Rozwiązania zadań C10

Zad.1. Szacuje się, ze 40% podatników otrzyma zwrot pieniędzy z tytułu nadpłaconych podatków. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze wśród 800 losowo wybranych podatników zwrot pieniędzy z tego tytułu należy się więcej niż 300, ale nie więcej niż 400 osobom?

Rozw.

- $p = 0{,}4$ – prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba otrzyma zwrot podatków

- $S_{800} \sim Bin(800; 0{,}4)$, $E\big(S_{800)}\big) = 800 \cdot 0{,}4 = 320$,

$$Var\big(S_{800)}\big) = 800 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 8 \cdot 24 = 8^2 \cdot 3$$

- $P(300 < S_{800} \leq 400) = ?$

$$P(300 < S_{800} \leq 400) = P\left(\frac{300-320}{8\sqrt{3}} < \frac{S_{800}-320}{8\sqrt{3}} \leq \frac{400-320}{8\sqrt{3}}\right) =$$

$$\approx P\left(\frac{-20}{8\sqrt{3}} < Z \leq \frac{80}{8\sqrt{3}}\right) = \Phi(5{,}773) - \Phi(-1{,}4435) = 1 - \big(1 - \Phi(1{,}443)\big) =$$

$$= 0{,}924$$

Uwaga.

Sprawdzamy warunki stosowania CTG: $np = 800 \cdot 0{,}4 = 320 \geq 5, nq = 800 \cdot 0{,}6 \geq 5.$

Zad.2 Mamy 100 żarówek, których czas działania jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej 5 godzin. Używamy jednocześnie tylko jednej żarówki, a w przypadku zepsucia się żarówki natychmiast wstawiamy na jej miejsce nową. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, ze po 525 godzinach będzie

1) w zapasie przynajmniej jeszcze jedna żarówka;
2) działała jakaś żarówka.

Rozw.

1)

- $X_j \sim \exp\left(\frac{1}{5}\right)$, $\Rightarrow$ $E(X_j) = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$
- $X_j -$ czas działania j-tej żarówki, $j = 1,2, \dots, 100$
- $S_{99} = X_1 + X_2 + \dots + X_{99} -$ czas działania 99-ciu żarówek wymienianych po kolejnych zepsuciach

Należy znaleźć

$$P(S_{99} \geq 525) = ?$$

- ✓ Z CTG S_{99} ma rozkład bliski rozkładowi normalnemu z wartością średnią $E(S_{99})$ i wariancją $Var(S_{99})$
- ✓ $E(S_{99}) = 99E(X_1) = 99 \cdot 5 = 495$
- ✓ $Var(S_{99}) = 99Var(X_1) = 99 \cdot 5^2 = 99 \cdot 25 = 2475$

$$P(S_{99} \geq 525) = 1 - P(S_{99} < 525) = 1 - P\left(\frac{S_{99} - 495}{\sqrt{2475}} \leq \frac{525 - 495}{\sqrt{2475}}\right) \approx$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{30}{\sqrt{2475}}\right) = 1 - \Phi(0{,}6030) = 1 - 0{,}7267 = 0{,}2733$$

2)

$$P(S_{100} > 525) = 1 - P(S_{100} \leq 525) = 1 - P\left(\frac{S_{100} - 100 \cdot 5}{\sqrt{100 \cdot 25}} \leq \frac{525 - 100 \cdot 5}{\sqrt{100 \cdot 25}}\right) \approx$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{25}{50}\right) = 1 - \Phi(0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085.$$

Twierdzenie - sformułowanie CTG dla sumy:

Jeśli $X_1, X_2, \dots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa z wartością oczekiwaną μ oraz odchyleniem standardowym σ, to dla dużych n rozkład sumy $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ jest bliski rozkładowi normalnemu z wartością oczekiwaną $E(S_n) = n\mu$ i wariancją $Var(S_n) = n\sigma^2$.
Uwaga. Zazwyczaj wystarczy aby $n > 25$ $(lub\ 30)$. CTG dla sumy mówi, że dla każdego x:

$$P(S_n \leq x) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \leq \frac{x - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{x - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}\right)$$

