Chapitre 3 : Suites des nombres réels

3.1 Raisonnement par récurrence

Théorème 3.1 (Propriété fondamentale de $\mathbb{N}$)

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément (pour l'ordre naturel) et toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Cette propriété de $\mathbb{N}$ entraine le théorème de la récurrence qui est utilisé lorsqu'on veut démontrer une propriété, $P(n)$, dépendant de n pour tout entier naturel $n \geq n_0$(fixé).

Théorème 3.2 Soit $P(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel n

Si

i) $P(n_0)$ est vraie
ii) $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ Vraie

Alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Exemple : montrer que $\forall\, n \geq 1$ $S_n = 1^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$ $P(n)$

$S_1 = 1^3 = 1; 2(1)^4 - 1^2 = 1$ $P(1)$ *vraie*.

Supposons $P(n)$ vraie pour tout un certain $n \geq 1$, c.à.d. $S_n = 2n^4 - n^2$ et montrons que $P(n+1)$ est vraie c.à.d. $S_{n+1} = 1^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3 + (2n+1)^3 = 2(n+1)^4 - (n+1)^2$

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (2n+1)^3 \\ &= 2n^4 - n^2 + (2n+1)^3 \\ &= 2n^4 - n^2 + (8n^3 + 12n^2 + 6n + 1) \\ &= 2(n+1)^4 - (n+1)^2 \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

3.2 Suites de nombres réels

3.2.1 Définitions

Définition 3.1 : une suite de nombres réels est une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$; c.à.d.

$$u: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto u(n)$$

On la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$. Pour chaque entier naturel n, u_n est appelé le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite.

Convergence, Divergence

Définition 3.2 : on dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l si à tout réel $\epsilon > 0$, on peut associer un entier naturel n_ϵ tel que, pour tout entier naturel $n > n_\epsilon$ on ait $|u_n - l| < \epsilon$.

Le fait pour une suite d'être convergente vers l peut s'écrire :

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ (n > n_\epsilon \implies |u_n - l| < \epsilon)$$

Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

Définition 3.3 : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, l est appelé la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et est noté $\lim(u_n)$ ou $\lim_{n\to\infty}(u_n)$ ou $\lim_{n\to\infty} u_n$. On écrit $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.

Exemple : la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers zéro.

En effet soit $\epsilon > 0$, existe-t-il $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n > n_0 \implies \frac{1}{n} < \epsilon$?

$\frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}$ il suffit de prendre $n_0 = E\left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right)$. (u_n) est donc convergente et a pour limite zéro.

Théorème 3.3 lorsqu'une suite (u_n) converge sa limite est unique.

Preuve : supposons que (u_n) converge vers 2 réels l_1 et l_2 avec $l_1 < l_2$.c.à.d.

$\forall\, \epsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > n_1 \implies |u_n - l_1| < \epsilon)$

$\forall\, \epsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > n_2 \implies |u_n - l_2| < \epsilon)$

Donc pour $n_0 = \max(n_1, n_2)$ $\forall n \in \mathbb{N}, (n > n_0 \implies |u_n - l_1| < \epsilon\ et |u_n - l_2| < \epsilon)$

D'autre part on a $0 < l_2 - l_1 = l_2 - u_n + u_n - l_1 \leq |u_n - l_1| + |u_n - l_2| < 2\epsilon$.

Pour $\epsilon = \frac{1}{4}(l_2 - l_1)$, ce qui est absurde ; donc $l_2 = l_1$.

Définition 3.4

i) Un réel A est un majorant(resp.minorant) d'une suite réelle (u_n) si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq A$ (Resp. $A \leq u_n$)

ii) Une suite réelle est dite majorée (resp. Minorée) si elle admet un majorant (resp. minorant)

Définition 3.5 : on dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$(resp.$-\infty$) si

$$\forall A > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n > N \Longrightarrow u_n \geq A (resp. u_n \leq -A))$$

On note alors $u_n \longrightarrow +\infty (resp. -\infty)$ ou $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty (resp. -\infty)$

3.2.2 Propriétés d'ordre des suites réelles convergentes

Proposition 3.1 : soient (u_n) une suite réelle convergente, l sa limite, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

i) Si $a < l$, alors $\exists \, N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall \, n \in \mathbb{N} \, (n \geq N_1 \Longrightarrow a < u_n)$

ii) Si $l < b$, alors $\exists \, N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall \, n \in \mathbb{N} \, (n \geq N_2 \Longrightarrow u_n < b)$

iii) Si $a < l < b$, alors $\exists \, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall \, n \in \mathbb{N} \, (n \geq N \Longrightarrow a < u_n < b)$

Preuve :

i) $\forall \epsilon \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \, (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| < \epsilon)$.

