Andrzej Sierociński

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Twierdzenia graniczne

Wykład 9

24 Ciągi zmiennych losowych i rodzaje zbieżności

Jednym z najważniejszych zadań rachunku prawdopodobieństwa jest badanie asymptotycznego zachowania się sum niezależnych zmiennych losowych.

Waga tego problemu wynika zarówno ze względów czysto teoretycznych jak i niezwykle istotnych aspektów praktycznych.

24.1 Rodzaje zbieżności zmiennych losowych

Niech $\{X_n\}$ oznacza nieskończony ciąg zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$ zdefiniowanych na tej samej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definicja.
Mówimy, że ciąg $\{X_n\}$ jest ciągiem zmiennych losowych niezależnych, jeżeli dla każdego $n \geqslant 2$ zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne.

Ciąg $\{X_n(\omega)\}$ dla każdego $\omega \in \Omega$ jest ciągiem liczbowym. Zwykle zakładamy,

że taki ciąg jest zbieżny dla każdego ω, tzn., że ciąg funkcyjny $\{X_n(\omega)\}$ jest zbieżny wszędzie na Ω.

Jednakże, jeżeli istnieje taki zbiór $A \subset \Omega$, że $P(A) = 0$ oraz ciąg $\{X_n(\omega)\}$ jest zbieżny jedynie dla każdego $\omega \in \Omega - A$, to z punktu widzenia rachunku prawdopodobieństwa nie jest to istotne.

Definicja.
*Mówimy, że ciąg zmiennych losowych $\{X_n\}$ jest zbieżny **według prawdopodobieństwa** do zmiennej losowej X, jeżeli*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\{|X_n - X| < \epsilon\}\right) = 1, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Definicja.
*Mówimy, że ciąg zmiennych losowych $\{X_n\}$ jest zbieżny **z prawdopodobieństwem 1** (prawie na pewno) do zmiennej losowej X, jeżeli*

$$P\left(\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\right\}\right) = 1.$$

Definicja.
Mówimy, że ciąg zmiennych losowych $\{X_n\}$ *jest zbieżny* ***według dystrybuant*** *do zmiennej losowej* X*, jeżeli*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

dla każdego x *będącego punktem ciągłości dystrybuanty* F_X *zmiennej losowej* X*.*

Twierdzenie. Jeżeli ciąg zmiennych losowych $\{X_n\}$ zbiega z prawdopodobieństwem 1 do zmiennej losowej X, to zbiega do X według prawdopodobieństwa.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Przykład
Załóżmy, że $\Omega = [0,1]$ *oraz dla dowolnego zbioru borelowskiego* $A \subset \Omega$ *prawdopodobieństwo* A *zdefiniowane jest jako miara tego zbioru* $P(A) = \mu(A)$ $(\mu(\Omega) = 1)$*. Dla dowolnego* $n = 1, 2, \ldots$ *oraz* $0 \leqslant k \leqslant n-1$ *zdefiniujmy*

$$X_{kn}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli} \quad \omega \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \\ 0 & \text{jeżeli} \quad \omega \notin [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]. \end{cases}$$

Jest oczywiste, że

$$P(X_{kn} = 0) = \frac{n-1}{n}, \quad \text{oraz} \quad P(X_{kn} = 1) = \frac{1}{n}.$$

Zatem dla dowolnego $\epsilon > 0$ *oraz* k

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_{kn}| > \epsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Zatem, można zdefiniować następujący ciąg zmiennych losowych

$$Y_1 = X_{01}, Y_2 = X_{02}, Y_3 = X_{12}, Y_4 = X_{03}, Y_5 = X_{13}, Y_6 = X_{23}, \ldots$$

który jest zbieżny według prawdopodobieństwa do zmiennej losowej $X = 0$ $(P(X = 0) = 1)$*. Jednakże nietrudno zauważyć, że dla dowolnego* $\omega \in [0,1]$ *ciąg liczbowy* $\{Y_j(\omega)\}$ *nie jest zbieżny (można wybrać podciąg złożony z samych zer lub z samych jedynek).*

Twierdzenie.
Jeżeli ciąg zmiennych losowych $\{X_n\}$ jest zbieżny do zmiennej losowej X według prawdopodobieństwa, to jest zbieżny do X według dystrybuant.

