Andrzej Sierociński

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Zmienne losowe
Wykład 5

9 Wartość oczekiwana zmiennej losowej

- Pojęcie wartości oczekiwanej jest jednym z najważniejszych pojęć w rachunku prawdopodobieństwa.
- Koncepcja wartości oczekiwanej jest związana z określeniem **"środka masy prawdopodobieństwa"**.

9.1 Wartość oczekiwana zmiennej losowej typu dyskretnego

Definicja.
Jeżeli X jest zmienną losową typu dyskretnego o nośniku $\{x_1, x_2, \ldots\}$, to **wartość oczekiwana** X, oznaczana jako E[X], zdefiniowana jest jako

$$E[X] = \sum_{x_i \in \mathcal{X}} x_i \cdot P(X = x_i),$$

jeżeli szereg po prawej stronie jest zbieżny bezwzględnie. Jeżeli szereg po prawej stronie nie jest zbieżny, to mówimy, że wartość oczekiwana X nie istnieje.

Można powiedzieć, że wartość oczekiwana X jest średnią ważoną możliwych wartości X z wagami będącymi prawdopodobieństwami ich przyjęcia.

Przykład. *Wyznaczyć wartość oczekiwaną ($E(Y)$) dodatkowych kosztów związanych z wprowadzeniem polityki zwrotu kosztów, dla przykładu firmy produkującej płyty DVD.*

Rozwiązanie.
Ponieważ funkcja prawdopodobieństwa zm. los. Y jest

y	0	c	10c
$p(y)$	0.904	0.091	0.005

to

$$E(Y) = 0 \cdot 0,904 + c \cdot 0.091 + 10c \cdot 0.005 = 0.141c.$$

Przykład. *Niech X będzie zm. los. o rozkładzie jednostajnym dyskretnym na zbiorze $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, gdzie $n \in \mathcal{N}$, tzn. dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, n$, $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$. Obliczyć wartość oczekiwaną zm. los. X.*

Rozwiązanie.
Wartość oczekiwana równa jest

$$E[X] = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{n} = \bar{X},$$

gdzie $\bar{X}$ oznacza średnią arytmetyczną wartości x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

9.2 Wartość oczekiwana zmiennej losowej typu ciągłego

Definicja.
Jeżeli X jest zmienną losową typu ciągłego o gęstości f, to **wartość oczekiwana** zm. los. X, oznaczana przez E[X], zdefiniowana jest jako

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx,$$

w przypadku, gdy całka po prawej stronie jest zbieżna bezwzględnie. W przypadku, gdy całka po prawej stronie nie jest zbieżna bezwzględnie, wartość oczekiwana nie istnieje.

Przykład.
Niech X będzie zm. los. o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 1 \\ \frac{k-1}{x^k} & \text{dla} \quad x \geqslant 1, \end{cases}$$

gdzie $k > 1$ jest znanym parametrem. Obliczyć $E[X]$.

Rozwiązanie.

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{1}^{+\infty} x \cdot \frac{k-1}{x^k} dx = \\ &= \left[(k-1) \frac{x^{-k+2}}{-k+2} \right]_1^{+\infty} = \frac{k-1}{k-2}, \quad \text{gdzie} \quad k > 2. \end{aligned}$$

Dla $k \leqslant 2$ całka po prawej stronie jest rozbieżna i wartość oczekiwana nie istnieje.

9.3 Wartość oczekiwana zmiennej losowej typu mieszanego

Twierdzenie
Jeżeli zmienna losowa X jest typu mieszanego o dystrybuancie

$$F(x) = p \cdot F_d(x) + (1-p) \cdot F_c(x), \quad \text{dla wszystkich } x \in R,$$

to jej wartość oczekiwana jest równa

$$E[X] = p \cdot E[X_d] + (1-p) \cdot E[X_c],$$

gdzie X_d jest zmienną losową dyskretną o dystrybuancie F_d a X_c jest typu ciągłego o dystrybuancie F_c, pod warunkiem, że istnieją wartości oczekiwane X_d i X_c.