Pour $\epsilon = l - a$ on a $n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| < l - a$

$$\Longrightarrow -(l - a) < u_n - l$$

$$\Longrightarrow \; a < \; u_n$$

Proposition 3.2 : (Théorème d'encadrement) Soient (u_n),(v_n), (w_n) trois suites réelles telles que

$$\begin{cases} \exists \, N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall \, n \in \mathbb{N} \, (n \geq N \Longrightarrow u_n < \; v_n \; < \; w_n \\ \quad (u_n)_n \; et \; (w_n)_n \; convergent \; vers \; une \; limite \; l \end{cases} \tag{3.1}$$

Alors $(v_n)_n$ converge aussi vers l.

Preuve :

$\forall \, \epsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}, (n > n_1 \Longrightarrow |u_n - l_1| < \epsilon)$

$\forall \, \epsilon > 0$, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}, (n > n_2 \Longrightarrow |u_n - l_2| < \epsilon)$

Pour $N_0 = \max(N, n_1, n_2)$ on a

$\forall \, n \in \mathbb{N}(n > n_0 \Longrightarrow -\epsilon < u_n - l < v_n - l < w_n - l < \epsilon$

$\Longrightarrow |u_n - l| < \epsilon$. Donc $(v_n)_n$ converge vers l.

Proposition 3.3 : Soient (u_n),(v_n), deux suites réelles telles que si

$$\begin{cases} \exists \, N \in \mathbb{N} \; \forall \, n \in \mathbb{N} \, (n > N \Longrightarrow u_n \leq v_n (resp \, u_n \geq v_n) \\ \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty (resp. \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty) \end{cases} \tag{3.2}$$

Proposition 3.4 : toute suite convergente est bornée.

Proposition 3.5 : Soient (u_n),(v_n), deux suites réelles, l_1,$l_1) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

i) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l_1$ alors $\lim_{n\to+\infty}|u_n| = |l_1|$

ii) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l_1$ et Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = l_2$ alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = l_1 + l_2$

iii) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l_1$ alors Si $\lim_{n\to+\infty}(\lambda u_n) = \lambda l_1$

iv) Si $\left(\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \; et \; (v_n)_n \; bornée\right)$ alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = 0$

v) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l_1$ et Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = l_2$ alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = l_1 l_2$

vi) Si $\left(\lim_{n\to+\infty} v_n = l_2 \; avec \; l_2 \neq 0\right)$ alors $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{l_2}$

vii) Si $\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = l_1 \;\; et \;\; \lim_{n\to+\infty} v_n = l_2 \; avec \; l_2 \neq 0\right)$ alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang et $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l_1}{l_2}$

Proposition 3.6 : soient (u_n),(v_n), deux suites réelles,

i) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et si (v_n) est minorée, alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$

En particulier

$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = l \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$

ii) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et si $\left(\exists\, c \in \mathbb{R}_+^* \exists N \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}(n \geq N \Longrightarrow v_n > c)\right)$alors $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$

En particulier

$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = l \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = +\infty$

iii) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$

iv) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et si $\left(\exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N} \; (\, n \geq N \Longrightarrow u_n > 0)\right)$ alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$

3.2.3 Suites réelles monotones

Définition 3.6 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle

i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite croissante (resp. Décroissante) si $\forall\, n \in \mathbb{N}\; u_n \le u_{n+1}$(resp. $u_n \ge u_{n+1}$)
ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite strictement croissante (resp. Décroissante) si $\forall\, n \in \mathbb{N}\; u_n < u_{n+1}$(resp. $u_n > u_{n+1}$)
iii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite monotone (resp. strictement Monotone) si elle est croissante ou décroissante (resp. Strictement croissante ou strictement décroissante)

Preuve

Exemple : Etudier la suite (u_n) définie par :

$$\boldsymbol{u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}}$$

3.2.4 Suites réelles adjacentes

Définition 3.7 : Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si et seulement si

$$\begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0 \end{cases}$$

Proposition 3.7 : si deux suites réelles (u_n),(v_n) sont adjacentes alors elles convergentes et on la même limite.

