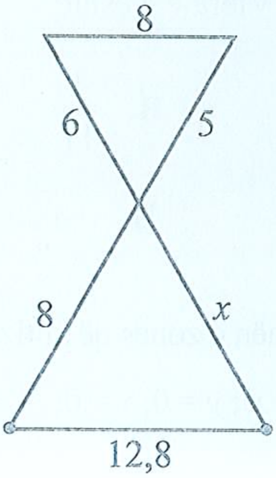
14 Vëllimi i kubit është 343 cm^3. Brinja e tij është:

A 16 cm B 7 cm
C 8 cm D 9 cm

1 pikë

15 Dy trekëndëshat në figurë janë të ngjashëm. Vlera e x është:

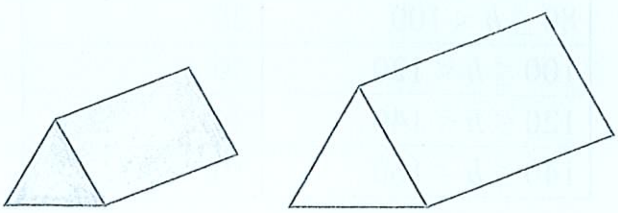
A 9,8 B 9,6
C 9,5 D 9,4



1 pikë

16 x dhe y janë dy prizma matematikisht të ngjashëm. Prizmi x e ka vëllimin 60 cm^3, dhe syprinën 90 cm^2. Vëllimi i prizmit y është 480 cm^3. Syprina e prizmit y është:

A 160 cm^2 B 360 cm^2
C 720 cm^2 D 900 cm^2



1 pikë

17 Të gjendet syprina e trapezit dybrinjinjishëm me diagonale 10 cm, e cila formon me bazën e madhe këndin 45^0. **3 pikë**

18 Prerja boshtore e cilindrit është katror me diagonale $10\sqrt{2}$ cm. Rrezja e bazës së cilindrit është:

A 5 cm B $5\sqrt{2}$ cm
C 10 cm D $10\sqrt{2}$ cm

1 pikë

19 Simetrikja e pikës A(1,4) në lidhje me drejtëzën $y = x$ është pika B.

a Gjeni koordinatat e pikës B.

1 pikë

b Gjeni largesën ndërmjet pikave A dhe B. **1 pikë**

20 Në qoftë se $f(x) = x^2 + x$ dhe $g(x) = 2x + 7$, shprehja për $f(g(x)$ është:

A $4x^2 + 30x + 56$ B $2x^2 + 2x + 7$
C $4x^2 + 28x + 49$ D $8x + 14$

1 pikë

21 Në qoftë se $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$, vlera e $f(5)$ është:

A 0 B $\dfrac{4}{5}$ C 1 D $\dfrac{6}{5}$ **1 pikë**

22 a Thjeshtoni shprehjen $\dfrac{x^2+9x+14}{x^2+4x-21}$.

2 pikë

b Tregoni se polinomi $P(x) = (x + 8)(x-6) - 2(x - 25)$ merr vlera pozitive për çdo vlerë të x. **2 pikë**

23 Mbetja e pjesëtimit të numrit n me 7 është 2. Sa është mbetja e pjesëtimit të numrit $(2n + 1)$ me 7?

A 2 B 3
C 4 D 5

1 pikë

24 Në çiftin e numrave që shërben si zgjidhje e sistemit $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x-y=7 \end{cases}$, vlera e x është:

A 1 B 2
C 3 D 4

1 pikë

25 Një curril uji del nga një shatërvan dhe bie përsëri në te. Lartësia që arrin currili i ujit jepet me anë të funksionit $y=-\frac{1}{10}x(x-50)$, ku x është largesa nga burimi (në cm) dhe y është lartësia (në cm).

a Cila është lartësia më e madhe që arrin currili?

2 pikë

b Në cilën largesë nga burimi currili takon përsëri ujin?

1 pikë

26 Vlera e shprehjes $\int_{-1}^{1} 3x^2 dx$ është:

A 0 B 1
C 2 D 3

1 pikë

27 a Zgjidhni ekuacionin $(x^2-4)(x^2+7x+6)=0$

2 pikë

b Zgjidhni inekuacionin $-6 \le 4(x-5) < 7-2x$.

3 pikë

28 Në një shkollë, në një veprimtari për mbledhje fondesh, 10 nxënës të klasës A shitën nga 4 kuti me biskota secili. Në klasën B, 15 nxënës shitën nga 9 kuti me biskota secili. Numri mesatar i kutive të biskotave të shitura nga këta 25 nxënës është:

A $\frac{13}{25}$ B 1

C $6\frac{1}{2}$ D 7

1 pikë

29 Një vijë kubike me ekuacion $y=x^3-3x^2-9x+1$ ka tangjente në pikën me abshisë $x=0$.

a Shkruani ekuacionin e kësaj tangjenteje.