24.2 Nierówność Czebyszewa

Twierdzenie. (Nierówność Markowa)
Jeżeli X jest zmienną losową przyjmującą wartości nieujemne, to dla dowolnego $a > 0$

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E[X]}{a}.$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy w przypadku, gdy X jest zmienną losową typu ciągłego o gęstości f.

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^\infty x f(x)dx = \int_0^a x f(x)dx + \int_a^\infty x f(x)dx \geqslant \int_a^\infty x f(x)dx \\ &\geqslant \int_a^\infty a f(x)dx = a \int_a^\infty f(x)dx = aP(X \geqslant a). \end{aligned}$$

■

Jako wniosek uzyskujemy nierówność Czebyszewa.

Twierdzenie. (Nierówność Czebyszewa)
Niech X będzie zmienną losową, dla której istnieje wartość oczekiwana $E[X]$ oraz wariancja $V(X)$. Wówczas,

$$P(|X - E[X]| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

dla dowolnego $\epsilon > 0$.

Dowód. Ponieważ $Y = (X - E[X])^2$ jest nieujemną zmienną losową, to z nierówności Markowa ($a = \epsilon^2$) otrzymujemy

$$P\{(X - E[X])^2 \geqslant \epsilon^2\} \leqslant \frac{E[(X - E[X])^2]}{\epsilon^2} = \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

co kończy dowód. ■

Nierówność Czebyszewa, chociaż daje jedynie dość ”grubeószacowanie, jest nierównością uniwersalną. Umożliwia oszacowanie prawdopodobieństwa odchylenia się zmiennej losowe X od jej wartości oczekiwanej $E[X]$ nawet wówczas, gdy nie wiemy o jej rozkładzie nic poza istnieniem wariancji $V(X)$.

Przykład *Rzucamy niezależnie n razy symetryczną kostką do gry. Niech S_n będzie liczbą uzyskanych orłów. Korzystając z nierówności Czebyszewa wyznaczyć dolne oszacowanie na prawdopodobieństwo zdarzenia, że $\frac{S_n}{n}$ różni się od $\frac{1}{2}$ o mniej niż 0.1 dla*

(a) $n = 100$,

(b) $n = 10,000$ *oraz*

(c) $n = 100,000$.

Rozwiązanie.
$S_n \sim B(n, \frac{1}{2})$, zatem $E[\frac{S_n}{n}] = \frac{1}{2}$ oraz $V(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{4n}$. Z nierówności Czebyszewa otrzymujemy

$$P(|X - E[X]| < C) \geqslant 1 - \frac{V(X)}{C^2}.$$

Zatem

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| < 0.1\right) \geqslant 1 - \frac{1}{4n \cdot (0.1)^2} = 1 - \frac{25}{n} = \begin{cases} 0.75 & dla \quad n = 100 \\ 0.9975 & dla \quad n = 10,000 \\ 0.99975 & dla \quad n = 100,000. \end{cases}$$

25 Prawa Wielkich Liczb

Niech $\{X_n\}$ będzie nieskończonym ciągiem zmiennych losowych, dla którego dla dowolnego $n \in \mathcal{N}$ istnieje $\mu_n = E[X_n]$.

