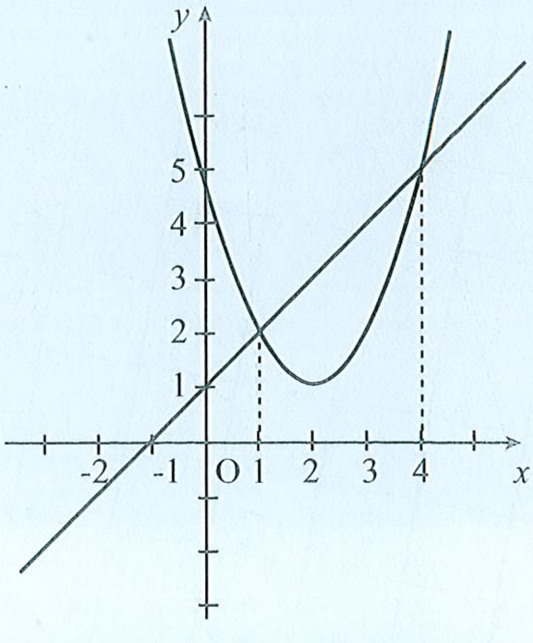
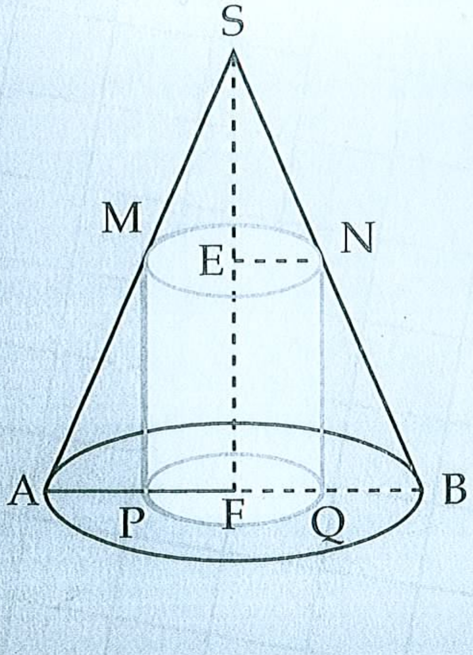
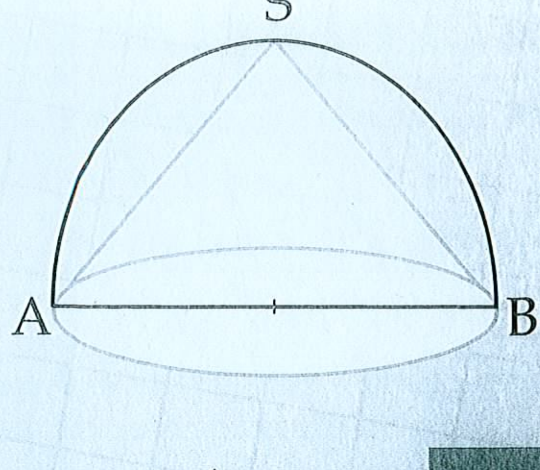
Neritan Babamusta
Edmond Lulja

MATEMATIKË

Përgatitje për maturën shtetërore sipas kurrikulës me kompetenca







BOTIME pegi

MATEMATIKË

BOTIME

pegi

Autorë: Neritan BABAMUSTA, Edmond LULJA
Korrektor letrar: Arlon LIKO
Paraqitja grafike: Elidor KRUJA
Shtypi: Shtypshkronja Pegi, Lundër, Tiranë
ISBN: 978-9928-233-09-7

Botime Pegi: tel: +355/ 042 468 833; cel: +355/ 069 40 075 02;
e-mail: botimepegi@botimepegi.al; web: www.botimepegi.al
Sektori i shpërndarjes: cel: +355/ 069 20 267 73; 069 60 778 14;
e-mail: marketing@botimepegi.al
Shtypshkronja Pegi: cel: +355/ 069 40 075 01;
e-mail: shtypshkronjapegi@yahoo.com

HYRJA

Tashmë në shkollën e mesme që prej 12 vitesh, vlerësimi i njohurive të nxënësve në shkollën e mesme si dhe përzgjedhja e tyre për në shkollën e lartë realizohet nëpërmjet maturës shtetërore.

Risi për vitin shkollor 2018-2019 është përfundimi i zbatimit të programeve e teksteve të reja, të realizuara nga shtëpitë botuese Oksord, Kembrixh e Pirson të Mbretërisë së Bashkuar.

Qëllimi i këtij botimi është të ndihmojë nxënësit e shkollës së mesme për t'u përgatitur për provimin e maturës shtetërore, qoftë në mënyrë të organizuar e të drejtuar nga mësuesi/ja brenda klasës, qoftë edhe individualisht e në mënyrë të pavarur. Ai është hartuar në përputhje me programin përkatës të matematikës për shkollën e mesme. Konceptimi dhe ndërtimi i tij është kushtëzuar logjikisht prej vetë përmbajtjes dhe frymës së këtij programi, duke mundësuar gradualitetin e nevojshëm në shtjellimin si dhe lidhjen organike me tekstet bazë.

Në përfundim të shkollës së mesme, nxënësi duhet të jetë i aftë jo vetëm për zgjidhjen e ushtrimeve, por edhe për të përvetësuar e shtruar në mënyrë të pjekur pjesën teorike të lëndës. Është edhe ky një nga qëllimet tona në hartimin e këtij botimi, duke i mundësuar nxënësit që të fitojnë parapërgatitje matematikore.

Mënyra e konceptimit të këtij botimi bën që me të të nisë puna që në fillim dhe të vazhdojë gjatë gjithë vitit shkollor.

Teksti është ndarë në 18 krerë, ku 17 krerët e parë trajtojnë në mënyrë tematike tërë lëndën e matematikës të zhvilluar gjatë tri viteve të shkollës së mesme.
Në fillim të secilit kre jepen përmbledhtas njohuritë teorike të domosdoshme për zgjidhjen e ushtrimeve. Përdoruesi i tij, para fillimit të secilit kre, duhet të studiojë me kujdes pjesën teorike si dhe ushtrimet e zgjidhura, dhe vetëm pas kësaj të kalojë tek ushtrimet për punë të pavarur e individuale.

Xhesilamaj

Në ushtrimet e zgjidhura është synuar jo vetëm në tipizimin e tyre, por edhe duke ërdorur e sugjeruar e madje stimuluar metoda të ndryshme zgjidhjeje, shoqëruar edhe e argumentimet e domosdoshme. Janë përdorur ushtrime të larmishme, herë-herë ake iu shmangur kërkesave tradicionale. Gjithashtu janë përdorur edhe formulime të lryshme për ushtrime të të njëjtit tip.

Më pas jepet një numër i konsiderueshëm ushtrimesh për vetëkontroll, për të cilat jepen edhe udhëzime për zgjidhjen si dhe përgjigjet, në mënyrë që përdoruesi të verifikojë saktësinë e zgjidhjes. Nëpërmjet modeleve të ndryshme, përdoruesi i tij mund të zbulojë mangësitë dhe veprimet e veçanta të cilat nuk janë zotëruar mjaftueshëm. Gjithashtu mësuesi/ja mund të krijojë njohje më të thella për nxënës të veçantë.

Një mënyrë e tillë e ndërtimit i jep përdoruesit të tij mundësi të gjera për punë aktive, si dhe ekonomizon kohën e përgatitjes.

Në kreun 18 janë dhënë 25 teste të kombinuara, të ngjashëm, me atë të dhënë në maturën shtetërore të virit 2019. Në secilin prej tyre, 20 ushtrime janë me alternativa dhe 12 janë me zhvillim e arsyetim. Këto mund të përdoren si nga mësuesit (testime provë) ashtu edhe nga nxënësit (për vetvlerësim). Në fund të tekstit jepet teza e maturës shtetërore të vitin 2019.

Në mënyrë të veçantë në vitin e parë të zbatimit të tij, autorët do të mirëprisnin sugjerime për përmirësimin e tij.

AUTORËT

KREU 1

BASHKËSITË

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
$1 \in A$; $5 \in A$ 1, 2 janë elemente të bashkësisë A.
$8 \notin A$; 8 nuk është element i bashkësisë A.
B = {1, 3, 5} $B \subset A$ B është nënbashkësi e bashkësisë A.
ϕ **bashkësia boshe.** Ajo nuk ka asnjë element.
Prerje e bashkësive A, B: $A \cap B = \{x/x \in A \text{ dhe } x \in B\}$, fig. 1.1
Bashkim i bashkësive A, B: $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ose } x \in B\}$, fig. 1.2

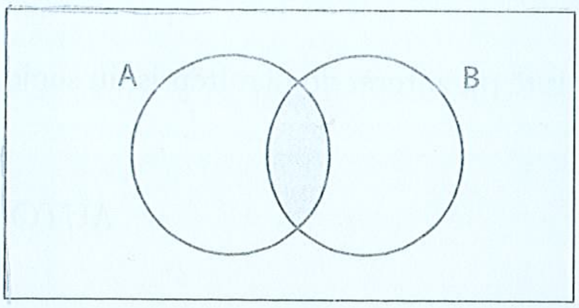


Fig. 1.1

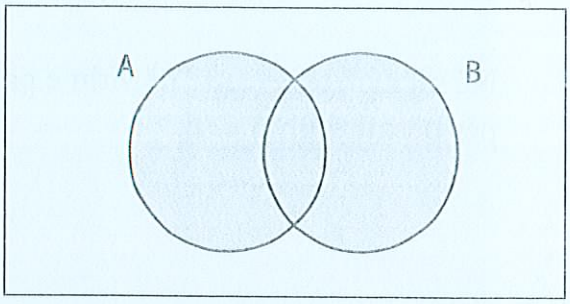


Fig 1.2

Prodhim kartezian i bashkësive A,B: $A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ dhe } y \in B\}$.
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$

Bashkësitë numerike

Bashkësia e numrave **natyrorë**: $N = \{1; 2; 3; 4; \ldots.\}$
Bashkësia e numrave **të plotë**: $Z = \{\ldots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$
Bashkësia e numrave **racionalë**: $Q = \{\frac{m}{n}\}$ ku $m \in Z$ dhe $n \in N$.

Bashkësia e numrave **irracionalë**: $I = \{\sqrt{2}; \sqrt{3}; \ldots \pi; \ldots\}$ (nuk mund të shkruhen në trajtën $\frac{m}{n}$).
Bashkësia e numrave **realë**: $R = Q \cup I$.

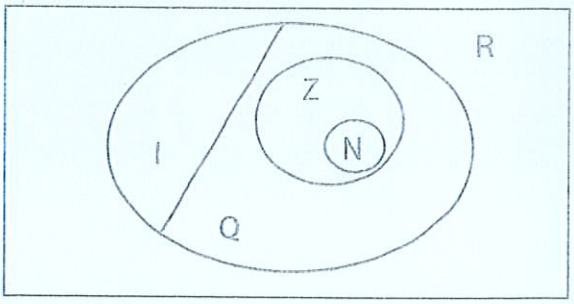


Fig. 1.3

Intervalet numerike

Intervali $]a, b[$: $\{x \in R/a < x < b\}$.

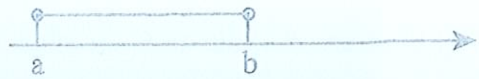


Fig. 1.4/a

Segmenti $[a, b]$: $x \in R/a \leq x \leq b\}$.

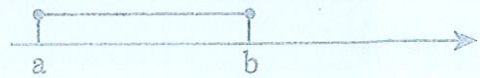


Fig. 1.4/b

Gjysmësegmenti $[a, b[$: $\{x \in R/a \leq x < b\}$.

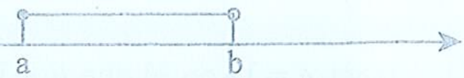


Fig. 1.4/c

Gjysmintervali $]a.b]$: $\{x \in R/a < x \leq b\}$.

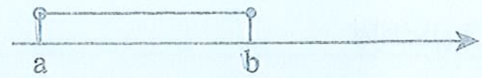


Fig. 1.4/d

$[3,+\infty[$: $\{x \in R/\ x \geq 3\}$.

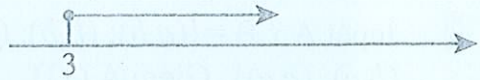


Fig. 1.4/e

$]-\infty,1[$: $\{x \in R/\ x < 1\}$.

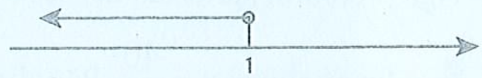


Fig. 1.4/f

Ushtrime të zgjidhura

1 Jepen bashkësitë:

A: "Bashkësia e rombeve". B: "Bashkësia e drejtkëndëshave". Gjeni $A \cap B$.

Zgjidhje

Bashkësia $M = A \cap B$ është bashkësia që formohet nga ata katërkëndësha që janë edhe drejtkëndësha, edhe rombe. Kjo është bashkësia e katrorëve.

2 Jepen $A =]1, 5]$ dhe $B = \{1, 5\}$.

a Gjeni $A \cap B$. **b** Sa numra të plotë ka në bashkësinë $A \cup B$?

Zgjidhje

a Kemi $A \cap B = \{5\}$ **b** Kemi $A \cup B = [1, 5]$. Në $A \cup B$ ka pesë numra të plotë.

3 Jepen bashkësitë $A=]2, 5[$ dhe $B=[3, 7]$. Gjeni $A \cap B$ dhe $A \cup B$.

Zgjidhje

Bashkësitë e dhëna i paraqesim në boshtin numerik (fig. 1.5).

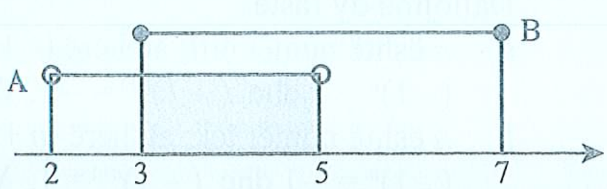


Fig. 1.5

Vëmë re se $A \cap B=\{x \in R/3 \leq x<5\}$ dhe $A \cup B=\{x \in R/2<x \leq 7\}$.

4 Jepet $A=\{x \in R/-2 \leq x<5\}$ dhe $B=\{x \in R/2<x \leq 7\}$. Gjeni $A \cap B$ dhe $A \cup B$.

Zgjidhje

Kemi $A \cap B =]2, 5[$ dhe $A \cup B = [-2, 7]$ (fig. 1.6).

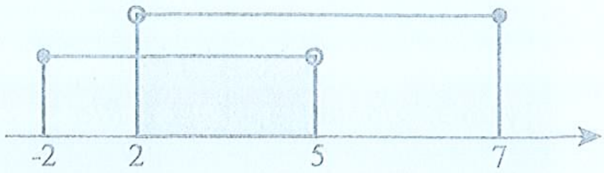


Fig. 1.6

5 Jepet $A =]-\infty,3]$ dhe $B =]1,7]$. Gjeni $A \cap B$ dhe $A \cup B$.

Zgjidhje

$A \cap B =]1, 3]$ dhe $A \cup B =]-\infty,7]$ (fig. 1.7)

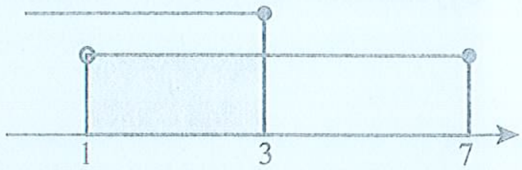


Fig. 1.7

6 Jepet A x B $=\{(a,b); (b,b); (c,b); (a,c); (b,c); (c,c)\}$. Gjeni A ∩ B.

Zgjidhje

Nga prodhimi kartezian del se A$=\{a, b, c\}$ dhe B $= \{b, c\}$. Në këtë mënyrë A ∩ B $= \{b, c\}$

7 Jepet numri $x = \dfrac{40}{n}$. Për ç'vlera të n kemi $x \in$ N?

Zgjidhje

Pjesëtuesit e numrit 40 janë 1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 40. Nëse n merr këto vlera, del se x është numër natyror.

8 Vërtetoni që:

a Katrori i çdo numri natyror çift është numër natyror çift.

b Nëse katrori i një numri natyror është tek, atëherë ky numër është tek.

Zgjidhje

a Nëse p është numër çift, ai shkruhet në trajtën $p = 2k$, ku k është numër i plotë. Kemi:
$p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$. Pra p^2 është numër çift.

b Supozojmë se katrori i numrit p është tek, por numri p nuk është tek. Atëherë p do të jetë çift, kështu do të dilte që edhe katrori i p do të ishte çift, gjë që është në kundërshtim me kushtin.

9 Gjeni vlerën e shprehjes $(-1)^n + (-1)^{n+1}$, ku n është numër natyror.

Zgjidhje

Dallojmë dy raste.

a n është numër çift; atëherë $(n + 1)$ është numër tek. Kemi:
$(-1)^n = 1$ dhe $(-1)^{n+1} = -1$. Vlera e shprehjes është $1 - 1 = 0$.

b n është numër tek; atëherë $(n + 1)$ është numër çift. Kemi:
$(-1)^n = -1$ dhe $(-1)^{n+1} = 1$. Vlera e shprehjes është $-1 + 1 = 0$.

10 Vërtetoni që për çdo vlerë natyrore të n, shprehja $n^2 + n$ plotpjesëtohet me 2.

Zgjidhje

Shkruajmë $n^2 + n = n(n+1)$

Nëse n është çift, ai plotpjesëtohet me 2, prandaj edhe prodhimi $n(n+1)$ plotpjesëtohet me 2.

Nëse n është tek, atëherë $(n+1)$ është çift, prandaj prodhimi $n(n+1)$ plotpjesëtohet me 2.

11 Në një klasë me 30 nxënës, 18 luajnë volejboll, 14 luajnë basketboll, ndërsa 5 nuk luajnë asnjë nga këto lojëra. Gjeni numrin e nxënësve që luajnë volejboll dhe basketboll.

Zgjidhje

Shënojmë:

E – bashkësia e nxënësve të klasës. V – bashkësia e nxënësve të klasës që luajnë volejboll. B – bashkësia e nxënësve të klasës që luajnë basketboll.

x – numri i nxënësve që luajnë volejboll dhe basketboll.

Në diagramin e Venit (fig. 1.8) kemi:

$n(E) = 30,\quad n(V) = 18,\quad n(B) = 14.$

Shkruajmë $(18 - x) + x + (14 - x) + 5 = 30$,

prej ku $x = 7$.

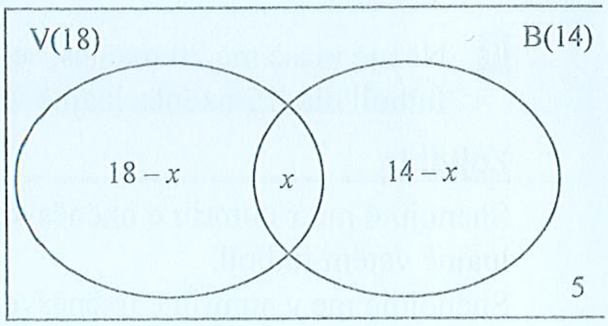


Fig. 1.8

12 Shënojmë:

A – bashkësia e deleve;

B – bashkësia e kuajve;

C – bashkësia e kafshëve inteligjente;

D – bashkësia e kafshëve të zeza.

a Shprehni në gjuhën e bashkësive fjalitë e mëposhtme:

– Asnjë nga delet nuk është kafshë inteligjente: $A \cap C = \phi$.

– Të gjithë kuajt janë të zinj: $B \subset D$.

– Disa dele janë të zeza: $A \cap D \neq \phi$.

b Interpretoni shënimet e mëposhtme:

– $B \subset C$: të gjithë kuajt janë kafshë inteligjente.

– $B \cup C = D$: kafshët e zeza janë ose kuaj ose kafshë inteligjente.

13 Shkruani të gjitha nënbashkësitë e bashkësisë $A = \{a, b, c\}$.

Zgjidhje

Nënbashkësi me asnjë element: ϕ.

Nënbashkësi me një element: $\{a\}$; $\{b\}$; $\{c\}$.

Nënbashkësi me dy elemente: $\{a,b\}$; $\{b,c\}$; $\{a,c\}$.

Nënbashkësi me tri elemente: $\{a, b, c\}$.

Gjithsej 8 nënbashkësi.

14 Bashkësitë A dhe B nuk kanë asnjë element të përbashkët. Jepet $n(A \cup B) = 12$ dhe $n(A) = 7$. Sa elemente që nuk bëjnë pjesë në bashkësinë A, bëjnë pjesë në bashkësinë B?

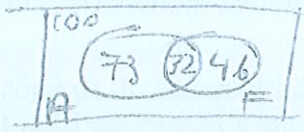
Zgjidhje

Meqë $A \cap B = \phi$ kemi $n(A \cup B) = n(A) + n(B) \Rightarrow n(B) = n(A \cup B) - n(A) = 12 - 7 = 5$.

15 Nga 100 nxënës të një shkolle, 73 mësojnë anglisht, 46 mësojnë frëngjisht, 32 nxënës mësojnë dhe anglisht dhe frëngjisht.

a Sa nxënës mësojnë të paktën një nga këto gjuhë?

b Sa nxënës nuk mësojnë asnjë nga këto gjuhë?



b) 41+14+32=87 nx
100−87=13 nx

Zgjidhje a) 73−32=41 nx Ang 46−32=14 nx Frëng ⇒ 41+14=55 nx
+32
87 nx

Shënojmë me A bashkësinë e nxënësve që mësojnë anglisht; $n(A) = 73$.
Shënojmë me B bashkësinë e nxënësve që mësojnë frëngjisht; $n(B) = 46$.
Bashkësia e nxënësve që mësojnë anglisht dhe frëngjisht është $A \cap B$.
Është dhënë $n(A \cap B) = 32$.
Bashkësia e nxënësve që mësojnë të paktën një nga këto gjuhë është $A \cup B$. Kërkohet $n(A \cup B)$. Kemi: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 73 + 46 - 32 = 87$.

a 87 nxënës mësojnë të paktën një nga këto gjuhë.

b $100 - 87 = 13$ nxënës nuk mësojnë asnjë nga këto gjuhë.

16 Në një klasë me 20 nxënës, secili luan futboll dhe/ose volejboll. 12 nxënës luajnë futboll dhe 15 nxënës luajnë vetëm një sport. Sa nxënës luajnë volejboll?

Zgjidhje

Shënojmë me x numrin e nxënësve që luajnë vetëm futboll.
Shënojmë me y numrin e nxënësve që luajnë vetëm volejboll.
Shënojmë me z numrin e nxënësve që luajnë futboll dhe volejboll.
Në figurën 1.9 paraqiten këto bashkësi me diagrame të Venit.

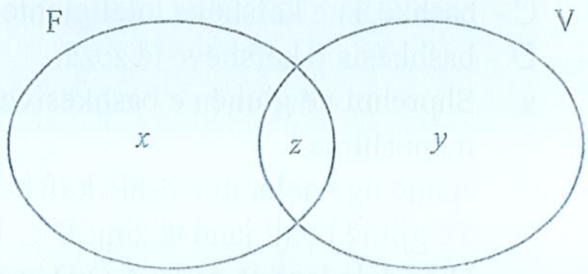


Fig. 1.9

Nga të dhënat e problemës kemi:

(1) $x + z = 12$, sepse 12 nxënës luajnë futboll.

(2) $x + y = 15$, sepse 15 nxënës luajnë vetëm një sport.

(3) $x + y + z = 20$, sepse klasa ka 20 nxënës.

Në ekuacionin e tretë, duke zëvendësuar $x + z = 12$ (nga ekuacioni i parë), gjejmë $y = 8$.
Më pas, nga ekuacioni i dytë gjejmë $x = 7$ dhe nga ekuacioni i parë, gjejmë $z = 5$.
Numri i nxënësve që luajnë volejboll është $z + y = 5 + 8 = 13$.

17 Në një grup prej 39 nxënësish, numri i nxënësve që luajnë futboll është 2 herë më i madh se numri i nxënësve që luajnë volejboll. Nëntë nxënës luajnë edhe futboll edhe volejboll. Në qoftë se dihet që çdo nxënës është i angazhuar në njërën lojë, sa është numri i nxënësve që luajnë vetëm futboll?

Zgjidhje

Shënojmë me x numrin e nxënësve që luajnë vetëm futboll. Meqë 9 nxënës luajnë edhe futboll edhe volejboll, del se numri i nxënësve që luajnë vetëm volejboll është $39 - 9 - x = 30 - x$.

Në figurën 1.10 paraqiten bashkësitë përkatëse me diagrame të Venit.

Nga kushti kemi:

$x + 9 = 2(39 - x)$ nga ku $x = 23$.

Vetëm futboll luajnë 23 nxënës.

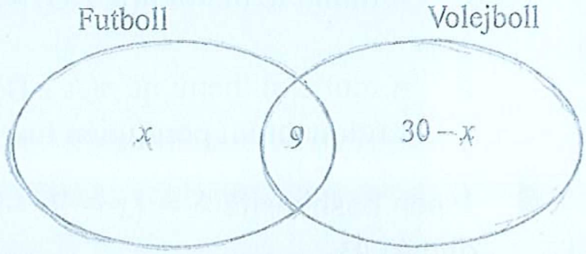


Fig. 1.10

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Renditni të gjitha elementet e bashkësive të mëposhtme:

a Numrat natyrorë më të mëdhenj se 10 dhe më të vegjël ose të barabartë me 17.

b Numrat e thjeshtë më të vegjël se 50.

c Numrat natyrorë më të vegjël se 50 që janë shumëfisha të numrit 3.

d Numrat një ose dyshifrorë që janë katrorë të plotë.

2 Duke përdorur bashkësitë e ushtrimit paraardhës, gjeni:

a $A \cap B$ b $C \cap D$ c $A \cap B \cap C$ d $A \cap B \cap D$

P. [a) $A \cap B = \{11, 13, 17\}$; b) $A \cap B \cap D = \phi$]

3 Në bashkësitë e mëposhtme, elementet gëzojnë një veti. Gjeni elementin që nuk e gëzon këtë veti.

a $\{1; 9; 25; 64; 81; 99; 100\}$; b $\{2; 7; 11; 37; 61, 83, 91; 97\}$

c {Erzen, Seman, Shkumbin, Vjosa, Vlora}; d $\{a; o; u; v; zh; k; t\}$.

Argumentoni përgjigjen tuaj.

4 Në pohimet e mëposhtme, dalloni ato që janë të vërteta (V) dhe ato që janë të gabuara (G).

		V	G
a	Diferenca e dy numrave natyrorë është numër natyror.	☐	☐
b	Prodhimi i dy numrave natyrorë është numër natyror.	☐	☐
c	Prodhimi i dy numrave racionalë është numër racional.	☐	☐
d	Prodhimi i dy numrave irracionalë është numër irracional.	☐	☐
e	Raporti i dy numrave të plotë është numër i plotë.	☐	☐
f	Rrënja katrore e një numri të plotë është numër racional.	☐	☐
g	Shuma e dy numrave irracionalë është numër irracional.	☐	☐

5 Jepen bashkësitë:

A: Bashkësia e katërkëndëshave; B: Bashkësia e paralelogrameve;

C: Bashkësia e drejtkëndëshave; D: Bashkësia e rombeve; E: Bashkësia e katrorëve.

Gjeni:

a $C \cap D$ b $D \cap E$ c $D \cup E$ d $B \cap C$
e $B \cup C$ f $E \cup D$ g $E \cap D$

6 Jepen bashkësitë $A = \{a, b, c\}$ dhe $B = \{2, 3\}$. Gjeni $A \times B$ dhe $B \times A$.

a A mund të themi $n(A \times B) = n(B \times A)$?

b A mund të themi që $n(A \times B) = n(B \times A)$ për çdo dy bashkësi A dhe B? Argumentoni përgjigjen tuaj.

P. [(b) po]

7 Jepen bashkësitë $A = \{x \in R / -1 \leq x < 1\}$ dhe $B = \{x \in R / 0 < x < 2\}$. Gjeni $A \cap B$ dhe $A \cup B$.

8 Jepen bashkësitë $A = [-2, 1\}$ dhe $B = [0, +\infty[$.

a Gjeni $A \cap B$ dhe $A \cup B$.

b Në bashkësinë $A \cup B$, gjeni:

i Elementin më të vogël. ii Elementin më të madh.

P. [b i 2; ii Nuk ekziston.]

xhesiang

9 Jepet bashkësia $P = \{x \in N / 4 \leq x < 17\}$. Për ç'vlera të x nga kjo bashkësi, $\sqrt{x}$ është numër racional?

10 Jepen bashkësitë $A = \{x \in R / 2 - x \geq 0\}$ dhe $B = \{x \in R / 4x - 12 > 0\}$. Gjeni $A \cap B$.

P. [ϕ]

11 Për bashkësitë A, B dhe C jepet $n(A) = 5$; $n(B) = 6$ dhe $n(C) = 11$. Gjeni numrin maksimal të mundshëm të elementeve të bashkësisë $A \cap B \cap C$. **P. [5]**

12 Jepet $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dhe $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Gjeni numrin maksimal M dhe minimal m të mundshëm të elementeve të bashkësisë B. **P. [$M = 6$; $m = 2$]**

13 Jepen bashkësitë $A = \{x \in N / (x^2 - 25)(x - 7) = 0\}$ dhe $B = \{x \in Z / x - 4 > 0\}$. Gjeni $A \cap B$.

P.[{5,7}]

14 Në një grup prej 25 nxënësish, 15 pinë vetëm çaj, 11 pinë vetëm kafe dhe 5 pinë edhe çaj edhe kafe. Sa nxënës nuk pinë as çaj e as kafe? **P. [4]**

15 Jepet $A = \{x \in Z / -5 < x < 5\}$ dhe $B = \{x \in Z / (x^2 - 25) \leq 0\}$. Gjeni $A \cap B$ dhe $A \cup B$.

P. [$A \cap B = A$; $A \cup B = B$]

16 Jepet $A \cap B = \phi$; $n(A \cup B) = 15$; $n(B) = 9$. Sa elemente që nuk bëjnë pjesë në bashkësinë B, bëjnë pjesë në bashkësinë A? **P. [6]**

17 A është bashkësia e numrave natyrorë më të vegjël se 13. B është bashkësia e numrave në fushën e sahatit të qytetit. A mund të themi që A = B? Diskutoni!

18 Në një grup prej 20 nxënësish, 8 luajnë shah, por jo ping-pong dhe 15 luajnë shah. Në qoftë se secili nxënës luan të paktën një lojë, sa nxënës luajnë ping-pong, por jo shah?

P. [5]

19 Në një qytet, 40% e banorëve kanë syze, 25% janë mëngjarashë, 10% kanë syze dhe janë mëngjarashë. Sa për qind e banorëve nuk kanë syze dhe nuk janë mëngjarashë?

P. [45%]

20 Jepen bashkësitë $A = [-2, 6[$ dhe $B = [1, 9]$.

a Gjeni prerjen $A \cap B$ të tyre.

b Sa numra të plotë që bëjnë pjesë në bashkësinë B, nuk bëjnë pjesë në bashkësinë A?

c Sa numra të plotë që bëjnë pjesë në bashkësinë A, nuk bëjnë pjesë në bashkësinë B?

d Sa numra të plotë bëjnë pjesë edhe në bashkësinë A, edhe në bashkësinë B?

P. [a) [1, 6[; b) 4; c) 3; d) 5]

21 Në një klasë me 40 nxënës u zhvillua testim në matematikë dhe fizikë. U arrit kalueshmëria 80% në matematikë dhe 60% në fizikë. Sa është numri i nxënësve që u shpallën fitues në të dy testimet?

P. [16]

22 A është bashkësia e numrave të trajtës $2m$; B është bashkësia e numrave të trajtës n^2; C është bashkësia e numrave të trajtës $10k$. Në qoftë se $m, n, k \in N$, cili nga numrat e mëposhtëm bën pjesë në bashkësinë $A \cap B \cap C$?

A 1 B 4 C 25 D 100

23 Cilën bashkësi paraqet pjesa e vijëzuar në figurën 1.11? Zgjidhni alternativën e saktë.

A) $M \cap N \cap P$ B) $(M \cup N) \cap P$

C) $(M \cap N) \cup P$ D) $(P \cap N) \cup M$

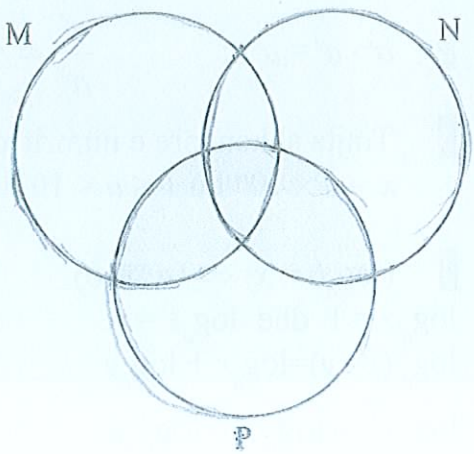


Fig. 1.11

24 Në figurën 1.12 gjeni numrin elementeve të bashkësisë $Q \cap (P \cup R)$.

P. [17]

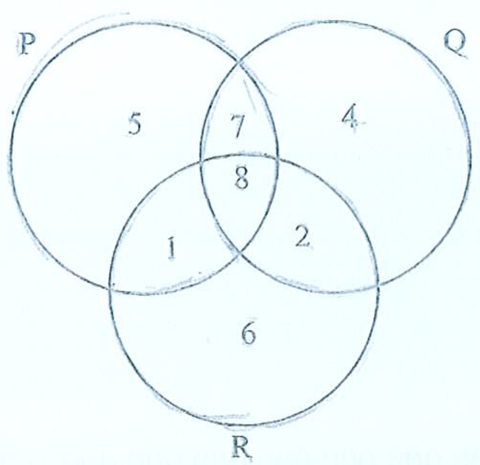


Fig. 1.12

Xhesi

lessy

KREU 2

RRËNJËT, FUQITË, LOGARITMET

1 $a^n = a \cdot a \cdots a$ (n faktorë): $a \in R$ dhe $n \in N$.

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$; $a^0 = 1$; $a^1 = a : a \neq 0$; $a \in R$ dhe $n \in N$.

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $\quad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\quad \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$: $a, b > 0$ dhe $n, m \in N$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{për } a \geq 0 \\ -a & \text{për } a < 0 \end{cases}$$

2 $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $\quad \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; $\quad (a^x)^y = a^{xy}$; $\quad a^x \cdot b^x = (ab)^x$; $\quad \dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

3 Trajta shkencore e numrit x:
$x = a \times 10^m$ ku $1 \leq a < 10$ dhe $m \in Z$.

4 $(\log_a b = x) \Leftrightarrow (a^x = b)$
$\log_a a = 1$ dhe $\log_a 1 = 0$.
$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
$\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x \quad (\alpha \in R)$
$\log_{10} x = \log x$
$\log_e x = \ln x \quad (\ln x \approx 2{,}3 \cdot \log x)$
$\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a} \quad (a > 0;\ b \neq 1)$

Ushtrime të zgjidhura

1 Masa e atomit të hidrogjenit është 0,00 000 000 000 000 000 000 000 167g. Në trajtë standarde, ajo shkruhet $1{,}67 \times 10^{-24}$g. Në këtë rast, $a = 1{,}67$ dhe $m = -24$.

2 Kryeni veprimet e mëposhtme me numrat e shkruar në trajtë standarde.
a $\quad (3{,}1 \times 10^3) \times (2{,}3 \times 10^4) = (3{,}1 \times 2{,}3)10^{3+4} = 7{,}13 \times 10^7$.

b $\dfrac{4{,}8\cdot 10^{2}}{1{,}5\cdot 10^{8}}=\dfrac{4{,}8}{1{,}5}10^{2-8}=3{,}2\cdot 10^{-6}$

c $(8\times 10^{3})\times(4{,}5\times 10^{4})=8\times 4{,}5\times 10^{3+4}=36\times 10^{7}=3{,}6\times 10^{8}$.

3 Paraqitni në trajtë standarde numrat:
75000; 750; 75; 0,75; 0,075.

Zgjidhje

$75000=75\cdot 1000=7{,}5\cdot 10\cdot 10^{3}=7{,}5\cdot 10^{4}$; $750=75\cdot 10=7{,}5\cdot 10\cdot 10=7{,}5\cdot 10^{2}$;

$75=7{,}5\cdot 10=7{,}5\cdot 10^{1}$; $0{,}75=\dfrac{75}{100}=\dfrac{7{,}5\cdot 10}{100}=7{,}5\cdot 10^{-1}$;

$0{,}075=\dfrac{75}{1000}=\dfrac{7{,}5\cdot 10}{10^{3}}=7{,}5\cdot 10^{-2}$.

4 Njehsoni $\dfrac{12^{6}}{6^{6}}$.

Zgjidhje

$\dfrac{12^{6}}{6^{6}}=\left(\dfrac{12}{6}\right)^{6}=2^{6}=64$.

5 Shkruani numrin 328 si një shprehje që përmban fuqi të dhjetës.

Zgjidhje

$328=3\cdot 100+2\cdot 10+8\cdot 1$ d.m.th.,
$328=3\cdot 10^{2}+2\cdot 10^{1}+8\cdot 10^{0}$

6 Paraqitni shprehjen $(8^{4})^{3}:(4^{3})^{2}$ si një fuqi me bazë 2.

Zgjidhje

Vëmë re që $8=2^{3}$.

Atëherë $8^{4}=(2^{3})^{4}$, d.m.th., $8^{4}=2^{12}$.

Prandaj $(8^{4})^{3}=(2^{12})^{3}$, d.m.th., $(8^{4})^{3}=2^{36}$.

Kurse $4=2^{2}$, prandaj $4^{3}=(2^{2})^{3}$.

Kemi $4^{3}=2^{6}$ dhe $(4^{3})^{2}=(2^{6})^{2}$ d.m.th., $(4^{3})^{2}=2^{12}$.

Kështu që $(8^{4})^{3}:(4^{3})^{2}=2^{36}\cdot 2^{12}=2^{24}$.

7 Krahasoni: $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ me $\sqrt{0{,}7}$.

Zgjidhje

Krahasojmë në fillim $\dfrac{3}{7}$ me 0,7, d.m.th., $\dfrac{3}{7}$ me $\dfrac{7}{10}$.

I kthejmë thyesat në emërues të përbashkët.

Kemi $\frac{3}{7}=\frac{30}{70}$ dhe $\frac{7}{10}=\frac{49}{70}$.

Pra $\frac{3}{7}<0,7$. Në këtë mënyrë $\sqrt{\frac{3}{7}}<\sqrt{0,7}$.

8 Paraqitni më thjeshtë shprehjet e mëposhtme.

a $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1$ (sepse $\sqrt{2}-1>0$)

b $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2}=|3-\sqrt{10}|=-(3-\sqrt{10})=\sqrt{10}-3$ sepse $3-\sqrt{10}<0$.

9 Krahasoni numrat.

a $\sqrt[3]{3}$ dhe $\sqrt[6]{5}$ b $\sqrt{2}$ dhe $\sqrt[6]{7}$ c $\sqrt[3]{2}$ dhe $\sqrt[12]{45}$

d $5^{1,3}$ me $5^{1,5}$ e $(\frac{1}{5})^2$ me $(\frac{1}{5})^6$ f $3^{-0,5}$ me $3^{-1,5}$

Zgjidhje

c I kthejmë rrënjët në të njëjtët tregues, duke gjetur ShVP e treguesve 3 dhe 12. Ky është 12.

Kemi $\sqrt[3]{2}=\sqrt[3\cdot4]{2^4}=\sqrt[12]{16}$.

Krahasojmë numrat nën rrënjë.

Nga $16<45$ rrjedh $\sqrt[12]{16}<\sqrt[12]{45}$.

Si përfundim $\sqrt[3]{2}<\sqrt[12]{45}$.

d $5^{1,3}<5^{1,4}$ (sepse $5>1$ dhe $1,3<1,4$)

e $(\frac{1}{5})^2>(\frac{1}{5})^6$ (sepse $\frac{1}{5}<1$ dhe $2<6$)

10 Gjeni vlerën e shprehjes $A=\frac{(4^2)^3\cdot(2^{-3})^2}{8^3}$.

Zgjidhje

Vëmë re se të gjitha fuqitë mund të paraqiten në trajtën e fuqive me bazë 2. Kemi:

$$A=\frac{(4^2)^3\cdot(2^{-3})^2}{8^3}=\frac{4^{12}\cdot2^{-6}}{8^3}=\frac{(2^2)^{12}\cdot2^{-6}}{(2^3)^3}=\frac{2^{24}\cdot2^{-6}}{2^9}=\frac{2^{18}}{2^9}=2^{18-9}=2^9$$

11 Zgjidhni ekuacionin: $2^x=\frac{1}{16}$

Zgjidhje

$2^x=\frac{1}{16}$

Kemi $\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}=2^{-4}$

Pra: $2^x=2^{-4}\Rightarrow x=-4$

12 Numrat 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 paraqitini si shumë fuqish me bazë 2.

Shembull

$4 = 2^2$; $5 = 4 + 1 = 2^2 + 2^0$; $7 = 4 + 2 + 1 = 2^2 + 2^1 + 2$ etj.

13 Jepet $A = 2^7 + 2^7 + 2^7$ dhe $B = 3^8 + 3^8 + 3^8 + 3^8$. Gjeni $A \times B$.

Zgjidhje

Kemi $A = 2^7 + 2^7 + 2^7 = 3 \times 2^7$ dhe $B = 3^8 + 3^8 + 3^8 + 3^8 = 4 \times 3^8$

$A \times B = 3 \times 2^7 \times 4 \times 3^8 = 3 \times 2^7 \times 2^2 \times 3^8 = 3^9 \times 2^9 = 6^9$

14 Duke përdorur përkufizimet ose vetitë e fuqive, gjeni me dy mënyra:

a $\left(\frac{4}{9}\right)^{-3}$ b $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Zgjidhje

a $\left(\frac{4}{9}\right)^{-3} = \frac{4^{-3}}{9^{-3}} = \frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{243}} = \frac{243}{64}$. $\left(\frac{4}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{9}{4}\right)^{3} = \frac{243}{64}$.

15 Shkruani si fuqi me bazë $\frac{1}{2}$ numrat e mëposhtëm:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}$ b $\sqrt{2}, \sqrt{2^3}, \sqrt[3]{4}$ c $1, 2, 4, 8, 16, 32$ d $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}, \frac{1}{\sqrt[5]{16}}$

Zgjidhje

a $2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-5}$ b $2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{3}{2}}, 2^{\frac{2}{3}}$ d $2^{-\frac{1}{3}}, 2^{-\frac{3}{4}}, 2^{-\frac{4}{5}}$

16 Gjeni logaritmet me bazë 2 të numrave të mëposhtëm:

$2; 8; \frac{1}{2}; \sqrt{2}; 2\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}$

Zgjidhje

Shënojmë $\log_2 2\sqrt{2} = x$. Sipas përkufizimit të logaritmit kemi: $2^x = 2\sqrt{2}$ d.m.th.,

$$2^x = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

17 Njehsoni:

a $\log_6 2 + \log_6 3$ b $\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{9}$ c $\log_5 100 - \log_5 4$

Zgjidhje

a $\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 2 \cdot 3 = \log_6 6 = 1$

c $\log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 \frac{100}{4} = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$

18 Vërtetoni që $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$, kur $x > 0$ $(0 < a \neq 1)$

Zgjidhje

Kemi $\log_a \frac{1}{x} = \log_a 1 - \log_a x = 0 - \log_a x = -\log_a x$

19 Gjeni x në qoftë se:

a $\log x = 3\log a + \log b$ b $\log x = \frac{1}{2}\log 5 - \log 3$ c $x = 4\log 2 - \log 11$

Zgjidhje

b $\log x = \frac{1}{2}\log 5 - \log 3 = \log 5^{\frac{1}{2}} - \log 3 = \log \frac{5^{\frac{1}{2}}}{3} = \log \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

20 Krahasoni:

a $\log(4 + 7)$ me $\log 4 + \log 7$ b $1 + 2\log 2$ me $3\log 7 - \log 3$

Zgjidhje

a $\log(4 + 7) = \log 11$, kurse $\log 4 + \log 7 = \log(4 \cdot 7) = \log 28$.
Prandaj $\log(4 + 7) < \log 4 + \log 7$

b $1 + 2\log 2 = \log 10 + \log 2^2 = \log 10 + \log 4 = \log 40$

$3\log 7 - \log 3 = \log 7^3 - \log 3 = \log \frac{7^3}{3} = \log \frac{343}{3} = \log 114\frac{1}{3}$

Prandaj $1 + 2\log 2 < 3\log 7 - \log 3$

21 Përcaktoni shenjën e shprehjes: a $\log_4 5$ b $\log_{\frac{1}{2}} 3$

Zgjidhje

a Kemi $5 > 1$, prandaj $\log_4 5 > \log_4 1$, d.m.th., $\log_4 5 > 0$.

b Kemi $3 > 1$, prandaj $\log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} 1$, d.m.th., $\log_{\frac{1}{2}} 3 < 0$.

22 Paraqitni më thjesht:

a $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$. b $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

c $\sqrt{\frac{32}{25}} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{16 \cdot 2}}{5} = \frac{\sqrt{16} \cdot \sqrt{2}}{5} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$. d $\sqrt{3a^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2} = a\sqrt{3}$ (kur $a > 0$).

23 Paraqitni më thjesht shprehjen $\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{5}\right)^2$.

Zgjidhje

$$\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{5}\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\cdot\left(3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{5}\right)+\left(2\sqrt{5}\right)^2=$$

$$=3^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2-12\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+2^2\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2=9\cdot 2-12\sqrt{10}+4\cdot 5=38-12\sqrt{10}$$

24 Zhdukni rrënjën nga emëruesi i thyesës: $\dfrac{3\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}$ (kur $x>0, y>0$).

Zgjidhje

Shumëzojmë numëruesin dhe emëruesin me të koniuguarin e emëruesit d.m.th., me $\sqrt{x}-2\sqrt{y}$.

Kemi:

$$\frac{3\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}=\frac{\left(3\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)}=\frac{3\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}-6\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}-\sqrt{y}\cdot\sqrt{x}+2\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(2\sqrt{y}\right)^2}=$$

$$=\frac{3x-7\sqrt{xy}+2y}{x-4y}$$

25 Paraqitni më thjesht shprehjen $\dfrac{20}{\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$.

Zgjidhje

$$\frac{20}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=\frac{20\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}+\frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\frac{20\sqrt{5}}{5}+\frac{5-4\sqrt{5}-4}{5-4}=4\sqrt{5}+1-4\sqrt{5}=1$$

26 Jepet $2^{n+3}+2^{n+2}-2^{n+1}-2^n=144$. Gjeni n.

Zgjidhje

Nga vetitë e fuqive kemi:

$2^{n+3}=2^n\cdot 2^3$; $\quad 2^{n+2}=2^n\cdot 2^2$; $\quad 2^{n+1}=2^n\cdot 2$. Zëvendësojmë në ekuacionin e dhënë.

$2^n\cdot 2^3+2^n\cdot 2^2-2^n\cdot 2-2^n=144 \Rightarrow 2^n(2^3+2^2-2-1)=144$

$\Rightarrow 2^n\cdot 9=144 \Rightarrow 2^n=16 \Rightarrow 2^n=2^4 \Rightarrow n=4$

27 Zgjidhni ekuacionet:

a $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ b $2^x=4\cdot\sqrt{2}$ $\qquad$ c $3^x=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$

d $\log_2(x+1)=\log_2 6$ $\qquad$ e $\log(x^2-4)=\log(x+2)$

Zgjidhje

a $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^x=\dfrac{1}{3^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^x=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

b $2^x = 4\cdot\sqrt{2} \Rightarrow 2^x = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^x = 2^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

c $3^x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}} \Rightarrow 3^x = 3^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

d Kemi $\log_2(x+1) = \log_2 6 \Rightarrow x+1 = 6 \Rightarrow x = 5$.

e Kemi $\log(x^2-4) = \log(x+2) \Rightarrow \begin{cases} x^2-4 = x+2 \\ x^2-4>0 \\ x+2>0 \end{cases}$.

