

Chapitre 3 : Suites des nombres réels

3.1 Raisonnement par récurrence

Théorème 3.1 (Propriété fondamentale de \mathbb{N})

Toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément (pour l'ordre naturel) et toute partie non vide et majorée de \mathbb{N} admet un plus grand élément.

Cette propriété de \mathbb{N} entraine le théorème de la récurrence qui est utilisé lorsqu'on veut démontrer une propriété, $P(n)$, dépendant de n pour tout entier naturel $n \geq n_0$ (fixé).

Théorème 3.2 Soit $P(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel n

Si

- i) $P(n_0)$ est vraie
- ii) $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ Vraie

Alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Exemple : montrer que $\forall n \geq 1 S_n = 1^3 + 3^3 + \dots + (2n - 1)^3 = 2n^4 - n^2$ $P(n)$

$S_1 = 1^3 = 1; 2(1)^4 - 1^2 = 1$ $P(1)$ vraie.

Supposons $P(n)$ vraie pour tout un certain $n \geq 1$, c.à.d. $S_n = 2n^4 - n^2$ et montrons que $P(n + 1)$ est vraie c.à.d. $S_{n+1} = 1^3 + 3^3 + \dots + (2n - 1)^3 + (2n + 1)^3 = 2(n + 1)^4 - (n + 1)^2$

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (2n + 1)^3 \\ &= 2n^4 - n^2 + (2n + 1)^3 \\ &= 2n^4 - n^2 + (8n^3 + 12n^2 + 6n + 1) \\ &= 2(n + 1)^4 - (n + 1)^2 \end{aligned}$$

$P(n + 1)$ est vraie donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

3.2 Suites de nombres réels

3.2.1 Définitions

Définition 3.1 : une suite de nombres réels est une application u de \mathbb{N} dans \mathbb{R} ; c.à.d.

$$\begin{aligned} u: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) \end{aligned}$$

On la note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n \geq 0}$. Pour chaque entier naturel n , u_n est appelé le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite.

Convergence, Divergence

Définition 3.2 : on dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel l si à tout réel $\epsilon > 0$, on peut associer un entier naturel n_ϵ tel que, pour tout entier naturel $n > n_\epsilon$ on ait $|u_n - l| < \epsilon$.

Le fait pour une suite d'être convergente vers l peut s'écrire :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > n_\epsilon \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon)$$

Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

Définition 3.3 : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , l est appelé la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et est noté $\lim(u_n)$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty}(u_n)$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. On écrit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$.

Exemple : la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers zéro.

En effet soit $\epsilon > 0$, existe-t-il $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon$?

$\frac{1}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}$ il suffit de prendre $n_0 = E\left(\frac{1}{\epsilon} + 1\right)$. (u_n) est donc convergente et a pour limite zéro.

Théorème 3.3 lorsqu'une suite (u_n) converge sa limite est unique.

Preuve : supposons que (u_n) converge vers 2 réels l_1 et l_2 avec $l_1 < l_2$.c.à.d.

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > n_1 \Rightarrow |u_n - l_1| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > n_2 \Rightarrow |u_n - l_2| < \epsilon)$$

$$\text{Donc pour } n_0 = \max(n_1, n_2) \quad \forall n \in \mathbb{N}, (n > n_0 \Rightarrow |u_n - l_1| < \epsilon \text{ et } |u_n - l_2| < \epsilon)$$

$$\text{D'autre part on a } 0 < l_2 - l_1 = l_2 - u_n + u_n - l_1 \leq |u_n - l_1| + |u_n - l_2| < 2\epsilon.$$

Pour $\epsilon = \frac{1}{4}(l_2 - l_1)$, ce qui est absurde ; donc $l_2 = l_1$.

