Rozwiązania zadań C06

Zad.1. Autobusy kursują co 15 minut. Osoba przychodzi na przystanek w losowo wybranym momencie (nie zna rozkładu jazdy).
1. Obliczyć prawdopodobieństwo, ze ta osoba będzie oczekiwała na autobus co najmniej 12.5 minuty.
2. Ile średnio będzie oczekiwała na autobus?
3. Wyznaczyć czas, dla którego czas oczekiwania tej osoby ma 90% szansę być krótszy.
Rozw.

- $X -$ czas oczekiwania na autobus
- $X \sim U(0,15)$

tzn X ma gęstość postaci

$$f(x) = \begin{cases} 1/15 & dla \quad x \in [0,15] \\ 0 & dla \quad x \notin [0,15] \end{cases}$$

1.

$$P(X \geq 12{,}5) = \int_{12{,}5}^{15} \frac{1}{15} dx = \frac{1}{15}(15 - 12{,}5) = \frac{2{,}5}{15}$$

2.

$$E(X) = \frac{0+15}{2} = 7{,}5$$

3.

$$P\left(X < q_{0,9}\right) = 0{,}9$$

$$F\left(q_{0,9}\right) = 0{,}9$$

Wyznaczymy dystrybuantę zmiennej losowej X.

Z postaci gęstości mamy $F(0) = 0$ oraz $F(15) = 1$.

Niech $0 \leq x \leq 15$. Wówczas

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{15} dt = \frac{1}{15} x.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & dla \quad x < 0 \\ x/15 & dla \quad 0 \leq x < 15 \\ 1 & dla \quad x \geq 15 \end{cases}$$

$$\frac{q_{0,9}}{15} = 0{,}9 \qquad q_{0,9} = 15 \cdot 0{,}9 = 13{,}5$$

Zad.2 Przypuśćmy, ze rozkład temperatur w styczniu (w st. C) w pewnej miejscowości jest jednostajny na odcinku [−10; +2].

1. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze losowo wybranego styczniowego dnia temperatura przekroczy 0 st. C?
2. Jaka jest średnia temperatura w styczniu w tej miejscowości?
Rozw.

- X – temperatura w styczniu w losowym dniu
- $X \sim U(-10; 2)$

1.

$$P(X > 0) = \int_0^\infty f(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{12}dx = \frac{1}{12} \cdot 2 = \frac{1}{6}$$

2.

$$E(X) = \frac{-10+2}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Zad.3 Czas świecenia żarówki ma rozkład wykładniczy z parametrem λ = 0, 001 (1/*godz*).
1. Ile godzin świeci średnio ta żarówka?

- X – czas świecenia żarówki
- $X \sim \exp(0{,}001)$

$$Y \sim \exp(\lambda) \implies E(Y) = \frac{1}{\lambda}, \quad F(y) = 1 - e^{-\lambda y}, dla\ y > 0$$

Odp. $E(X) = \frac{1}{0{,}001} = 1000$

2. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żarówka, którą właśnie wkręciliśmy do gniazdka, będzie świeciła co najmniej 650 godzin?

$$P(X \geq 650) = 1 - P(X < 650) = 1 - P(X \leq 650) = 1 - F(650) =$$

$$= 1 - (1 - e^{-0{,}001 \cdot 650}) = e^{-0{,}65} \cong 0{,}52205$$

„< = ≤" bo rozkład ciągły
3. Wyznaczyć czas świecenia, który osiągnie co najmniej
(i) 50% żarówek;
(ii) 95% żarówek.
Rozw.

(i) $P(X \geq q_{0,5}) = 0{,}5 \iff 1 - (1 - e^{-0{,}001 \cdot q_{0,5}}) = 0{,}5 \iff e^{-0{,}001 \cdot q_{0,5}} = 0{,}5 \iff$

$$-0{,}001 \cdot q_{0,5} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 \iff q_{0,5} = 1000 \cdot \ln 2 \cong 693{,}147$$

Odp. 50% żarówek będzie świeciło co najmniej 693,147 godz.