2 pikë

b Gjej ekstremumet e kësaj vije.

2 pikë

30 Një ndryshore rasti X ka funksionin e shpërndarjes $p(X=x)=k(1-x^2)$ ku $x=1; 2; 3$. Vlera e k është:

A $-\frac{1}{11}$ B $\frac{1}{11}$

C $\frac{1}{5}$ D 1

1 pikë

31 Gjeni syprinën e zonës që kufizohet nga vijat $y=1-x^2$; $y=0$; $x=0$; $x=\frac{1}{2}$.

2 pikë

32 Në tabelën e mëposhtme, jepen gjatësitë e luledielli që rriten në një fushë.

Gjatësia h (cm)	Denduria
$40 \le h < 60$	2
$60 \le h < 80$	17
$80 \le h < 100$	28
$100 \le h < 120$	39
$120 \le h < 140$	24
$140 \le h < 160$	10

a Cila është klasa modale?

1 pikë

b Cila klasë përmban mesoren?

1 pikë

c Gjeni dendurinë e grumbulluar për gjatësinë e luledielllit deri në 100 cm.

1 pikë

d Ndërtoni histogramin që paraqet të dhënat e mësipërme, ku në boshtin vertikal vendosni dendurinë.

1 pikë

CIP Katalogimi në botim BK Tiranë

Babmusta, Neritan
Matematikë : përgatitje për maturën shtetërore sipas kurrikulës me kompetenca / Neritan Babamusta, Edmond Lulja. – Tiranë : Pegi, 2018
260 f. ; 18,2x25,4cm.
ISBN 978-9928-233-09-7
I.Lulja, Edmond
1.Matematika 2.Probleme, ushtrime, etj.
3.Teste 4.Tekste për shkollat e mesme

51 (076.2) (079.1) (075.3)

A 2 B 3
C 4 D 5

1 pikë

24 Në çiftin e numrave që shërben si zgjidhje e sistemit $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x-y=7 \end{cases}$, vlera e x është:

A 1 B 2
C 3 D 4

1 pikë

25 Një curril uji del nga një shatërvan dhe bie përsëri në te. Lartësia që arrin currili i ujit jepet me anë të funksionit $y=-\frac{1}{10}x(x-50)$, ku x është largesa nga burimi (në cm) dhe y është lartësia (në cm).

a Cila është lartësia më e madhe që arrin currili?

2 pikë

b Në cilën largesë nga burimi currili takon përsëri ujin?

1 pikë

26 Vlera e shprehjes $\int_{-1}^{1} 3x^2 dx$ është:

A 0 B 1
C 2 D 3

1 pikë

27 a Zgjidhni ekuacionin $(x^2-4)(x^2+7x+6)=0$

2 pikë

b Zgjidhni inekuacionin $-6 \le 4(x-5) < 7-2x$.

3 pikë

28 Në një shkollë, në një veprimtari për mbledhje fondesh, 10 nxënës të klasës A shitën nga 4 kuti me biskota secili. Në klasën B, 15 nxënës shitën nga 9 kuti me biskota secili. Numri mesatar i kutive të biskotave të shitura nga këta 25 nxënës është:

A $\frac{13}{25}$ B 1
C $6\frac{1}{2}$ D 7

1 pikë

29 Një vijë kubike me ekuacion $y=x^3-3x^2-9x+1$ ka tangjente në pikën me abshisë $x=0$.

a Shkruani ekuacionin e kësaj tangjenteje.

2 pikë

b Gjej ekstremumet e kësaj vije.

2 pikë

30 Një ndryshore rasti X ka funksionin e shpërndarjes $p(X=x)=k(1-x^2)$ ku $x=1; 2; 3$. Vlera e k është:

A $-\frac{1}{11}$ B $\frac{1}{11}$
C $\frac{1}{5}$ D 1

1 pikë

31 Gjeni syprinën e zonës që kufizohet nga vijat $y=1-x^2$; $y=0$; $x=0$; $x=\frac{1}{2}$.

2 pikë

32 Në tabelën e mëposhtme, jepen gjatësitë e lulediellit që rriten në një fushë.

Gjatësia h (cm)	Denduria
$40 \le h < 60$	2
$60 \le h < 80$	17
$80 \le h < 100$	28
$100 \le h < 120$	39
$120 \le h < 140$	24
$140 \le h < 160$	10

a Cila është klasa modale?

1 pikë

b Cila klasë përmban mesoren?

1 pikë

c Gjeni dendurinë e grumbulluar për gjatësinë e lulediellit deri në 100 cm.

1 pikë

d Ndërtoni histogramin që paraqet të dhënat e mësipërme, ku në boshtin vertikal vendosni dendurinë.

1 pikë