Przykład. *Znaleźć wartość oczekiwaną zmiennej losowej X o dystrybuancie*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < -2 \\ \frac{1}{4} & \text{dla} \quad -2 \leqslant x < -1 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(x+1) & \text{dla} \quad -1 \leqslant x < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{dla} \quad 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{dla} \quad 2 \leqslant x \end{cases}$$

Rozwiązanie.
Ponieważ

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot F_d(x) + \frac{1}{2} \cdot F_c(x),$$

gdzie, część dyskretna $X_d \sim UD(\{-2, 2\})$, a część ciągła $X_c \sim U(-1, 1)$ ma ciągły rozkład jednostajny na $[-1, 1]$.

Ponieważ $P(X_d = -2) = P(X_d = 2) = \frac{1}{2}$, to

$$E[X_d] = -2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Gęstością części ciągłej jest funkcja

$$f_c(X) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < -1 \text{ lub } x > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{dla} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Zatem

$$E[X_d] = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \cdot x = 0.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$E[X] = \frac{1}{2} \cdot E[X_d] + \frac{1}{2} \cdot E[X_c] = 0.$$

10 Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

Definicja.
Jeżeli $Y = g(X)$ a zm. los. X ma znany rozkład prawdopodobieństwa, to

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum\limits_i g(x_i) \cdot P(X = x_i) & \text{jeśli } X \text{ jest zm.los. dyskretną} \\ \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx & \text{jeśli } X \text{ jest zm.los. ciągłą} \end{cases}$$

pod warunkiem, że szereg (całka) jest absolutnie zbieżny(a).

Twierdzenie.
Jeżeli istnieje wartość oczekiwana $E[X]$ zmiennej losowej X, to dla dowolnych $a, b \in R$

$$E[aX + b] = aE[X] + b.$$

Dowód.
Bez straty ogólności można ograniczyć się do przypadku, gdy X jest typu ciągłego o gęstości f_X. W pozostałych przypadkach dowód jest bardzo podobny.

Wykorzystując liniowość całki, mamy

$$\begin{aligned} E[aX + b] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b) f_X(x) dx = \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = aE[X] + b. \end{aligned}$$

■

11 Momenty

Definicja.
Momentem rzędu n-tego, $n \in \mathcal{N}$ względem wartości $c \in R$ zmiennej losowej X nazywamy

$$E[(X-c)^n],$$

pod warunkiem, że wartość oczekiwana po prawej stronie istnieje.
W rachunku prawdopodobieństwa rozważamy dwa rodzaje momentów:

- **momenty zwykłe**, $c = 0$ (względem zera) oraz
- **momenty centralne**, $c = E[X]$ (względem wartości oczekiwanej zm. los.).

11.1 Momenty zwykłe

Definicja.
Momentem zwykłym rzędu n, $n \in \mathcal{N}$ zmiennej losowej X nazywamy

$$m_n = E[X^n],$$

pod warunkiem, że wartość oczekiwana po prawej stronie istnieje.

Dla $n = 1$ mamy $m_1 = m = E[X]$, dlatego mówimy, że wartość oczekiwana $E(X)$ jest **pierwszym momentem** zmiennej losowej X.

Przykład.
Niech X będzie zm. los. o jednostajnym rozkładzie dyskretnym na zbiorze $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, gdzie $m \in \mathcal{N}$, tzn. dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, m$, $P(X = x_i) = \frac{1}{m}$. Wyznaczyć n-ty moment zwykły zm. los. X.

Rozwiązanie.
Z definicji, otrzymujemy

$$m_n = \sum_{i=1}^{m} x_i^n P(X = x_i) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i^n.$$

W szczególności, dla $n = 1$, mamy

$$m_1 = \bar{x}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i,$$

tzn. m_1 jest średnią (arytmetyczną) wartości $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Przykład.
Znaleźć n-ty moment zwykły zm. los. o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 1 \\ \frac{k-1}{x^k} & \text{dla} \quad x \geqslant 1, \end{cases}$$

gdzie $k > 1$ jest znanym parametrem.