Jeśli $S_n \sim Binomial(n, p)$, $j = 1,2, \dots, n$, to dla $np \geq 5$, $nq \geq 5$

$$P(S_n \leq x) = P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{x + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \Phi\left(\frac{x + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right), gdy\ n \leq 100$$

$$P(S_n \leq x) = P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{x - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad gdy\ n > 100$$

Zad.3 Prawdopodobieństwo zdarzenia, ze zakupiony od pewnego kontrahenta podzespół spełnia podwyższone wymagania wynosi 0,2.
a) Jakie jest prawdopodobieństwo, ze kupując 50 takich podzespołów, będziemy mieli co najmniej mniej 15 podzespołów spełniających podwyższone wymagania?
b) Podać wartość przybliżoną tego prawdopodobieństwa korzystając z przybliżenia Poissona.
c) Podać wartość przybliżoną tego prawdopodobieństwa korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego.
Rozw.

- $n = 50$ – liczba zakupionych podzespołów działających niezależnie
- $p = 0{,}2$ – prawdopodobieństwo, że podzespół spełnia podwyższone wymagania
- $S_{50} := X$ – liczba podzespołów spełniających podwyższone wymagania
- $X \sim Bin(50; 0{,}2)$, stąd $E(X) = np = 50 \cdot 0{,}2 = 10,$
  $Var(X) = npq = 50 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 8$

a)

$$P(X \geq 15) = \sum_{k=15}^{50} \binom{50}{k} 0{,}2^k\, 0{,}8^{50-k} = 1 - \sum_{k=0}^{14} \binom{50}{k} 0{,}2^k\, 0{,}8^{50-k}$$

Z Excela odczytujemy: $P(X \geq 15) = 1 - P(X < 15) = 1 - P(X \leq 14) = 1 - 0{,}939 =$
$= 0{,}061$

b) Przybliżenie Poissona:

Jeśli $X \sim Binomial(n,p)$, $np \leq 10$, $n - duże, p - małe$, to rozkład prawdopodobieństwa X można przybliżyć rozkładem Poissona z parametrem $\lambda = np$, tzn.
dla każdego $k = 1,2, \dots, n$, $q := 1 - p$

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx e^{-np} \frac{(np)^k}{k!}.$$

W zadaniu $np = 10$.

$$P(X \geq 15) = 1 - P(X < 15) \approx 1 - \sum_{k=0}^{14} e^{-10} \frac{10^k}{k!} = 1 - e^{-10} \sum_{k=0}^{14} \frac{10^k}{k!}$$

Z Excela odczytujemy: $P(X \geq 15) \approx 1 - P(X \leq 14) = 1 - 0{,}9165 = 0{,}0835.$

c) Przybliżenie z CTG: Twierdzenie Moivre'a Laplace'a.

Jeśli $S \sim Binomial(n,p)$, $n - duże\ oraz\ np \geq 5, nq \geq 5$, to rozkład S można przybliżyć rozkładem normalnym o średniej $E(S) = np$ i wariancji $Var(npq), q = 1 - p$. Zatem, dla $0 \leq k \leq n$ mamy:

$$P(S \leq k) = P\left(\frac{S - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \Phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Dla $n \leq 100$ stosujemy poprawkę ciągłości:

$$P(S \leq k) = P\left(\frac{S - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k + 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \Phi\left(\frac{k + 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

W zadaniu $n = 50, np = 10, npq = 8$. Wykorzystamy też poprawkę ciągłości:

$$P(X \geq 15) = 1 - P(X < 15) = 1 - P(X \leq 14) = 1 - 0{,}9442 = 0{,}0558$$

$$P(X \leq 14) = P(X \leq 14{,}5) = P\left(\frac{X - 10}{\sqrt{8}} \leq \frac{14{,}5 - 10}{\sqrt{8}}\right) \approx \Phi\left(\frac{-4{,}5}{\sqrt{8}}\right) = \Phi(1{,}5909) =$$
$$= 0{,}9442$$

Zad. 4 W centrali telefonicznej jest *n* linii działających niezależnie od siebie. Prawdopodobieństwo, ze dowolna linia jest zajęta wynosi 0,5. Jakie powinno być *n*, aby prawdopodobieństwo tego, ze co najmniej 20 linii jest zajętych wynosiło co najmniej 0,95?

