

Rozwiązania zadań C07

Zad.1. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład łączny:

$$p_{11} = 0,15; \quad p_{12} = 0,35; \quad p_{21} = 0,15; \quad p_{22} = 0,35$$

Dyskretne zmienne losowe X, Y są niezależne \Leftrightarrow dla każdej pary wartości x, y

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y).$$

W zadaniu wartości są oznaczane parą indeksów: pierwszy dotyczy wartości zmiennej X , a drugi wartości zmiennej Y . Zatem

$$X, Y \text{ są niezależne} \Leftrightarrow p_{ij} = p_{i.} \cdot p_{.j} \text{ dla } i = 1, 2, j = 1, 2. \quad (*)$$

X ma rozkład (brzegowy): $p_{1.} = p_{11} + p_{12} = 0,15 + 0,35 = 0,5$

$$p_{2.} = p_{21} + p_{22} = 0,15 + 0,35 = 0,5$$

Y ma rozkład (brzegowy): $p_{.1} = p_{11} + p_{21} = 0,15 + 0,15 = 0,3$

$$p_{.2} = p_{12} + p_{22} = 0,35 + 0,35 = 0,7$$

Sprawdzamy równości po prawej stronie (*):

$$p_{1.} \cdot p_{.1} = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15 = p_{11}.$$

$$p_{1.} \cdot p_{.2} = 0,5 \cdot 0,7 = 0,35 = p_{12}$$

$$p_{2.} \cdot p_{.1} = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15 = p_{21}$$

$$p_{2.} \cdot p_{.2} = 0,5 \cdot 0,7 = 0,35 = p_{22}$$

Spełnione są równości (*), więc zmienne X, Y są niezależne.

Zad.2.

y	-1	0	1	$f_X(x)$
x				
2	0,3	0,1	0,1	0,5
4	0,1	0,1	0,3	0,5
$f_Y(y)$	0,4	0,2	0,4	1

- Wyznaczyć rozkłady brzegowe zmiennych X oraz Y .
- Czy X, Y są niezależne?
- Wyznaczyć momenty zwykłe rzędu drugiego zmiennej X oraz Y .

Rozw.

$$a) \quad P(X = x) = P(\{X = x, Y = -1\} \cup \{X = x, Y = 0\} \cup \{X = x, Y = 1\}) =$$

$$= P(X = x, Y = -1) + P(X = x, Y = 0) + P(X = x, Y = 1) = f(x, -1) + f(x, 0) + f(x, 1),$$

gdzie $x = 2,4$.

x	2	4
$f_X(x) = P(X = x)$	0,5	0,5

y	-1	0	1
$f_Y(y) = P(Y = y)$	0,4	0,2	0,4

b) $f_X(2)f_Y(-1) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2 \neq 0,3 = f(2, -1) \Rightarrow X, Y$ są zaleźnymi zmiennymi losowymi.

c) **Definicja.** Niech k będzie liczbą naturalną ustaloną. Momentem zwykłym rzędu k zmiennej losowej X nazywamy liczbę:

$$m_k := E(X^k)$$

Moment zwykły rzędu 1, to wartość oczekiwana zmiennej X , a moment zwykły rzędu 2, to $E(X^2)$.

W zadaniu należy obliczyć $E(X^2)$, $E(Y^2)$.

$$E(X^2) = 2^2 \cdot 0,5 + 4^2 \cdot 0,5 = 10,$$

$$E(Y^2) = (-1)^2 \cdot 0,4 + 0^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,4 = 0,8.$$

Zad.3.

y	1	2	3	$f_X(x)$
x				
0	0,1	0,2	0,3	0,6
1	0,1	0,1	0,2	0,4
$f_Y(y)$	0,2	0,3	0,5	1

