ZMIENNE LOSOWE

PRZYKŁADY ZMIENNYCH TYPU CIĄGŁEGO

Rozkład jednostajny

Definicja

Zmienną losową X nazywamy zmienną losową o **rozkładzie jednostajnym na przedziale** $[a, b]$, $a, b \in R$, $a < b$, oznaczamy $X \sim U(a, b)$, jeśli jej gęstość jest stała na $[a, b]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dla} \quad a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{dla} \quad x < a \vee x > b. \end{cases}$$

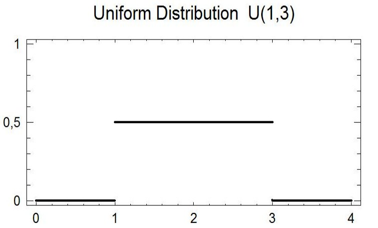
Nośnikiem X jest przedział $\mathcal{X} = [a, b]$.
Dla wszystkich $x \in \mathcal{X}$ dystrybuanta

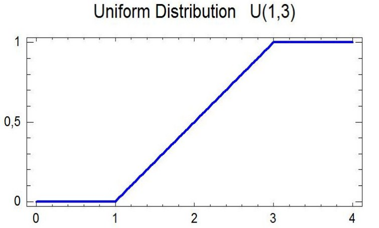
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} du = \frac{x-a}{b-a}.$$

Zatem dystrybuanta zm. los. o rozkładzie jednostajnym $X \sim U(a, b)$ jest dana wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{dla} \quad a \leqslant x < b \\ 1 & \text{dla} \quad b \leqslant x. \end{cases}$$

Poniżej jako przykładowe podano wykresy gęstości i dystrybuanty dla $X \sim U(1, 3)$.





Nośnik $\mathcal{X} = [a, b]$ zdefiniowany jest za pomocą dwóch parametrów a i b, które są wartościami najmniejszymi i największymi X odpowiednio.
Innymi słowy, **rozkład jednostajny jest takim rozkładem ciągłym, dla którego każdy przedział o tej samej długości, zawarty w nośniku, ma to samo prawdopodobieństwo**, tzn.

$$P(a \leqslant X \leqslant a + \Delta x) = P(x \leqslant X \leqslant x + \Delta x) \ \text{dla} \ x \in (a, b - \Delta x]$$

lub

$$F(a + \Delta x) - F(a) = F(x + \Delta x) - F(x).$$

Jeśli obie strony ostatniej równości podzielić przez Δx oraz przejść do granicy przy $\Delta x \to 0$, to otrzymamy

$$F'(x) = f(x) = const \ \text{dla wszystkich} \ x \in (a, b).$$

Wynika stąd, że gęstość jest równa $\frac{1}{b-a}$ dla $x \in [a, b]$.

Twierdzenie 1.
Dla dowolnego $k \in \mathcal{N}$ istnieje k-ty moment zwykły zm. los. $X \sim U(a, b)$

$$m_k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} a^i b^{k-i}.$$

W szczególności

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \quad \text{oraz} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Dowód.
k-ty moment jest równy

$$\begin{aligned} m_k &= E[X^k] = \int_a^b x^k \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_a^b = \\ &= \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(b-a)(k+1)} = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} a^i b^{k-i}. \end{aligned}$$

Zatem $m_1 = \frac{a+b}{2}$ oraz $m_2 = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$,

$$V(X) = m_2 - (m_1)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

■

Przykład

Począwszy od godziny 6:00, w odstępach 20-minutowych, autobusy przyjeżdżają na określony przystanek Czas przyjścia pasażera na ten przystanek jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale od 7:00 do 7:40. Znaleźć prawdopodobieństwo, że czas oczekiwania na autobus wyniesie

(a) mniej niż 10 minut,

(b) co najmniej 15 minut.

Rozwiązanie.

