Statystyczna analiza danych SAD-2020/2021

Wykład 1

STATYSTYCZNA ANALIZA DANYCH

III semestr studiów inżynierskich w PJATK, 2020/21

Prowadząca: dr hab. Elżbieta Ferenstein

Cel wykładu - poznanie podstaw analizy danych

- **statystyka opisowa**
- **modelowanie probabilistyczne**
- **wnioskowanie statystyczne**

Tematyka wykładu SAD

- Metody graficzne prezentacji danych jakościowych i ilościowych. Statystyki próbkowe. Histogramy, wykresy ramkowe.

- Prawdopodobieństwo, niezależność zdarzeń, twierdzenie Bayes'a.

- Zmienne losowe, rozkłady prawdopodobieństwa i ich parametry, wybrane rozkłady prawdopodobieństwa.

- Podstawowe statystyki i ich własności, przedziały ufności, testy parametryczne dla średnich i wariancji jednej i dwu populacji, regresja liniowa jednowymiarowa.

Informacje praktyczne

Kontakt:

elaw@pjwstk.edu.pl

Konsultacje: po umówieniu lub po (przed) wykładzie

Wykłady umieszczone są na

ftp/public/elaw/Informatyka dzienne

Ćwiczenia umieszczone są w katalogach Cx na

ftp/public/asier/Informatyka dzienne

Zaliczenie ćwiczeń: skala punktowa: 100 punktów = 90 punktów za 2 kolokwia plus 10 punktów za aktywność (m.in. obecności na ćwiczeniach)

Ocena z ćwiczeń: ≥ 91 pkt: bdb; ≥ 81pkt: db+; ≥ 71: db; ≥ 61: dost +; ≥ 51: dost.

Ocena dostateczna zalicza ćwiczenia i jest warunkiem dopuszczenia do egzaminu.

Ćwiczenia laboratoryjne - 30% czasu, 70% czasu – ćwiczenia rachunkowe.
Na ćwiczeniach obowiązuje znajomość materiału omawianego na wykładach.

Egzamin: zadania z zakresu wykładu i ćwiczeń.

Wymagania wstępne: Analiza I i II, Matematyka Dyskretna.
Software: (pakiet SAS), Excel.

Literatura podstawowa:

- Jacek Koronacki, Jan Mielniczuk: *Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne 2001.
- Elżbieta Ferenstein*: Statystyczna Analiza Danych, slajdy na FTP (public),* katalog elaw, folder Informatyka dzienne 2020-2021

Literatura uzupełniająca:

- Janina Jóźwiak, Jarosław Podgórski: *Statystyka od podstaw*, PWE, Warszawa 2001(3), wyd. V (VI).
- Przemysław Grzegorzewski i inn.: *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka*, WSISiZ, Warszawa 2001.
- Amir D. Aczel: *Statystyka w zarządzaniu*, PWN, Warszawa 2000.
- K. Bobecka, P. Grzegorzewski, J. Pusz: *Zadania z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki,* WSISiZ, Warszawa 2003.
- Mieczysław Sobczyk: *Statystyka*, PWN 2005.
- Marek Cieciura, Janusz Zacharski: *Metody probabilistyczne w ujęciu praktycznym,* Vizja 2007.

STATYSTYKA OPISOWA

Techniki wstępnej analizy danych i ich prezentacji:

- gromadzenie, przechowywanie danych, analiza danych surowych
- prezentacja danych: tabele, wykresy, parametry liczbowe obliczane dla danych.

Cel:

- charakteryzacja danych - w **zwięzłej formie** odzwierciedlająca pewne ich **cechy**, np. średni dochód, średnie zużycie paliwa, ..
- odnalezienie różnego rodzaju **regularności** (nieregularności) ukrytych w danych, **zależności** między podzbiorami danych.

- Obejrzenie danych surowych – nieprzetworzonych, niepogrupowanych, niezorganizowanych.
- Poznanie sposobu i celu zebrania danych:
  - jaką cechę mierzono (obserwowano) ?,
  - w jakich jednostkach ?,
  - ile wykonano obserwacji (liczebność zbioru danych), w jakich warunkach – czy nie zgubiono części danych, dane brakujące, czy jest możliwość przekłamań ?
  - czy celem zebrania danych ma być odpowiedź na konkretne pytania ?

- Cel badania statystycznego: poznanie charakterystyk dużej zbiorowości obiektów (osoby, przedmioty, zjawiska, możliwe wyniki eksperymentów ...) na podstawie obserwacji cech (danych) jedynie niektórych wylosowanych obiektów
- **Populacja:** zbiór obiektów badanych ze względu na określoną cechę nazywaną **zmienną**
- **Próbka:** zbiór cech zbadanych obiektów populacji

Rodzaje i przykłady cech statystycznych

- Ilościowe
  - Ciągłe : wzrost, waga itp.
  - Dyskretne : liczba dzieci, liczba reklamacji itp.
- Jakościowe
  - O kategoriach uporządkowanych: miasta (małe, średnie, duże), rodziny (bezdzietne, wielodzietne) itp.
  - Nominalne : grupa krwi, płeć, kolor oczu itp.

- **Badanie statystyczne pełne** (kompletne, całkowite, wyczerpujące) to badanie oparte o dane obejmujące wszystkie jednostki populacji.

- **Badanie statystyczne częściowe** (niekompletne, niepełne) to badanie oparte o dane obejmujące wybrane jednostki populacji.

- **Próba** to podzbiór populacji generalnej wykorzystywany w badaniu częściowym.

- **Próba reprezentatywna** to próba wybrana w sposób losowy i mająca dostateczną liczebność.

Aby wyniki badania próby można było odnieść do zbiorowości generalnej (uogólnić) próba musi być reprezentatywna.

Populacja	badana cecha (zmienna)	zebrane dane (próbka)
♦ zbiór detali	jakość detalu	zbiór jakości zbadanych detali
♦ zbiór komputerów w sieci	liczba awarii komputera w danym okresie	zbiór liczb awarii wybranych komputerów w danym czasie
♦ zbiór projektów przysłanych na konkurs	ocena projektu	zbiór ocen wybranych projektów
♦ zbiór osób w zespole pracowników	staż pracy	zbiór staży pracy (lat pracy) wylosowanych osób

Opracowanie materiału statystycznego

- **Szereg szczegółowy** (**wyliczający**) – uporządkowany ciąg obserwowanych wartości badanej cechy statystycznej.
- **Szereg rozdzielczy** (**strukturalny**) – materiał statystyczny podzielony na grupy (klasy) według wybranego kryterium, zapisany w postaci tabelarycznej, z podaniem liczebności (lub częstości) każdej z wyodrębnionych grup,.
- Szeregi rozdzielcze są wynikiem operacji grupowania danych.
- W przypadku cechy mierzalnej z małą liczbą wariantów cechy tworzy się szeregi rozdzielcze **punktowe**.
- Gdy wariantów jest dużo buduje się szeregi rozdzielcze **przedziałowe**.
- Szereg rozdzielczy cechy mierzalnej opisuje **rozkład empiryczny** badanej cechy.

Przykład (szereg rozdzielczy punktowy)

Liczba pracowników w poszczególnych przedsiębiorstwach pewnego koncernu wynosi:

100; 125; 170; 144; 144; 235; 301; 100; 100; 170; 144; 235; 100; 301; 170; 301; 125; 125; 235, 125:125; 100; 144; 301; 144; 144; 170; 144; 144; 144.

Są to tzw. *dane surowe.* Opisują cechę mierzalną skokową.

Po uporządkowaniu danych (np. rosnąco) dostajemy szereg wyliczający

(zapisany 2 wierszach tabeli).

Ponieważ w zbiorze danych mamy tylko 5 wariantów cechy tworzymy szereg rozdzielczy punktowy postaci

Grupa	Liczebność
100	5
125	5
144	9
170	4
235	3
301	4
SUMA	30

Przykład (szereg rozdzielczy przedziałowy)

Powierzchnie użytkowe (w m^2) badanych sklepów przedstawia uporządkowany szereg wartości cechy:

76; 81; 83; 85; 87; 91; 93; 94; 95; 97; 99; 104;
111; 112; 113; 114; 116; 118; 119; 120; 121; 122; 123; 125;
126; 127; 128; 128; 129; 130; 131; 132; 133; 133; 135; 135;
136; 137; 138; 138; 141; 141; 141; 141; 143; 144; 146; 146;
148; 148; 152; 155; 158; 159; 161; 162; 163; 165; 166; 167;
178; 179; 179; 182; 184; 184; 193, 198; 200.

Powierzchnia jest cechą mierzalną ciągłą, dlatego przeprowadzimy grupowanie statystyczne danych tworząc szereg rozdzielczy, z przedziałami klasowymi o rozpiętości 20 m^2 i początkiem pierwszego przedziału klasowego równym 70 m^2.

Otrzymany szereg rozdzielczy (liczebności) ma postać:

przedział	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170	170-190	190-210
liczebność	5	7	17	21	10	6	3

(*przyjęto przedziały lewostronnie domknięte, prawostronnie otwarte*)

Szereg rozdzielczy częstości uzyskujemy zastępując liczebności przez odpowiadające im częstości (częstości względne)

częstość = (liczebność grupy) / (liczebność łączna) ($w_i = \frac{n_i}{N}$)

Szereg rozdzielczy częstości dla prezentowanych danych ma postać

przedział	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170	170-190	190-210
częstość	0,07	0,10	0,25	0,30	0,14	0,09	0,04

w ujęciu procentowym

przedział	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170	170-190	190-210
częstość	7%	10%	25%	30%	14%	9%	4%

Szeregi rozdzielcze skumulowane

przedział	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170	170-190	190-210
liczebność skumulowana	5	12	29	50	60	66	69

przedział	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170	170-190	190-210
częstość skumulowana	0,07	0,17	0,42	0,72	0,87	0,96	1,00

przedział	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170	170-190	190-210
częstość skumulowana (%)	7%	17%	42%	72%	87%	96%	100%

Opracowanie materiału statystycznego

Tworzenie szeregu rozdzielczego z przedziałami klasowymi wymaga ustalenia:

- liczby klas (k),
- rozpiętości przedziałów klasowych

Rekomendowane wartości liczby klas zależą od liczebności danych (n):

- według tabeli

Liczba obserwacji	Liczba klas
40-60	6-8
60-100	7-10
100-200	9-12
200-500	11-17

- według wzorów
  - $k \approx \sqrt{n}$
  - $k \approx 1 + 3{,}322 \log n$

(*W praktyce liczba przedziałów klasowych waha się od kilku do kilkunastu*)

Opracowanie materiału statystycznego

Przybliżoną rozpiętość przedziałów klasowych (przy założeniu ich jednakowej rozpiętości) podaje wzór

$$h \approx \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$$

Rzeczywiste rozpiętości przedziałów powinny być nieco większe, ponieważ:

- muszą być rozłączne,
- ich suma powinna obejmować wszystkie obserwacje,
- najmniejsza obserwowana wartość cechy powinna znajdować się w pobliżu środka pierwszego przedziału klasowego.

Dla cechy ciągłej nie mogą występować klasy bez elementów.

Wykorzystując komputerowe pakiety statystyczne można w trybie interaktywnym modyfikować omawiane parametry i generować różne szeregi rozdzielcze, co umożliwia lepsze poznanie rozkładu empirycznego badanej cechy.

