RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

ZMIENNE LOSOWE

Zmienne losowe jednowymiarowe

W dowolnym eksperymencie losowym mamy do czynienia z bardzo dużą liczbą możliwych wielkości, które można obserwować, mierzyć itp. Jednakże w większości przypadków, przeprowadzający eksperyment, ogranicza się do rejestracji jedynie kilku z nich, gdyż pozostałe albo są nieistotne z punktu widzenia badacza, albo nie wnoszą nic istotnego do analizy badanego eksperymentu.
Na przykład

- przy rzucie kostką do gry, często jesteśmy zainteresowani sumą oczek na dwóch kostkach, a nie poszczególnymi wynikami;
- w problemie badania jakości komponentów dostarczanych nam przez dostawcę zewnętrznego, zwykle rejestrujemy liczbę komponentów, które uległy uszkodzeniu przed ustalonym czasem T, a nie czasy poprawnej pracy poszczególnych komponentów.

W ogólności, każdemu wynikowi eksperymentu (zdarzeniu elementarnemu) możemy przypisać, wg określonej reguły, wartość lub wartości pewnych cech nas interesujących.

Taką regułę przypisania (funkcję) będziemy nazywać **zmienną losową (zm. los.)**.

Zmienne losowe mogą być jedno- lub wielowymiarowe (jedna lub wiele cech). Na razie prześledzimy zachowanie się zm. los. jednowymiarowych.

Definicja.

Zmienną losową (jednowymiarową) X określoną na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazywamy taką funkcję rzeczywistą

$$X : \Omega \longrightarrow \mathcal{R},$$

że dla każdego $x \in \mathcal{R}$ zbiór

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{F}$$

jest zdarzeniem losowym.

Zmienne losowe zwykle oznaczamy dużymi literami z końca alfabetu, jak X, Y, Z itp.. Ponadto oznaczmy przez $\mathcal{X}$ ($\mathcal{S}_X$) zbiór wartości (**nośnik**) zm.los. X ($\mathcal{X} = \mathcal{S}_X = X(\Omega)$).

Uwaga.

Bezpośrednio z definicji zm. los. wynika, że $\forall x \in \mathcal{R}$ możemy zdefiniować prawdopodobieństwo

$$P(X \leqslant x) = P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}\right).$$

Definicja.

Dystrybuantą F zmiennej losowej X nazywamy określoną na prostej $x \in \mathcal{R}$ funkcję

$$F(x) = P(X \leqslant x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}).$$

Oznacza to, że F jest funkcją prawdopodobieństwa zdarzenia losowego, że zm. los. X przyjmuje wartości mniejsze bądź równe wartości x.
Dlatego czasami mówi się, że jest funkcją rozkładu prawdopodobieństwa skumulowanego (ang. *cumulative distribution function - cdf*).

Własności dystrybuanty

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{i} \quad \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$
2. Dystrybuanta jest funkcją niemalejącą.
3. Dystrybuanta jest funkcją prawostronnie ciągłą.

Twierdzenie 1.

Warunki 1-3 są warunkami koniecznymi i dostatecznymi (WKD) na, aby funkcja rzeczywista F była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej.

Przykład

Rozważmy trzykrotny rzut symetryczną monetą. Niech X oznacza liczbę orłów. Znaleźć dystrybuantę F zm. los. X.

Rozwiązanie.

