Rozwiązania zadań C04

Zad.1. Dana jest funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej X

x_i	-2	-1	2	5
$P(X = x_i) \coloneqq p(x_i)$	0,3	0,1	0,2	0,4

Wyznaczyć:
a) P(X=2), P(X<2), P(-2<X<3), b) i narysować dystrybuantę zm. los. X
c) wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej losowej X.
Rozw.

a) $P(X = 2) = p(2) = 0{,}2, \quad P(X < 2) = P(\{X = -2\} \cup \{X = -1\}) = p(-2) + p(-1) =$
$= 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$
$P(-2 < X < 3) = P(\{X = -1\} \cup \{X = 2\}) = P(X = -1) + P(X = 2) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3.$

b) Zmienna losowa X przyjmuje wartości $x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 5.$

W tych punktach obliczymy wartości dystrybuanty:

$$F(-2) = P(X \le -2) = p(-2) = 0{,}3$$

$$F(-1) = P(X \le -1) = p(-2) + p(-1) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$$

$$F(2) = P(X \le 2) = p(-2) + p(-1) + p(2) = 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}6$$

$$F(5) = P(X \le 5) = p(-2) + p(-1) + p(2) + p(5) = 0{,}6 + 0{,}4 = 1.$$

$x < -2 \implies F(x) = P(\emptyset) = 0$

$-2 \le x < -1 \implies F(x) = P(X = -2) = p(-2) = 0{,}3$

$-1 \le x < 2 \implies F(x) = P(X \in \{-2, -1\}) = p(-2) + p(-1) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$

$2 \le x < 5 \implies F(x) = P(X \in \{-2, -1, 2\}) = p(-2) + p(-1) + p(2) =$

$$= 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 = F(-1) + p(2) = 0{,}6$$

$x \ge 5 \implies F(x) = P(X \in \{-2, -1, 2{,}5\}) = F(2) + p(5) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < -2 \\ 0{,}3 & \text{dla} \quad -2 \le x < -1 \\ 0{,}4 & \text{dla} \quad -1 \le x < 2 \\ 0{,}6 & \text{dla} \quad 2 \le x < 5 \\ 1 & \text{dla} \quad x \ge 5 \end{cases}$$

Wykres dystrybuanty: plik pdf o nazwie dystrybuanty C04.
Uwaga: Jeśli dyskretna zm. losowa przyjmuje wartości:

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots,$$

to

$$P(X = x_k) = F(x_k) - F(x_{k-1}) \iff p(x_k) = F(x_k) - F(x_k^-), \qquad (*)$$

tzn. prawdopodobieństwo wartości x_k, czyli $p(x_k)$ = wielkość skoku dystrybuanty w punkcie x_k.

Uzasadnienie: $P(X \leq x_k) = P(\{s: X(s) \leq x_{k-1}\} \cup \{s: X(s) = x_k\}) =$

$$= P(\{s: X(s) \leq x_{k-1}\}) + P(\{s: X(s) = x_k\}) = P(X \leq x_{k-1}) + P(X = x_k)$$

Z definicji dystrybuanty otrzymujemy równość powyżej w postaci:

$$F(x_k) = F(x_{k-1}) + P(X = x_k) \qquad (1)$$

Można pokazać, że z własności prawdopodobieństwa $P(X < x_k) = F(x_k^-)$, a stąd (2):

$$F(x_{k-1}) = P(X \leq x_{k-1}) = P(X < x_k) = F(x_k^-) \quad (2)$$

Z (1) i (2) wynika (*).

c) Obliczymy wartość oczekiwaną $E(X)$ oraz wariancję $Var(X)$. Skorzystamy ze wzorów

$$E(X) := \sum_x x \cdot p(x), \qquad E\big(f(X)\big) := \sum_x f(x) \cdot p(x)$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 \cdot p(x), \qquad Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

W zadaniu:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p(x_i) = (-2) \cdot 0{,}3 + (-1) \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}4 = 1{,}7$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p(x_i) = (-2)^2 \cdot 0{,}3 + (-1)^2 \cdot 0{,}1 + 2^2 \cdot 0{,}2 + 5^2 \cdot 0{,}4 =$$

$$= 1{,}2 + 0{,}1 + 0{,}8 + 10 = 12{,}1$$

$$Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 12{,}1 - 1{,}7^2 = 12{,}1 - 2{,}89 = 9{,}21$$

Zad.2. Dana jest dystrybuanta F zmiennej losowej X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < -1 \\ 0{,}3 & \text{dla} \quad -1 \le x < 1 \\ 0{,}8 & \text{dla} \quad 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{dla} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Obliczyć wartość oczekiwaną, wariancję oraz odchylenie standardowe zmiennej losowej X.
Rozw.