De plus en notant l cette limite commune on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \le u_{n+1} \le l \le v_{n+1} \le v_n$$

Preuve

Exemple : montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\boldsymbol{u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \;et\; v_n = u_n + \frac{1}{n!\,n}}$$

Convergent et ont même limite

3.2.5 Suites réelles extraites

Définition 3.8 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ; une suite extraite de (u_n) est une suite de la forme $\left(u_{\sigma(n)}\right)$ où σ est une application croissante de $\mathbb{N}$ $dans$ $\mathbb{N}$.

Remarque 3.2.1 : si σ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}\, dans\, \mathbb{N}$ alors pour tout $n\ \in \mathbb{N}$, on a $\sigma(n) \geq n$.

<u>Exemple</u>

1./ $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

2./ $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3./ $(u_{n^2-n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car $\sigma(0) = \sigma(1)$.

Proposition 3.8 : si une suite (u_n) converge vers un réel l, alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge aussi vers l.

Proposition 3.9 : $(u_n)_n$ une suite de réels, $l \in \mathbb{R}$. Pour que $(u_n)_n$ converge vers l il faut et il suffit que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent toutes les deux vers l.

Théorème 3.5 (de Bolzano-Weierstrass) De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

3.2.6 Suites classiques

a/ <u>Suite arithmétique</u>

u_0 donné dans $\mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n + r,\ r\ \in\ \mathbb{R}$ on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$.

b/ <u>Suite géométrique</u>

u_0 donné dans $\mathbb{R}$ et $u_{n+1} = qu_n$, $q \in\ \mathbb{R}$ on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n{=}q^n u_0$.

Proposition 3.10 Soit $q \in\ \mathbb{R}$, la suite géométrique $(q^n)_n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ ou $q = 1$. De plus

Si $|q| < 1$ alors $q^n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$

Si $q\ \in]1; +\infty[$ alors $q^n \longrightarrow +\infty$ quand $n \longrightarrow +\infty$

Si $q = 1$ alors $q^n \longrightarrow 1$ quand $n \longrightarrow +\infty$

c/ <u>Suite arithmético-géométrique</u> : $\forall\, n\ \in\ \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b,\ \ a, b, u_0$ données dans $\mathbb{R}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = a^n u_0 + b(1 + a + \cdots a^{n-1})$

d/ Suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficient constant $\forall n \in \mathbb{N}$

$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, a, b, u_0, u_1 données dans $\mathbb{R}$. On associe à cette suite l'équation caractéristique : $r^2 = ar + b \qquad (E)$

1er cas (E) possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 alors :

Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$

2ème cas (E) possède une racine

Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)r^n$

3ème cas (E) possède deux racines complexes conjuguées $[\rho, \theta]$, $[\rho, -\theta]$ alors :

Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n(\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)$

Dans tous les cas, λ et μ sont déterminer en résolvant le système obtenu en considérant les deux premiers termes de la suite .

Exemple : Etudier la suite $(u_n)_n$ définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $u_0 = u_1 = 1$

3.2.7 Suites de Cauchy

Définition 3.9 : une suite réelle $(u_n)_n$ est dite de Cauchy si elle possède la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_\epsilon, \forall p, q \in \mathbb{N} \left(q > p > n_\epsilon \Longrightarrow \left|u_q - u_p\right| < \epsilon\right)$$

Théorème 3.6 : une suite réelle est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy

3.3 Suites équivalentes

Définition 3.10 : Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles ; la suite $(v_n)_n$ est équivalente à la suite $(u_n)_n$ s'il existe une suite réelle $(\lambda_n)_n$ tendant vers I telle que pour n assez grand on ait $v_n = \lambda_n u_n$. On note $(v_n)_n \sim (u_n)_n$

Remarque 3.3.1 : Si pour n assez grand on a $U_n \neq 0$ alors $(v_n)_n$ est équivalente à $(u_n)_n$ si $\left(\lambda_n = \frac{u_n}{(v_n)}\right)_n$ tend vers 1.

Théorème 3.7 Soients $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites équivalentes

- **i)** $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont de même nature

ii) Si $\lim(u_n) = l$ alors $\lim(v_n) = l, l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$