Zakładając niezależność poszczególnych rzutów, otrzymujemy zbiór ośmiu jednakowo prawdopodobnych zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ROO, ORR, ROR, RRO, RRR\}.$$

Jest oczywistym, że nośnikiem zm.los. X jest $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3\}$, oraz and

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\} = \{RRR\}, \text{ i } P(X = 0) = \frac{1}{8}.$$

Podobnie

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\} = \{ORR, ROR, RRO\}, \text{ i } P(X = 1) = \frac{3}{8},$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 2\} = \{OOR, ORO, ROO\}, \text{ i } P(X = 2) = \frac{3}{8},$$

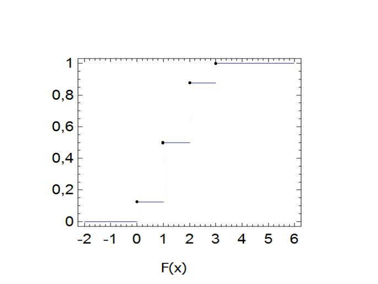
oraz

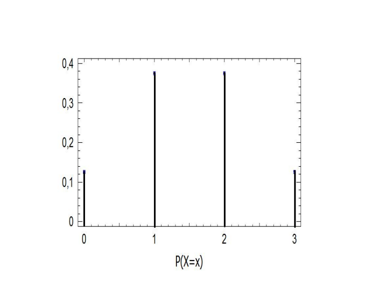
$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 3\} = \{OOO\}, \text{ i } P(X = 3) = \frac{1}{8}.$$

Zatem dystrybuanta F ma postać:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{dla} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{dla} \quad 1 \leqslant x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{dla} \quad 2 \leqslant x < 3 \\ 1 & \text{dla} \quad 3 \leqslant x \end{cases}$$

Ponadto, możemy znaleźć wykresy dystrybuanty $F(x)$ oraz funkcji $p(x) = P(X = x)$ dla $x \in \mathcal{X}$.





Twierdzenie 2.

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b, $(a \leqslant b)$,

$$P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a).$$

Dowód.

Ponieważ $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant a\} \subset \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant b\}$, to

$$\begin{aligned} P(a < X \leqslant b) &= P(\{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leqslant b\}) = \\ &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant b\} - \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant a\}) = \\ &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant b\}) - P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant a\}) = \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Dany jest dowolny ciąg $\epsilon_n > 0$, gdzie $n \in \mathcal{N}$ oraz $\epsilon_n \searrow 0$. Wówczas dla dowolnego $a \in R$

$$P(a - \epsilon_n < X \leqslant a) = F(a) - F(a - \epsilon_n) \longrightarrow_{n \to \infty} F(a) - F(a^-),$$

jednocześnie mamy, że

$$\{\omega \in \Omega : a - \epsilon_n < X(\omega) \leqslant a\} \longrightarrow_{n \to \infty} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\}.$$

Zatem

$$\forall a \in R \qquad P(X = a) = F(a) - F(a^-).$$

$F(a^-)$ oznacza lewostronną granicę dystrybuanty F w a.

Uwaga.

$$P(X = a) = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

dystrybuanta F jest ciagła w a.

Uwaga.

Dla dowolnych a i b, $(a \leqslant b)$,

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a^-).$$

$$P(a \leqslant X < b) = F(b^-) - F(a^-).$$

Typy zmiennych losowych

Zmienne losowe typu dyskretnego

Definicja.
Zmienną losową, dla której nośnik $\mathcal{X}$ jest zbiorem przeliczalnym (skończonym lub nie) nazywamy zmienną losową **typu dyskretnego**.

Innymi słowy dla zm. los. typu dyskretnego X *nośnik ma postać* $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$. *Wówczas, przyjmujemy, że dla każdego* $x_i \in \mathcal{X}$, $P(X = x_i) > 0$ *oraz* $P(X = x) = 0$ *jeżeli* $x \notin \mathcal{X}$.

Definicja. Dla dowolnego $a \in R$ funkcję

$$p(a) = P(X = a)$$

nazywamy **funkcją prawdopodobieństwa** zm. los. typu dyskretnego.

Z przykładu zm. los. X będącej liczbą orłów przy trzykrotnym rzucie symetryczną monetą nośnikiem jest zbiór $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3\}$, a funkcja prawdopodobieństwa jest równa $p(0) = p(3) = 1/8$, $p(1) = p(2) = 3/8$.

