TESTOWANIE HIPOTEZ - MODELE

Model 1. Test istotności dla wartości średniej μ

Cecha $X \sim N(\mu, \sigma)$, σ - znane;
Sformułowanie hipotezy zerowej i alternatywnej:

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0, \qquad \mathrm{H}_1 : \begin{array}{l} \mu \neq \mu_0 \\ \mu < \mu_0 \\ \mu > \mu_0 \end{array};$$

Statystyka testowa:

$$Z_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1);$$

Obszar krytyczny:

$$K = (-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\rangle \cup \langle z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$$
$$K = (-\infty, -z_{1-\alpha}\rangle$$
$$K = \langle z_{1-\alpha}, \infty);$$

Decyzja:

Jeżeli $Z_{obs} \in K$, to odrzucamy H_0 na rzecz H_1.

Jeżeli $Z_{obs} \notin K$, to nie ma podstaw do odrzucenia H_0.

Model 2. Test istotności dla wartości średniej μ

Cecha $X \sim N(\mu, \sigma)$, σ - nieznane;
Sformułowanie hipotezy zerowej i alternatywnej:

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0, \qquad \mathrm{H}_1 : \begin{array}{l} \mu \neq \mu_0 \\ \mu < \mu_0 \\ \mu > \mu_0 \end{array};$$

Statystyka testowa:

$$T_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{[n-1]};$$

Obszar krytyczny:

$$K = (-\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}\rangle \cup \langle t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}, \infty)$$
$$K = (-\infty, -t_{1-\alpha, n-1}\rangle$$
$$K = \langle t_{1-\alpha, n-1}, \infty);$$

Decyzja:

Jeżeli $T_{obs} \in K$, to odrzucamy H_0 na rzecz H_1.

Jeżeli $T_{obs} \notin K$, to nie ma podstaw do odrzucenia H_0.

Model 3. Test istotności dla wariancji σ^2

Cecha $X \sim N(\mu, \sigma)$;
Sformułowanie hipotezy zerowej i alternatywnej:

$$\mathrm{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, \qquad \mathrm{H}_1 : \begin{array}{l} \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \\ \sigma^2 < \sigma_0^2 \\ \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{array} ;$$

Statystyka testowa:

$$\chi^2_{obs} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{[n-1]};$$

Obszar krytyczny:

$$K = (0, \chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\rangle \cup \langle \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}, \infty)$$

$$K = (0, \chi^2_{\alpha, n-1}\rangle$$

$$K = \langle \chi^2_{1-\alpha, n-1}, \infty);$$

Decyzja:

Jeżeli $\chi^2_{obs} \in K$, to odrzucamy H_0 na rzecz H_1.

Jeżeli $\chi^2_{obs} \notin K$, to nie ma podstaw do odrzucenia H_0.

Model 4. Test istotności dla równości średnich jednej cechy w dwóch populacjach

Cecha X ma w dwóch populacjach rozkłady $N(\mu_1, \sigma_1)$ i $N(\mu_2, \sigma_2)$, σ_1, σ_2 - znane;
Sformułowanie hipotezy zerowej i alternatywnej:

$$\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2, \qquad \mathrm{H}_1 : \begin{array}{l} \mu_1 \neq \mu_2 \\ \mu_1 < \mu_2 \\ \mu_1 > \mu_2 \end{array} ;$$

Statystyka testowa:

$$Z_{obs} = \frac{\bar{x_1} - \bar{x_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1);$$

Obszar krytyczny:

$$K = (-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\rangle \cup \langle z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$$

$$K = (-\infty, -z_{1-\alpha}\rangle$$

$$K = \langle z_{1-\alpha}, \infty);$$

Decyzja:

Jeżeli $Z_{obs} \in K$, to odrzucamy H_0 na rzecz H_1.

Jeżeli $Z_{obs} \notin K$, to nie ma podstaw do odrzucenia H_0.