Powyższa dystrybuanta jest funkcją przedziałami stałą o skokach w punktach

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2.$$

Stąd (uwaga w zad. 1) prawdopodobieństwa tych wartości są równe wielkości skoków dystrybuanty w tych punktach:

$$P(X = -1) = F(-1) - F(-1^-) = 0{,}3 - 0 = 0{,}3$$

$$P(X = 1) = F(1) - F(1^-) = 0{,}8 - 0{,}3 = 0{,}5$$

$$P(X = 2) = F(2) - F(2^-) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

Powyższy rozkład prawdopodobieństwa z. l. X można równoważnie zapisać w postaci tabeli:

x	-1	1	2
$p(x)$	0,3	0,5	0,2

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p(x_i) = (-1) \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}6$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p(x_i) = (-1)^2 \cdot 0{,}3 + 1^2 \cdot 0{,}1 + 2^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}8 = 1{,}2$$

$$Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = 1{,}2 - 0{,}6^2 = 1{,}2 - 0{,}36 = 0{,}84$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{0{,}84} = 0{,}916515$$

Zad.3. Zakupiono 10 nowych komputerów. Każdy komputer niezależnie od pozostałych może mieć jakieś usterki z prawdopodobieństwem p=0,1. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że są co najwyżej 2 komputery z wadami?
Następnie wybrano losowo 1 komputer i poddano go szczegółowym testom. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w badanej partii pozostałe komputery są bez wad, jeżeli testowany okazał się wadliwym?
Rozw.

- $n = 10$ niezależnych doświadczeń,
- $i - te$ doświadczenie: zakup/stan i-tego losowo zakupionego komputera
- wynik i-go doświadczenia określa zmienna losowa

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } i - ty \text{ komputer ma wady} \\ 0, & \text{jeśli } i - ty \text{ komputer ma usterki} \end{cases}$$

- $X := X_1 + X_2 + \dots + X_{10} =$ liczba komputerów z usterkami
- X ma rozkład dwumianowy z parametrami $n = 10, p = 0{,}1$:

$$X \sim \mathrm{Bin}(10; 0{,}1)$$

(i) należy obliczyć $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$Y \sim Bin(n, p) \quad \Leftrightarrow \quad P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0,1, \dots, n$$

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0{,}1^0 0{,}9^{10-0} = \frac{10!}{0!10!} \cdot 1 \cdot 0{,}9^{10} = 0{,}9^{10}$$

$$P(X = 1) = \binom{10}{1} 0{,}1^1 0{,}9^{10-1} = \frac{10!}{1!\,9!} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^9 = 10 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^9 = 0{,}9^9$$

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} 0{,}1^2 0{,}9^{10-2} = \frac{10!}{2!\,8!} \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}9^8 = \frac{10 \cdot 9}{2} 0{,}01 \cdot 0{,}9^8 = \frac{1}{2} 0{,}9^9$$

$$P(X \leq 2) = 0{,}9^{10} + 1{,}5 \cdot 0{,}9^9 = 0{,}9^9 \cdot 2{,}4 \cong 0{,}9298$$

(ii) Niech

- $A -$ losowo wybrany komputer jest wadliwy: $P(A) = 0{,}1$
- $B -$ pozostałe komputery są bez wad: $P(A \cap B) = 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot \ldots \cdot 0{,}9 = 0{,}1 \cdot 0{,}9^9$
- A, B są zdarzeniami niezależnymi (występowanie usterek w różnych komputerach są zdarzeniami niezależnymi)

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 0{,}9^9 \cong 0{,}3874$$

Zad.4. Obsługa działa artyleryjskiego ma 4 pociski. Cel zostaje zniszczony po dwukrotnym trafieniu. Prawdopodobieństwo trafienia do celu przy jednym wystrzale jest stałe i wynosi 0,9. Wyniki poszczególnych strzałów są od siebie niezależne. Strzelanie kończy się z chwilą zniszczenia celu albo wyczerpania pocisków. Wyznaczyć rozkład (funkcję) prawdopodobieństwa zm. losowej X równej liczbie oddanych strzałów. Naszkicować dystrybuantę zm. los. X. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby oddanych strzałów E(X).
Rozw.