Własności funkcji prawdopodobieństwa

Dla dowolnej zm. los. X typu dyskretnego o nośniku $\mathcal{X}$, mamy

1. $p(x) \geqslant 0, \quad \mathrm{dla} \quad \mathrm{dowolnego}\ x \in R.$
2. $\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = 1.$

Twierdzenie 3.

Warunki 1-2 są warunkami koniecznymi i wystarczającymi na to, aby funkcja $p(\cdot)$ była funkcją prawdopodobieństwa pewnej zmiennej losowej typu dyskretnego.

Dystrybuanta F zmiennej losowej typu dyskretnego X może być wyznaczona z funkcji prawdopodobieństwa $p(\cdot)$.

Postać dystrybuanty zmiennej losowej typu dyskretnego

Dla dowolnej zm.los. typu dyskretnego X o nośniku $\mathcal{X}$, mamy

$$F(x) = \sum_{\{x_i \in \mathcal{X} : x_i \leqslant x\}} p(x_i).$$

Załóżmy, że wartości zm. los. X są uporządkowane $x_1 < x_2 < \ldots$. Wówczas dystrybuanta F jest funkcją schodkową (skokową), tzn. wartość F jest stała na każdym z przedziałów $[x_{i-1}, x_i)$ a wartość jej skoku jest równa $p(x_i)$ w punkcie x_i.

Przykład.

Funkcja prawdopodobieństwa zm.los. X podana jest w tabelce poniżej

x	1	2	3	4
$p(x)$	0.4	0.3	0.2	0.1

Znaleźć dystrybuantę F oraz naszkicować jej wykres.

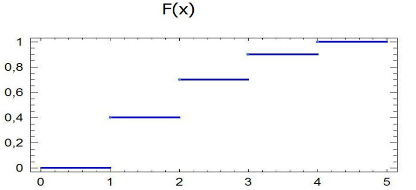
Rozwiązanie.

Wyznaczmy najpierw wartości F dla punktów nośnika $x \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} F(1) &= P(X \leqslant 1) = p(1) = 0.4; \\ F(2) &= P(X \leqslant 2) = p(1) + p(2) = 0.4 + 0.3 = 0.7; \\ F(3) &= P(X \leqslant 3) = p(1) + p(2) + p(3) = 0.4 + 0.3 + 0.2 = 0.9; \\ F(4) &= P(X \leqslant 4) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = \\ &= 0.4 + 0.3 + 0.2 + 0.1 = 1 \end{aligned}$$

Wówczas dystrybuanta F jest równa

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 1 \\ 0.4 & \text{dla} \quad 1 \leqslant x < 2 \\ 0.7 & \text{dla} \quad 2 \leqslant x < 3 \\ 0.9 & \text{dla} \quad 3 \leqslant x < 4 \\ 1 & \text{dla} \quad 4 \leqslant x \end{cases}$$



Definicja.
Mowimy, że zm.los. X ma **dyskretny rozkład jednostajny na skończonym zbiorze** $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $n \in \mathcal{N}$, oznaczmy to $X \sim UD(\mathcal{X})$, jeżeli $\mathcal{X}$ jest nośnikiem X oraz dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, n$, mamy

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}.$$

Wartość oczekiwana zmiennej losowej

- Pojęcie wartości oczekiwanej jest jednym z najważniejszych pojęć w rachunku prawdopodobieństwa.
- Koncepcja wartości oczekiwanej jest związana z określeniem **"środka masy prawdopodobieństwa"**.

Wartość oczekiwana zmiennej losowej typu dyskretnego

Definicja.
Jeżeli X jest zmienną losową typu dyskretnego o nośniku $\{x_1, x_2, \ldots\}$, to **wartość oczekiwana** X, oznaczana jako $\mathrm{E(X)}$, zdefiniowana jest jako

$$E(X) = \sum_{x_i \in \mathcal{X}} x_i \cdot P(X = x_i),$$

jeżeli szereg po prawej stronie jest zbieżny bezwzględnie. Jeżeli szereg po prawej stronie nie jest zbieżny, to mówimy, że wartość oczekiwana X nie istnieje.