Prezentacja graficzna danych

- Alternatywną formą prezentacji szeregów statystycznych są wykresy. W zależności od potrzeb i typu danych wykorzystuje się różne typy wykresów (słupkowe, liniowe, kołowe, kartogramy itp.)

- W przypadku szeregów rozdzielczych punktowych najczęściej stosuje się wykres słupkowy, bądź kołowy.
  Ich konstrukcję ilustruje poniższy przykład.

Prezentacja materiału statystycznego

Tablica danych

Grupa kierunków	rok 1990/91		rok1997/98	
	liczba	%	liczba	%
pedagogiczne	99552	18,3	91100	7,2
humanistyczne	69088	12,7	110565	8,7
prawne i nauki społeczne	133824	24,6	566475	44,8
nauki ścisłe i przyrodnicze	144704	26,6	292110	23,1
medyczne	81600	15,0	95550	7,6
pozostałe	15232	2,8	109200	8,6
ogółem	544000	100,0	1265000	100,0

Prezentacja materiału statystycznego

Opis danych surowych:

- 2 próbki o licznościach $n_1 = 544000$ oraz $n_2 = 1265000$
- cecha jakościowa: grupa kierunków studiów
- 6 kategorii (atrybutów) cechy
- atrybuty: grupa kierunków pedagogicznych, humanistycznych, medycznych, ...

Najliczniejsze grupy kierunków:

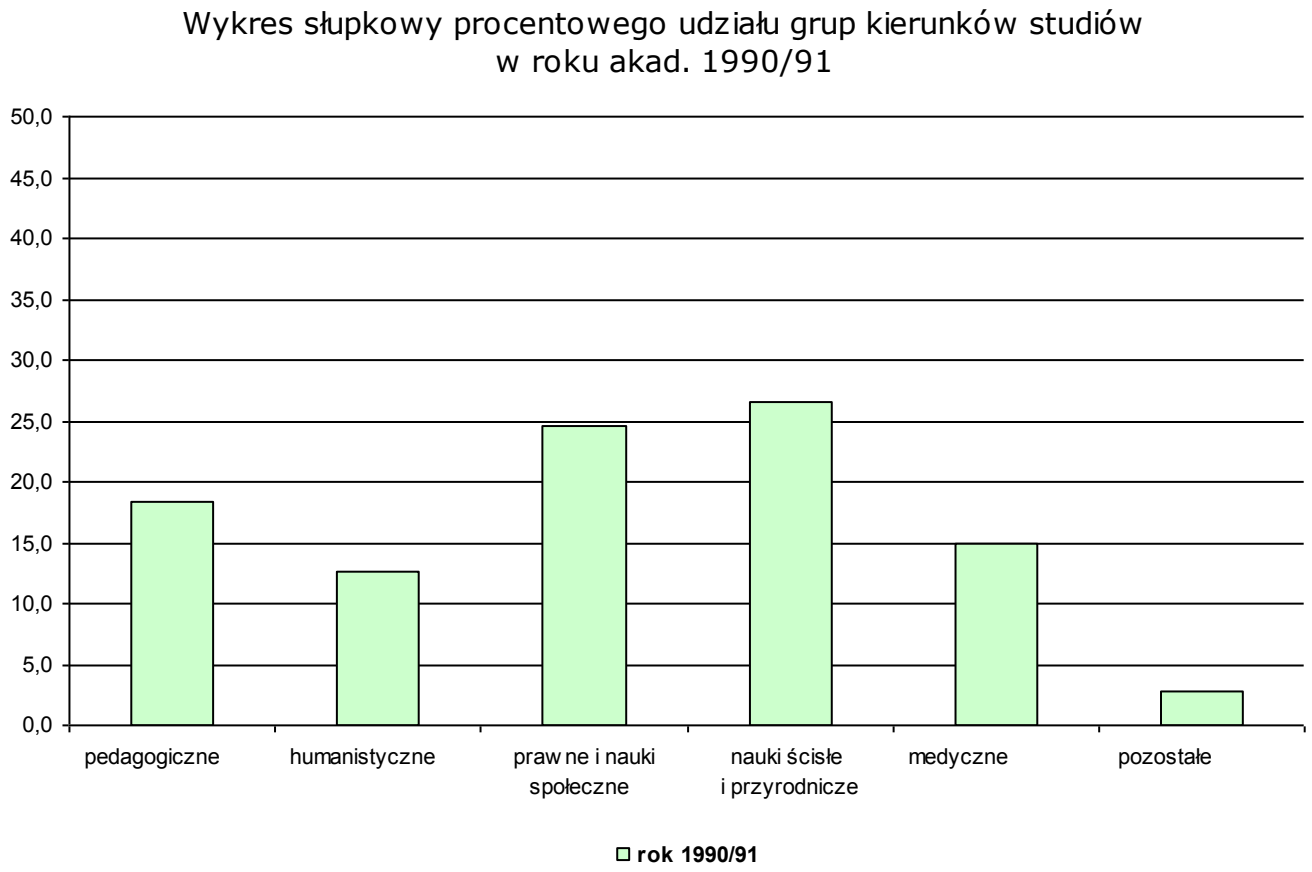
- nauki ścisłe i przyrodnicze w 1990/91 roku
- prawo i nauki społeczne w 1997/98 roku

Procentowy udział klasy

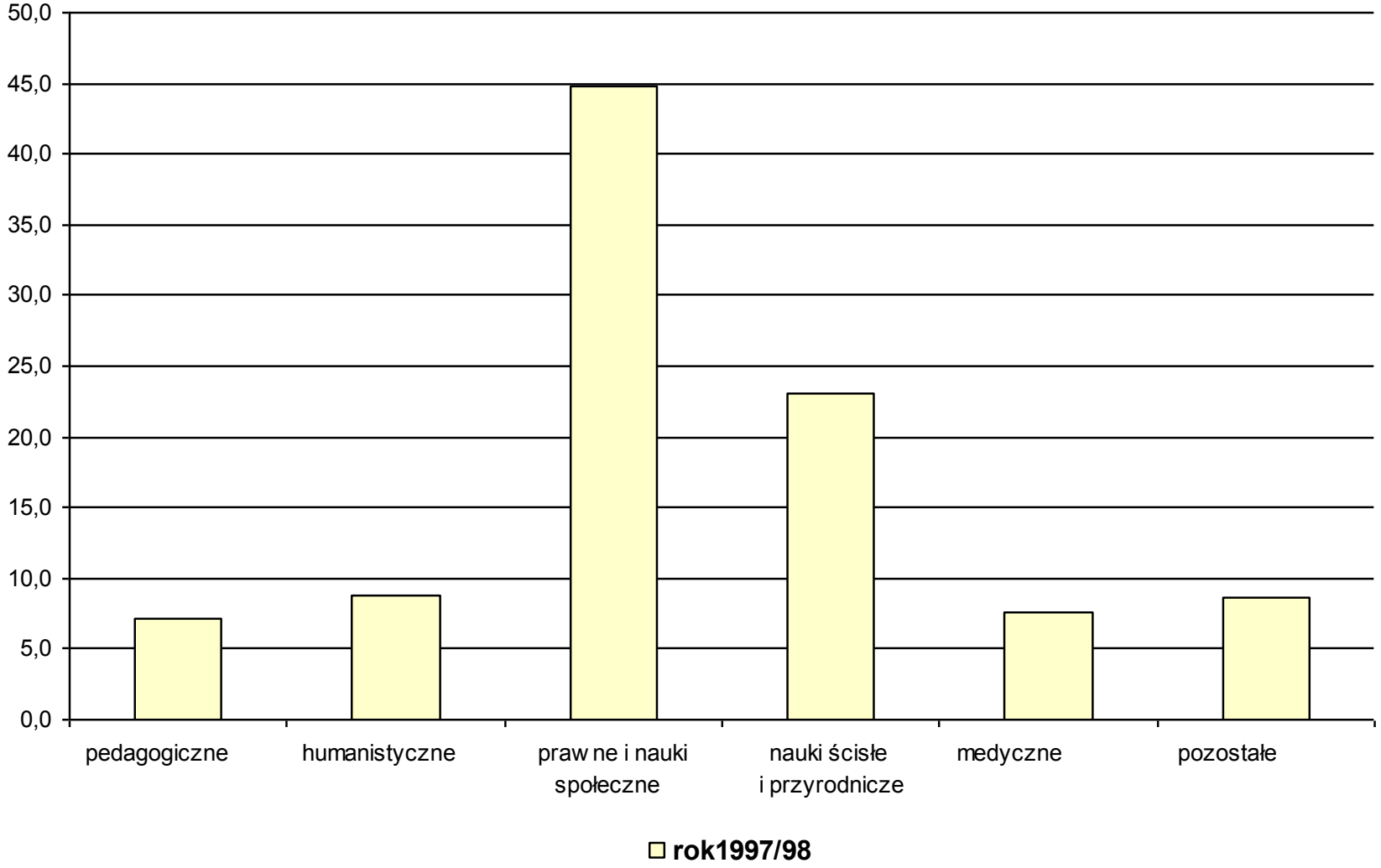
(liczność klasy / liczność próbki) * 100% = częstość * 100%

Prezentacja materiału statystycznego

Wykres słupkowy

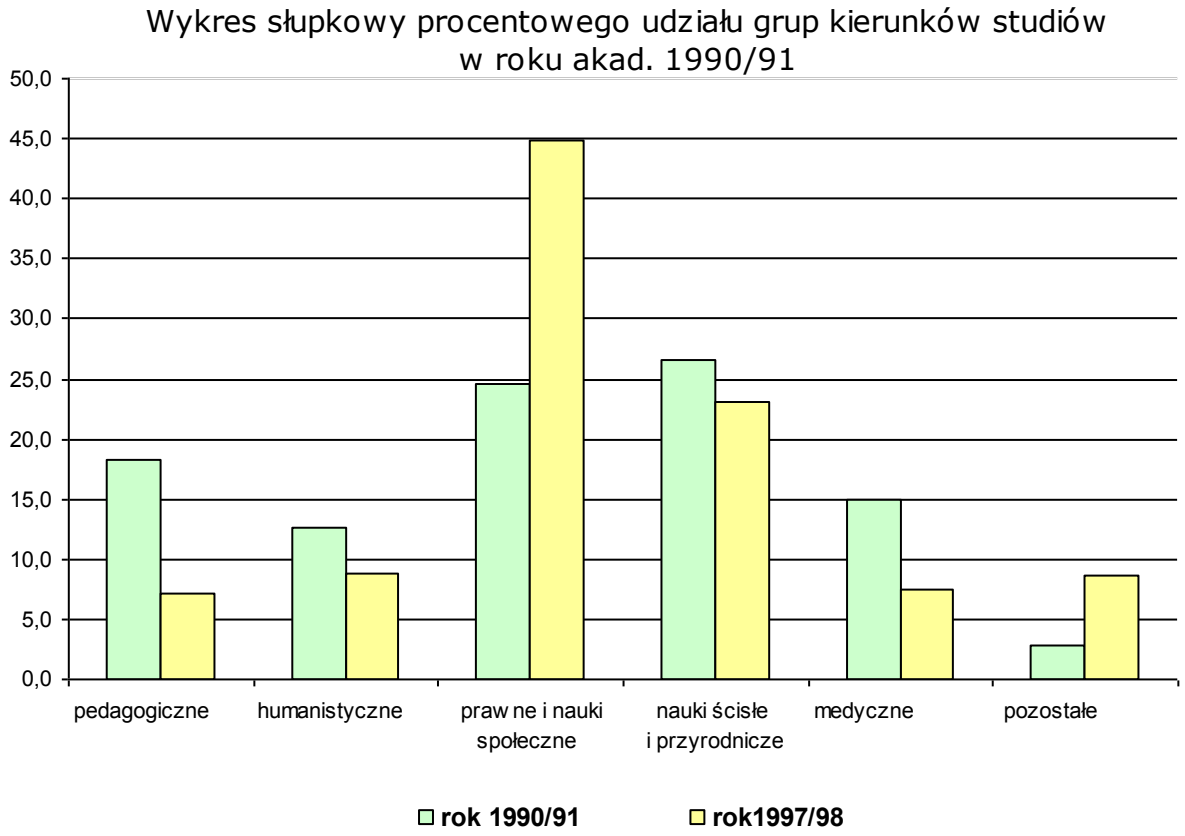


Wykres słupkowy procentowego udziału grup kierunków studiów w roku akad. oraz 1997/98