Rozwiązanie.
n-ty moment zwykły jest równy

$$\begin{aligned} m_n &= E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx = \int_1^{+\infty} x^n \cdot \frac{k-1}{x^k} dx = \\ &= \left[(k-1) \frac{x^{n-k+1}}{n-k+1} \right]_1^{+\infty} = \frac{k-1}{k-n-1}, \end{aligned}$$

gdzie $k > n+1$. Dla $k \leqslant n+1$, n-ty moment nie istnieje.

Twierdzenie.
Jeśli istnieje n-ty moment zwykły zm. los. X, to istnieją wszystkie momenty rzędu l dla $l < n$.

Dowód.
Udowodnimy to twierdzenie dla zmiennych losowych typu ciągłego. Dla zm. los. typu dyskretnego, całkę należy zastąpić sumą. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} E[|X|^l] &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^l f(x) dx = \\ &= \int_{\{x:|x|<1\}} |x|^l f(x) dx + \int_{\{x:|x|\geqslant 1\}} |x|^l f(x) dx \leqslant \\ &\leqslant \underbrace{\int_{\{x:|x|<1\}} f(x) dx}_{\leqslant 1} + \underbrace{\int_{\{x:|x|\geqslant 1\}} |x|^n f(x) dx}_{\leqslant m_n} \leqslant \\ &\leqslant 1 + m_n < +\infty. \end{aligned}$$

■

11.2 Momenty centralne

Definicja.
Momentem centralnym rzędu n zmiennej losowej X nazywamy n-ty moment względem wartości oczekiwanej X, tzn.

$$\mu_n = E[(X-\mu)^n],$$

gdzie $\mu = m_1$, a wartość oczekiwana po prawej stronie istnieje.

Ponieważ

$$(X-\mu)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k \cdot \mu^{n-k},$$

to można n-ty moment centralny przedstawić jako kombinację momentów zwykłych rzędów mniejszych lub równych n, mianowicie

$$\mu_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} m_k \cdot \mu^{n-k},$$

gdzie $m_0 = 1$.

11.3 Wariancja i odchylenie standardowe

- Wartość oczekiwana (pierwszy moment) zmiennej losowej może być interpretowana jako średnia uzyskanych wyników w dużej liczbie niezależnych powtórzeń tego samego eksperymentu losowego (np. liczby oczek w rzucie kostką do gry) lub jako "środek ciężkościźmiennej losowej.
- Drugi moment centralny μ_2 jest używany jako miara rozproszenia zmiennej losowej wokół swojej wartości oczekiwanej (środka ciężkości) i w rachunku prawdopodobieństwa odgrywa rolę podobną do tej jaką w mechanice odgrywa moment bezwładności.

Definicja.
Jeżeli dla zmiennej losowej X istnieje drugi moment centralny μ_2, to nazywamy go **wariancją** zmiennej losowej X i oznaczamy:

$$V(X) = E[(X-\mu)^2],$$

gdzie $\mu = E[X]$.

Wariancję zm. los. X zwyczajowo oznaczamy jako $V(X)$, σ_X^2 lub σ^2 (mówimy "sigma kwadrat").

Wykorzystując zależność momentów centralnych od momentów zwykłych, mamy:

$$V(X) = \mu_2 = m_2 - 2m_1\mu + \mu^2 = m_2 - \mu^2 = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Formuła obliczeniowa dla wariancji

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Nietrudno zauważyć, że

- Wariancja zawsze jest nieujemna.
- Wariancja stałej jest równa zero.
- Wariancja zmiennej losowej typu dyskretnego przyjmującej wartości $\{x_1, x_2, \ldots\}$ jest równa zeru wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości zmiennej losowej są identyczne $x_1 = x_2 = \ldots = x$.

