

Rozwiązania zadań C10

Zad.1. Szacuje się, że 40% podatników otrzyma zwrot pieniędzy z tytułu nadpłaconych podatków. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród 800 losowo wybranych podatników zwrot pieniędzy z tego tytułu należy się więcej niż 300, ale nie więcej niż 400 osobom?

Rozw.

- $p = 0,4$ – prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba otrzyma zwrot podatków
- $S_{800} \sim \text{Bin}(800; 0,4)$, $E(S_{800}) = 800 \cdot 0,4 = 320$,
 $\text{Var}(S_{800}) = 800 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 8 \cdot 24 = 8^2 \cdot 3$
- $P(300 < S_{800} \leq 400) = ?$

$$\begin{aligned} P(300 < S_{800} \leq 400) &= P\left(\frac{300 - 320}{8\sqrt{3}} < \frac{S_{800} - 320}{8\sqrt{3}} \leq \frac{400 - 320}{8\sqrt{3}}\right) = \\ &\approx P\left(\frac{-20}{8\sqrt{3}} < Z \leq \frac{80}{8\sqrt{3}}\right) = \Phi(5,773) - \Phi(-1,4435) = 1 - (1 - \Phi(1,443)) = \\ &= 0,924 \end{aligned}$$

Uwaga.

Sprawdzamy warunki stosowania CTG: $np = 800 \cdot 0,4 = 320 \geq 5$, $nq = 800 \cdot 0,6 \geq 5$.

Zad.2 Mamy 100 żarówek, których czas działania jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej 5 godzin. Używamy jednocześnie tylko jednej żarówki, a w przypadku zepsucia się żarówki natychmiast wstawiamy na jej miejsce nową. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że po 525 godzinach będzie

- 1) w zapasie przynajmniej jeszcze jedna żarówka;
- 2) działała jakaś żarówka.

Rozw.

1)

- $X_j \sim \exp\left(\frac{1}{5}\right)$, $\Rightarrow E(X_j) = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$
- X_j – czas działania j -tej żarówki, $j = 1, 2, \dots, 100$
- $S_{99} = X_1 + X_2 + \dots + X_{99}$ – czas działania 99-ciu żarówek wymienianych po kolejnych zepsuciach

Należy znaleźć



$$P(S_{99} \geq 525) = ?$$

- ✓ Z CTG S_{99} ma rozkład bliski rozkładowi normalnemu z wartością średnią $E(S_{99})$ i wariancją $\text{Var}(S_{99})$
- ✓ $E(S_{99}) = 99E(X_1) = 99 \cdot 5 = 495$
- ✓ $\text{Var}(S_{99}) = 99\text{Var}(X_1) = 99 \cdot 5^2 = 99 \cdot 25 = 2475$

$$P(S_{99} \geq 525) = 1 - P(S_{99} < 525) = 1 - P\left(\frac{S_{99} - 495}{\sqrt{2475}} \leq \frac{525 - 495}{\sqrt{2475}}\right) \approx$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{30}{\sqrt{2475}}\right) = 1 - \Phi(0,6030) = 1 - 0,7267 = 0,2733$$

2)

$$P(S_{100} > 525) = 1 - P(S_{100} \leq 525) = 1 - P\left(\frac{S_{100} - 100 \cdot 5}{\sqrt{100 \cdot 25}} \leq \frac{525 - 100 \cdot 5}{\sqrt{100 \cdot 25}}\right) \approx$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{25}{50}\right) = 1 - \Phi(0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085.$$

Twierdzenie - sformułowanie CTG dla sumy:

Jeśli X_1, X_2, \dots, X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa z wartością oczekiwaną μ oraz odchyleniem standardowym σ ,

to dla dużych n rozkład sumy $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ jest bliski rozkładowi normalnemu z wartością oczekiwaną $E(S_n) = n\mu$ i wariancją $Var(S_n) = n\sigma^2$.