Definicja.
*Mówimy,że ciąg zmiennych losowych $\{X_n\}$ spełnia **słabe prawo wielkich liczb** (SPWL) jeżeli*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i) \to 0 \quad \text{według prawdopodobieństwa przy} \quad n \to \infty.$$

Jeżeli X_n jest ciągiem zmiennych losowych o identycznych rozkładach oraz $E[X_n] = \mu$, to $\{X_n\}$ spełnia SPWL, jeżeli

$$\bar{X}_n \to \mu \quad \text{według prawdopodobieństwa przy} \quad n \to \infty,$$

gdzie $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

PWL odgrywają bardzo ważna rolę w teorii prawdopodobieństwa, gdy zmienne losowe mają identyczne rozkłady. Dają one precyzyjną odpowiedź na intuicyjne oczekiwania, że średnia arytmetyczna dużej liczby realizacji zmiennej losowej X jest przybliżeniem jej wartości oczekiwanej $E[X]$. Ponadto, PWL są dowodem na to, że prawdziwe jest empiryczne prawo stabilności częstości empirycznej, mówiące, że:
częstość empiryczna zdarzenia losowego A w ciągu niezależnych doświadczeń dąży do prawdopodobieństwa $P(A)$.

Twierdzenie. (SPWL Markowa)
Jeżeli dla ciągu zmiennych losowych $\{X_n\}$ zachodzi warunek Markowa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = 0,$$

to $\{X_n\}$ spełnia słabe prawo wielkich liczb.

Dowód.
Oznaczmy przez

$$\bar{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu_i$$

wartość oczekiwaną zmiennej losowej $\bar{X}_n$. Wówczas mamy

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) = \bar{X}_n - \bar{\mu}_n.$$

Dla dowolnego $\epsilon > 0$ z nierówności Czebyszewa oraz warunku Markowa otrzymujemy

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)\right| \geqslant \epsilon\right) &= P(|\bar{X}_n - \bar{\mu}_n| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{V(\bar{X}_n)}{\epsilon^2} = \\ &= \frac{1}{n^2\epsilon^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \to 0 \end{aligned}$$

przy $n \to \infty$, co kończy dowód. ∎

Jako wniosek otrzymujemy SPWL Czebyszewa.

Twierdzenie (SPWL Czebyszewa)
Jeżeli $X_1, X_2, \ldots$ jest ciągiem nieskorelowanych zmiennych losowych o wspólnie ograniczonych wariancjach, tzn. istnieje taka stała σ^2, że dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots$, $V(X_i) \leqslant \sigma^2$, to ciąg $\{X_n\}$ spełnia SPWL.

Dowód. Zauważmy, że jeżeli zmienne losowe X_i są nieskorelowane, to

$$\frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V\left(X_i\right) \leqslant \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \to 0$$

przy $n \to \infty$ i warunek Markowa jest spełniony. ∎

Założenie o istnieniu oraz skończoności wariancji może być osłabione. Jednakże można to zrobić kosztem założenia, że zmienne są niezależne o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa.

Twierdzenie. (SPWL Chinczyna)
Jeżeli $\{X_n\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie o skończonej wartości oczekiwanej $\mu = E[X_i]$, $i = 1, 2, \ldots$, to, $\{X_n\}$ spełnia SPWL.

Dowód tego twierdzenia pomijamy, gdyż jest nieco inny i wykorzystuje pojęcie tzw. funkcji charakterystycznych.

Przy założeniach twierdzenia Chinczyna można udowodnić znacznie mocniejszy wynik. Można pokazać, że nie tylko prawdopodobieństwo zdarzenia, że $\bar{X}_n$ jest blisko $\mu = E[\bar{X}_n]$ dąży do 1 przy $n \to \infty$, ale, że ciąg średnich $\bar{X}_n$ sam zbiega do μ z prawdopodobieństwem 1.

Definicja.
*Mówimy, że ciąg zmiennych losowych $\{X_n\}$ spełnia **mocne prawo wielkich liczb** (MPWL) jeżeli*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i) = 0\right) = 1$$

tzn. $\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i)$ zbiega do 0 z prawd. 1 przy $n \to \infty$.

Twierdzenie. (MPWL Kołmogorowa) Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa. Wówczas, $\{X_n\}$ spełnia MPWL wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wartość oczekiwana $\mu = E[X_i]$, $i = 1, 2, \ldots$.

Dowód pomijamy.