Można powiedzieć, że wartość oczekiwana X jest średnią ważoną możliwych wartości X z wagami będącymi prawdopodobieństwami ich przyjęcia.

Przykład. *Niech X będzie zm. los. o rozkładzie jednostajnym dyskretnym na zbiorze $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, gdzie $n \in \mathcal{N}$, tzn. dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, n$, $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$. Obliczyć wartość oczekiwaną zm. los. X.*

Rozwiązanie.
Wartość oczekiwana równa jest

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{n} = \bar{X},$$

gdzie $\bar{X}$ oznacza średnią arytmetyczną wartości x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

Definicja.
Jeżeli $Y = g(X)$ a zm. los. X ma znany rozkład prawdopodobieństwa, to

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) \cdot P(X = x_i)$$

pod warunkiem, że szereg jest absolutnie zbieżny.

Twierdzenie.
Jeżeli istnieje wartość oczekiwana $E(X)$ zmiennej losowej X, to dla dowolnych $a, b \in R$

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Momenty

Definicja.
Momentem rzędu n-tego, $n \in \mathcal{N}$ względem wartości $c \in R$ zmiennej losowej X nazywamy

$$E((X-c)^n),$$

pod warunkiem, że wartość oczekiwana po prawej stronie istnieje.

W rachunku prawdopodobieństwa rozważamy dwa rodzaje momentów:

- **momenty zwykłe**, $c = 0$ (względem zera) oraz
- **momenty centralne**, $c = E[X]$ (względem wartości oczekiwanej zm. los. X).

Definicja.

Momentem zwykłym rzędu n, $n \in \mathcal{N}$ zmiennej losowej X nazywamy

$$m_n = E(X^n),$$

pod warunkiem, że wartość oczekiwana po prawej stronie istnieje.

Dla $n = 1$ mamy

$$m_1 = m = E[X],$$

dlatego mówimy, że wartość oczekiwana $E(X)$ jest **pierwszym momentem** zmiennej losowej X.

Przykład.

Niech X będzie zm. los. o jednostajnym rozkładzie dyskretnym na zbiorze $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, gdzie $m \in \mathcal{N}$, tzn. dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, m$, $P(X = x_i) = \frac{1}{m}$.
Wyznaczyć n-ty moment zwykły zm. los. X.

Rozwiązanie.

Z definicji, otrzymujemy

$$m_n = \sum_{i=1}^{m} x_i^n P(X = x_i) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i^n.$$

W szczególności, dla $n = 1$, mamy

$$m_1 = \bar{x}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i,$$

tzn. m_1 jest średnią (arytmetyczną) wartości $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Definicja.

Momentem centralnym rzędu n zmiennej losowej X nazywamy n-ty moment względem wartości oczekiwanej X, tzn.

$$\mu_n = E[(X-\mu)^n],$$

gdzie $\mu = m_1$, a wartość oczekiwana po prawej stronie istnieje.

Ponieważ

$$(X-\mu)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k \cdot \mu^{n-k},$$

to można n-ty moment centralny przedstawić jako kombinację momentów zwykłych rzędów mniejszych lub równych n, mianowicie

$$\mu_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} m_k \cdot \mu^{n-k},$$

gdzie $m_0 = 1$.

Wariancja i odchylenie standardowe

- Wartość oczekiwana (pierwszy moment) zmiennej losowej może być interpretowana jako średnia uzyskanych wyników w dużej liczbie niezależnych powtórzeń tego samego eksperymentu losowego (np. liczby oczek w rzucie kostką do gry) lub jako "środek ciężkości" zmiennej losowej.
- Drugi moment centralny μ_2 jest używany jako miara rozproszenia zmiennej losowej wokół swojej wartości oczekiwanej (środka ciężkości) i w rachunku prawdopodobieństwa odgrywa rolę podobną do tej jaką w mechanice odgrywa moment bezwładności.