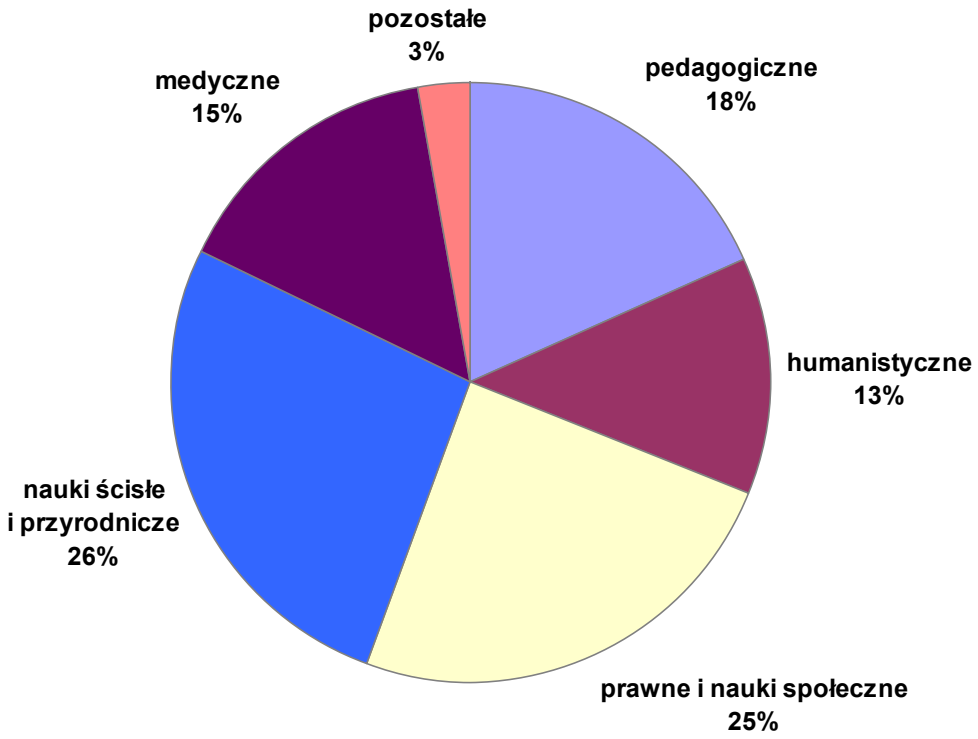
Prezentacja materiału statystycznego

Połączony wykres słupkowy



Wykres kołowy

Wykres kołowy procentowego udziału grup kierunków studiów w roku akad. 1990/91



Kąt wycinka koła dla grupy humanistycznej =

$$0{,}127 \times 360^{o} = 45{,}72^{o}$$

Kąt wycinka koła odpowiadającego określonej kategorii =

Liczebność kategorii / liczebność próbki) $\times 360^{o}.$

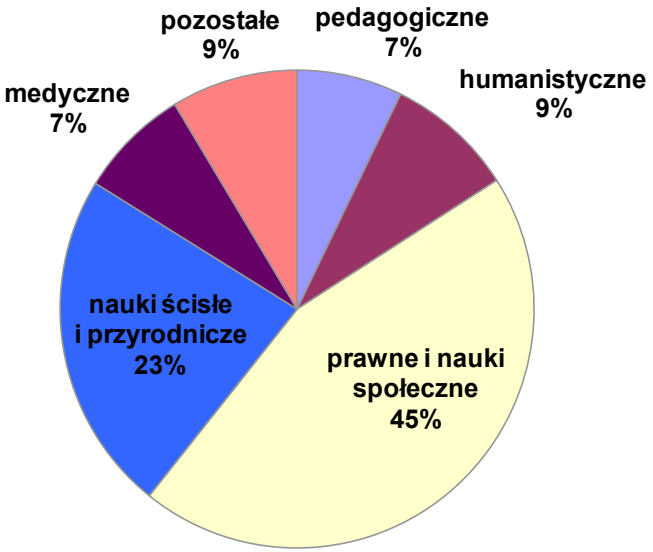
częstość kategorii x 100% =

= (pole wycinka / pole koła) x 100%

Prezentacja materiału statystycznego

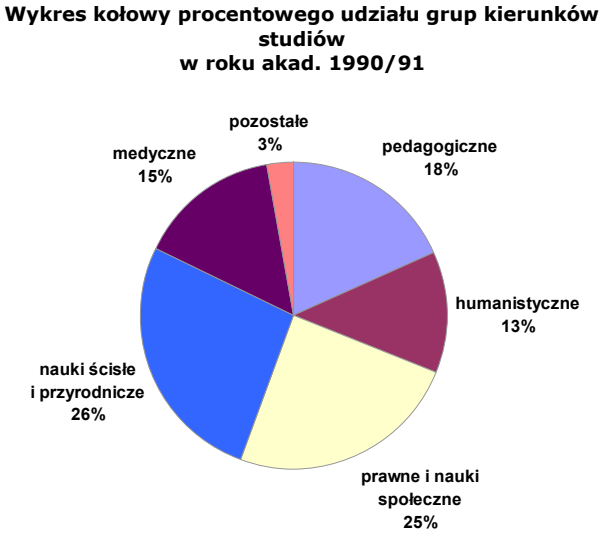
Wykres kołowy

Wykres kołowy procentowego udziału grup kierunków studiów w roku akad. 1997/98



Prezentacja materiału statystycznego

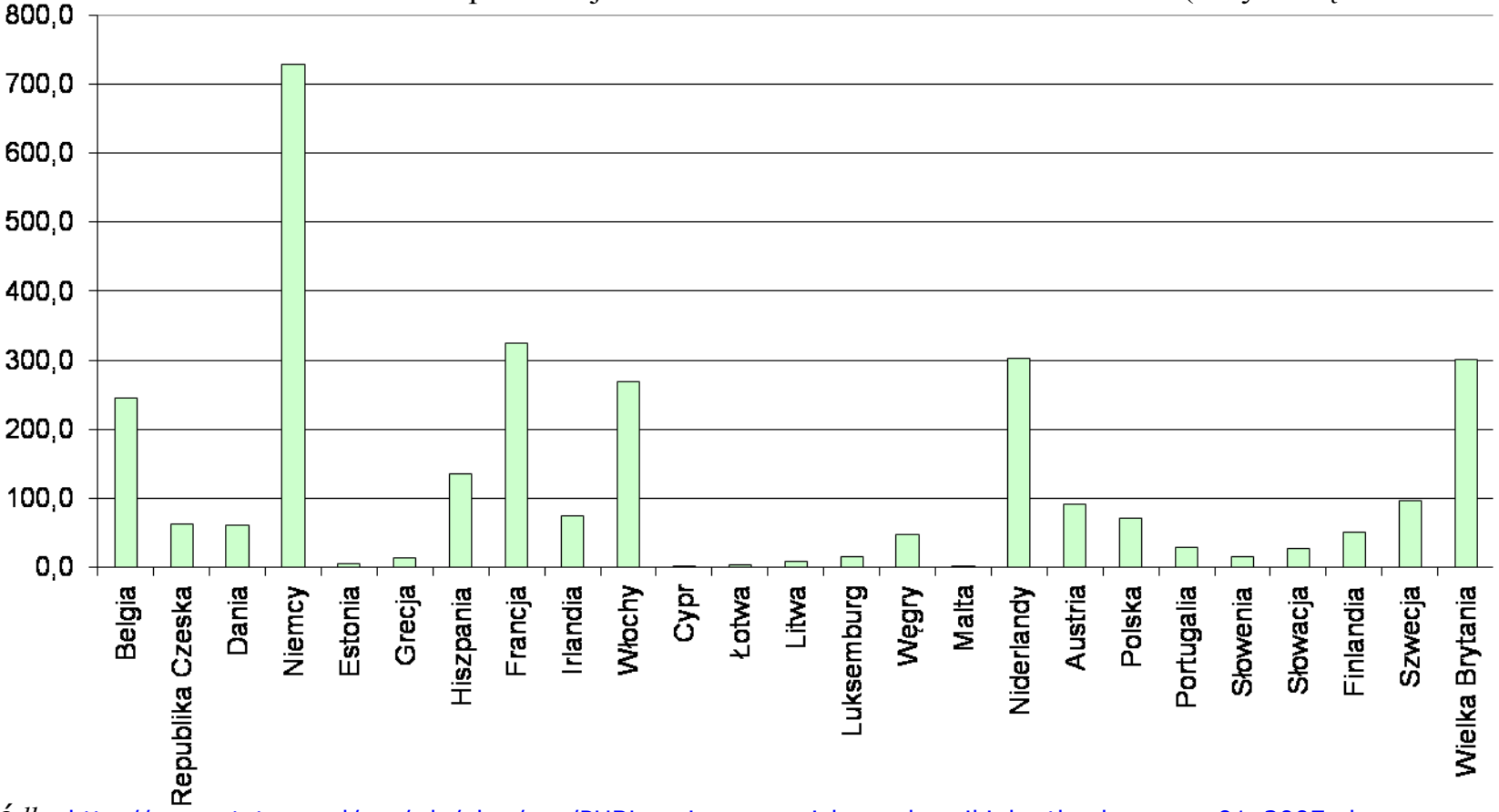
Wykresy kołowe



Wykres słupkowy

Przykład

Tablica xx. Wartość eksportu krajów członkowskich UE w okresie2006 I-X (ceny bieżące w mld EUR)