Twierdzenie.
Jeżeli istnieje wariancja zm. los. X, to $V(X) \geqslant 0$ oraz $V(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $x_0 \in R$, że $P(X = x_0) = 1$.

Ponadto udowodnimy, że

- Wariancja jest niezmiennicza ze względu na przesunięcie, tzn. dodanie tej samej stałej do wszystkich wartości zmiennej losowej nie zmienia jej wariancji.
- Przeskalowanie zmiennej losowej zmienia wariancję zgodnie z kwadratem współczynnika przeskalowania.

Twierdzenie.
Jeśli istnieje wariancja zmiennej losowej X, to dla dowolnych $a, b \in R$

$$V(aX + b) = V(aX) = a^2 V(X).$$

Dowód.
Ponieważ $E[aX + b] = aE[X] + b$, to

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= E[(aX + b - (aE[X] + b))^2] = \\ &= E[a^2(X - E[X])^2] = a^2 V(X). \end{aligned}$$

∎

Twierdzenie.
Dla dowolnego $c \in R$ funkcja

$$\phi(c) = E[(X-c)^2],$$

osiąga wartość najmniejszą dla $c = E[X]$.

Wówczas $\phi(E[X]) = V(X)$.

Dowód.
Istotnie, zauważmy, że

$$\begin{aligned}\phi(c) &= E[(X-c)^2] = E[(X - E[X] + E[X] - c)^2] = \\ &= E[(X - E[X])^2] + (E[X] - c)^2.\end{aligned}$$

■

Definicja.
Mówimy, że zmienna losowa X jest standaryzowana jeżeli $E(X) = 0$ oraz $V(X) = 1$.

Oznaczmy przez X^* standaryzowaną zmienną losową X. Wówczas

Standaryzacja zmiennej losowej X

$$X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}.$$

Oczywistym jest, że $E(X^*) = 0$ *oraz* $V(X^*) = 1$.

Definicja.
Pierwiastek kwadratowy wariancji zmiennej losowej X nazywamy **odchyleniem standardowym** zm. los. X.

$$\sigma = \sqrt{V(X)}.$$

11.4 Współczynnik skośności i kurtoza

Definicja.
Współczynnikiem skośności γ_1 zmiennej losowej X nazywamy trzeci moment centralny zmiennej losowej standaryzowanej X^*, tzn.

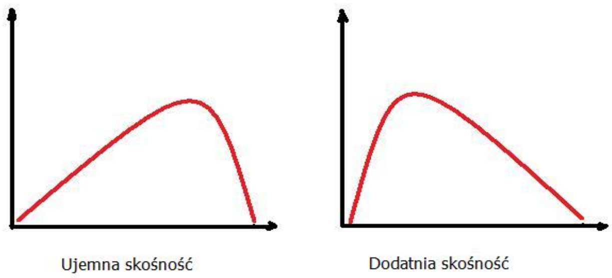
$$\gamma_1 = E\Big[\Big(\frac{X-\mu}{\sigma}\Big)^3\Big] = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E[(X-\mu)^3]}{(E[(X-\mu)^2])^{3/2}},$$

gdzie μ_3 jest trzecim momentem centralnym zm. los. X, a σ jej odchyleniem standardowym.

Współczynnik skośności oznaczany jest również jako $Skew[X]$ (ang. skewness).

W rachunku prawdopodobieństwa i statystyce, współczynnik skośności γ_1 jest miarą asymetrii rozkładu prawdopodobieństwa badanej zmiennej losowej (cechy). Współczynnik asymetrii może przyjmować zarówno wartości dodatnie jak i ujemne.

Musimy pamiętać, że nie zawsze istnieje.



