$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2yz + 2xz$$

Найдём все первые частные производные:

$$f'_x = 4x^3 - 8x + 2y + 2z$$
$$f'_y = 4y^3 - 8y + 2x + 2z$$
$$f'_z = 4z^3 - 8z + 2y + 2x$$

Найдём критические точки:

$$\begin{cases} 4x^3 - 8x + 2y + 2z = 0 \\ 4y^3 - 8y + 2x + 2z = 0 \\ 4z^3 - 8z + 2y + 2x = 0 \end{cases}$$

$$4x^3 - 8x + 2y + 2z - 4y^3 + 8y - 2x - 2z = 0$$
$$4(x^3 - y^3) - 10(x - y) = 0$$
$$4(x-y)(x^2 + xy + y^2) - 10(x-y) = 0$$
$$(x-y)\left(4(x^2 + xy + y^2) - 10\right) = 0$$

$$x - y = 0 \qquad 4(x^2 + xy + y^2) = 10$$
$$x = y$$

Аналогично можно вычесть 1-е ур-е из 3-е и получить:

$x = z$ или $4(x^2 + xz + z^2) = 10$

Пусть $x = y$ и $x = z$ $\Rightarrow$ $x = y = z = a$, подставим это в 1-е ур-е:

$$4a^3 - 8a + 2a + 2a = 0$$
$$4a^3 - 4a = 0$$
$$4a(a^2 - 1) = 0$$

$a = 0 \qquad a = \pm 1$

Таким образом получили 3 крит. точки: $(0,0,0)$ $(1,1,1)$ $(-1,-1,-1)$

Остальные крит. точки найдём с помощью Python, см. ноутбук.

Проанализируем эти 3 найденные точки. Остальные точки проверяются аналогично.

Для анализа крит. точек найдём матрицу Гессе:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 8 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial xy} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial xz} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial yx} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 8 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial yz} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial zx} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial zy} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 12z^2 - 8$$

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 8 & 2 & 2 \\ 2 & 12y^2 - 8 & 2 \\ 2 & 2 & 12z^2 - 8 \end{pmatrix}$$

Проверим точку $(0,0,0)$

$$H(0,0,0) = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 2 \\ 2 & -8 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = |-8| = -8 < 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = 64 - 4 = 60 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -8 & 2 & 2 \\ 2 & -8 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{vmatrix} = 512 - 16 + 96 = -400 < 0$$

Знаки угловых миноров чередуются начиная с <0 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $H(0,0,0)$ отрицательно определена $\Rightarrow$ в т. $(0,0,0)$ - локальный максимум

Проверим точку $(1,1,1)$

$$H(1,1,1)=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}$$

$\Delta_1=|4|>0$

$\Delta_2=\begin{vmatrix}4&2\\2&4\end{vmatrix}=16-4=12>0$

$\Delta_3=\begin{vmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{vmatrix}=68+16-48=32>0$

Все угловые миноры больше 0 $\Rightarrow$ $H(1,1,1)\succ 0$ $\Rightarrow$ в т. $(1,1,1)$ локальный минимум

Проверим точку $(-1\ -1\ -1)$

$$H(-1,-1,-1)=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}$$ $\Delta_1=4$ $\Delta_2=12$ $\Delta=32$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $H(-1,-1,-1)\succ 0$ $\Rightarrow$ в т. $(-1,-1,-1)$ локальный минимум

Ответ: т. $(0,0,0)$ - локальный максимум

т. $(1,1,1)$ - лок. минимум

т. $(-1,-1,-1)$ - лок. минимум

Остальные точки проверяются аналогично.

Метод золотого сечения

$f(x) = e^x + x^2 - 4x \qquad L_0 = [-2, 3]$

Итерация 0:

Найдём точки x_1 и x_2 так, что они делят интервал $[a, b]$ в соотношении золотого сечения $\left(\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$$x_1 = b - \frac{b-a}{\varphi} = 3 - \frac{3+2}{1.618} \approx -0,09$$

$$x_2 = a + \frac{b-a}{\varphi} = -2 + \frac{3+2}{1.618} \approx 1,09$$

Оценим ф-ю в точках x_1 и x_2

$f(x_1) \approx 1,282$

$f(x_2) \approx -0,197$

$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow L_1 = [-0,09, 3]$

Итерация 1:

$$x_1 = b - \frac{b-a}{\varphi} = 3 - \frac{3+0,09}{1,618} \approx 1,09$$

$$x_2 = a + \frac{b-a}{\varphi} = -0,09 + \frac{3+0,09}{1.618} \approx 1,819$$

$f(x_1) = -0,197$

$f(x_2) = 2,20$

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow L_2 = [-0,09; 1,819]$

Итерация 2:

$$x_1 = 1,819 - \frac{1,819+0,09}{1,618} \approx 0,639$$

$$x_2 = -0,09 + \frac{1,819 + 0,09}{1,618} \approx 1,09$$

$f(x_1) \approx -0,253$ $\qquad f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow L_3 = [-0,09,\ 1,09]$

$f(x_2) \approx -0,197$

Итерация 3:

$$x_1 = 1,09 - \frac{1,09 + 0,09}{1,618} \approx 0,36$$

$$x_2 = -0,09 + \frac{1,09 + 0,09}{1,618} \approx 0,639$$

$f(x_1) = 0,121$ $\qquad f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow L_4 = [0,36,\ 1,09]$

$f(x_2) = -0,253$

Метод Фибоначчи

$f(x) = x^6 - 4^4 + 3x^2 + e^x - \ln(1+x^2)$

$L_0 = [-2,\ 3]$

Выполним 4 итерации метода. Найдём 4+2 числа Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8