Niech X oznacza czas przyjścia pasażera na przystanek. X ma rozkład jednostajny na [7:00,7:40]. Czas oczekiwania na autobus będzie krótszy od 10 minut jeśli przyjdzie on pomiędzy 7:10 a 7:20 lub pomiędzy 7:30 a 7:40. Zatem prawdopodobieństwo (a) jest równe

$$P(7:10 \leqslant X \leqslant 7:20) + P(7:30 \leqslant X \leqslant 7:40) = \frac{10}{40} + \frac{10}{40} = \frac{1}{2}.$$

Dla (b), podobnie, czas oczekiwania przekroczy 15 minut, jeśli przyjdzie pomiędzy 7:00 a 7:05 lub 7:20 a 7:25. Zatem

$$P(7:00 \leqslant X \leqslant 7:05) + P(7:20 \leqslant X \leqslant 7:25) = \frac{5}{40} + \frac{5}{40} = \frac{1}{4}.$$

Rozkład normalny

Rozkład normalny jest jednym z najważniejszych rozkładów prawdopodobieństwa w rachunku prawdopodobieństwa i statystyce matematycznej.

Krzywa Gaussa, która jest gęstością rozkładu normalnego, charakteryzuje rozkład błędów losowych, powstających przy pomiarach na skutek nakładania się wielu niezależnych przyczyn.

Rozkład normalny, po raz pierwszy został wprowadzony przez francuskiego matematyka Abrahama de Moivre'a w 1733 roku i użyty przez niego do przybliżania prawdopodobieństw w schemacie Bernoulliego w przypadku, gdy liczba doświadczeń n jest duża.

Wynik ten został później uogólniony przez Laplace'a oraz innych matematyków na inne modele i nosi nazwę **Centralnego Twierdzenia Granicznego**, które daje teoretyczne podstawy do tego, aby przynajmniej w przybliżeniu, można byłoby używać modelu normalnego w wielu praktycznych zastosowaniach.

Definicja

Zmienna losowa X ma **rozkład normalny** z parametrami μ i σ, gdzie $\mu \in R$ a $\sigma > 0$, oznaczamy $X \sim N(\mu, \sigma)$, jeżeli jej funkcja gęstości ma postać

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad x \in R.$$

Twierdzenie 2.
Wartością oczekiwaną zmiennej losowej o rozkładzie normalnym $X \sim N(\mu, \sigma)$ jest

$$E(X) = \mu.$$

Wariancja jest równa

$$V(X) = \sigma^2,$$

zatem σ jest odchyleniem standardowym.

Twierdzenie 3.
Jeżeli $X \sim N(\mu, \sigma)$, to dla dowolnych $a \neq 0$ i $b \in R$ zm.los. $Y = aX + b$ ma rozkład normalny $Y \sim N(a\mu + b, |a|\sigma)$.
W szczególności,

$$Y^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Bezpośrednio z definicji gęstości normalnej mamy, że parametr μ jest parametrem położenia a σ parametrem skali.

Najprostsza postać rozkładu normalnego (dla $\mu = 0$ oraz $\sigma=1$) nosi nazwę standardowego rozkładu normalnego.

Definicja

Zmienną losową $U \sim N(0,1)$ nazywamy zm. los. o **standardowym rozkładzie normalnym** z gęstością

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

oraz dystrybuantą

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt \quad x \in R.$$

Funkcja $\Phi(x)$ nie może być uzyskana przy pomocy całkowania elementarnego.

Wartości funkcji $\Phi(x)$ uzyskujemy przy pomocy metod numerycznych całkowania, a sama funkcja jest stablicowana dla różnych wartości x.

Ponieważ funkcja $e^{-\frac{1}{2}t^2}$ jest funkcją parzystą, to rozkład jest symetryczny a funkcja $\Phi(x)$ spełnia równanie

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \;\text{ dla wszystkich }\; x \geqslant 0,$$

które pozwala na jej stablicowanie jedynie dla argumentów $x \geqslant 0$.