Nga ekuacioni i parë kemi $x_1 = -2$; $x_2 = 3$. Dy kushtet e tjera i plotëson vetëm vlera $x = 3$, prandaj kjo është e vetmja rrënjë e ekuacionit.

28 Zgjidhni ekuacionin eksponencial, duke bërë zëvendësimin e ndryshorit:

a $5^{2x} - 6\cdot 5^x + 5 = 0$ b $4^x + 2^x - 6 = 0$

Zgjidhje

a Bëjmë zëvendësimin $5^x = t$ dhe kemi $t^2 - 6t + 5 = 0$.

Marrim $t = 1$ ose $t = 5$, pra $5^x = 1$ ose $5^x = 5$. Kështu $x = 0$ ose $x = 1$.

b Bëjmë zëvendësimin $2^x = t$. Duke patur parasysh që $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = t^2$, ekuacioni merr trajtën $t^2 + t - 6 = 0$.

Marrim $t = -3$ ose $t = 2$, d.m.th., $2^x = -3$ ose $2^x = 2$. Ekuacioni $2^x = -3$ nuk ka zgjidhje, kurse nga ekuacioni $2^x = 2$ marrim $x = 1$.

29 Jepet $\log 2 = a$. Gjeni $\log 5$.

Zgjidhje

$\log 10 = 1 \Rightarrow \log 2\cdot 5 = 1 \Rightarrow \log 2 + \log 5 = 1 \Rightarrow \log 5 = 1 - \log 2 \Rightarrow \log 5 = 1 - a$

30 Jepet $3^{x+1} = a$. Gjeni 9^x.

Zgjidhje

$3^{x+1} = a \Rightarrow 3^x\cdot 3 = a \Rightarrow 3^x = \frac{a}{3}$

$9^x = (3^2)^x = (3^x)^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{9}$

31 Fortësia e betonit, x ditë pasi ai është hedhur, llogaritet sipas formulës $R(x) = R(30)\cdot\log_{30}x$, ku: $R(30)$ është fortësia e tij në moshën 30-ditore.

Sa ditë duhet të kalojnë që fortësia e betonit të jetë dy herë më e madhe se në moshën 30-ditore?

Zgjidhje

Në barazimin $R(x) = R(30)\cdot\log_{30}x$, kërkohet të përcaktojmë x në mënyrë që $R(x) = 2R(30)$. Kemi $2R(30) = R(30)\cdot\log_{30}x$.

Pra, $\log_{30}x = 2 \Rightarrow x = 30^2$ pra, $x = 900$ ditë.

32 Jepet $x = 6 - \sqrt{5}$. Gjeni $\sqrt{20}$.

Zgjidhje

$$x = 6 - \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5} = 6 - x$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5} = 2(6 - x) = 12 - 2x$$

33 Zgjidhni ekuacionin $(\log x)^2 - 3\log x + 2 = 0$.

Zgjidhje

Zëvendësojmë $\log x = t$. Kemi:

$t^2 - 3t + 1 = 0$. Rrënjët e këtij ekuacioni janë $t = 1$ ose $t = 2$.

$\log x = 1 \Rightarrow x = 10$; $\log x = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100$

34 Jepet $\log_{a+2} 16 = 2$. Gjeni a.

Zgjidhje

Nga përkufizimi i logaritmit kemi:

$(a + 2)^2 = 16 \Rightarrow a + 2 = 4 \Rightarrow a = 2$ ($a + 2$ nuk mund të jetë e barabartë me -4, sepse është bazë e logaritmit).

35 Thjeshtoni shprehjen

$$\frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+2^{-x}}.$$

Zgjidhje

$$\frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+2^{-x}} = \frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+\frac{1}{2^x}} = \frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{\frac{2^x+1}{2^x}} = \frac{1}{1+2^x} + \frac{2^x}{1+2^x} = \frac{1+2^x}{1+2^x} = 1$$

36 Jepet $\log 2 = a$ dhe $\log 3 = b$. Gjeni $\log_5 6$.

Zgjidhje

$$\log_5 6 = \frac{\log 6}{\log 5} = \frac{\log 2 \cdot 3}{\log \frac{10}{2}} = \frac{\log 2 + \log 3}{\log 10 - \log 2} = \frac{a+b}{1-a}$$

37 Vëllimi i lëndës drusore të një pylli, për çdo vit shtohet me 10% të vlerës që ai ka në fillim të vitit.

a Tregoni që vëllimi i lëndës drusore, pas t vjetësh, jepet nga formula $V = V_0(1,1)^t$ ku V_0 është vëllimi i lëndës drusore në çastin fillestare (kur $t = 0$).

b Nëse $V_0 = 10\,000$ m^3, sa do të jetë V pas 4 vjetëve?

c Pas sa vjetësh do të kemi $V = 12\,100$ m^3?

Zgjidhje

a Pas një viti, vëllimi i lëndës drusore është $V_1 = V_0 + \frac{10}{100} V_0$ d.m.th.,

$V_1 = V_0(1,1)$. Pas dy vjetësh, vëllimi i lëndës drusore është

$V_2 = V_1 + \frac{10}{100} V_1 = V_1(1,1)$ d.m.th., $V_2 = V_0(1,1)^2$.

Duke vazhduar arsyetimet, gjejmë që pas t vjetësh, vëllimi i lëndës drusore do të jetë $V_t = V_0(1,1)^t$.

b Pas katër vjetëve, do të kemi

$V = V_0(1,1)^4$ d.m.th., $V = 10000(1,4641) = 14641\ m^3$.

c Kërkojmë t, duke ditur $V_0 = 10000$ dhe $V_t = 12100$. Kemi $V_t = V_0(1,1)^t$ d.m.th., $12100 = 10000(1,1)^t$ që nga $(1,1)^t = 1,21 \Rightarrow (1,1)^t = (1,1)^2 \Rightarrow t = 2$.

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 $\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{\frac{1}{9}-\frac{1}{25}} =$ P. $[\frac{1}{9}]$

2 Jepet $\sqrt{2} = x$. Gjeni $\sqrt{50}+\sqrt{32}-\sqrt{72}$. P. $[3x]$

3 $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{6}{\sqrt{6}} - \frac{7}{\sqrt{7}}$ P. $[0]$

4 $4\sqrt{8}+5\sqrt{18}-3\sqrt{72}+\sqrt{50} =$ P. $[10\sqrt{2}]$

5 Zhdukni rrënjën nga emëruesi i thyesës:

a $\frac{1}{\sqrt{6}-3}$ b $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ P. [a $-(\sqrt{6}+3)$ b $(\sqrt{7}+\sqrt{5})$]

6 $\frac{5^{-1}+3^{-1}}{5^{-1}-3^{-1}} =$ P. $[-4]$

7 $\frac{10^8-10^6}{5^8-5^6} =$ P. $[264]$

8 $3^{x+1}+3^{x+2} = k \times 3^x$ $k = ?$ P. $[12]$

9 $2^x - 2^{x+1} + 2^{x+2} = 12$ $x = ?$ P. $[2]$

10 Jepet $3^a = 25$ dhe $3^b = 5$. Gjeni $\frac{a}{b}$. P. $[2]$

11 $\frac{x^{m+2} \cdot x^{n-1}}{x^{m+n}} =$ P. $[x]$

12 $3^x + \frac{2}{3^{-x}} = 81$ $x = ?$ P. $[3]$

13 Jepet $9^x = m$. Gjeni 3^{2x+1}. P. $[3m]$

14 $\log 20 + 2\log 2 - 3\log 2 =$ P. [1]

15 $\log_9 27 =$ P. [$\frac{3}{2}$]

16 Zgjidhni ekuacionin a $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ b $2(\log x)^2 - 3\log x + 1 = 0$

P. [a $x = 0; x = 1$ b $x = 10; x = \sqrt{10}$]

Udhëzim. Zëvendësoni $3^x = t$

17 Zgjidhni ekuacionet:

a $5^x = \frac{\sqrt{5}}{25}$ b $49^x = 7\sqrt{7}$ P. [a) $-\frac{3}{2}$; b) $\frac{3}{4}$]

18 Masa e majasë dyfishohet çdo ditë. Pas sa ditëve kjo masë do të trefishohet?

P. [1,6 ditë]

19 Thjeshtoni thyesën $\frac{5^{n+1} + 5^{n-1}}{5^n - 5^{n-2}}$. P. [$\frac{65}{12}$]

20 Shprehni më thjeshtë: $\frac{20}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} =$ P. [9]

21 Thjeshtoni thyesën $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{15}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ P. [$\sqrt{5}$]

22 Jepet $x^y = \sqrt{5}$. Gjeni x^{-2y}. P. [$\frac{1}{5}$]

23 Jepet $6^{x-1} = 3^{x-2}$. Gjeni 2^x. P. [$\frac{2}{3}$]

24 Jepet $\log 20 = a$. Gjeni $\log 5$. P. [2—a]

25 Thjeshtoni shprehjen $M = \frac{1}{1-3^x} + \frac{1}{1-3^{-x}}$ P. [1]

26 Zgjidhni në bashkësinë R ekuacionin:

a $(\frac{1}{3})^x = \frac{1}{3}$ b $(\frac{1}{3})^x = 3$ c $(\frac{1}{3})^x = \frac{1}{9}$ d $(\frac{1}{3})^x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $x^{-1} = 2^{-1} + 3^{-1}$

P. [a) $x = 1$; b) $x = -1$; c) $x = 2$; d) $x = \frac{1}{2}$ e) $x = \frac{6}{5}$]

27 Treguesi hidrogjenor i tretësirës pH jepet nga formula $p\text{H} = -\log x$, ku x është përqendrimi i joneve të hidrogjenit në tretësirë.
Tretësira konsiderohet asnjanëse, kur $p\text{H} = 7$; acide, kur $p\text{H} < 7$; bazike, kur $p\text{H} > 7$. Si duhet të jetë përqendrimi i joneve të hidrogjenit në tretësirë, në mënyrë që ajo të jetë acide? Bazike? P. [a) $x > 10^7$; b) $x < 10^7$]

KREU 3

EKUACIONE. SISTEME EKUACIONESH

Ekuacioni i fuqisë së parë me një ndryshore $ax = b$ (ku a, b janë numra racionalë).

1 $a \neq 0$. Ekuacioni ka vetëm një rrënjë, $x = \frac{b}{a}$.

2 $a = 0$ dhe $b \neq 0$. Ekuacioni nuk ka asnjë rrënjë (sepse për çdo vlerë të x, ana e majtë është zero, kurse e djathta e ndryshme nga zero).

3 $a = 0$ dhe $b = 0$. Ekuacioni ka si rrënjë çdo numër.

Ekuacioni i fuqisë së dytë $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

Dallori $D = b^2 - 4ac$.

1 $D > 0$. Ekuacioni ka dy rrënjë reale të ndryshme:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a};\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

2 $D = 0$. Ekuacioni ka dy rrënjë reale të barabarta:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

3 $D < 0$, Ekuacioni nuk ka rrënjë reale.

Ushtrime të zgjidhura

1 Zgjidhni ekuacionin

$$\frac{2+x}{3} - \frac{x-1}{6} = x+2.$$

Zgjidhje

$6\left(\frac{2+x}{3} - \frac{x-1}{6}\right) = 6(x+2)$ Shumëzojmë të dyja anët e ekuacionit me 6.

$6\frac{2+x}{3} - 6\frac{x-1}{6} = 6x+12$ Thjeshtojmë.

$2(2+x) - (x-1) = 6x + 12$ Kryejmë shumëzimet.

$4 + 2x - x + 1 = 6x + 12$ Kalojmë kufizat e panjohura në anën e majtë dhe kufizat e njohura në anën e djathtë.

$\Rightarrow 2x - x - 6x = 12 - 4 - 1$ Reduktojmë.

$-5x = 7$ Pjesëtojmë të dyja anët e ekuacionit me -5.

$x = -\frac{7}{5}$ Zgjidhja e ekuacionit është $x = -\frac{7}{5}$

2 Zgjidhni ekuacionin $(x+2)^2-(x-2)^2=3x+1$

a në R; b në N.

Zgjidhje

a Ekuacioni shkruhet:

$x^2+4x+4-(x^2-4x+4)=3x+1 \Rightarrow 8x=3x+1 \Rightarrow 5x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{5}$.

Në R, ky ekuacion ka vetëm një rrënjë; numrin $\frac{1}{5}$.

b Meqë $\frac{1}{5}$ nuk i përket bashkësisë N, ekuacioni nuk ka zgjidhje në N.

3 Zgjidhni ekuacionin me ndryshore x.

a $\frac{x-m}{2}=\frac{1}{3}$ b $3(x-y)+1=x+y+10$

Zgjidhje

a Shumëzojmë të dyja anët e ekuacionit me 6.

$3(x-m)=2 \Rightarrow 3x-3m=2 \Rightarrow 3x=2+3m$ nga ku $x=\frac{2+3m}{3}$.

b $3x-3y+1=x+y+10$.

Veçojmë në anën e majtë, kufizat që përmbajnë ndryshoren x dhe kemi

$3x-x=y+10+3y-1 \Rightarrow 2x=4y+9$, nga ku $x=\frac{4y+9}{2}$.

4 Jepet $(x-3)^2+(y-5)^2=0$. Gjeni $x+y$.

Zgjidhje

Secila prej kllapave të anës së majtë të ekuacionit të dhënë është jonegative dhe shuma e tyre është zero. Kjo ndodh vetëm në rastin kur secila prej tyre është e barabartë me zero. Pra:

$(x-3)^2=0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$ dhe $(y-5)^2=0 \Rightarrow y-5=0 \Rightarrow y=5$

nga ku $x+y=3+5=8$.

5 Rrënja e ekuacionit $\frac{x+1}{2}=3$ plotëson kushtin $ax-2=28$. Gjeni a.

Zgjidhje

$\frac{x+1}{2}=3 \Rightarrow x+1=6 \Rightarrow x=5$. Duke zëvendësuar këtë vlerë të x në kushtin $ax-2=28$, gjejmë a.

$a\cdot 5-2=28 \Rightarrow 5a=30 \Rightarrow a=6$

6 Jepet $x+3=2-y=z-1$. Gjeni $(x+y)(y+z)(x-z)$.

Zgjidhje

$x+3=2-y \Rightarrow x+y=-1$; $2-y=z-1 \Rightarrow y+z=3$; $x+3=z-1 \Rightarrow x-z=-4$.

Përfundimisht $(x+y)(y+z)(x-z)=(-1)\cdot 3\cdot(-4)=12$

7 Zgjidhni ekuacionin $4x^2 - 3x + 7 = 2x^2 + x + 7$.

a në R; b në N.

Zgjidhje

Duke i kaluar të gjitha kufizat në anën e majtë, marrim ekuacionin
$4x^2 - 3x + 7 - 2x^2 - x - 7 = 0$ ose $2x^2 - 4x = 0$.
$2x(x - 2) = 0$ nga ku $2x = 0$ ose $x - 2 = 0$.

a Në R, ekuacioni ka dy rrënjë: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

b Në N, ekuacioni ka një rrënjë: $x = 2$.

8 Zgjidhni ekuacionet:

a $2x^2 - 3x + 5 = 0$ b $2x^2 - 3x + 1 = 0$ c $2x^2 - 4x + 2 = 0$

Zgjidhje

a Kemi $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$
$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 - 40 = -31$. Ekuacioni nuk ka rrënjë.

b Kemi $a = 2$, $b = -3$, $c = 1$
$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$, pra $D = 1$.

Ekuacioni ka dy rrënjë. Meqenëse $\sqrt{D} = 1$, kemi:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) - 1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3) + 1}{2 \cdot 2} = 1.$$

c Kemi $a = 2$, $b = -4$, $c = 2$.
$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$. Ekuacioni ka dy rrënjë të barabarta, $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2 \cdot 2} = 1$.

9 Pa njehsuar dallorin, zgjidhni ekuacionin $x = x^2 + \dfrac{1}{4}$.

Zgjidhje

Duke shumëzuar të dyja anët me emëruesin e përbashkët (4), marrim ekuacionin
$4x = 4x^2 + 1$ ose $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

Ky shkruhet $(2x - 1)^2 = 0$ nga ku $2x - 1 = 0$ pra $x = \dfrac{1}{2}$.

Ekuacioni ka dy rrënjë të barabarta me $\dfrac{1}{2}$.

10 Sillni ekuacionin në trajtën $f(x) \cdot g(x) = 0$ dhe pastaj zgjidheni atë.

a $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ b $x^3 + 3x^2 = 2x + 6$.

Zgjidhje

a Kemi $(x^3 - x^2) - (4x - 4) = 0 \Rightarrow x^2(x - 1) - 4(x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 - 4) = 0$.
$f(x) = x - 1$; $g(x) = x^2 - 4$.
$f(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$, pra $x = 1$.
$g(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$ pra $x = 2$ ose $x = -2$.
Bashkësia e rrënjëve të ekuacionit të dhënë është $\{-2, 2, 1\}$.

b $x^2(x + 3) = 2(x + 3) \Rightarrow (x + 3)(x^2 - 2) = 0$.

Bashkësia e rrënjëve të ekuacionit të dhënë është $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -3\}$.

11 Zgjidhni ekuacionin me ndryshore x.
$2x^2-5ax+3a^2=0 \quad (a>0)$.

Zgjidhje

Kemi një ekuacion të fuqisë së dytë. Rolin e koeficienteve a, b, c e luajnë përkatësisht $2, -5a, 3a^2$.

$D=(-5a)^2-4\cdot 2\cdot 3a^2=25a^2-24a^2=a^2. \qquad \sqrt{D}=\sqrt{a^2}=a$ sepse $a>0$.

$$x_1=\frac{5a+a}{2\cdot 2}=\frac{6a}{4}=\frac{3a}{2} \qquad x_2=\frac{5a-a}{2\cdot 2}=a.$$

12 Zgjidhni sistemin e ekuacioneve:

$$\begin{cases}3x+2y=7\\5x-y=3\end{cases}$$

Zgjidhje

Nga ekuacioni i dytë kemi $y=5x-3$.
Duke zëvendësuar në ekuacionin e parë kemi:
$3x+2(5x-3)=7 \Rightarrow 3x+10x-6=7 \Rightarrow x=1$ nga ku $y=5\cdot 1-3=2$.

Zgjidhja e sistemit është $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

13 Zgjidhni sistemin $\begin{cases}2x-4y=-10\\x^2+y^2=25\end{cases}$.

Zgjidhje

Nga ekuacioni i fuqisë së parë $2x-4y=-10$ shprehim x nëpërmjet y.
Kemi $2x-4y=-10 \Rightarrow 2x=4y-10 \Rightarrow x=2y-5$.
E zëvendësojmë këtë shprehje në ekuacionin e dytë dhe kemi
$(2y-5)^2+y^2=25 \Rightarrow 5y^2-20y=0 \Rightarrow$ pra $y^2-4y=0$.
Ky ekuacion ka dy rrënjë: $y_1=0$; $y_2=4$.
Për secilën vlerë të y, gjejmë vlerën përgjegjëse të x, sipas barazimit $x=2y-5$.
Kemi $x_1=2\cdot 0-5=-5$; $x_2=2\cdot 4-5=3$.
Sistemi ka dy zgjidhje që janë çiftet $(-5, 0)$ dhe $(3, 4)$.

14 Caktoni koeficientet a, b, në mënyrë që grafikët e funksioneve $y=ax+2$ dhe $y=bx+5$ të priten në pikën M $(1, 3)$.

Zgjidhje

Pika M, me koordinatat e saj do të vërtetojë secilin nga ekuacionet (sepse ndodhet në secilin prej grafikëve). Prandaj kemi $\begin{cases}3=a\cdot 1+2\\3=b\cdot 1+5\end{cases}$.
Nga ky sistem gjejmë $a=1$, $b=-2$.

15 Për ç'vlera të m, ekuacioni $m^2x-m=x+1$ me ndryshore x:

a ka një rrënjë të vetme; **b** nuk ka rrënjë; **c** ka si rrënjë çdo numër real?

Zgjidhje

Duke kaluar në anën e majtë të gjitha kufizat me ndryshoren x, marrim
$m^2x - x = m + 1 \Rightarrow x(m^2 - 1) = m + 1$.
Ekuacioni ka trajtën $ax = b$, ku $a = m^2 - 1$ dhe $b = m + 1$.
Shohim kur bëhet $a = 0$ d.m.th., $m^2 - 1 = 0$, pra $m^2 = 1$.
Kjo ndodh për $m = 1$ ose $m = -1$.

a Kur $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{cases}$ kemi $a \neq 0$, prandaj ekuacioni ka vetëm një rrënjë, që jepet nga barazimi $x = \frac{m+1}{m^2-1}$, d.m.th., $x = \frac{1}{m-1}$.

b Kur $m = 1$, ekuacioni ka trajtën $0 \cdot x = 2$, pra nuk ka rrënjë.

c Kur $m = -1$, ekuacioni ka trajtën $0 \cdot x = 0$, pra ka si rrënjë çdo numër real.

16 Për ç'vlera të koeficientit m, ekuacioni $mx^2 - 4x + 3 = 0$:
a ka dy rrënjë të ndryshme reale; b nuk ka rrënjë reale;
c ka dy rrënjë reale të barabarta?

Zgjidhje

a Që ekuacioni të ketë dy rrënjë reale të ndryshme, duhet e mjafton që dallori i ekuacionit të jetë pozitiv dhe $m \neq 0$.
$a = m$; $b = -4$; $c = 3$ $D = 16 - 12m$.
Pra, që ekuacioni të ketë dy rrënjë reale të ndryshme duhet e mjafton që
$\begin{cases} m \neq 0 \\ 16 - 12m > 0 \end{cases}$ d.m.th., $\begin{cases} m < \frac{4}{3} \\ m \neq 0 \end{cases}$.

b Që ekuacioni të mos ketë rrënjë reale duhet e mjafton që
$\begin{cases} D < 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$ d.m.th., $\begin{cases} 16 - 12m < 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$ pra $\begin{cases} m > \frac{4}{3} \\ m \neq 0 \end{cases}$ d.m.th., $m > \frac{4}{3}$.

c Që ekuacioni të ketë dy rrënjë reale të barabarta duhet e mjafton që
$D = 0$ d.m.th., $16 - 12m = 0$, pra $m = \frac{4}{3}$.

17 Jepet ekuacioni $x^3 + mx^2 - 5 = 0$.
a Për ç'vlerë të m ekuacioni ka si rrënjë numrin 1?
b Për vlerën e gjetur të m, gjeni dhe rrënjët e tjera të ekuacionit.

Zgjidhje

a Duhet e mjafton të vërtetohet barazimi $1^3 + m \cdot 1^2 - 5 = 0$, që nga $m = 4$.

b Marrim ekuacionin $x^3 + 4x^2 - 5 = 0$, për të cilin dihet që ka si rrënjë numrin 1. Atëherë, ana e majtë e tij plotpjesëtohet me $(x - 1)$.

Duke kryer pjesëtimin e $x^3 + 4x^2 - 5$ me $(x - 1)$ marrim
$x^3 + 4x^2 - 5 = (x - 1)(x^2 + 5x + 5)$.

Ekuacioni shkruhet $(x - 1)(x^2 + 5x + 5) = 0$.
Ekuacioni $x - 1 = 0$ ka si rrënjë numrin 1.
Ekuacioni $x^2 + 5x + 5 = 0$ ka dallor negativ, pra nuk ka rrënjë reale.
Si përfundim, ekuacioni i dhënë ka vetëm një rrënjë; numrin 1.

18 Shuma e 3 numrave të njëpasnjëshëm natyrorë është 78. Gjeni numrat.

Zgjidhje

Shënojmë numrin më të vogël me x. Numrat e tjerë do të jenë $x + 1$ dhe $x + 2$.
Shkruajmë ekuacionin: $x + (x + 1) + (x + 2) = 78$.
Zgjidhim ekuacionin. Kemi $3x + 3 = 78$, pra $3x = 75$ d.m.th., $x = 25$.
Tre numrat e kërkuar janë 25, 26, 27.
Prova: $25 + 26 + 27 = 78$.

19 Gjatësia e një drejtkëndëshi është sa trefishi i gjerësisë dhe perimetri i tij është 36 cm. Gjeni gjerësinë e drejtkëndëshit.

Zgjidhje

Shënojmë gjerësinë e drejtkëndëshit me x; atëherë gjatësia e tij është $3x$.
Formojmë ekuacionin $x + 3x + x + 3x = 36$.
Zgjidhim ekuacionin. Kemi $8x = 36$, pra $x = 4{,}5$. Gjerësia është 4,5 cm.
Prova: Kur gjerësia është 4,5 cm, gjatësia është $3 \cdot 4{,}5 = 13{,}5$ cm.
$4{,}5 + 4{,}5 + 13{,}5 + 13{,}5 = 36$ cm.

20 Një person niset në orën 16:42 drejt postës që është 6 km larg dhe arrin atje në orën 17:30. Ai bën një pjesë të rrugës me hap me shpejtësi 5 km/orë dhe pjesën tjetër me vrap me shpejtësi 10 km/orë. Sa km vrapoi ai?

Zgjidhje

Shënojmë largesën që ai vrapoi x (km); atëherë largesa e bërë me hap është $(6 - x)$ km.
Koha e vrapimit është $\frac{x}{10}$ orë; koha e ecjes me hap është $\frac{6-x}{5}$ orë.
Koha e përgjithshme e udhëtimit është 17:30 – 16:42 = 48 minuta d.m.th., $\frac{4}{5}$ orë.
Kemi ekuacionin $\frac{x}{10} + \frac{6-x}{5} = \frac{4}{5}$.
Zgjidhim ekuacionin. Duke shumëzuar të dyja anët e tij me 10, marrim
$2(6 - x) + x = 8$, pra $12 - 2x + x = 8$, pra $x = 4$.
Largesa e vrapimit është 4 km.
Prova: Koha për të vrapuar (4 km) është $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ orë.
Koha për të ecur (2 km) është $\frac{2}{5}$ orë.
Koha e përgjithshme është $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$ orë.

21 Brinjët e drejtkëndëshit A janë 7 dhe $(x + 3)$ cm.
Brinjët e drejtkëndëshit B janë $(x - 1)$ dhe $(x + 2)$ cm.
Syprina e drejtkëndëshit A është 16 cm² më e madhe se syprina e drejtkëndëshit B. Gjeni x.

Zgjidhje

Syprina e drejtkëndëshit A është $7 \cdot (x + 3)$ cm².
Syprina e drejtkëndëshit B është $(x - 1) \cdot (x + 2)$ cm².
Sipas kushtit të problemit, kemi: $(x - 1)(x + 2) + 16 = 7 \cdot (x + 3)$.
Zgjidhim këtë ekuacion.
Kemi $x^2 + 2x - x - 2 + 16 = 7x + 21 \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow (x - 7)(x + 1) = 0$
Pra $x = 7$ ose $x = -1$ (kjo nuk pranohet).

Ekuacioni bikuadrat dhe trinom

Ekuacioni $ax^4 + bx^2 + c = 0$ sillet në ekuacion të fuqisë së dytë, me zëvendësimin $x^2 = t$.
Ekuacioni $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ sillet në ekuacion të fuqisë së dytë, me zëvendësimin $x^n = t$.

22 Zgjidhni ekuacionet:
a $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b** $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

Zgjidhje

a Zëvendësojmë $x^2 = t$. Atëherë $x^4 = t^2$. Ekuacioni i dhënë merr trajtën $t^2 - 5t + 4 = 0$. Rrënjë të tij janë $t_1 = 1$ ose $t_2 = 4$ nga ku $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ ose $x^2 = 4$ nga ku $x = \pm 2$.
Ekuacioni i dhënë ka 4 rrënjë: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$; $x_4 = 2$
b Zëvendësojmë $x^3 = t$. Atëherë $x^6 = t^2$. Ekuacioni i dhënë merr trajtën $t^2 - 9t + 8 = 0$. Rrënjë të tij janë $t_1 = 1$ ose $t_2 = 8$ nga ku $x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$ ose $x^3 = 8$ nga ku $x = 2$.
Ekuacioni i dhënë ka 2 rrënjë: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

23 Zgjidhni ekuacionin $18x^{-4} + 7x^{-2} - 1 = 0$.

Zgjidhje

Duke shënuar $x^{-2} = t$,ekuacioni merr trajtën $18t^2 + 7t - 1 = 0$.

Dallori i këtij ekuacioni është $D = 7^2 - 4 \cdot 18 \cdot (-1) = 121$ nga ku $\sqrt{D} = 11$.

Marrim $t_1 = \frac{11 - 7}{2 \cdot 18} = \frac{1}{9}$; $t_2 = \frac{-7 - 11}{2 \cdot 18} = -\frac{1}{2}$. Kështu,

$x^{-2} = \frac{1}{9} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$ ose $x^{-2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = -2$, i cili nuk ka zgjidhje.

Ekuacioni ka dy rrënjë 3 ose -3.

24 Shpejtësia e lundrimit të anijes në ujë të qetë është 50 km/orë. Për të njëjtën rrugë prej 60 km, kur anija lundron kundër rrymës i duhet një kohë 0,5 orë më e madhe sesa kur lundron sipas rrymës. Sa ka qenë shpejtësia e rrymës?

Zgjidhje

Shënojmë me x km/orë shpejtësinë e rrymës ($0 < x < 50$). Kur anija lundron kundër rrymës, shpejtësia e lëvizjes së saj është $50 - x$, dhe koha e lundrimit është $\frac{60}{50-x}$ orë.

Kur anija lundron sipas rrymës, shpejtësia e lëvizjes së saj është $50 + x$, dhe koha e lundrimit është $\frac{60}{50+x}$. Sipas kushtit të problemës, kemi

$$\frac{60}{50-x} = \frac{60}{50+x} + \frac{1}{2}$$

Duke shumëzuar të dyja anët me emëruesin e përbashkët, pas thjeshtimeve marrim

$120(50 + x) = 120(50 - x) + (50 - x)(50 + x)$

$6000 + 120x = 6000 - 120x + 2500 - x^2$ d.m.th., $x^2 + 240x - 2500 = 0$.

Ky ekuacion ka dy rrënjë: $x_1 = -250$; $x_2 = 10$.

Për problemën pranohet vetëm $x_2 = 10$ km/orë.

Përgjigje

Shpejtësia e rrjedhës është 10 km/orë.

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Zgjidhni ekuacionet:

a $\frac{x-3}{4} = \frac{x+5}{5}$ b $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{3x}{4} + \frac{5x}{6} - 6$

c $(x + 2)^2 - (x - 2)^2 = 2x - 1$ d $\frac{2x-1}{3} - \frac{4-x}{2} - x = 1 + \frac{x-3}{6}$

P. [a) $x = 35$; b) $x = 8$; c) $x = -2$ d) s'ka zgjidhje]

2 Zgjidhni ekuacionet e mëposhtme me të panjohur x.

a $ax - 3x - 1 = 4 - 2x$ b $x - a = 3(x - b)$

c $x + \frac{x}{a} = b$ d $\frac{a+x}{b} - 2 = \frac{x-b}{a}$ $(a \neq b)$

P. [a) $x = \frac{3a+5}{a+2}$; b) $x = \frac{3b-a}{2}$; c) $x = \frac{ab}{a+1}$; d) $b - a$]

3 Për ç' vlera të t shprehjet $\frac{4t-9}{5} + 3$ dhe $\frac{9+5t}{6}$ janë të barabarta? **P. [-9]**

4 Ekuacioni $\frac{3x-1}{5} + x = \frac{x}{2} + a$ ka rrënjë $x = 2$. Gjeni a. **P. [$a = 2$]**

5 Ekuacioni $\frac{3x+4}{2}+\frac{x-5}{3m}=\frac{2x+1}{5m}+3$, ka rrënjë $x=2$. Gjeni m. P. [$m=1$]

6 Jepet $y=\frac{2x-1}{x-1}+2$. Shprehni x me anën e y. P. [$\frac{y-3}{y-4}$]

7 Për ç'vlera të m, ekuacioni $m^2x+m=9x-3$ me ndryshore x:

a ka një rrënjë të vetme; b nuk ka rrënjë; c ka si rrënjë çdo numër real.

P. [a) $m \neq \pm 3$; b) $m=3$; c) $m=-3$]

8 Zgjidhni sistemet e ekuacioneve.

a $\begin{cases}3x+2y=12\\5x-3y=1\end{cases}$ b $\begin{cases}5x+6y=13\\7x+18y=-1\end{cases}$

P. [a) $x=2$; $y=3$; b) $x=5$; $y=-2$]

9 Gjeni k dhe b, në mënyrë që grafiku i ekuacionit $y=kx+b$ të kalojë nga pikat $(1, -3)$ dhe $(-1, -7)$. P. [$k=2$; $b=-5$]

10 Ekuacioni $x^2+(m-1)x+(m-2)=0$ ka dy rrënjë të barabarta. Gjeni m. P. [3]

11 Masat e këndeve të brendshme të një trekëndëshi janë të përpjesshme me numrat 2, 3 dhe 5. Gjeni masën e këndit më të vogël të trekëndëshit.

P. [36°]

12 Shkruani një sistem me dy ekuacione të fuqisë së parë me dy ndryshore, zgjidhja e të cilit të jetë çifti (2, 1).

13 Zgjidhni ekuacionet e mëposhtme duke plotësuar katrorin e plotë:

a $x^2+6x+5=0$ b $4x^2+4x-15=0$ c $x^2+x-\frac{3}{4}=0$

14 Zgjidhni ekuacionet:

a $\frac{x^2+3}{6}-\frac{x+4}{3}=5$ b $2x^2-5mx+3m^2=0$ $(m>0)$

P. [$x=7$; $x=-5$; b) $x=m$; $x=\frac{3}{2}m$]

15 Gjeni pikat e prerjes së parabolës $y=6x^2-5x+1$ me boshtin e abshisave.

P. [$\left(\frac{1}{2},0\right)$; $\left(\frac{1}{3},0\right)$]

16 Gjeni pikat e prerjes së parabolave $y=2x^2-5x+1$ dhe $y=x^2-x-2$.

P. [(1, −2); (3, 4)]

17 Zgjidhni sistemet e ekuacioneve:

a $\begin{cases}2x^2+y^2=6\\y=x+1\end{cases}$ b $\begin{cases}x^2+y^2=5\\y=x-3\end{cases}$

P. [a) $x=1$; $y=2$ ose $x=-\frac{5}{3}$; $y=-\frac{2}{3}$ b) $x=2$; $y=-1$ ose $x=1$; $y=-2$]

18 Gjeni pikat e përbashkëta të rrethit $x^2 + y^2 = 10$ dhe drejtëzës $y = x - 2$.
P. [(3, 1); (−1, −3)]

19 Syprina e një kompesatoje në formë drejtkëndore është 4500 cm². Prej saj pritet katrori më i madh i mundshëm. Pjesa e mbetur ka gjatësinë 120 cm. Gjeni brinjën e katrorit.
P. [30 cm]

20 Në tabelë u shkrua një numër. Nxënësi i parë e rriti atë me 23, ndërsa nxënësi i dytë e zvogëloi me 1. Rezultati i nxënësit të parë është 7 herë më i madh se rezultati i nxënësit të dytë. Cili është ky numër?
P. [5]

21 Gjeni dy numra të njëpasnjëshëm, të tillë që prodhimi i tyre të jetë 1,5 herë më i madh se katrori i numrit më të vogël.
P. [2 dhe 3]

22 Zgjidhni ekuacionet:

a $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

P. [a) $x = \pm 2; x = \pm 3$ b) $x = 1; x = 2$]

23 Jepet $x > 0$ dhe $x^2 + \frac{1}{x^2} = 5$. Gjeni $x + \frac{1}{x}$.
P. [$\sqrt{7}$]

Udhëzim: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x\frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

24 Zgjidhni ekuacionin $e^x + 2e^{-x} = 3$.
P. [$x = 0; x = \ln 2$]

25 Zgjidhni ekuacionin $2(x^2 - 3)^2 - (x^2 - 3) - 1 = 0$.

Udhëzim: Zëvendësoni $x^2 - 3 = t$.
P. [$x = \pm 2; x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$]

KREU 4

INEKUACIONE. SISTEME INEKUACIONESH

Vetitë e mosbarazimeve

1 $a > b \Rightarrow b < a$

2 $a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$

3 $a > b \Rightarrow ac > bc$ dhe $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ në qoftë se $c > 0$

4 $a > b \Rightarrow ac < bc$ dhe $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ në qoftë se $c < 0$

5 $a > b \Rightarrow a^n > b^n \quad n \in \mathrm{N}$

6 $a > b \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \quad n \in \mathrm{N}$

Njohuri teorike shtesë

Shenja e binomit të fuqisë së parë me një ndryshore $y = ax + b$

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Studimi i shenjës së binomit skematikisht tregohet në tabelën e mëposhtme:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Shenja e binomit $y = ax + b$	Shenja e kundërt e a	0	Shenja e a

Tabela 1

Shenja e trinomit të fuqisë së dytë $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

$D > 0$	x		x_1		x_2	
	y	shenja e a	0	shenja e $(-a)$	0	shenja e (a)
$D = 0$	x		$x_1 = x_2$			
	y	shenja e a	0	shenja e a		
$D < 0$	x					
	y	shenja e a				

Tabela 2

Ushtrime të zgjidhura

1 Zgjidhni inekuacionin $(x-1)^2-4<x^2-4(x-1)$.

a në R; b në N.

Zgjidhje

$(x-1)^2-4<x^2-4(x-1)$	Kryejmë veprimet në secilën anë.
$(x^2-2x+1)-4<x^2-4x+4$	Reduktojmë.
$x^2-2x-3<x^2-4x+4$	Të panjohurat në njërën anë, të njohurat në anën tjetër.
$x^2-2x-x^2+4x<4+3$	Reduktojmë.
$2x<7$	Pjesëtojmë me 2.
$x<\frac{7}{2}$	

Përgjigje a Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit në R është $A=\left]-\infty,\ \frac{7}{2}\right[$.

b Bashkësia e zgjidhjeve të këtij inekuacioni në N është bashkësia e numrave natyror që plotësojnë kushtin $x<\frac{7}{2}$, d.m.th., është bashkësia e përbërë nga numrat 1, 2, 3.

2 Zgjidhni inekuacionin e dyfishtë $3<1-2x<7$.

Zgjidhje

$3<1-2x<7$	U zbresim 1 të 3 gjymtyrëve.
$3-1<-2x<7-1$	Reduktojmë.
$2<-2x<6$	Pjesëtojmë me (-2) duke ndërruar kahet.
$-1>x>-6$	
$-6<x<-1$	

Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit është $]-6,-1[$

3 Zgjidhni inekuacionet:

a $\frac{x-5}{2}-\frac{x}{5}>\frac{x}{10}+2$ b $\frac{2x-1}{4}>\frac{x+3}{2}+1$

Zgjidhje

a

$$\frac{x-5}{2}-\frac{x}{5}>\frac{x}{10}+2\Rightarrow 5(x-5)-2x>x+20$$
$$\Rightarrow 5x-25-2x>x+20\Rightarrow 3x-25>x+20$$
$$\Rightarrow 3x-x>20+25\Rightarrow 2x>45$$
$$\Rightarrow x>\frac{45}{2}$$

b

$$\frac{2x-1}{4}>\frac{x+3}{2}+1\Rightarrow 2x-1>2(x+3)+4\Rightarrow 2x-1>2x+6+4$$
$$\Rightarrow 2x-2x>6+4+1$$
$$\Rightarrow 0\cdot x>11$$

Për çdo vlerë të x, ana e majtë del zero, e cila nuk është më e madhe se 11. Rrjedhimisht inekuacioni nuk ka zgjidhje.

4 Vërtetoni mosbarazimet:

a $(x+y)(x+y) \geq 2xy$ b $(x+3y)^2 \geq 12xy$.

Zgjidhje

a Mjafton të vërtetojmë që diferenca $(x+y)(x+y) - 2xy$ është ≥ 0.
Kemi $(x+y)(x+y) - 2xy = x^2 + 2xy + y^2 - 2xy = x^2 + y^2 \geq 0$, sepse $x^2 \geq 0$ dhe $y^2 \geq 0$.

b Mjafton të vërtetojmë që diferenca $(x+3y)^2 - 12xy$ është ≥ 0.
Kemi $(x+3y)^2 - 12xy = x^2 + 6xy + 9y^2 - 12xy = x^2 - 6xy + 9y^2 = (x-3y)^2 \geq 0$.

5 Zgjidhni inekuacionin $\frac{2x-1}{3} < 0$.

a në R; b në $]-\infty, 0[$.

Zgjidhje

$\frac{2x-1}{3} < 0 \Rightarrow 2x - 1 < 0 \cdot 3 \Rightarrow 2x-1 < 0 \Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$.

a Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit në R është $A = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$.

b Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit në $]-\infty, 0[$ është prerja e bashkësisë A me $]-\infty, 0[$ d.m.th., është $]-\infty, 0[$.

6 Për ç'vlera të x nga R, vlera e funksionit $y = \frac{2x-5}{3}$ është më e madhe se vlera e funksionit $y = \frac{x}{2}$?

Zgjidhje

Vlerat e kërkuara të x janë zgjidhjet e inekuacionit $\frac{2x-5}{3} > \frac{x}{2}$.

Zgjidhim këtë inekuacion duke shumëzuar fillimisht të dyja anët me 6.

Kemi $6\frac{2x-5}{3} > 6\frac{x}{2} \Rightarrow 2(2x-5) > 3x$ që nga $x > 10$.

7 Për ç'vlera të m, ekuacioni $(m-4)x = m(6+x) - 12$ ka:
a rrënjë pozitive; b rrënjë negative?

Zgjidhje

$(m-4)x = m(6+x) - 12 \Rightarrow mx - 4x = 6m + mx - 12 \Rightarrow x = \frac{12-6m}{4}$

a $\frac{12-6m}{4} > 0 \Rightarrow 12 - 6m > 0 \Rightarrow m < 2$

b $\frac{12-6m}{4} < 0 \Rightarrow 12 - 6m < 0 \Rightarrow m > 2$

Përgjigje: Ekuacioni i dhënë ka rrënjë pozitive për $m < 2$ dhe rrënjë negative për $m > 2$.

8 Për ç'vlera të m, ekuacioni $2(x + m) = -7$ ka rrënjë më të vogël se -4?

Zgjidhje

$$2(x+m) = -7 \Rightarrow 2x + 2m = -7 \quad \Rightarrow x = \frac{-7-2m}{2}$$

$$\frac{-7-2m}{2} < -4 \Rightarrow -7-2m < -8 \Rightarrow -2m < -1 \Rightarrow m > \frac{1}{2}$$

Përgjigje: Ekuacioni i dhënë ka rrënjë më të vogël se -4 për $m > \frac{1}{2}$.

9 Gjeni bashkësinë e vlerave të ndryshores x, për të cilat ka kuptim shprehja:

a $\sqrt{x-3} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ b $\sqrt{x+5} - (3-x)^{\frac{1}{2}}$.

Zgjidhje

a Bashkësia e kërkuar është ajo e vlerave të x që plotësojnë njëkohësisht kushtet $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$.

Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të parë është $A_1 = [3, +\infty[$.

Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të dytë është $A_2 =]0, +\infty[$.

Bashkësia e zgjidhjeve të sistemit është $A_1 \cap A_2 = [3, +\infty[$.

b Kemi të bëjmë me shprehjen $\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x}$. Bashkësia që kërkojmë është ajo e vlerave të x që plotësojnë njëherësh kushtet $\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases}$ d.m.th., $\begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 3 \end{cases}$.

Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të parë është $A_1 = [-5, +\infty[$.

Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të dytë është $A_2 =]-\infty, 3]$.

Bashkësia e zgjidhjeve të sistemit është $A_1 \cap A_2 = [-5, 3]$.

10 Zgjidhni shkurt inekuacionin e dyfishtë $5 < \frac{1-x}{2} < 10$.

Zgjidhje

Përpiqemi të shfaqim në gjymtyrën e mesit ndryshoren x. Duke shumëzuar të tre gjymtyrët me 2 marrim $10 < 1 - x < 20$; shumëzojmë me (-1) dhe marrim $-10 > x - 1 > -20$;
u shtojmë të tre gjymtyrëve 1 dhe kemi $-9 > x > -19$; ndryshe $-19 < x < -9$.

Përgjigje
Bashkësia e zgjidhjeve është $]-19, -9[$.

11 Vërtetoni me tri mënyra të ndryshme vetinë:

Në qoftë se $a > b$ dhe a, b kanë shenja të kundërta atëherë $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Zgjidhje

Mënyra I

Shohim diferencën $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$. Kemi $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$.

Por b $- a < 0$ (sepse $a > b$) dhe $a \cdot b < 0$) sepse a, b kanë shenja të kundërta). Prandaj

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$, d.m.th., $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

Mënyra II

Meqenëse a, b kanë shenja të kundërta dhe $a > b$, kemi $a > 0$ dhe $b < 0$. Atëherë $\frac{1}{a}>0$ dhe $\frac{1}{b}<0$, prandaj $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

Mënyra III

Pjesëtojmë të dyja anët e mosbarazimit të dhënë $a > b$ me numrin negativ $a \cdot b$ (është negativ sepse a, b kanë shenja të kundërta). Marrim $\frac{a}{ab}<\frac{b}{ab}$ d.m.th., $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$, pra $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

12 Funksioni $y = ax + 3$ merr vlerë negative për $x = 2$. Vërtetoni që $a<-\frac{3}{2}$.

Zgjidhje

Vlera e funksionit për $x = 2$ është $a \cdot 2 + 3$. Sipas kushtit kemi $a \cdot 2 + 3 < 0$, që nga $a<-\frac{3}{2}$.

13 Për ç'vlera të $x \in R$:

a Vlerat e funksionit $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x-9$ janë pozitive?

b Vlerat e funksionit $y = \log_3(x-1)$ janë negative?

Zgjidhje

a $\left(\frac{1}{3}\right)^x-9\ge 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x \ge 9 \Rightarrow 3^{-x}\ge 3^2 \Rightarrow -x\ge 2 \Rightarrow x\le -2$.

b Kemi $\log_3(x-1)<0 \Rightarrow \log_3(x-1)<\log_3 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1<1 \\ x-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>1 \end{cases}$.

Pra, $1 < x < 2$..

14 Për ç'vlera të x ka kuptim shprehja $\sqrt{\frac{x^2+2}{5-x}}$?

Zgjidhje

$\frac{x^2+2}{5-x}\ge 0$. Meqë numëruesi është gjithmonë pozitiv, mosbarazimi i fundit plotësohet kur $5 - x > 0 \Rightarrow x < 5$

15 Numëruesit dhe emëruesit të thyesës $\frac{3}{4}$ u shtojmë të njëjtin numër pozitiv c.

Vërtetoni që thyesa e përftuar është më e madhe se ajo e para.

Vërtetim

Thyesa e re është $\frac{3+c}{4+c}$. Për të treguar që ajo është më e madhe se $\frac{3}{4}$, mjafton të tregojmë që $\frac{3+c}{4+c}-\frac{3}{4}$ është pozitive.

Kemi $\frac{3+c}{4+c}-\frac{3}{4}=\frac{4(3+c)-3(4+c)}{4(4+c)}=\frac{c}{4(4+c)}$.

Por $c>0$ dhe $4(4+c)>0$, prandaj $\frac{c}{4(4+c)}$ është pozitive.

