Příklad 1. Do jednoho obrázku načrtněte grafy prvních tří členů funkční posloupnosti (f_n).
Určete limitní funkci f, načrtněte její graf a stanovte obor konvergence K.

Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci $f_n \overset{K}{\rightrightarrows} f$ na celém oboru konvergence K.

(Při ověřování lim-sup kritéria využijte vlastností elementárních funkcí.)

1) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{3^n}$

2) $f_n(x) = \dfrac{1}{|x-1|^n}$

3) $f_n(x) = \dfrac{n+1}{n} + \cos x$

4) $f_n(x) = \dfrac{2n}{n+1} \cdot \operatorname{arccotg} x$

5) $f_n(x) = \dfrac{2n}{n+1} \cdot x$

6) $f_n(x) = n \cdot \operatorname{tg} x$

Příklad 2. Určete limitní funkci f, načrtněte její graf a stanovte obor konvergence K funkční posloupnosti (f_n).

Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci $f_n \overset{M_i}{\rightrightarrows} f$ postupně na množinách M_1, M_2.

(Při ověřování lim-sup kritéria využijte vlastností elementárních funkcí.)

1)	$f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{2^n}$	$M_1 = (1, \sqrt{2})$	$M_2 = (-1, 0)$
2)	$f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{(x+3)^n}$	$M_1 = \langle 0, 1 \rangle$	$M_2 = (-2, +\infty)$
3)	$f_n(x) = n^x$	$M_1 = (-2, -1)$	$M_2 = (-1, 0)$
4)	$f_n(x) = \sqrt[n]{x-1}$	$M_1 = \langle 1, 10 \rangle$	$M_2 = (1, 2)$
5)	$f_n(x) = \mathrm{e}^{x-n}$	$M_1 = \mathbb{R}$	$M_2 = (-\infty, 1)$
6)	$f_n(x) = 3^{\frac{x}{n}}$	$M_1 = \langle 0, 5 \rangle$	$M_2 = \langle 0, +\infty)$
7)	$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$	$M_1 = (0, 1)$	$M_2 = (1, 2)$
8)	$f_n(x) = \cos^n x$	$M_1 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$	$M_2 = (-\pi, \pi)$

Příklad 3. Uveďte příklad:

1) funkční posloupnosti (f_n), která má obor konvergence $K = \langle -1, 3)$
2) (nekonstantní) funkční posloupnosti (f_n), jejíž limitní funkce je dána

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{pro} \quad x = 0 \end{cases}$$

3) (nekonstantní) funkční posloupnosti (f_n), která konverguje stejnoměrně na množině $M = \mathbb{R}$ k limitní funkci $f(x) = x^2 - x$
4) funkční posloupnosti (f_n), která má obor konvergence $K = \langle 1, +\infty)$, ale ke své limitní funkci nekonverguje stejnoměrně na množině K
5) množiny M takové, že funkční posloupnost (f_n), kde $f_n(x) = \mathrm{e}^{nx}$, konverguje stejnoměrně na M
6) množiny M takové, že funkční posloupnost (f_n), kde $f_n(x) = \operatorname{arccotg}(x - n)$, nekonverguje stejnoměrně na M

★ **Příklad 4.** Vypočtěte limitní funkci f a stanovte obor konvergence K funkční posloupnosti (f_n).

Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci $f_n \overset{M_i}{\rightrightarrows} f$ postupně na množinách M_1, M_2.

(Při ověřování lim-sup kritéria si pomozte vyšetřením průběhu funkce $f_n(x)$ či vhodným odhadem.)

1)	$f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$	$M_1 = (0, 2)$	$M_2 = (1, 2)$
2)	$f_n(x) = nx \cdot \mathrm{e}^{-nx^2}$	$M_1 = \langle 0, 1)$	$M_2 = (1, +\infty)$
3)	$f_n(x) = x^2\, \mathrm{e}^{-nx}$	$M_1 = (0, 1)$	$M_2 = (-1, 1)$
4)	$f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}$	$M_1 = \langle 0, +\infty)$	$M_2 = \langle 0, 1\rangle$
5)	$f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n + x}$	$M_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$	$M_2 = (1, +\infty)$
6)	$f_n(x) = \dfrac{\sin x}{1 + n^2x^2}$	$M_1 = (0, 1\rangle$	$M_2 = (1, +\infty)$