Rozwiązania zadań C07

Zad.1. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład łączny:

$$p_{11} = 0{,}15;\quad p_{12} = 0{,}35;\quad p_{21} = 0{,}15;\quad p_{22} = 0{,}35$$

Dyskretne zmienne losowe X, Y są niezależne ⟺ dla każdej pary wartości x,y

P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y).

W zadaniu wartości są oznaczane parą indeksów: pierwszy dotyczy wartości zmiennej X, a drugi wartości zmiennej Y. Zatem

X, Y są niezależne ⟺ $p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$ dla $i = 1{,}2$, $j = 1{,}2$. (*)

X ma rozkład (brzegowy): $p_{1\cdot} = p_{11} + p_{12} = 0{,}15 + 0{,}35 = 0{,}5$

$$p_{2\cdot} = p_{21} + p_{22} = 0{,}15 + 0{,}35 = 0{,}5$$

Y ma rozkład (brzegowy): $p_{\cdot 1} = p_{11} + p_{21} = 0{,}15 + 0{,}15 = 0{,}3$

$$p_{\cdot 2} = p_{12} + p_{22} = 0{,}35 + 0{,}35 = 0{,}7$$

Sprawdzamy równości po prawej stronie (*):

$$p_{1\cdot} \cdot p_{\cdot 1} = 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15 = p_{11}.$$

$$p_{1\cdot} \cdot p_{\cdot 2} = 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}35 = p_{12}$$

$$p_{2\cdot} \cdot p_{\cdot 1} = 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15 = p_{21}$$

$$p_{2\cdot} \cdot p_{\cdot 2} = 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}35 = p_{22}$$

Spełnione są równości (*), więc zmienne X, Y są niezależne.

Zad.2.

y / x	-1	0	1	$f_X(x)$
2	0,3	0,1	0,1	0,5
4	0,1	0,1	0,3	0,5
$f_Y(y)$	0,4	0,2	0,4	1

a) Wyznaczyć rozkłady brzegowe zmiennych X oraz Y.
b) Czy X, Y są niezależne?
c) Wyznaczyć momenty zwykłe rzędu drugiego zmiennej X oraz Y.

Rozw.

a) $P(X = x) = P(\{X = x, Y = -1\} \cup \{X = x, Y = 0\} \cup \{X = x, Y = 1\}) =$

$$= P(X = x, Y = -1) + P(X = x, Y = 0) + P(X = x, Y = 1) = f(x,-1) + f(x,0) + f(x,1),$$

gdzie $x = 2,4$.

x	2	4
$f_X(x) = P(X = x)$	0,5	0,5

y	-1	0	1
$f_Y(y) = P(Y = y)$	0,4	0,2	0,4

b) $f_X(2)f_Y(-1) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2 \neq 0{,}3 = f(2,-1) \implies X, Y$ są zależnymi zmiennymi losowymi.

c) **Definicja**. Niech k będzie liczbą naturalną ustaloną. Momentem zwykłym rzędu k zmiennej losowej X nazywamy liczbę:

$$m_k := E\left(X^k\right)$$

Moment zwykły rzędu 1, to wartość oczekiwana zmiennej X, a moment zwykły rzędu 2, to $E(X^2)$.

W zadaniu należy obliczyć $E(X^2)$, $E(Y^2)$.

$$E(X^2) = 2^2 \cdot 0{,}5 + 4^2 \cdot 0{,}5 = 10,$$

$$E(Y^2) = (-1)^2 \cdot 0{,}4 + 0^2 \cdot 0{,}2 + 1^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8.$$

Zad.3.

y / x	1	2	3	$f_X(x)$
0	0,1	0,2	0,3	0,6
1	0,1	0,1	0,2	0,4
$f_Y(y)$	0,2	0,3	0,5	1

Obliczyć $E(X), E(Y), Var(X), Var(Y)$

1) $E(X) = 0 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}4 = 0{,}4$, $\quad E(X^2) = 0^2 \cdot 0{,}6 + 1^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}4$,

$$Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = 0{,}4 - 0{,}16 = 0{,}24$$

2) $E(Y) = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}5 = 2{,}3$, $\quad E(Y^2) = 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}3 + 3^2 \cdot 0{,}5 = 5{,}9$,

$$Var(Y) = E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2 = 5{,}9 - 2{,}3^2 = 0{,}61.$$

