Statystyczna analiza danych SAD-2018

Wykład 2

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

(MODELE PROBABILISTYCZNE)

Definicja 1

Doświadczenie losowe:

- może być powtarzane w tych samych warunkach,
- wynik nie jest znany przed wykonaniem doświadczenia,
- znany jest zbiór wszystkich możliwych wyników - opisany przed przeprowadzeniem doświadczenia.

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Przykłady:

Doświadczenie	**Wyniki**
podanie lekarstwa	{leczy, nie leczy}
czas życia elementu (np. procesora)	$[0, \infty)$
czas naprawy elementu	$[0, \infty)$
liczba błędów w aplikacji	{0,1,2,...}
liczba orłów w 100 rzutach monetą	{0,1,2,...,100}
liczba samochodów na autostradzie w godzinach szczytu	{0,1,2,...}

Definicja 2

- **Przestrzenią zdarzeń elementarnych** (przestrzenią próbkową) nazywamy zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego i oznaczamy symbolem S.
- **Zdarzeniem elementarnym** nazywamy każdy element przestrzeni S ($s \in S$); s - niepodzielny (pojedynczy) wynik doświadczenia losowego.
- **Zdarzenie to** podzbiór przestrzeni S ($A \subset S$, $B \subset S$).
- **Zdarzenie** A **zaszło**, gdy wynik doświadczenia losowego (zdarzenie elementarne) jest elementem zbioru A.

Przykłady:

- Rzut monetą: $S = \{O , R\}$ - skończona,

  Podzbiory S (zdarzenia): $\varnothing$, $\{O\}$, $\{R\}$, S.

- Podwójny rzut kostką sześcienną:

  $S = \{(i, j): i, j = 1,2,\ldots,6\}$ - skończona.

  Np. $A = \{$suma oczek nieparzysta mniejszych od $6\}$

  $= \{ (1,2), (1,4), (3,2), (2,1), (4,1), (2,3) \}$.

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

- Czas obsługi klienta w systemie masowej obsługi

  (np. sieć telefoniczna, komputerowa, czas mierzony w min.):

  $S = [0, \infty)$ - nieskończona, nieprzeliczalna.

  Zdarzenia – podprzedziały S, np.: $A = [0, 5)$, $B = [0, T)$,

  $C = [0, \infty)$, (A = {obsługa klienta trwa krócej niż 5 min.})

- Liczba awarii urządzenia w określonym czasie:

  $S = \{0,1,2,...\}$ - nieskończona, przeliczalna.

Zdarzenia utożsamiamy ze zbiorami stąd:

rachunek zdarzeń $\Leftrightarrow$ **rachunek zbiorów.**

Definicja 3

- **Zdarzenie przeciwne do** A $\Leftrightarrow$ dopełnienie zbioru A
$$A' = S - A$$
- **Iloczyn zdarzeń** A i B $\Leftrightarrow$ iloczyn zbiorów A i B
$$A \cap B$$
- **Suma zdarzeń** A i B $\Leftrightarrow$ suma zbiorów A i B:
$$A \cup B$$
- **Różnica zdarzeń** A i B $\Leftrightarrow$ różnica zbiorów A i B:
$$A - B$$

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

- Zdarzenia A i B **wzajemnie się wykluczają,** jeśli $A \cap B = \varnothing$, gdzie $\varnothing$ jest zbiorem pustym.

- **Zajście zdarzenia** A **pociąga za sobą zajście zdarzenia** *B*, jeśli $A \subset B$

.

- **Diagramy Venna -** ilustracja działań na zdarzeniach.

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Definicja 4

Zdarzenia $A_1, A_2, A_3, \ldots$ **wzajemnie się wykluczają**, jeśli dowolne dwa zdarzenia A_i oraz A_j, $i \neq j$, wzajemnie się wykluczają: $A_i \cap A_j = \emptyset$, dla dowolnych $i, j, i \neq j$.

Uwaga

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A)$$

$$A - B = A \cap B' \qquad B - A = B \cap A'.$$

,

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Eksperyment Karla Pearsona (1857-1936):

Wykonał 24 000 rzutów monetą. Częstość wyrzucenia orła wyniosła

n/N = 0,5005

Szansa (**prawdopodobieństwo**) zajścia zdarzenia A = graniczna częstość wystąpienia, A przy nieograniczenie rosnącej liczbie powtórzeń doświadczenia losowego.