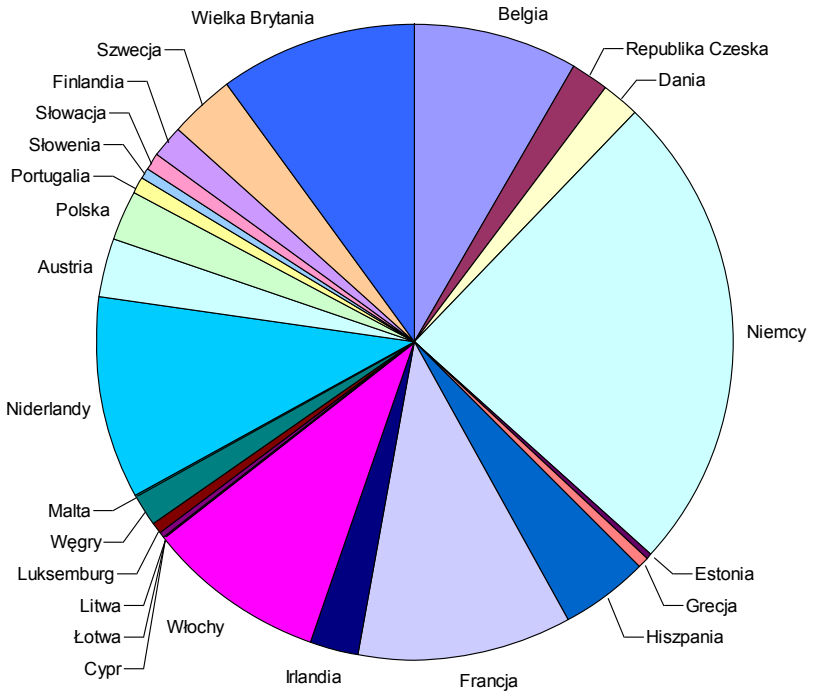


Źródło: http://www.stat.gov.pl/cps/rde/xbcr/gus/PUBL_unia_europejska_wskazniki_krotkookresowe_01_2007.xls

Wykres kołowy

Przykład

Tablica xx. Wartość eksportu krajów członkowskich UE w okresie2006 I-X (ceny bieżące w mld EUR)



Źródło:
http://www.stat.gov.pl/cps/rde/xbcr/gus/PUBL_unia_europejska_wskazniki_krotkookresowe_01_2007.xls

Ograniczenia wykresów kołowych:

- można przedstawić jedynie dane procentowe
- w próbce musi być co najmniej 1 obserwacja każdej kategorii (bo łączna suma pól wycinków musi stanowić 100 % pola koła)
- mało czytelne przy dużej liczbie kategorii
- analiza dwóch wykresów kołowych bardziej kłopotliwa niż połączonego wykresu słupkowego.

METODY OPISU DANYCH ILOŚCIOWYCH SKALARNYCH

Wykresy: diagramy, histogramy, łamane częstości, wykresy przebiegu.

Przykład. W stu kolejnych rzutach kostką sześcienną otrzymano wyniki (próbkę cechy dyskretnej o liczności 100):

5 2 2 6 3 2 5 3 1 2 5 3 6 2 5 4 4 6 1 6 4 5 5 2 4 6 1 4 4 3 4 2 4 2 4 4
1 1 4 5 3 1 5 6 5 6 1 5 6 2 4 5 5 2 5 4 5 5 1 1 2 2 5 5 2 6 3 5 5 4 1 4
5 5 1 4 3 2 1 2 6 1 2 1 6 5 1 3 6 1 5 6 6 2 2 3 5 5 2 4

Rozkład liczby oczek w próbce

Wartość (l. oczek)	1	2	3	4	5	6
Liczność (l. wystąpień)	16	19	9	17	25	14

Rozkład częstości liczby oczek w próbce

Wartość (l. oczek)	1	2	3	4	5	6
Częstość	0,16	0,19	0,09	0,17	0,25	0,14

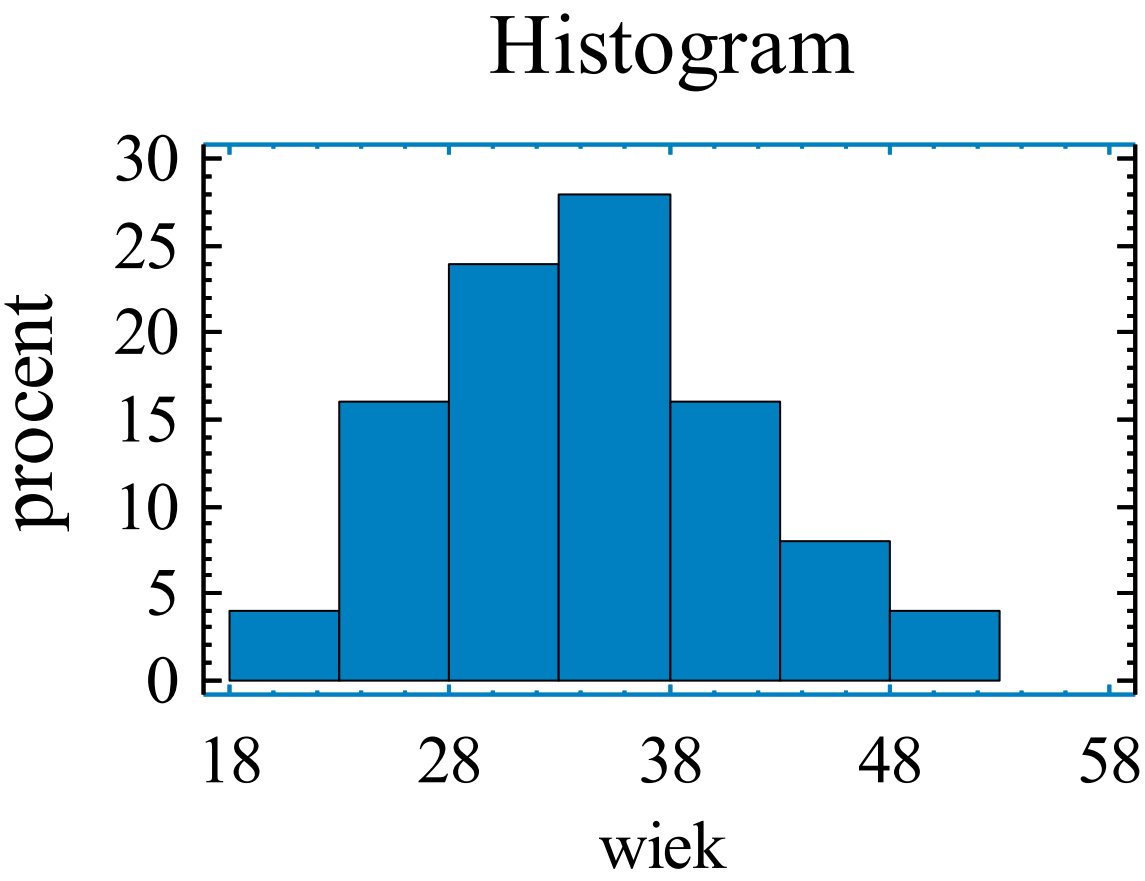
Zwięzły opis próbki: **rozkład cechy w próbce**, tzn. zapisanie jakie wartości wystąpiły w próbce i ile razy, lub z jaką częstością.

Diagram liczebności **Diagram częstości**

Przykład. Wiek **25** osób, które ubezpieczyły się w III filarze emerytalnym w pewnym zakładzie pracy: 30, **49**, 33, 35, 37, **20**, 31, 30, 36, 46, 39, 40, 38, 41, 35, 37, 24, 27, 36, 43, 45, 25, 32, 29, 28.

- **21 różnych wartości:** diagram rozkładu lat nieczytelny.
- **Agregacja danych:** przedziały wiekowe zawierające wszystkie obserwacje, liczba obserwacji w tych przedziałach.

Przedział (klasa)	Obserwacje	Liczność	Częstość
[18,23)	20	1	1/25 = 0,04
[23,28)	24, 27, 25	3	3/25 = 0,12
[28,33)	30, 30, 31, 32, 29, 28	6	6/25 = 0,24
[33,38)	33, 35, 37, 36, 35, 37, 36	7	7/25 = 0,28
[38,43)	39, 40, 38, 41	4	4/25 = 0,16
[43,48)	43, 45, 46	3	3/25 = 0,12
[48,53)	49	1	1/25 = 0,04



28+16+12+4=60% pracowników ma co najmniej 33 lata

Na osiach poziomych: granice klas wiekowych (przedziałów)

wysokości słupków = procentowy udział każdej klasy w próbce

Wysokość słupka = częstość klasy x **100%.**

Pole słupka =

stała długość przedziału x **częstość** x **100**

Histogram **liczebności:** wysokość słupka = **liczność klasy**

Histogram **częstości**: wysokość słupka = **częstość klasy**

Prezentacja materiału statystycznego

Szeregi rozdzielcze przedziałowe są prezentowane za pomocą:

- Histogramów,
- Diagramów (wieloboków liczebności),
- Krzywych liczebności (lub częstości).

Histogram to wykres słupkowy, w którym podstawy prostokątów, leżące na osi odciętych, odpowiadają przedziałom klasowym, natomiast wysokości są określone na osi rzędnych przez odpowiadające im liczebności (bądź częstości).

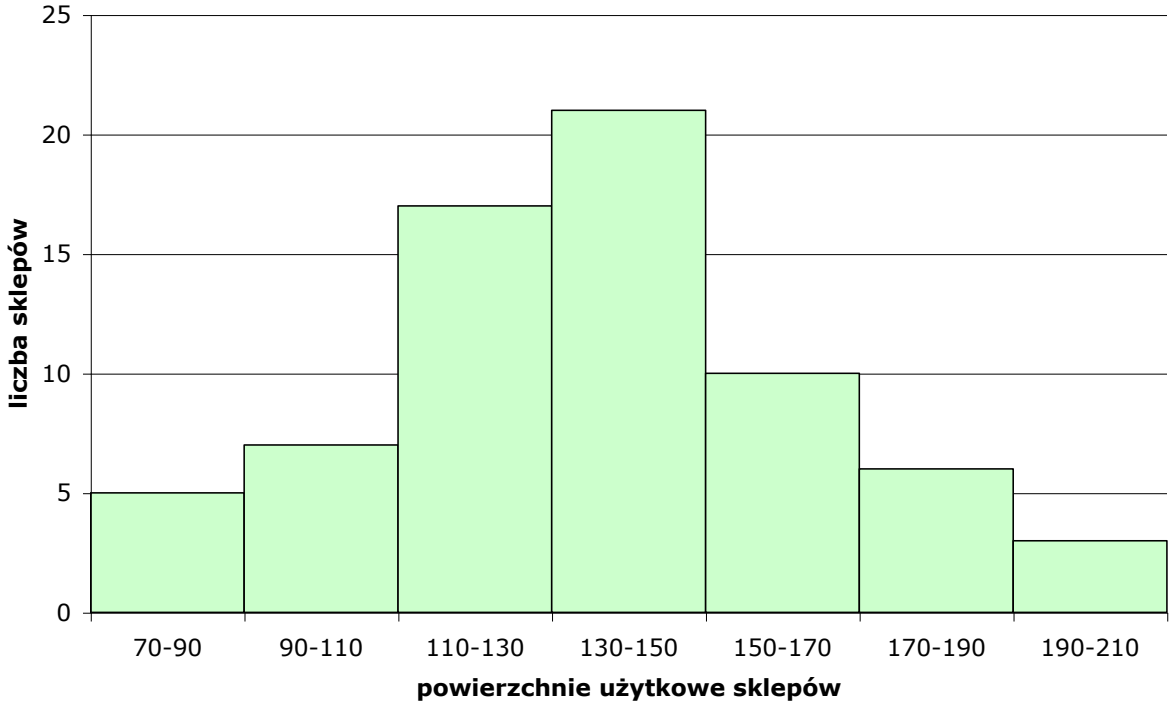
Diagram jest łamaną powstałą przez połączenie punktów, których współrzędnymi są środki przedziałów klasowych i odpowiadające im liczebności (lub częstości).