Niech 1 oznacza strzał celny, 0 – „pudło”.

Zdarzenie elementarne s	$P(\{s\})$	$X(s)$
11	$0{,}81$	2
101	$0{,}81 \cdot 0{,}1$	3
1001	$0{,}81 \cdot 0{,}01$	4
011	$0{,}81 \cdot 0{,}1$	3
0101	$0{,}81 \cdot 0{,}01$	4
0011	$0{,}81 \cdot 0{,}01$	4
0000	$0{,}0001$	4
1000	$0{,}9 \cdot 0{,}001$	4
0100	$0{,}9 \cdot 0{,}001$	4
0010	$0{,}9 \cdot 0{,}001$	4
0001	$0{,}9 \cdot 0{,}001$	4

$$P(X=2)=0{,}81, \quad P(X=3)=2\cdot 0{,}81\cdot 0{,}1=0{,}162$$

$$P(X=4)=3\cdot 0{,}81\cdot 0{,}01+0{,}0001+4\cdot 0{,}9\cdot 0{,}001=0{,}028$$

Funkcję prawdopodobieństwa (rozkład zm. losowej X) określa tabela:

x	2	3	4
$p(x)$	0,81	0,162	0,028

Wyznaczymy dystrybuantę:

$$x<2 \Longrightarrow \ F(x)=0$$

$$2\le x<3 \quad \Longrightarrow F(x)=P(X=2)=p(2)=0{,}81$$

$$3\le x<4 \quad \Longrightarrow F(x)=p(2)+p(3)=0{,}81+0{,}162=0{,}972$$

$$x\ge 4 \Longrightarrow \quad F(x)=1$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x<2 \\ 0{,}81 & \text{dla } 2\le x<3 \\ 0{,}972 & \text{dla} \quad 3\le x<4 \\ 1 & \text{dla} \qquad x\ge 4 \end{cases}$$

Wykres dystrybuanty: plik pdf o nazwie dystrybuanty C04

$$E(X)=2\cdot 0{,}81+3\cdot 0{,}162+4\cdot 0{,}028=2{,}218$$

Zad.5. Prawdopodobieństwo, że wyprodukowany produkt poddawany próbie wytrzymałościowej nie wytrzyma jej wynosi p=0,01. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród 200 takich produktów co najwyżej 2 nie wytrzymają próby. Następnie przybliżyć to prawdopodobieństwo stosując przybliżenie Poissona.

Rozw.

Niech

- $X =$ liczba produktów wśród testowanych niezależnie 200-tu produktów, które nie przejdą próby
- $p = 0{,}01 =$ prawdopodobieństwo, że produkt nie przejdzie próby

$$X \sim \mathrm{Bin}(200; 0{,}01)$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = ?$$

(i)

- $P(X = 0) = \binom{200}{0} 0{,}01^0 \cdot 0{,}99^{200-0} = \frac{200!}{0!200!} \cdot 1 \cdot 0{,}99^{200} = 0{,}99^{200} = 0{,}1339797$

- $P(X = 1) = \binom{200}{1} 0{,}01^1 \cdot 0{,}99^{200-1} = \frac{200!}{1!199!} \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99^{199} = 200 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99^{199}$

$$= 2 \cdot 0{,}99^{199} = 0{,}2734000$$

- $P(X = 2) = \binom{200}{2} 0{,}01^2 0{,}99^{200-2} = \frac{200!}{2!198!} \cdot 0{,}01^2 \cdot 0{,}99^{198}$

$$= \frac{200 \cdot 199}{2} 0{,}01 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99^{198} = 1{,}99 \cdot 0{,}99^{198} = 0{,}272033$$

Odp. $P(X \leq 2) = 0{,}99^{198}(0{,}99^2 + 2 \cdot 0{,}99 + 1{,}99) \cong 0{,}67777$

(ii) **Przybliżenie Poissona**: Niech

$$X \sim Bin(n, p), \qquad Y \sim P(\lambda)$$

Jeśli $\lambda = np$, $n -$ duże , $p -$ małe, to stosujemy przybliżenie

$$P(X = k) \quad \approx \quad P(Y = k)$$

równoważnie:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx e^{-np} \frac{(np)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