26 Centralne Twierdzenie Graniczne

Z prawa wielkich liczb wynika, że dla ciągu niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach średnia arytmetyczna $\bar{X}_n$ zbiega prawie na pewno do wartości oczekiwanej $\mu = E[\bar{X}_n]$.

Centralne twierdzenie graniczne pozwala dodatkowo na przybliżanie rozkładu prawdopodobieństwa sumy $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ dla dużych n.

Mianem **centralnego twierdzenia granicznego** określa się całą rodzinę twierdzeń, które mówią, że przy pewnych założeniach, rozkład standaryzowanej sumy S_n przy $n \to \infty$ dąży do standardowego rozkładu normalnego.

Twierdzenie. (Lindeberga-Lévy'ego)
Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa z wartością oczekiwaną $\mu = E[X_n]$ oraz wariancją $\sigma^2 = V(X_n) > 0$. Wówczas dla $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, mamy

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right) = \Phi(x),$$

gdzie $x \in \mathcal{R}$, a $\Phi(x)$ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.
Dowód pomijamy.

Innymi słowy, mówimy, że standaryzowana suma niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie zbiega według dystrybuanty do rozkładu $N(0,1)$, tzn.:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \Longrightarrow N(0,1).$$

Przybliżenie normalne

$$P(S_n \leqslant x) \approx \Phi\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right), \quad x \in R, \quad n \geqslant 50.$$

Jednym z najważniejszych zastosowań centralnego twierdzenia granicznego jest wykorzystanie do aproksymacji rozkładu dwumianowego $b(n,p)$.

Zmienna losowa $X \sim b(n,p)$ opisuje liczbę sukcesów w n niezależnych doświadczeniach w schemacie Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p, możemy zatem zapisać

$$X = S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

gdzie

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli mamy sukces w } i - \text{tym doświadczeniu} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Biorąc pod uwagę to, że $E[X_i] = p$, a $V(X_i) = p(1-p)$ otrzymujemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie. (Moivre'a-Laplace'a)
Niech $\{S_n\}$ będzie zmienną losową o rozkładzie dwumianowym $b(n, p)$, $n \in \mathcal{N}$ oraz $p \in (0, 1)$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x\right) = \Phi(x),$$

gdzie $x \in \mathcal{R}$, a $\Phi(x)$ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.

Zatem otrzymujemy, że dla dostatecznie dużych n

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \approx N(0, 1).$$

Ponieważ zmienna losowa o rozkładzie dwumianowym jest typu dyskretnego o nośniku będącym podzbiorem zbioru liczb całkowitych, to

$$P(X \leqslant x) = P(X < x + 1)$$

dla $x \in \{0, 1, 2, ...n\}$.

Jeżeli np oraz $n(1-p)$ są duże (zwykle wystarczy $\geqslant 5$), to prawdopodobieństwo $P(X \leqslant x)$ jest dobrze przybliżane przez

$$P(Y \leqslant x + 1/2)$$

gdzie $Y \sim N(np, np(1-p))$.

Dodanie $1/2$ do wartości x nazywamy **korektą (poprawką) ciągłości**.

Korekta (poprawka) ciągłości poprawia przybliżenie normalne i powinna być stosowana dla $n \leqslant 100$.

Przybliżenie rozkładu dwumianowego rozkładem normalnym
Jeżeli $S_n \sim b(n,p)$, gdzie $n \geqslant 25$, $np \geqslant 5$, $n(1-p) \geqslant 5$ oraz $p \in (0,1)$, to dla dowolnych całkowitych k_1, k_2, takich że $0 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n$

$$P(k_1 \leqslant S_n \leqslant k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 + 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Poprawkę ciągłości stosuje się także w przypadku przybliżania rozkładem normalnym innych rozkładów dyskretnych.