Définition 3.4

- i) Un réel A est un majorant(resp.minorant) d'une suite réelle (u_n) si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq A$
(Resp. $A \leq u_n$)
- ii) Une suite réelle est dite majorée (resp. Minorée) si elle admet un majorant (resp. minorant)

Définition 3.5 : on dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si

$$\forall A > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow u_n \geq A \text{ (resp. } u_n \leq -A))$$

On note alors $u_n \rightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$) ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (resp. $-\infty$)

3.2.2 Propriétés d'ordre des suites réelles convergentes

Proposition 3.1 : soient (u_n) une suite réelle convergente, l sa limite, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

- i) Si $a < l$, alors $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} (n \geq N_1 \Rightarrow a < u_n)$
- ii) Si $l < b$, alors $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} (n \geq N_2 \Rightarrow u_n < b)$
- iii) Si $a < l < b$, alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow a < u_n < b)$

Preuve :

$$i) \quad \forall \epsilon \exists n_0 \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon).$$

$$\text{Pour } \epsilon = l - a \text{ on a } n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < l - a$$

$$\Rightarrow -(l - a) < u_n - l$$

$$\Rightarrow a < u_n$$

Proposition 3.2 : (Théorème d'encadrement) Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles telles que

$$\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow u_n < v_n < w_n) \\ (u_n)_n \text{ et } (w_n)_n \text{ convergent vers une limite } l \end{cases} \quad (3.1)$$

Alors $(v_n)_n$ converge aussi vers l .

Preuve :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > n_1 \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon)$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > n_2 \Rightarrow |w_n - l| < \epsilon)$$

Pour $N_0 = \max(n_1, n_2)$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N} (n > n_0 \Rightarrow -\epsilon < u_n - l < v_n - l < w_n - l < \epsilon)$$

$$\Rightarrow |u_n - l| < \epsilon. \text{ Donc } (v_n)_n \text{ converge vers } l.$$

Proposition 3.3 : Soient $(u_n), (v_n)$, deux suites réelles telles que si

$$\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow u_n \leq v_n \text{ (resp. } u_n \geq v_n)) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ (resp. } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty) \end{cases} \quad (3.2)$$

Proposition 3.4 : toute suite convergente est bornée.

Proposition 3.5 : Soient $(u_n), (v_n)$, deux suites réelles, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$

- i) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l_1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |l_1|$
- ii) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l_1$ et Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l_2$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = l_1 + l_2$
- iii) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l_1$ alors Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n) = \lambda l_1$
- iv) Si $\left(\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ et } (v_n)_n \text{ bornée} \right)$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = 0$
- v) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l_1$ et Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l_2$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = l_1 l_2$
- vi) Si $\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l_2 \text{ avec } l_2 \neq 0 \right)$ alors $\left(\frac{1}{v_n} \right)$ est définie à partir d'un certain rang et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{l_2}$
- vii) Si $\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l_1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l_2 \text{ avec } l_2 \neq 0 \right)$ alors $\left(\frac{u_n}{v_n} \right)$ est définie à partir d'un certain rang et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l_1}{l_2}$

Proposition 3.6 : soient $(u_n), (v_n)$, deux suites réelles,

- i) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et si (v_n) est minorée, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$
 En particulier
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$
- ii) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et si $\left(\exists c \in \mathbb{R}_+^* \exists N \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow v_n > c) \right)$ alors
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = +\infty$
 En particulier
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = +\infty$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = +\infty$
- iii) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$
- iv) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et si $\left(\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow u_n > 0) \right)$ alors
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$

3.2.3 Suites réelles monotones

Définition 3.6 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle

- i) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite croissante (resp. Décroissante) si $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$)
- ii) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite ~~croissante~~ strictement croissante (resp. strictement décroissante) si $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n < u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$)
- iii) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite monotone (resp. Monotone) si elle est croissante ou décroissante (resp. Strictement croissante ou strictement décroissante)

Preuve

Exemple : Etudier la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

3.2.4 Suites réelles adjacentes

Définition 3.7 : Deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si et seulement si

$$\begin{cases} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} \\ (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0 \end{cases}$$

Proposition 3.7 : si deux suites réelles $(u_n), (v_n)$ sont adjacentes alors elles convergentes et on la même limite.