- Jeżeli $\gamma_1 < 0$ oznacza to tzw. **asymetrię lewostronną** lub **ujemną skośność**, co objawia się tym, że lewe ramię gęstości prawdopodobieństwa jest dłuższe od prawego oraz większość wartości zmiennej losowej leży po lewej stronie wartości oczekiwanej.
- Jeżeli $\gamma_1 > 0$ oznacza to tzw. **asymetrię prawostronną** lub **dodatnią skośność**, co objawia się tym, że prawe ramię gęstości prawdopodobieństwa jest dłuższe od lewego oraz większość wartości zmiennej losowej leży po prawej stronie wartości oczekiwanej.
- Jeżeli $\gamma_1 = 0$ mówimy, że rozkład nie jest asymetryczny, co nie musi oznaczać, że jest symetryczny, wartości zmiennej losowej są względnie równomiernie rozłożone po obu stronach wartości oczekiwanej. Rozkład symetryczny, dla którego istnieje trzeci moment, ma współczynnik skośności równy 0.

Definicja.
Kurtozą nazywamy czwarty moment centralny zmiennej losowej standaryzowanej X^* minus 3, tzn.

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

gdzie μ_4 oznacza czwarty moment centralny zm. los. X a σ jej odchylenie standardowe.

"Minus 3" oznacza korektę spowodowaną tym, że jako neutralną (równą zeru) kurtozę uważa się kurtozę zmiennej losowej o rozkładzie ***normalnym (tzw. krzywa Gaussa)***.

1. W rachunku prawdopodobieństwa i statystyce, kurtoza (*z greckiego* **kyrtos** *lub* **kurtos**, *oznacza wybrzuszenie*) jest miarą **koncentracji** rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej

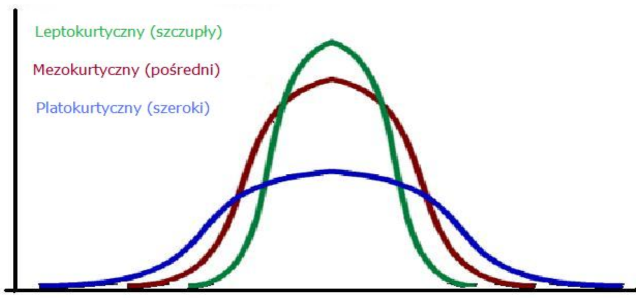
2. Niektórzy twierdzą, że kurtoza mierzy raczej ciężar **"ogonów" (tails)** rozkładu prawdopodobieństwa, a nie koncentrację rozkładu.

3. Wyższa kurtoza oznacza, że większość rozproszenia (wariancji) zmiennej losowej jest rezultatem sporadycznych ekstremalnych odchyleń od wartości oczekiwanej niż częstszych umiarkowanych odchyleń. O takich rozkładach mówimy, że mają "ciężkie ogony".

4. Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu o dużej kurtozie ma ostrzejszy pik oraz ciężkie ogony. Taki rozkład nazywamy rozkładem **leptokurtycznym** ("lepto-" oznacza "smukły").

5. Mała kurtoza oznacza łagodny, spłaszczony pik oraz krótsze ogony. Taki rozkład nazywamy rozkładem **platokurtycznym** ("plato-" oznacza "szeroki").

6. Rozkład o kurtozie równej 0 nazywamy rozkładem **mezokurtycznym** ("meso-" oznacza "pośredni").



12 Kwantyle

Momenty oraz ich funkcje są często stosowanymi charakterystykami rozkładów prawdopodobieństwa.

Nazywamy je **klasycznymi** miarami środka rozkładu jego rozproszenia, asymetrii i koncentracji. Niestety, nie zawsze one istnieją.

Z tego powodu używamy innych miar tych samych charakterystyk, tzw. miar **pozycyjnych**, które zawsze istnieją, opartych na pojęciu kwantyla.

Definicja.
Funkcją kwantylową rozkładu prawdopodobieństwa o dystrybuancie F nazywamy jej funkcję odwrotną F^{-1}.