Rozw. Niech

$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n -$ liczba zajętych linii, gdzie

- $n -$ liczba linii, $X_j = 1 \ \ (0)$ jeśli j-ta linia jest zajęta (wolna)
- $X_j \sim Binomial(1; 0{,}5)$
- $S_n \sim Binomial(n; 0{,}5)$

$$P(S_n \geq 20) = 1 - P(S_n < 20) \geq 0{,}95 \quad \equiv \quad P(S_n < 20) \leq 0{,}05.$$

$$0{,}05 \geq P(S_n < 20) = P(S_n \leq 19) = P(S_n \leq 19{,}5) = P\left(\frac{S_n - n \cdot 0{,}5}{\sqrt{n \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \leq \frac{19{,}5 - n \cdot 0{,}5}{\sqrt{n \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{19{,}5 - 0{,}5n}{0{,}5\sqrt{n}}\right)$$

Stąd n powinno spełniać nierówność

$$\Phi\left(\frac{19{,}5 - 0{,}5n}{0{,}5\sqrt{n}}\right) \leq 0{,}05 = \Phi(z_{0,05}) \qquad (*)$$

Dystrybuanta Φ zmiennej losowej o rozkładzie standardowym normalnym jest funkcją ściśle rosnącą, więc z nierówności (*) otrzymujemy:

$$\frac{19{,}5 - 0{,}5n}{0{,}5\sqrt{n}} \leq -1{,}64$$

gdzie wykorzystaliśmy: $z_{0,05} = -z_{0,95} = -1{,}64$.

Niech $x := \sqrt{n} \geq \sqrt{20} \ \ i \ \ x^2 - naturalna\ liczba.$ Należy rozwiązać nierówność:

$$\frac{19{,}5 - 0{,}5x^2}{0{,}5x} \leq -1{,}64 \quad \equiv \quad 0{,}5x^2 - 0{,}82x - 19{,}5 \geq 0 \qquad (**)$$

Znajdziemy rozwiązania równania kwadratowego:

$$0{,}5x^2 - 0{,}82x - 19{,}5 = 0$$

$$\Delta = 0{,}82^2 + 4 \cdot 0{,}5 \cdot 19{,}5 = 39{,}6724$$

Pierwiastki równania:

$$x_1 = \frac{0{,}82 - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 0{,}5} < 0, \ x_2 = \frac{0{,}82 + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 0{,}5} = 7{,}118603$$

Stąd dla $x \geq \sqrt{20}$, $(**)$ zachodzi dla $x \geq 7{,}118603 \implies x^2 \geq 7{,}118603^2 \approx 50{,}67.$

Odp. $n \geq 51.$

Zad. 5 Przy produkcji elementów otrzymuje się 3% braków. Produkcję ilu elementów trzeba zaplanować, aby z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż 0,99 był zabezpieczony program wysyłki elementów, dla którego potrzeba 400 niewadliwych elementów.
Rozw.

- $n -$ liczba elementów, które należy wyprodukować,
- $X_j = 1$ (0) jeśli j-ty element jest dobry (brakiem)
- $p = 0{,}97 -$ prawdopodobieństwo, że element jest dobry
- $X_j \sim Binomial(1; 0{,}97)$
- $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n -$ liczba dobrych elementów spośród n
- $S_n \sim Binomial(n; 0{,}97)$

Dla jakiego n spełniona jest nierówność: $P(S_n \geq 400) \geq 0{,}99$?

$$P(S_n \geq 400) = 1 - P(S_n < 400) \geq 0{,}99 \quad \equiv \quad P(S_n < 400) \leq 0{,}01.$$

W zadaniu $n \geq 400$, więc nie trzeba stosować poprawki ciągłości.

$$0{,}01 \geq P(S_n \leq 399) = P\left(\frac{S_n - n \cdot 0{,}97}{\sqrt{n \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}03}} \leq \frac{399 - n \cdot 0{,}97}{\sqrt{n \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}03}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{399 - 0{,}97n}{0{,}01\sqrt{97 \cdot 3}\sqrt{n}}\right)$$