Definicja.

Jeżeli dla zmiennej losowej X istnieje drugi moment centralny μ_2, to nazywamy go **wariancją** zmiennej losowej X i oznaczamy:

$$V(X) = E[(X - \mu)^2],$$

gdzie $\mu = E[X]$.

Wariancję zm. los. X zwyczajowo oznaczamy jako $V(X)$, σ_X^2 lub σ^2 (mówimy "sigma kwadrat").

Wykorzystując zależność momentów centralnych od momentów zwykłych, mamy:

$$V(X) = \mu_2 = m_2 - 2m_1\mu + \mu^2 = m_2 - \mu^2 = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Formuła obliczeniowa dla wariancji

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Rozkład Bernoulliego i rozkład dwumianowy

Załóżmy, że mamy pojedyncze doświadczenie Bernoulliego. Niech X będzie zmienną losową, dla której $X = 1$ jeżeli doświadczenie Bernoulliego kończy się sukcesem oraz $X = 0$ jeżeli mamy porażkę.

Definicja

Mówimy, że zmienna losowa X ma **rozkład Bernoulliego** jeżeli jej funkcja prawdopodobieństwa ma postać

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1 - p & \text{dla} \quad x = 0 \\ p & \text{dla} \quad x = 1, \end{cases}$$

dla pewnego $p \in (0, 1)$.

Nośnikiem rozkładu Bernoulliego jest $\mathcal{X} = \{0, 1\}$.

Wartość oczekiwana jest równa

$$E(X) = 0 \cdot P(X = x) + 1 \cdot P(X = 1) = p.$$

Ponieważ $E(X^2) = p$, to wariancja

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

Zmienna losowa o rozkładzie Bernoulliego jest najprostszym przykładem zmiennej losowej typu dyskretnego.
Nośnik zawiera jedynie dwie wartości: 0 i 1.

Wiele eksperymentów losowych spełnia dokładnie lub w przybliżeniu następujący zestaw warunków:

1. Eksperyment składa się z n mniejszych doświadczeń, zwanych *próbami*, gdzie n jest ustalone i znane przed doświadczeniem.
2. Każda próba kończy się jednym z dwóch możliwych wyników (dychotomia), które zwane są sukcesem (S) i porażką (F). Prawdopodobieństwo sukcesu p jest takie same we wszystkich próbach.
3. Próby są niezależne, co oznacza, że wynik w danej próbie nie ma żadnego wpływu na wyniki w innych próbach.

Definicja.

Doświadczenie opisane warunkami 1-3 nazywamy **doświadczeniem dwumianowym**.

Definicja.

Zmienną losową X równą liczbie sukcesów w n niezależnych doświadczeniach (próbach) Bernoulliego nazywamy zmienną losową o rozkładzie **dwumianowym** z parametrami (n, p).

Zmienną losową o rozkładzie dwumianowym oznaczamy przez $X \sim Bin(n, p)$.

Twierdzenie Funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej $X \sim Bin(n, p)$, $n \in \mathcal{N}$, $p \in (0, 1)$ jest równa

$$P(X = k) = b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Nośnikiem rozkładu dwumianowego $X \sim Bin(n, p)$ jest $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots n\}$.

Zauważmy, że $B(1, p)$ jest rozkładem Bernoulliego.

Definicja.

Momentem różnicowym rzędu n zmiennej losowej X nazywamy

$$E((X)_n) = E(X(X-1)\cdot\ldots\cdot(X-n+1))$$

gdzie $(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$.

Twierdzenie

Jeżeli $X \sim Bin(n,p)$, $n \in \mathcal{N}$, $p \in (0,1)$, to

$$E(X) = np, \text{ oraz } V(X) = np(1-p).$$

Dowód.