Krzywa liczebności to wygładzony wielobok liczebności.

Prezentacja materiału statystycznego

Przykład (prezentacja graficzna danych ilościowych)

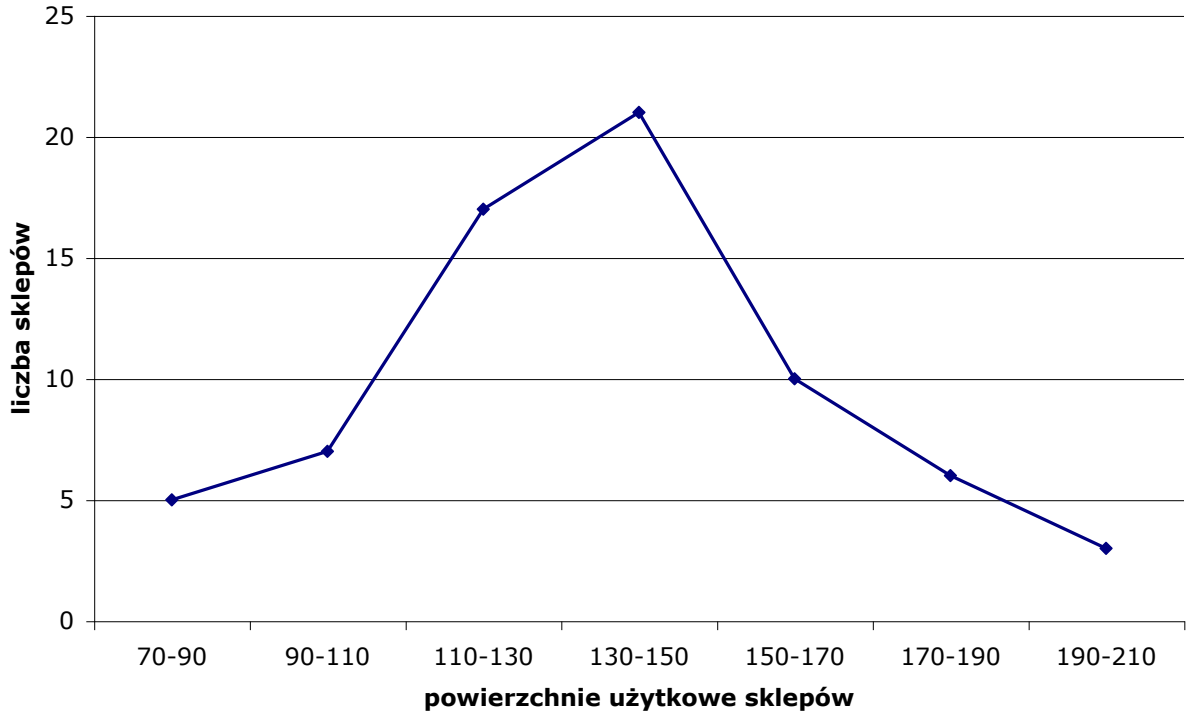
Histogram przedstawiający szereg rozdzielczy z przykładu (pow. sklepów - str.15, przepis – str.19 i 20)



- Uwaga! Kształt histogramu dla szeregu częstości jest identyczny

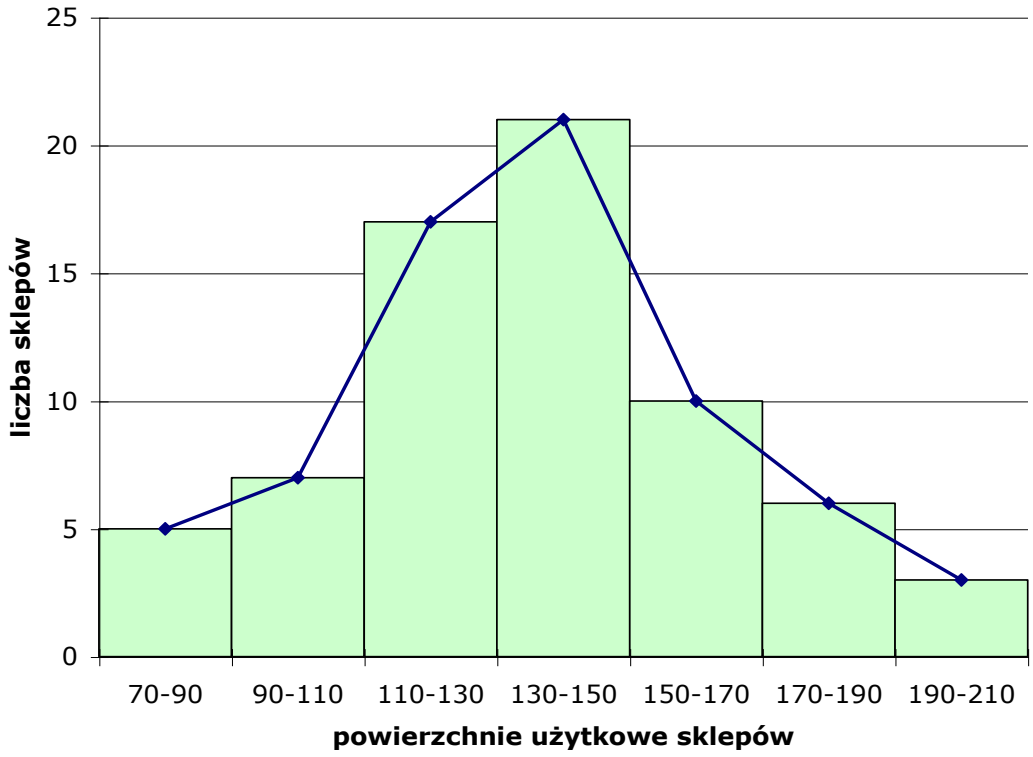
Prezentacja materiału statystycznego

Diagram szeregu rozdzielczego z przykładu (pow. sklepów)



