Rozwiązania zadań z kartki C06

1. Niech $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, gdzie X_i -czas działania i-tej żarówki (i=1,…,100)-zmienne losowe niezależne o rozkładzie wykładniczym, czyli $EX_i = 5, DX_i = 5.$. Zatem S_n jest łącznym czasem działania n żarówek oraz $ES_n = 5n, DS_n = 5\sqrt{n}.$
   a) Aby po 525 godzinach była w zapasie przynajmniej jeszcze jedna żarówka, to łączny czas działania 99 żarówek powinien być większy od 525 godz. Ponieważ $ES_{99} = 99*5 = 495$ $DS_{99} = 5\sqrt{99}$, więc szukane prawdopodobieństwo wynosi
   $$P(S_{99} > 525) = 1 - P(S_{99} \le 525) = 1 - P(\frac{S_{99} - 495}{5\sqrt{99}} \le \frac{525 - 495}{5\sqrt{99}}) \approx 1 - \Phi(0,6) = 0,2743.$$
   b) Niech A-zdarzenie, że po 525 godzinach będzie działała jeszcze jakaś żarówka, tzn. $S_{100} > 525$. Ponieważ $ES_{100} = 500, DS_{100} = 50,$ zatem
   $$P(S_{100} > 525) = 1 - P(S_{100} \le 525) = 1 - P(\frac{S_{100} - 500}{50} \le \frac{525 - 500}{50}) \approx 1 - P(U \le 0,5) =$$
   $$1 - \Phi(0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085.$$
2. Mamy $EX = 12, D^2X = 12.$ Zatem
   $$P(20 \le X \le 30) = P(\frac{20-12}{\sqrt{12}} \le \frac{X-12}{\sqrt{12}} \le \frac{30-12}{\sqrt{12}}) \approx P(2,31 \le U \le 5,2) = \Phi(5,2) - \Phi(2,31) =$$
   $$= 1 - 0,9893 = 0,0107.$$
3. Niech S_{800} będzie liczbą podatników, którzy otrzymają zwrot nadpłaconego podatku. S_{800} ma rozkład dwumianowy, $ES_{800} = 800*0,4 = 320, DS_{800} = \sqrt{800*0,4*0,6} = \sqrt{192}.$
   $$P(300 \le S_{800} \le 400) = P(\frac{300-320}{\sqrt{192}} \le \frac{S_{800}-320}{\sqrt{192}} \le \frac{400-320}{\sqrt{192}}) \approx P(-1,44 \le U \le 5,77) =$$
   $$= \Phi(5,77) - \Phi(-1,44) = 1 - (1 - \Phi(1,44)) = 0,9251.$$
4. Niech S_{50} będzie liczbą podzespołów spełniających podwyższone wymagania. S_{50} ma rozkład dwumianowy, $ES_{50} = 50*0,2 = 10, DS_{50} = \sqrt{50*0,2*0,8} = \sqrt{8}.$
   a) $P(S_{50} \ge 15) = \sum_{k=15}^{50} \binom{50}{k} 0,2^k * 0,8^{50-k}.$
   b) $\lambda = n*p = 50*0,2 = 10.$ Stosujemy przybliżenie Poissona rozkładu dwumianowego
   $$P(S_{50} \ge 15) \approx \sum_{k=15}^{50} e^{-10} \frac{10^k}{k!}.$$
   c) $P(15 \le S_{50} \le 50) = P(\frac{15-10}{\sqrt{8}} \le \frac{S_{50}-10}{\sqrt{8}} \le \frac{50-10}{\sqrt{8}}) \approx P(1,77 \le U \le 14,14) = 1 - \Phi(1,77) =$
   $= 1 - 0,9616 = 0,0384.$

8. Obliczamy parametry zmiennych losowych , (i=1,…,144).

$$EX_i = \int_0^1 x(x+0{,}5)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

$$EX_i^2 = \int_0^1 x^2(x+0{,}5)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}.$$

$$D^2X_i = EX_i^2 - (EX_i)^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}.$$

Niech $S_{144} = \sum_{i=1}^{144} X_i$. Ponieważ zmienne X_i (i=1,…,144) są niezależne, więc

$$ES_{144} = 144 * \frac{7}{12} = 84, D^2S_{144} = 144 * \frac{11}{144} = 11.$$

$$P(78 \le S_{144} \le 90) = P(\frac{78-84}{\sqrt{11}} \le \frac{S_{144}-84}{\sqrt{11}} \le \frac{90-84}{\sqrt{11}}) \approx P(-1{,}81 \le U \le 1{,}81) =$$

$$= \Phi(1{,}81) - \Phi(-1{,}81) = 2*\Phi(1{,}81) - 1 = 2*0{,}9649 - 1 = 0{,}9298.$$