<u>Definicja 5</u> (aksjomatyczna prawdopodobieństwa, A. Kołmogorow, 1933)

(A1) Dla każdego $A, A \subset S,$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

(A2) $P(S) = 1, \qquad P(\emptyset) = 0$

(A3) Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, A_3, \ldots$ wzajemnie się wykluczają, to

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Uwaga Z **(A3)** wynika

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n)$$

Stwierdzenie 1 Niech $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_M\}$.

Jeśli $P(\{s_1\}) = P(\{s_2\}) = \ldots = P(\{s_M\})$,

to dla dowolnego m - elementowego podzbioru A zbioru S zachodzi

- $$P(A) = \frac{m}{M}$$
- $$P(A) = \sum_{s_i \in A} P(\{s_i\})$$

D.

- Z aksjomatów **(A2), (A3)** i założenia o jednakowym prawdopodobieństwie jednoelementowych zdarzeń:

$$1 = P(S) = P(\{s_1\}) + P(\{s_2\}) + \ldots P(\{s_M\}) = M \times P(\{s_i\})$$

gdzie *i* = 1,2,..., *M*. Stąd $P(\{s_i\}) = 1/M$.

- $A = \{s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_m}\}$, $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le M$,

$$P(A) = P(\{s_{i_1}\}) + P(\{s_{i_2}\}) + \ldots + P(\{s_{i_m}\}) = m \times \frac{1}{M} = \frac{m}{M}.$$

Przykład:

Oblicz $P(A)$, gdzie A = {wypadnięcie orła po raz pierwszy za trzecim razem, w trzech rzutach monetą symetryczną}.

$S = \{\text{OOO, OOR, ORO, ROO, ORR, ROR, RRO, RRR}\}$.

Liczebność S = 2^3 = 8, liczebność A = 1.

Zatem $P(A) = \frac{1}{8}$.

Wzory obliczeniowe kombinatoryki

Kombinacja (k – elementowa) to k - elementowy podzbiór zbioru n – elementowego.

Liczba k - elementowych kombinacji zbioru n - elementowego,

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$0! = 1.$$

<u>Przykład:</u> Ile jest możliwych wyborów 2 asów z talii 52 kart?

$$C(4,2) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\times 2!} = 6.$$

$V(n,k)$ = $n(n-1)(n-2)\times\ldots\times(n-k+1)$ =

$C(n,k)\times k!$ = liczba k - elementowych wariacji bez powtórzeń n - elementowego zbioru, $k \le n$

Przykład. Ile jest możliwych sposobów opuszczenia windy przez 5 osób w bloku 10 –cio piętrowym w taki sposób, że nie ma osób wysiadających na tych samych piętrach ?

$$V(10,5)=10\times 9\times 8\times 7\times 6=30240.$$

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Zadanie. Losujemy 13 kart z talii 52 kart (np. w brydżu).

$$P(\text{zestaw 6 pików}) = \frac{\binom{13}{6}\binom{39}{7}}{\binom{52}{13}} = ?$$

$$P(\text{4 karty tej samej wysokości}) =$$

$$\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{4}\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}} = ?$$

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

<u>Twierdzenie 1</u>

Niech $A \subset S$. Wówczas

$$\boxed{P(A') = 1 - P(A)}$$

<u>Dowód.</u>

$A \bigcup A' = S$, $A \bigcap A' = \emptyset$.

Z definicji 5: $P(A \bigcup A') = P(A) + P(A') = P(S) = 1$, $\square$

<u>Przykład</u>.

Prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej jednego orła w trzech rzutach monetą symetryczną:

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Twierdzenie 2

Niech $A \subset S$ i $B \subset S$ oraz $A \subset B$. Wówczas

$$\boxed{P(A) \le P(B)}.$$

Dowód

$B = A \bigcup (B - A)$ oraz $A \bigcap (B - A) = \emptyset$.