Obliczyć $E(X), E(Y), Var(X), Var(Y)$

$$1) E(X) = 0 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,4 = 0,4, \quad E(X^2) = 0^2 \cdot 0,6 + 1^2 \cdot 0,4 = 0,4,$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0,4 - 0,16 = 0,24$$

$$2) E(Y) = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,5 = 2,3, \quad E(Y^2) = 1^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,3 + 3^2 \cdot 0,5 = 5,9,$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 5,9 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 5,4555.$$

Zad.4.

y	2	3	4	$f_X(x)$
x				
0	0,1	0,2	0	0,3
1	0	0,1	0	0,1
2	0,2	0,3	0,1	0,6
$f_Y(y)$	0,3	0,6	0,1	1

a) $E(X) = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,6 = 1,3$, $E(Y) = 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,1 = 2,8$,

b) $f_X(0)f_Y(2) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09 \neq 0,1 = f(0,2) \Rightarrow X, Y$ są zaleźnymi zmiennymi losowymi.

$x \backslash y$	2	3	4
0	0,1	0,2	0
1	0	0,1	0
2	0,2	0,3	0,1

c) $F(1,2) = P(X \leq 1, Y \leq 2) = f(0,2) + f(1,2) = 0,1 + 0 = 0,1$,

$F(1,5; 3,5) = P(X \leq 1,5, Y \leq 3,5) = f(0,2) + f(0,3) + f(1,2) + f(1,3) = 0,1 + 0,2 + 0 + 0,1 = 0,4$

$$P(X < 2 | Y > 2) = \frac{P(X < 2, Y > 2)}{P(Y > 2)} = \frac{f(0,3) + f(0,4) + f(1,3) + f(1,4)}{P(Y = 3) + P(Y = 4)} =$$

$$= \frac{0,2 + 0 + 0,1 + 0}{0,6 + 0,1} = \frac{3}{7}$$

Wyznaczyć rozkład warunkowy Y pod warunkiem $X=2$, tzn. znaleźć warunkową funkcję prawdopodobieństwa

$$f_{Y|X}(y|2) = P(Y = y | X = 2) = \frac{P(Y = y, X = 2)}{P(X = 2)}, \quad y = 2, 3, 4$$

$x \backslash y$	2	3	4
0	0,1	0,2	0
1	0	0,1	0
2	0,2	0,3	0,1

1) $y = 2 \Rightarrow f_{Y|X}(2|2) = P(Y = 2 | X = 2) = \frac{P(Y=2, X=2)}{P(X=2)} = \frac{f(2,2)}{f_X(2)} = \frac{0,2}{0,6}$

2) $y = 3 \Rightarrow f_{Y|X}(3|2) = P(Y = 3 | X = 2) = \frac{P(Y=3, X=2)}{P(X=2)} = \frac{f(2,3)}{f_X(2)} = \frac{0,3}{0,6}$

3) $y = 4 \Rightarrow f_{Y|X}(4|2) = P(Y = 4 | X = 2) = \frac{P(Y=4, X=2)}{P(X=2)} = \frac{f(2,4)}{f_X(2)} = \frac{0,1}{0,6}$

Rozkład warunkowy Y pod warunkiem $X = 2$ określa tabela:

y	2	3	4
$f_{Y X}(y 2)$	2/6	3/6	1/6

Zad. 5.

$$f(x, y) = \begin{cases} (3/2)x^2y & \text{dla } 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases}$$

a) Znaleźć funkcję rozkładu brzegowego zmiennej X.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^2 f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^2 (3/2)x^2 y dy = \left(\frac{3}{2}\right)x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 = 3x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases}$$

b) Znaleźć funkcję rozkładu brzegowego zmiennej Y oraz obliczyć $P(Y>1)$.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 f(x,y)dx$$

1) Niech $y < 0$ lub $y > 2$. Wówczas dla dowolnego x: $f(x,y)=0$. Zatem

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 0dx = 0$$

2) Niech $0 \leq y \leq 2$. Wówczas

$$f(x,y) = \begin{cases} (3/2)x^2 y & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{dla } (x,y) \notin [0,1] \times [0,2] \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^2 y dx = \frac{3}{2}y \int_0^1 x^2 dx = \frac{3}{2}y \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{3}{2}y \frac{1}{3} = \frac{1}{2}y$$