Uwaga. Zazwyczaj wystarczy aby $n > 25$ (30). **CTG dla sumy mówi, że dla każdego x :**

$$P(S_n \leq x) = P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \leq \frac{x - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{x - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}\right)$$

Jeśli $S_n \sim \text{Binomial}(n, p)$, $j = 1, 2, \dots, n$, to dla $np \geq 5$, $nq \geq 5$

$$P(S_n \leq x) = P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{x + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \Phi\left(\frac{x + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ gdy } n \leq 100$$

$$P(S_n \leq x) = P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{x - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ gdy } n > 100$$

Zad.3 Prawdopodobieństwo zdarzenia, że zakupiony od pewnego kontrahenta podzespół spełnia podwyższone wymagania wynosi 0,2.

- Jakie jest prawdopodobieństwo, że kupując 50 takich podzespołów, będziemy mieli co najmniej 15 podzespołów spełniających podwyższone wymagania?
- Podać wartość przybliżoną tego prawdopodobieństwa korzystając z przybliżenia Poissona.
- Podać wartość przybliżoną tego prawdopodobieństwa korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego.

Rozw.

- $n = 50$ – liczba zakupionych podzespołów działających niezależnie
- $p = 0,2$ – prawdopodobieństwo, że podzespół spełnia podwyższone wymagania
- $S_{50} := X$ – liczba podzespołów spełniających podwyższone wymagania
- $X \sim \text{Bin}(50; 0,2)$, stąd $E(X) = np = 50 \cdot 0,2 = 10$,
 $Var(X) = npq = 50 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 8$

a)

$$P(X \geq 15) = \sum_{k=15}^{50} \binom{50}{k} 0,2^k 0,8^{50-k} = 1 - \sum_{k=0}^{14} \binom{50}{k} 0,2^k 0,8^{50-k}$$

Z Excela odczytujemy: $P(X \geq 15) = 1 - P(X < 15) = 1 - P(X \leq 14) = 1 - 0,939 = 0,061$

b) Przybliżenie Poissona:

Jeśli $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, $np \leq 10$, n – duże, p – małe, to rozkład prawdopodobieństwa X można przybliżyć rozkładem Poissona z parametrem $\lambda = np$, tzn. dla każdego $k = 1, 2, \dots, n$, $q = 1 - p$

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx e^{-np} \frac{(np)^k}{k!}.$$

W zadaniu $np = 10$.

$$P(X \geq 15) = 1 - P(X < 15) \approx 1 - \sum_{k=0}^{14} e^{-10} \frac{10^k}{k!} = 1 - e^{-10} \sum_{k=0}^{14} \frac{10^k}{k!}$$

Z Excela odczytujemy: $P(X \geq 15) \approx 1 - P(X \leq 14) = 1 - 0,9165 = 0,0835$.

c) Przybliżenie z CTG: Twierdzenie Moivre'a Laplace'a.

Jeśli $S \sim \text{Binomial}(n, p)$, n – duże oraz $np \geq 5$, $nq \geq 5$, to rozkład S można przybliżyć rozkładem normalnym o średniej $E(S) = np$ i wariancji $\text{Var}(npq)$, $q = 1 - p$. Zatem, dla $0 \leq k \leq n$ mamy:

$$P(S \leq k) = P\left(\frac{S - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \Phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Dla $n \leq 100$ stosujemy poprawkę ciągłości:

$$P(S \leq k) = P\left(\frac{S - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k + 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \Phi\left(\frac{k + 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

W zadaniu $n = 50$, $np = 10$, $npq = 8$. Wykorzystamy też poprawkę ciągłości:

$$P(X \geq 15) = 1 - P(X < 15) = 1 - P(X \leq 14) = 1 - 0,9442 = 0,0558$$

$$P(X \leq 14) = P(X \leq 14,5) = P\left(\frac{X - 10}{\sqrt{8}} \leq \frac{14,5 - 10}{\sqrt{8}}\right) \approx \Phi\left(\frac{-4,5}{\sqrt{8}}\right) = \Phi(1,5909) = 0,9442$$

Zad. 4 W centrali telefonicznej jest n linii działających niezależnie od siebie.