Итерация 0:

$x_1 = a + \frac{F_{n-2}}{F_n}(b-a) = -2 + \frac{3}{8}(3+2) = -0{,}125$

$x_2 = a + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b-a) = 1{,}125$

$f(x_1) \approx -255{,}086$

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow L_1 = [-2,\ 1{,}125]$

$f(x_2) \approx -247{,}913$

Итерация 1:

$x_1 = a + \frac{F_{n-2}}{F_n}(b-a) = -2 + \frac{2}{5}(1{,}125+2) = -0{,}75$

$x_2 = a + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b-a) = -2 + \frac{3}{5}(1{,}125+2) = -0{,}125$

$f(x_1) \approx -254{,}108$

$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow L_2 = [-0{,}75;\ 1{,}125]$

$f(x_2) \approx -255{,}086$

Итерация 2:

$x_1 = -0{,}75 + \frac{1}{3}(1{,}125+0{,}75) = -0{,}125$

$x_2 = -0{,}75 + \frac{2}{3}(1{,}125+0{,}75) = 0{,}5$

$f(x_1) \approx -255{,}086$

$f(x_2) \approx -253{,}808$

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow L_3 = [-0{,}75;\ 0{,}5]$

Итерация 3:

$x_1 = -0{,}75 + \frac{1}{2}(0{,}5 + 0{,}75) = -0{,}125$

$x_2 = x_1$

$f(x_1) \approx -255{,}086$

В итоге получили $x_{min} = -0{,}125$, настоящий минимум ф-и находится в точке $\approx -0{,}2$. Большее количество итераций позволит достигнуть большей точности.

Метод Ньютона

$f(x) = x^6 - 4^4 + 3x^2 + e^x - \ln(1+x^2)$

$L_0 = [-0,5;\ 1,5]$

Найдём 1-ю и 2-ю производную $f(x)$:

$f'(x) = 6x^5 + 6x + e^x - \frac{2x}{1+x^2}$

$f''(x) = 30x^4 + 6 + e^x - \left(\frac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2}\right) = 30x^4 + 6 + e^x - \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

Выберем начальное приближение x_0 внутри отрезка L_0

$x_0 = 1$

Итерация 0: $\qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$

$f'(x_0) = 6 + 6 + e - \frac{2}{2} \approx 13,718$

$f''(x_0) = 30 + 6 + e - \frac{2(1-1)}{(1+1)^2} \approx 38.718$

$x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} = 1 - \frac{13,718}{38,718} \approx 0,6456$

Итерация 1:

$f'(x_1) \approx 5,542$

$f''(x_1) \approx 12,540$

$x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)} = 0,6456 - \frac{5,542}{12,540} \approx 0,2036$

Итерация 2

$f'(x_2) \approx 2{,}058$

$f''(x_2) \approx 5{,}510$

$x_3 = x_2 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_2)} \approx -0{,}1699$

Итерация 3:

$f'(x_3) \approx 0.153$

$f''(x_3) \approx 5.034$

$x_4 = x_3 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_3)} = -0{,}1699 - \frac{0.153}{5.034} \approx -0{,}200$

В итоге получили $x_{min} = -0{,}2$, что очень близко к точному минимуму ф-и $f(x)$.

Метод Лагранжа

Нужно минимизировать ф-ю затрат:

$$C(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx+e^{x+y+z}$$

При ограничении: $x+2y+3z-100=0$

Запишем Лагранжиан:

$$L(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx+e^{x+y+z}-\lambda(x+2y+3z-100)$$

Необходимые ус-я экстремума:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x+y+z+e^{x+y+z}-\lambda=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y+x+z+e^{x+y+z}-2\lambda=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z+y+x+e^{x+y+z}-3\lambda=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x+2y+3z-100)=0$$

$$\begin{cases} 2x+y+z+e^{x+y+z}-\lambda=0 \\ 2y+x+z+e^{x+y+z}-2\lambda=0 \\ 2z+y+x+e^{x+y+z}-3\lambda=0 \\ -(x+2y+3z-100)=0 \end{cases}$$

Решение этой системы даст условно-стационарные точки.
Решим эту систему численно с помощью Python, код есть в ноутбуке

$$\begin{cases} 2x+y+z+e^{x+y+z}-\lambda=0 \\ 2y+x+z+e^{x+y+z}-2\lambda=0 \\ 2z+y+x+e^{x+y+z}-3\lambda=0 \\ -(x+2y+3z-100)=0 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ z\geq 0 \end{cases}$$

$$\lambda=2x+y+z+e^{x+y+z}$$

$$2y+x+z+e^{x+y+z}-2(2x+y+z+e^{x+y+z})=0$$

$$2y+x+z+e^{x+y+z}-4x-2y-2z-2e^{x+y+z}=0$$

$$-3x-z-e^{x+y+z}=0$$

$$3x+z+e^{x+y+z}=0$$

Если $x,y,z\geq 0$ то $3x+z+e^{x+y+z}>0$ и решений нет. Значит одна или несколько переменных должны быть равны 0.

Можно заметить, что исходная ф-ция

$$C(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx+e^{x+y+z}$$

Симметрична относительно переменных и при $x,y,z\geq 0$ возрастает а наибольший вклад в ограничение вносит переменная z

$$x+2y+3z=100$$

Значит при $x=y=0$ $z=\frac{100}{3}$ ограничение будет выполнено, а значение ф-ции $C(x,y,z)$ минимально