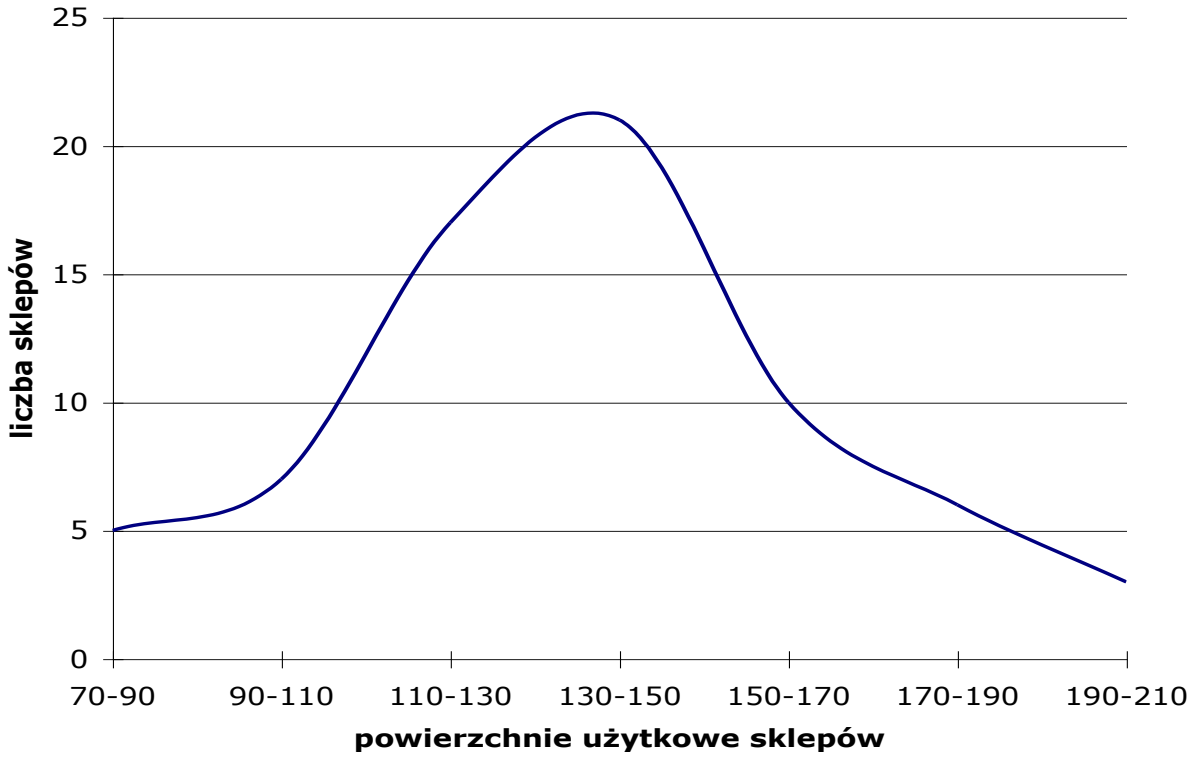
Prezentacja materiału statystycznego

Histogram oraz diagram przedstawiający szereg rozdzielczy przedziałowy



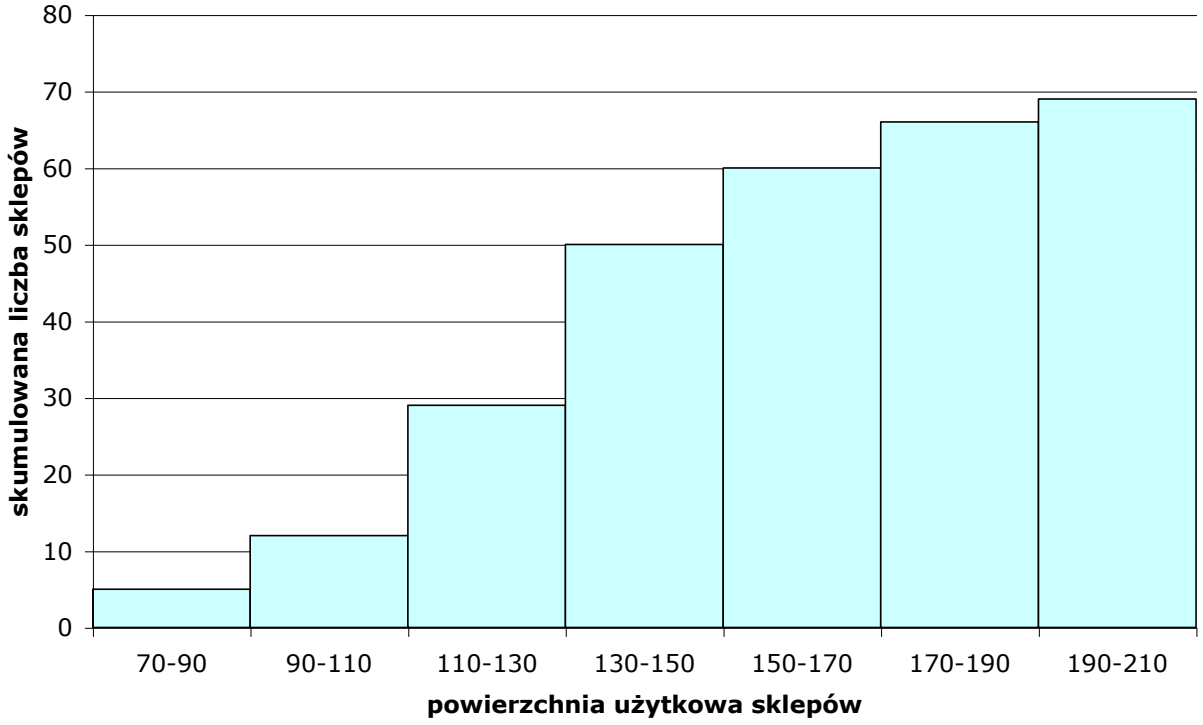
Prezentacja materiału statystycznego

Krzywa liczebności szeregu rozdzielczego



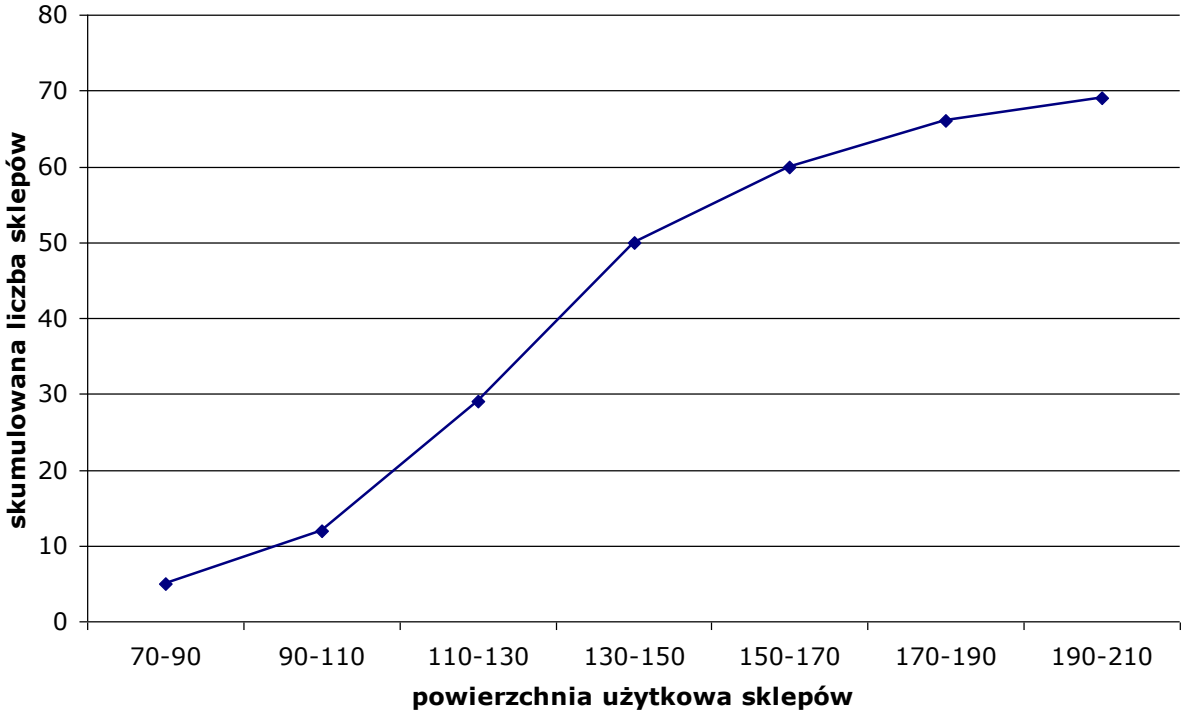
Prezentacja materiału statystycznego

Histogram przedstawiający szereg rozdzielczy skumulowany

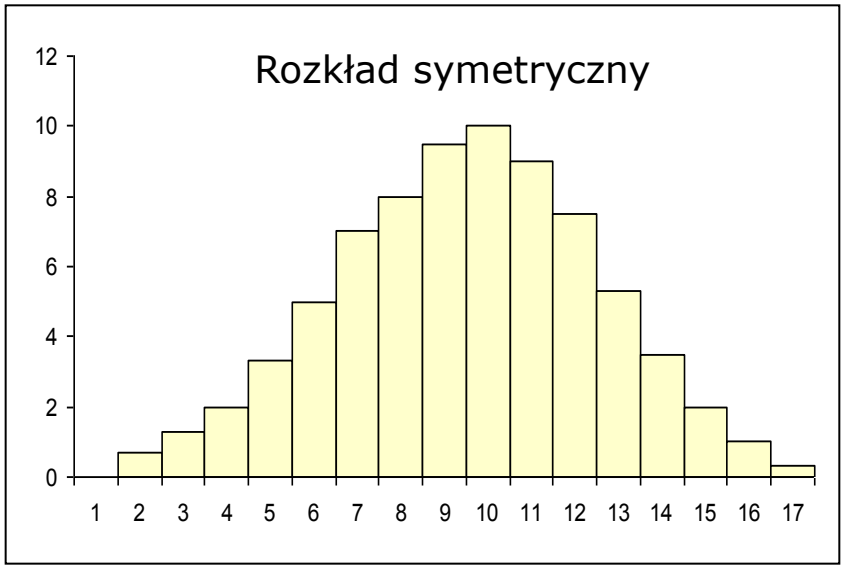


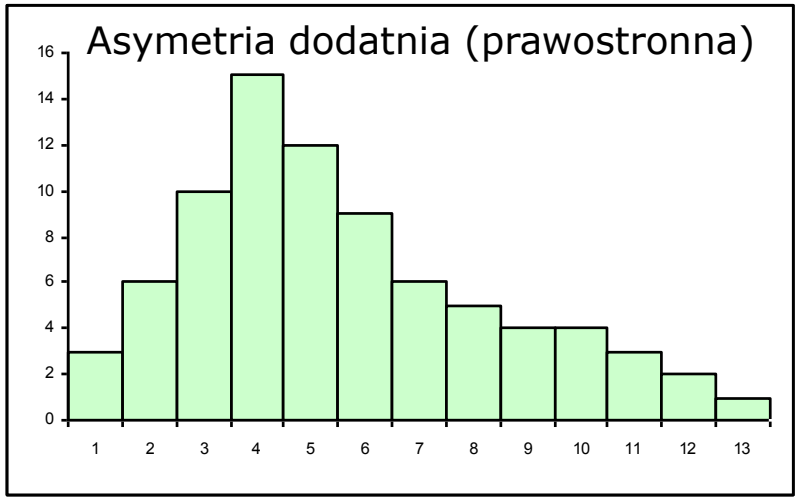
Prezentacja materiału statystycznego

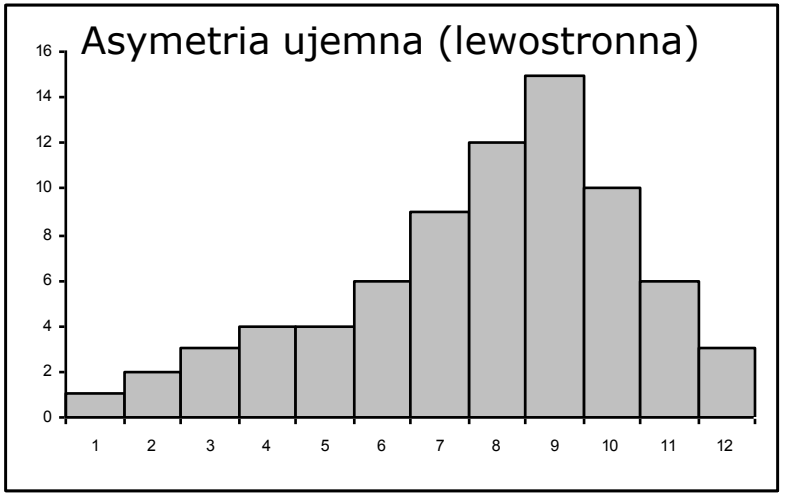
Diagram szeregu rozdzielczego skumulowanego
(wykres dystrybuanty empirycznej)



Zmienność.


Rozkład symetryczny
0
2
4
6
8
10
12
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17


Asymetria dodatnia (prawostronna)
0
2
4
6
8
10
12
14
16
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13


Asymetria ujemna (lewostronna)
0
2
4
6
8
10
12
14
16
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

KONSTRUKCJA HISTOGRAMU

(Str. 17 i 18 lub jak poniżej)

- Początkowy **wybór długości** przedziałów:

$$h = 2{,}64 \times IQR \times n^{-1/3}$$

n = liczność próbki, IQR = rozstęp międzykwartylowy = zakres 50% "środkowych" wartości w próbce

- Obserwacja wpływu stopniowego **zwiększania lub zmniejszania** długości przedziałów na kształt histogramu:

$\alpha h, \alpha^2 h, \ldots$ lub $\alpha^{-1} h, \alpha^{-2} h, \ldots$; $\alpha > 1$

Mała długość przedziału to : **nieregularność** histogramu

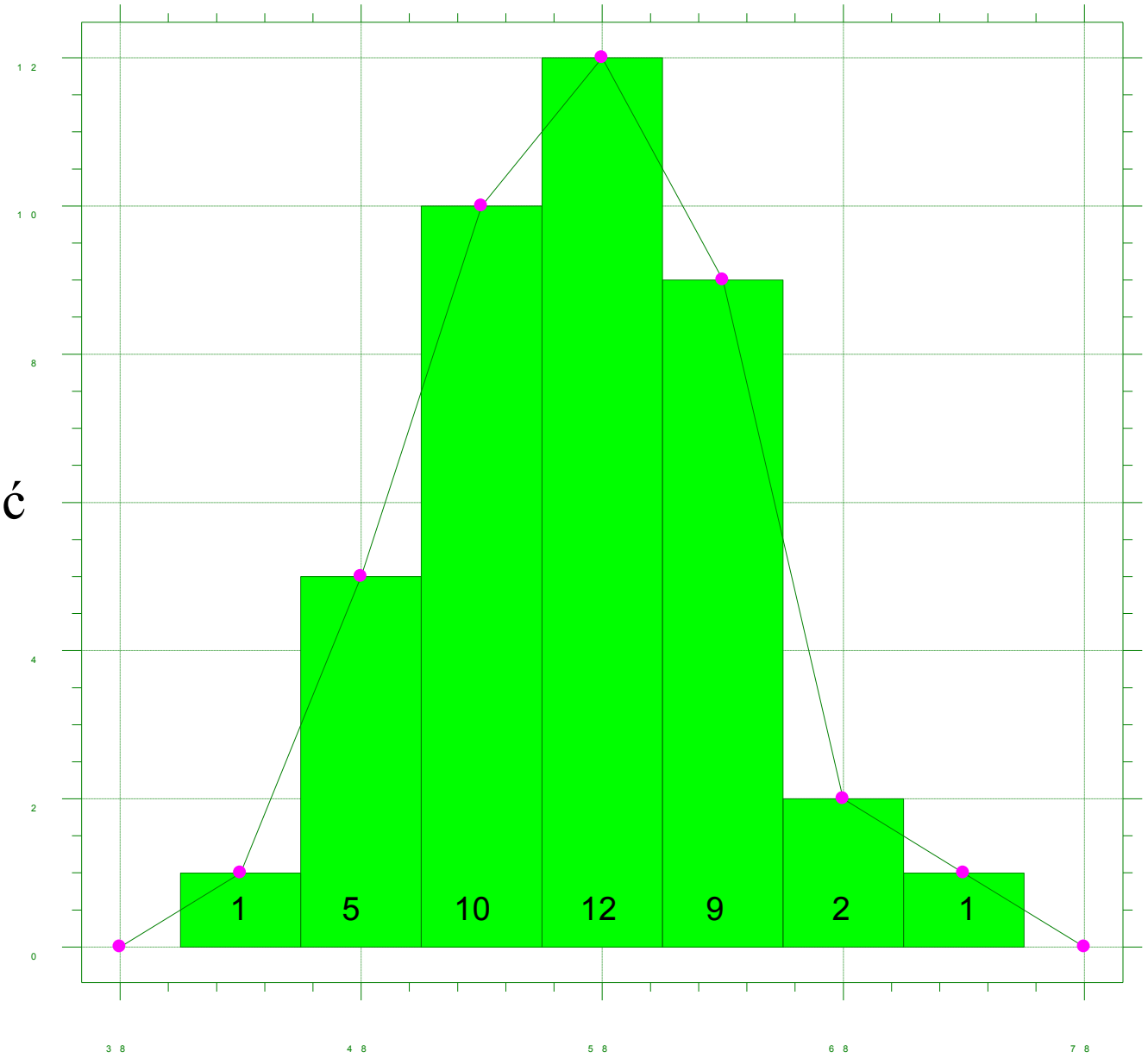
Duża długość przedziału to: za duże **wygładzenie** histogramu

Przy ustaleniu kompromisu pomiędzy zbyt dużym wygładzeniem histogramu (redukcją informacji) a dużą nieregularnością histogramu pomocne są dodatkowe informacje o naturze obserwowanego zjawiska, np. obserwacje z kilku różnych populacji mogą dawać histogramy wielomodalne.

