Linjär algebra

Material:
- Prov:
  - Exempel
  - Gamla
  - Hedwig
- Litteratur
  - kompendium
  - fysisk bok (fram till 8.6, ej Gram-Schmidt)
  - ~~digitala böcker~~
  - föreläsningar digitalt
- uppgifter:
  - problemsamlingar
  - seminarieuppgifter
  - övningsuppgifter i litteratur
- planering
  - detta dokument
  - läsanvisningar

Matrisalgebra

Matriser

- Kolonner och rader.
- Räkneregler för element:
  a) Addition: $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$
  b) Multiplikation med skalär: $(cA)_{ij} = cA_{ij}$
  c) Transponat: $\left(A^T\right)_{ij} = A_{ij}$
- Räknelagar för matrisprodukt:
  a) associativitet
  b) distributivitet
  c) ej kommutativitet
  - men kommutativ multiplikation med skalär
- Lämpliga dimensioner krävs för addition, multiplikation, invers osv.

Gauss-eliminering

Beräkning

- Totalmatris
- Algoritm:

i) trappstegsform ← framåtreduktion:
  1) nollskilt pivotelement i pivotrad ← radbyte
  2) normaliserat pivotelement 1 ← multiplikation med skalär
  3) eliminera element under huvuddiagonalen ← addition till andra rader

- kvadratiska matriser: trappstegsform = övertriangulär

ii) reducerad trappstegsform {row reduced echelon form, RREF} ← bakåtreduktion:
  1) nollor ovan varje pivotelement ← addition till andra rader av sista raden

- Gauss–Jordan-eliminering vid steg (ii).

- Tidskomplexitet $O(n^3)$ för $n \times n$ matris. (Ej utifrån algo. ovan.)
- Tillåtna operationer för radekvivalens:
  a) byta plats på rader
  b) addition med multipel av annan rad
  c) multiplikation med nollskild skalär
- Kan uttryckas som elementärmatriserna EM1, EM2 och EM3, som är inverterbara.

Lösningar

- parameterform, vektorform
- inga lösningar omm den reducerade trappstegsformen har en rad där vänsterledet är nollor men högerledet är nollskillt
- Homogent (motsats: inhomogent) ekvationssystem har alltid åtminstone den triviala lösningen $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

Kvadratmatriser

- Räkneregler för invers och transponat:
  - $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
  - $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$
  - $\left(A^T\right)^T = A$
  - $(A+B)^T = A^T + B^T$
  - $(AB)^T = B^T A^T$
  - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Typer

Multiplikation

- Identitetsmatris: $IA = AI = A$.
- Även kallat enhetsmatrisen E.
- Entydig för kvadratiska matriser.
- Matrisinvers: $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.
- Singulär: motsats till inverterbar.
- Följande villkor är ekvivalenta för $n \times n$ matris A.
  1) A är inverterbar.
  2) $\det(A) \neq 0$.
  3) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har endast den trivial lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
  4) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en (unik) lösning för varje kolonnvektor $\mathbf{b}$.
  5) Reducerad trappstegsform av A är I.
  6) A kan uttryckas som en produkt av elementära matriser.

  7) Kolonn-/radvektorerna är linjärt oberoende.
  8) Kolonn-/radrummet är $\mathbb{R}^n$.
  9) Kolonn-/radvektorerna utgör en bas för $\mathbb{R}^n$.
  10) A har rangen n (full rang).
  11) Värderummet är $\mathbb{R}^n$.
  12) Nollrummets dimension är 0.
  13) Nollrummet är $\{\mathbf{0}\}$.
  14) $\lambda = 0$ är inte ett egenvärde till A.
  15) Ortogonala komplementet till nollrummet är $\mathbb{R}^n$.
  16) Ortogonala komplementet till radrummet är $\{\mathbf{0}\}$.
  17) Avbildningen är bijektiv.
- Additativ invers (jfr multiplikativ invers): $A + (-1)A = \mathbf{0}$.
- Beräkning:

- $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ där $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
- Gauss-elimination av $[A \mid I]$

Form

- (Över-/under)triangulär matris
  - Determinanten är produkten av diagonalelementen.
  - Diagonalmatris
- Ortogonal matris: $Q^T Q = QQ^T = I$.
  - Rader eller kolumner är ortogonala (skalärprodukt 0) och normerade (norm 1).
  - $\det(Q) = 1$: positivt orienterad
  - $\det(Q) = -1$: negativt orienterad

Determinanter

- Räkneregler:
  - $\det(A) = \det(A^T)$
  - $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
  - $\det(cA) = c^n \det(A)$, där A är av storlek $n \times n$
- Egenskaper hos kolonner/rader:
  1. gemensapam faktor → skalär
  2. summa av två tal → addition
  3. lika → 0
  4. nollor → 0
  5. platsbyte → $\pm$
  6. addition av annan → ingen förändring
- Representerar tecknad (positiv om moturs/högerorienterad) area av parallellogram i planet och volym av parallellepiped i rummet.
- Cramers regel vid unika lösningar (vilket är ekivalent med nollskild determinant).
- Utveckling efter kolonn i / rad j {Laplace/cofactor expansion along its ith/jth column/row}:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