Stąd n powinno spełniać nierówność

$$\Phi\left(\frac{399 - 0{,}97n}{0{,}01\sqrt{97 \cdot 3}\sqrt{n}}\right) \leq 0{,}01 = \Phi(z_{0{,}01}) \qquad (*)$$

Dystrybuanta Φ zmiennej losowej o rozkładzie standardowym normalnym jest funkcją ściśle rosnącą, więc z nierówności (*) otrzymujemy:

$$\frac{399 - 0{,}97n}{0{,}01 \cdot \sqrt{97 \cdot 3} \cdot \sqrt{n}} \leq -2{,}32634$$

gdzie wykorzystaliśmy: $z_{0{,}01} = -z_{0{,}99} = -2{,}32634$.

Niech $x := \sqrt{n} \geq \sqrt{400} = 20.$ Należy rozwiązać nierówność:

$$\frac{399 - 0{,}97x^2}{0{,}01\sqrt{97 \cdot 3} \cdot x} \leq -2{,}32634 \quad \equiv \quad 0{,}97x^2 - 0{,}01 \cdot 2{,}32634 \cdot \sqrt{291} \cdot x - 399 \geq 0 \qquad (**)$$

$$97x^2 - 2{,}32634\sqrt{291} \cdot x - 39900 \geq 0 \qquad (**)$$

Znajdziemy rozwiązania równania kwadratowego:

$$97x^2 - 2{,}32634\sqrt{291}x - 39900 = 0$$

$$\Delta = 2{,}32634^2 \cdot 291 + 4 \cdot 97 \cdot 39900 =$$

Pierwiastki równania:

$$x_1 = \frac{2{,}32634 \cdot \sqrt{291} - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 97} < 0, \ x_2 = \frac{2{,}32634 \cdot \sqrt{291} + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 97} = \frac{3974{,}5001}{2 \cdot 97} = 20{,}4871$$

$$n \geq 419{,}72$$

Stąd dla $x \geq 20$, $(**)$ zachodzi dla $x \geq \ 20{,}4871 \ \Longrightarrow \ x^2 \geq 419{,}72.$

Odp. $n \geq 420.$

Zad. 6 W hotelu jest 100 pokoi. Ponieważ z doświadczenia wynika, ze jedynie 90% dokonanych wcześniej rezerwacji jest później wykorzystywanych, właściciel hotelu polecił przyjmować rezerwacje na więcej niż 100 pokoi.
(a) Jakie jest prawdopodobieństwo, ze przy przyjęciu 104 rezerwacji w hotelu zabraknie wolnych pokoi?
(b) Ile dodatkowych rezerwacji można dokonać by mieć 90% pewności, ze dla nikogo nie zabraknie miejsc?

Rozw.

(a)

- $n = 104$ – liczba przyjętych rezerwacji
- $p = 0{,}9$ – prawdopodobieństwo, że losowa rezerwacja będzie wykorzystana
- $X_j = 1$, jeśli j-ta rezerwacja będzie wykorzystana, 0 jeśli nie
- $X_j \sim Binomial(1; 0{,}9)$
- $S_{104} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{104} \sim Binomial(104; 0{,}9)$

$$P(S_{104} > 100) = ?$$

Sprawdzimy, czy można stosować CTG:

$$np = 104 \cdot 0{,}9 = 93{,}6 \geq 5, \ \ nq = 104 \cdot 0{,}1 = 10{,}4 \geq 5 \qquad (*)$$

Nierówności $(*)$ $\Longrightarrow$ można stosować CTG.

$$E(S_{104}) = 93{,}6, \quad Var(S_{104}) = 104 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 9{,}36$$

$$P(S_{104} > 100) = 1 - P(S_{104} \leq 100) = 1 - P\left(\frac{S_{104} - 93{,}6}{\sqrt{9{,}36}} \leq \frac{100 - 93{,}6}{\sqrt{9{,}36}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{6{,}4}{\sqrt{9{,}36}}\right) = 1 - \Phi(2{,}0919) = 1 - 0{,}982 = 0{,}018.$$