Prawdopodobieństwo, że dowolna linia jest zajęta wynosi 0,5. Jakie powinno być n , aby prawdopodobieństwo tego, że co najmniej 20 linii jest zajętych wynosiło co najmniej 0,95?

Rozw. Niech

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ – liczba zajętych linii, gdzie

- n – liczba linii, $X_j = 1$ (0) jeśli j -ta linia jest zajęta (wolna)
- $X_j \sim \text{Binomial}(1; 0,5)$
- $S_n \sim \text{Binomial}(n; 0,5)$

$$P(S_n \geq 20) = 1 - P(S_n < 20) \geq 0,95 \quad \equiv \quad P(S_n < 20) \leq 0,05.$$

$$\begin{aligned} 0,05 \geq P(S_n < 20) &= P(S_n \leq 19) = P(S_n \leq 19,5) = P\left(\frac{S_n - n \cdot 0,5}{\sqrt{n \cdot 0,5 \cdot 0,5}} \leq \frac{19,5 - n \cdot 0,5}{\sqrt{n \cdot 0,5 \cdot 0,5}}\right) \approx \\ &\approx \Phi\left(\frac{19,5 - 0,5n}{0,5\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Stąd n powinno spełniać nierówność

$$\Phi\left(\frac{19,5 - 0,5n}{0,5\sqrt{n}}\right) \leq 0,05 = \Phi(z_{0,05}) \quad (*)$$

Dystrybuanta Φ zmiennej losowej o rozkładzie standardowym normalnym jest funkcją ściśle rosnącą, więc z nierówności (*) otrzymujemy:

$$\frac{19,5 - 0,5n}{0,5\sqrt{n}} \leq -1,64$$

gdzie wykorzystaliśmy: $z_{0,05} = -z_{0,95} = -1,64$.

Niech $x := \sqrt{n} \geq \sqrt{20}$ i x^2 – naturalna liczba. Należy rozwiązać nierówność:

$$\frac{19,5 - 0,5x^2}{0,5x} \leq -1,64 \quad \equiv \quad 0,5x^2 - 0,82x - 19,5 \geq 0 \quad (**)$$

Znajdziemy rozwiązania równania kwadratowego:

$$\begin{aligned} 0,5x^2 - 0,82x - 19,5 &= 0 \\ \Delta &= 0,82^2 + 4 \cdot 0,5 \cdot 19,5 = 39,6724 \end{aligned}$$

Pierwiastki równania:

$$x_1 = \frac{0,82 - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 0,5} < 0, \quad x_2 = \frac{0,82 + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 0,5} = 7,118603$$

Stąd dla $x \geq \sqrt{20}$, (**) zachodzi dla $x \geq 7,118603 \Rightarrow x^2 \geq 7,118603^2 \approx 50,67$.

Odp. $n \geq 51$.

Zad. 5 Przy produkcji elementów otrzymuje się 3% braków. Produkcję ilu elementów trzeba zaplanować, aby z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż 0,99 był zabezpieczony program wysyłki elementów, dla którego potrzeba 400 niewadliwych elementów.

Rozw.