(ii) $P(X \geq q_{0,95}) = 0,95 \iff 1 - (1 - e^{-0,001 \cdot q_{09,5}}) = 0,95 \iff e^{-0,001 \cdot q_{0,95}} = 0,95 \iff$

$$-0,001 \cdot q_{0,95} = \ln 0,95 \iff q_{0,95} = -1000 \cdot \ln 0,95 \cong 51,293$$

Odp. 95% żarówek będzie świeciło co najmniej 51,293 godz.

Zad. 4 Czas naprawy pewnego urządzenia ma rozkład wykładniczy. Naprawa średnio trawa 2 godziny.
(a) Jakie jest prawdopodobieństwo, ze dla danego urządzenia jego czas naprawy przekroczy 2 godziny?
(b) Urządzenie jest naprawiane już 9 godzin. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze jego naprawa skończy się przed upływem 10 godzin?

Rozw.

- X – czas naprawy urządzenia
- $X \sim \exp(\lambda) \implies E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $E(X) = 2 \implies 2 = \frac{1}{\lambda} \implies \lambda = \frac{1}{2}$

(a) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 2}\right) = e^{-1} \cong 0,36788$
(b)

$$P(X < 10 | X \geq 9) = \frac{P(9 \leq X < 10)}{P(X \geq 9)} = \frac{F(10) - F(9)}{1 - F(9)} = \frac{1 - e^{-2 \cdot 10} - (1 - e^{-2 \cdot 9})}{e^{-2 \cdot 9}} =$$

$$= \frac{e^{-2 \cdot 9}(1 - e^{-2 \cdot 1})}{e^{-2 \cdot 9}} = 1 - e^{-2 \cdot 1} \cong 0,86466$$

Zauważmy własność braku pamięci rozkładu wykładniczego:

$$P(X < 10 | X \geq 9) = P(X < 9 + 1 | X \geq 9) = P(X < 1)$$

Zad. 5 Niech *U* będzie zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym. Wyznaczyć takie stałe c_1 i c_2, że

$$P(U > c_1) = 0,05 \quad \text{oraz} \quad P(|U| > c_2) = 0,05$$

Rozw.

(a) $P(U > c_1) = 1 - P(U \leq c_1) = 1 - \Phi(c_1) = 0,05 \iff \Phi(c_1) = 0,95 \implies c_1 = z_{0.95}$

$$c_1 = z_{0.95} = 1,64485$$

(b) $P(|U| > c_2) = 1 - P(|U| \leq c_2) = 1 - P(-c_2 \leq U \leq c_2) = 0,05 \iff$

$$\Leftrightarrow \quad P(-c_2 \le U \le c_2) = 0{,}95 \qquad \Rightarrow$$

$$P(U \le -c_2) = P(U \ge c_2) = \frac{1-0{,}95}{2} = 0{,}025 \quad \Rightarrow \quad 1 - P(U < c_2) = 0{,}025 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P(U < c_2) = P(U \le c_2) = 0{,}975 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(c_2) = 0{,}975 \quad \Rightarrow$$

$$c_2 = z_{0.975} = 1{,}95996$$

Uwaga:
Rys. poniżej uzasadnia zależności: dla $c > 0$

$$P(U \le -c) = P(U \ge c) \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(-c) = 1 - \Phi(c)$$

This area is equal to the area between −2.13 and 0 *plus* the area to the right of 0. Now the area between −2.13 and 0 is the same as the area between 0 and 2.13 and is equal to 0.4834. Also, the area to the right of 0 is 0.5. Hence

$$P(Z > -2.13) = 0.4834 + 0.5$$
$$= 0.9834$$

(b) $P(Z < -1.81)$ is equal to the area to the left of −1.81, which, due to symmetry, is equal to the area to the right of 1.81, as can be seen from Figure 6-10. This, in turn, is equal to the area to the right of 0 *minus* the area between 0 and 1.81. Hence