Niech zmienna losowa $X \sim P(\lambda)$ ma rozkład Poissona, wówczas wartość oczekiwana oraz wariancja są równe λ. Załóżmy ponadto, że wartość oczekiwana jest odpowiednio duża, zwykle zakłada się, że $\lambda > 10$. Wówczas można zapisać

$$P(X \leqslant x) = P(X < x+1) \approx P(Y \leqslant x + 1/2) = \Phi\left(\frac{x + 1/2 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

gdzie Y ma rozkład normalny z parametrami $\mu = \sigma^2 = \lambda$.

Przybliżenie normalne rozkładu Poissona

$$F(k;\lambda) \approx \Phi\left(\frac{k + 1/2 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad \lambda > 10, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Przykład *Prawdopodobieństwo uszkodzenia pewnego urządzenia w ciągu roku wynosi:*

(a) $p = 0.05$,

(b) $p = 0.1$,

(c) $p = 0.2$.

Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że spośród 100 takich urządzeń działających niezależnie, w ciągu jednego roku, ulegnie uszkodzeniu

(a) mniej niż 3,

(b) nie mniej niż 8 *i nie więcej niż* 12,

(c) nie więcej niż 15

urządzeń.

Rozwiązanie.
Z założeń wynika, że liczba uszkodzonych w ciągu roku urządzeń jest zmienną losową o rozkładzie dwumianowym $S \sim b(100, p)$.

(a) Wyznaczmy dokładną wartość $P(S < 3)$.

$$\begin{aligned} P(S<3) &= P(S=0)+P(S=1)+P(S=2)= \\ &= \binom{100}{0}(0.05)^0(0.95)^{100}+\binom{100}{1}(0.05)^1(0.95)^{99}+\binom{100}{2}(0.05)^2(0.95)^{98}= \\ &= 0.0059+0.0312+0.0812=0.1183. \end{aligned}$$

Ponieważ $np = 5$ ($p = 0.05$) to rozkład dwumianowy można przybliżać zarówno rozkładem Poisson jak i rozkładem normalnym.

Do przybliżenia użyjemy rozkładu Poissona, który w tym przypadku daje lepsze przybliżenie.

$$\begin{aligned} P(S<3) &\cong P(S=0)+P(S=1)+P(S=2)=e^{-5}\left(\frac{5^0}{0!}+\frac{5^1}{1!}+\frac{5^2}{2!}\right)= \\ &= 0.0067+0.0337+0.0843=0.1247. \end{aligned}$$

Jak widać, błąd przybliżenia jest bardzo mały (0.0064).

(b) Dla $p = 0.1$ mamy $np = 10$, co pozwala na użycie i porównanie obu przybliżeń. Przy przybliżeniu normalnym zastosujemy poprawkę ciągłości.

Dokładne wartości prawdopodobieństw oraz ich przybliżenia rozkładem Poissona zestawiono w tabeli poniżej.

k	$\mathrm{b}(k; 100, 0.1)$	$Poisson(k; 10)$
8	0.114823	0.1126
9	0.130416	0.1251
10	0.131865	0.1251
11	0.119878	0.1137
12	0.098788	0.0948
$\sum$	0.595770	0.5713

Zatem

$$P(8 \leqslant S \leqslant 12) = \sum_{k=8}^{12}\binom{100}{k}(0.1)^k(0.9)^{100-k} = 0.59577,$$

oraz wartość przybliżona rozkładem Poissona wynosi

$$P(8 \leqslant S \leqslant 12) \cong 0.5713.$$

To samo prawdopodobieństwo możemy przybliżyć rozkładem normalnym z poprawką ciągłości. Mianowicie,

$$P(8 \leqslant S \leqslant 12) \quad \cong \quad \Phi\left(\frac{12+1/2-10}{\sqrt{100\cdot 0.1(1-0.1)}}\right) - \Phi\left(\frac{8-1/2-10}{\sqrt{100\cdot 0.1(1-0.1)}}\right) =$$

$=2\Phi(0.83) - 1 = 2 \cdot 0.79673 - 1 = 0.59346.$

Zauważmy, że przybliżenie bez poprawki ciągłości jest gorsze i daje wartość

$$P(8 \leqslant S \leqslant 12) \cong 2\Phi(0.67) - 1 = 2 \cdot 0.7486 - 1 = 0.4972.$$