Model 5. Test istotności dla równości średnich jednej cechy mierzonej przed i po wykonaniu operacji - metoda zmiennych połączonych;
X - cecha mierzona przed operacją, Y - cecha mierzona po operacji,
$D = X - Y \sim N(\mu_D, \sigma_D)$, $\quad \sigma_D$ - znane;
Sformułowanie hipotezy zerowej i alternatywnej:

$$\mathrm{H}_0 : \mu_D = 0, \qquad \mathrm{H}_1 : \begin{array}{l} \mu_D \neq 0 \\ \mu_D < 0 \ ; \\ \mu_D > 0 \end{array}$$

Statystyka testowa:

$$Z_{obs} = \frac{\bar{D}}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1);$$

Obszar krytyczny:

$$K = (-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\rangle \cup \langle z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$$
$$K = (-\infty, -z_{1-\alpha}\rangle$$
$$K = \langle z_{1-\alpha}, \infty);$$

Decyzja:

Jeżeli $\quad Z_{obs} \in K, \quad$ to odrzucamy $\quad H_0 \quad$ na rzecz $\quad H_1$.

Jeżeli $\quad Z_{obs} \notin K, \quad$ to nie ma podstaw do odrzucenia $\quad H_0$.

Model 6. Test istotności dla równości średnich jednej cechy mierzonej przed i po wykonaniu operacji - metoda zmiennych połączonych;
X - cecha mierzona przed operacją, Y - cecha mierzona po operacji,
$D = X - Y \sim N(\mu_D, \sigma_D)$, $\quad \sigma_D$ - nieznane;
Sformułowanie hipotezy zerowej i alternatywnej:

$$\mathrm{H}_0 : \mu_D = 0, \qquad \mathrm{H}_1 : \begin{array}{l} \mu_D \neq 0 \\ \mu_D < 0 \ ; \\ \mu_D > 0 \end{array}$$

Statystyka testowa:

$$T_{obs} = \frac{\bar{D}}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{[n-1]};$$

Obszar krytyczny:

$$K = (-\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\rangle \cup \langle t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}, \infty)$$
$$K = (-\infty, -t_{1-\alpha,n-1}\rangle$$
$$K = \langle t_{1-\alpha,n-1}, \infty);$$

Decyzja:

Jeżeli $\quad T_{obs} \in K, \quad$ to odrzucamy $\quad H_0 \quad$ na rzecz $\quad H_1$.

Jeżeli $\quad T_{obs} \notin K, \quad$ to nie ma podstaw do odrzucenia $\quad H_0$.

Model 7. Test istotności dla proporcji p (założenie: $n\hat{p} \geq 5$, $n(1-\hat{p}) \geq 5$);

$$\mathrm{H}_0 : p = p_0, \qquad \mathrm{H}_1 : \begin{array}{l} p \neq p_0 \\ p < p_0 \ ; \\ p > p_0 \end{array}$$

Statystyka testowa:

$$Z_{obs} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1);$$

Obszar krytyczny:

$$K = (-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\rangle \cup \langle z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$$
$$K = (-\infty, -z_{1-\alpha}\rangle$$
$$K = \langle z_{1-\alpha}, \infty);$$

Decyzja:

Jeżeli $Z_{obs} \in K$, to odrzucamy H_0 na rzecz H_1.

Jeżeli $Z_{obs} \notin K$, to nie ma podstaw do odrzucenia H_0.

Model 8. Test istotności różnicy proporcji dwóch populacji (założenie: $n\widehat{p_i} \geq 5$, $n_i(1-\widehat{p_i}) \geq 5$ dla $i = 1, 2$);

$$\mathrm{H}_0 : p_1 = p_2, \qquad \mathrm{H}_1 : \begin{array}{l} p_1 \neq p_2 \\ p_1 < p_2 \ ; \\ p_1 > p_2 \end{array}$$

Statystyka testowa:

$$Z_{obs} = \frac{\widehat{p_1} - \widehat{p_2}}{\sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})\hat{p}(1-\hat{p})}} \sim N(0,1);$$

gdzie $\hat{p} = \frac{K_1+K_2}{n_1+n_2}$, zaś K_i oznacza liczbę elementów w i-tej próbie o zadanej cesze;

Obszar krytyczny:

$$K = (-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\rangle \cup \langle z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$$
$$K = (-\infty, -z_{1-\alpha}\rangle$$
$$K = \langle z_{1-\alpha}, \infty);$$

Decyzja:

Jeżeli $Z_{obs} \in K$, to odrzucamy H_0 na rzecz H_1.

Jeżeli $Z_{obs} \notin K$, to nie ma podstaw do odrzucenia H_0.