De plus en notant l cette limite commune on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \leq l \leq v_{n+1} \leq v_n$$

Preuve

Exemple : montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n! n}$$

Convergent et ont même limite

3.2.5 Suites réelles extraites

Définition 3.8 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ; une suite extraite de (u_n) est une suite de la forme $(u_{\sigma(n)})$ où σ est une application croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

Remarque 3.2.1 : si σ est une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sigma(n) \geq n$.

Exemple

1./ $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites extraites de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

2./ $(u_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

3./ $(u_{n^2-n})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ car $\sigma(0) = \sigma(1)$.

Proposition 3.8 : si une suite (u_n) converge vers un réel l , alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge aussi vers l .

Proposition 3.9 : $(u_n)_n$ une suite de réels, $l \in \mathbb{R}$. Pour que $(u_n)_n$ converge vers l il faut et il suffit que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent toutes les deux vers l .

Théorème 3.5 (de Bolzano-Weierstrass) De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

3.2.6 Suites classiques

a/ Suite arithmétique

u_0 donné dans \mathbb{R} et $u_{n+1} = u_n + r$, $r \in \mathbb{R}$ on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

b/ Suite géométrique

u_0 donné dans \mathbb{R} et $u_{n+1} = qu_n$, $q \in \mathbb{R}$ on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$.

Proposition 3.10 Soit $q \in \mathbb{R}$, la suite géométrique $(q^n)_n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ ou $q = 1$. De plus

Si $|q| < 1$ alors $q^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$

Si $q \in]1; +\infty[$ alors $q^n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$

Si $q = 1$ alors $q^n \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow +\infty$

c/ Suite arithmético-géométrique : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$, a, b, u_0 données dans \mathbb{R} .

On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = a^n u_0 + b(1 + a + \dots + a^{n-1})$

d/ Suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficient constant $\forall n \in \mathbb{N}$

$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, a, b, u_0, u_1 données dans \mathbb{R} . On associe à cette suite l'équation caractéristique : $r^2 = ar + b$ (E)

1^{er} cas (E) possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 alors :

Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$

2^{ème} cas (E) possède une racine

Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)r^n$

3^{ème} cas (E) possède deux racines complexes conjuguées $[\rho, \theta], [\rho, -\theta]$ alors :

Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)$

Dans tous les cas, λ et μ sont déterminés en résolvant le système obtenu en considérant les deux premiers termes de la suite .

Exemple : Etudier la suite $(u_n)_n$ définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $u_0 = u_1 = 1$

3.2.7 Suites de Cauchy

Définition 3.9 : une suite réelle $(u_n)_n$ est dite de Cauchy si elle possède la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon, \forall p, q \in \mathbb{N} (q > p > n_\epsilon \Rightarrow |u_q - u_p| < \epsilon)$$

Théorème 3.6 : une suite réelle est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy

3.3 Suites équivalentes

Définition 3.10 : Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles ; la suite $(v_n)_n$ est équivalente à la suite $(u_n)_n$ s'il existe une suite réelle $(\lambda_n)_n$ tendant vers 1 telle que pour n assez grand on ait $v_n = \lambda_n u_n$. On note $(v_n)_n \sim (u_n)_n$

Remarque 3.3.1 : Si pour n assez grand on a $U_n \neq 0$ alors $(v_n)_n$ est équivalente à $(u_n)_n$ si $\left(\lambda_n = \frac{u_n}{(v_n)}\right)_n$ tend vers 1.

Théorème 3.7 Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites équivalentes

- i) $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont de même nature (elles sont toutes les 2 soit divergentes ou convergentes)

ii) Si $\lim(u_n) = l$ alors $\lim(v_n) = l, l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$