$$P(Z < -1.81) = 0.5 - 0.4649$$
$$= 0.0351$$

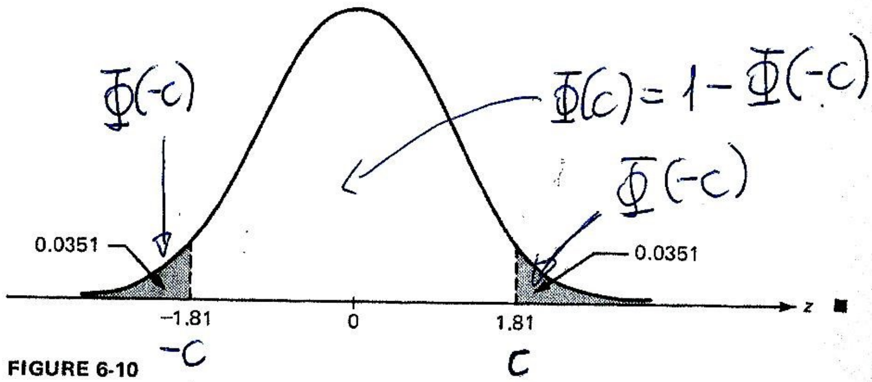

FIGURE 6-10

EXAMPLE 5 Suppose Z is a standard normal variable. In each of the following cases, find c for which

(a) $P(Z \leqslant c) = 0.1151$ (b) $P(Z \leqslant c) = 0.8238$
(c) $P(1 \leqslant Z < c) = 0.1525$ (d) $P(-c < Z < c) = 0.8164$

SOLUTION In this example we are given the areas and want to read the values along the horizontal axis.

(a) Since the area to the left of c is 0.1151, and since it is less than 0.5, c must be located to the left of 0 as in Figure 6-11. Hence c is negative. Now, due to symmetry, the area between 0 and $-c$ is $0.5 - 0.1151 = 0.3849$. But from Table A-3, the area between 0 and 1.2 is 0.3849. Hence $-c = 1.2$, so that $c = -1.2$.

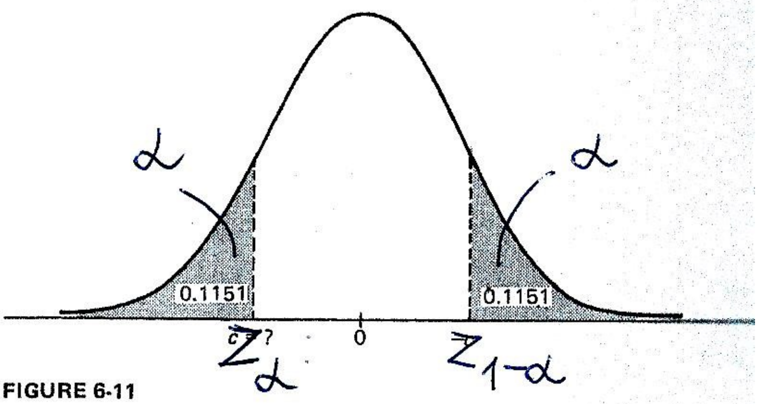

FIGURE 6-11

(b) Since $P(Z \leqslant c) = 0.8238$, c is to the right of 0; that is, c is p
Also, as can be seen from Figure 6-12, the area between 0 a
equal to $0.8238 - 0.5 = 0.3238$. From Table A-3, the area b
0 and 0.93 is 0.3238. Therefore, $c = 0.93$.

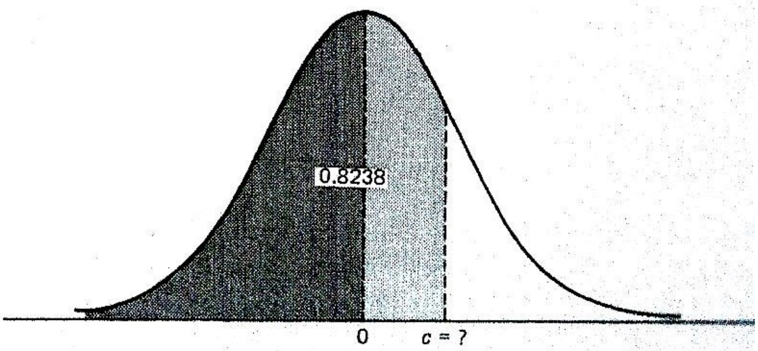

FIGURE 6-12

(c) Since $P(1 \leqslant Z < c) = 0.1525$, the area between 1 and c is eq
0.1525. Now the area between 0 and 1 is 0.3413. Hence

$$P(0 < Z < c) = 0.3413 + 0.1525$$
$$= 0.4938$$

We have the situation shown in Figure 6-13. Referring back
A-3, it follows that $c = 2.5$.