Zad.4.

y / x	2	3	4	$f_X(x)$
0	0,1	0,2	0	0,3
1	0	0,1	0	0,1
2	0,2	0,3	0,1	0,6
$f_Y(y)$	0,3	0,6	0,1	1

a) $E(X) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}3, \quad E(Y) = 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}1 = 2{,}8,$

b) $f_X(0)f_Y(2) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09 \neq 0{,}1 = f(0{,}2) \implies X, Y$ są zależnymi zmiennymi losowymi.

x\ y	2	3	4
0	0,1	0,2	0
1	0	0,1	0
2	0,2	0,3	0,1

c) $F(1{,}2) = P(X \leq 1, Y \leq 2) = f(0{,}2) + f(1{,}2) = 0{,}1 + 0 = 0{,}1,$

$F(1{,}5; 3{,}5) = P(X \leq 1{,}5, Y \leq 3{,}5) = f(0{,}2) + f(0{,}3) + f(1{,}2) + f(1{,}3) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0 + 0{,}1 =$ $0{,}4$

$$P(X < 2|Y > 2) = \frac{P(X < 2, Y > 2)}{P(Y > 2)} = \frac{f(0{,}3) + f(0{,}4) + f(1{,}3) + f(1{,}4)}{P(Y = 3) + P(Y = 4)} =$$

$$= \frac{0{,}2 + 0 + 0{,}1 + 0}{0{,}6 + 0{,}1} = \frac{3}{7}$$

Wyznaczyć rozkład warunkowy Y pod warunkiem X=2, tzn. znaleźć warunkową funkcję prawdopodobieństwa

$$f_{Y|X}(y|2) = P(Y = y|X = 2) = \frac{P(Y = y, X = 2)}{P(X = 2)}, \quad y = 2{,}3{,}4$$

x\ y	2	3	4
0	0,1	0,2	0
1	0	0,1	0
2	0,2	0,3	0,1

1) $y = 2 \implies f_{Y|X}(2|2) = P(Y = 2|X = 2) = \frac{P(Y=2,X=2)}{P(X=2)} = \frac{f(2{,}2)}{f_X(2)} = \frac{0{,}2}{0{,}6}$

2) $y = 3 \implies f_{Y|X}(3|2) = P(Y = 3|X = 2) = \frac{P(Y=3,X=2)}{P(X=2)} = \frac{f(2{,}3)}{f_X(2)} = \frac{0{,}3}{0{,}6}$

3) $y = 4 \implies f_{Y|X}(4|2) = P(Y = 4|X = 2) = \frac{P(Y=4,X=2)}{P(X=2)} = \frac{f(2{,}4)}{f_X(2)} = \frac{0{,}1}{0{,}6}$

Rozkład warunkowy Y pod warunkiem X = 2 określa tabela:

y	2	3	4
$f_{Y|X}(y|2)$	2/6	3/6	1/6

Zad. 5.

$$f(x, y) = \begin{cases} (3/2)x^2 y & dla \quad 0 \leq x \leq 1; \;\; 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & w\ przypadku\ przeciwnym \end{cases}$$

a) Znaleźć funkcję rozkładu brzegowego zmiennej X.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{0}^{2} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^2 (3/2)x^2 y dy = \left(\frac{3}{2}\right)x^2 \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = 3x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & w\ przypadku\ przeciwnym \end{cases}$$

b) Znaleźć funkcję rozkładu brzegowego zmiennej Y oraz obliczyć P(Y>1).

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{0}^{1} f(x,y)dx$$

1) Niech $y < 0\ \ lub\ \ y > 2$. Wówczas dla dowolnego x: f(x,y)=0. Zatem

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{0}^{1} 0dx = 0$$

2) Niech $0 \le y \le 2$. Wówczas

$$f(x,y) = \begin{cases} (3/2)x^2 y & dla \quad 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 2 \\ 0 & dla \quad (x,y) \notin [0,1] \times [0,2] \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{0}^{1} \frac{3}{2}x^2 y dx = \frac{3}{2}y \int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{3}{2}y \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{3}{2}y\frac{1}{3} = \frac{1}{2}y$$

Z 1) i 2) mamy:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0{,}5y & dla \quad 0 \le y \le 2 \\ 0 & dla \quad y < 0\ lub\ y > 2 \end{cases}$$

$$P(Y > 1) = P(1 < Y < \infty) = \int_{1}^{\infty} f_Y(y)dy = \int_{1}^{2} \frac{1}{2}ydy = \frac{1}{2}\frac{y^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

c) Sprawdzić, czy zmienne X, Y są niezależne.