16 Në mesditë temperatura ishte 20°C. Deri në orën 16^{00}, temperatura u rrit 1°C për çdo orë.

a Gjeni temperaturën x orë pas mesditës.

b Për ç'vlera të x nga [12, 16] temperatura ka qenë mbi 25°C.

Zgjidhje

a x orë pas mesditës temperatura është ngritur me $x\cdot 1^0=x^0$ dhe është bërë $20+x$ (gradë Celsius).

b Kërkojmë se kur temperatura është më e madhe se 25°C.

Kjo ndodh për $20+x>25$ d.m.th., $x>5$.

Meqenëse x paraqet numrin e orëve mbi 12, kemi që temperatura është mbi 25°C për orën mbi 17, pra për asnjë orë nga [12, 16].

17 Do të blihen disa libra me çmim 200 lekë dhe 10 fletore me çmim 100 lekë. Sa është numri më i madh i librave që mund të blihen, duke ditur që nuk mund të shpenzojmë më tepër se 1750 lekë?

Zgjidhje

Shënojmë me x numrin e librave që blejmë ($x\in N$).

Shpenzimet për librat janë $200x$, për fletoret $10\cdot 100$.

Shpenzimet gjithsej janë $200x+1000$.

Kërkohet vlera më e madhe e x që vërteton inekuacionin

$200x+1000\le 1750$.

Kemi $200x\le 750 \Rightarrow x\le 3{,}75$.

Vlera më e madhe e $x\in N$ që vërteton këtë inekuacion është $x=3$.

18 Zgjidhni sistemin e inekuacioneve:

$$\begin{cases}4(x-2)-x\ge 1\\ 2-3(x-2)\ge -13\end{cases}$$

Zgjidhje

Gjejmë bashkësinë e zgjidhjeve për secilin inekuacion.

$4(x-2)-x \geq 1 \Rightarrow 4x-8-x \geq 1 \Rightarrow x \geq 3$ $\qquad A_1 = [3, +\infty[$

$2-3(x-2) \geq -13 \Rightarrow 2-3x+6 \geq -13 \Rightarrow x \leq 7$ $\qquad A_2 =]-\infty, 7]$

Bashkësia e zgjidhjeve të sistemit është $A = A_1 \cap A_2 = [3, 7]$

Inekuacione të fuqisë së dytë me një ndryshore

$ax^2+bx+c \geq 0; \quad ax^2+bx+c \leq 0 \qquad (a \neq 0)$

Për zgjidhjen e inekuacionit të fuqisë së dytë me një ndryshore mbështetemi në studimin e shenjës së trinomit ax^2+bx+c.

19 Zgjidhni inekuacionin $(2x-4)(5-x) < 0$.

Zgjidhje

Studiojmë shenjën e secilit prej binomeve $2x-4$ dhe $5-x$ dhe rezultatet i pasqyrojmë në tabelën 3.

Faktori i parë: $2x-4$

Rrënja: $2x-4=0 \Rightarrow x=2$

$a=2$ pra $a>0$

Faktori i dytë: $5-x$

Rrënja: $5-x=0 \Rightarrow x=5$

$a=-1$, pra $a<0$

x	$-\infty$	2		5	$+\infty$
$2x-4$	$-$		$+$		$+$
$5-x$	$+$	0	$+$		$-$
$(2x-4)(5-x)$	$-$		$+$	0	$-$
Inekuacioni	V	0		0	V

Tabela 3

Rreshti i fundit i tabelës na tregon se inekuacioni vërtetohet për $x<2$ ose $x>5$. Pra, bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit në R përbëhet prej dy pjesësh:

$]-\infty, 2[$ ose $]5, +\infty[$.

20 Studioni shenjën e trinomit.

a $y=x^2-6x+5$ $\qquad$ **b** $y=-3x^2+6x-3$ $\qquad$ **c** $y=x^2+x+4$

Zgjidhje

a Kemi $a=1$ dhe $D=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 5=16$. Trinomi ka dy rrënjë reale të ndryshme: $x_1=1$; $x_2=5$.

Shenja e këtij trinomi është dhënë në tabelën 4.

x		1		5	
y	$+$	0	$-$	0	$+$

Tabela 4

b Kemi $a=-3$ dhe $D=(+6)^2-4(-3)(-3)=0$. Trinomi ka dy rrënjë të barabarta $x_1=x_2=1$.

Shenja e trinomit është dhënë në tabelën 5.

x		1	
y	$-$	0	$-$

Tabela 5

Pra, trinomi është negativ për çdo vlerë të $x \neq 1$.

c $y = x^2 + x + 4$.

Kemi $a = 1$ dhe $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -15 < 0$.

Për çdo vlerë të x trinomi është pozitiv.

x	
y	+

Tabela 6

21 Zgjidhni inekuacionet:

a $x^2 - 3x < 0$ b $-x^2 + 8x - 16 \leq 0$

Zgjidhje

a Kemi $a = 1$. Gjejmë rrënjët e trinomit:

$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$.

x		0		3	
y	+	0	–	0	+

Tabela 7

Bashkësia e zgjidhjeve të këtij inekuacioni është]0, 3[.

b Kemi $a = 1$ dhe $D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$. Trinomi ka dy rrënjë të barabarta $x_1 = x_2 = 4$.

x		4	
y	–	0	–

Tabela 8

Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit është bashkësia R.

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Në relacionet e mëposhtme, dalloni ato që janë të vërteta (V) dhe ato që janë të gabuara (G).

		V	G
a	$m < n \Rightarrow 3m < 3n$	☐	☐
b	$m < n \Rightarrow m^2 < n^2$	☐	☐
c	$a < b$ dhe $c < d \Rightarrow a + c < b + d$	☐	☐
d	$m < n \Rightarrow -5m < -5n$	☐	☐
e	$a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	☐	☐
f	$m > n \Rightarrow m - 100 > n - 100$	☐	☐
g	$m < n \Rightarrow -3m < -3n$	☐	☐
h	$m > n \Rightarrow m^{-1} < n^{-1}$	☐	☐

2 Zgjidhni inekuacionet:

a) $4x - 3 < 2x + 7$ b) $3(x - 2) - 5 > 4x$

P. [a) $x < 5$; b) $x < -11$]

3 Zgjidhni inekuacionet:

a $0{,}6x + 0{,}07 > 2{,}5x - 0{,}12$ b $\frac{5-x}{3} + \frac{x-1}{2} < 0$

c $2x - \frac{3(x-2)}{4} < 9$ d $\frac{2x-0{,}75}{4} < \frac{0{,}125-x}{8}$

P. [a) $x < 0{,}1$; b) $x < -7$; c) $x < 6$; d) $x < 0{,}325$]

4 Për ç'vlerë të ndryshores x:

a Shprehja $\frac{5x-1}{3}$ është më e vogël se 3.

b Shprehja $\frac{x+2}{4}$ është më e madhe se $\frac{x-1}{3}$.

c Shprehja $\frac{2x-1}{8} - \frac{x}{2}$ është më e vogël se 2.

P. [a) $x < 2$; b) $x < 10$; c) $x > \frac{17}{2}$]

5 Gjeni numrin e plotë më të vogël që vërteton inekuacionin $16(0{,}7 - x) < 1 - 5x$.

P. [$x = 1$]

6 Gjeni numrin e plotë më të madh që vërteton inekuacionin $2{,}7-(4{,}2 - 1{,}2x) < 6{,}3$.

P. [$x = 6$]

7 Zgjidhni inekuacionin $4{,}2(3{,}3 - 0{,}8x) < 7x + 1{,}4$ për $x \in N$. P. [$x = 2, 3, 4, \ldots$]

8 Për ç'vlera të m, ekuacionet e mëposhtme kanë:

a zgjidhje pozitive; b zgjidhje negative.

i $7 - 3x = 8x + m$ ii $(3 - x)(x + m) = (5 - x)(x + 2m) + mx - 14$

iii $4x(m + x) = (4x + 1)(x + 3m) - 8mx - 9$

P. [i a) $m < 7$; b) $m > 7$ ii a) $m < 2$; b) $m > 2$ iii a) $m < 3$; b) $m > 3$]

9 Për ç'vlera të k ekuacioni:

a $3 - k = 4x - 8$ ka rrënjë më të vogël se 3.

b $4(x - k) = 5$ ka rrënjë më të vogël se 4.

c $2(x + 3k) = -3$ ka rrënjë më të madhe se -2.

P. [a) $k > -1$ b) $k < \frac{11}{4}$ c) $k < \frac{1}{6}$]

10 Zgjidhni inekuacionet e dyfishta:

a $5 < 3x-1 \leq 8$ b $-1 \leq 7-2x < 1$

P. [a) $2 < x \leq 3$; b) $3 \leq x < 4$]

11 Për ç'vlera të x:

a shprehja $(2x - 3)$ është më e madhe se -3, dhe më e vogël se 3.

b shprehja $\frac{2x}{3} - 2$ është më e madhe se -4, dhe më e vogël se 4.

P. [a) $0 < x < 3$; b) $-3 < x < 9$]

12 Për cilat vlera të plota të x, shprehja $S=\sqrt{2x-15}+\sqrt{37-3x}$ ka kuptim?

P. [8, 9, 10, 11, 12]

13 Gjeni numrin e plotë më të vogël që vërteton inekuacionin e dyfishtë:

$$\frac{1}{9}<\frac{5x-1}{18}<\frac{1}{2}$$

P. [$x=0$]

14 Gjeni numrin e plotë më të madh që vërteton inekuacionin e dyfishtë:

$$\frac{5}{18}<\frac{4x+3}{36}<\frac{1}{2}$$

P. [$x=3$]

15 Gjeni:

a vlerën më të vogël të funksionit $f(x)=x^2-8x+1$.

b Vlerën më të madhe të funksionit $f(x)=-x^2+6x-2$.

P. [a) –15; b) 7]

16 Me çfarë shpejtësie x duhet të ecë mesatarisht një makinë, në mënyrë që rrugën prej 150 km ta përshkojë për më pak se 3 orë?

P. [$x>50$]

17 Gjatësia e një drejtkëndëshi është 12 cm. Sa duhet të jetë gjerësia x, në mënyrë që syprina e tij të jetë më e vogël se 80 cm^2?

P. [$x<6{,}6$]

18 Jepet thyesa $\frac{2}{3}$. Çfarë numri natyror n duhet t'i shtojmë gjymtyrëve të tij, në mënyrë që vlera e saj të bëhet më e madhe se $\frac{10}{13}$?

P. [$n\geq 2$]

19 Jepet $a<b$. Provoni që $a<\frac{a+b}{2}<b$.

20 Zgjidhni sistemin e inekuacioneve:

a $\begin{cases}7x-1<0\\2x+8>20\end{cases}$ b $\begin{cases}7x+4\geq 5x-18\\3x-1\leq 20-4x\end{cases}$

P. [a) s'ka zgjidhje; b) $-11\leq x\leq 3$]

21 Zgjidhni inekuacionet:

a $x^2-4x+4\leq 0$ b $-x^2+6x-8>0$ c $-x^2+x-8<0$

P. [a) $x=2$ b) $2<x<4$ c) $x\in\mathbb{R}$]

22 Zgjidhni inekuacionet:

a $(x^2+2)(x^2-1)<0$ b $x^2-2x+8<0$ c $\frac{1}{x}<1$

P. [a) $-1<x<1$ b) s'ka zgjidhje; c) $x<0\cup x>4$]

23 Renditni nga më i vogli te më i madhi numrat $a=\frac{5}{8x}; b=\frac{11}{9x}; c=\frac{19}{15x}$ ku $x>0$.

P. $[a<b<c]$

24 Jepet inekuacioni $x^2-x<20$. Gjeni vlerën më të madhe $x\in\mathbb{N}$, e cila vërteton këtë inekuacion.

P. $[x=4]$

25 Tregoni që mosbarazimi $\frac{x^2-6x+9}{x+1}\le 0$ vërtetohet vetëm për një vlerë të x. Cila është ajo?

P. $[x=3]$

26 Gjeni bashkësinë e vlerave të lejuara të x në shprehjet:

a $y=\log(x^2-4x-5)$ b $y=\sqrt{4x^2-4x+1}$

c $y=\frac{5}{\sqrt{7x-x^2-10}}$ d $y=\sqrt{x^2+5x+8}$

P. [a) $]-\infty,-5[\cup]1,+\infty[$; b) R; c) $]2,5[$ d) ϕ]

27 Sa zgjidhje në bashkësinë e numrave natyrorë ka inekuacioni $\frac{x^2-7x+6}{(x-3)^2}<0$.

P. [3]

28 Renditni nga më i vogli te më i madhi numrat $x=-0{,}13$; $y=-0{,}135$; $z=-0{,}1035$.

P. $[y<x<z]$

29 Zgjidhni inekuacionet:

a $\frac{1}{x^2}>\frac{1}{4}$ b $\frac{2-x}{x-1}\ge 0$ c $\frac{2x}{x-3}>\frac{1}{2}$.

P. [a) $]-2,0[\cup]0,2[$; b) $]1,2]$; c) $]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$]

30 Jepet $x<0<y$. Cili nga numrat e mëposhtëm mund të jetë i barabartë me zero?

A) $x-y$ B) $y-x$ C) x^2+y^2 D) x^3+y^3

P. [D]

KREU 5

FUNKSIONI DHE GRAFIKU I TIJ

- Relacioni f me bashkësi fillimi X dhe bashkësi mbarimi Y quhet funksion kur çdo element i X-it lidhet me një element të vetëm të Y.
- Për funksionin $f: X \to Y$, bashkësia e fytyrave quhet bashkësia e përcaktimit e funksionit.

1 Funksioni linear (drejtëza) $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ (fig. 5.1)/a,b

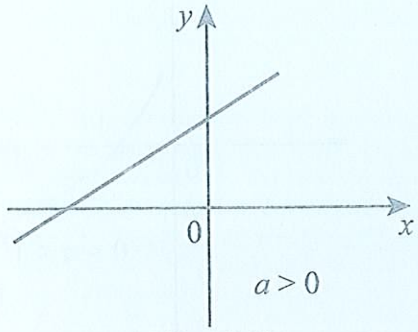


Fig. 5.1/a

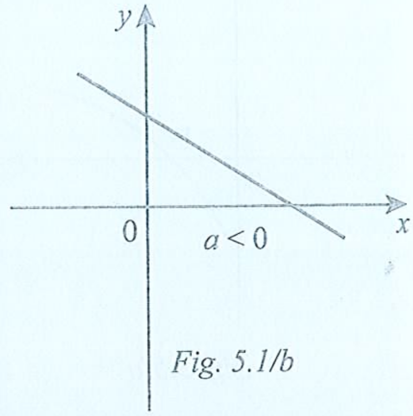


Fig. 5.1/b

2 Funksioni i fuqisë së dytë $y = ax^2 + bx + c$ (parabola) (fig. 5.2)/a,b

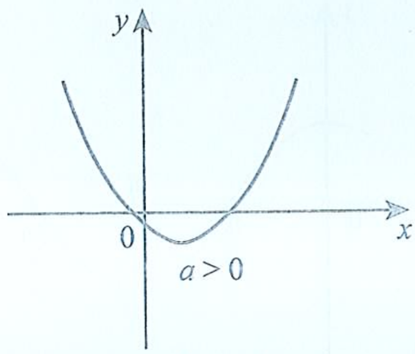


Fig. 5.2/a

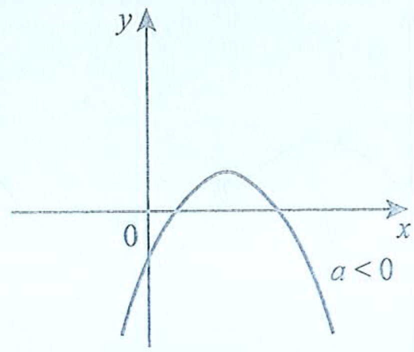


Fig. 5.2/b

3 Funksioni përpjesëtimor i zhdrejtë $y = \frac{a}{x}$ (hiperbola) (fig. 5.3)/a,b

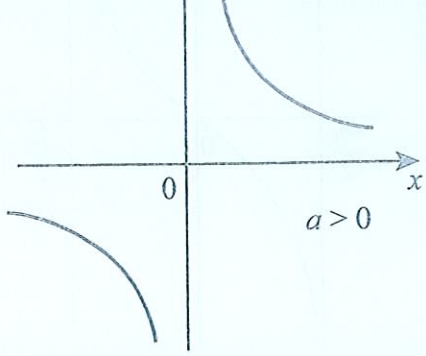


Fig. 5.3/a

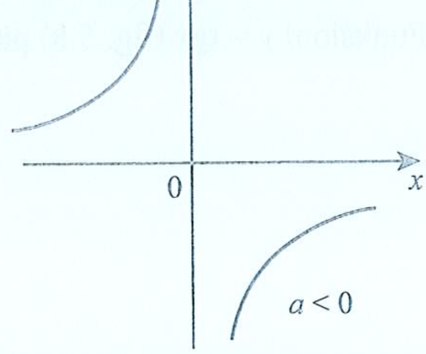


Fig. 5.3/b

4 Funksioni eksponencial $y = a^x$ (fig. 5.4)/a,b

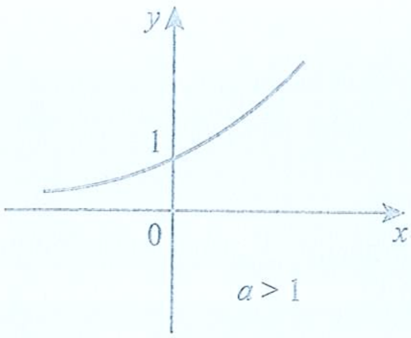


Fig. 5.4/a

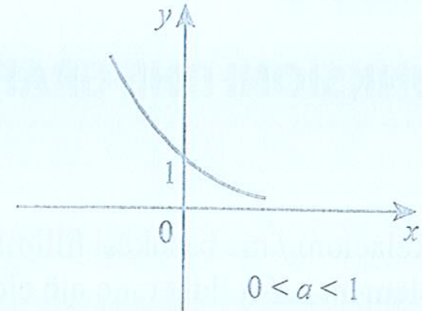


Fig. 5.4/b

5 Funksioni logaritmik $y = \ell og_a x$ (fig. 5.5)/a,b

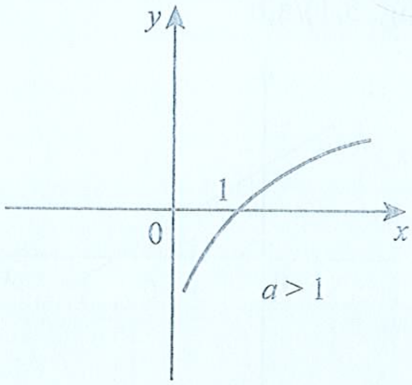


Fig. 5.5/a

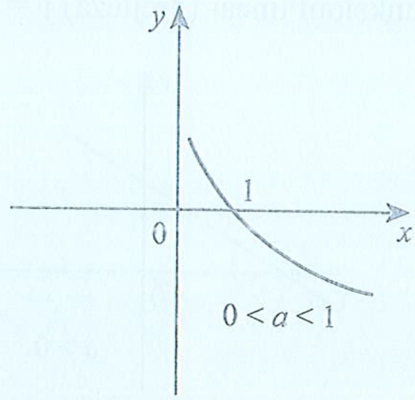


Fig. 5.5/b

6 Funksioni $y = \sin x$ (fig. 5.6, për $0 \le x \le 2\pi$)

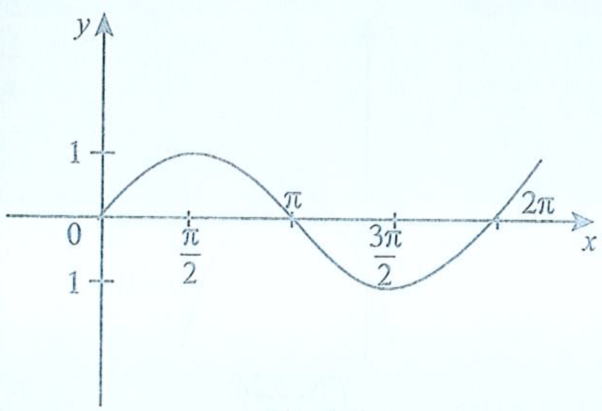


Fig. 5.6

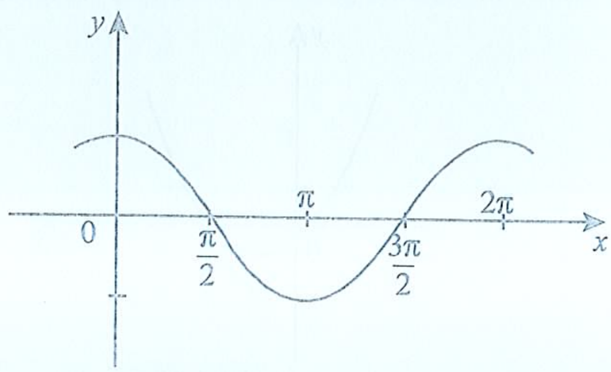


Fig. 5.7

7 Funksioni $y = \cos x$ (fig. 5.7, për $0 \le x \le 2\pi$)

8 Funksioni $y = \text{tg}x$ (fig. 5.8) për $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

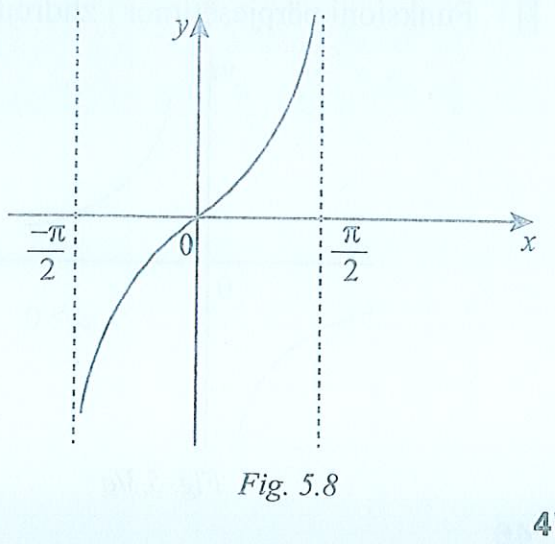


Fig. 5.8

Ushtrime të zgjidhura

1 a Gjeni koordinatat e pikave, ku grafiku i funksionit $y = 13 - x$ pret boshtet koordinative.

b A mund të kalojë nëpër këto dy pika, grafiku i një funksioni të trajtës $y = x + a$?

Zgjidhje

a Për $y = 0$ marrim $13 - x = 0$ prej ku $x = 13$. Pika e prerjes është A $(13, 0)$.
Për $x = 0$, marrim $y = 13 - 0$ prej ku $y = 13$. Pika e prerjes është B $(0, 13)$.
b Nuk ka grafik të trajtës $y = x + a$ që të kalojë nga dy pikat A dhe B, sepse nuk mund të kemi njëherësh $0 = 13 + a$ (d.m.th., $a = -13$) dhe $13 = 0 + a$ (d.m.th., $a = 13$).

2 Gjeni vlerat e m, n nëse dihet që grafiku i funksionit $y = mx + n$ kalon nëpër pikat:

a M $(1, 3)$ dhe N $(2, 5)$;

b M $(-2, 0)$ dhe N $(1, 3)$.

Zgjidhje

a Kemi $3 = m \cdot 1 + n$ dhe $5 = m \cdot 2 + n$.
Nga barazimi i parë nxjerrim $n = 3 - m$. Duke e zëvendësuar në barazimin e dytë, kemi $5 = m \cdot 2 + (3 - m)$ d.m.th., $m + 3 = 5$, prej ku $m = 2$.
Atëherë $n = 3 - m$ del $n = 1$. Kemi grafikun e funksionit $y = 2x + 1$.

3 Grafiku i funksionit linear $y = ax + b$ kalon nga pikat A $(1, 3)$ dhe B $(2, 5)$. Gjeni koeficientet a dhe b.

Zgjidhje

Meqë pika A $(1; 3)$ ndodhet në grafikun e funksionit, kjo do të thotë që për $x = 1$, vlera e funksionit është $y = 3$, pra $3 = a \cdot 1 + b$.
Duke arsyetuar njëlloj për pikën B, marrim $5 = a \cdot 2 + b$. Kemi sistemin

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b = 3 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Funksioni jepet me formulën $y = 2x + 1$.

4 Grafiku i funksionit $y = ax^2 + bx + c$ kalon nëpër pikat A $(1, 2)$; B $(2, 3)$ dhe C $(0, -2)$. Gjeni koeficientet a, b, c.

Zgjidhje

Për pikën A $(1; 2)$ kemi:
$2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$. d.m.th., $a + b + c = 2$.
Për pikën B kemi:
$3 = a \cdot 4 + b \cdot 2 + c$
Për pikën C kemi $-2 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c$.
Kemi pra sistemin (me tri ekuacione me tri ndryshore):

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=3 \\ c=-2 \end{cases}$$ Zgjidhja e tij është $$\begin{cases} a=-\dfrac{3}{2} \\ b=\dfrac{11}{2} \\ c=-2 \end{cases}$$

Funksioni është $y=-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x-2$.

5 Gjeni të anasjellin e funksionit $f: \ x \to \dfrac{5x-2}{3}$.

Zgjidhje

Kemi $y=\dfrac{5x-2}{3}$. Në këtë barazim ndërrojmë vendet e x dhe y.

Marrim $x=\dfrac{5y-2}{3}$, prej ku $3x=5y-2$ dhe $y=\dfrac{3x+2}{5}$.

I anasjelli i funksionit f është $f^{-1}: \ x \to \dfrac{3x+2}{5}$.

6 Jepet funksioni $f: y=x^2-1$

a Jepni me formulë funksionin g: $y=f(2x)$.

b Gjeni pikat ku grafiku i g pret drejtëzën $y=4x$.

Zgjidhje

a $g: y=f(2x)$ është $y=(2x)^2-1=4x^2-1$

b Pikat ku grafiku i g pret drejtëzën $y=4x$ i gjejmë duke zgjidhur sistemin

$$\begin{cases} y=4x^2-1 \\ y=4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2-1=4x \\ y=4x \end{cases}$$. Nga ekuacioni i parë nxjerrim

$x_1=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$; $x_2=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. Këto janë abshisat e pikave të prerjes.

7 Pa ndërtuar grafikët e funksioneve, gjeni pikat e prerjes së tyre:

$y=\dfrac{x-1}{2}$ dhe $y=\dfrac{3}{x}$

Zgjidhje

Pika e prerjes së grafikëve të dy funksioneve vërteton (me koordinatat e saj) secilin nga ekuacionet e grafikëve d.m.th., vërteton sistemin e formuar nga dy ekuacionet.

Sistemi $\begin{cases} y = \dfrac{x-1}{2} \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases}$ ka dy zgjidhje (3; 1) dhe $(-2, -\frac{3}{2})$

Pra, grafikët priten në pikat A(3; 1) dhe $B(-2, -\frac{3}{2})$.

8 Gjeni bashkësinë e përcaktimit të funksionit $y = \sqrt{(\frac{1}{2})^x - 1}$

Zgjidhje

$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Rightarrow x \leq 0$. Ajo është $]-\infty, 0]$.

9 Jepen funksionet f: $y = \dfrac{2x-1}{3}$ dhe g: $y = x^2$. Gjeni fog; gof.

Zgjidhje

a) $f[g(x)] = \dfrac{2 \cdot g(x) - 1}{3} = \dfrac{2 \cdot x^2 - 1}{3}$ pra fog: $y = \dfrac{2x^2 - 1}{3}$

$g[f(x)] = (f(x))^2 = \left(\dfrac{2x-1}{3}\right)^2$ pra gof: $y = \left(\dfrac{2x-1}{3}\right)^2$

10 Vërtetoni me rrugë algjebrike që vlera më e vogël e funksionit $y = (x - 3)^2 + 2$ merret për $x = 3$ dhe është 2.

Zgjidhje

Për çdo $x \in R$ kemi $(x - 3)^2 \geq 0$ d.m.th., $(x - 3)^2 + 2 \geq 2$. Pra, për çdo $x \in R$ kemi $f(x) \geq 2$ (dhe për $x = 3, f(x) = 2$). Kjo do të thotë që vlera më e vogël e funksionit f: $y = (x - 3)^2 + 2$ merret për $x = 3$ dhe është 2.

11 a Hipotenuza e një trekëndëshi kënddrejtë është 13 cm. Shënojmë me x njërin katet. Cila është bashkësia e vlerave të mundshme të x?

b Rrezja e një qarku është 10 cm. Shënojmë me x brinjën e një drejtkëndëshi të brendashkruar në qark. Cila është bashkësia e vlerave të mundshme të x?

Zgjidhje

a Gjatësia e çdo kateti është numër pozitiv, më i vogël se gjatësia e hipotenuzës, d.m.th., $0 < x < 13$. Pra, X =]0, 13[

b Për drejtkëndëshin e brendashkruar në qark, diagonalja është diametër i rrethit. Gjatësia e brinjës x është pozitive dhe më e vogël se diagonalja, pra, $0 < x < 20$. Kështu
X =]0, 20[.

12 Një trup hidhet vertikalisht përpjetë nga sipërfaqja e rrafshët e tokës me shpejtësi fillestare $V_0 = 30$ m/s. Lartësia h e ngritjes së trupit pas t sekondash është $h = 30t - 5t^2$.

a Gjeni bashkësinë E të vlerave të mundshme të t.

b Ndërtoni grafikun e funksionit $h = 30t - 5t^2$, $t \in$ E.

c Cila është lartësia më e madhe e ngjitjes?

Zgjidhje

a Bashkësia E e vlerave të mundshme të t përcaktohet nga kushtet:

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ h \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ 30t - 5t^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ 5t(6-t) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ 6-t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \leq 6 \end{cases}$$

Pra, E = [0, 6]

b Grafiku i funksionit $h = 30\,t - 5\,t^2$, $t \in [0, 6]$ është pjesë e parabolës me kulm në pikën C (m, n), ku

$$m = \frac{-30}{-10} = 3;$$

$n = f(3) = 30 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 45$, pra C (3, 45)

Dy pikat e skajeve kanë koordinata $t_1 = 0$ dhe $h_1 = 0$; $t_2 = 6$ dhe $h_2 = 0$.
Ky grafik është dhënë në figurën 5.9.

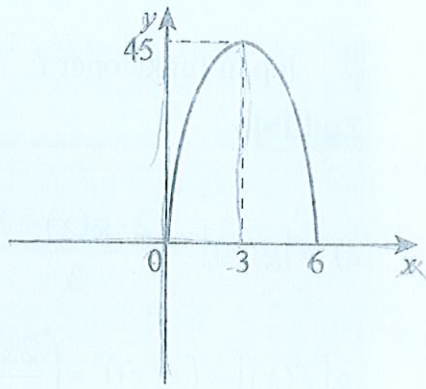


Fig. 5.9

c Vlera më e madhe e funksionit, siç duket nga grafiku, merret për $t = 3$ dhe është 45.

13 a Gjeni vlerën më të madhe për funksionin $y = x\left(\frac{5}{2} - x\right)$;

b Gjeni vlerën më të vogël për funksionin $y = (x - 3)^2$.

Zgjidhje

a $y = x\left(\frac{5}{2} - x\right) \Rightarrow y = \frac{5}{2}x - x^2$. Kemi $a = -1$, $b = \frac{5}{2}$, $c = 0$.

Vlera më e madhe e tij merret për $x = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{4}$ dhe është $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{25}{16}$.

b Meqë $(x - 3)^2 \geq 0$ për çdo $x \in$ R, vlera më e vogël merret për $x = 3$ dhe ajo është $f(3) = 0$.

14 Duke ditur se për çdo $x \in$ R, $-1 \leq \sin x \leq 1$ dhe $-1 \leq \cos x \leq 1$, gjeni vlerën më të vogël dhe më të madhe të funksionit:

a $y = 1 + \sin x$ b $y = \dfrac{1}{2 + \cos x}$

Zgjidhje

a $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -1+1 \le 1+\sin x \le 1+1 \Rightarrow 0 \le 1+\sin x \le 2.$

Vlera më e vogël është 0 dhe vlera më e madhe është –2.

b $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -1+2 \le 2+\cos x \le 1+2 \Rightarrow 1 \le 2+\cos x \le 3$

$$\frac{1}{1} \ge \frac{1}{2+\cos x} \ge \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \le \frac{1}{2+\cos x} \le 1$$

Vlera më e vogël është $\frac{1}{3}$, dhe vlera më e madhe është 1.

15 Në figurën 5.10 është dhënë grafiku i parabolës f: $y = ax^2 + bx + c$. Gjeni $f(-3)$.

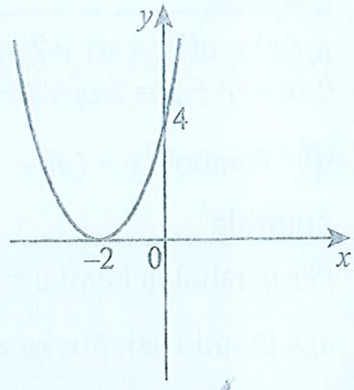


Fig. 5.10

Zgjidhje

Pika B(0, 4) ndodhet në grafikun e funksionit pra $f(0) = 4$

$\Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 4 \Rightarrow c = 4$

Pika A(–2, 0) gjithashtu ndodhet në grafikun e funksionit pra:

$a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 0 \Rightarrow 4a - 2b + 4 = 0$

Pika A është kulm i parabolës, prandaj $-\frac{b}{2a} = -2 \Rightarrow b = 4a$.

a dhe b janë zgjidhje të sistemit:

$$\begin{cases} 4a - 2b + 4 = 0 \\ b = 4a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}.$$

Ekuacioni i parabolës është f: $y = x^2 + 4x + 4$ nga ku $f(-3) = (-3)^2 + 4 \cdot (-3) + 4 = 1$

16 Funksioni i dhënë me formulën $y = ax^2 + b$ ka bashkësi përcaktimi $[-2, 2]$ dhe bashkësi vlerash $[-1, 7]$. Gjeni a, b. Sa zgjidhje ka problema?

Zgjidhje

Dallojmë dy raste:

i Nëse $a > 0$, grafiku është parabolë e kthyer nga lart dhe vlerën më të vogël (–1) do ta marrë te kulmi ($x = 0$), kurse vlerën më të madhe (7) do ta marrë në skajet.

Kemi kështu $\begin{cases} a \cdot 2^2 + b = 7 \\ a \cdot 0^2 + b = -1 \end{cases}$. Gjejmë $b = -1$ dhe $a = 2$.

ii Nëse $a < 0$, grafiku është parabolë e kthyer nga poshtë. Vlera më e madhe (7) do të merret tek kulmi ($x = 0$), kurse vlera më e vogël (–1) në skajet.

Kemi $\begin{cases} a \cdot 0^2 + b = 7 \\ a \cdot 2^2 + b = -1 \end{cases}$. Gjejmë $b = 7$ dhe $a = -2$.

17 Jepet $f(x) = x^3$ dhe $g(x) = 3^x$. Zgjidhni ekuacionin $f(g(x)) = g(f(x))$

Zgjidhje

$f(g(x)) = (3^x)^3 = 3^{3x}$; $g(f(x)) = g(f(x)) = 3^{x^3}$

$f(g(x)) = g(f(x)) \Rightarrow x^3 = 3x \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ose $x = \pm\sqrt{3}$

Rrënjët e ekuacionit janë $0; \pm\sqrt{3}$.

18 Jepet $f(x) = 3 \cdot 2^{x-2}$. Gjeni $f^{-1}(24)$.

Zgjidhje

Kemi $3 \cdot 2^{x-2} = 24 \Rightarrow 2^{x-2} = 8 \Rightarrow 2^{x-2} = 2^3 \Rightarrow x - 2 = 3 \Rightarrow x = 5$

19 Jepet $f(x) = ax + 2$ dhe $g(x) = 2x + a$. Për ç'vlera të a kemi $f(g(x)) = g(f(x))$?

Zgjidhje

$f(g(x)) = a(2x + a) + 2 = 2ax + a^2 + 2$; $g(f(x)) = 2(ax + 2) + a = 2ax + 4 + a$

$2ax + a^2 + 2 = 2ax + 4 + a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a_1 = -1$ ose $a_2 = 2$

20 Parabola $y = (m - 1)x^2 + 3mx + 1$ ka si bosht simetrie drejtëzën $x = -3$. Gjeni m.

Zgjidhje

Për parabolën kemi $a = (m - 1)$; $b = 3m$ dhe $c = 1$. Boshti i simetrisë së parabolës kalon nga kulmi i saj, pra ka abshisën $x = -\dfrac{b}{2a}$. Kemi

$-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3m}{2(m-1)}$. Nga kushti $-\dfrac{3m}{2(m-1)} = -3 \Rightarrow m = 2$

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 A ndodhen në një drejtëz pikat:

a A (–2, 2) B (1, –1) C (3, –3)

b A (1, 2) B (2, 3) C (–1, 0)?

P. [a) po; b) po]

2 Gjeni koordinatat e pikës ku priten grafikët e funksioneve:

a $y = 2x$ dhe $y = -2x + 8$;

b $y = 1 - 2x$ dhe $y = x - 5$.

P. [a) (2,4); b) (2,-3)]

3 Jepni me formulë funksionin linear, si grafik i të cilit shërben drejtëza që kalon nëpër pikën A (2; 3) dhe është paralele me grafikun e funksionit $y = 1{,}5x - 3$. P. [$y = 1{,}5x$]

4 Pikat $A(m, -1)$; $B(1 - m, 2m + 1)$ dhe $C(m + 1, -3)$ ndodhen në një drejtëz. Gjeni m.

P. [$m = 2$]

5 Vijat $y = x^2$; $y = 2x - 1$ dhe $y = mx + 3$ kalojnë nga e njëjta pikë. Gjeni m.

P. [$m = -2$]

6 Caktoni koeficientet a, b në mënyrë që grafiku i funksionit $y = ax^2 + bx - 48$ të kalojë nëpër pikat A(1; 2) dhe B(2; 10). P. [$a = -21$; $b = 71$]

7 Për ç'vlera të m, grafikët e funksioneve $y = x^2 - mx + 1$ dhe $y = mx$ nuk kanë asnjë pikë të përbashkët?

P. [$-1 < m < 1$]

8 Jepet $f(x)=\dfrac{3}{4x-2}$ dhe $f^{-1}(x)=\dfrac{ax+3}{4x}$. Gjeni a. P. [$a = 2$]

9 Gjeni funksionin e anasjellë të funksionit:

a $f(x)=\dfrac{4+7x}{5}$ b $f(x)=3^{x-1}+2$

P. [a) $f(x)=\dfrac{5x-4}{7}$; b) $f(x)=1+\log_3(x-2)$]

10 Në figurën 5.11 paraqitet funksioni $y = k - x^2$, ku k është konstante. Syprina e trekëndëshit ABC është 64 njësi katrore. Gjeni k. P. [$k = 16$]

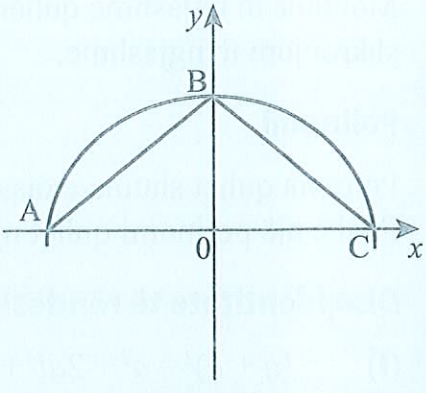


Fig. 5.11

11 Jepet funksioni $f(x) = 2^{2x-3}$. Gjeni rrënjën e ekuacionit $f(x)=16f(\frac{x}{2})$. P. [$x = 1$]

12 Jepet $f(x) = 3x - 7$ dhe $f(f(a)) = a$. Gjeni a. P. [$\frac{7}{2}$]

13 Gjeni $f(x)$ në qoftë se $f(2x-4) = mx - 4$ dhe $f(-2) = -2$. P. [$f(x) = x$]

14 Parabola $y = 2x^2 - 4x + (a + 1)$ ka minimum të barabartë me -3. Gjeni a.
P. [$a = -2$]

15 Për ç'vlera të m, parabola $y=2x^2 + mx + 2$ është tangjente me boshtin e abshisave?
P. [$m = \pm 4$]

16 Minimumi i parabolës $y = mx^2 + (m - 1)x + 3$ ndodhet në boshtin e ordinatave. Gjeni m. P. [$m = 1$]

17 Në figurën 5.12 jepet grafiku i parabolës f: $y = ax^2 + bx + c$. Gjeni ordinatën e maksimumit të saj.

P. [$\frac{9}{2}$]

18 Parabola $f(x)= x^2 - 4x+3$ e ka kulmin në pikën $(2,-1)$. Gjeni kulmin e parabolës $g(x) = f(x + 2)$.

P. [$(0,-1)$]

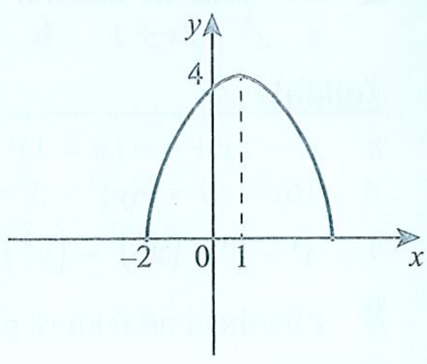


Fig. 5.12

KREU 6

SHPREHJET ME NDRYSHORE. POLINOMET

Monomi

Monom quhet shprehja që merret duke kryer mbi numrat dhe ndryshoret vetëm veprimet e shumëzimit dhe të ngritjes në fuqi.
Monome të ngjashme quhen monomet që në trajtat e rregullta të tyre i kanë pjesët shkronjore të ngjashme.

Polinomi

Polinom quhet shuma e disa monomeve.
Fuqi e një polinomi quhet më e madhja nga fuqitë e monomeve që e përbëjnë atë.

Disa identitete të rëndësishme

(I) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(II) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(III) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(IV) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(V) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

(VI) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

(VII) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Ushtrime të zgjidhura

1 Gjeni shumën e polinomeve $(3x^2 + 5x - 6)$ dhe $(x^2 - 2x + 1)$.

Zgjidhje

$(3x^2 + 5x - 6) + (x^2 - 2x + 1) = (3x^2 + x^2) + (5x - 2x) + (-6 + 1) = 4x^2 + 3x - 5$

2 Zbërtheni në faktorë: **a** $x^3 + 8$ **b** $x^3 - 8y^3$

Zgjidhje

a $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

b $x^3 - 8y^3 = (x)^3 - (2y)^3 = (x - 2y)[x^2 + x(2y) + (2y)^2] = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

3 Zbërtheni në faktorë:

a $x^2 - 2x + 1$ **b** $4x^2 + 4x + 1$ **c** $x^2 - 9$ **d** $16y^2 - 9$ **e** $x^4 - y^4$

Zgjidhje

a $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ **b** $4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$ **c** $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$

d $16y^2 - 9 = (4y)^2 - 3^2 = (4y - 3)(4y + 3)$

e $x^4 - y^4 = \left(x^2\right)^2 - \left(y^2\right)^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x-y)(x+y)(x^2 + y^2)$

4 Zbërtheni në faktorë polinomin $x^3 + 4x^2 + x + 4$.

Zgjidhje

Mënyra I: $x^3 + 4x^2 + x + 4 = (x^3 + 4x^2) + (x + 4) = x^2(x+4) + (x+4) = (x+4)(x^2+1)$.

Mënyra II: $x^3 + 4x^2 + x + 4 = (x^3 + x) + (4x^2 + 4) = x(x^2+1) + 4(x^2+1) = (x+4)(x^2+1)$.

5 Zbërtheni në faktorë polinomin $3x^3 - 48x$.

Zgjidhje

$3x^3 - 48x = 3x(x^2 - 16) = 3x(x - 4)(x + 4)$.

6 Jepen polinomet $P(x) = 3x - 6$ dhe $Q(x) = (a - 1)x + b$. Gjeni a dhe b, në mënyrë që për çdo $x \in R$ të ketë vend barazimi $P(x) = Q(x)$.

Zgjidhje

Për këtë duhet e mjafton që $\begin{cases} a-1=3 \\ b=-6 \end{cases}$ d.m.th., $\begin{cases} a=4 \\ b=-6 \end{cases}$.

7 Gjeni herësin dhe mbetjen e pjesëtimit të polinomit x^3 me $x - 3$.

Zgjidhje

Le të jetë $Q(x)$ herësi i pjesëtimit dhe r mbetja e tij.

Kemi $x^3 = (x - 3) \cdot Q(x) + r$ ku $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Kemi:

$x^3 = (x - 3)(ax^2 + bx + c) + r \Rightarrow x^3 = (ax^3 + bx^2 + cx - 3ax^2 - 3bx - 3c) + r \Rightarrow$

$x^3 = ax^3 + x^2(b - 3a) + x(c - 3b) + r - 3c$

Koeficientet pranë fuqive të njëjta të ndryshores në anën e majtë dhe në anën e djathtë janë të barabarta, prandaj:

$$\begin{cases} a=1 \\ b-3a=0 \\ c-3b=0 \\ r-3c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b-3\cdot 1=0 \\ c-3b=0 \\ r-3c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c-3\cdot 3=0 \\ r-3c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=9 \\ r-3\cdot 9=0 \end{cases}$$

Përfundimisht kemi $a = 1$; $b = 3$; $c = 9$; $r = 27$

Prandaj $x^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9) + 27$

8 Jepen $a = -2$, $b = 3$, $c = -3$. Gjeni vlerën e:

a $\dfrac{2a(b^2 - a)}{c}$ b $\sqrt{a^2 + b^2}$

Zgjidhje

a $b^2 - a = 9 - (-2) = 11$, prandaj $\dfrac{2a(b^2 - a)}{c} = \dfrac{2 \cdot (-2) \cdot 11}{-3} = 14\dfrac{2}{3}$

b $a^2 + b^2 = (-2)^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$, prandaj $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$

9 Zbërtheni kllapat:

a $(x+5)(x+3)$ b $(2x-3)(4y+3)$ c $3(x+1)(x-2)$

Zgjidhje

a $(x+5)(x+3) = x(x+3) + 5(x+3) = x^2 + 3x + 5x + 15 = x^2 + 8x + 15$

b $(2x-3)(4y+3) = 2x(4y+3) - 3(4y+3) = 8xy + 6x - 12y - 9$

c $3(x+1)(x-2) = 3 \cdot [x \cdot (x-2) + 1 \cdot (x-2)] = 3 \cdot [x^2 - 2x + x - 2] = 3x^2 - 3x - 6$

9 Zbërtheni në faktorë shprehjet:

a $ah + ak + bh + bk$ b $6mx - 3nx + 2my - ny$ c $x^2 + 6x + 8$

Zgjidhje

a $ah + ak + bh + bk = a\cdot(h + k) + b\cdot(h + k) = (h + k)\cdot(a + b)$

b $6mx - 3nx + 2my - ny = 3x\cdot(2m - n) + y\cdot(2m - n) = (2m - n)\cdot(3x + y)$

c $x^2 + 6x + 8 = x^2 + 4x + 2x + 8 = x(x + 4) + 2(x + 4) = (x + 4)(x + 2)$

10 Thjeshtoni shprehjen: $3x(4 - x) - (2x - 3)(5 - x)$.

Zgjidhje

$3x(4 - x) - (2x - 3)(5 - x) = 12x - 3x^2 - (10x - 2x^2 - 15 + 3x) =$
$= 12x - 3x^2 - 10x + 2x^2 + 15 - 3x) = -x^2 - x + 15$

11 Gjeni vlerën e shprehjes numerike $\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{100}\right)$.

Zgjidhje:

Shprehja shkruhet $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{99}{100} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$.

