Encolleuse

1 Détermination de $Q_s(t)$ de 0 à T (Régime forcé)

$$Q'_s(t) = \frac{Q_s(t)}{K1 \cdot K2} - \frac{Q_e(t)}{K1 \cdot K2} \tag{1}$$

Notons X = $\frac{1}{K1 \cdot K2}$, on a alors $Q'_s(t) = X \cdot Q_s(t) - X \cdot Q_e(t)$.

1.1 Résolution de l'équation homogène

On cherche à résoudre l'équation suivante:

$$Q'_s(t) = X \cdot Q_s(t) \leftrightarrow \frac{Q'_s(t)}{Q_s(t)} = X \tag{2}$$

Or, on sait que $\int \frac{u'}{u} = ln|u|$ donc $\int \frac{Q'_s(t)}{Q_s(t)} dt = \int X dt$.
Donc $ln(Q_s(t)) + c_1 = Xt$ et par exponentiation, on en déduit que les solutions de l'équation homogène sont de la forme $Q_s(t) = Ce^{Xt}$, avec C constante.

1.2 Recherche d'une solution particulière

On utilise la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière sous la forme $Q_s(t) = \lambda(t)e^{Xt}$.
On a donc $Q'_s(t) = \lambda'(t)e^{Xt} + \lambda(t)Xe^{Xt} = e^{Xt}[\lambda'(t) + \lambda(t)X]$.

On remplace Q_s et Q'_s dans l'équation (1) et on obtient:

$$\begin{aligned}
&e^{Xt}[\lambda'(t) + \lambda(t)X] = \lambda(t)Xe^{Xt} - XQ_e(t) \\
&\leftrightarrow \lambda'(t) + \lambda(t)X = \lambda(t)X - XQ_e(t)e^{-Xt} \\
&\leftrightarrow \lambda'(t) = -XQ_e(t)e^{-Xt}
\end{aligned}$$

Or on sait que $\forall t, Q_e(t) = QE$ (constante) donc:

$$\begin{aligned}
&\lambda'(t) = -XQEe^{-Xt} \\
&\leftrightarrow \lambda(t) = QE \int -Xe^{-Xt} \\
&\leftrightarrow \lambda(t) = QEe^{-Xt}
\end{aligned}$$

Une solution particulière est donc de la forme $Q_s(t) = \lambda(t)e^{Xt} = QEe^{-Xt}e^{Xt} = QE$.

1.3 Conclusion

Les solutions de l'équation (1) sont de la forme $Q_s(t) = Ce^{Xt} + QE$.
Or, on sait que $Q_s(0) = 0$ donc $C + QE = 0$ d'où $C = -QE$.

Donc, les solutions sont de la forme

$$Q_s(t) = QE(1 - e^{Xt}) = QE(1 - e^{\frac{t}{K1 \cdot K2}})$$

2 Détermination de $Q_s(t)$ de T à 2T (Régime libre)

Sachant que $\forall t, Q_e(t) = 0$, d'après (1) on a:

$$Q_s'(t) = \frac{Q_s(t)}{K1 \cdot K2} \tag{3}$$

Notons X = $\frac{1}{K1 \cdot K2}$, on a alors $Q_s'(t) = X \cdot Q_s(t)$.

2.1 Résolution

Cette équation est exactement la même que l'équation (2), la solution est donc de la forme $Q_s(t) = Ce^{Xt}$, avec C constante.
Or, on sait que $Q_s(T) = QE$ donc $Ce^{XT} = QE$ d'où $C = QE \cdot e^{-XT}$.

Donc les solutions de l'équation sont de la forme

$$Q_s(t) = QE \cdot e^{-XT} e^{Xt} = QE \cdot e^{X(t-T)} = QE \cdot e^{\frac{t-T}{K1 \cdot K2}}$$