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{x\in\mathcal{X}} x\cdot P(X=x) = \sum_{k=0}^{n} k\cdot b(k;n,p) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}.
\end{aligned}$$

Podstawiając $j = k-1$ otrzymujemy, że

$$E(X) = np\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} = np.$$

Do wyznaczenia wariancji, niezbędne bedzie obliczenie drugiego momentu różnicowego $E[X(X-1)]$.

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \end{aligned}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)![(n-2)-(k-2)]!} p^{k-2} (1-p)^{[(n-2)-(k-2)]}.$$

Podstawmy $j = k-2$, wówczas

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^j (1-p)^{[(n-2)-j]} = \\ &= n(n-1)p^2. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X),$$

to

$$V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2.$$

Ostatecznie

$$V(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p).$$

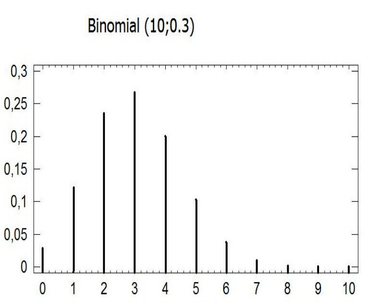
■

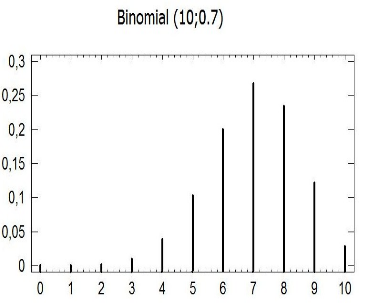
Odchylenie standardowe $X \sim Bin(n, p)$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}.$$

Zbadajmy zachowanie się funkcji przwdopodobieństwa zmiennej losowej o rozkładzie dumianowym.

Poniżej mamy dwa wykresy słupkowe funkcji przwdopodobieństwa dla rozkładów $Bin(10, 0.3)$ oraz $Bin(10, 0.7)$..





Oznaczmy przez k^* najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w n niezależnych doświadczeniach Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Wówczas

$$b(k^*; n, p) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} b(k; n, p).$$

Twierdzenie

Dla zmiennej losowej $X \sim Bin(n, p)$ najbardziej prawdopodobną liczbą sukcesów k^* jest

$$k^* = \begin{cases} \lfloor (n+1)p \rfloor & \text{dla} \quad (n+1)p \quad \text{niecałkowitego} \\ (n+1)p \vee (n+1)p - 1 & \text{dla} \quad (n+1)p \quad \text{całkowitego.} \end{cases}$$

Dowód.

Rozważmy funkcję

$$\phi(k) = \frac{b(k;n,p)}{b(k-1;n,p)} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{1-p}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Zauważmy, że k^* spełnia następujące dwie nierówności:

$$\phi(k^*) \geqslant 1 \quad \text{oraz} \quad \phi(k^*+1) \leqslant 1.$$

Stąd

$$\frac{n-k^*+1}{k^*} \cdot \frac{p}{1-p} \geqslant 1 \quad \text{oraz} \quad \frac{n-k^*}{k^*+1} \cdot \frac{p}{1-p} \leqslant 1.$$

Rozwiązując te dwie nierówności otrzymujemy

$$(n+1)p - 1 \leqslant k^* \leqslant (n+1)p.$$

Przykład. *System komunikacyjny składający się z n elementów, działających niezależnie, o niezawodnościach p, uważa się za sprawny, jeżeli działa przynajmniej połowa jego elementów. Dla jakich wartości p system złożony z 5 elementów ma wyższą niezawodność od sytemy złożonego z 3 elementów?*

Rozwiązanie.
Liczba elementów sprawnych jest zmienną losową o rozkładzie dwumianowym z parametrami (n, p).
Zatem, dla systemu złożonego z pięciu elementów, prawdopodobieństwo działania jest równe

$$\binom{5}{3}p^3(1-p)^2 + \binom{5}{4}p^4(1-p) + p^5.$$

Odpowiednie prawdopodobieństwo, dla systemu złożonego z trzech elementów wynosi

$$\binom{3}{2} p^2(1-p) + p^3.$$

Stąd wynika, że system złożony z pięciu elementów jest bardziej niezawodny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5 \geqslant 3p^2(1-p) + p^3,$$

co daje nam

$$6p^2 - 9p + 3 \leqslant 0$$

lub $p \in [0.5, 1]$.