- $\lambda = np = 200 \cdot 0{,}01 = 2$

$$P(X = 0) \approx e^{-2} \frac{2^0}{0!} = e^{-2} = 0{,}135335$$

$$P(X = 1) \approx e^{-2} \frac{2^1}{1!} = 2e^{-2} = 0{,}270671$$

$$P(X=2) \approx e^{-2}\frac{2^2}{2!} = 2e^{-2} = 0{,}270671$$

$$P(X \le 2) \approx 0{,}676677$$

	$p(k)$			$F(2)$
k	0	1	2	
Bin(200;0,01)	0,134	0,273	0,272	0,678
Poisson(2)	0,135	0,271	0,271	0,677

Zad.6. W celu oszacowania liczebności wymierających populacji ekolodzy wykorzystują często liczbę spotkanych przedstawicieli tego gatunku na danym terenie.
Przyjmując, że X (liczba kormoranów zarejestrowanych w ciągu tygodnia u wybrzeży Galapagos) ma rozkład Poissona, a średnia liczba spotkanych ptaków tego gatunku wynosi 1,8
a) określić funkcję prawdopodobieństwa dla tej zmiennej,
b) obliczyć prawdopodobieństwo spotkania więcej niż 3 ptaków tego gatunku w ciągu tygodnia.
c) Ile średnio ptaków możemy zobaczyć w ciągu 2 tygodni.
Rozw.

- $X =$ liczba ptaków zarejestrowanych w ciągu losowego tygodnia
- $E(X) = 1{,}8$
- $X \sim P(\lambda)$

$$X \sim P(\lambda) \quad \Longrightarrow \quad E(X) = \lambda$$

Z treści zadania oraz powyższej własności rozkładu Poissona mamy: $\lambda = 1{,}8$, więc

$$X \sim P(1{,}8)$$

$$Y \sim P(\lambda) \quad \Leftrightarrow^{def} \quad P(Y=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0,1,2\ldots$$

$$P(X=k) = e^{-1{,}8}\frac{1{,}8^k}{k!}, \quad k = 0,1,2, \ldots.$$

Funkcja prawdopodobieństwa zm. los. X:

$$p(k) = e^{-1{,}8}\frac{1{,}8^k}{k!}, \quad k = 0,1,2, \ldots.$$

b) $P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - e^{-1{,}8}\frac{1{,}8^0}{0!} - e^{-1{,}8}\frac{1{,}8^1}{1!} -$

$$e^{-1,8}\frac{1,8^2}{2!} - e^{-1,8}\frac{1,8^3}{3!} = 1 - e^{-1,8}\cdot\left(1 + 1,8 + \frac{1,8^2}{2} + \frac{1,8^3}{6}\right) \cong 1 - 0,89129 = 0,10871.$$

c) Średnia liczba ptaków, które można spotkać w ciągu 2 tygodni to $2 \cdot E(X) = 2 \cdot 1,8 = 3,6$.

Zad.7. Ocenia się, że jedynie 2% losowo wybranych internautów odpowie na pewną ankietę rozsyłaną e-mailowo. Rozesłano tę ankietę do 400 losowo wybranych internautów. Podać wartość prawdopodobieństwa, że otrzymamy co najmniej 10 odpowiedzi. Podać wartość przybliżoną tego prawdopodobieństwa. Ile (średnio) można oczekiwać odpowiedzi?
(Wsk. Zastosować przybliżenie Poissona).

Rozw.
Niech

- $X =$ liczba internautów spośród 400-tu wylosowanych, którzy odpowiedzą na ankietę
- $p = 0,02 =$ prawdopodobieństwo, że internauta odpowie na ankietę

$$X \sim \mathrm{Bin}(400; 0,02)$$

$$P(X \geq 10) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) \\ + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) + P(X=9))$$

(a) dokładny wzór:

$$P(X \geq 10) = 1 - \sum_{k=0}^{9} \binom{400}{k} 0,02^k 0,98^{400-k} = 1 - 0,717888$$

(b) przybliżenie Poissona:

$$P(X \geq 10) \approx 1 - \sum_{k=0}^{9} e^{-8}\frac{8^k}{k!} = 1 - 0,716634$$

(c) Średnia liczba odpowiedzi $E(X) = 400 \cdot 0,02 = 8$.