Z 1) i 2) mamy:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0,5y & \text{dla } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{dla } y < 0 \text{ lub } y > 2 \end{cases}$$

$$P(Y > 1) = P(1 < Y < \infty) = \int_1^{\infty} f_Y(y)dy = \int_1^2 \frac{1}{2}y dy = \frac{1}{2} \frac{y^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

c) Sprawdzić, czy zmienne X, Y są niezależne.

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0,5y & \text{dla } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{dla } y < 0 \text{ lub } y > 2 \end{cases}, \quad f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \text{ lub } x > 1 \end{cases}$$

Zmienne X, Y są niezależne $\Leftrightarrow F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$, dla wszystkich $(x,y) \Leftrightarrow$ dla każdej pary (x,y) zachodzi: $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, poza być może skończoną liczbą punktów.

Sprawdzimy ostatnią równość dla gęstości:

1) Niech (x,y) spełniają nierówności: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$. Wówczas:

$$f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 y = (3x^2) \frac{1}{2}y = f_X(x)f_Y(y)$$

2) Niech $x \notin [0,1]$ lub $y \notin [0,2]$. Wówczas:

$$f(x,y) = 0 = 0 \cdot 0 = f_X(x)f_Y(y)$$

Z 1) i 2) X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Zad. 6. Znaleźć taką stałą k , aby funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy & \text{dla } 1 \leq x \leq 2, \quad 2 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{w rzeczywistym przypadku} \end{cases}$$

Była funkcją gęstości dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) .

a) Obliczyć $F(1, 3)$. b) Wyznaczyć funkcje gęstości rozkładów brzegowych X i Y .

Rozw.

Funkcja $f(x, y)$, $(x, y) \in (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$ jest funkcją gęstości dwuwymiarowej zm. losowej $(X, Y) \Leftrightarrow$ 1. $f(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$

2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

1. $k \geq 0$

2.

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_1^2 \int_2^4 kxy dy dx = k \int_1^2 \left(\int_2^4 xy dy \right) dx = k \int_1^2 \left(x \int_2^4 y dy \right) dx = \\ &= k \int_1^2 x \left(\frac{y^2}{2} \Big|_2^4 \right) dx = k \left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) \int_1^2 x dx = k \cdot 6 \cdot \left(\frac{x^2}{2} \Big|_1^2 \right) = 6k \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) = \frac{3}{2} 6k = 9k \\ 9k &= 1 \Rightarrow k = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

a)

$$F(1, 3) = P(X \leq 1, Y \leq 3) = \int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^3 f(x, y) dy dx = \int_1^1 \int_2^3 \frac{1}{9} xy dy dx = \int_1^1 \frac{1}{9} x \left(\int_2^3 y dy \right) dx = 0$$

b) $f_X(x) = ?$, $f_Y(y) = ?$

1. Dla $x < 1$ lub $x > 2$, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy = 0$,

$$\text{Dla } 1 \leq x \leq 2, f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_2^4 \frac{1}{9} xy dy = \frac{1}{9} x \left(\frac{y^2}{2} \Big|_2^4 \right) = \frac{1}{9} x \left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) = \frac{6}{9} x = \frac{2}{3} x$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & x \notin [1,2] \end{cases}$$

2.

$$\text{Dla } y < 2 \text{ lub } y > 4, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dx = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Dla } 2 \leq y \leq 4, \quad f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_1^2 \frac{1}{9} xy dx = \frac{1}{9} y \left(\frac{x^2}{2} \Big|_1^2 \right) = \frac{1}{9} y \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) = \frac{1}{9} y \cdot \frac{3}{2} = \\ &= \frac{1}{6} y \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}\right)^y, & 2 \leq y \leq 4 \\ 0 & y \notin [2,4] \end{cases}$$