Zatem z definicji 5:

$P(B) = P(A) + P(B - A) \ge P(A)$, gdyż $P(B - A) \ge 0$. □

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Twierdzenie 3. Niech $A \subset S$ i $B \subset S$. Wówczas

$$\boxed{\begin{gathered} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ jeśli } A \cap B = \emptyset. \end{gathered}}$$

Dowód

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A)$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A - B) + P(B - A)$$

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

$$A = A \cap S = A \cap (B \cup B') = (A \cap B) \cup (A \cap B')$$

$$A - B = A \cap B'.$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$ Podobnie

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

Podstawiając prawe strony powyższych dwu równości do równości w ramce otrzymujemy tezę twierdzenia. $\square$

Prawdopodobieństwo warunkowe

- $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_M\}, \quad P(\{s_i\}) = \dfrac{1}{M}, \ i = 1,2,..,M,$
- $A \subset S, \ B \subset S,$
- $n(A), n(B), n(A \cap B)$ - liczności zdarzeń sprzyjających
- $$\frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{n(A \cap B) / n(S)}{n(A) / n(S)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$
- $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$ - prawdopodobieństwo

warunkowe zajścia zdarzenia *B* pod warunkiem zajścia *A*.

Definicja 6

Niech $A \subset S$ i $B \subset S$, $P(A) > 0.$

Prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia B

pod warunkiem zajścia zdarzenia A dane jest wzorem

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Przykład

Obliczono, że 70% studentów zdało egzamin z matematyki w czasie sesji, natomiast 30% zdało egzamin z matematyki i angielskiego. Jakie jest prawdopodobieństwo, że student, który zdał egzamin z matematyki zdał również egzamin z angielskiego?

Rozwiązanie.

Niech A = "losowo wybrany student zdał matematykę",

B = "losowo wybrany student zdał angielski".

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}7} = \frac{3}{7}$$

Twierdzenie 4

Niech $A \subset S$ i $B \subset S$, oraz $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$. Wówczas

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)}.$$

Przykład

Urna zawiera 6 kul czarnych i 4 białe. Losujemy 2 kule bez zwracania. Niech

A = { 2 kule czarne },

B = { 1 kula czarna i 1 kula biała }.

C_i = { w i-tym ciągnieniu kula czarna },

B_i = { w i-tym ciągnieniu kula biała}, $i = 1, 2$.

$$P(A) = P(C_1 \cap C_2) = P(C_1)P(C_2 | C_1) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3},$$

$$P(B) = P[(B_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap B_2)] = P(B_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap B_2) =$$

$$P(C_2 | B_1)P(B_1) + P(B_2 | C_1)P(C_1) = \frac{6}{9} \times \frac{4}{10} + \frac{4}{9} \times \frac{6}{10} = \frac{8}{15}.$$

$$P(A) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{3}, \qquad P(B) = \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{8}{15}.$$

Reguła wielokrotnego warunkowania

$$P(A \cap B \cap C) = P[C \cap (A \cap B)] =$$

$$P(C | A \cap B) P(A \cap B) =$$

$$P(C | A \cap B) P(B | A) P(A)$$

Dla k zdarzeń losowych:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_k | A_{k-1} \cap A_{k-2} \cap \ldots \cap A_1) \times$$

$$\times P(A_{k-1} | A_{k-2} \cap \ldots \cap A_1) \quad \times \quad \ldots \quad \times \quad P(A_2 | A_1) \times P(A_1).$$

Przykład (drzewa prawdopodobieństw warunkowych)

Pewna uczelnia bada wyniki nauczania.

A_1 = {po I sem. ocena > 3 z przedm. ogólnych}

A_2 = {po II sem. ocena > 4 z przedm. specjalist.}

B = { „dobre” ukończenie studiów }

C = { „słabsze” ukończenie studiów }

D = { nieukończenie studiów }

$P(A_1)$ = 0,76, $P(A_2'|A_1)$= 0,80, $P(C|A_1 \cap A_2')$ = 0,69.

$P(A_1 \cap A_2' \cap C)$ = 0,76 x 0,80 x 0,69 = 0,42.

Uwaga:

Niech $A \subset S, P(A) > 0$. Prawdopodobieństwo warunkowe pod warunkiem zdarzenia A spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa z definicji 5, jeli zamienimy S na A:

- $0 \le P(B|A) \le 1$, dla każdego zdarzenia B,
- $P(A|A) = 1, \qquad P(\emptyset|A) = 0$,
- Jeśli zdarzenia $B_1, B_2, B_3, \ldots$ wykluczają się wzajemnie , to

$$\boxed{P(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots | A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) + P(B_3|A) + \ldots}$$

Zdarzenia niezależne

Prawdopodobieństwo warunkowe pozwala określić niezależność zdarzeń. Zdarzenia A i B, o dodatnich prawdopodobieństwach, nazwiemy **niezależnymi**, jeśli **informacja o zajściu jednego z nich nie wpływa na prawdopodobieństwo zajścia drugiego**:

$$P(B|A) = P(B) \qquad \text{oraz} \qquad P(A|B) = P(A)$$

Zdarzenia niezależne

Definicja.