(c) W tym przypadku ($np = 20$) powinniśmy użyć jedynie przybliżenia normalnego.

$$P(S \leqslant 15) = \sum_{k=0}^{15} \binom{100}{k} (0.2)^k (0.8)^{100-k} = 0.1285055,$$

oraz przybliżenie normalne z poprawka ciągłości

$$P(S \leqslant 15) \cong \Phi(-1.13) = 1 - \Phi(1.13) = 1 - 0.8708 = 0.1292.$$

Przybliżenie normalne bez poprawki ciągłości

$$P(S \leqslant 15) \cong \Phi(-1.25) = 1 - \Phi(1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$$

ponownie daje znacznie gorszy wynik.

Przykład

Ilu niezależnych doświadczeń Bernoulliego, z prawdopodobieństwem sukcesu $p = 0.4$, należy dokonać, aby błąd przybliżenia częstością empiryczną prawdopodobieństwa teoretycznego sukcesu $p = 0.4$ był mniejszy od d

(a) $d = 10\%$,

(b) $d = 1\%$

z prawdopodobieństwem co najmniej 0.99*?*

Rozwiązanie.
Oznaczmy przez S liczbę sukcesów (zajście pewnego zdarzenia A).

Zatem $S \sim b(n, 0.4)$ ma rozkład dwumianowy, a częstością empiryczną jest

$$freq(A) = \frac{1}{n}S.$$

Stąd

$$\begin{aligned} P\left(|freq(A) - 0.4| < d\right) &= P\left(\left|\frac{1}{n}S - 0.4\right| < d\right) = \\ &= P\left(\left|\frac{S - n \cdot 0.4}{\sqrt{n \cdot 0.4(1-0.4)}}\right| < \frac{n \cdot d}{\sqrt{n \cdot 0.4(1-0.4)}}\right) \geqslant 0.99. \end{aligned}$$

Otrzymujemy następującą nierówność

$$2\Phi\left(\frac{n \cdot d}{\sqrt{n \cdot 0.4(1-0.4)}}\right) - 1 \geqslant 0.99$$

lub

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n} \cdot d}{\sqrt{0.24}}\right) \geqslant 0.995 = \Phi(2,58).$$

Zatem

$$n \geqslant \frac{(2.58)^2 \cdot 0.24}{d^2} = \frac{1,597536}{d^2}.$$

Ostatecznie

(a) $n \geqslant 160$ oraz

(b) $n \geqslant 15976$.

Centralne twierdzenie graniczne oznacza całą rodzinę twierdzeń, traktujących o zachowaniu się standaryzowanych sum niezależnych zmiennych losowych, niekoniecznie mających jednakowe rozkłady prawdopodobieństwa.

Podamy teraz, bez dowodu, twierdzenie Lapunowa, które dotyczy takiego przypadku.

Oczywiście, jak zwykle, osłabiając jedno założenie musimy jednocześnie wzmocnić inne.

Twierdzenie. (Lapunowa)
Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o skończonych trzecich momentach.

Oznaczmy wartości oczekiwane $\mu_n = E[X_n]$, wariancje $\sigma_n^2 = V(X_n) > 0$ oraz momenty bezwzględne centralne trzeciego rzędu $c_n = E|X_n - \mu_n|^3, n = 1, 2, \ldots$.

Ponadto niech $A_N = \sum_{n=1}^{N} \mu_n$, $B_N = \sum_{n=1}^{N} \sigma_n^2$ oraz $C_N = \sum_{n=1}^{N} c_n$.
Wówczas, jeżeli

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sqrt[3]{C_N}}{\sqrt{B_N}} = 0,$$

to dla $S_N = \sum_{n=1}^{N} X_i$, mamy

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\frac{S_N - A_N}{\sqrt{B_N}} \leqslant x\right) = \Phi(x),$$

gdzie $x \in \mathcal{R}$, a $\Phi(x)$ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.