Rozwiązania zadań C05

Zad.1. Zmienna losowa *X* ma rozkład typu ciągłego z gęstością *f* postaci:

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{dla } x \in [2.6] \\ 0 & \text{dla } x \notin [2,6] \end{cases}$$

a) Ile wynosi wartość parametru *A*?
b) Znaleźć dystrybuantę zmiennej losowej *X* i narysować jej wykres.
c) Obliczyć: $P(X \leq 5)$, $P(X > 3)$, $P(X = 3)$, $P(1 \leq X \leq 4)$.
d) Zinterpretować obliczone w punkcie c) prawdopodobieństwa na wykresach gęstości i dystrybuanty zmiennej losowej *X*

Rozw.

a) Gęstość zmiennej losowej typu ciągłego (ciągłej zmiennej losowej) spełnia warunki
(1) $f(x) \geq 0$
(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
W zadaniu

$$(1) \quad f(x) \geq 0 \iff A \geq 0$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \iff \int_{2}^{6} Adx = A(6-2) = 4A = 1 \iff A = \frac{1}{4}.$$

Uzasadnienie (2)

$$(-\infty, \infty) = (-\infty, 2) \cup [2,6] \cup (6, \infty)$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{2} 0dx + \int_{2}^{6} Adx + \int_{6}^{\infty} 0dx = \int_{2}^{6} Adx = Ax|_2^6 = A(6-2) = 4A$$

Odp. a) $A = 1/4$.

b)

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = ?$$

Należy rozpatrzyć 3 przypadki:

1) $x < 2 \implies F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

2) $2 \leq x \leq 6 \implies F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{2} 0dt + \int_{2}^{x} \frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}(x-2)$

3) $x \geq 6 \implies F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{2} 0dt + \int_{2}^{6} \frac{1}{4}dt + \int_{6}^{x} 0dt = F(6) + 0 = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 2 \\ 0{,}25\,(x-2) & \text{dla} \quad 2 \le x < 6 \\ 1 & \text{dla} \quad x \ge 6 \end{cases}$$

Wykres dystrybuanty: str. 9.

c) $P(X \le 5) = F(5) = 0{,}25(5-2) = 0{,}75,$

$P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - F(3) = 1 - 0{,}25(3-2) = 0{,}75$

$P(X = 3) = 0$

$P(1 \le X \le 4) = F(4) - F(1) = 0{,}25(4-2) - 0 = 0{,}5$

d) Interpretacja prawdopodobieństw z c) na wykresach gęstości i dystrybuanty: str. 9.

Zad.2. Dla jakiej wartości parametru A następująca funkcja

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}5 & \text{dla} \quad x\in[-1{,}0) \\ A(x-1) & \text{dla} \quad x\in[0{,}1) \\ 0 & \text{dla} \quad x\notin[-1{,}1] \end{cases}$$

jest gęstością rozkładu zmiennej losowej? Znaleźć dystrybuantę rozkładu tej zmiennej losowej.

.

Rozw. Funkcja $f(x), x\in(-\infty,\infty)$, jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\Leftrightarrow$

(1) $f(x)\geq 0$ oraz (2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1.$

W zadaniu

(1) $\Leftrightarrow$ $A\leq 0$

(2) $\Leftrightarrow$

$$1=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{-1} 0dx+\int\limits_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx+\int\limits_{0}^{1} A(x-1)\,dx+\int\limits_{1}^{\infty} 0dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} 1dx+\int\limits_{0}^{1} Axdx-\int\limits_{0}^{1} Adx=\frac{1}{2}+A\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-A=\frac{1}{2}+A\left(\frac{1}{2}-0\right)-A$$

$$\Leftrightarrow\ 1=\frac{1}{2}-\frac{A}{2}\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2}=\frac{-A}{2}\ \Leftrightarrow\ A=-1$$

$$f(t)=\begin{cases} 0{,}5 & \text{dla} \quad t\in[-1{,}0) \\ 1-t & \text{dla} \quad t\in[0{,}1) \\ 0 & \text{dla} \quad t\notin[-1{,}1] \end{cases}$$

Należy rozważyć 4 przypadki:

1) $x<-1 \implies F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0$

2) $-1\leq x\leq 0 \implies F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{-1} 0dt+\int_{-1}^{x}\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}(x+1)$