  - Underdeterminant $\det A_{ij}$
  - Kofaktor $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$

Vektorer

Orientation

- höger/positiv: positiv determinant; högerhandsregeln
- vänster/negativ: negativ determinant; vänsterhandsregeln

Linjärt (o)beroende

- Vektorerna $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ är
  - linjärt beroende omm åtminstone en vektor kan skrivas som en linjärkombination av de andra.
  - linjärt oberoende omm den **enda** linjärkombinationen som är nollvektorn är då alla koefficienter är noll:
    - $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$
    - Homogena ekvationssystemet nedan enbart har den triviala lösningen (dvs. $\det(A) \neq 0$):

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Bestäms genom att beräkna determinant eller radreducera matris [??? fixa]

Produkter

Skalärprodukt

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta, & \vec{u} \neq \mathbf{0} \text{ och } \vec{v} \neq \mathbf{0} \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$
- Vektorer är
  - ortogonala omm $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. (Obs att nollvektorn därmed är ortogonal mot alla vektorer.)
  - parallella omm $\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm|\vec{u}||\vec{v}|$.
- Egenskaper:
  - kommutativitet
  - distributivitet
  - kvadreringsreglerna: $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2$
  - konjugatregeln: $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|u\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
    - obs konjugatregeln för längder, som enklast beräknas genom att använda kvadreringsregler för längder: $\|\vec{u} + \vec{v}\|\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{\|u + \vec{v}\|^2 \|u - \vec{v}\|^2}$
  - multiplikation med skalär
- Olikheter:
  - $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$
  - Cauchy–Schwarzs olikhet: $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
  - triangelolikheten: $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
  - omvända triangelolikheten: $\|\vec{u} - \vec{v}\| \geq \big|\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\big|$
- Geometrisk tolkning: längden av projektionen av en vektor på en annan, multiplicerat med längden av den senare vektorn.
- Vinkeln kan lösas ut som $\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)$

Vektorprodukt

- Definition:
  1. vinkelrät mot $\vec{u}$ och $\vec{v}$
  2. längd $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta$: area av parallellogram
  3. högerorienterad
  4. degenererat fall: (anti)parallella $\vec{u}$ och $\vec{v}$ ger nollvektorn
- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{n}\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta$ där $\vec{n}$ är en enhetsvektor sådan att trippeln $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ är högerorienterad.
- där $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ (eller, vilket trasslar till allt, $\mathbb{R}^7$).
- Räkneregler:
  1. distributivitet
  2. homogenitet
  3. antikommutativitet
- $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = (u_2v_3 - u_3v_2, u_1v_3 - u_3v_1, u_1v_2 - u_2v_1)$
- Determinant-minnesregeln är enbart mnemoniskt och bör därför

inte förekomma i renskrivna lösningar.

- Skalär trippelprodukt:
  $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos\theta = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
- Geometrisk tolkning: tecknad volym av parallelliped.
  (Absolutbeloppet är otecknade volymen.)

Linjer och plan

Linjen

- i planet:
  - Parameterekvation med (x, y)
  - Allmän form: $ax + by + c = 0$
  - Normalvektor: vinkelrät mot riktningsvektor.
- i rummet:
  - Parameterekvation: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(\alpha, \beta, \gamma)$, där $t \in \mathbb{R}$
    - beskrivning: punkt + riktningsvektor · parameter = linjen då parametern genomlöper alla reella tal
  - Incidens:
    - linjärt beroende: parallella, sammanfallande
    - linjärt oberoende: skära, skeva
- Avstånd från en godtycklig punkt Q på en linje till punkt P är
  $\left\|\overrightarrow{QP} - \mathrm{proj}_{\vec{v}}\overrightarrow{QP}\right\|$
- Avstånd mellan två linjer 1, 2 med parameter t_1, t_2 och punkt P_1, P_2 ges av:
  a) Skriv $\overrightarrow{P_1P_2}$ på parameterform utifrån t_1 och t_2.
  b) Lös ekvationssystemet där skalärprodukten av $\overrightarrow{P_1P_2}$ och respektive linje på parameterform är noll, ty den kortaste vektorn mellan linjerna är vinkelrät mot båda. Lös för t_1, t_2.
  c) Hitta P_1, P_2 för t_1, t_2 och beräkna $\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\|$, som är det minsta avståndet mellan linjerna.