12 Sillni në trajtë të rregullt monomin:

a $(-2\,a^2\,b)^3$ b $0,3x^2\cdot\left(-\frac{1}{3}x^4y\right)^2$ c $-x^2y\cdot 4x^2y^2\,(-5xy)$

Zgjidhje

a $(-2a^2b)^3 = (-2)^3\cdot(a^2)^3\cdot b^3 = -8a^6b^3$

b $0,3x^2\cdot\left(-\frac{1}{3}x^4y\right)^2 = 0,3x^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(x^4\right)^2\cdot y^2 = 0,3x^2\cdot\frac{1}{9}\cdot x^8y^2 = \frac{1}{30}x^{10}y^2$

c $-x^2\cdot y\cdot 4x^2\cdot y^2\,(-5xy) = (-5\cdot 4)\cdot(x^2\cdot x^2\cdot x)\,(y\cdot y^2\cdot y) = -20x^5\cdot y^4$.

13 Vërtetoni që për çdo vlerë të x, vlera e shprehjes $(x - 6)\,(x + 8) - 2\,(x - 25)$ është pozitive.

Zgjidhje

Kemi $(x - 6)\,(x + 8) - 2\,(x - 25) = x^2 + 8x - 6x - 48 - 2x + 50 = x^2 + 2$. Për çdo vlerë të x kemi $x^2 \geq 0$, prandaj $x^2 + 2 > 0$.

14 Duke ditur që çdo numër tek paraqitet në trajtën $2n + 1$ (ku n – i plotë), vërtetoni që katrori i çdo numri tek është numër tek.

Zgjidhje

Kemi $t = 2n + 1$, që nga $t^2 = (2n + 1)^2 \Rightarrow t^2 = 4n^2 + 4n + 1 \Rightarrow t^2 = 2\,(2n^2 + 2n) + 1$, i cili është numër tek.

15 Thjeshtoni shprehjen dhe gjeni vlerën e saj:

a $(x - 10)^2 - x(x + 80)$ për $x = 0,97$

b $(2x + 9)^2 - x(4x + 31)$ për $x = -16,2$

Zgjidhje

a Shprehja është identike me $(x^2 - 20x + 100) - x^2 - 80x = -100x + 100$. Vlera e saj për $x = 0{,}97$ është $-100 \cdot (0{,}97) + 100 = -97 + 100 = 3$.

b Shprehja është identike me $(4x^2 + 36x + 81) - 4x^2 - 31x = 5x + 81$. Vlera e saj për $x = -16{,}2$ është $5\,(-16{,}2) + 81 = -81 + 81 = 0$.

16 Nëse është e mundur, paraqitni shprehjen si katror binomi:

a $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9$ b $4a^2 - 2a + 1$

Zgjidhje

a $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9 = (\frac{1}{2}x)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot 3 + 3^2 = (\frac{1}{2}x + 3)^2$.

b $4a^2 - 2a + 1 = (2a)^2 - 2a + 1^2$. Vëmë re që $2 \cdot 2a \cdot 1 = 4a \neq 2a$ prandaj shprehja nuk shkruhet dot në trajtën $(2a - 1)^2$.

17 Kryeni shkurt shumëzimet: a $(-x - y)\,(x - y)$ b $99 \cdot 101$

Zgjidhje

a $-x - y = -(x + y)$;
$(-x - y)\,(x - y) = -(x + y)\,(x - y) = -(x^2 - y^2) = y^2 - x^2$.

b Shkruajmë $99 = 100 - 1$ dhe $101 = 100 + 1$.
$99 \cdot 101 = (100 - 1)\,(100 + 1) = 100^2 - 1^2 = 9999$.

18 Paraqitni në trajtë prodhimi $(2x + y)^2 - (x - 2y)^2$.

Zgjidhje

$(2x + y)^2 - (x - 2y)^2 = (2x + y + x - 2y)\,(2x + y - x + 2y) = (3x - y)\,(x + 3y)$.

19 Zbërtheni në faktorë: a $x^2 - a^2b^2$ b $x^4 - \frac{1}{16}$.

Zgjidhje

a $x^2 - a^2b^2 = x^2 - (ab)^2 = (x - ab)\,(x + ab)$

b $$x^4 - \frac{1}{16} = x^4 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(x^2\right)^2 - \left[\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2 = \left[x^2 - \left(\frac{1}{4}\right)\right] \cdot \left[x^2 + \left(\frac{1}{4}\right)\right] =$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{4}\right).$$

20 Zbërtheni në faktorë: a $y^2 + 2y + 1 - a^2$ b $a^2 - x^2 + 6x - 9$
c $a^2 - b^2 + 2\,(a + b)^2$.

Zgjidhje

a $(y^2 + 2y + 1) - a^2 = (y + 1)^2 - a^2 = (y + 1 + a)\,(y + 1 - a)$.

b $a^2 - x^2 + 6x - 9 = a^2 - (x^2 - 6x + 9) = a^2 - (x - 3)^2 = (a + x - 3)\,(a - x + 3)$.

c $a^2 - b^2 + 2(a+b)^2 = (a-b)(a+b) + 2(a+b)^2$
$= (a+b)[(a-b) + 2(a+b)] = (a+b)(3a+b)$.

21 Zbërtheni në faktorë polinomin $2a^3 + 12a^2 + 18a$.

Zgjidhje

$2a^3 + 12a^2 + 18a = 2a(a^2 + 6a + 9) = 2a(a+3)^2$

22 Gjeni vlerën e shprehjes $x^2y - y + xy^2 - x$ për $x = 4$ dhe $y = 0{,}25$.

Zgjidhje

$x^2y - y + xy^2 - x = (x^2y + xy^2) - (x+y) = (xy)(x+y) - 1 \cdot (x+y) = (x+y)(xy-1)$.
Për $x = 4$ dhe $y = 0{,}25$ kemi $(4 + 0{,}25)(1 - 1) = 0$.

23 Vërtetoni që për çdo vlerë natyrore të n, vlera e shprehjes $n(n+2) - (n-7)(n-5)$ është shumëfish i numrit 7.

Zgjidhje

Kemi $n(n+2) - (n-7)(n-5) = n^2 + 2n - (n^2 - 5n - 7n + 35)$
$= n^2 + 2n - n^2 + 5n + 7n - 35 = 14n - 35 = 7(2n-7)$. Shprehja e fundit e ka si faktor numrin 7, pra plotpjesëtohet me 7.

24 Zgjidhni ekuacionin $(1-2x)(1-3x) = (6x-1)x - 1$.

Zgjidhje

$(1-2x)(1-3x) = (6x-1)x - 1 \Rightarrow 1 - 3x - 2x + 6x^2 = 6x^2 - x - 1$

$\Rightarrow -5x + 6x^2 - 6x^2 + x = -1 - 1 \Rightarrow -4x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

25 Vërtetoni që për çdo x, vlerat e trinomit $4x^2 + 4x + 2$ janë pozitive.

Zgjidhje

$4x^2 + 4x + 2 = (4x^2 + 4x + 1) + 1 = (2x+1)^2 + 1 > 0$.

26 Për të gjitha vlerat e $x \in R$, të tilla që $\begin{cases} x+5 \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$ ka vend barazimi

$\frac{x-1}{(x+5)(x-2)} = \frac{a}{x+5} + \frac{b}{x-2}$. Gjeni a dhe b.

Zgjidhje

Në bashkësinë e vlerave të shqyrtuara të ndryshores x, kemi:

$\frac{x-1}{(x+5)(x-2)} = \frac{a(x-2) + b(x+5)}{(x+5)(x-2)}$ nga ku

$x - 1 = a(x-2) + b(x+5)$. Duke barazuar koeficientet pranë fuqive të njëjta të x te polinomet identike të barazimit të mësipërm, marrim:

$1 = a + b$ dhe $-1 = -2a + 5b$ nga ku $a = \frac{6}{7}; b = \frac{1}{7}$.

27 Tregoni që polinomi $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$ plotpjesëtohet me $(x-1)(x-2)$.

Zgjidhje

Meqenëse vlera e polinomit për $x = 1$ është 0, ky polinom plotpjesëtohet me $(x - 1)$ pra $P(x) = (x - 1)\cdot Q(x)$. Edhe për $x = 2$, vlera e polinomit $P(x)$ bëhet 0, pra $P(2) = (2 - 1)\cdot Q(2) = 0$ nga ku $Q(2) = 0$.
Kjo tregon se edhe polinomi $Q(x)$ plotpjesëtohet me $(x - 2)$, pra $Q(x) = (x - 2) \cdot H(x)$.
Del $P(x) = (x - 1)(x - 2) \cdot H(x)$.

28 a Polinomi $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + mx - 3$ plotpjesëtohet me $x - 2$. Gjeni m.
b Polinomi $P(x) = mx^2 - 15x + n$ ka si faktorë $(2x - 1)$ dhe $(x - 2)$. Gjeni m dhe n.

Zgjidhje

a Nga kushti $P(2) = 0$. Kemi $P(2) = 16 - 24 + 8 + 2m - 3 = 0 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$

b Kemi $P(2) = 0$ dhe $P(\frac{1}{2}) = 0$. $P(2) = 4m - 30 + n = 0$; $P(\frac{1}{2}) = \frac{m}{4} - \frac{15}{2} + n = 0$.

Duke zgjidhur sistemin $\begin{cases} 4m - 30 + n = 0 \\ \frac{m}{4} - \frac{15}{2} + n = 0 \end{cases}$, gjejmë $m = 6$ dhe $n = 6$.

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Duke përdorur formulën $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, faktorizoni shprehjet:
a $4a^2 - b^2$ b $3x^2 - 27y^2$.

P. [a) $(2a - b)(2a + b)$; b) $3(x - 3y)(x + 3y)$]

2 Zbërtheni në faktorë polinomet: a $5x + 5y + ax + ay$ b $x^2 - 7x + 12$

P. [a) $(x + y)(5 + a)$; b) $(x - 3)(x - 4)$]

3 Zbërtheni në faktorë: a $25 - x^2$ b $4a^2 - 9b^2$ c $\frac{1}{4} - x^4$

P. [a) $(5 - x)(5 + x)$; b) $(2a - 3b)(2a + 3b)$ c) $\left(\frac{1}{2} - x^2\right)\left(\frac{1}{2} + x^2\right)$]

4 Zbërthenit në faktorë polinomin $5x^3 - 20x$. P. [$5x(x - 2)(x + 2)$]

5 Zbërtheni në faktorë $xb^3 - 3b^3 + xb^2y - 3b^2y$ P. [$b^2(x - 3)(b + y)$]

6 Zbërtheni në faktorë polinomin $x^2 - 4x - y^2 + 4$. P. [$(x - 2 + y)(x - 2 - y)$]

7 Zbërtheni në faktorë:
a $7a - 7b + ax - bx$ b $x^3 - x^2 + x - 1$ c $y^3 - 2y^2 + y - 2$

P. [a) $(a - b)(7 + x)$; b) $(x - 1)(x^2 + 1)$; c) $(y - 2)(y^2 + 1)$]

8 Zbërtheni në faktorë: a $x^2 - 4x + 3$ b $x^2 + 6x + 8$

P. [a) $(x-1)(x-3)$; b) $(x+2)(x+4)$]

9 Zbërtheni në faktorë: a $4x^2 + 8xy + 4y^2$ b $-4a - 4 - a^2$
c $x^3 - x^2y + x^2 - xy$

P. [a) $4(x-y)^2$; b) $-(a+2)^2$; c) $x(x-y)(x+1)$]

10 Gjeni koeficientet a, b, c të polinomit $P(x) = ax^2 + bx + c$, duke ditur që $P(x+1) + P(x-1) = 8x^2 - 6x + 10$.

Udhëzim: Kemi $P(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c = ax^2 + (2a+b)x + a + b + c$ dhe në mënyrë të ngjashme:
$P(x-1) = ax^2 + (-2a+b)x + a - b + c$. Përdorim më tej metodën e koeficienteve të pacaktuara.

P. [$a = 4$; $b = -6$; $c = 1$]

11 Dy rrënjë të polinomit $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ janë 2 dhe –3. Gjeni dy rrënjët e tjera të polinomit.

Udhëzim: Polinomi plotpjesëtohet me $(x-2)$ dhe me $(x+3)$, prandaj shkruhet në trajtën $P(x) = (x-2)(x+3) \cdot Q(x)$, ku $Q(x)$ është polinom i fuqisë së dytë $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Për gjetjen e koeficienteve a, b, c përdorni metodën e koeficienteve të pacaktuara.

P. [$a = 1$; $b = 0$; $c = -1$]

12 Thjeshtoni shprehjen $P = \sqrt{\dfrac{a^2}{49} - \dfrac{2ab}{35} + \dfrac{b^2}{25}}$. P. [$\dfrac{|5a - 7b|}{35}$]

13 Tregoni që vlera e shprehjes $\dfrac{ab + b^2}{a^2 - b^2} - \dfrac{a}{a-b}$ është konstante për çdo vlerë të a dhe b $(a \neq b)$.

14 Polinomi $P(x) = 9x^4 - 3(m-1)x^2 - x + 1$ ka rrënjë $x = 1$. Gjeni $P(-1)$. P. [2]

15 Thjeshtoni shprehjen $\left(\dfrac{x+1}{x^2-1} - \dfrac{x+1}{x^2-x}\right) \cdot (x - x^2)$. P. [1]

16 Jepet $P(x) = \dfrac{x+a}{x+b}$ dhe $P(2) = 4$; $P(-1) = 7$. Gjeni a dhe b. P. [$a = 8$; $b = 2$]

17 Gjeni vlerat m dhe n, në qoftë se polinomi $P(x) = mx^2 - 22x + n$, ka si faktorë $(3x-2)$ dhe $(x-3)$.

P. [$m = 6$; $n = 12$]

18 Gjeni vlerën e shprehjes $\dfrac{6x^2 + 6y^2}{3x^2 - 3y^2}$ për $x = 6{,}5$ dhe $y = 2{,}5$. P. [16,125]

KREU 7

VARGJET. TEOREMA BINOMIALE

Jepet bashkësia e numrave 5; 9; 13; 17; 21; ...

Rregulla: Kufizë pas kufize: $u_{n+1} = u_n + 4$; $u_1 = 5$; "Shto 4"

Rregulla: Kufiza e $n^{të}$: $u_n = 4n + 1$

Vargu rritës: $u_{n+1} > u_n$ për çdo $n \in N$

Vargu zbritës: $u_{n+1} < u_n$ për çdo $n \in N$

Vargu periodik: Blloqe kufizash që përsëriten.

Vargu i numrave katrorë: 1; 4; 9; 16; ...

Vargu i numrave kubikë: 1; 8; 27; 64; ...

Vargu Fibonaçi: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; ...

Progresioni aritmetik: $u_{n+1} - u_n = d$

Kufiza e përgjithshme: $u_n = u_1 + (n-1)d$

Progresioni gjeometrik $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = r$

Kufiza e përgjithshme: $u_n = u_1 r^{n-1}$

Vargu kuadratik: $T(n) = an^2 + bn + c$

Kombinacioni: $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-p+1)}{p\cdot(p-1)\cdot(p-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$

Trekëndëshi i Paskalit

ZBËRTHIMI	KOEFICIENTET
$(a+b)^0 = 1$	1
$(a+b)^1 = 1a + 1b$	1 1
$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$	1 5 10 10 5 1

Ushtrime të zgjidhura

1
a Shkruani vargun e numrave çift dyshifrorë.
b Jepni këtë varg me formulë.
c A është kufizë e këtij vargu numri 92? Numri 79? Numri 104?

Zgjidhje

a 10, 12, 14, ..., 98

b Vargu mund të jepet me formulën $u_n = 2n + 8$

c Le të shohim nëse është kufizë e vargut numri 92, pra të shohim nëse ekziston ndonjë vlerë natyrore e n për të cilën $u_n = 92$ (d.m.th., $2n + 8 = 92$).
Nga barazimi $2n + 8 = 92$ gjejmë $n = 42$.
Kështu, numri 92 është kufizë e vargut dhe pikërisht kufiza e 42-të e tij.

2 Vargu është dhënë me formulën $u_n = 2n - 3$. Gjeni kufizën e vargut me tregues:
a 1 **b** 7 **c** k **d** $2k - 1$

Zgjidhje

a Në formulën $u_n = 2n - 3$, duke zëvendësuar n me 1, gjejmë $u_1 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$.

d Në formulën $u_n = 2n - 3$, duke zëvendësuar në vend të n shprehjen $2k - 1$, gjejmë $u_{2k-1} = 2(2k - 1) - 3 = 4k - 5$.

3 Për secilin nga vargjet:
a 4, 7, 10, 13, ...; **b** 1, 4, 9, 16, ...
- përshkruani vargun;
- shkruani 3 kufizat pasuese;
- shkruani kufizën e 50-të.

Zgjidhje

a Vargu 4, 7, 10, 13, fillon me 4 dhe çdo kufizë merret nga e mëparshmja, duke i shtuar 3.

Tri kufizat pasuese janë $\begin{pmatrix} 13+3=16 \\ 16+3=19 \\ 19+3=2 \end{pmatrix}$ pra, 16, 19, 22.

Meqenëse kufizat rriten çdo herë me nga 3, krahasojmë vargun me atë të shumëfishave të numrit 3.
Vargu ynë: 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22
Vargu i shumëfishave të numrit 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21
Vëmë re që çdo kufizë e vargut tonë është 1 njësi më e madhe se shumëfishi përkatës i numrit 3.
Pra, kufizat e vargut tonë janë:
E para: $1 \cdot 3 + 1 = 4$
E dyta: $2 \cdot 3 + 1 = 7$
E treta: $3 \cdot 3 + 1 = 10$
....
E pesëdhjeta: $3 \cdot 50 + 1 = 151$

4 Plotësoni tabelën për vargun e mëposhtëm, të ndërtuar sipas rregullës: "Shumëzo çdo numër me 2, pastaj shtoji 3".

Hyrje	1	2	3	4	5
Dalje					

Zgjidhje

Duke përdorur rregullën e përshkruar, marrim tabelën e mëposhtme, sepse:
$1 \cdot 2 + 3 = 5$; $2 \cdot 2 + 3 = 7$; $3 \cdot 2 + 3 = 9$ etj.

Hyrje	1	2	3	4	5
Dalje	5	7	9	11	13

5 a Tregoni 4 kufizat e para për secilin nga vargjet:

$$u_n = \frac{n+1}{n} \qquad u_n = 2n - 5 \qquad u_n = 1+\sqrt{n}$$

b Për secilin varg, gjeni u_{n+1}; u_{n-1}

c Për secilin varg, gjeni u_n+1; u_n-1; $\frac{1}{u_n}$

Zgjidhje

b Për vargun $u_n = \frac{n+1}{n}$ kemi

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \quad \text{dhe} \quad u_{n-1} = \frac{(n-1)+1}{n-1} = \frac{n}{n-1}$$

c Për vargun me $u_n = 1+\sqrt{n}$ kemi

$$u_n + 1 = 1+\sqrt{n}+1 = 2+\sqrt{n}$$

$$u_n - 1 = 1+\sqrt{n}-1 = \sqrt{n}$$

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{1+\sqrt{n}} = \frac{1-\sqrt{n}}{1-n}$$

6 Gjeni treguesit e kufizave të vargut të dhënë me formulën $u_n = 3n + 2$, $n \in N$, të cilat plotësojnë kushtin:

a $u_n > 17$ b $u_n \leq 38$ c $80 \leq u_n \leq 180$

Zgjidhje

a Zgjidhim në N inekuacionin $u_n > 17$ d.m.th., $3n + 2 > 17$. Gjejmë $n > 5$.

c Zgjidhim në N inekuacionin e dyfishtë $80 \leq u_n \leq 180$ d.m.th.,

$$80 \leq 3n+2 \leq 180$$

$$\Downarrow$$

$$78 \leq 3n \leq 178$$

$$\Downarrow$$

$$26 \leq n \leq 59\frac{1}{3}$$

Pra, $26 \leq n \leq 59$ $(n \in N)$

7 Duke filluar nga cili tregues, kufizat e vargut $u_n = n^2 - 16$ janë:

a pozitive?

b më të vogla se 200?

Zgjidhje

a Zgjidhim në N inekuacionin $u_n > 0$ d.m.th., $n^2 - 16 > 0$, pra $n^2 > 16 \Rightarrow n > 4$ (ose $n \geq 5$).

b Zgjidhim në N inekuacionin $u_n < 200$ d.m.th., $n^2 - 16 < 200$, pra, $n^2 < 216 \Rightarrow < \sqrt{216}$, pra $n \leq 14$, $(n \in N)$.

8 Jepet vargu $u_n = \dfrac{(x-1)n+2}{5n+1}$. Për ç'vlerë të x ai është varg konstant?

Zgjidhje

Gjejmë dy kufizat e para të vargut. Kemi:

$$u_1 = \frac{x-1+2}{5\cdot 1+1} = \frac{x+1}{6}; \quad u_2 = \frac{(x-1)\cdot 2+2}{5\cdot 2+1} = \frac{2x-2+2}{10+1} = \frac{2x}{11}.$$ Nga kushti:

$$\frac{x+1}{6} = \frac{2x}{11} \Rightarrow 11(x+1) = 12x \Rightarrow x = 11$$

Për $x = 11$ kemi $u_n = \dfrac{(11-1)n+2}{5n+1} = \dfrac{10n+2}{5n+1} = \dfrac{2(5n+1)}{5n+1} = 2$

9 Jepet progresioni aritmetik $-10, -8, \ldots$ Gjeni u_{21}.

Zgjidhje

Kemi $u_1 = -10$ dhe $d = -8 - (-10) = 2$. Prandaj:

$u_{21} = u_1 + (21 - 1)d = -10 + 20 \cdot 2 = 30.$

10 Gjeni kufizën e parë dhe diferencën e progresionit aritmetik, në qoftë se njihen kufiza e pestë dhe e dyzetë e tij $u_5 = 2$ dhe $u_{40} = 142$.

Zgjidhje

Kemi $\begin{cases} u_5 = 2 \\ u_{40} = 142 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 2 \\ u_1 + 39d = 142 \end{cases}.$

Duke zgjidhur këtë sistem me dy ndryshore u_1 dhe d, gjejmë $u_1 = -14$; $d = 4$.

11 Plotësoni vendet bosh në progresionin aritmetik:

a 2; □; 5; □ b 3; □; □; 7; □ c □; 6; □; 12; □

Zgjidhje

c Kemi të dhënë $u_2 = 6$ dhe $u_4 = 12$. $\begin{cases} y_1 + d = 6 \\ y_1 + 3d = 12 \end{cases} \Rightarrow d = 3;\ u_1 = 3$

Pra, progresioni është 3, 6, 9, 12, …

12 Në progresionin aritmetik, kemi $u_1 = -15$ dhe $d = 1{,}5$. Për ç'vlera të n ka vend mosbarazimi $u_n \geq 0$?

Zgjidhje

Kemi $u_n = -15 + (n-1)\cdot 1{,}5 \Rightarrow u_n = 1{,}5n - 16{,}5$.

$1{,}5n - 16{,}5 \geq 0 \qquad 1{,}5n \geq 16{,}5 \qquad n \geq \dfrac{16{,}5}{1{,}5}$ pra, $n \geq 11$.

13 Në një progresion aritmetik jepen $\begin{cases} u_6 + u_7 = -16 \\ u_2 + u_{10} = -20 \end{cases}$.

a Gjeni u_1 dhe d.

b Cila është kufiza e parë pozitive e këtij progresioni?

Zgjidhje

a $\begin{cases} u_6 + u_7 = -16 \\ u_2 + u_{10} = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + 5d + u_1 + 6d = -16 \\ u_1 + d + u_1 + 9d = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_1 + 11d = -16 \\ 2u_1 + 10d = -20 \end{cases}$

Duke zbritur nga ekuacioni i parë, ekuacionin e dytë gjejmë $d = 4$.

Duke zëvendësuar $d = 4$, në ekuacionin e parë gjejmë $u_1 = -30$

b Kërkojmë n të tillë që $u_n > 0$.

$u_n = u_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow u_n = -30 + (n-1)\cdot 4 = 4n - 34$

$4n - 34 > 0 \Rightarrow n > 8{,}5$, pra $n = 9$ (Pse?)

Kufiza e parë pozitive e progresionit është kufiza e nëntë. Ajo është:

$u_9 = u_1 + 8d = -30 + 8\cdot 4 = -30 + 32 = 2$

14 Numrat log 2; log 2^x dhe log $(2^x + 4)$ formojnë progresion aritmetik. Gjeni x.

Zgjidhje

Meqë numrat log 2; log 2^x dhe log $(2^x + 4)$ formojnë progresion aritmetik kemi:

$\log 2^x - \log 2 = \log(2^x + 4) - \log 2^x$. Nga vetitë e logaritmeve shkruajmë:

$$\log\frac{2^x}{2} = \log\frac{2^x + 4}{2^x} \Rightarrow \frac{2^x}{2} = \frac{2^x + 4}{2^x}.$$

Duke zëvendësuar $2^x = t$ kemi: $\dfrac{t}{2} = \dfrac{t+4}{t} \Rightarrow t^2 = 2t + 8 \Rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0$.

Rrënjë të këtij ekuacioni janë $t_1 = -2$ ose $t_2 = 4$.

Vlera e parë nuk pranohet sepse $2^x > 0$.

Për $t = 4$ kemi $2^x = 4$ nga ku $x = 2$.

15 Shufra e hekurit që në 0°C ka gjatësinë 1 metër, rrit gjatësinë e saj me 0,00012 metra çdo dy gradë të rritjes së temperaturës.

a Tregoni se vargu $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$, ku l_n shpreh gjatësinë e shufrës në temperaturën n°C, është progresion aritmetik.

b Gjeni gjatësinë e shufrës në temperaturën 100°C; në temperaturën n°C.

Zgjidhje

a Kemi $l_n = 1 + 0{,}000006\,n$ prandaj $l_{n+1} = 1 + 0{,}000006\,(n + 1)$.
Kështu $l_{n+1} - l_n = 0{,}000006$ (konstante) për çdo $n \in \mathbb{N}$.
Vargu (l_n) është progresion aritmetik me diferencë $d = 0{,}000006$.
b Kemi $l_{100} = 1 + 100 \cdot 0{,}000006 = 1{,}0006$ m.

16 Gjeni të gjithë trekëndëshat kënddrejtë, brinjët e të cilëve formojnë progresion aritmetik.

Zgjidhje

Le të kemi një trekëndësh kënddrejtë, brinjët e të cilit formojnë progresion aritmetik. Shënojmë me x brinjën më të vogël të tij ($x > 0$) dhe me d diferencën e progresionit ($d > 0$). Brinjët e tjera janë $x + d$, $x + 2d$.
Zbatojmë teoremën e Pitagorës dhe kemi:
$(x + 2d)^2 = x^2 + (x + d)^2 \Rightarrow \quad x^2 + 4xd + 4d^2 = x^2 + x^2 + 2xd + d^2 \Rightarrow$
$x^2 - 2xd - 3d^2 = 0$
Duke zgjidhur këtë ekuacion të fuqisë së dytë me ndryshore x, gjejmë $x_1 = 3d$, $x_2 = -d$. (Rrënja x_2 nuk pranohet për problemën).
Pra, brinjët e trekëndëshit janë $3d$, $4d$, $5d$ ku d është numër real pozitiv çfarëdo.

17 Në një progresion gjeometrik me kufiza pozitive, jepen $u_{12} = 4$ dhe $u_{16} = 64$. Gjeni r.

Zgjidhje

$u_{12} = u_1 r^{11} = 4$; $\quad u_{16} = u_1 r^{15} = 64$. Duke pjesëtuar anë për anë kemi:

$$\frac{u_1 r^{15}}{u_1 r^{11}} = \frac{64}{4} = 16 \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = 2$$

18 Për ç'vlerë pozitive të x, numrat $1 - x$; $6x$ dhe $19 - 2x$ formojnë progresion gjeometrik?

Zgjidhje

Numrat u_1; u_2; u_3 formojnë progresion gjeometrik në qoftë se $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2}$. Kemi:

$$\frac{6x}{1-x} = \frac{19-2x}{6x} \Rightarrow 36x^2 = 19 - 19x - 2x + 2x^2 \Rightarrow$$

$34x^2 + 21x - 19 = 0$. Rrënjët e këtij ekuacioni janë $x_1 = \frac{1}{2}$ ose $x_2 = -\frac{76}{68}$

Për kushtet e problemës pranohet vetëm rrënja e parë, pra $x = \frac{1}{2}$.

19 Në progresionin gjeometrik gjeni u_1 dhe r, kur jepet $\begin{cases} u_4 - u_2 = 18 \\ u_5 - u_3 = 36 \end{cases}$

Zgjidhje

Sistemi $\begin{cases} u_4 - u_2 = 18 \\ u_5 - u_3 = 36 \end{cases}$ shkruhet $\begin{cases} u_1r^3 - u_1r = 18 \\ u_1r^4 - u_1r^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1r(r^2-1) = 18 \\ u_1r^2(r^2-1) = 36 \end{cases}$.

Duke pjesëtuar anë për anë ekuacionin e dytë me të parin marrim $r = 2$. Pastaj nga ekuacioni i parë nxjerrim $u_1 \cdot 2(2^2 - 1) = 18 \Rightarrow u_1 = 3$.

20 Një kapital c_0 i vendosur në bankë me një **interes të thjeshtë** vjetor p ($0 \le p \le 1$) në fund të n viteve bëhet $C_n = c_0(1 + n \cdot p)$. Po ky kapital, i vendosur me një **interes të përzier** vjetor p, në fund të n viteve bëhet $T_n = c_0(1 + p)^n$.
Banka i ofron një personi që do të depozitojë në të një sasi 20 000 dollarë për një periudhë prej 9 vitesh dy mundësi:

a depozitim me interes të thjeshtë me përqindje vjetore 11%;

b depozitim me interes të përzier me përqindje vjetore 8%.

Cila është mundësia më e leverdisshme?

Zgjidhje

Kërkohet të krahasohet $C_9 = 20000(1 + 0,11 \cdot 9)$ me $T_9 = 20000(1 + 0,08)^9$. Raporti

$\frac{C_9}{T_9} = \frac{C_9}{T_9} = \frac{1,99}{(1,08)^9} < 1$. Më me leverdi është mundësia e dytë.

21 Tri kufizat e para të një vargu kuadratik janë 0; 7; 18. Gjeni kufizën e përgjithshme të vargut.

Zgjidhje

E kërkojmë këtë kufizë në trajtën $u_n = an^2 + bn + c$. Duke zëvendësuar $n = 1$; $n = 2$ dhe $n = 3$ kemi:

$$u_1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$$

$$u_2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c$$

$$u_3 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 9a + 3b + c$$

Meqenëse tri kufizat e para janë përkatësisht 0, 7, 18 marrim sistemin:

$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 18 \end{cases}$. Zgjidhje e tij është $a = 2$; $b = 1$; $c = -3$.

Pra, $u_n = 2n^2 + n - 3$.

22 Zbërtheni $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^5$.

Zgjidhje

Nga trekëndëshi i Paskalit, koeficientet e zbërthimit janë 1; 5; 10; 10; 5; 1. Kemi:

$$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^5=(x^2)^5+5(x^2)^4(\frac{2}{x})+5(x^2)^3(\frac{2}{x})^2+5(x^2)^2(\frac{2}{x})^3+5(x^2)(\frac{2}{x})^4+(\frac{2}{x})^5=$$

$$=x^{10}+10x^7+20x^4+40x+\frac{80}{x^2}+\frac{32}{x^5}$$

23 Gjeni koeficientin e kufizës së pestë në zbërthimin $\left(\frac{3a}{2}-\frac{2b}{3}\right)^8$.

Zgjidhje

Kemi

$$T_5=C_{8,4}(\frac{3a}{2})^{8-4}(-\frac{2b}{3})^4=C_{8,4}(\frac{3}{2})^4a^4(-\frac{2}{3})^4b^4=C_{8,4}a^4b^4.$$

Koeficienti i kësaj kufize është $C_{8,4}=70$.

24 Në zbërthimin $\left(x^2+\frac{2}{x^5}\right)^7$, cila është kufiza që nuk përmban x?

Zgjidhje

$$T=C_{7,k}(x^2)^{7-k}(\frac{2}{x^5})^k=C_{7,k}\cdot x^{14-2k}\cdot\frac{2^k}{x^{5k}}=2^k\cdot C_{7,k}\cdot x^{14-7k}$$

Kjo kufizë është konstante kur $14-7k=0\Rightarrow k=2$. Koeficienti i saj është $2^2\cdot C_{7,2}=4\cdot 21=84$.

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Shkruani 5 kufizat e para të secilit varg duke përdorur rregullën kufizë pas kufize.

a Kufiza e parë 7. Rregulla kufiza pas kufize: Shto 0,5.

b Kufiza e parë 5. Rregulla kufiza pas kufize: Shumëzo me (–2).

c Kufiza e parë 20. Rregulla kufiza pas kufize: Zbrit (–5).

d Kufiza e parë 64. Rregulla kufiza pas kufize: Pjesëto me 2.

2 Në vargjet e mëposhtme përcaktoni nëse janë apo jo progresione (aritmetike, gjeometrike) apo varg Fibonaçi.

a 5; 9; 13; 17; …

b 90; 30; 10; …

c 5; 6; 11; 17; 28; …

d 3; 3^2; 3^3; 3^4; …

e 2; 2; 2; 2; …

f 2; –4; 8; –16; …

g $\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$;...

3 Tregoni një formulë për kufizën e $n^{të}$ të vargut:

a $2, 4, 6, 8, 10, 12$ b $1, 3, 5, 7$ c $4, 8, 12, 16, 20, 24$

d $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}$

P. [a) $u_n = 2n$; b) $u_n = 2n - 1$; c) $u_n = 4n$; d) $u_n = \frac{n}{n+1}$]

4 Vargu numerik është dhënë me anë të formulës $u_n = n^2 - 1$. A është kufizë e këtij vargu numri 143? Po numri 102?

P. [143 po; 102 jo]

5 Në vargjet e mëposhtme dalloni nëse janë rritës, zbritës apo periodikë.

a $u_n = \frac{1}{n}$ b $u_n = \log n$ c $u_n = \cos n\pi$ d $u_n = \frac{n}{n+1}$

P. [a) zbritës; b) rritës; c) periodik; d) rritës]

6 Në vargjet e mëposhtme gjeni kufizën e dhjetë dhe kufizën e $n^{të}$.

a $1; 3; 5; \ldots$ b $1; 2; 4; 8; 16; \ldots$ c $96; 92; 88; 84; \ldots$

P. [a) $u_{10} = 29$; $u_n = 2n - 1$; b) $u_{10} = 2^9 = 512$; $u_n = 2^{n-1}$; c) $u_{10} = 60$; $u_n = 100 - 4n$]

7 Në vargjet kuadratike të mëposhtme, në vend të pikave vendosni numrat që mungojnë:

a 4; 10; 18; .....; 40; .....

b 0; 2; .....; .....; 20; .....

8 Për ç'vlerë të x, vargu $u_n = \frac{5n+1}{(x-4)n+2}$ është konstant? P. [$x = 14$]

9 Cila kufizë e vargut $u_n = \frac{2n+3}{3n-1}$ është $\frac{15}{17}$? P. [$n = 6$]

10 Sa kufiza të vargut $u_n = \frac{n^2+2n-9}{n}$ janë numra të plotë? P. [3]

11 Sa kufiza të vargut $u_n = \frac{3}{n}$ ndodhen në intervalin $\left]\frac{1}{2}, 2\right[$? P. [4]

12 Ndërmjet numrave -5 dhe 10 vendosni katër numra të tjerë, në mënyrë që të gjashtë numrat të formojnë progresion aritmetik. P. [-2; 1; 4; 7]

13 Për ç'vlerë të x, numrat $(x + 1)$; $(3x - 3)$ dhe $(4x - 2)$ janë tri kufiza të njëpasnjëshme të një progresioni aritmetik? P. [$x = 5$]

14 Në progresionin aritmetik të mëposhtëm gjeni u_{15} dhe u_n:

a $2, 4, 6, \ldots$ b $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \ldots$

P. [a) $u_{15} = 30$; $u_n = 2n$; b) $u_{15} = \frac{29}{4}$; $u_n = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$]

15 Në progresionin aritmetik, kufiza e parë është 7 dhe ajo e teta është 35. Shkruani progresionin.

P. [7, 11, 15, ...]

16 A është progression gjeometrik vargu i dhënë më formulën $u_n = 2^n$) P. [po]

17 Në progresionin gjeometrik me $u_1 = \frac{3}{5}$ dhe $r = \frac{1}{2}$ gjeni u_5. P. [$\frac{3}{80}$]

18 Në tabelën e mëposhtme plotësoni kutizat boshe:

Nr.	Lloji i vargut	Rregulla	Kufiza e parë	Kufiza e tretë	Kufiza e gjashtë
1	Progresion aritmetik	Shto 5	20		
2	Progresion aritmetik	Zbrit 6		70	
3	Progresion aritmetik	Shto 2			54
4	Progresion gjeometrik	Shumëzo me (–2)	1		
5	Progresion gjeometrik	Pjesëto me 2		12	
6	Progresion gjeometrik	Shumëzo me 3			243
7	Progresion gjeometrik	Shumëzo me $\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$		

19 Në progresionin gjeometrik 3, $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$ gjeni u_5 dhe u_{10}. P. [$\frac{3}{16}$; $\frac{3}{512}$]

20 Në një progresion gjeometrik jepen $u_{12} = 4$ dhe $u_{16} = 64$. Gjeni r. P. [$r = 2$]

21 Për ç'vlerë të $x > 0$ numrat $(1 - x)$; $6x$ dhe $(9 - 2x)$ formojnë progresion gjeometrik?

P. [$x = \frac{1}{2}$]

22 Jepen numrat 2; x; y; 9.
Tri të parët formojnë progresion aritmetik, ndërsa tri të fundit formojnë progresion gjeometrik. Gjeni numrat x dhe y duke ditur qe ata janë numra pozitivë.

P. [$x = 4$; $y = 6$]

23 Në progresionin gjeometrik gjeni u_1 dhe r, kur jepet

a $\begin{cases} u_2 - u_1 = -4 \\ u_3 - u_1 = 8 \end{cases}$ b $\begin{cases} \dfrac{u_5}{u_2} = 64 \\ u_4 = 8 \end{cases}$

P. [a) $u_1 = 1; r = -3$; b) $u_1 = \frac{1}{8}; r = 4$]

24 Gjeni numrin e kufizave të progresionit gjeometrik në të cilin $u_1 = 3$, $r = \frac{1}{2}$, $u_n = \frac{3}{64}$

P. [$n = 5$]

25 Shuma e tri numrave që formojnë progresion aritmetik është 12. Në qoftë se numrit më të madh i shtojmë 2, atëherë numrat formojnë progresion gjeometrik. Gjeni këta numra. P. [2; 4; 6]

26 Gjeni kufizën e $n^{të}$ të vargut kuadratik 3; 8; 15; 24; … P. [$u_n = n^2 + 2n$]

27 Tri kufizat e para të një progresioni gjeometrik janë $\sqrt[4]{3}; \sqrt[8]{3}$ dhe 1. Gjeni kufizën e katërt të tij. P. [$\frac{1}{\sqrt[8]{3}}$]

28 Gjeni koeficientin e kufizës së tretë në zbërthimin $(b + 2a)^7$. P. [84]

29 Gjeni koeficientin e kufizës së tretë nga fundi në zbërthimin $(x + y)^8$. P. [28]

30 Në zbërthimin $(2x^2 - y^3)^n$ njëra nga kufizat është $a \cdot x^6 \cdot y^{12}$. Gjeni a. P. [280]

KREU 8

GJEOMETRIA NË PLAN

Kongruenca e trekëndëshave

Dy trekëndësha janë kongruentë në qoftë se kanë:

1. tri brinjë të barabarta (BBB);
2. dy brinjë dhe këndin ndërmjet tyre të barabartë (BKB);
3. një brinjë dhe këndet anëshkruar saj të barabarta (KBK).

Ngjashmëria e trekëndëshave

Dy trekëndësha janë të ngjashëm në qoftë se kanë:

1. të gjithë këndet të barabarta;
2. të gjitha brinjët të përpjesshme.

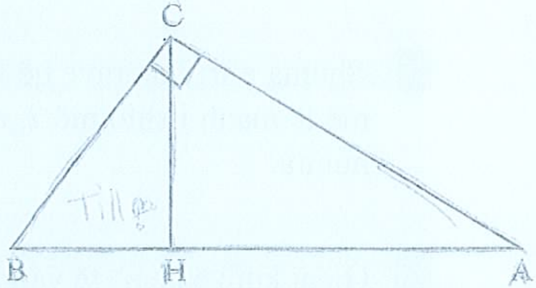


Fig. 8.1

Teorema e Pitagorës: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (Figura 8.1)

Teoremat e Euklidit: $CH^2 = AH \cdot HB$; $AC^2 = AB \cdot AH$; $BC^2 = AB \cdot BH$ (Figura 8.1)

Diagonalja d e katrorit me brinjë a: $d = a\sqrt{2}$

Syprina e trekëndëshit me bazë b dhe lartësi h: $S = \frac{1}{2} b \cdot h$

Syprina e paralelogramit me bazë b dhe lartësi h: $S = b \cdot h$

Formula e Heronit: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ku $p = \frac{a+b+c}{2}$

Syprina e trapezit me baza B dhe b dhe lartësi h: $S = \frac{1}{2} h(B+b)$

Syprina e rombit me diagonale d_1 dhe d_2: $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$

Perimetri i rrethit me rreze R: $P = 2\pi R$

Syprina e qarkut me rreze R: $S = \pi R^2$

Gjatësia e harkut n^0: $l = \frac{\pi R n}{180^0}$

Syprina e sektorit qarkor: $S = \frac{\pi R^2 n}{360^0}$

Xhesiana
Lamaj

Ushtrime të zgjidhura

1 Në figurën 8.2 jepen $BC = AD$ dhe $\angle 1 = \angle 2$. Gjeni AB dhe BC, në qoftë se $AD = 15$ cm dhe $DC = 12$ cm.

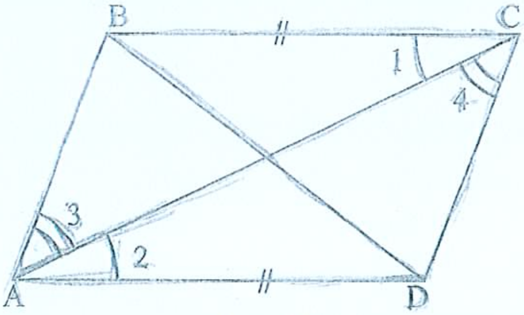


Fig. 8.2

Zgjidhje

Trekëndëshat ADC dhe ABC janë kongruentë, sepse:
1. AC e përbashkët 2. $AD = BC$ 3. $\angle 1 = \angle 2$.

Në trekëndëshat kongruentë, përballë këndeve kongruentë ($\angle 1 = \angle 2$ dhe $\angle 3 = \angle 4$) ndodhen brinjë kongruente.
Prandaj AB = CD = 12 cm dhe BC = AD = 15 cm.

2 Në bazën BC të trekëndëshit dybrinjënjëshëm ABC janë marrë pikat M, N, të tilla që BM = CN (fig. 8.3). Tregoni që trekëndëshi AMN është dybrinjënjëshëm.

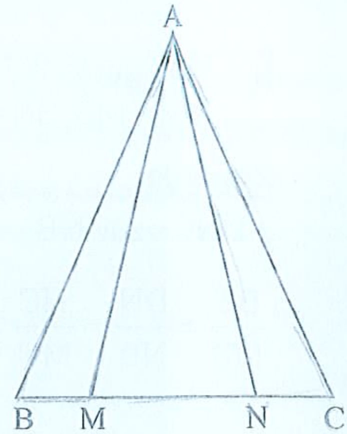


Fig.8.3

Vërtetim

Trekëndëshat ABM dhe ACN janë kongruentë, sepse:
1. AB = AC (nga kushti); 2. $\angle ABM = \angle ACN$ (si kënde të bazës të trekëndëshit dybrinjënjëshëm); 3. BM = CN (nga kushti).
Në trekëndëshat kongruentë, përballë këndeve kongruentë ($\angle ABM = \angle ACN$) ndodhen brinjë kongruente. Prandaj AM = AN dhe trekëndëshi AMN është dybrinjënjëshëm.

3 Brinjët e një trekëndëshi rrinë si 5:6:8. Perimetri i një trekëndëshi të ngjashëm me të është 38 cm.

a Gjeni brinjët e trekëndëshit të dytë.
b Gjeni brinjët e trekëndëshit të parë, në qoftë se brinja më e madhe e tij është 12 cm më e madhe se brinja më e vogël.

Zgjidhje

a Shënojmë me a, b, c brinjët e trekëndëshit të parë dhe a_1, b_1 dhe c_1 brinjët përkatësisht homologe të trekëndëshit të dytë. Kemi:
$a = 5x$; $b = 6x$; $c = 8x$

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}\Rightarrow\frac{5x}{a_1}=\frac{6x}{b_1}=\frac{8x}{c_1}=\frac{5x+6x+8x}{a_1+b_1+c_1}=\frac{19x}{38}=\frac{1}{2}x$$. Rrjedhimisht:

$$\frac{5x}{a_1}=\frac{1}{2}x\Rightarrow a_1=10\text{ cm};\ \frac{6x}{b_1}=\frac{1}{2}x\Rightarrow b_1=12\text{ cm};\ \frac{8x}{c_1}=\frac{1}{2}x\Rightarrow c_1=16\text{ cm}.$$

b Kemi:
$a = 5x$; $b = 6x$; $c = 8x$
Nga kushti $c = a + 12$ kemi $8x = 5x + 12 \Rightarrow x = 4$ dhe
$a = 5 \times 4 = 20$ cm; $b = 6 \times 4 = 24$ cm dhe $c = 8 \times 4 = 32$ cm.

4 Në figurën 8.4 jepet CA = CB dhe AB = CD. Gjeni këndet e trekëndëshit ABC.

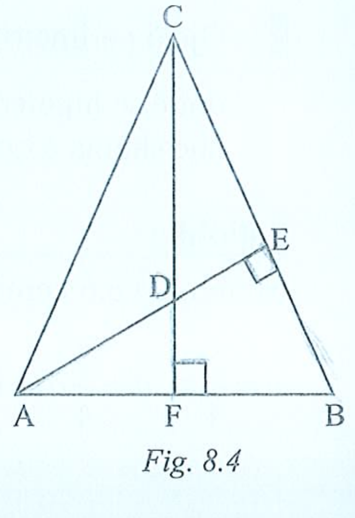


Fig. 8.4

Zgjidhje

Kemi:

$$\begin{cases}\angle BAE = 90^0 - \angle ABE\\ \angle FCB = 90^0 - \angle ABE\end{cases}\Rightarrow \angle BAE = \angle FCB$$

Kemi: $\Delta ABE = \Delta BCF$ (pse?). Nga kjo rrjedh se $CE = AE$.
Trekëndëshi ACE është kënddrejtë dybrinjënjëshëm prandaj $\angle ACB = 45^0$. Kemi:

$$\angle CAB = \angle CBA = \frac{180^0 - 45^0}{2} = 67,5^0$$

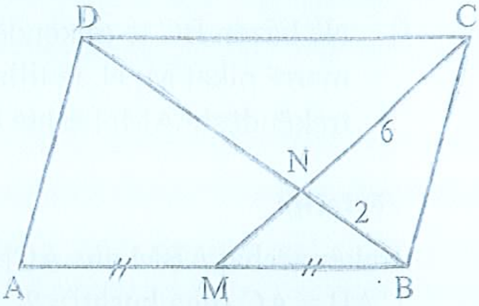


Fig. 8.5

5 Në figurën 8.5, $ABCD$ është paralelogram. Jepet $AM = MB$; $BN = 2$ cm; $NC = 6$ cm. Gjeni DN dhe MN.

Zgjidhje

$\Delta DNC \sim \Delta MNB$

$$\frac{DC}{MB} = \frac{DN}{NB} = \frac{NC}{MN} \Rightarrow \frac{2MB}{MB} = \frac{DN}{2} = \frac{6}{MN} = 2 \Rightarrow DN = 4 \text{ cm}; \ MN = 3 \text{ cm}$$

6 Dy cilindra të ngjashëm kanë lartësi 3 cm dhe 6 cm. Nëse vëllimi i cilindrit të vogël është 30 cm^3, gjeni vëllimin e cilindrit të madh.