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0{,}5y & dla \quad 0 \le y \le 2 \\ 0 & dla \quad y < 0\ lub\ y > 2 \end{cases}, \qquad f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & dla \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & dla \quad x < 0\ lub\ x > 1 \end{cases}$$

Zmienne X, Y są niezależne $\Leftrightarrow$ $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$, dla wszystkich (x,y) $\Leftrightarrow$ dla każdej pary (x,y) zachodzi: $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, poza być może skończoną liczba punktów.

Sprawdzimy ostatnią równość dla gęstości:

1) Niech (x,y) spełniają nierówności: $0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 2$. Wówczas:

$$f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 y = (3x^2)\frac{1}{2}y = f_X(x)f_Y(y)$$

2) Niech $x \notin [0,1]$ lub $y \notin [0,2]$. Wówczas:

$$f(x,y) = 0 = 0 \cdot 0 = f_X(x)f_Y(y)$$

Z 1) i 2) X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Zad. 6. Znaleźć taką stałą k, aby funkcja

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy & dla \quad 1\le x\le 2, \quad 2\le y\le 4 \\ 0 & w\ rzeciwnym\ przypadku \end{cases}$$

Była funkcją gęstości dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y).

a) Obliczyć F(1,3). b) Wyznaczyć funkcje gęstości rozkładów brzegowych X i Y.

Rozw.

Funkcja $f(x,y)$, $(x,y)\in(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)$ jest funkcją gęstości dwuwymiarowej zm. losowej (X,Y) $\Leftrightarrow$ 1. $f(x,y)\ge 0$, $(x,y)\in(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)$

2.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$$

1. $k\ge 0$

2.

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=\int_{1}^{2}\int_{2}^{4} kxydydx=k\int_{1}^{2}\left(\int_{2}^{4} xydy\right)dx=k\int_{1}^{2}\left(x\int_{2}^{4} ydy\right)dx=$$

$$=k\int_{1}^{2} x\left(\frac{y^2}{2}\bigg|_2^4\right)dx=k\left(\frac{4^2}{2}-\frac{2^2}{2}\right)\int_{1}^{2} xdx=k\cdot 6\cdot\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_1^2\right)=6k\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)=\frac{3}{2}6k=9k$$

$$9k=1 \implies k=\frac{1}{9}$$

a)

$$F(1,3)=P(X\le 1, Y\le 3)=\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{3} f(x,y)dydx=\int_{1}^{1}\int_{2}^{3}\frac{1}{9}xydydx=\int_{1}^{1}\frac{1}{9}x\left(\int_{2}^{3} ydy\right)dx=0$$

b) $f_X(x)=?$, $f_Y(y)=?$

1. $Dla\ \ x<1\ \ lub\ \ x>2,\quad f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{\infty} 0dy=0,$

$$Dla\quad 1\le x\le 2,\ \ f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_{2}^{4}\frac{1}{9}xydy=\frac{1}{9}x\left(\frac{y^2}{2}\bigg|_2^4\right)=\frac{1}{9}x\left(\frac{4^2}{2}-\frac{2^2}{2}\right)=\frac{6}{9}x=\frac{2}{3}x$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)x \ , & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & x \notin [1,2] \end{cases}$$

2.

$$Dla\ \ y < 2\ \ lub\ \ y > 4,\ \ \ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0dx = 0$$

$$Dla\ \ \ 2 \leq y \leq 4,\ \ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{1}^{2} \frac{1}{9}xydx = \frac{1}{9}y\left(\frac{x^2}{2}\Big|_1^2\right) = \frac{1}{9}y\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = \frac{1}{9}y \cdot \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{1}{6}y$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}\right)y \ , & 2 \leq y \leq 4 \\ 0 & y \notin [2,4] \end{cases}$$