(d) $P(-c < Z < c) = 0.8164$. Therefore, on account of symmetr

$$P(0 < Z < c) = \tfrac{1}{2}(0.8164)$$
$$= 0.4082$$

Zad.6 Stwierdzono, ze iloraz inteligencji IQ osób w pewnej populacji ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej 100 i wariancji 225.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, ze iloraz inteligencji losowo wybranej osoby przekracza 125.

b) Wyznaczyć frakcję osób, których IQ zawiera się w przedziale od 95 do 110.

c) Wyznaczyć wartość IQ, której nie przekracza 70% badanej populacji osób.

Rozw.

Niech zmienna losowa X oznacza IQ losowo wybranej osoby z badanej populacji. Wiemy, że X ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej μ=100 oraz wariancji σ^2= 225, co w skrócie zapisujemy jako:

$$X \sim N(100{,}15)$$

(a) Należy wyznaczyć $P(X$>125).
Skorzystamy z tw., że standaryzowana zmienna losowa

$$Z = \frac{X - 100}{15} \sim N(0{,}1)$$

oraz z tablic wartości dystrybuanty $\Phi(\cdot)$ zmiennej losowej Z.

Uwaga. Działania arytmetyczne na zmiennych losowych są takie same jak na liczbach, gdyż przekształcamy wartości zmiennych losowych, jak np. poniżej

$$\{X > 125\} := \{s \in S : X(s) > 125\} = \left\{s : \frac{X(s) - 100}{15} > \frac{125 - 100}{15}\right\} =$$

$$=: \left\{\frac{X - 100}{15} > \frac{125 - 100}{15}\right\}$$

Stąd w naszym przypadku mamy

$$P(X > 125) = P\left(\frac{X - 100}{15} > \frac{125 - 100}{15}\right) = P\left(Z > \frac{5}{3}\right) =$$

$$= 1 - P\left(Z \le \frac{5}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{3}\right) = 1 - \Phi(1{,}6667) \cong 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$$

(b)

$$P(95 < X < 110) = P\left(\frac{95 - 100}{15} < \frac{X - 100}{15} < \frac{110 - 100}{15}\right) =$$

$$P\left(-\frac{5}{15} < Z < \frac{10}{15}\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = \Phi(0{,}6667) - \left(1 - \Phi(0{,}3333)\right) =$$

$$= 0{,}7486 - 1 + 0{,}6923 = 0{,}4409$$

(c) Znaleźć stałą c taką, że $P(X \le c)$=0,7.

Z definicji kwantyla $c = q_{0{,}7}$:

$$P(X \le q_{0,7}) = P\left(\frac{X-100}{15} \le \frac{q_{0,7}-100}{15}\right) = \Phi\left(\frac{q_{0,7}-100}{15}\right) = 0{,}7 \qquad (*)$$

Niech $z_{0,7}$ będzie kwantylem rzędu 0,7 zmiennej $Z \sim N(0,1)$, tzn $\Phi(z_{0,7}) = 0{,}7$

Zatem, uwzględniając (*), mamy

$$\Phi\left(\frac{q_{0,7}-100}{15}\right) = 0{,}7 = \Phi(z_{0,7})$$

Dystrybuanta $\Phi(z), z \in (-\infty, \infty)$ jest funkcją ściśle rosnącą, bo jest funkcją górnej granicy całki z funkcji dodatniej:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Zatem:

$$\Phi\left(\frac{q_{0,7}-100}{15}\right) = \Phi(z_{0,7}) \iff \frac{q_{0,7}-100}{15} = z_{0,7} \iff$$

$$q_{0,7} = 100 + 15 \cdot z_{0,7}$$

$$\Phi(0{,}52440) = 0{,}7 \Longrightarrow z_{0,7} = 0{,}52440$$

Odp.

$$c = q_{0,7} = 100 + 15 \cdot z_{0,7} = 100 + 15 \cdot 0{,}52440 = 107{,}866$$

Zad. 7 Ciężar beli wełny ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej 100 *kg* oraz wartości oczekiwanej 100 *kg* oraz wariancji 25 *kg*.
Ile przeciętnie spośród 1000 bel będzie miało ciężar pomiędzy 95 a 107 kilogramów?

Rozw.