- **Początek histogramu**: najmniejsza obserwacja stanowi środek pierwszego przedziału. Uśredniając kilka histogramów o nieznacznie przesuniętych początkach można uniezależnić się od wpływu początku histogramu na jego kształt.

Nr klasy i	Klasa		$\overline{x}_i$	n_i	w_i	N_i	W_i
1	40,5	45,5	43	1	0,025	1	0,025
2	45,5	50,5	48	5	0,125	6	0,150
3	50,5	55,5	53	10	0,250	16	0,400
4	55,5	60,5	58	12	0,300	28	0,700
5	60,5	65,5	63	9	0,225	37	0,925
6	65,5	70,5	68	2	0,050	39	0,975
7	70,5	75,5	73	1	0,025	40	1,000

Histogram oraz łamana liczności



WSKAŹNIKI SUMARYCZNE

WSKAŹNIKI POŁOŻENIA (**miary położenia**, **parametry położenia**) charakteryzują najbardziej reprezentatywne dane, centralną „tendencję” danych, określają „środek” próbki:

Niech : $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - próbka o liczności n.

Wartość średnia w próbce (**średnia próbkowa, średnia próbki**)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Przykład. Miesięczny dochód 10-ciu osób (w tys. PLN):

Dochód (PLN)	[1, 1,5)	[1,5, 2)	[2, 2,5)	[2,5, 3)
Liczba osób	2	2	4	2

Średnia na podstawie danych zgrupowanych:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i \tilde{x}_i}{n} = \frac{2 \times 1{,}25 + 2 \times 1{,}75 + 4 \times 2{,}25 + 2 \times 2{,}75}{10} = 2{,}05$$

Mediana w próbce (mediana próbki, mediana próbkowa)

Niech $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n-1)} \le x_{(n)}$

uporządkowane w sposób rosnący wartości próbki:

$x_{(1)} = \min\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$, ... , $x_{(n)} = \max\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$

$$x_{med} = x_{((n+1)/2)}, \quad \text{gdy n jest nieparzyste}$$

$$x_{med} = \frac{1}{2}(x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)}), \quad \text{gdy n jest parzyste.}$$

Przykład. Miesięczny dochód 11-tu osób:

Dochód (PLN)	2000	2500	3500	19000
Liczba osób	4	4	2	1

Średnie wynagrodzenie tej grupy osób to:

$$\bar{x} = \frac{1}{11}(4 \times 2000 + 4 \times 2500 + 2 \times 3500 + 19000) = \mathbf{4000}$$

2000, 2000, 2000, 2000, 2500, 2500, 2500, 2500, 3500, 3500, 19000

Mediana = 2500

Średnia wrażliwa na obserwacje odstające:

$\bar{x} = 4000 > 3500 = x_{(10)},\ x_{(11)} = 19000$ - **średnia nie odzwierciedla „typowego" dochodu.**

Mediana odporna (mało wrażliwa) na obserwacje odstające:

$x_{med} = x_{(6)} = 2500$ - **mediana jest lepszą miarą przeciętnego wynagrodzenia niż średnia**

Średnia ucinana (ucięta) (z parametrem k)

$$\bar{x}_{tk} = \frac{1}{n-2k} \sum_{i=k+1}^{n-k} x_{(i)},$$

stosowana gdy wartości odstające są wynikiem błędu (błędne przetworzenie danych lub błędy przyrządów pomiarowych).

Ostrzeżenie: obserwacje odstające mogą być bardzo istotne, np. są wynikiem rozregulowania procesu produkcji

Średnia winsorowska (z parametrem k)

$$\bar{x}_{wk} = \frac{1}{n}\left[(k+1)x_{(k+1)} + \sum_{i=k+2}^{n-k-1} x_{(i)} + (k+1)x_{(n-k)}\right]$$

Stosowana w sytuacjach gdy wartości skrajne (k najmniejszych lub k największych) niepewne co do ich prawdziwych wartości (np. zostały utracone z bazy danych; nie mogły być zaobserwowane w przypadku badania czasu życia lub czasu bezawaryjnej pracy urządzenia gdy eksperymentator ma ograniczony czas obserwowania zjawiska.

Moda – najczęściej występująca wartość (lub wartości) w próbce.

WSKAŹNIKI ROZPROSZENIA (**miary rozproszenia**, **parametry rozproszenia**) charakteryzują rozrzut danych, rozproszenie wartości próbki wokół parametru położenia.

Rozstęp próbki

$$R = x_{(n)} - x_{(1)},$$

Wariancja próbki (w próbce)

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2,$$

Przykład. Miesięczny dochód 10-ciu osób (w tys. PLN):

Dochód (PLN)	[1, 1,5)	[1,5, 2)	[2, 2,5)	[2,5, 3)
Liczba osób	2	2	4	2

Wariancja na podstawie danych zgrupowanych:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i(\widetilde{x}_i - \bar{x})^2 = 0{,}2889.$$

Odchylenie standardowe w próbce (próbki)

$$s = \sqrt{s^2}$$

Odchylenie przeciętne od wartości średniej

$$d_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right|$$

Dolny (pierwszy) kwartyl

Q_1 = mediana podpróbki składającej się z

elementów próbki „mniejszych” od mediany x_{med} .

Górny (trzeci) kwartyl

Q_3 **=** mediana podpróbki składającej się z elementów próbki „większych” od mediany (w próbce uporządkowanej rosnąco są to elementy występujące na pozycjach po pozycji mediany.

Rozstęp międzykwartylowy

$$IQR = Q_3 - Q_1.$$

Obserwacje odstające – obserwacje poza przedziałem

$$\left[Q_1 - \frac{3}{2}IQR, Q_3 + \frac{3}{2}IQR\right]$$

Przykład. Zanotowano liczby reklamacji w kolejnych 8 miesiącach w wybranym oddziale pewnego banku:

15, 23, 10, 18, 19, 15, 9, 20.

Obliczyć średnią i wariancję, medianę, dolny i górny kwartyl dla zaobserwowanych liczby reklamacji. Czy są obserwacje odstające?

$$\bar{x} = \frac{15 + 23 + 10 + 18 + 19 + 15 + 9 + 20}{8} = \frac{129}{8} = 16{,}125$$

$$s^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}(x_i - 16{,}125)^2 = \frac{1}{7}\{(15 - 16{,}125)^2 + \cdots + (20 - 16{,}125)^2\} = ?$$

Próbka uporządkowana rosnąco: 9 10 15 15 18 19 20 23

Mediana = $\frac{15+18}{2} = \frac{33}{2} = 16{,}5$, $Q_1 = \frac{10+15}{2} = 12{,}5$, $Q_3 = \frac{19+20}{2} = 19{,}5$

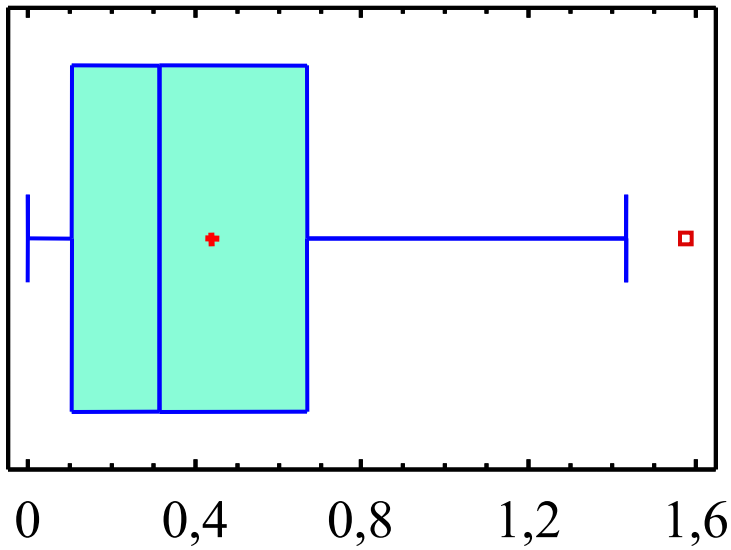
Obserwacje odstające = obserwacje poza przedziałem

$\left[12{,}5 - \frac{3}{2}(19{,}5 - 12{,}5), 19{,}5 + \frac{3}{2}(19{,}5 - 12{,}5)\right] = [2{,}32]$, stąd nie ma odstających obserwacji.

WYKRES RAMKOWY (pudełkowy)

ilustruje wzajemne położenie pięciu wskaźników sumarycznych:

$$x_{(1)} = x_{min}, \quad Q_1, \quad x_{med}, \quad Q_3, \quad x_{(n)} = x_{max}.$$



Obserwacja potencjalnie odstająca

Z wykresu odczytujemy następujące wskaźniki:

- Q_1 = 0,1 = rzut na oś poziomą lewego boku prostokąta
- Q_3 = 0,7 = rzut na oś poziomą prawego boku prostokąta
- Q_2 = 0,3 = rzut na oś poziomą pionowego odcinka wewnątrz prostokąta
- IQR = długość podstawy prostokąta

Wąsy wykresu ramkowego = linie po obu stronach prostokąta.