Przykład. *Wiadomo, że płyty DVD-RW produkowane przez pewną firmę są wadliwe z prawdopodobieństwem 0.01 oraz że przypadki wadliwych płyt są wzajemnie niezależne. Firma sprzedaje płyty w paczkach po 10 sztuk oraz prowadzi politykę zwrotu gotówki polegającą na tym, że w przypadku uznanej reklamacji za jedną wadliwą płytę w paczce zwraca koszt tej płyty, a w przypadku, gdy w paczce jest więcej niż jedna wadliwa płyta - zwraca koszt całej paczki.*

Cena jednej płyty wynosi c, *a całej paczki* $10c$.

Niech Y *oznacza zm. los. równą dodatkowym kosztom związanym ze stosowaniem tej polityki przy sprzedaży jednej paczki.*

Znaleźć funkcję prawdopodobieństwa zm. los. Y.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez X zm. los. równą liczbie wadliwych płyt w jednej paczce. Nietrudno zauważyć, że liczba wadliwych płyt jest liczbą sukcesów w schemacie dwumianowym $Bin(10, 0.01)$, 10 niezależnych doświadczeń Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Wówczas funkcja prawdopodobieństwa zm. los. X dana jest równością

$$P(X = k) = b(k; 10, 0.01) = \binom{10}{k} \cdot 0.01^k (1 - 0.01)^{10-k},$$

gdzie $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$.
Zdefiniujmy funkcję

$$g(k) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad k = 0 \\ c & \text{dla} \quad k = 1 \\ 10c & \text{dla} \quad k \geqslant 2 \end{cases}$$

Zatem $Y = g(X)$, a nośnikiem jest zbiór $\mathcal{Y} = \{0, c, 10c\}$.

Oczywiście

$$Y = 0 \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad X = 0,$$

$$Y = c \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad X = 1,$$

oraz

$$Y = 10c \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad X \geqslant 2.$$

Ostatecznie otrzymujemy funkcję prawdopodobieństwa zm. los. Y, $(p(y) = P(Y = y))$

y	0	c	10c
$p(y)$	0.904	0.091	0.005

Przykład. *Wyznaczyć wartość oczekiwaną ($E(Y)$) dodatkowych kosztów związanych z wprowadzeniem polityki zwrotu kosztów, dla przykładu firmy produkującej płyty DVD.*

Rozwiązanie.
Ponieważ funkcja prawdopodobieństwa zm. los. Y jest

y	0	c	10c
$p(y)$	0.904	0.091	0.005

to

$$E(Y) = 0 \cdot 0,904 + c \cdot 0.091 + 10c \cdot 0.005 = 0.141c.$$

Lemat Poissona. Jeżeli $\{p_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, jest ciągiem liczbowym takim, że $p_n \in (0, 1)$, dla wszystkich n, oraz istnieje granica $\lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lambda > 0$, to

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} {p_n}^k (1 - p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \text{ for all } k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Uwaga.

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} P(k; \lambda) = 1.$$

Zatem ciąg prawdopodobieństw $\{P(k; \lambda)\}$, $k = 0, 1, \ldots$ jest rozkładem prawdopodobieństw zwanym **rozkładem Poissona** $(P(\lambda))$.

Używając lematu Poissona (nazwa pochodzi od sławnego francuskiego matematyka) możemy dla dużych n przybliżać wartości prawdopodobieństw w rozkładzie dwumianowym.