3) $0\leq x\leq 1 \implies F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x}(1-t)\,dt=$

$$=F(0)+\int\limits_{0}^{x} dt-\int\limits_{0}^{x} t\,dt=\frac{1}{2}+x-\frac{t^2}{2}\Big|_0^x=\frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}$$

4) $x \geq 1 \implies F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} 0dt = F(1) + 0 = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & dla & x < -1 \\ 0{,}5(x+1) & dla & -1 \leq x < 0 \\ 0{,}5 + x - 0{,}5x^2 & dla & 0 \leq x < 1 \\ 1 & dla & x \geq 1 \end{cases}$$

Zad.3.
Zmienna losowa *X* ma rozkład typu ciągłego z gęstością f postaci:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{dla} & x \in [-1,0) \\ x & \text{dla} & x \in [0,1) \\ 0 & \text{dla} & x \notin [-1,1] \end{cases}$$

a) Znaleźć dystrybuantę zmiennej losowej X i narysować jej wykres.
b) Obliczyć prawdopodobieństwo

$$P\left(\left|X - \frac{1}{8}\right| < \frac{5}{8}\right).$$

.
c) Wyznaczyć wartość oczekiwaną E(X), medianę oraz odchylenie standardowe σ_X.
Rozw.
a)
Należy rozważyć 4 przypadki:

1) $x < -1 \implies F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

2) $-1 \leq x \leq 0 \implies F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{x} \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}(x+1)$

3) $0 \leq x \leq 1 \implies F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} t\, dt =$

$$= F(0) + \int_{0}^{x} dt = \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2}\Bigg|_{0}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}$$

4) $x \geq 1 \implies F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} 0dt = F(1) + 0 = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & dla & x < -1 \\ 0{,}5(x+1) & dla & -1 \leq x < 0 \\ 0{,}5 + 0{,}5x^2 & dla & 0 \leq x < 1 \\ 1 & dla & x \geq 1 \end{cases}$$

Wykres dystrybuanty - str. 10.
b) skorzystamy z nierówności dla dowolnej liczby a oraz $b > 0$:

$$|a| < b \iff -b < a < b.$$

$$P\left(\left|X-\frac{1}{8}\right|<\frac{5}{8}\right)=P\left(-\frac{5}{8}<X-\frac{1}{8}<\frac{5}{8}\right)=P\left(-\frac{4}{8}<X<\frac{6}{8}\right)=P\left(-\frac{1}{2}<X<\frac{3}{4}\right)=$$

$$=F(0{,}75)-F(-0{,}5)=0{,}5+0{,}5\cdot 0{,}75^2-\big(0{,}5\cdot(-0{,}5+1)\big)=0{,}53125$$

c)

$$f(x)=\begin{cases}1/2 & \text{dla} \quad x\in[-1{,}0)\\ x & \text{dla} \quad x\in[0{,}1)\\ 0 & \text{dla} \quad x\notin[-1{,}1]\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{-1}^{0} x\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{1} x^2\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^{0}+\frac{x^3}{3}\bigg|_{0}^{1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{0^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}\right)+$$

$$+\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}.$$

Mediana zmiennej losowej typu ciągłego spełnia równanie: $F\big(q_{0,5}\big)=\frac{1}{2}$.

$$F(x)=\begin{cases}0 & dla & x<-1\\ 0{,}5(x+1) & dla & -1\le x<0\\ 0{,}5+0{,}5x^2 & dla & 0\le x<1\\ 1 & dla & x\ge 1\end{cases}$$

Z postaci mediany mamy

$$F(0)=0{,}5 \quad\Longrightarrow\quad q_{0,5}=0.$$

$Var(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2=?$

$$f(x)=\begin{cases}1/2 & \text{dla} \quad x\in[-1{,}0)\\ x & \text{dla} \quad x\in[0{,}1)\\ 0 & \text{dla} \quad x\notin[-1{,}1]\end{cases}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx=\int_{-1}^{0} x^2\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{1} x^3\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{0}+\frac{x^4}{4}\bigg|_{0}^{1}=\frac{1}{2}\left(\frac{0^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right)+\left(\frac{1^4}{4}-\frac{0^4}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}.$$

$$Var(X)=\frac{5}{12}-\left(\frac{1}{12}\right)^2=\frac{1}{12}\left(5-\frac{1}{12}\right)=0{,}40972$$

$$\sigma_X=\sqrt{Var(X)}=0{,}640095$$

Zad.4. Dystrybuanta *F* zmiennej losowej *X* jest dana wzorem:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad x<5\\ 0{,}1\,(x-5) & \text{dla} \quad 5\le x<15\\ 1 & \text{dla} \quad x\ge 15\end{cases}$$

a) Wyznaczyć gęstość f rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.
b) Obliczyć prawdopodobieństwo

$$P(|X-10|>1).$$

c) Wyznaczyć wartość oczekiwaną $E(X)$ oraz odchylenie standardowe σ_X.
Rozw.
a)