- $X -$ ciężar beli wełny
- $X \sim N(100{,}5)$

$$\frac{N}{1000} \approx P(95 < X < 107)$$

$$P(95 < X < 107) = P\left(\frac{95-100}{5} < \frac{X-100}{5} < \frac{107-100}{5}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{7}{5}\right) - \Phi(-1) = \Phi(1{,}4) - \left(1 - \Phi(1)\right) = 0{,}919243 + 0{,}841345 - 1 = 0{,}760588$$

$$N \approx 1000 \cdot 0{,}760588 \quad \Longrightarrow$$

Odp. Przeciętnie 760 na 1000 bel będzie miało ciężar od 55 kg do 107kg .

Zad. 8 Waga cukru pakowanego w torebki 1kg przez maszynę paczkującą ma rozkład normalny o odchyleniu standardowym 20g. Istnieje możliwość ustawienia maszyny paczkującej w zakresie wartości średniej pakowanego cukru z dokładnością do 1 grama, przy nie zmienionym odchyleniu standardowym.
Przepisy (UK - 1979 Weights and Measeres Act) dotyczące pakowania cukru mówią, że
(1) średnio w torebkach ma być co najmniej 1000g;
(2) nie więcej niż 2,5% paczek zawiera mniej niż 975g;
(3) nie więcej niż 1 na 10 000 paczek zawiera mniej niż 950g.
W chwili obecnej maszyna ustawiona jest na pakowanie średnio 1010g.
(1) Ile procent torebek zawiera mniej niż 975g cukru?;
(2) Ile procent torebek zawiera mniej niż 950g cukru?;
(3) Jaka minimalna wartość średnia wagi cukru powinna być ustawiona, aby spełnione były wymagania zawarte w przepisach?

Rozw.

Niech zmienna losowa X będzie wagą losowo wybranej paczki cukru. Z treści zadania X~N(1010,20).
1) Należy znaleźć $P(X<975)$

$P(X<975)=P(X-101020<975-101020)=P(Z<-1,75)=\Phi(-1,75)=1-\Phi(1,75)\cong 1-0,9599=0,0401$
Odp. 4,01% paczek zawiera mniej niż 975 gram

2) $P(X<950)=P(X-101020<950-101020)=P(Z<-3)=\Phi(-3)=1-\Phi(3)=1-0,998650=0,00135$
Odp. 0,135% paczek zawiera mniej niż 950 gram
3) Niech μ oznacza wartość średnią zmiennej losowej X~$N(\mu,20)$ spełniającą wymagania 1) - 3):

1) $\mu \geq 1000$

2) Procent paczek o wadze < 975 jest nie większy niż 2,5%.

$P(X<975)\cdot 100\leq 2,5 \Leftrightarrow P(X<975)\leq 0,025$ $P(X<975)=P(X-\mu 20<975-\mu 20)=P(Z<975-\mu 20)\leq 0,025$ $\Leftrightarrow$
$\Phi(975-\mu 20)\leq 0,025 \Leftrightarrow \Phi(975-\mu 20)\leq \Phi(z0,025) \Leftrightarrow 975-\mu 20 \leq z0,025 \Leftrightarrow$
$975-\mu\leq 20\cdot z0,025 \Leftrightarrow \mu\geq 975+20\cdot(-1,96) \Leftrightarrow \mu\geq 975-39,2=935,8$
$(\Phi(z0,025)=0,025 \Longrightarrow z0,025=-z0,975\cong -1,96)$
3)

Proporcja (frakcja, częstość) paczek o wadze < 950 jest nie większa niż 1/10000, tzn.

$P(X<950)\leq 0{,}0001 \Leftrightarrow P(Z<950-\mu 20)\leq \Phi(z0{,}0001) \Leftrightarrow \Phi(950-\mu 20)\leq \Phi(-z0{,}9999)\cong \Phi(-3{,}72) \Leftrightarrow$
$950-\mu 20\leq -3{,}72 \Leftrightarrow$
$\mu\geq 950+20\cdot 3{,}72 \Leftrightarrow \mu\geq 1024{,}4$
Minimalne μ spełniające
1) $\mu\geq 1000$ i 2) $\mu\geq 935{,}8$ i 3) $\mu\geq 1024{,}4$

i dodatkowo z dokładnością do 1 g, to μ=1025.
Odp. Najmniejsza średnia spełniająca 1)-3), to $\mu=1025$