Z twierdzenia 3. mamy, że dystrybuanta F dowolnego rozkładu normalnego może być wyrażona za pomocą dystrybuanty rozkładu standardowego.

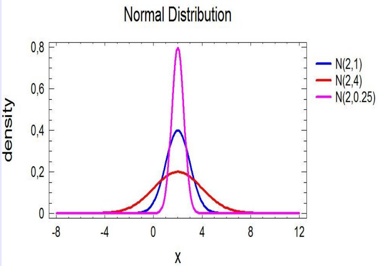
Mianowicie, jeżeli $X \sim N(\mu, \sigma)$, to dla dowolnego $x \in R$ mamy

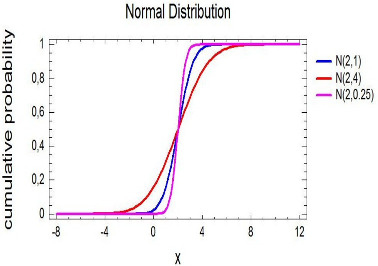
Dystrybuanta rozkładu normalnego

$$F(x) = P(X \leqslant x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

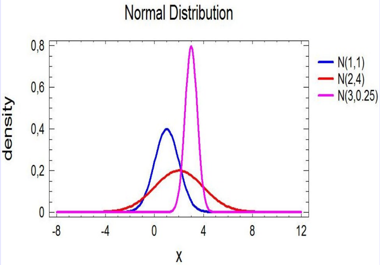
Wykres gęstości normalnej nazywany jest krzywą Gaussa lub ze względu na swój kształt - krzywą "dzwonową".

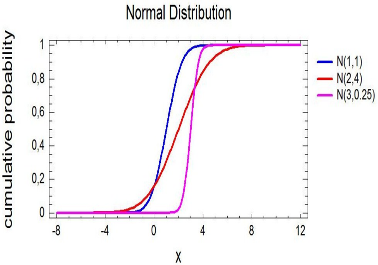
Wykresy gęstości i dystrybuant dla rozkładów normalnych z parametrami $\mu = 2$ oraz $\sigma = 1, 2, 0.5$.





Wykresy gęstości i dystrybuant dla rozkładów normalnych dla różnych wartości parametru położenia $\mu = 1, 2, 3$ oraz skali $\sigma = 1, 2, 0.5$.





Przykład

Dla $X \sim N(\mu, \sigma)$ wyznaczyć prawdopodobieństwo $P(|X-\mu| \leqslant k\sigma)$, $k = 1, 2, 3$.

Rozwiązanie.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} P(|X-\mu| \leqslant k\sigma) &= P\left(-k \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant k\right) = \\ &= \Phi(k) - \Phi(-k) = 2\Phi(k) - 1. \end{aligned}$$

Z tablic dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego mamy

$$P(|X-\mu| \leqslant k\sigma) = \begin{cases} 0.6826 & \text{dla} \quad k = 1 \\ 0.9544 & \text{dla} \quad k = 2 \\ 0.9974 & \text{dla} \quad k = 3. \end{cases}$$

Rozkład wykładniczy

Kluczową własnością zmiennej losowej o rozkładzie wykładniczym jest to, że jest nieujemną zmienną losową typu ciągłego posiadającą własność "braku pamięci".

Mówimy, że nieujemna zmienna losowa X ma własność braku pamięci, jeżeli dla dowolnych $s, t \geqslant 0$

Własność braku pamięci

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s).$$

Aby zrozumieć, dlaczego powyższe równanie opisuje własność braku pamięci, załóżmy, że zmienna losowa X opisuje czas bezawaryjnej pracy pewnego urządzenie do chwili pierwszej awarii.

Rozważmy prawdopodobieństwo zdarzenia, że urządzenie działające w chwili t będzie działało co najmniej przez dodatkowy czas s.

Oznacza to, że całkowity czas pracy urządzenia będzie co najmniej $t+s$ pod warunkiem, ze urządzenie działało w chwili t.