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x)=\begin{cases}0' & \text{dla} \quad x<5\\ 0{,}1\,(x-5)' & \text{dla} \quad 5\le x<15\\ 1' & \text{dla} \quad x\ge 15\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad x<5\\ 0{,}1 & \text{dla} \quad 5\le x<15\\ 0 & \text{dla} \quad x\ge 15\end{cases}$$

b)

$$P(|X-10|>1)=1-P(|X-10|\le 1)=1-P(-1\le X-10\le 1)=$$

$$=1-P(9\le X\le 11)=1-P(9<X\le 11)=1-(F(11)-F(9))=$$

$$1-0{,}1(11-5)+0{,}1(9-5)=0{,}8.$$

c)

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_5^{15}0{,}1x\,dx=\frac{1}{10}\frac{x^2}{2}\Big|_5^{15}=\frac{1}{10}\frac{15^2-5^2}{2}=10$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_5^{15}x^2\cdot 0{,}1dx=\frac{1}{10}\frac{x^3}{3}\Big|_5^{15}=\frac{1}{10}\frac{15^3-5^3}{3}=\frac{325}{3}$$

$$Var(X)=\frac{325}{3}-100=\frac{25}{3}=\frac{100}{12}\implies \sigma_X=\sqrt{\frac{100}{12}}=\frac{10}{2\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}=2{,}8867.$$

Uwaga.
W punkcie c) można od razu uzyskać odpowiedź, jeśli zauważymy, że $X\sim U(5{,}15)$.

Wówczas $E(X)=\frac{5+15}{2}=10$, $Var(X)=\frac{(15-5)^2}{12}=\frac{10^2}{12}$.

Zad.5. Serwer wyposażony jest w dwa dyski twarde, z których jeden jest zapasowy (gorąca rezerwa) i przejmuje funkcje dysku głównego w chwili uszkodzenia drugiego z nich. Niech X oznacza czas bezawaryjnej pracy pojedynczego dysku (w miesiącach). Załóżmy, że gęstość zmiennej losowej X ma postać

$$f(x) = \begin{cases} cxe^{-x/2} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$$

Ile wynosi prawdopodobieństwo, ze system będzie działał bezawaryjnie przez co najmniej przez 5 miesięcy?

Rozw. Niech

- X - czas poprawnej pracy dysku głównego
- Y - czas poprawnej pracy dysku zapasowego
- T - czas bezawaryjnej pracy systemu

$$T = \max\{X, Y\}$$

$$P(T \geq 5) = 1 - P(T < 5) = 1 - P(\max\{X, Y\} < 5) =$$

$$= 1 - P(\{X < 5\} \cap \{Y < 5\}) = 1 - P(X < 5)P(Y < 5)$$

$$P(X < 5) = P(Y < 5) = \int_0^5 cxe^{-x/2} dx = ?, \quad c = ?$$

Wzór na całkowanie przez części:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Zauważmy: $\frac{d}{dx} e^{-x/2} = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \quad \Longrightarrow \quad e^{-\frac{x}{2}} = -2 \frac{d}{dx} e^{-x/2}$

Niech $A > 0$ będzie dowolną stałą.

$$\int_0^A cxe^{-x/2} dx = c \int_0^A xe^{-x/2} dx = c \int_0^A -(2) \frac{d}{dx} e^{-x/2} \cdot x dx =$$

$$= -2c \left(Ae^{-\frac{A}{2}} - 0 - \int_0^A e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{d}{dx} x dx \right) = -2Ace^{-\frac{A}{2}} + 2c \int_0^A e^{-\frac{x}{2}} dx =$$

$$= -2Ace^{-\frac{A}{2}} + 2c \left(2 - 2e^{-\frac{A}{2}} \right),$$

gdzie podstawiliśmy poniższą całkę.