Planet i rummet

- Parameterekvation med två vektorer
- Normal-
  - ekvation/-form: $Ax + By + Cz + D = 0$
    - starkt föredragen (i rummet) pga få konstanter att hitta
  - vektor: (A, B, C)
    - vinkelrät mot planet
  - hittas genom
    1. Gauss-eliminering av parameterekvationen—lös ut $s, t, 0$, där 0 ger normalformen
    2. vektorprodukt av två vektorer
    3. determinant av två kända vektorer och en ny vektor från samma utgångspunkt som de två kända vektorerna—givet $\overrightarrow{PR}$ och $\overrightarrow{PQ}$ framtagas $\overrightarrow{PX}$
    - Givet punkten P_0 på planet måste $\overrightarrow{P_0P}$ vara vinkelrät mot normalvektorn för att punkten P ska ligga på planet.
- Avstånd från punkt (x_0, y_0, z_0) till plan $Ax + By + Cz + D = 0$ är
  $$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$
  - Motsvarande formel gäller för punkt till linje i planet.

- Projektionsformeln:
  $\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$
  - Alternativ notation:
    $\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}$

Vektorrum

- Axiom för vektorrum / linjärt rum:
  - Vektoraddition:
    1. enhetselement ($\vec{0}$)
    2. associativitet
    3. kommutativitet
    4. invers ($-\vec{v}$)
  - Skalärmultiplikation:
    5. enhetselement (1)
    6. associativitet (homogenitet)
    7. distributivitet över vektoraddition
    8. distributivitet över skaläraddition

<u>Baser</u>

  - Ordnad mängd $\mathbb{B}$ av uppspännande och linjärt oberoende vektorer.
- Ortonormal (ON-)bas: ortogonala och normerade baser.
  - Då gäller för en vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$:
    - $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$
      - $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}$
    - $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \begin{cases} 1 \text{ om } i \neq j, \\ 0 \text{ om } i = j \end{cases}$
    - $\vec{v} = (\vec{u}_1\cdot\vec{v})\vec{u}_1 + (\vec{u}_2\cdot\vec{v})\vec{u}_2 + (\vec{u}_3\cdot\vec{v})\vec{u}_3$
      - vilket är det ortogonala specialfallet av följande:
        $\vec{v} = \left(\frac{\vec{u}_1\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}_1\|^2}\right)\vec{u}_1 + \left(\frac{\vec{u}_2\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}_2\|^2}\right)\vec{u}_2 + \left(\frac{\vec{u}_3\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}_3\|^2}\right)\vec{u}_3$
  - Standardbasen: $e_1 = (1, 0, 0)$ osv.
    - ON + pekar längs varje koordinataxel (därmed även högerorienterad)
  - Skalärprodukterna för baserna är $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ pga ortogonalitet och $\vec{u}_1^2 = 1$ pga normering, osv.
- Koordinatsystem = bas + origo
  - Ortsvektorn $\overrightarrow{OP}$ representerar punkt P och ursprung O samt riktningen mellan dessa.
- Basbyte: axlarna flyttas
  - Basbytesmatris: $P_{B\to C}[\vec{v}]_B = [\vec{v}]_C$ där $P_{B\to C}^{-1} = P_{C\to B}$.

<u>Spektralteori</u>

<u>Egen-</u>

- Egenvärde $\lambda \in \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$) och egenvektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ uppfyller likheten $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.
  - $A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow (\mathrm{A} - \lambda I) = \vec{0} \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$, vilket ger upphov

till en polynomekvation (kallat karakteriska polynomet) vars rötter är egenvärdena, som sätts in $(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$ för att hitta egenvektorerna.

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representerar exempelvis en linjär transformation $T: V \to V$, där V är ett n-dimensionellt vektorrum.

- Multiplicitet av egenvärden: [kontrollera]
  - Algebraisk: hur många gånger ett λ_i förekommer som **rot** i den karakteristiska ekvationen.
    - $\sum_i \text{Algebraisk m. av } \lambda_i = n$
  - Geometrisk: antalet linjärt oberoende egenvektorer för λ_i, således dimensionen av egenrummet till λ_i.
    - Geometrisk m. av $\lambda_i =$ Antalet lösningar till $(A-\lambda_i I)\vec{v}=\vec{0}$
  - → Geometrisk m. $\leq$ Algebraisk m.
  - Matris är diagonaliserbar omm
    a) geometrisk m. $<$ algebraisk m. för varje λ_i, eller ekvivalent
    b) det finns n linjärt oberoende egenvektorer.
- [egenrum]
- [egenbas]
- [diagonalisering]

Avbildningar

Avbildningar

- Avbildningar transformerar.
- Linjär:
  i. additivitet: $L(\vec{u}+\vec{v}) = L(\vec{u}) + L(\vec{v})$
  ii. homogenitet: $L(c\vec{u}) = cL(\vec{u})$
  - Linjär: $Y = AX$ där A är avbildningsmatrisen.
  - Affin: $Y = AX + B$. Däremot kallat linjär inom analysen.
- Geometriska exempel: skalning, töjning (skalar ena axeln), skjuvning, vridning, spegling, projektion.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

FIGUR 4: Rotation vinkeln θ kring x-axeln, y-axeln respektive z-axeln.

- Operatorer: vanligen definierat som avbildning från mängd (definitionsmängd) till sig själv (målmängd).