Zgjidhje

Nëse raporti i ngjashmërisë është k (sa raporti i lartësive), atëherë raporti i vëllimeve është k^3.
Kemi $k = \frac{6}{3} = 2$. Prandaj $\frac{V}{v} = k^3$ d.m.th., $\frac{V}{30} = 2^3$. Del $V = 240$ cm^3.

7 Dy sfera prej të njëjtit material kanë masa përkatësisht 32 kg dhe 108 kg. Rrezja e sferës së madhe është 9 cm. Gjeni rrezen e sferës së vogël.

Zgjidhje

Raporti i vëllimeve = raporti i masave.

$\frac{V}{v} = \frac{108}{32} = k^3$ (k = raporti i ngjashmërisë = $\frac{R}{r}$).

Pra $\left(\frac{R}{r}\right)^3 = \frac{108}{32}$ del $\frac{R}{r} = \sqrt[3]{\frac{108}{32}} = \frac{3}{2}$. Kështu $\frac{9}{r} = \frac{3}{2}$. Del $r = 6$ cm.

8 Gjeni perimetrin e një trekëndëshi kënddrejtë, në qoftë se hipotenuza e tij është sa $\frac{5}{4}$ e njërit katet, dhe shuma e tyre është 117 cm.

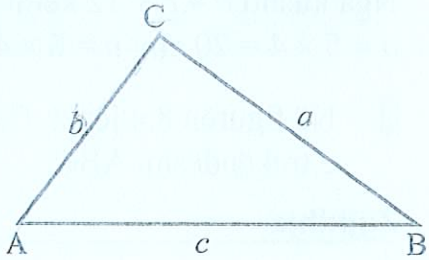


Fig. 8.6

Zgjidhje:

Në figurën 8.6 kemi:

$$c = \frac{5}{4}a; \ a + \frac{5}{4}a = 117 \Rightarrow \frac{9}{4}a = 117 \Rightarrow a = 52 \text{ cm nga ku } c = \frac{5}{4}a = \frac{5}{4} \cdot 52 = 65 \text{ cm}$$

Për të gjetur katetin tjetër, zbatojmë teoremën e Pitagorës. Kemi:

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{4225-2704}=\sqrt{1521}=39 \text{ cm}.$$

Gjejmë, perimetrin e trekëndëshit:
$P=a+b+c=52+39+65=156$ cm

9 Në figurën 8.7, jepet $BD=AD=4\sqrt{3}$ cm dhe $\angle ABD=15^0$. Gjeni DC.

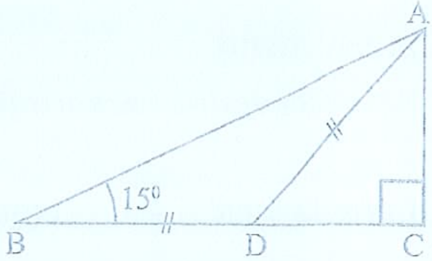


Fig. 8.7

Zgjidhje

Trekëndëshi ABD është dybrinjënjëshëm, prandaj $\angle ABD=\angle BAD=15^0$.
Kemi: $\angle ADC=\angle ABD+\angle BAD=15^0+15^0=30^0$ (si kënd i jashtëm i trekëndëshit ABD). Në trekëndëshin kënddrejtë ADC, kateti AC ndodhet përballë këndit 30^0, prandaj $AC=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$. Për të gjetur DC, në këtë trekëndësh zbatojmë teoremën e Pitagorës. Kemi:

$$DC=\sqrt{AD^2-AC^2}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{48-12}=\sqrt{36}=6 \text{ cm}.$$

10 Në trekëndëshin dybrinjënjëshëm, brinja anësore është 10 cm, kurse baza 12 cm. Gjeni lartësinë mbi bazë dhe syprinën e trekëndëshit.

Zgjidhje

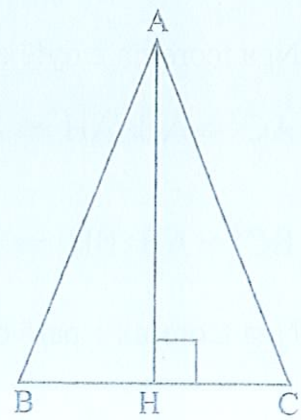


Fig. 8.8

Në figurën 8.8 kemi AB = AC = 10 cm dhe BC = 12 cm.

Lartësia AH është mesore e bazës, prandaj $HC=\frac{1}{2}BC=6$ cm.

Zbatojmë në trekëndëshin kënddrejtë AHC teoremën e Pitagorës. Kemi:
$AC^2=AH^2+HC^2$ d.m.th., $10^2=AH^2+6^2$, që nga
$AH^2=10^2-6^2=64$.
Atëherë $AH=\sqrt{64}=8$ cm.
Syprina e trekëndëshit është $S=\frac{1}{2}AH\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot8\cdot12=48$ cm^2.

11 Gjeni syprinën e trekëndëshit barabrinjës me brinjë a.
Le të jetë ABC një trekëndësh barabrinjës me brinjë a (fig. 8.9).

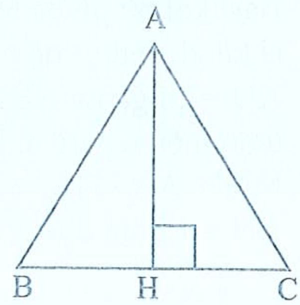


Fig. 8.9

Lartësia AH është mesore e bazës, prandaj $HC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$.

Zbatojmë teoremën e Pitagorës në trekëndëshin AHC. Kemi:

$AH^2+HC^2=AC^2$ d.m.th., $AH^2+(\frac{1}{2}a)^2=a^2$ nga ku

$AH^2=a^2-\frac{1}{4}a^2=\frac{3}{4}a^2$. Del $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Syprina e trekëndëshit barabrinjës ABC është

$$S=\frac{1}{2}BC\cdot AH=\frac{1}{2}a\cdot a\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Mbani mend:

Në trekëndëshin barabrinjës me brinjë a:

Lartësia është $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **Syprina është** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

12 Në trekëndëshin kënddrejtë ABC (fig. 8.10) jepen katetet AC = 15 cm dhe BC = 20 cm. Gjeni hipotenuzën, projeksionet e kateteve, si dhe lartësinë mbi hipotenuzë.

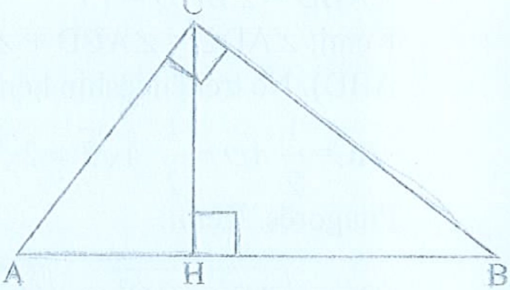


Fig. 8.10

Zgjidhje

Nga teorema e Pitagorës kemi:

$$AB^2=AC^2+BC^2 \Rightarrow AB=\sqrt{15^2+20^2}=\sqrt{225+400}=\sqrt{625}=25 \text{ cm.}$$

Nga teorema e dytë e Euklidit kemi:

$$AC^2=AB\cdot AH \Rightarrow AH=\frac{AC^2}{AB}=\frac{225}{25}=9 \text{ dhe}$$

$$BC^2=AB\cdot BH \Rightarrow BH=\frac{BC^2}{AB}=\frac{400}{25}=16$$

Nga teorema e parë e Euklidit kemi:

$$CH^2=AB\cdot BH \Rightarrow CH=\sqrt{AB\cdot BH}=\sqrt{9\cdot 16}=\sqrt{144}=12 \text{ cm.}$$

13 Nga pika M e një gjysmërrethi ndërtohet segmenti MN, pingul me diametrin AB të rrethit (fig. 8.11). Gjeni segmentet AN dhe NB në qoftë se NB – AN = 15 cm dhe MN = 18 cm.

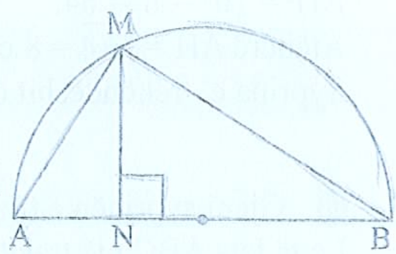


Fig. 8.11

Zgjidhje

Bashkojmë pikën M me pikat A dhe B. Kemi $\angle AMB = 90^0$, si kënd rrethor që mbështetet në diametrin e rrethit. Shënojmë $AN = x$ nga ku $NB = 15 + x$. Në trekëndëshin AMB, zbatojmë teoremën e parë të Euklidit. Kemi:

$MN^2 = AN \cdot NB \Rightarrow 18^2 = x\cdot(15+x) \Rightarrow x^2+15x-324=0 \Rightarrow x = 12$ cm. Përfundimisht AN = 12 cm dhe NB = 27 cm.

14 Një drejtkëndësh ka perimetër 218 cm dhe diferenca e përmasave është 30 cm. Gjeni syprinën.

Zgjidhje

Shënojmë x cm përmasën më të vogël; përmasa tjetër do të jetë $30 + x$.
Perimetri është $2 \cdot x + 2 \cdot (30 + x)$ e dihet që është 218 cm.
Kemi $2x + 60 + 2x = 218$, prej ku $x = 37$ cm.
Përmasat janë 37 cm; 67 cm dhe syprina është 2479 cm^2.

15 Gjeni përmasat e gjithë drejtkëndëshave me syprina 48 cm^2, duke ditur që ato janë numra natyrorë.

Zgjidhje

Duke shënuar me a, b përmasat, kemi $a \cdot b = 48$, ku a, b janë numra natyrorë. Kërkohen pra pjesëtues natyrorë të numrit 48. Zgjidhjet e mundshme janë (për përmasat):
1 cm dhe 48 cm; 2 cm dhe 24 cm; 3 cm dh e 16 cm; 4 cm dhe 12 cm; 6 cm dhe 8 cm.

16 Në trekëndëshin EKF jepen EK = 12 cm;
EF = 18 cm. Gjeni syprinën e trekëndëshit nëse:
a $\angle E = 45^0$ **b** $\angle E = 60^0$.

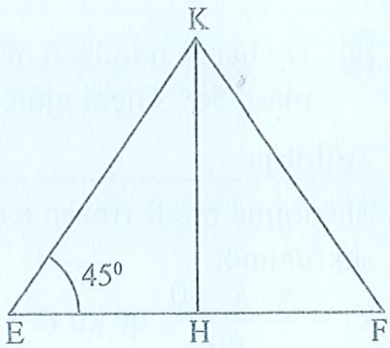


Fig. 8.12

Zgjidhje

a Shqyrtojmë figurën 8.12, ku EK = 12 cm; EF = 18 cm dhe $\angle E = 45^0$.
Heqim lartësinë $KH \perp EF$ dhe shënojmë me x gjatësinë e kësaj lartësie. Trekëndëshi kënddrejtë EKH e ka njërin nga këndet e ngushtë 45^0, prandaj edhe këndi tjetër i ngushtë është 45^0. Ky del trekëndësh kënddrejtë dybrinjënjëshëm dhe EH = KH = x.
Në trekëndëshin kënddrejtë EKH, zbatojmë teoremën e Pitagorës dhe marrim $x^2 + x^2 = EK^2$ pra $2x^2 = 12^2$, prej ku $x^2 = 72$ dhe $x = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ cm.

Pra, $KH = 6\sqrt{2}$ cm.
Atëherë, syprina e trekëndëshit EKF është

$$S = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot KH = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 6\sqrt{2} \text{ d.m.th., } S = 54\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

17 Një barkë duhet të kalojë nga njëra anë (pika A) në tjetrën (pika B) të një lumi të gjerë 104 m. Për shkak të rrjedhës, barka ecën pjerrtas duke përshkruar 130 m dhe duke mbërritur në një pikë C (fig. 8.13). Sa është largesa ndërmjet pikave B dhe C?

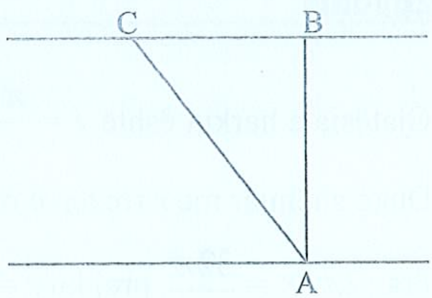


Fig. 8.13

Zgjidhje

Në trekëndëshin kënddrejtë ABC (ku AB = 104 m dhe AC = 130 m) zbatojmë teoremën e Pitagorës dhe kemi:
$BC^2 = AC^2 - AB^2 = 130^2 - 104^2 = (130 - 104) \cdot (130 + 104) = 26 \cdot 234 = 2 \cdot 13 \cdot 18 \cdot 13 = 13^2 \cdot 6^2$.

Prandaj BC = $\sqrt{13^2 \cdot 6^2} = 13 \cdot 6 = 84$ m.

18 a Korda e një rrethi është 8 cm dhe largesa e saj nga qendra e rrethit është 7,5 cm. Gjeni rrezen e rrethit.

b Rrezja e një rrethi është 6 cm. Gjeni gjatësinë e një korde që e ka largesën nga qendra 4,8 cm.

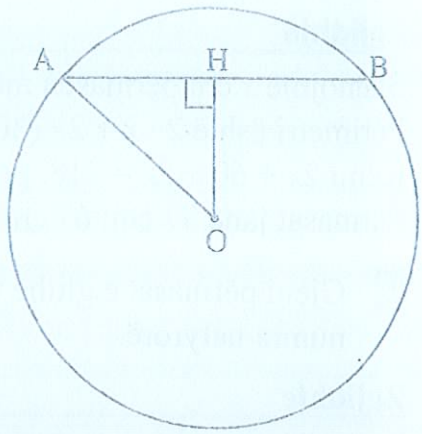


Fig.8.14

Zgjidhje

a Shqyrtojmë figurën 8.14, në të cilën kemi AB = 8 cm dhe OH = 7,5 cm (ku OH $\perp$ AB).
Dihet që OH e ndan segmentin AB në dy pjesë të barabarta, pra AH = 4 cm. Rrezen OA të rrethit e gjejmë duke zbatuar teoremën e Pitagorës në trekëndëshin kënddrejtë AOH.
Kemi $OA^2 = AH^2 + OH^2 = 4^2 + (7,5)^2 = 16 + 56,25 = 72,25$.
Del OA = $\sqrt{72,25} = 8,5$ cm.

19 Dy harqe ndodhen në të njëjtin rreth, i pari prej tyre ka një gjatësi prej 27 cm dhe masë 50°. Gjeni gjatësinë e harkut të dytë, duke ditur që ai ka masën 160°.

Zgjidhje

Shënojmë me R rrezen e rrethit. Për harkun e parë, me gjatësi 27 cm e kënd qendror 50°, shkruajmë:

$27 = \frac{\pi \cdot R \cdot 50}{180}$, që ku R = $\frac{27 \cdot 180}{\pi \cdot 50}$, pra R = $\frac{27 \cdot 18}{\pi \cdot 5}$.

Gjatësia e harkut të dytë, me masë 160°, është $\ell = \frac{\pi \cdot R \cdot 160}{180}$.

Pra $\ell = \frac{\pi \cdot 8}{9} \cdot R = \frac{\pi \cdot 8}{9} \cdot \frac{27 \cdot 18}{\pi \cdot 5} = \frac{16 \cdot 27}{5} = \frac{432}{5}$ cm.

20 Harku me masë 120° në rrethin me rreze R = 16 cm "mblidhet" duke formuar një rreth. Gjeni rrezen e këtij rrethi.

Zgjidhje

Gjatësia e harkut është $\ell = \frac{\pi \cdot R \cdot n}{180} = \frac{\pi \cdot 16 \cdot 120}{180} = \frac{32\pi}{3}$.

Duke shënuar me r rrezen e rrethit në të cilin ai "mblidhet", kemi $\ell = 2\pi \cdot r$.

Pra, $2\pi \cdot r = \frac{32\pi}{3}$, prej ku $r = \frac{16}{3}$ cm.

21 Harku i një sektori qarkor ka gjatësi 82 cm dhe rrezja e rrethit është 15 cm. Gjeni syprinën e sektorit qarkor.

Zgjidhje

Për harkun e shqyrtuar, barazimi $l = \frac{\pi \cdot R \cdot n}{180}$ merr pamjen $82 = \frac{\pi \cdot 15 \cdot n}{180}$, prej ku

$n = \frac{82 \cdot 180}{\pi \cdot 15}$, pra $n = \frac{82 \cdot 12}{\pi}$.

Syprina e sektorit qarkor është $S = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot n}{360} = \frac{\pi \cdot 15^2}{360} \cdot \frac{82 \cdot 12}{\pi} = 615$ cm².

22 Gjeni syprinën e katrorit të brendashkruar në rrethin me rreze R.

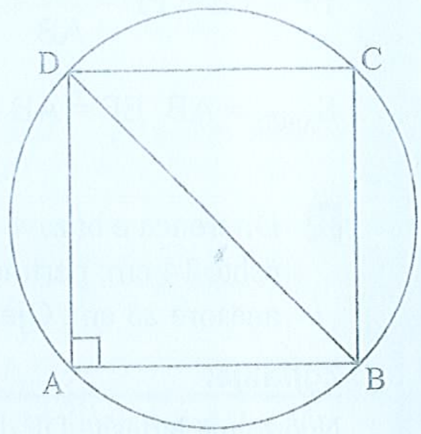


Fig. 8.15

Zgjidhje:

Në (fig. 8.15) kemi:

Meqë $\angle DAB = 90^0$, del se [DB] është diametër i rrethit. (pse?) Në trekëndëshin kënddrejtë ADB kemi:

$AD = AB = x$ dhe $DB = 2R$. Zbatojmë teoremën e Pitagorës:

$AD^2 + AB^2 = (2R)^2 \Rightarrow x^2 + x^2 = 4R^2 \Rightarrow 2x^2 = 4R^2 \Rightarrow x^2 = 2R^2$

$S_{ABCD} = x^2 = 2R^2$

.

23 Në figurën 8.16 jepet: $AB = BD$; $\angle CAD = 30^0$; $\angle CDA = 90^0$ dhe $S_{ACD} = 18\sqrt{3}$ cm².
Gjeni gjatësitë e segmenteve AB; BD; CD; BC dhe AC.

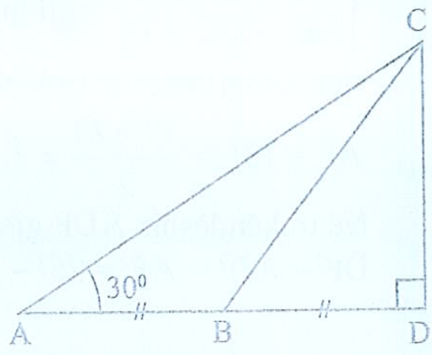


Fig. 8.16

Zgjidhje

Shënojmë $CD = x$ nga ku $AC = 2x$ (kateti përballë këndit 30° është sa gjysma e hipotenuzës).

Në trekëndëshin kënddrejtë ACD zbatojmë teoremën e Pitagorës.

$AD^2 = AC^2 - CD^2 x - = (2x)^2 - x^2 = 3x^2 \Rightarrow AD = x\sqrt{3}$.

Kemi:

$S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CD = \frac{1}{2} x\sqrt{3} \cdot x = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$ nga ku $x = 6$ cm

Pra, CD = 6 cm. Kemi gjithashtu $AC = 2x = 12$ cm dhe

$AD = x\sqrt{3}$ nga ku $AB = BD = 3\sqrt{3}$ cm.

Së fundi, gjejmë BC në trekëndëshin kënddrejtë BDC. Kemi:

$BC^2 = BD^2 + DC^2 = (3\sqrt{3})^2 + 6^2 = 27 + 36 = 63$ nga ku $BC = \sqrt{63}$ cm.

24 Brenda paralelogramit merret pika P (fig. 8.17). Jepet $S_{PAB} = 5\ cm^2$; $S_{PCD} = 8\ cm^2$. Gjeni syprinën e paralelogramit.

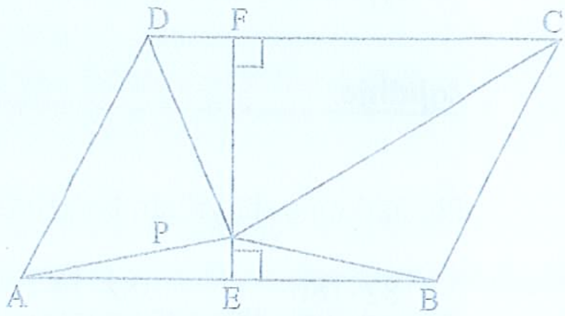


Fig. 8.17

Zgjidhje

Nga pika P ndërtojmë EF pingule me AB dhe DC.
Kemi:

$$S_{PAB} = \frac{1}{2} AB \cdot PE \Rightarrow PE = \frac{2S_{PAB}}{AB} = \frac{10}{AB}$$

$$S_{PDC} = \frac{1}{2} DC \cdot PF \Rightarrow PF = \frac{2S_{PDC}}{DC} = \frac{16}{AB}$$

$$EF = PE + PF = \frac{10}{AB} + \frac{16}{AB} = \frac{26}{AB} \quad \text{nga ku}$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot EF = AB \cdot \frac{26}{AB} = 26\ cm^2$$

25 Diferenca e bazave të trapezit dybrinjënjëshëm është 14 cm; perimetri 110 cm dhe brinja anësore 25 cm. Gjeni syprinën e tij.

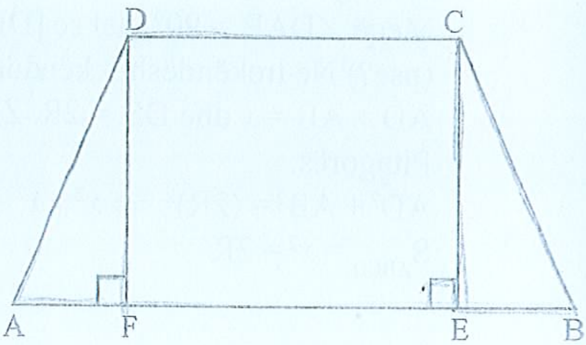


Fig. 8.18

Zgjidhje:

Ndërtojmë lartësitë DF dhe CE të trapezit (fig. 8.18).
Kemi:

$P_{ABCD} = AB + DC + 2AD = AB + DC + 50$
$\Rightarrow AB + DC = 60.$

Nga ana tjetër, $AB - DC = 14$. Formojmë sistemin:

$$\begin{cases} AB + DC = 60 \\ AB - DC = 14 \end{cases}$$ zgjidhja e të cilit është $AB = 37$ dhe $DC = 23$.

Nga kongruenca e trekëndëshave ADF dhe CEB (pse?) kemi:

$$AF = EB = \frac{37 - 23}{2} = 7.$$

Në trekëndëshin ADF gjejmë lartësinë DF. Kemi:
$DF^2 = AD^2 - AF^2 = 25^2 - 7^2 = 625 - 49 = 576 \Rightarrow DF = 24$. Së fundi:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot DF = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 24 = 720\ cm^2.$$

26 Në (fig. 8.19) jepet $BD = 8$ cm; $AD = 6$ cm; $\angle ADB = 60^0$ dhe $\angle DAC = 30^0$. Gjeni syprinën e trekëndëshit ABC.

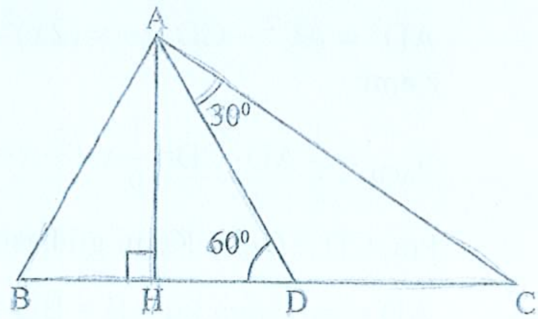


Fig. 8.19

Zgjidhje

Ndërtojmë [AH] ⊥ [BC]. Në trekëndëshin AHD kemi:

$\angle ADH = 60^\circ \Rightarrow \angle HAD = 30^\circ \Rightarrow$

$HD = \frac{1}{2}AD \ \frac{1}{2}\cdot 6 = 3$. Gjejmë AH:

$AH^2 = AD^2 - HD^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow AH = 3\sqrt{3}$

$\angle HAC = \angle HAD + \angle DAC = 30^0 + 30^0 = 60^0 \Rightarrow \angle ACH = 90^0 - 60^0 = 30^0$

$\angle DAC = \angle ADC = 30^0 \Rightarrow DC = AD = 6$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AH = \frac{1}{2}\cdot(8+6)\cdot 3\sqrt{3} = 21\sqrt{3}\ cm^2$

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Në figurën 8.20 gjeni $AH = x$.

P. [6 cm]

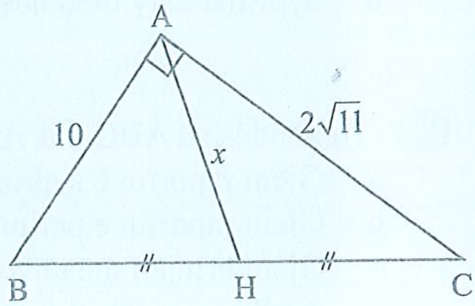


Fig. 8.20

2 Një pasqyrë, së bashku me kornizën e saj, është 105 cm e gjerë dhe 60 cm e lartë, kurse vetë korniza është 4 cm e gjerë. Sa është syprina e vetë pasqyrës?

P. [5044 cm²]

3 Në një drejtkëndësh, perimetri është 130 cm dhe njëra brinjë është sa $\frac{8}{5}$ e brinjës tjetër. Gjeni syprinën.

P. [1000 cm²]

4 Në trekëndëshin dybrinjënjëshëm (AB = AC), baza është 6 cm, kurse lartësia 4 m. Gjeni largesën e kulmit B të trekëndëshit nga brinja anësore AC. **P. [4,8 cm]**

5 Në drejtkëndëshin ABCD, njihen brinjët AB = 28 cm, AD = 21 cm. Nga kulmi D është hequr lartësia DH mbi diagonalen AC. Njehsoni gjatësitë e segmenteve AH, HC.

P. $[\frac{411}{35}; \frac{814}{35}]$

6 Në figurën 8.21, AD është përgjysmore e këndit A. Jepet BD = 4 cm dhe AC = 12 cm. Gjeni S_{ADC}.

P. [24 cm²]

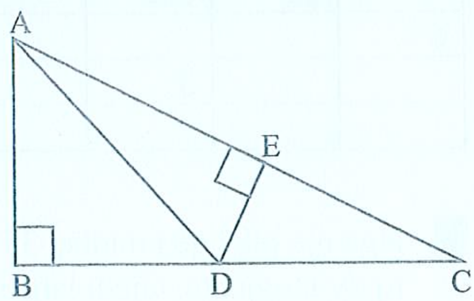


Fig. 8.21

7 Një trekëndësh kënddrejtë ka një katet 72 cm. Duke ditur që kateti tjetër është sa $\frac{4}{5}$ e hipotenuzës, gjeni syprinën dhe perimetrin e trekëndëshit.

P. [3456 cm^2; 288 cm]

8 Në figurën 8.22 jepet AB = BC; BC = 2HB dhe $AC = 12\sqrt{3}$ cm. Gjeni S_{ABC}.

P. [$54\sqrt{3}$ cm^2]

Udhëzim: Shënojmë HB = x nga ku BC = AB = $2x$. Në trekëndëshin AHB gjejmë AH në varësi të x.

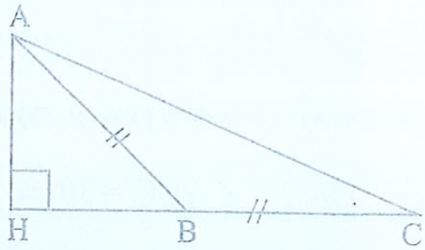


Fig. 8.22

9 Katetet e një trekëndëshi kënddrejtë janë 3 cm dhe 4 cm. Hipotenuza e një trekëndëshi të ngjashëm me të është 15 cm. Gjeni:

a katetet e trekëndëshit të dytë;

b syprinat e dy trekëndëshave.

P. [a) 9 cm; 12 cm; b) 6 cm^2; 54 cm^2]

10 Trekëndëshat ABC dhe $A_1B_1C_1$ janë të ngjashëm me koeficient ngjashmërie 1,5.

a Gjeni raportin e syprinave të tyre. **P.** [2,25]

b Gjeni raportin e perimetrave të tyre. **P.** [1,5]

c Gjeni brinjën më të vogël të trekëndëshit të parë, në qoftë se ajo është 7 cm më e madhe se brinja më e vogël e trekëndëshit të dytë. **P.** [14 cm]

d Gjeni brinjët e trekëndëshit të parë, në qoftë se ato janë 7 cm; 8 cm dhe 10 cm me të mëdha se brinjët homologe të trekëndëshit të dytë.

P. [21cm; 24 cm; 30 cm]

11 Jepet trekëndëshi kënddrejtë ABC (fig. 8.23). Plotësoni tabelën e mëposhtme:

AC	BC	AB	CH	AH	HB
15	20				
100		125			
	65	169			
6				3,6	
		3			2
				2	18

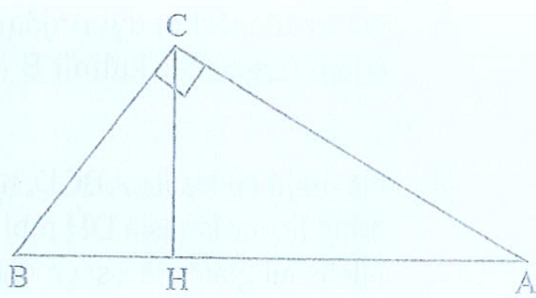


Fig. 8.23

12 Nga një pikë që ndodhet 35 cm larg qendrës së një rrethi me rreze 7 cm, hiqen ndaj tij dy tangjente. Gjeni largesën ndërmjet pikave të takimit. **P.** [13,44 cm]

13 Në anë të ndryshme të qendrës së rrethit me rreze 30 cm, jepen dy korda paralele AB = 36 cm dhe CD = 48 cm (fig. 8.24). Gjeni largesën MN ndërmjet tyre.

P. [6 cm]

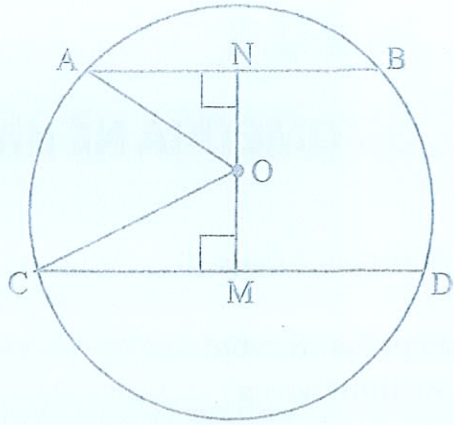


Fig. 8. 24

14 Jepet trekëndëshi me bazë 14 cm dhe brinjë anësore 13 cm dhe 15 cm. Gjeni:

a lartësinë mbi bazë;

P. [12 cm]

b projeksionet e brinjëve anësore mbi bazë.

P. [5cm; 9 cm]

15 Në figurën 8.25 gjeni syprinën e vijëzuar, në qoftë se brinja e katrorit është 4 cm.

P. [$(8\pi-16)$ cm^2]

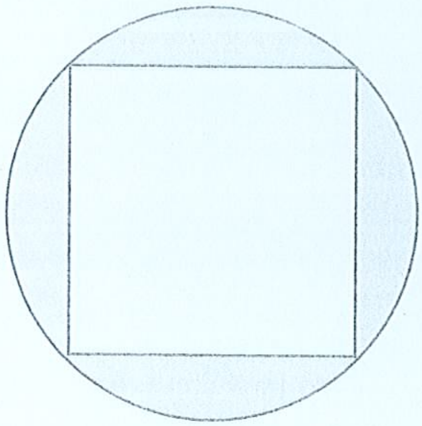


Fig. 8. 25

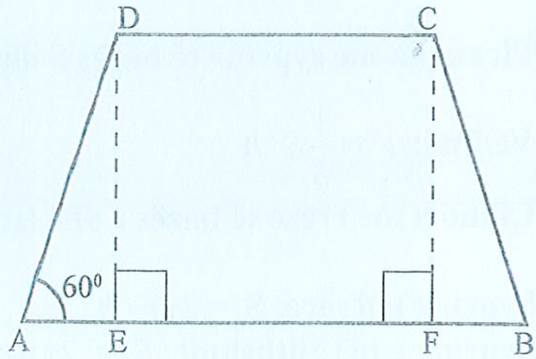


Fig. 8. 26

16 Në fig. 8.26, ABCD është trapez dybrinjënjëshëm. Jepen AB = 12 cm; DC = 6 cm dhe $\angle DAB = 60^0$. Gjeni:

a lartësinë e trapezit;

b diagonalet e trapezit.

P. [a) $3\sqrt{3}$ cm; b) $6\sqrt{3}$ cm]

17 Në figurën 8.27, ABC është trekëndësh kënddrejtë me katete AC = a dhe BC = b, ndërsa CDEF është katror. Gjeni perimetrin e katrorit.

P. [$\frac{4ab}{a+b}$]

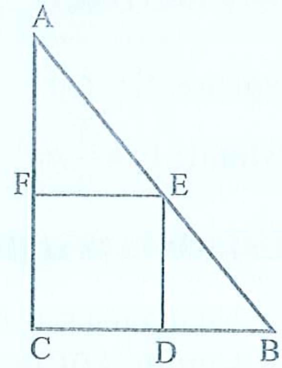


Fig. 8.27

KREU 9

GJEOMETRIA NË HAPËSIRË

Kubi me brinjë a:

Syprina: $S = 6a^2$
Vëllimi: $V = a^3$

Kuboidi me përmasa a, b, c:

Syprina: $S = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$
Vëllimi: $V = a \cdot b \cdot c$

Prizmi me syprinë të bazës S dhe lartësi h.
Vëllimi: $V = S \cdot h$

Piramida me syprinë të bazës S dhe lartësi h.

Vëllimi: $V = \frac{1}{3} S \cdot h$

Cilindri me rreze të bazës r dhe lartësi h.

Syprina anësore: $S_a = 2\pi r \cdot h$
Syprina e përgjithshme: $S_p = 2\pi r(r + h)$
Vëllimi: $V = \pi r^2 \cdot h$

Koni me rreze të bazës r, lartësi h dhe përftuese l.

Syprina anësore: $S_a = \pi r \cdot l$
Syprina e përgjithshme: $S_p = \pi r(r + l)$
Vëllimi: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

Sfera me rreze r.

Syprina: $S = 4\pi r^2$

Vëllimi: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Ushtrime të zgjidhura

1 Në figurën 9.1, ABCDMNPQ është kuboid me bazë katrorin ABCD. Jepet AM = 5 cm dhe $S_p = 112\ cm^2$. Gjeni brinjën AB të katrorit.

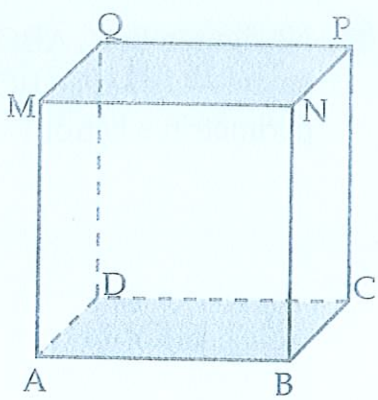


Fig. 9.1

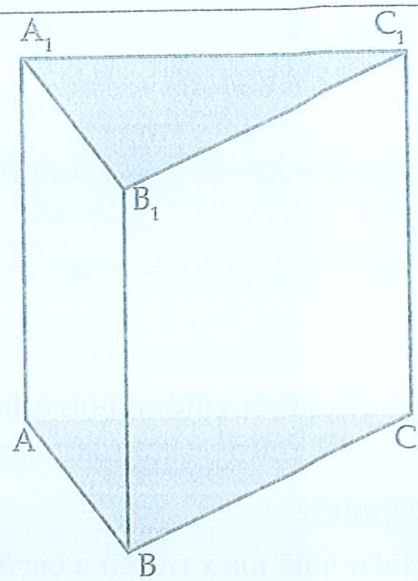


Fig. 9.2

Zgjidhje

Shënojmë $AB = x$. kemi $S_{ABCD} = x^2$ dhe $S_a = 4x \cdot 5 = 20x$.

Nga kushti:

$2x^2 + 20x = 112 \Rightarrow 2x^2 + 20x - 112 = 0 \Rightarrow x = 4$.

Brinja e katrorit është 4 cm.

2 Gjeni vëllimin e prizmit me lartësi h, nëse baza e tij është trekëndësh barabrinjës me brinjë a.
Jepet $AB = BC = AC = a$ dhe $AA_1 = BB_1 = CC_1 = h$ (fig. 9.2).

Zgjidhje

Kemi $V = S_{ABC} \times h$; Kemi: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V = \dfrac{a^2 \cdot h \cdot \sqrt{3}}{4}$

3 Si bazë e prizmit $ABCA_1B_1C_1$ (fig. 9.3/a) shërben trekëndëshi dybrinjënjëshëm ABC, me brinjë $AB = 10$ cm dhe $CA = CB = 13$ cm. Lartësia e prizmit është $AA_1 = 10$ cm. Gjeni vëllimin e tij.

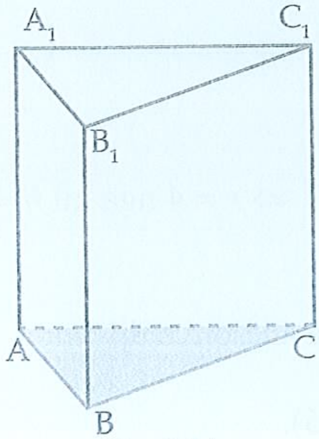


Fig. 9.3/a

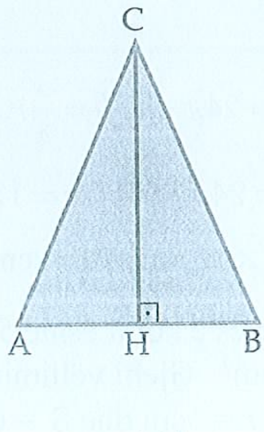


Fig. 9.3/b

Zgjidhje

Në figurën 9.3/b është ndërtuar trekëndëshi ABC i bazës së prizmit. Ndërtojmë $CH \perp AB$.
Kemi $AH = HB = 5$ cm (pse?). Në trekëndëshin ACH kemi:
$CH^2 = CA^2 - AH^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow CH = 12$ cm.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$ nga ku

$V = S_{ABC} \cdot AA_1 = 60 \cdot 10 = 600\ cm^3$.

4 Jepet piramida SABCD me bazë katrorin ABCD dhe lartësi SO (fig. 9.4). Gjeni vëllimin e saj, në qoftë se brinja e katrorit është 6 cm dhe $\angle SCO = 45°$.

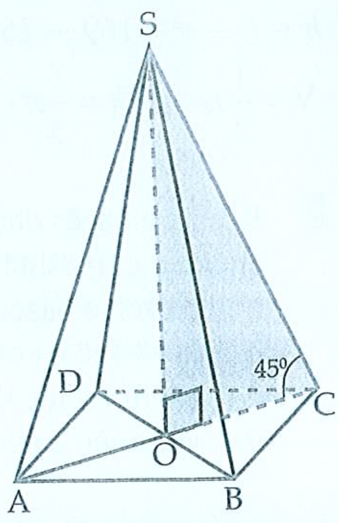


Fig. 9.4

Zgjidhje

Kemi $AC = 6\sqrt{2} \Rightarrow OC = 3\sqrt{2}$. Në trekëndëshin SOC kemi:

$\angle SCO = 45^0 \Rightarrow \angle OSC = 90^0 - 45^0 = 45^0$ nga ku $SO = OC = 3\sqrt{2}$

$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$ cm^3.

5 Lartësia e një cilindri është 10 cm më e madhe se rrezja e bazës. Syprina e përgjithshme e cilindrit është 144π cm^2. Gjeni rrezen e bazës dhe lartësinë e cilindrit.

Zgjidhje

Shënojmë me x rrezen e bazës, nga ku lartësia është $(x + 10)$. Kemi:
$S_p = 2\pi r(r + l) = 144\pi$. Duke zëvendësuar r dhe l kemi:
$2\pi x(x + x + 10) = 144\pi \Rightarrow 4x^2 + 20x - 144 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 36 = 0 \Rightarrow x = 4$. Pra, $r = 4$ cm dhe $l = r + 10 = 4 + 10 = 14$ cm.

6 Syprina anësore e një cilindri është 24π cm^2. Lartësia e tij është sa $\frac{3}{4}$ e rrezes së bazës. Gjeni vëllimin e cilindrit.

Zgjidhje

Janë dhënë $S_a = 24\pi$ dhe $h = \frac{3}{4}r$. Kemi:

$S_a = 2\pi \cdot r \cdot h = 24\pi \Rightarrow r \cdot h = 12 \Rightarrow r \cdot \frac{3}{4}r = 12 \Rightarrow r = 4$ nga ku $h = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$

$V = \pi r^2 \times h = \pi \times 16 \times 3 = 48\pi$ cm^3.

7 Rrezja e bazës e konit është 5 cm dhe syprina anësore e tij është 65π cm^2. Gjeni vëllimin e konit.
Janë dhënë $r = 5$cm dhe $S_a = 65\pi$ cm^2 (fig. 9.5).

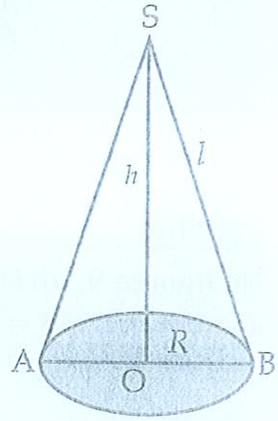


Fig. 9.5

Zgjidhje:

Kemi:
$S_a = \pi r \times l = 65\pi \Rightarrow 5\pi \cdot l = 65\pi \Rightarrow l = 13$ cm.
Në trekëndëshin SOB kemi:
$h^2 = l^2 - r^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow h = 12$ cm.

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 25 \cdot 12 = 100\pi$ cm^3.

8 Rrezja e bazës dhe lartësia e konit janë në raportin 3:4. Syprina anësore e tij është 60π cm^2 (fig. 9.6). Gjeni:

a rrezen e bazës së konit;
b lartësinë e konit;
c përftuesen e konit;
d syprinën e përgjithshme të konit.

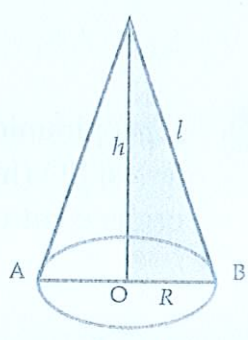


Fig. 9.6

Zgjidhje

$\frac{r}{h}=\frac{3}{4} \Rightarrow r=3x$ dhe $h=4x$. Në trekëndëshin SOB kemi:

$SB^2=SO^2+OB^2=16x^2+9x^2=25x^2 \Rightarrow SB=l=5x$

$S_a=60\pi \Rightarrow \pi r\, l=60\pi \Rightarrow r\, l=60 \Rightarrow 3x\times 5x=60 \Rightarrow x=2$ nga ku:

a $r=3\cdot 2=6$ cm; b $h=4\cdot 2=8$ cm; c $l=5\cdot 2=10$ cm;

d $S_p=S_a+S_b=60\pi+36\pi=96\pi$ cm².

9 Në një kon është brendashkruar cilindri (fig. 9.7). Lartësia e konit është SF = 6 cm dhe e cilindrit është EF = 2 cm. Gjeni raportin e vëllimeve të konit me cilindrin.

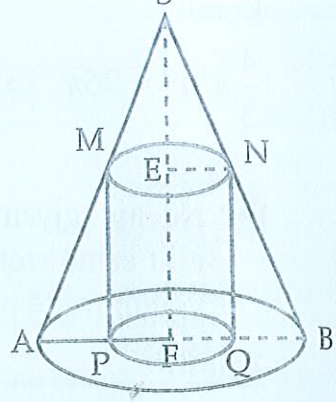


Fig. 9.7

Zgjidhje

Kemi:

SE = SF – EF = 6 – 2 = 4 cm

Shënojmë me R rrezen e bazës së konit dhe r- rrezen e bazës së cilindrit.

$$\Delta SEN \approx \Delta SFB \Rightarrow \frac{SE}{SF}=\frac{EN}{FB} \Rightarrow \frac{2}{6}=\frac{r}{R} \Rightarrow R=3r. \text{ Kemi:}$$

$$V_k=\frac{1}{3}\pi\cdot FB^2\cdot SF=\frac{1}{3}\pi\cdot R^2\cdot 6=2\pi\cdot R^2=2\pi\cdot(3r)^2=18\pi\cdot r^2$$

$$V_c=\pi\cdot EN^2\cdot EF=\pi\cdot r^2\cdot 4=4\pi\cdot r^2 \text{ nga ku}$$

$$\frac{V_k}{V_c}=\frac{18\pi\cdot r^2}{4\pi\cdot r^2}=\frac{9}{2}$$

10 Cilindri me rreze të bazës R dhe lartësi H mbushet me ujë. Ky ujë derdhet në një cilindër të dytë me rreze të bazës 2R (fig. 9.8). Në ç'lartësi do të ngjitet uji në cilindrin e dytë?

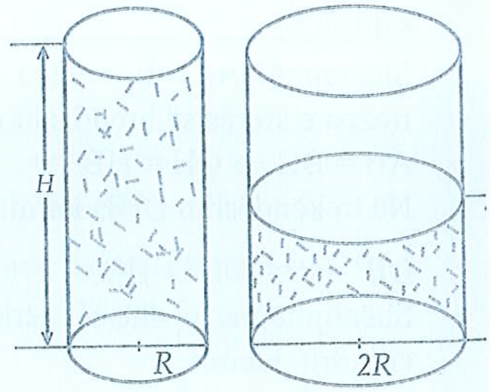


Fig. 9.8

Zgjidhje

Shënojmë me h lartësinë e ujit në cilindrin e dytë.

Për cilindrin e parë kemi $V_1=\pi\cdot R^2\cdot H$, ndërsa për cilindrin e dytë kemi $V_1=\pi\cdot(2R)^2\cdot h=4\pi\cdot R^2\cdot h$.

Vëllimet e ujit në të dy cilindrat janë të barabartë;

$V_1=V_2$. Kemi:

$4\pi\cdot R^2\cdot h=\pi\cdot R^2\cdot H$ nga ku $h=\frac{H}{4}$

11 Dy sfera prej bakri me rreze $R_1=2$ cm dhe $R_2=4$ cm shkrihen dhe me to formohet një sferë e re. Sa është rrezja e kësaj sfere?

Zgjidhje

Kemi:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot R_1^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8 = \frac{32}{3}\pi$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot R_2^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 64 = \frac{256}{3}\pi$$

Vëllimi i sferës së re është sa shuma e vëllimeve të dy sferave të dhëna.