$$\int_0^A e^{-\frac{x}{2}} dx = \int_0^A (-2) \frac{d}{dx} e^{-\frac{x}{2}} dx = -2\, e^{-\frac{x}{2}} \Big|_0^A = -2 \left(e^{-\frac{A}{2}} - e^0 \right) = 2 - 2e^{-\frac{A}{2}}.$$

Wyznaczymy stałą c.

$$1 = \int_0^\infty cxe^{-x/2}dx = \lim_{A\to\infty}\int_0^A cxe^{-x/2}dx = \lim_{A\to\infty}\left(-2Ace^{-\frac{A}{2}} + 2c\left(2 - 2e^{-\frac{A}{2}}\right)\right) = 4c$$

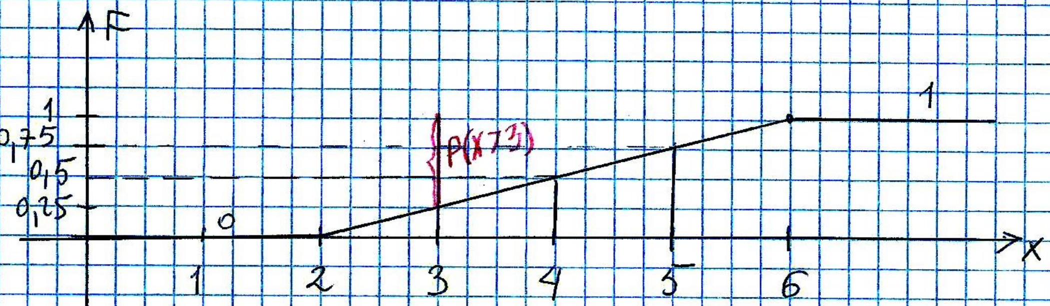
$$4c = 1 \quad \Longrightarrow \quad c = 0{,}25.$$

$$P(X < 5) = P(Y < 5) = \int_0^5 0{,}25xe^{-x/2}dx = 0{,}25(-2\cdot 5e^{-2{,}5} + 4 - 4e^{-2{,}5}) =$$

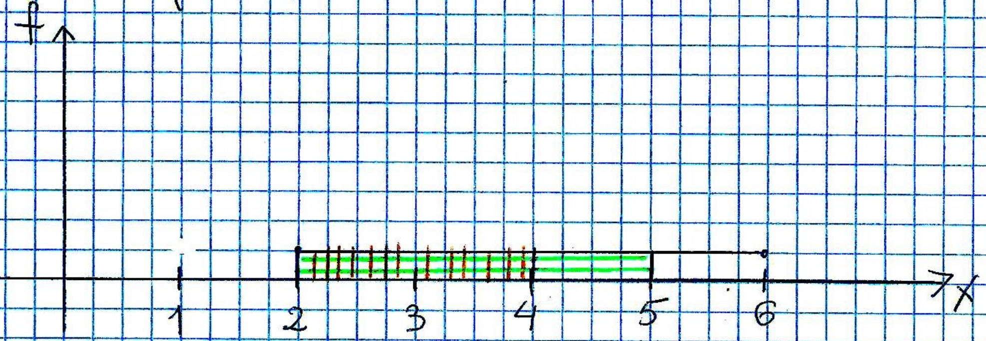
$$= -2{,}5e^{-2{,}5} + 1 - e^{-2{,}5} = 1 - 3{,}5e^{-2{,}5}$$

$$P(T \geq 5) = 1 - P(X < 5)P(Y < 5) = 1 - (1 - 3{,}5e^{-2{,}5})^2 = 0{,}492055$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 0{,}25x - 0{,}5, & 2 \le x < 6 \\ 1, & x \geq 6 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 0{,}25, & 2 \le x \le 6 \\ 0, & x > 6 \end{cases}$$



$P(X \le 5) =$ pole $\langle 2,5\rangle \times \langle 0;\, 0{,}25\rangle =$

$P(X > 3) =$ pole $\langle 3,6\rangle \times \langle 0;\, 0{,}25\rangle$

$P(1 \le X \le 4) = P(X \le 4) =$ pole $\langle 2,4\rangle \times \langle 0;\, 0{,}25\rangle$

$=$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0{,}5(x+1), & -1 \leq x < 0 \\ 0{,}5 + 0{,}5x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geqslant 1 \end{cases}$$