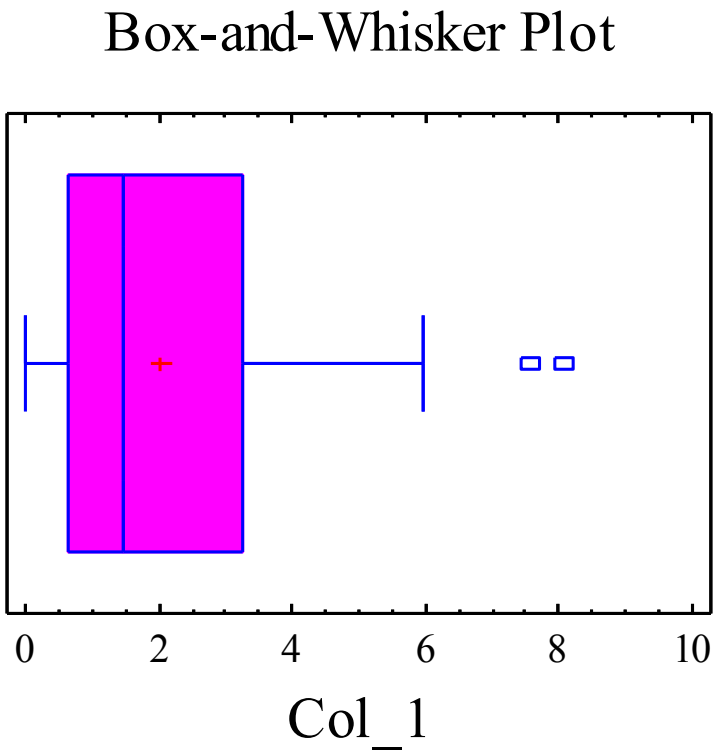
Rzut lewego wąsa na oś poziomą = przedział $[x_*, Q_1]$, gdzie

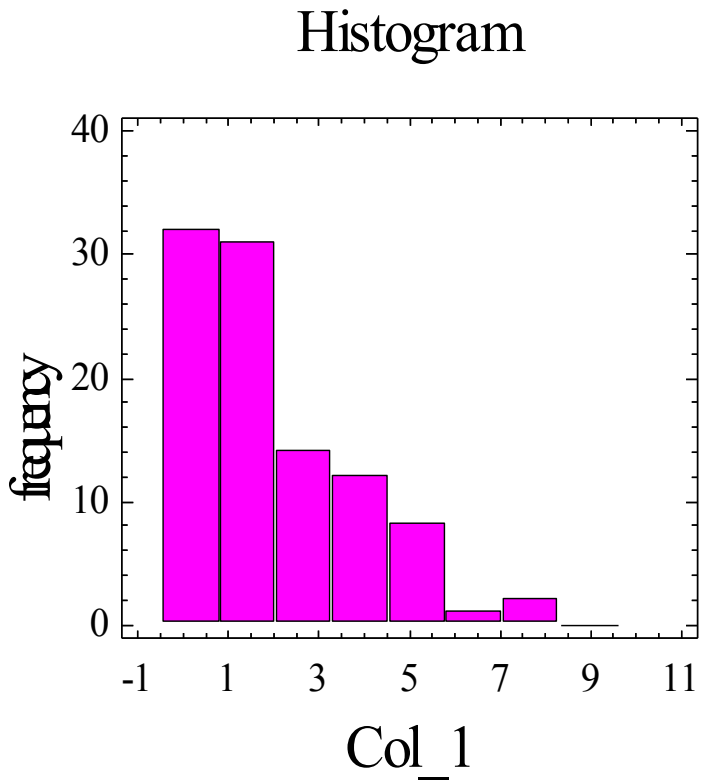
$x_* = \min\{ x_k: \ Q_1 - 3/2 \cdot IQR \ \leq \ x_k \leq Q_1 \}$,

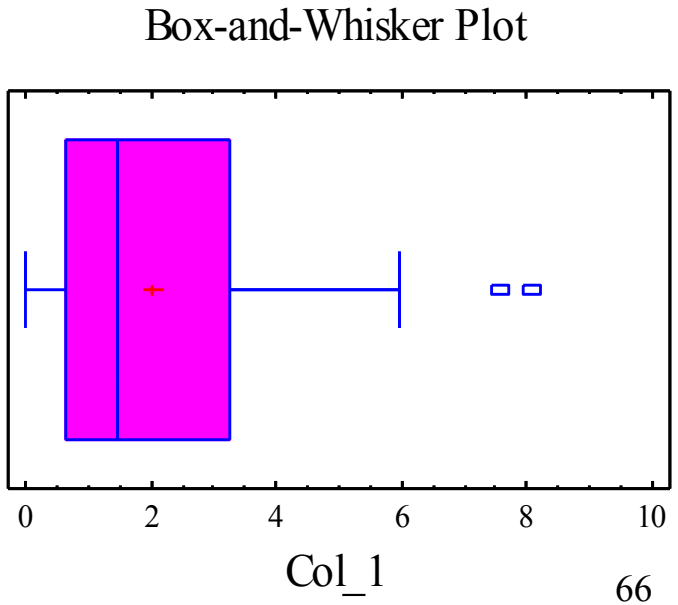
podobnie określamy rzut prawego wąsa = przedział $[Q_3, x^*]$, gdzie

$x^* = \max\{ x_k: \ Q_3 \ \leq \ x_k \leq Q_3 + 3/2 \cdot IQR \ \}$

Count = 100
Average = 2,02544
Median = 1,46467
Variance = 3,16395
Standard deviation = 1,77875
Minimum = 0,0150559
Maximum = 8,05684
Range = 8,04179
Lower quartile = 0,638618
Upper quartile = 3,23695
Interquartile range = 2,59833
Coeff. of variation = 87,8206%

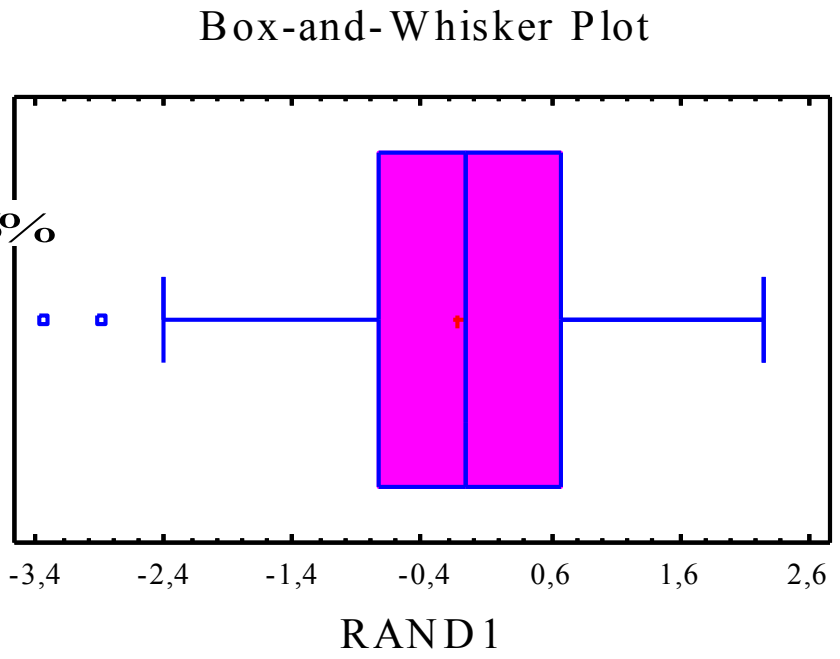


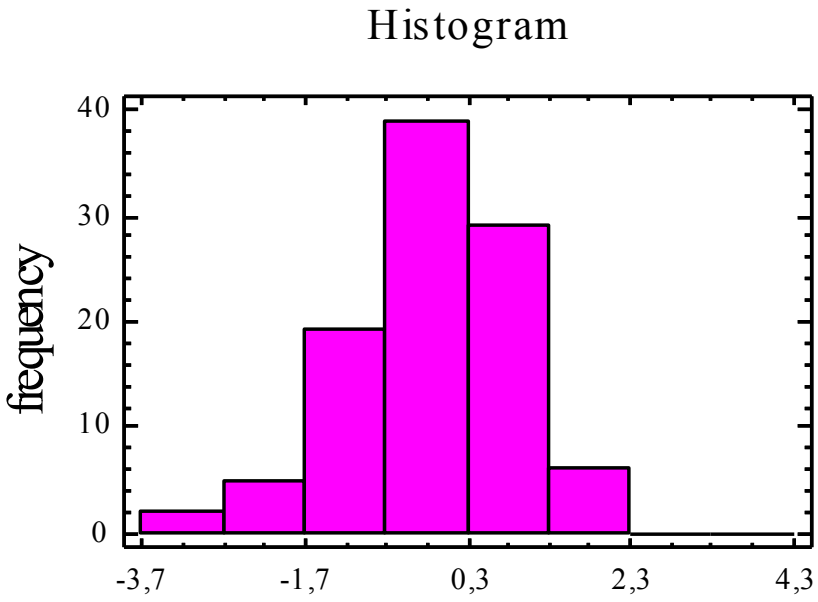

Histogram
40
30
20
10
0
frequency
-1
1
3
5
7
9
11
Col_1

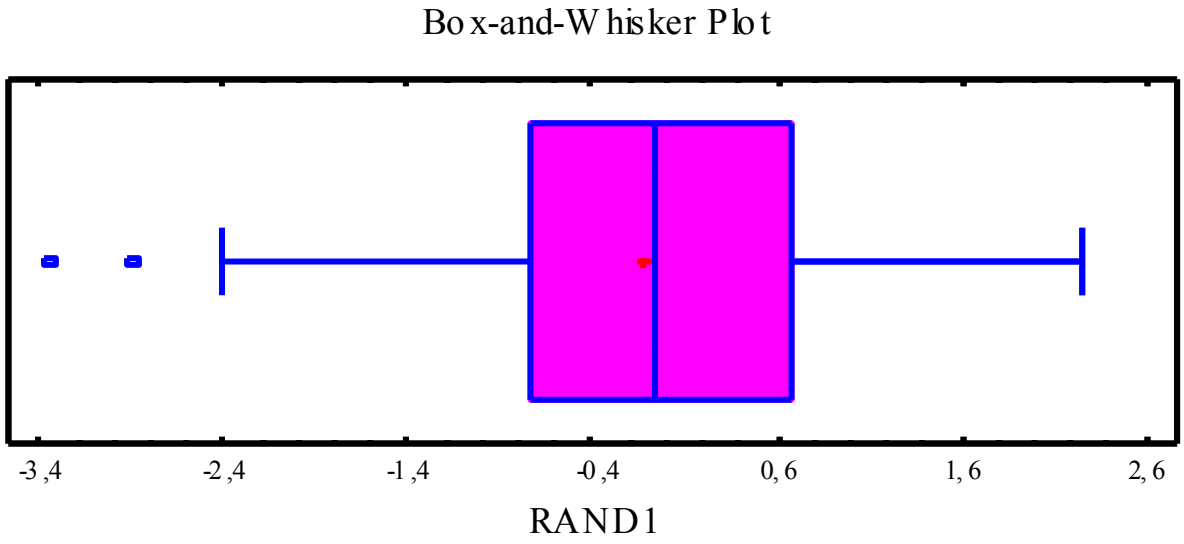

Box-and-Whisker Plot
0
2
4
6
8
10
Col_1

Summary Statistics for RAND1

Count = 100
Average = -0,110696
Median = -0,0516888
Variance = 1,07775
Standard deviation = 1,03815
Minimum = -3,36516
Maximum = 2,26235
Range = 5,62751
Lower quartile = -0,726224
Upper quartile = 0,680553
Interquartile range = 1,40678
Stnd. skewness = -1,86072
Coeff. of variation = -937,836%




Histogram
frequency
40
30
20
10
0
-3,7
-1,7
0,3
2,3
4,3


Box-and-Whisker Plot
-3,4
-2,4
-1,4
-0,4
0,6
1,6
2,6
RAND1