$V = V_1 + V_2 = \frac{32}{3}\pi + \frac{256}{3}\pi = \frac{288}{3}\pi = 96\pi\ cm^3$. Shënojmë me r rrezen e kësaj sfere.
Kemi:

$$\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 96\pi \Rightarrow r^3 = 72 \Rightarrow r = \sqrt[3]{72} \approx 4,2cm.$$

12 Në një gjysmësferë është brendashkruar koni, baza e të cilit është rrethi i madh i sferës (fig. 9.9). Gjeni raportin e vëllimeve të pjesëve në të cilat ndahet gjysmësfera.

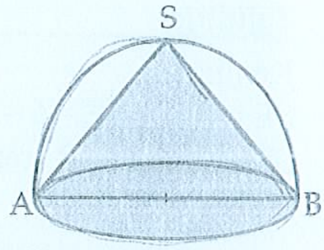


Fig. 9.9

Zgjidhje

Shënojmë me R rrezen e gjysmësferës, V_s vëllimin e saj dhe V_k vëllimin e konit. Kemi:

$V_s = \frac{2}{3}\pi \cdot R^3$ dhe $V_k = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot R = \frac{1}{3}\pi \cdot R^3$. Vëmë re se vëllimi i gjysmësferës është i barabartë me dyfishin e vëllimit të konit. Kjo tregon se ajo ndahet në dy pjesë të barabarta nga koni. Kështu që raporti i kërkuar është i barabartë me 1.

13 Cilindrit i brendashkruhet dhe i jashtëshkruhet sfera (fig. 9.10). Gjeni raportin e vëllimeve të këtyre sferave.

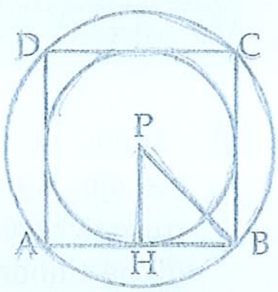


Fig. 9.10

Zgjidhje

Shënojmë OB = R, rrezen e sferës së jashtëshkruar dhe OH = r, rrezen e sferës së brendashkruar. Kemi
AB = BC ⇒ OH = HB = r
Në trekëndëshin OHB kemi:

$OB^2 = R^2 = OH^2 + HB^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$ nga ku $R = r\sqrt{2}$.
Shënojmë me V_j dhe V_b përkatësisht vëllimet e sferës së jashtëshkruar dhe brendashkruar cilindrit. Kemi:

$$V_j = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (r\sqrt{2})^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi \cdot r^3 \text{ dhe } V_b = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \text{ nga ku:}$$

$$\frac{V_b}{V_j} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot r^3}{\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi \cdot r^3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

14 Një enë cilindrike me diametër të bazës 24 cm dhe lartësi 50 cm është e mbushur përgjysmë me ujë. Në të zhytet një sferë metalike me rreze 6 cm. Me sa cm do të ngrihet niveli i ujit në enë?

Zgjidhje

Rritja e vëllimit të ujit në enë është e barabarta me vëllimin e sferës. Kemi:

$$V_s = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi \text{ cm}^3$$

Ky vëllim është i barabartë me vëllimin e cilindrit me rreze të bazës 12 cm dhe lartësi h. Kemi:

$V_c = \pi \times r^2 \times h = 144\pi \times h$ cm^3. Sipas kushtit $V_s = V_c$ nga ku:

$144\pi \times h = 288\pi \Rightarrow h = 2$ cm.

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Baza e kuboidit ka përmasa 3 cm dhe 4 cm. Lartësia e tij është 10 cm. Gjeni:

a syprinën anësore të kuboidit; P. [140 cm^2]

b syprinën e përgjithshme të kuboidit; P. [164 cm^2]

c vëllimin e kuboidit. P. [120 cm^3]

2 Një depozitë uji ka formë cilindrike me diametër të bazës 1,2 m dhe gjatësi 2 m. Sa litra ujë nxë depozita? P. [≈2260 litra]

3 Kërkohet ndërtimi i një depozite cilindrike me diametër të bazës 160 cm, që të ketë kapacitet 4000 litra ujë.

a Sa do të jetë gjatësia e depozitës? P. [≈1,99 m]

b Sa m^2 llamarinë do të harxhohet për ndërtimin e saj, në qoftë se nga prerjet e ngjitjet humbet 10% e materialit? P. [≈15 m^2]

4 Pesha e 25 metra tel bakri është 100,17 g. Gjeni diametrin e telit (Dendësia e bakrit 9,8g/cm^3). P. [0,72 mm]

5 Një depozitë uji përbëhet prej një gjysmësfere me diametër 1,4 m dhe një cilindri me diametër të bazës sa diametri i gjysmësferës. Ç'lartësi duhet të ketë pjesa cilindrike, në mënyrë që depozita të ketë kapacitetin 1200 litra ujë.

P. [≈0,3 m]

6 Syprina dhe vëllimi i sferës janë numerikisht të barabarta. Gjeni rrezen e sferës.

P. [3]

7 Jepet një cilindër me rreze të bazës R dhe lartësi h. Krahas tij jepet një cilindër i dytë me rreze të bazës 2 herë më të madhe dhe lartësi 2 herë më të vogël.

a Tregoni se syprinat anësore të të dy cilindrave janë të barabarta.

b Tregoni se vëllimi i cilindrit të dytë është 2 herë më i madh se vëllimi i cilindrit të parë.

8 Një kuti cilindrike me rreze të bazës 10 cm dhe lartësi 20 cm është e mbushur me bojë. Sa sfera me rreze 5 cm mund të lyhen me këtë bojë, në qoftë se për 1 m^2 harxhohet 0,2 kg bojë? (Dendësia e bojës 2,5 g/cm^3) **P. [≈2500 sfera]**

9 Rrezja e diellit është 109 herë më e madhe se rrezja e tokës. Sa herë më e madhe është sipërfaqja dhe vëllimi i diellit, në krahasim me sipërfaqen dhe vëllimin e tokës? **P. [$109^2 \approx 11800$ herë; $109^3 \approx 1300000$ herë]**

10 Prerja boshtore e cilindrit është katror me syprinë 12 cm^2. Gjeni syprinën anësore, syprinën e përgjithshme dhe vëllimin e cilindrit.

P. [12π cm^2; 18π cm^2; $6\sqrt{3}\pi$ cm^3]

11 Syprina anësore e cilindrit është trefishi i syprinës së bazës. Gjeni vëllimin e cilindrit, në qoftë se rrezja e bazës është 6 cm. **P. [324π cm^3]**

12 Lartësia dhe përftuesja e konit janë në raportin 4:5. Vëllimi i konit është 96π cm^3. Gjeni syprinën e përgjithshme të konit. **P. [96π cm^2]**

13 Gjeni syprinën e përgjithshme të konit me vëllim 320π cm^3 dhe lartësi 15 cm.

P. [200π cm^2]

14 Nga një kub druri me brinjë 10 cm, duke e punuar në torno, nxirret cilindri më i madh i mundshëm, bazat e të cilit ndodhen në dy faqe të përkundrejta të kubit. Sa për qind e lëndës së drurit humbet gjatë këtij punimi? **P. [21,5%]**

15 Rrezet e tri sferave janë në raportin 1:2:3. Tregoni se vëllimi i sferës më të madhe është tri herë më i madh se shuma e vëllimeve të dy sferave më të vogla.

16 Hipotenuza dhe katetet e një trekëndëshi kënddrejtë shërbejnë si diametra të tri sferave. Tregoni që syprina e sferës së madhe është e barabartë me shumën e syprinave të dy sferave më të vogla.

17 Një copë plumbi në formë kuboidi me përmasa 10 cm, 15 cm dhe 20 cm shkrihet dhe me të formohen sfera gjuetie me diametër 10 mm. Sa sfera të tilla formohen? **P. [2500 sfera]**

18 Një sferë me diametër 18 cm është bosh përbrenda. Trashësia e cipës është 3 cm. Gjeni vëllimin e cipës. **P. [≈2148 cm^3]**

KREU 10

TRIGONOMETRI

Funksionet trigonometrike të këndit të ngushtë

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\qquad a = c \cdot \sin\alpha$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\qquad b = c \cdot \cos\alpha$

$tg\alpha = \frac{a}{b}$ $\qquad a = b \cdot tg\alpha$

$\cot g\alpha = \frac{b}{a}$ $\qquad b = a \cdot cotg\alpha$

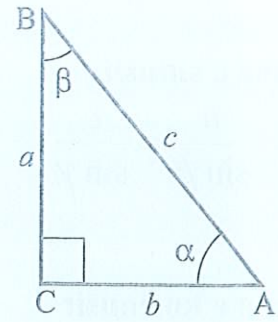


Fig. 10.1

Rrethi trigonometrik

$\cos\alpha = x_P$

$tg\alpha = \frac{y_P}{x_P}$

$\cot g\alpha = \frac{x_P}{y_P}$

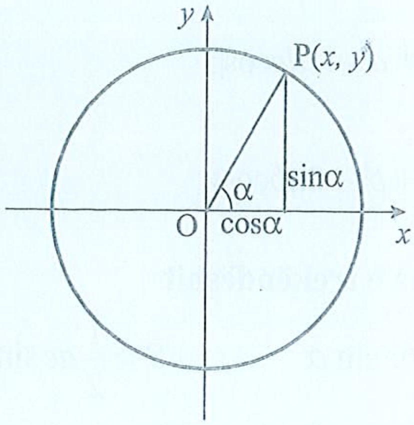


Fig. 10.2

Shenjat e funksioneve trigonometrike

KUADRANTI	sinα	cosα	tgα	cotgα
I	+	+	+	+
II	+	—	—	—
III	—	—	+	+
IV	—	+	—	—

Formulat

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (Formula themelore e trigonometrisë)

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $cotg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $tg\alpha \cdot cotg\alpha = 1$

$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$; $tg(90^0 - \alpha) = cotg\alpha$

$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+tg^2\alpha}$ $\sin^2\alpha = \dfrac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$ $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$ $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$

$tg(90^0 - \alpha) = cotg\alpha$ $tg(180^0 - \alpha) = -tg\alpha$

Teorema e sinusit

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

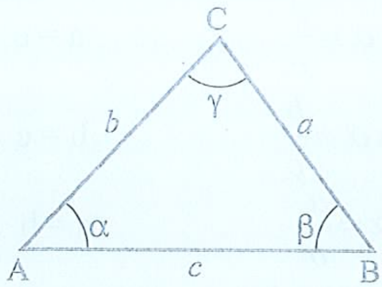


Fig. 10.3

Teorema e kosinusit

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

Syprina e trekëndëshit

$S = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$ $S = \dfrac{1}{2}ac\sin\beta$ $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$

Vlerat e funksioneve trigonometrike të disa këndeve

α(gradë)	α(radian)	sinα	cosα	tgα	cotgα
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	?	0
180^0	π	0	−1	0	?
270^0	$\frac{3\pi}{2}$	−1	0	?	0
360^0	2π	0	1	0	?

Grafikët e funksioneve trigonometrikë

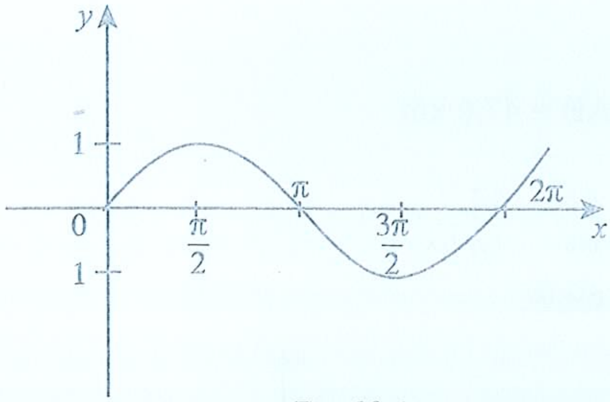


Fig. 10.4

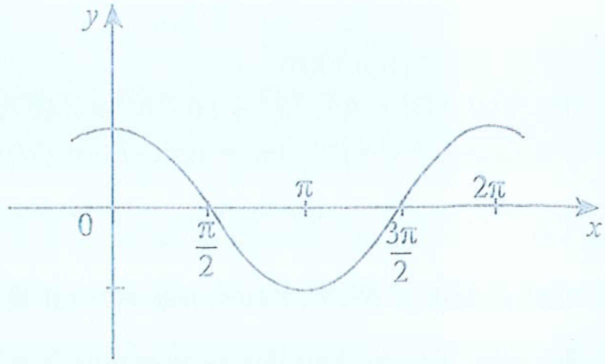


Fig. 10.5

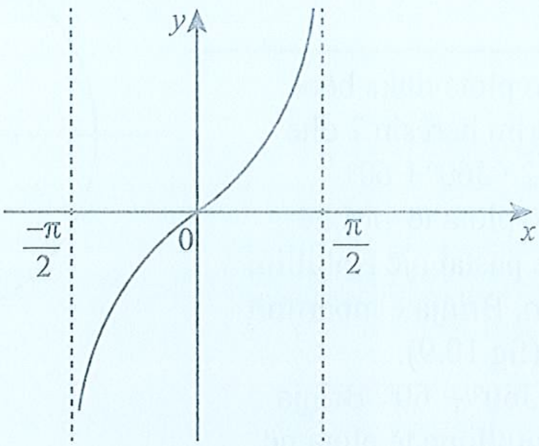


Fig. 10.6

$y = \sin x \quad (0 \le x \le 2\pi)$ $\qquad y = \cos x \quad (0 \le x \le 2\pi)$ $\qquad y = \operatorname{tg} x \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$

Ushtrime të zgjidhur

1 Gjeni brinjën x në trekëndëshin kënddrejtë në figurë (fig. 10.7).

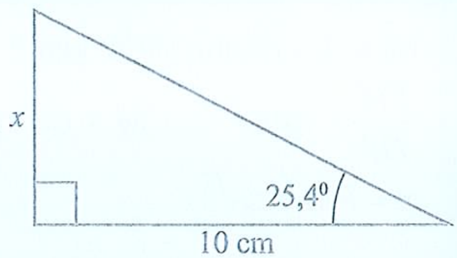


Fig. 10.7

Zgjidhje

Shkruajmë $\frac{x}{10} = \operatorname{tg} 25,4^0 \Rightarrow \frac{x}{10} = 0,4748 \Rightarrow x = 4,748$ cm.

2 Një anije largohet 22 km prej pikës A me një kurs prej 42^0 dhe më tej për 30 km me një kurs prej 90^0 dhe arrin në B. Sa është largesa AB dhe kursi nga A drejt B? (fig. 10.8).

Zgjidhje

Në trekëndëshin kënddrejtë ADE shkruajmë:

$$\frac{DE}{22} = \sin 42^0 \Rightarrow DE = 22 \cdot \sin 42^o = 14,72 \text{ km}.$$

Shkruajmë $\frac{AD}{22} = \cos 42^0 \Rightarrow AD = 22 \cdot \cos 42^o = 16,3$ km

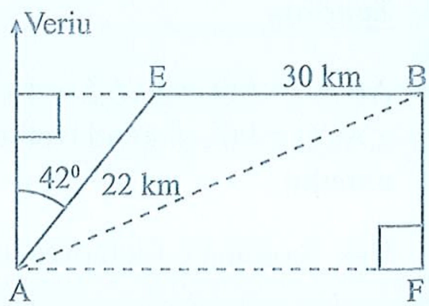


Fig. 10.8

Në trekëndëshin kënddrejtë ABF shkruajmë:
$AB^2 = AF^2 + BF^2$ dhe $AF = DE + EB$, pra
$AF = 14,72 + 30 = 44,72$ km.
$BF = AD = 16,35$ km.
Prandaj $AB^2 = 44,72^2 + 16,35^2 = 2267,2 \Rightarrow AB = 47,6$ km.
Kursi nga A drejt B jepet nga këndi DAB.

Por $\angle DAB = \angle ABF$. Shkruajmë $tg\angle ABF = \dfrac{AF}{BF} = \dfrac{44,72}{16,35} = 2,7353$.

Del $\angle ABF = 69,9°$. Kursi nga A drejt B është 69,9°.

3 Në cilin kuadrant ndodhet brinja e mbarimit e këndit AOM me vlerë
a 780°? b –780°?

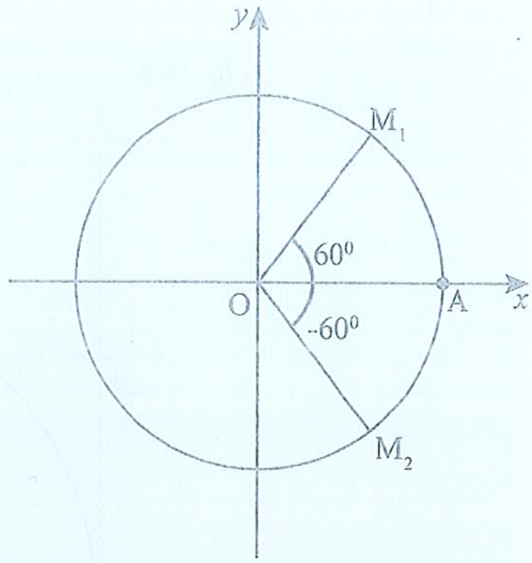


Fig. 10.9

Zgjidhje

a Veçojmë rrotullimet e plota duke bërë pjesëtimin me 360°. Marrim herësin 2 dhe mbetjen 60°. Pra, $780° = 2 \cdot 360° + 60°$
Janë bërë dy rrotullime të plota të OM në drejtimin kundërorar dhe pastaj një rrotullim me 60^0 në po këtë drejtim. Brinja e mbarimit ndodhet në kuadrantin I (fig.10.9).
b Kemi: $-780° = -2 \cdot 360° - 60°$. Brinja e mbarimit ka bërë dy rrotullime të plota në drejtimin orar dhe pastaj një rrotullim me 60° po në këtë drejtim. Ajo ndodhet në kuadrantin IV (fig. 10.9).

4 Në figurën 10.10 jepen M(5, n) dhe $\angle MOP = 60^0$. Gjeni n.

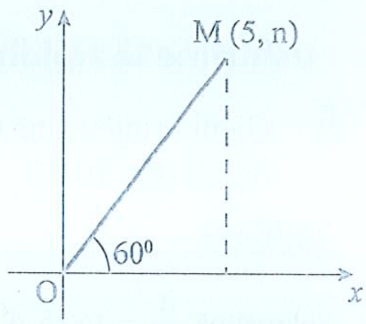


Fig. 10.10

Zgjidhje

Në trekëndëshin MOP kemi:

$$\frac{PM}{OP} = tg60^0 \Rightarrow PM = OP \cdot tg60^0 = 5\sqrt{3}.$$

$n = PM = 5\sqrt{3}$

5 Në figurën 10.11, AB është diametër i rrethit me rreze 6,5 cm. Jepet AC = 5 cm. Gjeni funksionet trigonometrike të këndit α.

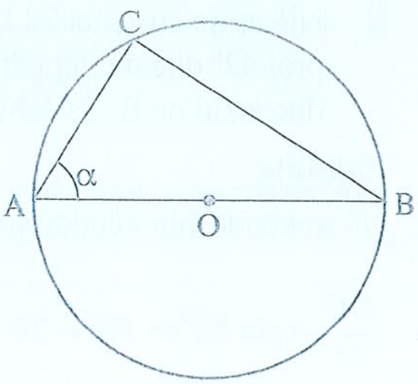


Fig. 10.11

Zgjidhje

$AB = 2 \cdot AO = 2 \cdot 6,5 = 13$ cm
$\angle ACB = 90^0$, si kënd rrethor që mbështetet në diametrin e rrethit.

Nga Teorema e Pitagorës, në trekëndëshin ACB kemi:

$BC^2 = AB^2 - AC^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 44$ nga ku BC = 12 cm.

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13};\quad \cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13};\quad tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{5};\quad \cot g\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{12}$$

6 Në figurën 10.12, PA është tangjente me rrethin me qendër O dhe rreze 15 cm. Jepet PB = 2 cm. Gjeni funksionet trigonometrike të këndit α.

Zgjidhje

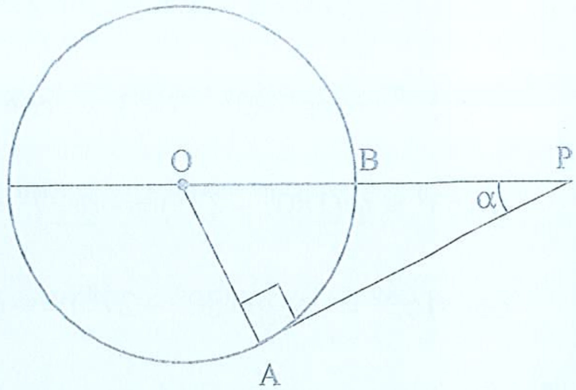


Fig. 10.12

Tangjentja ndaj rrethit është pingule me rrezen e tij që kalon nga pika e takimit. Pra PA⊥OA.

Vëmë re se OP = OB + BP = 15 + 2 = 17 cm.

Nga teorema e Pitagorës në trekëndëshin OAP kemi:

$AP^2 = OP^2 - OA^2 = 17^2 - 15^2 = 289 - 225 = 64$
nga ku AP = 8 cm.

$$\sin\alpha = \frac{OA}{OP} = \frac{15}{17};\quad \cos\alpha = \frac{AP}{OP} = \frac{8}{17};\quad tg\alpha = \frac{OA}{AP} = \frac{15}{8};\quad \cot g\alpha = \frac{AP}{OA} = \frac{8}{15}$$

7 Në trekëndëshin kënddrejtë ABC (figura 10.13) jepet

$\sin B = \frac{2}{3}$ dhe AB + AC = 10 cm. Gjeni BC.

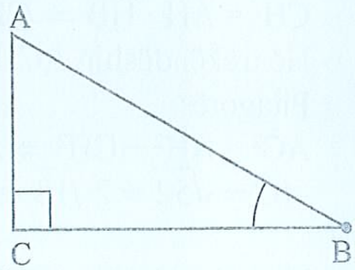


Fig. 10.13

Zgjidhje

Shënojmë AC = x nga ku AB = 10 – x.

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x}{10-x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x = 20 - 2x \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4$$

AC = 4 cm dhe AB = 10 – 4 = 6 cm.

Nga teorema e Pitagorës në këtë trekëndësh kemi:

$BC^2 = AB^2 - AC^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$ nga ku $BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm.

8 Jepet $\cos 27^0 = p$. Gjeni:

a Funksionet e tjerë trigonometrikë të këndit 27^0.
b Funksionet trigonometrike të këndit 63^0.
c Funksionet trigonometrike të këndit 153^0.

Zgjidhje

a $\sin 27^0 = \sqrt{1 - \cos^2 27^0} = \sqrt{1 - p^2}$

$$tg 27^0 = \frac{\sin 27^0}{\cos 27^0} = \frac{\sqrt{1-p^2}}{p};\quad \cot g 27^0 = \frac{\cos 27^0}{\sin 27^0} = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$$

b $\sin 63^0 = \sin(90^0 - 27^0) = \cos 27^0 = p$

$$\cos 63^0 = \cos(90^0 - 27^0) = \sin 27^0 = \sqrt{1-p^2}$$

$$tg63^0 = \frac{\sin 63^0}{\cos 63^0} = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}; \quad \cot g63^0 = \frac{\cos 63^0}{\sin 63^0} = \frac{\sqrt{1-p^2}}{p}$$

c $\sin 153^0 = \sin(180^0 - 27^0) = \sin 27^0 = \sqrt{1-p^2}$

$$\cos 153^0 = \cos(180^0 - 27^0) = -\cos 27^0 = -p$$

$$tg153^0 = tg(180^0 - 27^0) = -tg27^0 = -\frac{\sqrt{1-p^2}}{p}$$

$$\cot g153^0 = \cot g(180^0 - 27^0) = -\cot g27^0 = -\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$$

9 Në trekëndëshin kënddrejtë ABC, me kënd të drejtë në kulmin C (fig. 10.14) jepen AH = 4 cm dhe BH = 9 cm. Gjeni $\sin\alpha \cdot tg\beta$.

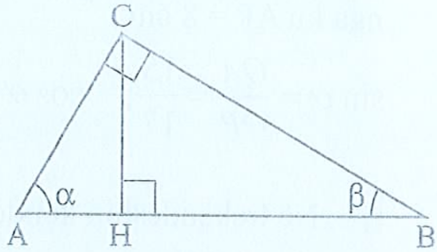


Fig. 10.14

Zgjidhje

Nga teorema e Euklidit në trekëndëshin ABC kemi:
$CH^2 = AH \cdot HB \Rightarrow CH^2 = 4 \cdot 9 = 36$ nga ku CH = 6 cm.
Në trekëndëshin ACH gjejmë AC me anën e teoremës së Pitagorës.
$AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow AC^2 = 16 + 36 = 52$ nga ku
$AC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ cm.

Në trekëndëshin ACH: $\sin\alpha = \frac{CH}{AC} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

Në trekëndëshin CBH: $tg\beta = \frac{CH}{HB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$$\sin\alpha \cdot tg\beta = \frac{3\sqrt{13}}{13} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

10 Gjeni, në bazë të përkufizimeve, $\sin 150^0$ dhe $\cos 150^0$.
Në figurën 10.15 kemi $\angle AOP = 150^0$, prandaj $\angle MOP = 30^0$.

Meqë OM = 1, del $PM = \frac{1}{2}$;

Pra, $\sin 150^o = y_P = PM = \frac{1}{2}$;

Gjithashtu $\cos 30^0 = \frac{OM}{OP} \Rightarrow OM = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 150^o = x_P = -OM = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

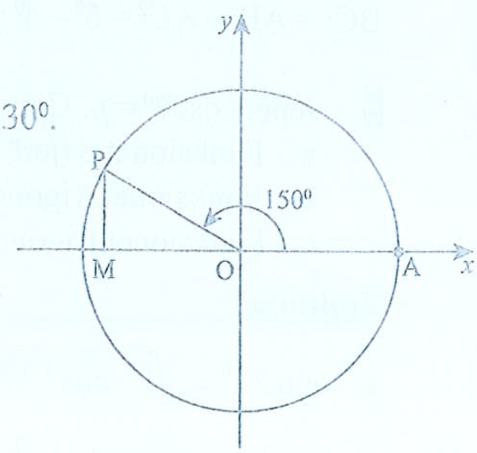


Fig. 10.15

11 Jepet $\sin x = \frac{1}{2}$, dhe $90^0 < x < 180^0$. Gjeni $\cos x$.

Zgjidhje

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Meqë x është kënd i kuadrantit të dytë, kemi $\cos x < 0$. Pra,

$$\cos x = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

12 Shprehni $\cos x$ nëpërmjet tgx.

Zgjidhje

Nga formula themelore $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, duke pjesëtuar të dyja anët me $\cos^2 x$, marrim

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ që nga } \cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x}.$$

13 Jepet $tgx = \sqrt{3}$ dhe $180^0 < x < 270^0$. Gjeni $\cos x$.

Zgjidhje

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \text{ sepse } x \text{ është kënd i kuadrantit të tretë.}$$

14 Gjeni vlerën më të vogël dhe më të madhe të funksioneve:

a $y = \sin(2x - 40^o)$ b $y = \frac{1}{3}\cos x$ c $y = 2\sin\frac{x}{2}$.

Zgjidhje

a Vlera më e madhe është 1; vlera më e vogël është -1.

b Vlera më e madhe është $\frac{1}{3}$; vlera më e vogël është $-\frac{1}{3}$.

c Kemi $-1 \le \sin(\frac{x}{2}) \le 1$, që nga $-2 \le 2\sin(\frac{x}{2}) \le 2$.

Vlera më e madhe është 2; vlera më e vogël është -2.

15 Gjeni vlerën më të vogël dhe më të madhe të funksioneve:

a $y = 1 - \sin x$ b $y = \frac{1}{3 + \sin x}$

Zgjidhje

a Kemi $-1 \le \sin x \le 1$, që nga $1 \ge -\sin x \ge -1$ dhe $2 \ge 1 - \sin x \ge 0$ ose $0 \le 1 - \sin x \le 2$

Vlera më e madhe e funksionit është 2; vlera më e vogël është 0.

b Kemi $-1 \le \sin x \le 1$, prandaj $2 \le 3 + \sin x \le 4$, që nga $\frac{1}{2} \ge \frac{1}{3 + \sin x} \ge \frac{1}{4}$ ose

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+3\sin x} \leq \frac{1}{2}.$$

Vlera më e madhe e funksionit $y = \dfrac{1}{3+\sin x}$ është $\dfrac{1}{2}$; vlera më e vogël është $\dfrac{1}{4}$.

16 Zgjidhni ekuacionin $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ për $0 < x < 360^0$

Zgjidhje

Meqë $\cos x > 0$ del se këndi x është kënd i kuadrantit të parë ose të katërt.

Nga tabela, vlerës së kosinusit $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, i korrespondon këndi 45^o. Gjithashtu edhe këndi $360^0 - 45^0 = 315^0$, ka të njëjtin kosinus.
Rrjedhimisht $x = 45^0$ ose $x = 360 - 45^0 = 315^0$.

17 Zgjidhni ekuacionin $tg(x - 60^0) = \sqrt{3}$ për $0 < x < 360^0$

Zgjidhje

Tangjenti i këndit është pozitiv në kuadrantin e parë ose të tretë.
Nga tabela, vlerës së tangjentit $\sqrt{3}$, i korrespondon këndi 60^o, gjithashtu edhe këndi $180^o + 60^0 = 240^0$. Pra:
$x - 60^0 = 60^0 \Rightarrow x = 120^0$, ose $x - 60^0 = 240^0 \Rightarrow x = 300^0$

18 Zgjidhni ekuacionin $2\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$ për $0 < x < 360^0$

Zgjidhje

Shënojmë $\cos x = t$ dhe marrim ekuacionin e fuqisë së dytë me ndryshore t:
$t^2 + 3t + 2 = 0$.
Duke zgjidhur këtë ekuacion, gjejmë $t = -2$ ose $t = -1$. Pra, $\cos x = -2$ ose $\cos x = -1$.
Ekuacioni $\cos x = -2$ nuk ka zgjidhje.
$\cos x = -1 \Rightarrow x = 180^o$.

19 Zgjidhni ekuacionet për $-180^o < x < 180^o$

a $\quad 2\cos^2 x - \sin x = 1$ $\qquad$ b $\quad \cos^2 x = \sin^2 x$

Zgjidhje

a $\quad 2\cos^2 x - \sin x = 1 \Rightarrow 2(1 - \sin^2 x) - \sin x = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$
Duke zëvendësuar $\sin x = t$, marrim ekuacionin $2t^2 + t - 1 = 0$, i cili ka dy rrënjë: $t_1 = -1$; $t_2 = \dfrac{1}{2}$.
Pra, $\sin x = -1 \Rightarrow x = -90^o$ ose $\sin x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 30^o$ ose $x = 150^0$.

b $\quad$ Ekuacioni $\cos^2 x = \sin^2 x$ (ku $\cos x \neq 0$) sillet në trajtën $tg^2 x = 1$
d.m.th., ($tg x = 1$ ose $tg x = -1$).
Zgjidhja e ekuacionit $tg x = 1$ është $x = 45^0$ ose $x = -135^0$.
Zgjidhja e ekuacionit $tg x = -1$ është $x = -45^0$ ose $x = 135^0$.

20 Zgjidhni ekuacionin:

$tg^2x - tgx = 0$ për $0^0 \le x \le 360^0$

Zgjidhje

$tg^2x - tgx = 0 \Rightarrow tg\,x(tgx - 1) = 0$
$tgx = 0 \Rightarrow x = 0^0;\ 180^0;\ 360^0$
$tgx - 1 = 0$
$tgx = 1 \Rightarrow x = 45^0;\ 225^0$

21 Zgjidhni ekuacionin $\sin x = \cos x$ për $0 < x < 360^0$.

Zgjidhje

Nëse për ekuacionin do të kishim $\cos x = 0$, prej tij do të dilte $\sin x = 0$, pra $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$, gjë që është e pamundur.

Meqë $\cos x \neq 0$, mund të pjesëtojmë të dyja anët e ekuacionit me $\cos x$, duke përftuar ekuacionin $\dfrac{\sin x}{\cos x}=1$, d.m.th., $tgx = 1$.

Zgjidhjet e këtij, pra edhe zgjidhjet e ekuacionit fillestar janë $x = 45^\circ$ ose $x = 225^\circ$.

22 Vërtetoni identitetet:

a $(1 + cotg^2\alpha) \cdot \sin^2\alpha = 1$

b $(tg\alpha + cotg\alpha)^2 - (tg\alpha - cotg\alpha)^2 = 4$

c $\dfrac{tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha$

d $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

e $\cos^2 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^4 x = 1.$

Vërtetim

a $(1+cotg^2\alpha)\sin^2\alpha = (1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha})\sin^2\alpha =$

$= \dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\sin^2\alpha = \sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$

b $(tg\alpha+ cotg\alpha)^2 - (tg\alpha - cotg\alpha)^2 =$

$= (tg^2\alpha + 2tg\alpha cotg\alpha + cotg^2\alpha) - (tg^2\alpha - 2tg\alpha cotg\alpha + cotg^2\alpha) = 4tg\alpha cotg\alpha = 4$

c $$\frac{tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$$

d $\cos^4 x + \sin^4 x = \cos^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^4 x - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x =$
$= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x.$

e $\cos^2 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^4 x = \cos^2 x + \sin^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x + \sin^2 x \cdot 1 = 1.$

23 Brinjët e një trekëndëshi janë $a = \sqrt{5}$ cm; $b = (\sqrt{2}+1)$ cm dhe $c = (\sqrt{2}-1)$ cm. Gjeni këndin α, përballë brinjës a të tij.

Zgjidhje

Nga teorema e kosinusit kemi:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Rightarrow (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{2}+1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2 - 2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\cos\alpha \Rightarrow$

$5 = 2+1+2\sqrt{2}+2+1-2\sqrt{2}-2(2-1)\cos\alpha \Rightarrow$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^0$

24 Në figurën 10.16 jepen: AB = 6 cm; AC = 7 cm; BC = 2 cm; DC = 4 cm; CE = 1 cm. Gjeni $DE^2 = x^2$.

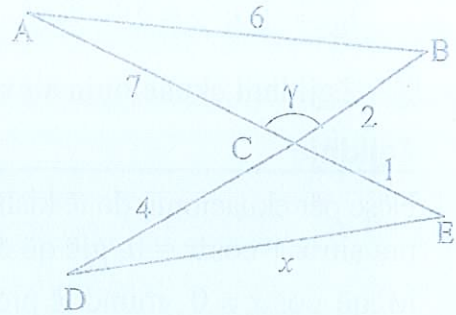


Fig. 10.16

Zgjidhje

Në trekëndëshat ABC dhe ACE zbatojmë teoremën e kosinusit. Kemi:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos\gamma \Rightarrow$

$36 = 49 + 4 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \dfrac{17}{28}$

$DE^2 = DC^2 + CE^2 - 2 \cdot DC \cdot CE \cdot \cos\gamma \Rightarrow x^2 = 16 + 1 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \dfrac{17}{28} \Rightarrow x^2 = 17 - \dfrac{34}{7} = \dfrac{85}{7}$

25 Në trekëndëshin ABC jepen $c = 4$ cm; $\sin\alpha = \dfrac{3}{2}\sin\gamma$ dhe $\cos\gamma = \dfrac{3}{4}$.c Gjeni brinjët a dhe b.

Zgjidhje

Nga teorema e sinusit kemi:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{4 \cdot \frac{3}{2}\sin\gamma}{\sin\gamma} = 6$$

Nga teorema e kosinusit kemi:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \Rightarrow 16 = 36 + b^2 - 2 \cdot 6 \cdot b \cdot \dfrac{3}{4} \Rightarrow b^2 - 9b + 20 = 0 \Rightarrow b = 4$ cm ose $b = 5$ cm

26 Në figurën 10.17 jepet BD = DC.

Gjeni raportin $\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$.

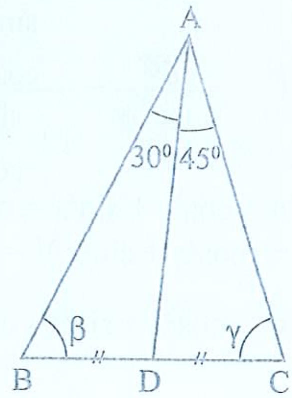


Fig. 10.17

Zgjidhje

Të trekëndëshat ABD dhe ACD zbatojmë teoremën e sinusit. Kemi:

Në trekëndëshin ABD: $\dfrac{AD}{\sin\beta} = \dfrac{BD}{\sin 30^0} \Rightarrow BD = \dfrac{AD \cdot \sin 30^0}{\sin\beta}$.

Në trekëndëshin ACD: $\dfrac{AD}{\sin\gamma} = \dfrac{DC}{\sin 45^0} \Rightarrow DC = \dfrac{AD \cdot \sin 45^0}{\sin\gamma}$.

Ng kushti BD = DC shkruajmë:

$$\frac{AD\cdot\sin30^0}{\sin\beta}=\frac{AD\cdot\sin45^0}{\sin\gamma}\Rightarrow\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{\sin30^0}{\sin45^0}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

27 Në figurën 10.18 gjeni syprinën e trekëndëshit PQR.

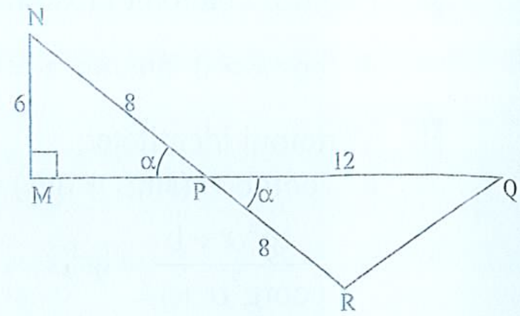


Fig. 10.18

Zgjidhje

Në trekëndëshin MNP kemi: $\sin\alpha=\frac{MN}{PM}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

Në trekëndëshin PQR kemi:

$$S_{PQR}=\frac{1}{2}\cdot PQ\cdot PR\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot8\cdot12\cdot\frac{3}{4}=36\text{ cm}^2.$$

28 Në figurën 10.19 jepen $a=4x+1$; $b=5x$ dhe $c=3x-1$. Gjeni x dhe brinjët e trekëndëshit ABC, në qoftë se $\angle CAB=\alpha=60^0$.

Zgjidhje

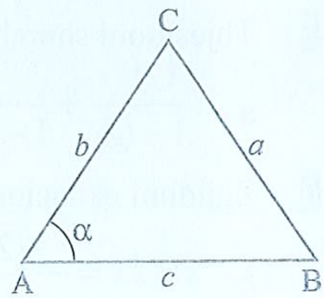


Fig. 10.19

Në trekëndëshin ABC nga teorema e kosinusit kemi:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$

$(4x+1)^2=(5x)^2+(3x-1)^2-2\cdot5x\cdot(3x-1)\cdot\frac{1}{2}$

$16x^2+8x+1=25x^2+9x^2-6x+1-15x^2+5x$

Duke reduktuar kufizat e ngjashme përftojmë ekuacionin;

$3x^2-9x=0\Rightarrow3x(x-3)=0\Rightarrow x=3$ ose $x=0$ (nuk pranohet)

Për $x=3$ kemi:

$a=4\cdot3+1=13$ cm; $b=5\cdot3=15$ cm dhe $c=3\cdot3-1$0 8 cm.

Brinjët e trekëndëshit ABC janë 13cm; 15 cm dhe 8 cm.

29 Të dy akrepat e orës janë të mbivendosur në orën 12. Pas sa kohe do të mbivendosen përsëri akrepat?

Zgjidhje

Shënojmë me c gjatësinë e rrethit të sahatit. Shpejtësia këndore e akrepit të madh është e barabartë me c; kurse shpejtësia këndore e akrepit të vogël është 12 herë më e vogël, pra $\frac{c}{12}$. Nëse shënojmë me x kohën e kërkuar (për mbivendosjen e parë), akrepi i madh ka përshkruar rrugën cx, kurse i vogli rrugën $\frac{c}{12}x$; ndërkaq i madhi ka përshkruar një rreth më tepër se i vogli. Prandaj $cx-\frac{c}{12}x=c$, nga ku del $x=\frac{12}{11}$.

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Jepet $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ dhe tgα < 0. Gjeni cosα. P. $[-\frac{4}{4}]$

2 Jepet $-90^0 < x < 90^0$. Gjeni cos$x$, në qoftë se $tgx = -\frac{3}{4}$. P. $[\frac{4}{5}]$

3 Në cilin kuadrant mbaron harku trigonometrik, kur masa e tij x plotëson kushtet

a $\cos x > 0$ dhe $\sin x = -\frac{1}{3}$; b $\sin x < 0$ dhe $\cos x = -\frac{2}{7}$. P. [a) IV; b) III]

4 Vërtetoni identitetet:

a cotgα = (sinα + tgα) = 1 + cosα

b $\frac{tg^2\alpha + 1}{cotg^2\alpha + 1} = tg^2\alpha$ c $\left(\frac{1}{\cos\alpha} + tg\alpha\right)^2 = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$

d $\frac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = tg\alpha - \cot g\alpha$ e $1 - \frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha} = \sin\alpha$

f $\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = 2\cos^2\alpha - 1$ g $\frac{tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha$

5 Thjeshtoni shprehjet e mëposhtme:

a $\frac{1}{1-tgx} + \frac{1}{1-\cot gx}$ b $\frac{\sin x + tgx}{\sin x - tgx} - \frac{2}{\cos x - 1}$ P. [a) 1; b) 1]

6 Zgjidhni ekuacionet për $-180^0 < x < 180^0$

a $\sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ b $\cos(2x - 60^0) = \frac{1}{2}$.

P. [a) $x = -135^0$; $x = -15^0$; $x = 75^0$; $x = 105^0$; b) $x = -90^0$; $x = -30^0$; $x = 90^0$; $x = 150^0$]

7 Zgjidhni ekuacionet për $0 < x < 180^0$.

a $tg(2x - 10^0) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ b $tg(180^0 - 2x) = -1$.

P. [a) $x = 80^0$; $x = 170^0$ b) $x = 112{,}5^0$; $22{,}5^0$

8 Zgjidhni ekuacionet:

a $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$, për $0^0 \le x \le 360^0$ P. [$x = 90^0$; 30^0; 150^0]

b $2\cos^2 x - \cos x = 0$, për $0^0 \le x \le 180^0$ P. [$x = 90^0$; 60^0]

c $tg^2x - (\sqrt{3}+1)tgx + \sqrt{3} = 0$, për $0^0 \le x \le 180^0$ P. [$x = 45^0$; 60^0]

9 Gjeni vlerën më të vogël të funksionit në $[0, 2\pi]$.

a $y = \frac{5}{1 - 2\sin\frac{x}{2}}$ b $y = \cos^2 x - 2\cos x - 5$. P. [a) $\frac{5}{3}$; b) -6]

10 Në trekëndëshin ABC jepen $a = 4$ cm; $c = 6$ cm dhe këndi ndërmjet tyre $\beta = 120^0$. Gjeni b. P. [$2\sqrt{19}$ cm]

11 Në figurën 10.20 jepen AC = 6 cm; BC = 8 cm dhe AD = 5 cm. Gjeni funksionet trigonometrike të këndit $\angle DAB = \alpha$.

P. [$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$]

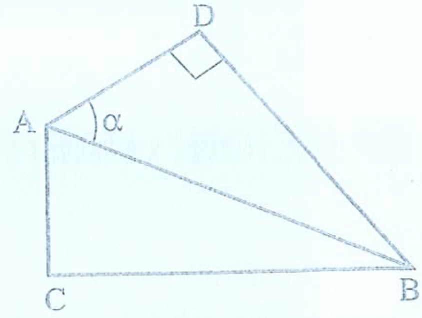


Fig. 10.20

12 Në figurën 10.21, jepet rombi ABCD në të cilin AB = 20 cm dhe BD = 32 cm. Gjeni:

a diagonalen tjetër AC të rombit;

b këndet α dhe β që diagonalja formojnë me brinjët e rombit.

P. [a) 24 cm; b) $\sin\alpha = \frac{4}{5}; \sin\beta = \frac{3}{5}$

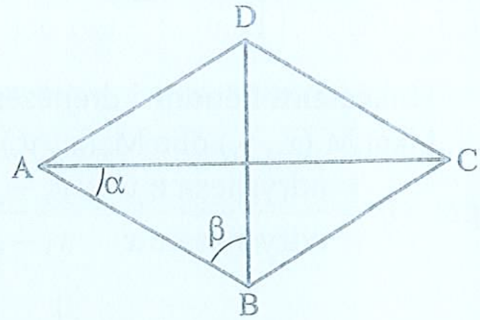


Fig. 10.21

13 Gjeni këndin A në trekëndëshin ABC, në qoftë se $a = \sqrt{13}$ cm, $b = 4$ cm dhe $c = 3$ cm.

P. [60^0]

14 Në trekëndëshin ABC jepen a= 8 cm; $\angle A = 30^0$ dhe $\angle B = 45^0$. Gjeni b.

P. [$8\sqrt{2}$ cm]

15 Në trekëndëshin ABC jepen b = 6 cm; c = 8 cm dhe këndi ndërmjet tyre $\alpha = 30^0$. Gjeni:

a syprinën e trekëndëshit ABC;

b brinjën *a*.

P. [a) 12 cm²; b) $2\sqrt{25-12\sqrt{3}}$ cm]

16 Gjeni syprinën e paralelogramit me brinjë *m*, *n* dhe kënd α ndërmjet tyre.

P. [$S = m \cdot n \cdot \sin\alpha$]

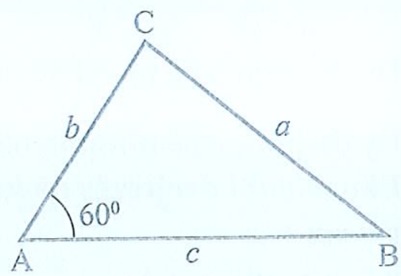


Fig. 10.22

17 Në trekëndëshin ABC (fig. 10.22) jepen $a = 3x + 1$; $b = 4x$; $c = 2x + 1$ dhe $\angle CAB = 60^0$. Gjeni *x* dhe brinjët e trekëndëshit.

P. [$x = 2$]

18 Në figurën 10.23 gjeni $BD = x$.

P. [$4\sqrt{3}$ cm]

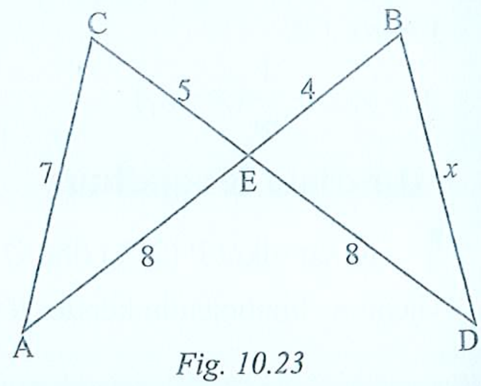


Fig. 10.23

KREU 11

EKUACIONI I DREJTËZËS

- Ekuacioni $y = m \cdot x + c$ është ekuacioni i drejtëzës.

m është koeficienti këndor (gradienti) i drejtëzës.
c është ordinata në origjinë.
Në figurën 11.1 kemi $m = \text{tg}\alpha$ dhe $c = OP$.