Zatem własność braku pamięci oznacza, że rozkład dodatkowego czasu pracy w "wieku" t, jest taki sam jak urządzenia nowego lub mówiąc innymi słowy, jeżeli urządzenie jest sprawne, to nie pamięta jak długo pracowało i jest tak samo dobre jak urządzenie nowe.

Ponieważ $P(X > s+t, X > t) = P(X > s+t)$, to równanie opisujące brak pamięci jest równoważne równaniu

$$P(X > s+t) = P(X > s)P(X > t)$$

Zdefiniujmy tzw. "ogon" dystrybuanty $Q(t) = P(X > t)$. Funkcja ogonowa jest nierosnąca oraz $Q(0) = 1$. Wówczas

$$Q(t+s) = Q(t)Q(s).$$

Stąd otrzymujemy

$$Q(t+s) - Q(t) = Q(t)(Q(s) - Q(0)).$$

Dzieląc obie strony przez s oraz przechodząc do granicy przy $s \to 0$ otrzymujemy liniowe równanie różniczkowe na Q z warunkiem początkowym.

$$Q^{'}(t) = -\lambda Q(t), \quad Q(0) = 1,$$

gdzie λ jest stałą dodatnią. Wówczas dla $t > 0$ mamy $Q(t) = e^{-\lambda t}$, a gęstość zm. los. X jest równa $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

Definicja

Zmienną losową X typu ciągłego o gęstości

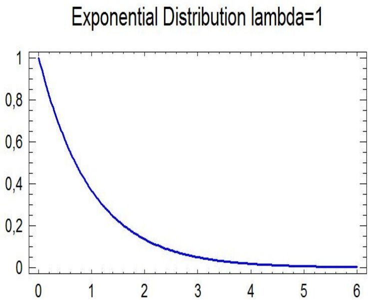
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

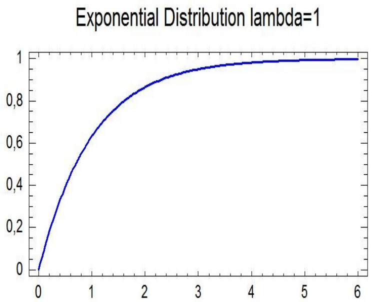
dla pewnego $\lambda > 0$ nazywamy zmienną losową o **rozkładzie wykładniczym** z parametrem $\lambda > 0$ i oznaczamy przez $X \sim Exp(\lambda)$.

Dystrybuanta zm. los. o rozkładzie wykładniczym jest równa

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{dla} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Poniżej podano wykresy gęstości oraz dystrybuanty zmiennej losowej $X \sim Exp(1)$.





Przykład

Załóżmy, że dystans, który przejedzie samochód do chwili jego złomowania jest zm. los. o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda = \frac{1}{20}$. Pan A, który sprzedaje samochód, twierdzi, że auto przejechało 10 000 mil. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kupujący je od pana A pan B przejedzie tym samochodem jeszcze dodatkowo co najmniej 20 000 mil? Powtórzyć obliczenia przy założeniu, że rozkład prawdopodobieństwa przejechanego dystansu do chwili złomowania (w tysiącach mil) jest rozkładem jednostajnym $U(0, 40)$.

Rozwiązanie.

Z własności braku pamięci rozkładu wykładniczego mamy, że dystans przejechany po sprzedaży samochodu (w tysiącach mil) będzie miał również rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = \frac{1}{20}$.

Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$P(X > 20) = 1 - (1 - e^{-\frac{20}{20}}) = e^{-1} = 0,36788,$$

gdzie X oznacza zm. los. "czasu życia" (przejechanego dystansu) samochodu.

Jeżeli czas życia nie ma rozkładu wykładniczego, a jedynie rozkład jednostajny $X \sim U(0,40)$, to szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$P(X > 20 + 10 | X > 10) = \frac{P(X > 30)}{P(X > 10)} = \frac{1 - F(30)}{1 - F(10)} = \frac{1}{3}.$$