Zdarzenia A i B nazywamy **niezależnymi,** jeśli

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Zdarzenia $\boxed{A_1, A_2, \ldots, A_k}$, $k \geq 2$, nazywamy **niezależnymi**, jeśli dla każdego m, $2 \leq m \leq k$, dla dowolnych różnych zdarzeń $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ z rodziny $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$:

$$\boxed{P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1}) \times \ldots \times P(A_{i_m})}$$

Zdarzenia niezależne parami

Określenie.

Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_k$, $k \geq 2$, nazywamy niezależnymi parami, jeśli każde dwa zdarzenia spośród nich są niezależne.

Uwaga: Z niezależności parami nie wynika niezależność rodziny zdarzeń $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Natomiast **niezależność rodziny** zdarzeń implikuje **niezależność parami.**

Zdarzenia niezależne parami

Przykład. Urna zawiera 4 kule – zieloną, niebieską, czerwoną i kulę zielono-niebiesko-czerwoną. Niech

A_1 = { w losowo wybranej kuli jest kolor zielony },

A_2 = { w losowo wybranej kuli jest kolor niebieski },

A_3 = { w losowo wybranej kuli jest kolor czerwony },

B = { losowo wybrana kula jest trójkolorowa }.

Pokaż, że zdarzenia A_1, A_2, A_3 **nie są niezależne**, ale są **parami niezależne**.

Wsk. $A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_3 \quad = \quad B$.

Przykład. Niech $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ oraz zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

- $A_1 = \{s_1, s_2\}$, $A_2 = \{s_1, s_3\}$, $A_3 = \{s_1, s_4\}$

- A_1, A_2, A_3 są niezależne parami, ale

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ = 0,25 $\neq$ $P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ = 0,125.

- $B_1 = \{s_1\}$, $B_2 = \{s_1, s_2\}$, $B_3 = \emptyset$.

- B_1, B_2, B_3 nie są parami niezależne, ale

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P(B_2)P(B_3).$$

Niezależność układu zdarzeń

Przykład. Układ czterech przekaźników połączony jest w taki sposób, że: dwa pierwsze – szeregowo, połączone są szeregowo z dwoma pozostałymi połączonymi równolegle. Przekaźniki pracują niezależnie, prawdopodobieństwo awarii każdego z nich wynosi 0,1. Oblicz niezawodność układu przekaźników, tzn. prawdopodobieństwo poprawnej pracy.

- A_i = { przekaźnik i pracuje poprawnie }, i = 1,2,3,4.
- $D =$ { układ pracuje poprawnie } =

$$A_1 \cap A_2 \cap (A_3 \cup A_4)$$

$$D = (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_4).$$

Niezależność układu zdarzeń

$$D=(A_1\cap A_2\cap A_3)\cup(A_1\cap A_2\cap A_4).$$

Z twierdzenia 3 (prawdopodobieństwo sumy zdarzeń) oraz definicji 7 (niezależność zdarzeń):

Niezawodność =

$$P(D)=P(A_1\cap A_2\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap A_4)+$$
$$-P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4) = 0{,}9^3+0{,}9^3-0{,}9^4=$$

0,8019.

Zupełny układ zdarzeń

Definicja 8.

Zdarzenia $B_1, B_2, ..., B_k$ tworzą **podział** przestrzeni zdarzeń elementarnych S (układ **zupełny** zdarzeń), jeśli $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, oraz

$$B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k = S.$$

Prawdopodobieństwo całkowite

<u>Twierdzenie 5.</u> (o prawdopodobieństwie całkowitym).