- **Koeficienti këndor** i drejtëzës që kalon nga pikat $M_1(x_1, y_1)$ dhe $M_2(x_2, y_2)$

$$\text{tg}\alpha = m = \frac{\text{ndryshesa e } y}{\text{ndryshesa e } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Mezi M i segmentit M_1M_2.
$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_{M_1} + x_{M_2}}{2} \\ y_M = \dfrac{y_{M_1} + y_{M_2}}{2} \end{cases}$$

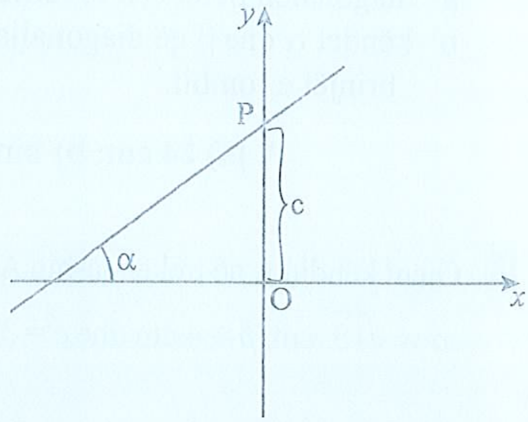


Fig. 11.1

- **Ekuacioni i drejtëzës** me koeficient këndor m dhe që kalon nga pika $M_1(x_1, y_1)$
  $y - y_1 = m(x - x_1)$.

- **Largesa ndërmjet pikave** $M_1(x_1, y_1)$ dhe $M_2(x_2, y_2)$ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

- **Ekuacioni i drejtëzës** që kalon nga pikat $M_1(x_1, y_1)$ dhe $M_2(x_2, y_2)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Dy drejtëza janë **paralele** nëse $m_1 = m_2$.

Dy drejtëza janë **pingule** nëse $m_1 \cdot m_2 = -1$.
Ekuacioni i drejtëzës që kalon nga pika (x_1, y_1) dhe është paralel me drejtëzën $y = mx + c$:
$y - y_1 = m(x - x_1)$

Ekuacioni i drejtëzës që kalon nga një pika (x_1, y_1) dhe është pingul me drejtëzën $y = mx + c$:
$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

Ushtrime të zgjidhura

1 Jepen pikat P (2, 1) dhe Q (6, 4).
Gjeni: a koeficientin këndor të drejtëzës PQ; b largesën PQ; c mesin e segmentit PQ.

Zgjidhje

a $m = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \dfrac{4-1}{6-2} = \dfrac{3}{4}$;

b $PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{(6-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$

c $x_M = \dfrac{x_P + x_Q}{2} = \dfrac{6+2}{2} = 4$; $y_M = \dfrac{y_P + y_Q}{2} = \dfrac{4+1}{2} = \dfrac{5}{2}$. Pra, M $\left(4, \dfrac{5}{2}\right)$.

2 Gjeni koeficientin këndor dhe ordinatën në origjinë për drejtëzën $x + 2y - 6 = 0$.

Zgjidhje

Kemi $2y = -x + 6, \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}x + 3$. Pra, $m = -\dfrac{1}{2}$ dhe $c = 3$.

3 Shkruani ekuacionin e drejtëzës që kalon nga pikat (1, 3) dhe (3, 7).

Zgjidhje

E kërkojmë ekuacionin në trajtën $y = mx + c$. Kemi:

$$m = \frac{7-3}{3-1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ekuacioni i drejtëzës me koeficient këndor 2 dhe që kalon nga pika (1, 3) është
$y - 3 = 2(x - 1)$ ose $y = 2x + 1$

4 Gjeni ekuacionin e drejtëzës pingule me drejtëzën d: $y = 3x - 5$, që kalon nëpër pikën (2, 2).

Zgjidhje

Koeficienti këndor $m_d = 3$. Koeficienti këndor m i drejtëzës së kërkuar plotëson kushtin
$m \cdot m_d = -1$; pra $m \cdot 3 = -1$ nga ku $m = -\dfrac{1}{3}$.
Ekuacioni i drejtëzës së kërkuar është

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x-2) \text{ ose } y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}.$$

5 Jepet trekëndëshi me kulme

$A(1,0)$; $B(-4, 3\sqrt{3})$ dhe $C(2, \sqrt{3})$ (fig. 11.2).

a Vërtetoni se ABC është trekëndësh kënddrejtë.

b Gjeni këndet që drejtëzat CA dhe CB formojnë me boshtin e abshisave.

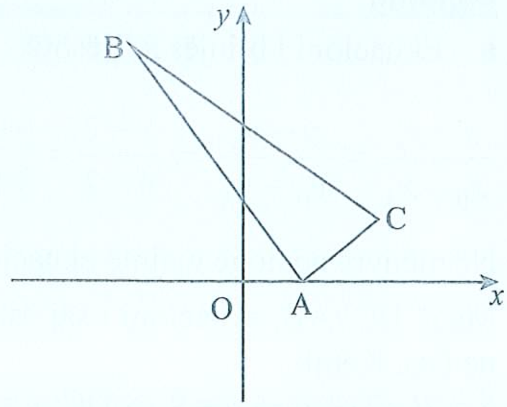


Fig. 11. 2

Zgjidhje

a Gjejmë gjatësitë e brinjëve të trekëndëshit ABC.

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-4-1)^2 + (3\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{25+27} = \sqrt{52}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(2+4)^2 + (\sqrt{3}-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36+12} = \sqrt{48}$$

Vëmë re se $AC^2 + BC^2 = 48 + 4 = 52 = AB^2$ që tregon se trekëndëshi ABC është kënddrejtë në kulmin C.

b Gjejmë koeficientet këndore të drejtëzave CA dhe BC. Kemi:

Për drejtëzën CA: $m_1 = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{\sqrt{3}-0}{2-1} = \sqrt{3} = \mathrm{tg}\alpha \Rightarrow \alpha = 60^0$

Për drejtëzën CB: $m_2 = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{2-(-4)} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \mathrm{tg}\beta \Rightarrow \beta = 150^0$

6 Shkruani ekuacionin e drejtëzës që kalon nga pikat e prerjes së saj me boshtet e koordinatave (fig. 11.3).

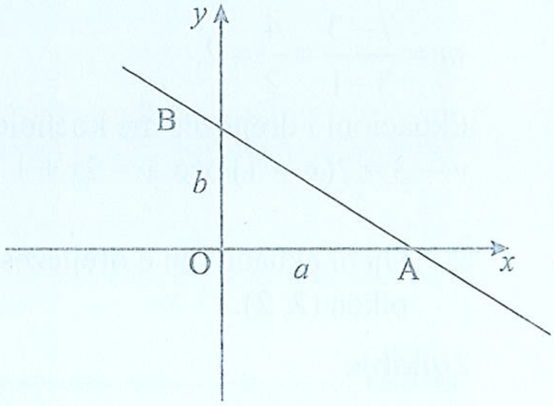


Fig. 11.3

Zgjidhje

Kemi A(a, 0) dhe B(0, b). Ekuacioni i drejtëzës AB është:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Rightarrow \frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Barazimi i fundit quhet edhe **ekuacioni i drejtëzës në segmente.**

7 Në figurën 11.4, ABCD është paralelogram. Jepen tri kulme të tij A(2, –1); B(4, 3) dhe D(–2, 5).

a Shkruani ekuacionet e brinjëve të tij.

b Gjeni koordinatat e kulmit C.

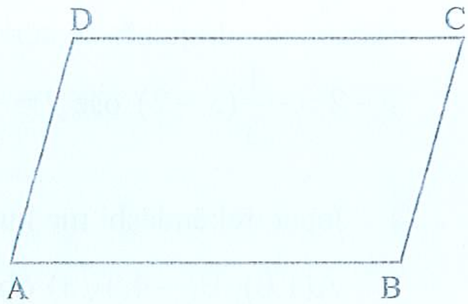


Fig. 11.4

Zgjidhje

a Ekuacioni i brinjës AB është:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Rightarrow \frac{x-2}{4-2} = \frac{y+1}{3+1} \Rightarrow 2x - y - 5 = 0 \Rightarrow AB: y = 2x - 5$$

Në mënyrë analoge gjejmë ekuacionin e brinjës AD. Kemi: AD: $y = -\dfrac{3}{2}x + 2$

Meqë DC//AB, ekuacioni i saj është $y = 2x + c$. Gjejmë c me kushtin që pika D ndodhet ne DC. Kemi:

$5 = 2(-2) + c \Rightarrow c = 9 \Rightarrow$ DC: $y = 2x + 9$

Në mënyrë analoge gjendet ekuacioni i brinjës BC. Kemi: BC: $y = -\frac{3}{2}x + 9$

b Koordinatat e kulmit C gjenden si prerje e brinjëve DC dhe BC. Kemi:

$$\begin{cases} y = 2x + 9 \\ y = -\frac{3}{2}x + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow D(0,9)$$

8 Gjeni pikën simetrike të pikës M(3, –2) në lidhje me drejtëzën që kalon nga pikat A(1, 3) dhe B(–1, 5) (fig. 11.5).

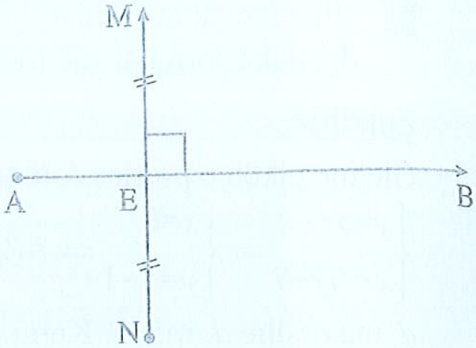


Fig. 11.5

Zgjidhje

Kërkohen koordinatat e pikës N. Meqë pikat M dhe N janë simetrike në lidhje me drejtëzën AB kemi MN⊥AB dhe ME = EN.

- Gjejmë fillimisht ekuacionin e drejtëzës AB (ekuacioni i drejtëzës që kalon nëpër dy pika të dhëna).

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Rightarrow \frac{x-1}{-1-1} = \frac{y-3}{5-3} \Rightarrow x + y - 4 = 0 \Rightarrow y = -x + 4$$

- MN është drejtëza që kalon nga pika M, pingule me drejtëzën AB.
MN: $y = x + c$. Zëvendësojmë koordinatat e pikës M.
$-2 = 3 + c \Rightarrow c = -5 \Rightarrow$ MN: $y = x - 5$
- Gjejmë pikëprerjen E të drejtëzave AB dhe MN. Kemi:

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = x - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

- Së fundi gjejmë koordinatat e pikës N, simetrike të pikës M, duke ditur se pika E është mezi i segmentit MN. Kemi:

$$x_E = \frac{x_M + x_N}{2} \Rightarrow x_N = 2 \cdot x_E - x_M = 2 \cdot \frac{9}{2} - 3 = 6$$

$$y_E = \frac{y_M + y_N}{2} \Rightarrow y_N = 2 \cdot y_E - y_M = 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 2 = 1 \text{ nga ku } N(6,1)$$

9 Në boshtin e abshisave gjeni pikën M të baraslarguar nga pikat A(1, 1) dhe B(3, 7).

Zgjidhje

Shënojmë M(a, 0) (Meqë pika ndodhet në boshtin e abshisave, ordinata e saj është e barabartë me zero). Kemi:

$AM^2 = (a-1)^2 + (0-1)^2 = a^2 - 2a + 1 + 1 = a^2 - 2a + 2$
$BM^2 = (a-3)^2 + (0-7)^2 = a^2 - 6a + 9 + 49 = a^2 - 6a + 58$. Meqë nga kushti
$MA^2 = MB^2$, kemi:
$a^2 - 2a + 2 = a^2 - 6a + 58 \Rightarrow 4a = 56 \Rightarrow a = 14$. Pra, M(14, 0).

10 Vijat me ekuacione d_1: $y = 3x - 1$; d_2: $x - 7y = 7$ dhe d_3: $x + y = -7$ priten dy nga dy, duke formuar një trekëndësh. Përcaktoni llojin e tij.

Zgjidhje

Gjejmë pikën e prerjes A të vijave d_1 dhe d_2. Kemi:

$\begin{cases} y=3x-1 \\ x-7y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow A(0,-1)$. Në mënyrë analoge gjejmë pikat e prerjes së vijave d_1 me d_3 dhe d_2 me d_3. Kemi:

$$\begin{cases} y=3x-1 \\ x+y=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow B(-\frac{3}{2},-\frac{11}{2}); \quad \begin{cases} x-7y=7 \\ x+y=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{21}{4} \\ y=-\frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow C(-\frac{21}{4},-\frac{7}{4}).$$

Gjejmë tani gjatësitë e brinjëve të trekëndëshit ABC. Kemi:

$$AB=\sqrt{(-\frac{3}{2}-0)^2+(-\frac{11}{2}+1)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{2}; \quad AC=\sqrt{(-\frac{21}{4}-0)^2+(-\frac{7}{4}+1)^2}=\frac{15\sqrt{2}}{4};$$

$$BC=\sqrt{(-\frac{21}{4}+\frac{3}{2})^2+(-\frac{7}{4}+\frac{11}{2})^2}=\frac{15\sqrt{2}}{4}$$

Meqë AC = BC, trekëndëshi është dybrinjënjëshëm.

11 Pikat $A(a, -1)$; $B(1-a, 2a+1)$ dhe $C(a+1, -3)$ ndodhen në një drejtëz. Gjeni a.

Zgjidhje

Koeficienti këndor i drejtëzës AB është $m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2a+1+1}{1-a-a} = \frac{2a+2}{1-2a}$.
Koeficienti këndor i drejtëzës AC është

$$m_2 = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-3+1}{a+1-a} = -\frac{2}{1} = -2.$$

Meqë të tria pikat ndodhen në një drejtëz kemi $m_1 = m_2$.

$$\frac{2a+2}{1-2a} = -2 \Rightarrow 2a+2 = -2+4a \Rightarrow a=2$$

12 Shkruani ekuacionin e përmesores d të segmentit AB me kulme A(−1, 4) dhe B(3, 2) (fig. 11.6).

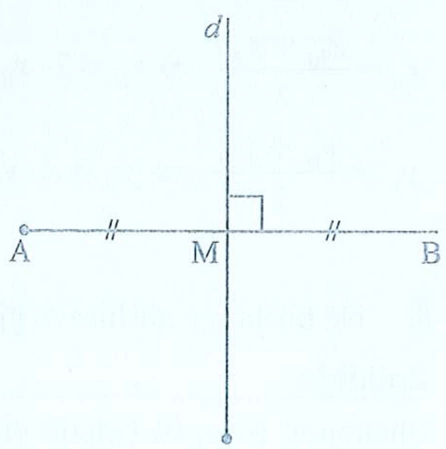


Fig. 11.6

Zgjidhje

Përmesorja d e segmentit AB, kalon nga mesi M, i segmentit dhe është pingul me të. Gjejmë fillimisht koordinatat e pikës M. Kemi:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1 \text{ dhe } y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4+2}{2} = 3 \Rightarrow M(1,3).$$

Gjejmë ekuacionin e drejtëzës që kalon nga pikat A dhe B. Kemi:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Rightarrow \frac{x+1}{3+1} = \frac{y-4}{2-4} \Rightarrow x + 2y - 7 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$m_{AB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_d = 2 \text{ (sepse } m_{AB} \cdot m_d = -1)$$

Ekuacioni i përmesores d të segmentit AB është:
$y - 3 = 2(x - 1)$ ose $y = 2x + 1$

13 Gjeni largesën e pikës A(6, 11) nga drejtëza d me ekuacion $y = -\frac{5}{12}x - \frac{7}{12}$.

Zgjidhje

Largesa e pikës A nga drejtëza d është segmenti AE, i pingules së hequr nga pika A në drejtëzën d (fig. 11.7).

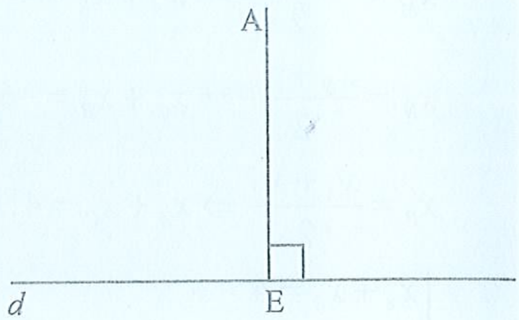


Fig. 11.7

Gjejmë fillimisht ekuacionin e drejtëzës AE. Kemi:

$$y - 11 = \frac{12}{5}(x-6) \Rightarrow y = \frac{12}{5}x - \frac{17}{5}$$

Gjejmë tani koordinatat e pikës E. Kemi:

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{12}x - \frac{7}{12} \\ y = \frac{12}{5}x - \frac{17}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow E(1,-1)$$

Së fundi gjejmë largesën AE, kemi:

$$AE = \sqrt{(x_A - x_E)^2 + (y_A - y_E)^2} = \sqrt{(6-1)^2 + (11+1)^2} = \sqrt{169} = 13$$

14 Shkruani ekuacionin e drejtëzës që kalon nga pika M(4, −3) dhe formon me boshtet koordinative trekëndësh me syprinë 3 njësi katrore.

Zgjidhje

Ekuacioni i drejtëzës së kërkuar AB është:
$y + 3 = m(x - 4) \Rightarrow y = mx - 4m - 3$ (fig. 11.8)

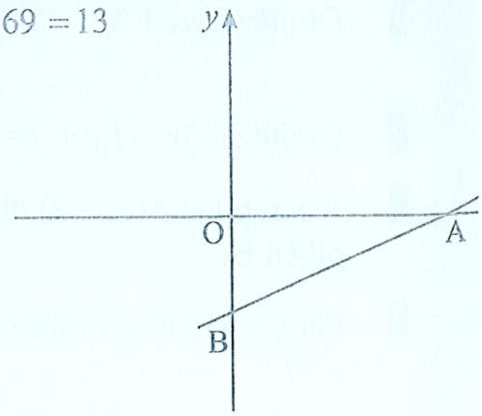


Fig. 11.8

Gjejmë koordinatat e pikave A dhe B. Kemi:

$x_A = 0 \Rightarrow y_A = -4m - 3 \Rightarrow A(0, -4m - 3)$; $y_B = 0 \Rightarrow x_B = \frac{4m+3}{m} \Rightarrow B(\frac{4m+3}{m}, 0)$

$S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{4m+3}{m} \cdot (-4m - 3) = 3 \Rightarrow m_1 = -\frac{3}{2}$ ose $m_2 = -\frac{3}{8}$;

$m_1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow AB: 3x+2y-6=0$; $m_2 = -\frac{3}{8} \Rightarrow AB: 3x+8y+12=0$.

15 Jepen meset e brinjëve të trekëndëshit M (2, 4); N(−3, 0); P(2, 1). Gjeni koordinatat e kulmeve të tij (fig. 11.9).

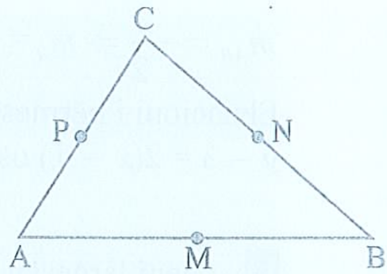


Fig. 11.9

Zgjidhje

Kemi:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_A + x_B = 4$$

$$x_N = \frac{x_C + x_B}{2} \Rightarrow x_C + x_B = -6$$

$x_P = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_A + x_C = 4$. Formojmë sistemin:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 4 \\ x_C + x_B = -6 \\ x_A + x_C = 4 \end{cases}$$

Duke mbledhur anë për anë këto ekuacione kemi:

$2(x_A + x_B + x_C) = 2 \Rightarrow x_A + x_B + x_C = 1 \Rightarrow x_A = 7;\ x_B = -3;\ x_C = -3.$

Në mënyrë analoge gjejmë $y_A = 5;\ y_B = 3;\ y_C = -3.$

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Drejtëzat $ax + 3y - 5 = 0$ dhe $2x - by + 7 = 0$ janë paralele. Gjeni $a \cdot b$.
P. [$a \cdot b = -6$]

2 Drejtëzat $5x - ky + 7 = 0$ dhe $3x + y - 6 = 0$ janë pingule. Gjeni k. P. [$k = 15$]

3 Jepen pikat A(3, −2) dhe B(−4, 3). Gjeni pikën simetrike e pikës A në lidhje me pikën B.
P. [(-11, 8)]

4 Për ç'vlerë të k, drejtëzat $y = -3x + 2$ dhe $y = kx + 7$ priten në një pikë me abshisë −1?
P. [$k = 2$]

5 Shkruani ekuacionin e drejtëzës, e cila kalon nga pika M(−1, −2) dhe është:
a paralele me drejtëzën $2x - y - 1 = 0$;
b pingule me drejtëzën $3x + 2y + 5 = 0$;
c paralele me boshtin e abshisave.

P. [a) $2x - y = 0$; b) $2x - 3y - 4 = 0$; c) $y = -2$]

6 Pika P(3, k) ndodhet në drejtëzën që kalon nga pikat Q(0, 2) dhe R(−1, 1). Gjeni k.

P. [$k = 5$]

7 Pikat ($4u - 3$, v) dhe ($-u - 3$, v) janë simetrike në lidhje me origjinën e koordinatave. Gjeni (u, v).

P. [(2, 5)]

8 Jepen pikat A(−3, 2); B(1, −2) dhe M(4, 3). Gjeni:
a Projeksionin E të pikës M në drejtëzën AB.
b Simetriken N të pikës M në lidhje me AB.

P. [a E(0, -1); b) N(-4, -5)]

9 Jepen pikat A(−1, 2) dhe B(3, 6).
a Shkruani ekuacionin e drejtëzës AB.
b Shkruani ekuacionin e përmesores së segmentit AB.
c Në këtë përmesore gjeni pikën P me abshisë pozitive, të tillë që PA = 4 njësi.

P. [a) $x - y + 3 = 0$; b) $x + y - 5 = 0$; c) P(3, 2)]

10 Gjeni këndin që formon me boshtin e abshisave drejtëza që kalon nga pikat M(−3, 1) dhe N(2, −4).

P. [135°]

11 Jepet drejtëza $2x - 5y + 10 = 0$.
a Gjeni pikat e prerjes së saj përkatësisht A me boshtin e abshisave dhe B me boshtin e ordinatave.
b Gjeni syprinën e trekëndëshit OAB.
c Shkruani ekuacionet e drejtëzave që kalojnë nga pikat A dhe B dhe janë pingule me drejtëzën e dhënë.

P. [a) (−5, 0); (0, 2); b) 5 njësi katrore; c) $5x + 2y + 25 = 0$; $5x + 2y - 4 = 0$]

12 Jepen drejtëzat d_1: $2x - 3y - 8 = 0$ dhe d_2: $x + 2y + 3 = 0$. Shkruani ekuacionin e drejtëzës d_3, e cila kalon nga pikëprerja e drejtëzave d_1 dhe d_2 dhe nga origjina e koordinatave.

P. [$y = -2x$]

13 Brinjët e trekëndëshit kanë ekuacione $y = 5x - 1$; $2x - 3y + 6 = 0$ dhe $3x + 2y - 2 = 0$. Gjeni këndet e tij.

P. [45°; 45°; 90°]

14 Jepet trekëndëshi me kulme A(2, 3); B(4, −1) dhe C(−2, −3). Shkruani ekuacionin e drejtëzës që kalon nga meset e brinjëve AB dhe AC të tij. P. [$x + y - 4 = 0$]

15 Projeksioni i pikës P(−8, 12) në drejtëzën AB është Q(−12, 5). Shkruani ekuacionin e drejtëzës AB. P. [$4x + 7y + 13 = 0$]

16 Për ç'vlerë të k, vijat $y = x^2$ dhe $y = x - 2k$ kanë:

a dy pika të përbashkëta; b një pikë të përbashkët;

c asnjë pikë të përbashkët.

P. [a) $k < \frac{1}{8}$ b) $k = \frac{1}{8}$ c) $k > \frac{1}{8}$]

17 Vijat $y = x^2$; $y = 2x - 1$ dhe $y = kx + 3$ kalojnë nga e njëjta pikë. Gjeni k.

P. [$k = -2$]

18 Në paralelogramin ABCD jepen A(2, −3); B(−2, −2); C(−1, 3). Gjeni koordinatat e kulmit D të kundërt me B. P. [D(3, 2)]

19 Cila është pika e drejtëzës $y = x$ më afër me pikën (6, 2)? P. [(4, 4)]

20 Gjeni bashkësinë e pikave të baraslarguara nga pikat A(−1, 4) dhe B(3, 2).

P. [$2x - y + 1 = 0$]

KREU 12

VEKTORËT

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(\overrightarrow{-b})$

$\vec{a}=k\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\,//\,\vec{b}$ dhe $|\vec{a}|=|k|\cdot|\vec{b}|$

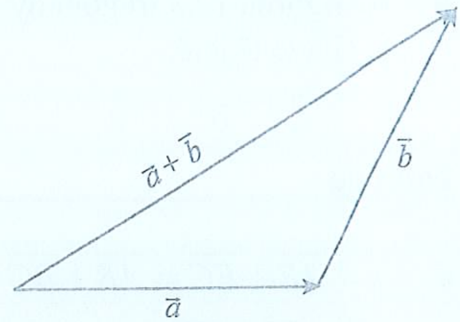


Fig. 12.1

Vektori njësi $\vec{a}_1=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$.

Koordinatat e vektorit

$A(x_1, y_1);\ B(x_2, y_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}$

$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Prodhimi i vektorit me numër

$\vec{a}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow\ k\vec{a}=\begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{pmatrix}$

Moduli i vektorit

$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

Shuma dhe ndryshesa e vektorëve

$\vec{a}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ dhe $\vec{b}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}\pm\vec{b}=\begin{pmatrix} x_1\pm x_2 \\ y_1\pm y_2 \end{pmatrix}$

Kushti i paralelizmit të vektorëve

$\vec{a}\,//\,\vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$

Ushtrime të zgjidhura

1 Pika N është mes i segmentit EF. Shkruani dy barazime vektoriale që rrjedhin nga ky fakt.

Zgjidhje

Nga figura 12.2 mund të shkruajmë:

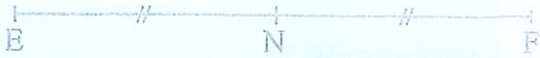


Fig. 12.2

a $\quad \overrightarrow{EN} = \overrightarrow{NF}$ $\qquad$ b $\quad \overrightarrow{NE} = \overrightarrow{FN}$.

2 Në figurën 12.3 tregoni dy vektorë, shuma e të cilave të jetë:

a $\quad \vec{x}$ $\qquad$ b $\quad \vec{y}$ $\qquad$ c $\quad \overrightarrow{AD}$

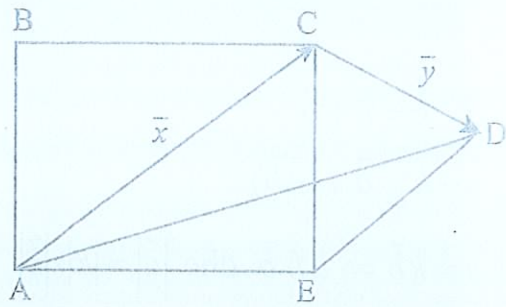


Fig. 12.3

Zgjidhje

a $\quad \vec{x} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

b $\quad \vec{y} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED}$

c $\quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

3 Jepet katërkëndëshi ABCD (fig. 12.4).

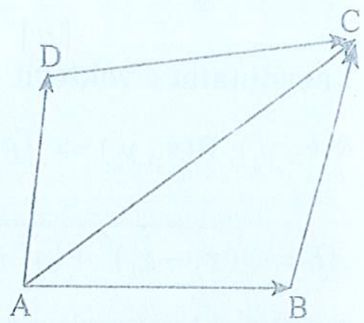


Fig. 12.4

Vërtetoni që $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.

Vërtetim

Kemi: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ dhe $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC}$. Pra, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.

4 Diagonalet e paralelogramit ABCD priten në pikën O (fig. 12.5). Gjeni shumat:

a $\quad \overrightarrow{DO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB})$ $\qquad$ b $\quad \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA}$

c $\quad (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{DO}$.

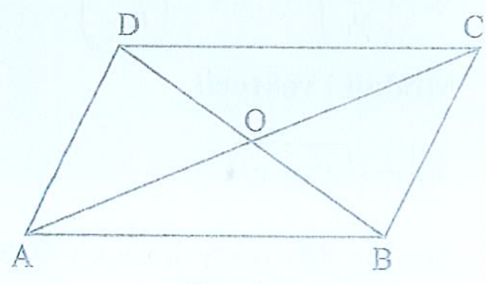


Fig. 12.5

Zgjidhje

a $\quad$ Kemi $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, prandaj

$\overrightarrow{DO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DB}$.

b $\quad$ Kemi $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CO}$, prandaj $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO}$.

c $\quad (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO} = \vec{O}$, sepse vektorët $\overrightarrow{BO}$ dhe $\overrightarrow{DO}$ janë të kundërt.

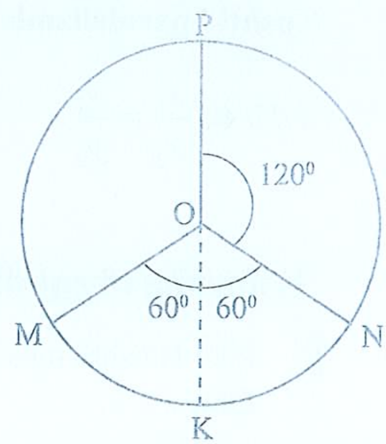


Fig. 12.6

5 Pikat M, N, P e ndajnë rrethin me qendër O në tri pjesë të barabarta (fig. 12.6). Shënohet me K mesi i harkut MN.

a $\quad$ Vërtetoni që $\overrightarrow{OK} = -\overrightarrow{OP}$.

b $\quad$ Gjeni shumën $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}$.

Zgjidhje

a Kemi $\angle POK = \angle POM + \angle MOK = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

Pikat P, O, K shtrihen në një drejtëz dhe OP = OK, prandaj $\overrightarrow{OK} = -\overrightarrow{OP}$

b Kemi $\angle MON = 120^\circ$, prandaj $\angle MOK = \angle KON = 60^\circ$. Trekëndëshat dybrinjënjëshëm OMK, OKN kanë këndin në kulm nga 60°, prandaj ata janë barabrinjës. Katërkëndëshi OMKN i ka të katër brinjët të barabartë, prandaj është romb. Sipas rregullit të paralelogramit kemi $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$.

6 Në figurën 12.7 është dhënë paralelogrami ABCD dhe është hequr drejtëza (CE)||(BD). Vërtetoni që:

a $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

b $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE}$

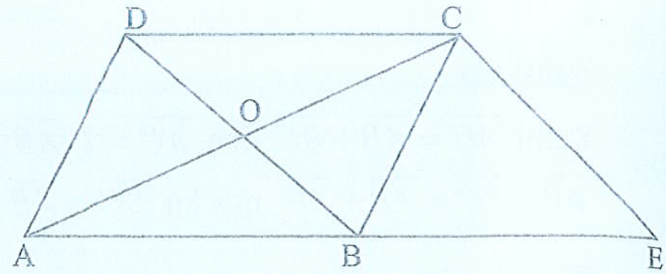


Fig. 12.7

Zgjidhje

a Katërkëndëshi BDCE është paralelogram, sepse i ka brinjët e kundërta dy nga dy paralele. Prandaj $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CE}$ dhe $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$.
Kemi $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BE}$, prandaj $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$. Pra, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

b $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$. Pra,
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE}$.

7 Për ç'vlera të k vektori $\vec{b} = k\vec{a} + \vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{o})$ është:

a i barabartë me $\vec{a}$; b me drejtim të kundërt me $\vec{a}$.

Zgjidhje

Kemi $\vec{b} = (k+1) \cdot \vec{a}$.

a $(k+1) \cdot \vec{a} = \vec{a} \Rightarrow k+1 = 1 \Rightarrow k = 0$

b $k+1 < 0 \Rightarrow k < -1$

8 Në trekëndëshin AB pika M është mesi i brinjës AB (fig. 12.8). Vërtetoni që $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$.

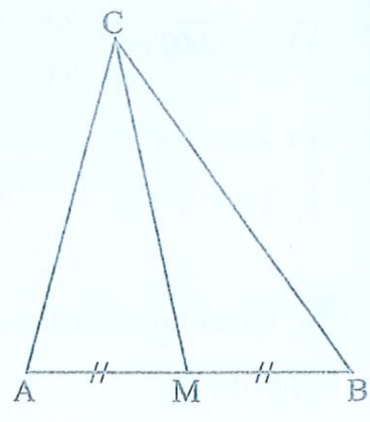


Fig. 12.8

Vërtetim

Figura 12.8.

Kemi: $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$ dhe $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM}$. Mbledhim anë për anë këta dy barazime.

$\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CM}=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM})\Rightarrow 2\cdot\overrightarrow{CM}=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM})$. Për vektorët $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}$ janë vektorë të kundërt (pse?), prandaj $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{O}$. Kështu,

$2\cdot\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$, që nga $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$.

9 Jepet $\overrightarrow{AC}=2\cdot\overrightarrow{AB}$ (fig. 12.9). Vërtetoni që $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.

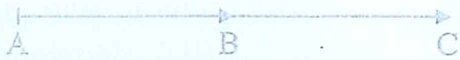


Fig. 12.9

Zgjidhje:

Kemi $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ dhe $\overrightarrow{AC}=2\cdot\overrightarrow{AB}$. Marrim

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$, nga ku $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$.

10 Në planin koordinativ janë dhënë pikat A(2, 1), B(–3, 4) dhe C(2, 5).

a Gjeni koordinatat e vektorëve $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$.

b Shprehni këta vektorë me anën e vektorëve njësi $\vec{i},\vec{j}$.

Zgjidhje

a $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-3-2\\4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}2-(-3)\\5-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

b $\overrightarrow{AB}=-5\vec{i}+3\vec{j}$; $\overrightarrow{BC}=5\vec{i}+\vec{j}$.

11 Jepen pikat A(3, 5) dhe B(–2, 4). Gjeni pikën M(x; y), të tillë që

$\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Zgjidhje

$\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}x-3\\y-5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{MB}=\begin{pmatrix}-2-x\\4-y\end{pmatrix}\Rightarrow 3\overrightarrow{MB}=\begin{pmatrix}-6-3x\\12-3y\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{MB}=\begin{pmatrix}-2x-9\\-2y+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{cases}-2x-9=0\\-2y+7=0\end{cases}$, që nga $x=-\frac{9}{2}; y=\frac{7}{2}$. Pra, $M(-\frac{9}{2},\frac{7}{2})$.

12 Gjeni koordinatat e pikës M, nëse $\overrightarrow{NM}=\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$ dhe N (2, –4).

Zgjidhje

Shënojmë M (x, y). Atëherë $\overrightarrow{NM}=\begin{pmatrix}x-2\\y-(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2\\y+4\end{pmatrix}$. Por $\overrightarrow{NM}=\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$, prandaj kemi $\begin{cases} x-2=-1 \\ y+4=-5 \end{cases}$, që nga $\begin{cases} x=1 \\ y=-9 \end{cases}$.

13 Në planin koordinativ janë dhënë pikat A(2; 1), B(−5; 3). Gjeni pikën M të tillë që $\overrightarrow{AM}=2\cdot\overrightarrow{BM}$.

Zgjidhje

Shënojmë M(x, y). Kemi $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$ dhe $\overrightarrow{BM}=\begin{pmatrix} x+5 \\ y-3 \end{pmatrix}$, prandaj

$2\cdot\overrightarrow{BM}=\begin{pmatrix} 2x+10 \\ 2y-6 \end{pmatrix}$. Nga barazimi $\overrightarrow{AM}=2\cdot\overrightarrow{BM}$, $\Rightarrow \begin{cases} x-2=2x+10 \\ y-1=2y-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-12 \\ y=5 \end{cases}$.

14 Në trekëndëshin ABC, pikat M, N janë përkatësisht meset e brinjëve AC, BC (fig. 12.10).Vërtetoni që $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

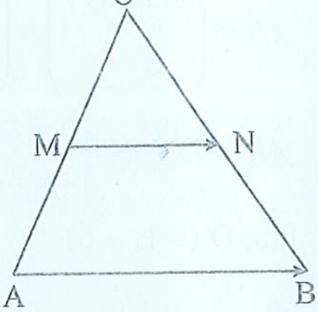


Fig. 12.10

Zgjidhje

Kemi $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ dhe $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. Në trekëndëshin CMN kemi:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Kjo tregon që (MN)||(AB) dhe MN = $\frac{1}{2}$AB

(Veti të njohura të vijës së mesme të trekëndëshit).

15 Në katërkëndëshin ABCD, pikat E dhe F janë përkatësisht meset e brinjëve AB dhe CD (fig. 12.11). Jepen $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$ dhe $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Tregoni që $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$.

Zgjidhje

Në katërkëndëshin EADF kemi:

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}$.

Në katërkëndëshin EBCF kemi:

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}$. Duke mbledhur anë për anë këto barazime kemi:

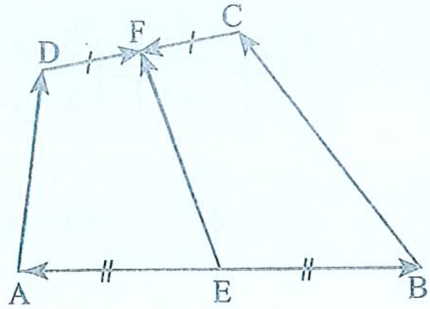


Fig. 12.11

$2\overrightarrow{EF}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB})+(\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CF})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$. Por

$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$ dhe $\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$ (sepse janë vektorë të kundërt), prandaj

$2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$ nga ku

$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

16 Jepen koordinatat e tri kulmeve të paralelogramit ABCD A(−2, 1); B(4, 3); C(5, −4). Gjeni koordinatat e kulmit të katërt D, i cili ndodhet përballë B.

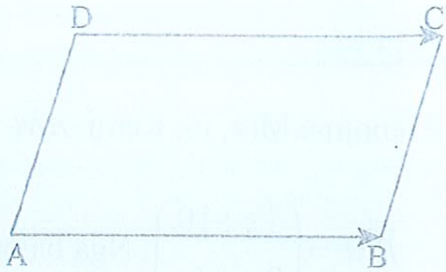


Fig. 12.12

Zgjidhje

Në figurën 12.12 është paraqitur paralelogrami ABCD.

Shënojmë D $(x; y)$. Kemi:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-(-2) \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 5-x \\ -4-y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} 5-x=6 \\ -4-y=2 \end{cases} \text{ nga ku } x=-1; y=-6.$$

Pra, D $(-1; -6)$.

17 Vërtetoni se pikat A(2, 1), B(4, 3), C(1, 0) ndodhen në një drejtëz.

Zgjidhje

Kemi $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dhe $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Vëmë re se $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$, që tregon se A, B dhe C pikat janë në një drejtëz.

18 Jepet $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$ dhe $\vec{a} - \vec{c} = 2\vec{b}$. Gjeni $x+y$.

Zgjidhje

$$\vec{a} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-x \\ 2-y \end{pmatrix}. \text{ Nga kushti } \begin{pmatrix} 3-x \\ 2-y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3-x=-4 \\ 2-y=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-8 \end{cases} \Rightarrow x+y=-1$$

19 Kulmet e katërkëndëshit ABCD (fig. 12.13) kanë për rrezevektorë:

M: $\vec{m}=\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$ N: $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ P: $\vec{p}=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

Q: $\vec{q}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$.

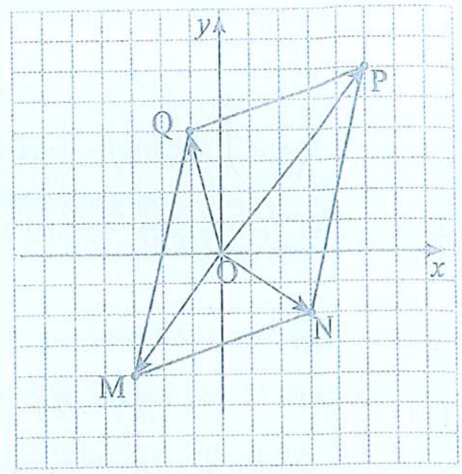


Fig. 12.13

Tregoni që katërkëndëshi MNPQ është paralelogram.

Zgjidhje

Gjejmë koordinatat e vektorëve që janë brinjë të katërkëndëshit të dhënë.

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{ON}=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix}$$

Vëmë re se $\overrightarrow{MN}\,//\,\overrightarrow{PQ}$, sepse koordinatat e tyre janë të përpjesshme. $(\frac{6}{-6}=\frac{2}{-2})$.

Gjithashtu $\overrightarrow{NP}\,//\,\overrightarrow{QM}$, sepse koordinatat e tyre janë të përpjesshme: $(\frac{2}{-2}=\frac{8}{-8})$

Në këtë mënyrë, katërkëndëshi MNPQ është paralelogram.

20 Jepen vektorët $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ dhe $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Gjeni vlerën pozitive të m, për të cilën $|\vec{a}+m\vec{b}|=5$.

Zgjidhje

$$\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\Rightarrow m\vec{b}=\begin{pmatrix}2m\\3m\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}+m\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2m\\3m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2m\\-2+3m\end{pmatrix}$$

$\left|\vec{a}+m\vec{b}\right|=\sqrt{(-1+2m)^2+(-2+3m)^2}$. Nga kushti:

$\sqrt{(-1+2m)^2+(-2+3m)^2}=5$. Duke ngritur të dy anët në katror kemi:

$(-1+2m)^2+(-2+3m)^2=25$

$1-4m+4m^2+4-12m+9m^2=25$

$13m^2-16m-20=0.$

Duke zgjidhur këtë ekuacion gjejmë $m_1=-\frac{5}{13}$ dhe $m_2=2$.

Për kushtet e problemit pranohet $m=2$.

21 Rrezevektorët e pikave M dhe N janë $\vec{m}=3\vec{i}+7\vec{j}$ dhe $\vec{n}=-6\vec{i}-5\vec{j}$.

Gjeni:

a largesat e pikave M dhe N nga origjina e koordinatave;

b largesën ndërmjet pikave M dhe N.

Zgjidhje

$$OM=\left|\vec{m}\right|=\sqrt{3^2+7^2}=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$$

$$ON=\left|\vec{n}\right|=\sqrt{(-6)^2+(-5)^2}=\sqrt{36+25}=\sqrt{61}$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=(-6\vec{i}-5\vec{j})-(3\vec{i}+7\vec{j})=-9\vec{i}-12\vec{j}$$

$$MN=\sqrt{9^2+12^2}=\sqrt{81+144}=\sqrt{225}=15$$

22 Jepet $\begin{cases}2\vec{a}+3\vec{b}=14\vec{i}+11\vec{j}\\ \vec{a}-4\vec{b}=-4\vec{i}-22\vec{j}\end{cases}$ ku $\vec{i}$ dhe $\vec{j}$ janë vektorë njësi. Duke zgjidhur sistemin:

a Shprehni vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ me anën e vektorëve njësi $\vec{i}$ dhe $\vec{j}$.

b Gjeni gjatësitë e vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$.

Zgjidhje

$$\begin{cases} 2\vec{a}+3\vec{b}=14\vec{i}+11\vec{j} \\ \vec{a}-4\vec{b}=-4\vec{i}-22\vec{j} \end{cases}$$

Duke shumëzuar ekuacionin e dytë me 2 kemi:

$$\begin{cases} 2\vec{a}+3\vec{b}=14\vec{i}+11\vec{j} \\ 2\vec{a}-8\vec{b}=-8\vec{i}-44\vec{j} \end{cases}$$

Zbresim nga ekuacioni i parë, ekuacionin e dytë:

$3\vec{b}+8\vec{b}=14\vec{i}+11\vec{j}+8\vec{i}+44\vec{j} \Rightarrow 11\vec{b}=22\vec{i}+55\vec{j}$ nga ku: $\vec{b}=2\vec{i}+5\vec{j}$.

Nga ekuacioni i dytë kemi:

$$\vec{a}=4\vec{b}-4\vec{i}-22\vec{j}=4(2\vec{i}+5\vec{j})-4\vec{i}-22\vec{j}=8\vec{i}+20\vec{j}-4\vec{i}-22\vec{j}=4\vec{i}-2\vec{j}$$

b $\vec{a}=4\vec{i}-2\vec{j} \Rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\vec{b}=2\vec{i}+5\vec{j} \Rightarrow |\vec{b}|=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1. Në drejtëzën d janë marrë pikat A, B, C (B ndërmjet A dhe C) të tilla që AB = 2 cm dhe BC = 3 cm. Gjeni numrin k të tillë që:
   a $\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$ b $\overrightarrow{BC}=k\cdot\overrightarrow{BA}$ P. [a) $k=\frac{5}{3}$; b) $k=-\frac{3}{2}$]

2. Në trapezin ABCD (AB//CD) jepen AB = 7 cm, CD = 4 cm. Për ç'vlera të k janë të vërteta barazimet:
   a $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{DC}$ b $\overrightarrow{CD}=k\cdot\overrightarrow{AB}$? P. [a) $k=\frac{7}{4}$; b) $k=-\frac{4}{7}$]

3. Jepen pikat A(2; 3), B(0; 1), C(−4; −3). Tregoni që vektorët $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{AC}$ janë bashkëvizorë.

4. Jepen pikat A(3; 6) dhe B (−2; 4). Gjeni x, në mënyrë që pika M(x; 0) të ndodhet në drejtëzën AB. P. [$x=-12$]

5. Në gjashtëkëndëshin e rregullt ABCDEF shënojmë $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ dhe $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$. Shprehni vektorët $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ me anë të vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$.

6 Në trapezin ABCD, baza AB është 2 herë më e madhe se baza DC. Shprehni vektorët $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$ nëpërmjet vektorëve $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ dhe $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

P. $[\overrightarrow{DC} = \vec{a} - \vec{b};\ \overrightarrow{AC} = 2\vec{a} - \vec{b};\ \overrightarrow{DB} = \vec{a} - 2\vec{b}]$

7 Pikat A, B, C dhe D ndodhen në një drejtëz dhe $2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC} = 6\overrightarrow{CD}$ dhe $\overrightarrow{AD} = k \cdot \overrightarrow{CD}$. Gjeni k. P. $[k = 6]$

8 Në figurën 12.14 jepet $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ dhe $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{DC}$. Shprehni $\overrightarrow{AD}$ me anën e $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$.

P. $[\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}(\vec{a} + 3\vec{b})]$

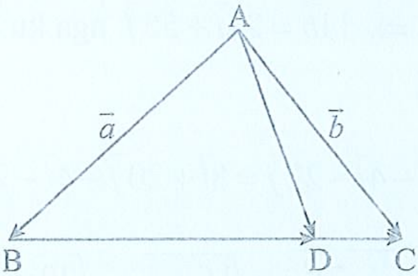


Fig. 12.14

9 Jepen pikat A(3, −1) dhe B(1, 3). Gjeni koordinatat e pikës M(x, y) të tillë që $\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{BM}$ P. $[M(\frac{5}{3}, \frac{5}{3})]$

10 Jepet $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2a+3 \\ 2b+a \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2a+c \\ a+8 \end{pmatrix}$; $\vec{t} = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$ dhe $\vec{u} = \vec{v}$. Gjeni $|\vec{t}|$. P. $[|\vec{t}| = 5]$

11 Jepet $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dhe $\vec{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ ku $\vec{c} = m\vec{a} - n\vec{b}$. Gjeni $m \cdot n$. P. $[m \cdot n = 12]$

12 Jepet $\begin{cases} 3\vec{a} + 5\vec{b} = 2\vec{i} - 9\vec{j} \\ 7\vec{a} - \vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} \end{cases}$. Gjeni $|5\vec{a} + 2\vec{b}|$. P. [5]

13 Jepen vektorët $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dhe $2\vec{a} + k\vec{b} = \vec{c}$. Gjeni k. P. $[k = 3]$

14 Jepet $3\vec{i} + \vec{j} = a(\vec{i} - 3\vec{j}) + b(3\vec{i} + \vec{j})$. Gjeni $a + b$. P. $[a + b = 1]$

15 Jepen vektorët $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ dhe $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$.

a Gjeni $3\vec{u} - \vec{v}$.

b Gjeni $|3\vec{u} - \vec{v}|$. P. [b) 5]

16 Jepen vektorët $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ dhe $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

a Shkruani vektorin njësi, i cili ka drejtimin e vektorit $\overrightarrow{OA}$.

b Gjeni koordinatat dhe gjatësinë e vektorit $\overrightarrow{AB}$.