Siméon Denis Poisson (1781-1840)

Przybliżanie rozkładu dwumianowego rozkładem Poissona

Dla $n \geqslant 25$ i $n \cdot p \leqslant 10$ oraz dowolnego $k = 0, 1, 2, \ldots$ mamy

$$b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx e^{-n \cdot p} \cdot \frac{(n \cdot p)^k}{k!}.$$

Przykład. *Prawdopodobieństwo tego, że pewien wirus przeżyje po zaplikowaniu szczepionki wynosi 0.02. Jakie jest prawdopodobieństwo, że spośród 500 wirusów po zaaplikowaniu szczepionki przeżyje co najmniej 15?*

Rozwiązanie. Nietrudno zauważyć, że mamy $n = 500$ doświadczeń Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu $p = 0.02$. Stąd szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\begin{aligned} \sum_{k=15}^{500} b(k; 500, 0.02) &= 1 - \sum_{k=0}^{14} b(k; 500, 0.02) \approx \\ &\approx 1 - F(14; 500 \cdot 0.02) = \\ &= 1 - 0.916542 = 0.083458, \end{aligned}$$

gdzie

$$F(k; \lambda) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}. \quad \textit{(funkcja F jest stablicowana)}$$

Wynik ten uzyskaliśmy stosując przybliżenie Poissona. Dokładna wartość prawdopodobieństwa wynosi 0.0814.

Rozkład Poissona

Jeżeli liczba n niezależnych doświadczeń Bernoulliego jest duża a prawdopodobieństwo sukcesu p bardzo małe, to z lematu Poissona można prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów przybliżyć wartością

$$e^{-n \cdot p} \cdot \frac{(n \cdot p)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Ta aproksymacja prowadzi nas do koncepcji zmiennej losowej o rozkładzie **Poissona**.

Załóżmy, że startując w chwili $t = 0$, zainteresowani jesteśmy w zliczniu liczby zdarzeń, które pojawiają sie losowo, jak np. cząstki radioaktywne zliczane przez licznik Geigera-Müllera, liczba klientów stacji benzynowej, liczba pomyłek telefonicznych itp..

Założenia

1. Istnieje takie $\lambda > 0$, że w dowolnie krótkim przedziale czasowym Δt, prawdopodobieństwo tego, że zaobserwowane zostanie dokładnie jedno zdarzenie losowe wynosi
   $\lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t)$
   ($o(\Delta t)$ oznacza wielkość $o(\Delta t)/\Delta t \to 0$ jak $\Delta t \to 0$).
2. Prawdopodobieństwo zaobserwowania w dowolnie krótkim czasie Δt więcej niż jednego zdarzenia losowego wynosi $o(\Delta t)$.
3. Liczba zaobserwowanych zdarzeń losowych w przedziale czasowym Δt jest niezależna od liczby wcześniej zaobserwowanych zdarzeń.

Twierdzenie

Jeżeli są spełnione warunki 1-3, to prawdopodobieństwo $P_k(t)$, że liczba zdarzeń losowych zaobserwowanych do chwili t jest równa k, $k = 0, 1, \ldots$, dana jest wzorem

$$P_k(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Jeżeli X jest liczbą zdarzeń, które pojawiły się losowo w jednostkowym przedziale czasowym $t = 1$, to mówimy, że X jest zm.los. o rozkładzie Poissona.

Definicja.
Mówimy, że zmienna losowa X ma **rozkład Poissona** z parametrem λ $(\lambda > 0)$, oznaczamy $X \sim P(\lambda)$, jeżeli funkcja prawdopodobieństwa zm. los. X ma postać

$$P(x; \lambda) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

Twierdzenie
Jeżeli $X \sim P(\lambda)$ ma rozkład Poissona z parametrem λ, to

$$E[X] = \lambda, \text{ oraz } V(X) = \lambda.$$