Jeżeli założymy, że dystrybuanta jest funkcją ściśle rosnącą dla wartości z nośnika, tzn. dla $\{x \in \mathcal{R}\colon\ F(x) \in (0, 1)\}$, to funkcja F jest odwracalna dla każdego $p \in (0, 1)$ oraz

$$x_p = Q(p) = F^{-1}(p)$$

oznacza wartość zmiennej losowej, dla której zaobserwowanie wartości mniejszej od x_p ma szansę $p \times 100\%$

Innymi słowy, można wyznaczyć takie $x_p \in \mathcal{R}$, że

$$F(x_p) = \Pr(X \leqslant x_p) = p.$$

W przypadku rozkładów dyskretnych, dystrybuanta nigdy nie jest funkcją ściśle monotoniczną. Zmusza to nas do szczegółowego rozpatrzenia przypadku, gdy w zbiorze możliwych wartości zmiennej losowej (nośniku) znajdują się "dziury".

W każdym przypadku, funkcję kwantylową można zdefiniować jako

Funkcja kwantylowa

$$Q(p) = F^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathcal{R} : p \leqslant F(x)\}$$

dla $0 < p < 1$.

Zatem funkcja kwantylowa podaje najmniejszą wartość x_p, dla której

$$p \leqslant F(x).$$

Definicja.
Kwantylem rzędu p**,** $0 < 1 < p$ (p-tym kwantylem) zmiennej losowej X nazywamy najmniejsze $x_p \in R$, dla którego:

$$P(X \leqslant x_p) \geqslant p \quad \text{oraz} \quad P(X \geqslant x_p) \geqslant 1 - p.$$

12.1 Mediana, kwartyle, rozstęp międzykwartylowy

Definicja.
Medianą zmiennej losowej X nazywamy kwantyl $x_{0.5}$ rzędu 0.5.

Medianę używamy jako parametru położenia. Do badania rozproszenia użyjemy tzw. **rozstępu międzykwartylowego**.

Definicja.
Dolnym kwartylem Q_1 nazywamy kwantyl $x_{0.25}$ rzędu 0.25, a **górnym kwartylem** Q_3 jest 0.75-kwantyl $x_{0.75}$.

Definicja.
Rozstępem międzykwartylowym zmiennej losowej X nazywamy

$$IQR = Q_3 - Q_1.$$

Przykład. *Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie Cauchy'ego $X \sim C(0,1)$, tzn. o gęstości*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in R.$$

Pokazać, że nie istnieje $E[X]$ (nie istnieją także wariancja ani momenty wyższych rzędów).

Wyznaczyć medianę oraz rozstęp międzykwartylowy zmiennej losowej X.

Rozwiązanie.
Aby wykazać istnienie wartości oczekiwanej niezbędna jest zbieżność następującej całki

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < \infty.$$

Ponieważ rozważana gęstość jest funkcją parzystą, to $E[X]$ nie istnieje, jeżeli całka

$$\int_0^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x}{1+x^2} dx = +\infty.$$

Podstawiając $t = x^2 + 1$ otrzymujemy

$$\int_0^{+\infty} x f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{t \to +\infty} \ln(t) = +\infty.$$

Wyznaczmy dystrybuantę F rozkładu Cauchy'ego $C(0,1)$.

Dla dowolnego $x \in R$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \left[\frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arc\,tg}(t)\right]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arc\,tg}(x).$$

Ponieważ dla zmiennych losowych typu ciągłego p-ty kwantyl jest rozwiązaniem równania $p = F(x_p)$, to mediana $x_{0.5}$ spełnia równanie

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arc\,tg}(x_{0.5}).$$

Stąd mamy, że mediana

$$x_{0.5} = 0.$$

Podobnie można pokazać, że

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arc\,tg}(Q_3), \ \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{arc\,tg}(Q_1).$$

Zatem $Q_3 = 1$ oraz $Q_1 = -1$.

Ostatecznie, rozstęp międzykwartylowy

$$IQR = 2.$$