Jeśli $\boxed{B_1, B_2, \ldots, B_k}$ tworzą **układ zupełny** zdarzeń oraz $P(B_i) \neq 0$, $i = 1,2,\ldots k$, to dla każdego zdarzenia A:

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)}$$

<u>D.</u> $P(A) = P(A \cap S) = P(A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k))$ =

$P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_k))$ =

$$\sum_{i=1}^{k} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i).$$

Twierdzenie Bayesa

<u>Twierdzenie 6</u>. (**reguła Bayesa'a**). Jeśli zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_k$ tworzą podział przestrzeni S oraz $P(B_i) > 0$, $i = 1,2,\ldots k$, to dla $A \in S$, takiego że $P(A) > 0$,

$$\boxed{P(B_m | A) = \frac{P(A|B_m)P(B_m)}{P(A)} = \frac{P(A|B_m)P(B_m)}{\sum_{j=1}^{k} P(A|B_j)P(B_j)}},$$

gdzie B_m jest dowolnym ustalonym zdarzeniem spośród zdarzeń $B_1, B_2, \ldots, B_k$, $1 \le m \le k$.

Reguła Bayesa

Przykład. W konferencji naukowej bierze udział 30 % matematyków i 70 % informatyków. Wśród matematyków jest 50 % kobiet a wśród informatyków zaledwie 10 % stanowią kobiety. Wybrana losowo osoba jest (a) kobietą , (b) mężczyzną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrana osoba jest matematykiem ?

Określamy zdarzenia:

$A =$ {wybrana losowo osoba jest kobietą},

$B_1 =$ { wybrana losowo osoba jest matematykiem},

$B_2 =${ wybrana losowo osoba jest informatykiem},

$$P(B_1) = 0{,}3, \quad P(B_2) = 0{,}7, \quad P(A|B_1) = 0{,}5, \quad P(A|B_2) = 0{,}1,$$

$$P(A'|B_1) = 1 - P(A|B_1) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5,$$

$$P(A'|B_2) = 1 - P(A|B_2) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9.$$

Reguła Bayesa

$$P(B_1) = 0{,}3, \quad P(B_2) = 0{,}7, \; P(A|B_1) = 0{,}5, \; P(A|B_2) = 0{,}1,$$
$$P(A'|B_1) = 1 - P(A|B_1) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5,$$
$$P(A'|B_2) = 1 - P(A|B_2) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9.$$

(a)

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} =$$

$$= \frac{0{,}5 \times 0{,}3}{0{,}5 \times 0{,}3 + 0{,}1 \times 0{,}7} \approx 0{,}68.$$

Reguła Baeysa

Interpretacja:

Wśród matematyków jest dużo kobiet, zatem prawdop., że wybrana osoba jest matematykiem zwiększyło się, jeśli wiemy, że ta osoba jest kobietą.

$$P(B_1) = 0{,}3 \qquad P(B_1 | A) = 0{,}68$$

$$P(B_1) = 0{,}3 \qquad P(B_1 | A') = 0{,}19$$

Reguła Bayesa

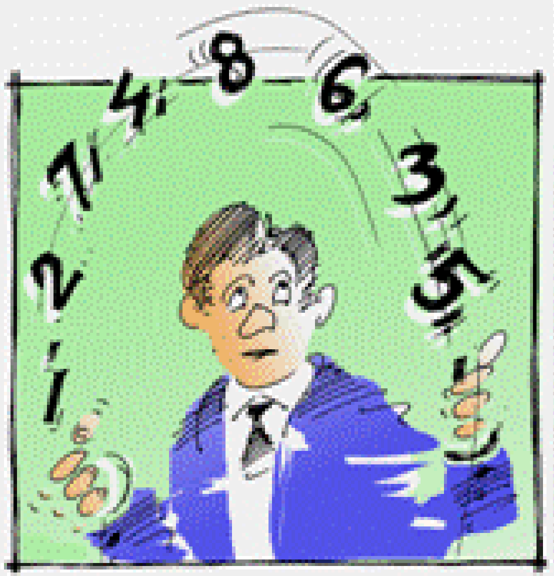
$$P(B_1) = 0{,}3, \quad P(B_2) = 0{,}7, \quad P(A|B_1) = 0{,}5$$
$$P(A|B_2) = 0{,}1,$$

$$P(A'|B_1) = 1 - P(A|B_1) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5,$$
$$P(A'|B_2) = 1 - P(A|B_2) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9.$$

(b)

$$P(B_1|A') = \frac{P(A'|B_1)P(B_1)}{P(A'|B_1)P(B_1) + P(A'|B_2)P(B_2)} =$$

$$= \frac{0{,}5 \times 0{,}3}{0{,}5 \times 0{,}3 + 0{,}9 \times 0{,}7} \approx 0{,}19.$$



Dziękuje za uwagę