(b) Dla jakiego $n = ?$

$$P(S_n \leq 100) = 0{,}9$$

$$P(S_n \leq 100) = P\left(\frac{S_n - n \cdot 0{,}9}{\sqrt{n \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \leq \frac{100 - n \cdot 0{,}9}{\sqrt{n \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right) \approx \Phi\left(\frac{100 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}\right) = 0{,}9 \qquad (1)$$

$$\Phi(z_{0,9}) = 0{,}9 = \Phi(1{,}28155) \approx \Phi(1{,}28) \quad (2)$$

Z (1) i (2) mamy:

$$\Phi\left(\frac{100 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}}\right) = \Phi(1{,}28155) \implies \frac{100 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}} = 1{,}28155$$

Niech $x \coloneqq \sqrt{n} \geq \sqrt{100} = 10, x^2 - całkowite.$ Należy rozwiązać równanie

$$\frac{100 - 0{,}9x^2}{0{,}3 \cdot x} = 1{,}28155 \quad \equiv \quad 0{,}9x^2 + 0{,}3 \cdot 1{,}28155 \cdot x - 100 = 0 \quad (*)$$

Znajdziemy rozwiązania równania kwadratowego (*).

$$\Delta = 1{,}28155^2 \cdot 0{,}09 + 4 \cdot 0{,}9 \cdot 100 = 360{,}1478$$

Pierwiastki równania:

$$x_1 = \frac{-0{,}3 \cdot 1{,}28155 - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 0{,}9} < 0, \ x_2 = \frac{-0{,}3 \cdot 1{,}28155 + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 0{,}9} = \frac{18{,}5931,}{1{,}8} = 10{,}329$$

$$n \geq 10{,}329^2 = 106{,}69.$$

Odp. Należy przyjmować 107 rezerwacji aby mieć 90% pewności, że nie zabraknie miejsc.

Sprawdzamy w Excelu: $S_{107} \sim Binomial(107; 0{,}9)$

$$P(S_{107} \leq 100) \approx 0{,}91$$

Zad. 7 - rozwiązane na wykładzie SADW07

- Niech $X_1, X_2, \ldots X_{144}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa z gęstością

$$f(x) = \begin{cases} x + 0{,}5 & dla \ x \in [0,1] \\ 0 & dla \ x \notin [0,1] \end{cases}$$

- Korzystając z CTG oszacować prawdopodobieństwo

$$P\left(78 \leq \sum_{n=1}^{144} X_n \leq 90\right) \approx ?$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x(x + 0{,}5)dx =$$

$$\int_0^1 x \cdot x \, dx + \int_0^1 0{,}5 \, xdx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + 0{,}5 \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2(x+0{,}5)dx =$$

$$= \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 0{,}5x^2 dx = \frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 + 0{,}5\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

$$Var(X) = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$$

$$S_{144} := X_1 + X_2 + \cdots + X_{144}, \quad E(X) \coloneqq \mu = \frac{7}{12}$$

$\sigma := \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{11}{144}}$, Niech $Z \sim N(0,1)$

$$P\left(78 \leq \sum_{n=1}^{144} X_n \leq 90\right) = P\left(\frac{78 - 144 \cdot \mu}{\sqrt{144} \cdot \sigma} \leq \frac{S_{144} - 144 \cdot \mu}{\sqrt{144} \cdot \sigma} \leq \frac{90 - 144 \cdot \mu}{\sqrt{144} \cdot \sigma}\right) \approx$$

$$= P\left(\frac{78 - 144 \cdot \frac{7}{12}}{\sqrt{144} \cdot \sqrt{11/144}} \leq Z \leq \frac{90 - 144 \cdot \frac{7}{12}}{\sqrt{144} \cdot \sqrt{11/144}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{11}}\right) - \Phi\left(-\frac{6}{\sqrt{11}}\right) = \Phi(1{,}8091) - (1 - \Phi(1{,}8091)) = 2 \cdot 0{,}970621 - 1$$
$$= 0{,}941242.$$