P. [a $\begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{12}{13} \end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$; 5]

17 Provoni se katërkëndëshi me kulme A(2, 5); B(4, 1); C(0, 1) dhe D(–2, 3) është romb.

18 $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ x \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}$ është vektor njësi. Gjeni x me kushtin që $x < 0$.

P. [$x = -\frac{3}{7}$]

19 Vërtetoni se katërkëndëshi me kulme A(2, 2); B(–1, 6); C(–5, 3) dhe D(–2, –1) është katror.

KREU 13

DERIVATET

Derivat i funksionit f në pikën a quhet limiti $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ai shënohet $f'(a)$.

Tabela e derivateve

$(c)' = 0$

$(ax+b)' = a$

$(ax^2+bx+c)' = 2ax+b$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Rregullat e derivimit

$(cf)' = cf'$

$(f \pm g)' = f' + g'$

Nëse vlerat e një madhësie y lidhen me vlerat e madhësisë x me relacionin funksional $y = f(x)$, atëherë shpejtësia e ndryshimit të madhësisë y, me rritjen e x, në çastin kur $x = a$, jepet nga derivati i y në lidhje me x në pikën a.

- Nëse pika materiale kryen lëvizje drejtvizore sipas ligjit $x = x(t)$, atëherë shpejtësia e saj në çastin a, është sa derivati i x (zhvendosjes) në lidhje me kohën (t) në pikën a.

- Nëse funksioni f ka derivat në pikën x, atëherë për h mjaft afër zeros mund të shkruajmë afërsisht: $f(x+h) \approx f(x) + h \cdot f'(x)$

Ekuacioni i tangjentes ndaj grafikut të funksionit $y = f(x)$ në pikën $(a, f(a))$ është $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

Ushtrime të zgjidhura

1 Gjeni derivatin në pikën x dhe pastaj në pikën 4 për funksionin:

a $y = x^2 + 2\sqrt{x} - 4$ b $y = \frac{1}{x} + x^2 - \sqrt{x}$ c $y = c + x + x^2 + x^3$

d $y = 3c + x^3 - \sqrt{x}$ e $y = c + 3x - \sqrt{x}$

Zgjidhje

b $$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' + (x^2)' - (\sqrt{x})' = -\frac{1}{x^2} + 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2 Gjeni vlerat e x për të cilat $f'(x) = 0$ nëse f është:
a $y = x^3 - 2x$ b $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ c $y = x^4 + 4x^3 - 8x^3 - 8x^2 - 5$.

Zgjidhje

b Kemi $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$; $12x(x^2 - x - 2) = 0$, d.m.th., $(12x = 0$ ose $x^2 - x - 2 = 0)$.
Rrënjët janë $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$.
c Kemi $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x$; $4x(x^2 - 3x - 4) = 0$. Rrënjët janë $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 4$.

3 Gjeni derivatin e funksioneve të mëposhtëm.

a $y = \dfrac{1}{x^5}$ b $y = \sqrt{x^3}$ c $y = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{x}}$.

Zgjidhje

a Shkruajmë $y = \dfrac{1}{x^5} = x^{-5}$; $y' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = \dfrac{-5}{x^6}$

b Shkruajmë $y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$; $y' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$.

4 Gjeni me rrugën më të thjeshtë derivatin e funksionit $y = (2x + \sqrt{x})(1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}})$
a në pikën x $(x > 0)$ b në pikën $x = 4$

Zgjidhje

Funksioni shkruhet $y = (2x + \sqrt{x})(1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}) = 2x + \sqrt{x} - 4\sqrt{x} - 2 = 2x - 3\sqrt{x} - 2$

a $y' = 2 - \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$ b $y'(4) = 2 - \dfrac{3}{2\sqrt{4}} = 2 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{4}$

5 Një pikë materiale kryen lëvizje drejtvizore në boshtin Ox sipas ligjit $x(t) = t^2 + b \cdot t + c$ (x matet në metra, t në sekonda).
a Gjeni b, c duke ditur që në çastin $t = 5$ sek., abshisa ka qenë 100 m dhe shpejtësia $v = 20$ m/s.
b Në cilin çast shpejtësia ka qenë zero?

Zgjidhje

a Kemi $v(t) = 2t + b$ sepse $v(t) = x'(t)$
Nga kushti, $x(5) = 100$ dhe $v(5) = 20$ kemi:

$$\begin{cases} 5^2 + b \cdot 5 + c = 100 \\ 2 \cdot 5 + b = 20 \end{cases}$$ që nga $b = 10$, $c = 25$.

6 Gjeni koeficientin këndor të tangjentes ndaj vijës $y = x^2 + x - 6$ në pikat ku ajo pret
a Boshtin Oy; b Boshtin Ox.

Zgjidhje

a Pika e prerjes së vijës $y = x^2 + x - 6$ me boshtin Oy gjendet duke zgjidhur sistemin
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^2 + x - 6 \end{cases}.$$

Ajo është $A(0; -6)$. Kemi $f'(x) = 2x + 1$; $f'(0) = 1$.
Ekuacioni i tangjentes në pikën A është:
$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$ d.m.th., $y + 6 = 1(x - 0)$ ose $y - x + 6 = 0$.

b Pika e prerjes së vijës me boshtin Ox gjendet duke zgjidhur sistemin

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 + x - 6 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x = -3 \text{ ose } x = 2).$$

Kemi pra dy pika të tilla B $(-3; 0)$ C $(2; 0)$.
Ekuacioni i tangjentes në pikën B është $y - f(-3) = f'(-3) \cdot (x + 3)$.
Por, $f(-3) = 0$ dhe $f'(-3) = -5$.
Ekuacioni shkruhet $y - 0 = -5(x + 3) \Rightarrow 5x + y + 15 = 0$.
Ekuacioni i tangjentes në pikën C shkruhet $y - f(2) = f'(2)\,(x - 2)$.
Por, $f(2) = 0$ dhe $f'(2) = 5$.
Ekuacioni është $y - 0 = 5(x - 2) \Rightarrow 5x - y - 10 = 0$.

7 Në cilën pikë tangjentet ndaj vijave $y = x^2$ dhe $y = x^3$ përputhen?

Zgjidhje

Për funksionin f: $y = x^2$ kemi $f'(x) = 2x$. Për funksionin g: $y = x^3$ kemi $g'(x) = 3x^2$.
Le të jetë $M_0\,(x_0, y_0)$ pika ku tangjentet përputhen.
Së pari, kjo pikë është e përbashkët për të dy vijat, prandaj

$$\begin{cases} y_0 = x_0^2 \\ y_0 = x_0^3 \end{cases} \Rightarrow x_0^2 = x_0^3 \text{ d.m.th., } x_0 = 0 \text{ ose } x_0 = 1.$$

Së dyti, tangjentet ndaj vijave në këtë pikë kanë të njëjtin koeficient këndor, d.m.th.,
$f'(x_0) = g'(x_0)$ pra $2x_0 = 3x_0^2$.
Barazimin e fundit e vërteton vetëm $x_0 = 0$ (dhe jo $x_0 = -1$).
Pika e kërkuar është O $(0; 0)$.

8 Jepet parabola $y = \frac{1}{2}x^2 + x$.

a Gjeni pikat e prerjes së saj me boshtin e abshisave.
b Gjeni ekuacionet e tangjenteve ndaj parabolës në këto pika.
c Tregoni se këto dy tangjente janë pingule ndërmjet tyre.

Zgjidhje

a Pikat e prerjes me boshtin e abshisave janë zgjidhje të sistemit të ekuacioneve:

$$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}x^2+x \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{1}{2}x^2+x=0 \Rightarrow -x^2+2x=0 \Rightarrow x(-x+2)=0 \Rightarrow x=0 \text{ ose } x=2$$

Pikat e prerjes janë (0,0) dhe B(2,0).

b Gjejmë derivatin e funksionit $y=-\dfrac{1}{2}x^2+x$. Kemi:

$y'=-\dfrac{1}{2}\cdot 2x+1 \Rightarrow y=-x+1$

Në pikën A: $f'(0)=0+1=1$, pra $k_1=1$

Në pikën B: $f'(2)=-2+1=-1$, pra $k_2=-1$.

Ekuacioni i tangjentes në një pikë të vijës ka trajtën $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

Në pikën A(0,0) ekuacioni i tangjentes është:

$y-0=1(x-0)$ ose $y=x$.

Në pikën B ekuacioni i tangjentes është:

$y-0=-1(x-2)$ ose $y=-x+2$.

c Koeficientët këndorë të tangjenteve janë $k_1=1$ dhe $k_2=-1$.

Vemë re se $k_1\cdot k_2=-1$ gjë që tregon se tangjentet janë pingule ndërmjet tyre.

9 Për ç'vlera të a grafiku i funksionit $y=\dfrac{ax-x^2}{4}$ e pret boshtin Ox nën këndin 45°?

Zgjidhje

Pikat e prerjes së grafikut me boshtin Ox i gjejmë duke zgjidhur sistemin:

$$\begin{cases} y=\dfrac{ax-x^2}{4} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow (ax-x^2)=0 \text{ d.m.th., } (x=0 \text{ ose } x=a).$$

Ato janë O (0, 0); A(a, 0).

Meqenëse $f'(x)=\dfrac{a-2x}{4}$, koeficientet këndore të tangjenteve në këto pika janë:

$k_O=f'(0)=\dfrac{a}{4}$. $\quad k_A=f'(a)=-\dfrac{a}{4}$.

Kërkojmë që ndonjëri nga këto koeficiente këndore të jetë sa tg45° = 1.

Pra, $\dfrac{a}{4}=1$ ose $\dfrac{a}{4}=-1$ d.m.th., $a=4$ ose $a=-4$.

10 Për ç'vlera të a dhe b drejtëza $y=7x-2$ është tangjente me grafikun e funksionit $y=ax^2+bx+1$ në pikën A(1; 5)?

Zgjidhje

Kemi $f'(x)=2ax+b$

Së pari, grafiku i funksionit $y=ax^2+bx+1$ duhet të kalojë nëpër pikën A(1; 5) d.m.th.,

$5 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1.$

Së dyti, koeficienti këndor i tangjentes ndaj grafikut në këtë pikë (d.m.th., $f'(1) = 2a + b$ duhet të jetë sa koeficienti këndor i drejtëzës (d.m.th., = 7).

Nga sistemi $\begin{cases} 5 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1 \\ 2a + b = 7 \end{cases}$ gjejmë $a = 3;\ b = 1.$

11 Jepet funksioni $y = mx^3 + nx + p$.

Gjeni m, n dhe p duke ditur se:

a Grafiku i tij kalon nga pika A(1,0)

b Në pikën më abshisë –1 funksioni ka tangjente paralele me boshtin Ox.

c Në pikën me abshisë 2 funksioni ka tangjente pingule me drejtëzën d_1: $x + 9y = 0$

Zgjidhje

a Koordinatat e pikës A vërtetojnë ekuacionin e vijës. Kemi

$0 = m + n + p \qquad (1)$

b

$y' = 3mx^2 + n$

$y'(-1) = 3m + n$. Nga kushti

$3m + n = 0 \qquad (2) \qquad$ (Sepse tangjentja është paralele me boshtin Ox)

$y'(2) = 12m + n$. Nga kushti:

$12m + n = 9 \qquad (3)$ (Sepse tangjentja është pingule me drejtëzën $x + 9y = 0$ (ose $y = -\frac{1}{9}x$)

Më ekuacionet (1); (2); dhe (3) formojmë sistemin:

$\begin{cases} m + n + p = 0 \\ 3m + n = 0 \\ 12m + n = 9 \end{cases}$. Zgjidhja e tij është $m = 1$; $n = -3$ dhe $p = 2$

12 Vërtetoni që për çdo vlerë të a ekziston tangjentja ndaj grafikut të funksionit $y = x^2 - ax$, e cila është pingule me drejtëzën $y = -x$.

Zgjidhje

Kemi $f'(x) = 2x - a$ (Ky është koeficienti këndor i tangjentes në pikën me abshisë x). Koeficienti këndor i drejtëzës $y = -x$ është –1. Për çdo vlerë të a ekziston një vlerë e x për të cilën $k_t \cdot k_d = -1$ (ku tangjentja është pingule me drejtëzën). Kjo vlerë e x gjendet nga barazimi:

$f'(x) \cdot (-1) = (-1)$ d.m.th., $2x - a = 1 \Rightarrow x = \frac{a+1}{2}$.

13 Drejtëza (d) është tangjente ndaj hiperbolës $y = \frac{4}{x}$ në pikën me abshisë 1. Gjeni syprinën e trekëndëshit të kufizuar nga kjo drejtëz dhe nga boshtet koordinative.

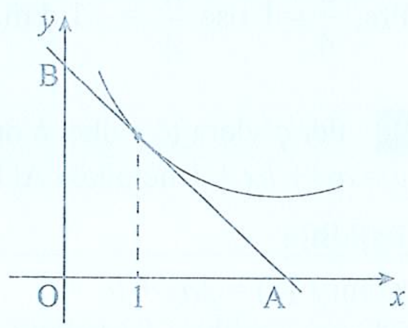


Fig. 13.1

Zgjidhje

Shkruajmë ekuacionin e tangjentes së vijës $y=\frac{4}{x}$ në pikën me abshisë $x = 1$. Kemi $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$ dhe $f'(1) = -4$; $f(1) = \frac{4}{1} = 4$.

Ekuacioni është $y - 4 = -4(x - 1)$ d.m.th., $4x + y - 8 = 0$. Gjejmë pikat ku kjo tangjente pret boshtet koordinatave.

A: $\begin{cases} y=0 \\ 4x+y-8=0 \end{cases}$ A (2; 0)

B: $\begin{cases} x=0 \\ 4x+y-8=0 \end{cases}$ B (0; 8)

Syprina e trekëndëshit OAB është $S = \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{x_A \cdot y_B}{2} = \frac{2 \cdot 8}{2} = 8$.

14 Gjeni ekuacionin e tangjentes ndaj grafikut të funksionit f, duke ditur që kjo tangjente kalon nëpër pikën M, kur:

a f: $y=\frac{1}{x}$ M(0, 3)

b f: $y = x^2 - 4x + 1$ M(−1, −3)

Zgjidhje

a Shënojmë $A(a, y_A)$ pikën e takimit. Kemi $y_A = \frac{1}{a} = f(a)$. Meqë $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, del $f'(a)=-\frac{1}{a^2}$.

Ekuacioni i tangjentes në pikën A është

$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$ d.m.th., $y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)$ (1)

Dihet që pika M(0; 3) ndodhet në këtë tangjente, prandaj koordinatat e saj vërtetojnë ekuacionin e tangjentes (1).

Pra $3-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(0-a)$ d.m.th., $3-\frac{1}{a}=\frac{1}{a} \Rightarrow a=\frac{2}{3}$. Atëherë ekuacioni (1) i tangjentes është $y-\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}(x-\frac{2}{3})$.

15 Tregoni pozicionin e tangjentes, në pikën $x = 0$, në lidhje me grafikun e funksionit: $y = x^3 + x + 2$.

Zgjidhje

Ekuacioni i tangjentes në pikën $x = 0$ është $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$.
Kemi $f'(x) = 3x^2 + 1$ dhe $f'(0) = 1$; kurse $f(0) = 2$.

Ekuacioni i tangjentes $y - 2 = 1(x - 0)$ d.m.th., $y = x + 2$.
Krahasojmë funksionet f: $y = x^3 + x + 2$ dhe g: $y = x + 2$.
Marrim diferencën $f(x) - g(x) = x^3$.
Shohim që për $x > 0$, $f(x) > g(x)$, pra vija ndodhet mbi tangjenten.
Për $x < 0$, $f(x) < g(x)$, pra vija ndodhet nën tangjenten.

16 Jepen funksionet $y = \frac{2}{x}$ dhe $y = x^2 - 3$.

a Tregoni që pika (2, 1) është pikë e përbashkët e grafikëve të tyre.

b Gjeni pikat e tjera të përbashkëta të grafikëve të këtyre funksioneve.

c Në cilën pikë, grafikët e këtyre funksioneve kanë tangjente të përbashkët?

d Shkruani ekuacion e kësaj tangjenteje.

Zgjidhje

a Zëvendësojmë koordinatat e pikës (2, 1) në të dy funksionet. Kemi:

$\frac{2}{2} = 1$ dhe $2^2 - 3 = 1$. Këto barazime tregojnë se pika (2, 1) ndodhet në grafikët e të dy funksioneve.

b Për të gjetur pika të tjera të përbashkëta zgjidhim sistemin:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = x^2 - 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{x} = x^2 - 3 \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0.$$

Polinomi $P(x) = x^3 - 3x - 2$ ka rrënjë $x = 2$, prandaj ai plotpjesëtohet me $(x - 2)$.

Duke kryer pjesëtimin gjejmë që $x^3 - 3x - 2 = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 1) = (x - 2) \cdot (x + 1)^2$.

$(x - 2) \cdot (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ose $x = -1$.

Për $x = -1$ kemi $y = -2$.

Pika tjetër e përbashkët e grafikëve të funksioneve të dhënë është $(-1, -2)$.

c Gjejmë koeficientet këndore të tangjenteve ndaj grafikëve të funksioneve në pikat e tyre të përbashkëta, të cilat janë të barabarta me derivatet e funksioneve përkatës në këto pika.

$$y = \frac{2}{x} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^2}$$

$$y = x^2 - 3 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 2x$$

Gjejmë tani vlerat e këtyre derivateve në pikat e përbashkëta:

Në pikën (2, 1) kemi:

Për funksionin $y = \frac{2}{x}$: $y' = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow k_1 = \frac{-2}{2^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.

Për funksionin $y = x^2 - 3$: $y' = 2x \Rightarrow k_2 = 2 \cdot 2 = 4$.

Vëmë re se $k_1 \neq k_2$, kështu që tangjentet ndaj grafikëve respektivë nuk përputhen.

Në pikën (–1, –2) kemi:

Për funksionin $y = \frac{2}{x}$: $y' = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow k_3 = \frac{-2}{(-1)^2} = \frac{-2}{1} = -2$.

Për funksionin $y = x^2 - 3$: $y' = 2x \Rightarrow k_4 = 2 \cdot (-1) = -2$.

Vëmë re se $k_3 = k_4$.

Rrjedhimisht në pikën (–1, –2) grafikët e këtyre funksioneve kanë tangjente të përbashkët.

d Ekuacioni i kësaj tangjenteje është:

$y + 2 = -2(x + 1)$ ose $y = -2x - 4$.

17 a Në cilën pikë të parabolës $y = 2x^2$, tangjentja është paralele me drejtëzën d; $y = 2x + 5$?

b Shkruani ekuacionin e kësaj tangjenteje.

Zgjidhje

Koeficienti këndor i drejtëzës d është 2. Koeficienti këndor i tangjentes ndaj grafikut të funksionit në një pikë është sa derivati i funksionit në këtë pikë. Kemi:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 4x$$

$$4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Për $x = \frac{1}{2}$, vlera përkatëse e funksionit është:

$$y = 2 \cdot (\frac{1}{2})^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Pika e kërkuar është $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

b Ekuacioni i tangjentes në pikën M është:

$$y-\frac{1}{2}=2(x-\frac{1}{2}) \Rightarrow y=2x-\frac{1}{2}$$

18 Në figurën 13.2 është vizatuar dega e djathtë e hiperbolës $y=\frac{1}{x}$ dhe pika e çfarëdoshme $M(a,\frac{1}{a})$ në të. Në pikën M është ndërtuar tangjentja me hiperbolën, e cila pret boshtet e koordinatave në pikat A dhe B. Vërtetoni që MA = MB.

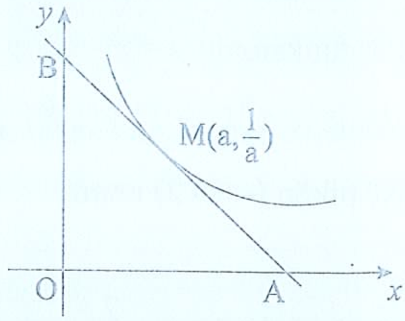


Fig. 13.2

Zgjidhje

Ekuacioni i tangjentes me hiperbolën në pikën e çfarëdoshme $M(a,\frac{1}{a})$ ka trajtën:

$y-\frac{1}{a}=m(x-a)$ ku m = f'(a).

Gjejmë derivatin e funksionit $y=\frac{1}{x}$:

$$y=\frac{1}{x} \Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}.$$

Në pikën M kemi: $y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{a^2}$.

Ekuacioni i tangjentes është: $y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)$.

Gjejmë pikat e prerjes së kësaj tangjenteje me boshtet koordinatave.

Në pikën A kemi $y_A=0$

$0-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a) \Rightarrow -a=-x+a \Rightarrow x=2a$. Pra $A(2a, 0)$

Në pikën B kemi $x_B=0$.

$y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(0-a) \Rightarrow y=\frac{2}{a}$. Pra $B(0,\frac{2}{a})$.

Vëmë re se:

$$x_M = a = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2a+0}{2} = a$$

$$y_M = \frac{1}{a} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+\frac{2}{a}}{2} = \frac{1}{a}$$

Dy barazimet e fundit tregojnë që pika M është mesi i segmentit AB.

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Gjeni derivatin e funksioneve të mëposhtme:

a $y = \sqrt{x} + x^2 - 7x$ b $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

c $y = x^2(x - \sqrt{x})$ d $y = \frac{x^2}{2}(x^3 - \frac{4}{3}\sqrt{x}) + x^5$

P. [a) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x - 7$; b) $x^3 - x^2 + x - 1$; c) $3x^2 - \frac{5}{2}x\sqrt{x}$; d) $\frac{15}{2}x^4 - \frac{5}{3}x\sqrt{x} + 5x^4$]

2 Jepet $f(x) = x^3 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}$. Gjeni $f'(1)$; $f'(4)$. P. [$\frac{1}{2}$; $\frac{179}{16}$]

3 Jepet $f(x) = 2x^2 + 3x$. Për ç'vlera të x kemi $f'(x) = f(x)$? P. [$x = 3$; $x = -\frac{1}{2}$]

4 Jepet funksioni $f(x) = x^4 - ax^2 + 8$. Gjeni a në mënyrë që $f'(1) = 0$. P. [$a = 2$]

5 Jepet $f(x) = (x^4 - 2x)^5$. Gjeni $f'(1)$. P. [10]

6 Jepet $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$; $f'(1) = -2$; $f'(2) = 0$. Gjeni b. P. [$b = 2$]

7 Gjeni koeficientin këndor të tangjentes ndaj vijës $y = -x^4 + 3x^2 - x + 2$ në pikën $x = 2$. P. [−21]

8 Shkruani ekuacionin e tangjentes ndaj vijës $y = x^3$ në origjinën e koordinatave. P. [$y = 0$]

9 Gjeni këndin që formon me boshtin e abshisave tangjentja ndaj vijës $y = x - x^2$ në origjinën e koordinatave. P. [45°]

10 Në cilat pika tangjentja ndaj vijës:
a $y = 3x^2$ b $y = x^2 - 3x + 2$ c $y = (3x - 2)(2x - 1)$
formon me boshtin e abshisave këndin 45°?

P. [a $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ b (2,0) c $(\frac{2}{3}, 0)$]

11 Gjeni ekuacionin e tangjentes dhe pingules ndaj vijës $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ në pikën $x = 1$. P. [$y = 11x + 4$; $y = -\frac{1}{11}x - \frac{78}{11}$]

12 Gjeni pikën në të cilën tangjentja ndaj vijës $y = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2$ është paralele me boshtin e abshisave. P. [$(-3, \frac{45}{2})$]

13 Jepet funksioni $f(x) = (m - 1)x^2 + 3x - 4$. Për ç'vlerë të m, tangjentja ndaj grafikut të tij në pikën $x = 3$, formon me boshtin e abshisave këndin 135°? P. [$m = \frac{1}{3}$]

14 Në cilën pikë të vijës $y = x^2 - 2x$, tangjentja është paralele me boshtin e abshisave? P. [(1, −1)]

15 Gjeni ordinatën e pikës në të cilën tangjentja me grafikun e funksionit $y = x^3 - 3x + 1$ në pikën (2, 3) e pret boshtin e ordinatave. P. [−15]

16 Për ç'vlerë të k, parabola $y = x^2 + kx + 1$ në pikën me abshisë 1 ka tangjente paralele me drejtëzën $y = x$? P. [$k = -1$]

17 Jepet parabola $y = ax^2 + bx + c$. Gjeni a, b, c, në mënyrë që ajo të jetë tangjente me drejtëzën $y = x$ në pikën $x = 1$ dhe të kalojë nga pika (−1, 0).

P. [$a = \frac{1}{4}$; $b = \frac{1}{2}$; $c = \frac{1}{4}$]

18 Jepet $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$.
a Tregoni se $x=1$ është rrënjë e ekuacionit $f'(x) = f(x)$.
b Zgjidhni ekuacionin $f'(x) = f(x)$.

19 Në parabolën $y = -3x^2 + 5x + 4$ është ndërtuar tangjentja paralele me drejtëzën $y = -x + 2$. Gjeni pikëprerjen e kësaj tangjenteje me boshtin e abshisave. P. [(7, 0)]

20 Gjeni a, b, c, në mënyrë që parabola $y = ax^2 + bx + c$ pret boshtin e ordinatave në pikën (0, 2), pret boshtin e abshisave në pikën (3, 0) dhe tangjentja e saj në pikën me abshisë 4, formon me boshtin e abshisave këndin 45°.

P. [$a = \frac{1}{3}$; $b = -\frac{5}{3}$; $c = 2$]

KREU 14

ZBATIME TË DERIVATEVE

- Nëse në $]a, b[$ kemi $f'(x) > 0$ $\left(\frac{dy}{dx} > 0\right)$, atëherë f është rritës në $]a, b[$.
- Nëse në $]a, b[$ kemi $f'(x) < 0$, $\left(\frac{dy}{dx} < 0\right)$, atëherë f është zbritës në $]a, b[$.

Nëse pika A me abshisë a është pikë stacionare (pra $f'(a) = 0$), atëherë:
- nëse kemi ende $f''(a) < 0$, pika A me abshisë a është pikë maksimumi;
- nëse kemi ende $f''(a) > 0$, pika A me abshisë a është pikë minimumi.
- nëse $f''(a) = 0$, funksioni mund të ketë ose jo ekstremume. Për të konkluduar, në raste të tilla kërkohen arsyetime shtesë.

Ushtrime të zgjidhura

1 Gjeni ekstremumet e funksionit $f(x) = x^2 - 4x + 1$ për $x \in R$.

Zgjidhje

Gjejmë derivatin e këtij funksioni dhe vlerën x për të cilën derivati bëhet zero

$f'(x) = 2x - 4$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

Gjemë derivatin e dytë:

$f''(x) = 2$ për çdo $x \in R$. Rrjedhimisht $f''(2) = 2 > 0$. Kjo tregon se $x = 2$ është pikë minimumi.

Vlera e minimumit është $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$.

2 Gjeni ekstremumet e funksionit $f(x) = 4x^3 - 3x$ për $x \in R$.

Zgjidhje

Gjejmë derivatin e funksionit dhe vlerën e x-it për të cilën derivati bëhet zero (gjejmë pikat stacionare të funksionit).

$f'(x) = (4x^3 - 3x)' = 12x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$ ose $x_2 = \frac{1}{2}$.

Gjejmë derivatin e dytë të funksionit në pikat stacionare.

$f''(x) = (12x^2 - 3)' = 24x$

Në pikën $x_1 = -\frac{1}{2}$ kemi $f''(-\frac{1}{2}) = 24(-\frac{1}{2}) = -12 < 0$ funksioni ka maksimum.

Vlera e maksimumit është $f(-\frac{1}{2}) = 4(-\frac{1}{2})^3 - 3(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$

Në pikën $x_2 = \frac{1}{2}$ kemi $f''(\frac{1}{2}) = 24(\frac{1}{2}) = 12 > 0$ funksioni ka minimum.

Vlera e minimumit është $f(\frac{1}{2}) = 4(\frac{1}{2})^3 - 3(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

3 Jepet funksioni f: $y = x^3$, grafiku i të cilit paraqitet në figurën 14.1.
Derivati i funksionit është $f(x) = 3x^2$.
$f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (Pika stacionare)
Gjejmë derivatin e dytë të funksionit.
$f''(x) = (3x^2)' = 6x$
Në pikën $x = 0$ kemi $f''(0) = 6 \cdot 0 = 0$, dhe nuk mund të themi nëse është apo jo pikë ekstremumi. Nga grafiku në figurën 14.1 vëmë re se $x = 0$ nuk është pikë ekstremumi.

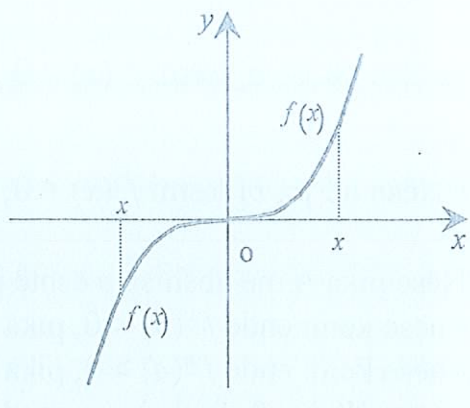


Fig. 14.1

4 Gjeni ekstremumet e funksionit f: $y = -4x^3 + 12x - 1$.

Zgjidhje

Gjejmë derivatin e funksionit dhe vlerën e x-it për të cilën derivati bëhet zero.

$f'(x) = (-4x^3 + 12x - 1)' = -12x^2 + 12$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -12x^2 + 12 = 0 \Rightarrow -12x^2 = -12 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ose $x = -1$ janë pika stacionare të funksionit.
Gjejmë derivatin e dytë të funksionit: $y'' = (-12x^2 + 12)' = -24x$.
Në pikën $x = -1$ kemi $y'' = (-24) \cdot (-1) = 24 > 0$, pra në këtë pikë kemi minimum.
Në pikën $x = 1$ kemi $y'' = (-24) \cdot (1) = -24 < 0$, pra në këtë pikë kemi maksimum.
Gjejmë vlerat e funksionit te minimumi dhe maksimumi:

$f(-1) = -4(-1)^3 + 12(-1) - 1 = -9$ dhe $f(1) = -4(1)^3 + 12 \cdot 1 - 1 = 7$

5 Gjeni ekstremumet e funksionit f: $y = -3x^3 + 9x^2 - 9x + 6$.

Zgjidhje

Gjejmë derivatin e funksionit dhe vlerën e x-it për të cilën derivati bëhet zero.

$f'(x) = (-3x^3 + 9x^2 - 9x + 6)' = -9x^2 + 18x - 9$
$f'(x) = 0 \Rightarrow = -9x^2 + 18x - 9 = 0 \Rightarrow -9(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ (pika stacionare)
Gjejmë derivatin e dytë: $f''(x) = -18x + 18$
Në pikën $x = 1$ kemi $f''(x) = -18x + 18 = -18 \cdot 1 + 18 = 0$
Pika stacionare $x = 1$, nuk është pikë ekstremumi.

6 Gjeni ekstremumet e funksionit f: $y = x + \frac{1}{x}$.

Zgjidhje

a Bashkësia e përcaktimit është bashkësia e vlerave të x që plotësojnë kushtin $x \neq 0$.

b Për çdo $x \neq 0$ ekziston $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$.

c $f'(x) = 0 \Rightarrow (x^2 - 1 = 0) \Rightarrow x = 1$ ose $x = -1$.

d $f''(x) = (1 - \frac{1}{x^2})' = (1 - x^{-2})' = -(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

e $f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0$; $f''(1) = \frac{2}{(1)^3} = 2 > 0$

f Në pikën $x = -1$ funksioni ka maksimum; Maksimumi është $f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2$.

Në pikën $x = 1$ funksioni ka minimum; Minimumi është $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$.

7 Tregoni që funksioni f: $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ nuk ka ekstremume.

Zgjidhje

$y' = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$
$3(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ (pika stacionare)
$y'' = 6x - 6$
$y''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$. Pika $x = 1$ nuk është pikë ekstremumi. Rrjedhimisht funksioni nuk ka ekstremume. Ai është gjithmonë funksion rritës (sepse $y' > 0$).

8 Për cilat vlera të a, b dhe c, parabola $y = ax^2 + bx + c$ ka ekstremum në pikën $(1, 3)$ dhe kalon nga pika $(0, 5)$.

Zgjidhje

Meqë parabola kalon nga pika $(0, 5)$, koordinatat e kësaj pike vërtetojnë ekuacionin e parabolës. Kemi:
$5 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$ nga ku $c = 5$.
Meqë parabola kalon gjithashtu edhe nga pika $(1, 3)$ kemi:
$3 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Rightarrow a + b + c = 3$ dhe meqë $c = 5$ kemi $a + b + 5 = 3$ nga ku $a + b = -2$.
Funksioni $y = ax^2 + bx + c$ ka ekstremum në pikën $(1, 3)$, kështu që derivati i tij në këtë pikë është i barabartë me zero.
$y' = 2ax + b$
$y' = 0 \Rightarrow 2 \cdot a \cdot 1 + b = 0$, pra $2a + b = 0$.

Për të gjetur a dhe b zgjidhim sistemin e ekuacioneve:

$\begin{cases} a + b = -2 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$. Shumëzojmë të dy anët e ekuacionit të parë me 2:

$\begin{cases} 2a + 2b = -4 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$. Nga ekuacioni i parë zbresim ekuacionin e dytë:

$2a + 2b - (2a + b) = -4 - 0 \Rightarrow 2a + 2b - 2a - b = -4 \Rightarrow b = -4.$
Duke zëvendësuar këtë vlerë të b, në ekuacionin e parë kemi:
$a - 4 = -2 \Rightarrow a = 2.$
Përfundimisht $a = 2$; $b = -4$ dhe $c = 5$.

9 Jepet funksioni $y = ax^4 + bx^2 + 3$, i cili ka ekstremum në pikën $(1, 2)$.
- **a** Gjeni a dhe b.
- **b** Për vlerat e gjetura të a dhe b, gjeni ekstremumet e tjera të funksionit (në qoftë se ka).
- **c** Skiconi grafikun e këtij funksioni.

Zgjidhje

a Pika $(1, 2)$ ndodhet në grafikun e këtij funksioni, prandaj:
$2 = a \cdot 1^4 + b \cdot 1^2 + 3 \Rightarrow 2 = a + b + 3$ nga ku $a + b = -1$.
Funksioni ka ekstremum në pikën $(1, 3)$, prandaj derivati i tij në këtë pikë është i barabartë me zero.
$y' = 4ax^3 + 2bx$
$0 = 4a \cdot 1^3 + 2b \cdot 1 \Rightarrow 0 = 4a + 2b$, pra $4a + 2b = 0$
Për të gjetur a dhe b zgjidhim sistemin e ekuacioneve:

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+4b=-4 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow 2b=-4 \Rightarrow b=-2$$

Duke zëvendësuar këtë vlerë të b në ekuacionin e parë kemi:
$a - 2 = -1$ nga $a = 1$.
Funksioni është $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

b Për të gjetur ekstremumet e tjera të funksionit (në qoftë se ka), gjejmë fillimisht pikat stacionare.
$y = x^4 - 2x^2 + 3$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 4x = 4x \cdot (x^2 - 1)$$

$y' = 0 \Rightarrow 4x \cdot (x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ose $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$
Për $x = 0$ kemi $y = 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 3 = 3$
Për $x = \pm 1$ kemi $y = (\pm 1)^4 - 2 \cdot (\pm 1)^2 + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$
Funksioni ka tri pika stacionare: $(0, 3)$; $(-1, 2)$ dhe $(1, 2)$
Gjejmë derivatin e dytë të funksionit.

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 4$$

Në pikën $(0, 3)$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -4 < 0$$. Funksioni ka maksimum.

Në pikën $(-1, 2)$.

$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 12 - 4 = 8 > 0$. Funksioni ka minimum.

Në pikën (1,2).

$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 12 - 4 = 8 > 0$. Funksioni ka minimum.

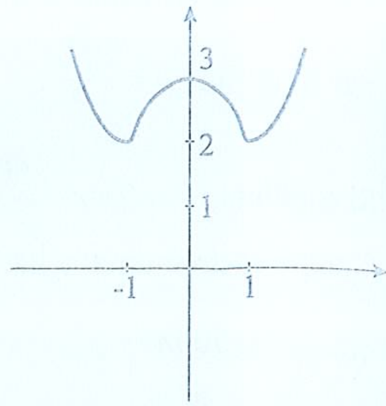


Fig. 14.2

c Në figurën 14.2 është skicuar grafiku i funksionit.

10 Studioni monotoninë e funksionit $y = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Zgjidhje

Funksioni është i përcaktuar për $x > 0$.

Funksionin e dhënë e shkruajmë në trajtën $y = x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$.
Gjejmë derivatin e tij.

$$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + 2\cdot(-\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot(\frac{1}{2} - \frac{1}{x})$$

Studiojmë shenjën e derivatit.

Vëmë re se $\frac{1}{\sqrt{x}} > 0$.

Për $\frac{1}{2} - \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{x} \Rightarrow x > 2$ kemi $y' > 0$, pra funksioni është rritës.

Për $\frac{1}{2} - \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{x} \Rightarrow x < 2$ kemi $y' < 0$. Funksioni është zbritës.

Përfundimisht funksioni i dhënë është zbritës në]0, 2[dhe rritës në]2, +∞[.

11 Duhet të ndërtohet një kuti në formën e cilindrit rrethor të drejtë, e mbyllur lart e poshtë dhe me vëllim të njohur, 250π cm^3. Të caktohen përmasat e kutisë në mënyrë që për ndërtimin e saj, të harxhohet sasia më e vogël e materialit.

Zgjidhje

Harxhimi i materialit do të jetë më i vogli kur syprina e përgjithshme e kutisë të jetë më e vogla.

Shënojmë me $x = OA$ rrezen e bazës së cilindrit rrethor të drejtë dhe me $h = AA_1$ lartësinë e tij

(Është e kuptueshme që $x > 0$; $h > 0$) (fig. 14.3).

Të shprehim syprinën e përgjithshme nëpërmjet x. Ajo është:

$S = S_a + 2 \cdot S_b$ d.m.th. $S = 2\pi x \cdot h + 2\pi x^2$.

Vëllimi i kutisë është $V = \pi x^2 \cdot h$. Kemi pra, $\pi x^2 \cdot h = 250 \cdot \pi$, që nga nxjerrim: $h = \dfrac{250}{x^2}$.

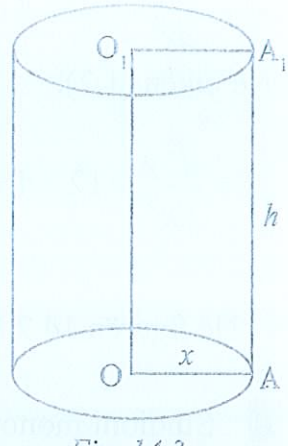


Fig. 14.3

Si rrjedhim, $S = 2\pi x \cdot \dfrac{250}{x^2} + 2\pi x^2$ d.m.th., $S = \dfrac{500\pi}{x} + 2\pi x^2$.

Gjejmë ekstremumet e këtij funksioni.

$$S'(x) = -\frac{500\pi}{x^2} + 4\pi x = \frac{-500\pi + 4\pi x^3}{x^2} = \frac{4\pi(x^3 - 125)}{x^2}$$

$S'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 125 = 0 \Rightarrow x = 5$.

Gjejmë derivatin e dytë të funksionit $S(x)$.

Kemi: $S''(x) = \left(-\dfrac{500\pi}{x^2} + 4\pi x\right)' = \dfrac{1000\pi}{x^3} + 4\pi$ dhe $S''(5) = \dfrac{1000\pi}{125} + 4\pi = 12\pi > 0$

Rrjedhimisht për $x = 5$ arrihet minimumi i funksionit. Për $x = 5$ cm kemi:

$$h = \frac{250}{5^2} = 10.$$

Përgjigje: Për ndërtimin e kutisë cilindrike do të harxhohet më pak material në qoftë se lartësia e saj të jetë sa diametri i bazës.

12 Në figurën 14.4 është dhënë grafiku i funksionit $y = 9 - x^2$.

Në harkun AC të parabolës merret një pikë M dhe prej saj hiqet pingulja MN me boshtin Ox. Gjeni abshisën x = ON të pikës M, në mënyrë që syprina e trapezit ONMC të jetë më e madhja.

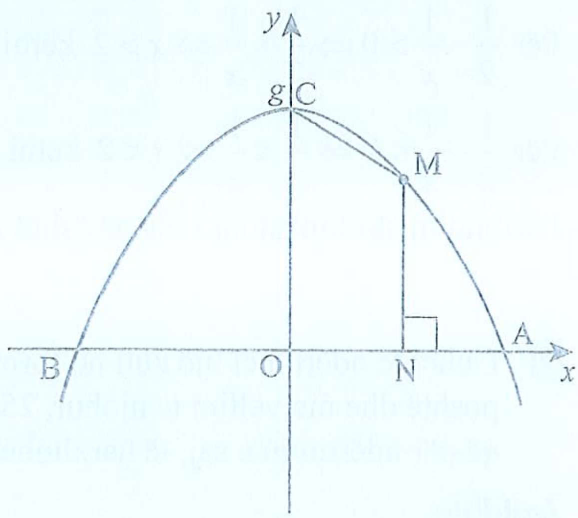


Fig. 14.4

Zgjidhje

Syprina e trapezit kënddrejtë ONMC është:

$$S = \frac{OC + MN}{2} \cdot ON \text{ (pse?)}$$

E shprehim këtë syprinë nëpërmjet x.

Meqenëse pika M ndodhet në parabolë, koordinatat e saj vërtetojnë ekuacionin e parabolës, prandaj:

$y_M = 9 - x_M$ d.m.th., $y_M = 9 - x^2$, pra NM $= 9 - x^2$

x_M = ON d.m.th., ON $= x$; OC $= 9$.

Kështu, syprina e trapezit ONMC është: $S = \frac{9+(9-x^2)}{2} \cdot x$ d.m.th., $S = \frac{1}{2}(18x - x^3)$.

$S' = \frac{1}{2}(18 - 3x^2)$; $S' = 0 \Rightarrow 18 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$ (është e kuptueshme që $x = -\sqrt{6}$ nuk pranohet).

$S''(x) = \left[\frac{1}{2}(18 - 3x^2)\right]' = -3x$ dhe $S''(\sqrt{6}) = -3\sqrt{6} < 0$.

Syprina e kërkuar ka vlerën maksimale për $x = \sqrt{6}$.

13 Nga një copë kartoni me brinjë 12 cm kërkohet të bëhet një kuti pa kapak, duke prerë nëpër qoshe katrorë të barabartë dhe duke përthyer pjesët e dala për të formuar faqet anësore të kutisë. Sa duhet të merret brinja për katrorët që priten, në mënyrë që vëllimi i kutisë së formuar të jetë më i madhi?

Zgjidhje

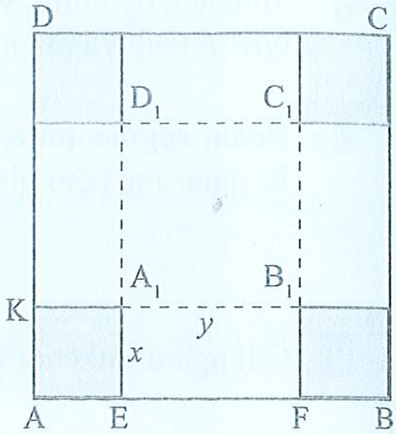


Fig. 14.5

Shënojmë me x brinjën e katrorit që pritet në një qoshe ($x = A_1E = A_1K$). Shprehim vëllimin V të kutisë nëpërmjet x (fig. 14.5).

Shënojmë me y brinjën e bazës së kutisë ($y = A_1B_1$).

Kutia e përftuar është kuboid, prandaj vëllimi i saj është i barabartë me prodhimin e lartësisë me syprinën e bazës (baza është katrori $A_1B_1C_1D_1$).

$V = y^2 \cdot x$

Nga kushti kemi: LE = 12 cm, d.m.th. $x + y + x = 12$, që nga $y = 12 - 2x$.

Si rrjedhim, $V = (12 - 2x)^2 \cdot x$ ose

$V = (144 - 48x + 4x^2) \cdot x = 144x - 48x^2 + 4x^3$

Kemi $V'(x) = 144 - 96x + 12x^2$

$V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 96x + 144 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$.

Ky ekuacion ka dy rrënjë reale: $x_1 = 2$; $x_2 = 6$.

Është e kuptueshme se x nuk mund të jetë i barabartë me 6, sepse në këtë rast nuk mund të përftohet kutia. Pra, mbetet $x = 2$.

Duke studiuar shenjën e derivatit të dytë për $x = 2$, bindemi se në këtë rast funksioni arrin maksimumin.

USHTRIME PËR VETËKONTROLL

1 Gjeni ekstremumet e funksionit $y = (1 - x^2)^3$. **P. [(0, 0) maksimum]**

2 Gjeni ekstremumet e funksionit $y = x^3 - 4x^2 + 2x$. **P. [(2, 0) min.; $(\frac{3}{2}, \frac{32}{27})$ maks.]**

3 Gjeni ekstremumet e funksionit $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

P. [(0,3) maksimum; (–1,2) minimum; (1,2) minimum)]

4 Funksioni $y = x^3 + mx + n$ ka ekstremum të barabartë me 0 në pikën me abshisë 1. Gjeni $m - n$.

P. [–5]

5 Jepet funksioni $y = mx^2 + nx + p$. Gjeni m, n, p, në mënyrë që funksioni për $x = 3$ të ketë minimum të barabartë me -2 dhe të kalojë nga pika (1, 2).

P. [$m = 1$; $n = -6$; $p = 7$]

6 Në cilën pikë të vijës $y = x^3 + 6x^2 - 3x - 19$, koeficienti këndor i tangjentes ka vlerën më të vogël?

P. [(–2, 3)]

7 Tangjentja ndaj vijës $y = (x - 2)^3$ në pikën (3, 1) e pret vijën në pikën B. Gjeni koordinatat e pikës B.

P. [(0, –8)]

8 Shuma e dy numrave është 18. Gjeni këta numra në mënyrë që shuma e katrorëve të tyre të ketë vlerën më të vogël.

P. [numrat të barabartë nga 9]

9 Ndani segmentin e dhënë d, në dy pjesë, në mënyrë që syprina e drejtkëndëshit të formuar me këto pjesë, të ketë vlerën më të madhe.

P. [dy pjesët të barabarta nga $\frac{d}{2}$]

10 Cili nga drejtkëndëshat me perimetër të dhënë p, ka syprinë më të madhe?

P. [katrori]

11 Jepet parabola $y = ax^2 + bx + c$, e cila në pikën me abshisë –1 ka maksimum të barabartë me 3 dhe koeficienti këndor i tangjentes në pikën me abshisë 1 është i barabartë me 8. Gjeni a, b dhe c.

P. [$a = -2$; $b = -4$; $c = 1$]

12 Parabola $y = ax^2 + bx + c$ ka minimium në pikën (1,0) dhe kalon nga pika (0,2). Shkruani ekuacionin e saj.

P. [$2(x - 1)^2$]