- n – liczba elementów, które należy wyprodukować,
- $X_j = 1$ (0) jeśli j -ty element jest dobry (brakiem)
- $p = 0,97$ – prawdopodobieństwo, że element jest dobry
- $X_j \sim \text{Binomial}(1; 0,97)$
- $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ – liczba dobrych elementów spośród n
- $S_n \sim \text{Binomial}(n; 0,97)$

🚦 Dla jakiego n spełniona jest nierówność: $P(S_n \geq 400) \geq 0,99$?

$$P(S_n \geq 400) = 1 - P(S_n < 400) \geq 0,99 \quad \equiv \quad P(S_n < 400) \leq 0,01.$$

W zadaniu $n \geq 400$, więc nie trzeba stosować poprawki ciągłości.

$$\begin{aligned} 0,01 \geq P(S_n \leq 399) &= P\left(\frac{S_n - n \cdot 0,97}{\sqrt{n \cdot 0,97 \cdot 0,03}} \leq \frac{399 - n \cdot 0,97}{\sqrt{n \cdot 0,97 \cdot 0,03}}\right) \approx \\ &\approx \Phi\left(\frac{399 - 0,97n}{0,01\sqrt{97 \cdot 3}\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Stąd n powinno spełniać nierówność

$$\Phi\left(\frac{399 - 0,97n}{0,01\sqrt{97 \cdot 3}\sqrt{n}}\right) \leq 0,01 = \Phi(z_{0,01}) \quad (*)$$

Dystrybuanta Φ zmiennej losowej o rozkładzie standardowym normalnym jest funkcją ściśle rosnącą, więc z nierówności (*) otrzymujemy:

$$\frac{399 - 0,97n}{0,01 \cdot \sqrt{97 \cdot 3} \cdot \sqrt{n}} \leq -2,32634$$

gdzie wykorzystaliśmy: $z_{0,01} = -z_{0,99} = -2,32634$.

Niech $x := \sqrt{n} \geq \sqrt{400} = 20$. Należy rozwiązać nierówność:

$$\begin{aligned} \frac{399 - 0,97x^2}{0,01\sqrt{97 \cdot 3} \cdot x} \leq -2,32634 &\quad \equiv \quad 0,97x^2 - 0,01 \cdot 2,32634 \cdot \sqrt{291} \cdot x - 399 \geq 0 \quad (**) \\ 97x^2 - 2,32634\sqrt{291} \cdot x - 39900 &\geq 0 \quad (**) \end{aligned}$$

Znajdziemy rozwiązania równania kwadratowego:

$$97x^2 - 2,32634\sqrt{291}x - 39900 = 0$$

$$\Delta = 2,32634^2 \cdot 291 + 4 \cdot 97 \cdot 39900 =$$

Pierwiastki równania:

$$x_1 = \frac{2,32634\sqrt{291} - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 97} < 0, \quad x_2 = \frac{2,32634\sqrt{291} + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 97} = \frac{3974,5001}{2 \cdot 97} = 20,4871$$

$$n \geq 419,72$$

Stąd dla $x \geq 20$, (**) zachodzi dla $x \geq 20,4871 \Rightarrow x^2 \geq 419,72$.

Odp. $n \geq 420$.

Zad. 6 W hotelu jest 100 pokoi. Ponieważ z doświadczenia wynika, że jedynie 90% dokonanych wcześniej rezerwacji jest później wykorzystywanych, właściciel hotelu polecił przyjmować rezerwacje na więcej niż 100 pokoi.

(a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy przyjęciu 104 rezerwacji w hotelu zabraknie wolnych pokoi?

(b) Ile dodatkowych rezerwacji można dokonać by mieć 90% pewności, że dla nikogo nie zabraknie miejsc?

Rozw.

(a)

- $n = 104$ – liczba przyjętych rezerwacji
- $p = 0,9$ – prawdopodobieństwo, że losowa rezerwacja będzie wykorzystana
- $X_j = 1$, jeśli j-ta rezerwacja będzie wykorzystana, 0 jeśli nie
- $X_j \sim \text{Binomial}(1; 0,9)$
- $S_{104} = X_1 + X_2 + \dots + X_{104} \sim \text{Binomial}(104; 0,9)$

$$\text{🚦 } P(S_{104} > 100) = ?$$

Sprawdźmy, czy można stosować CTG:

$$np = 104 \cdot 0,9 = 93,6 \geq 5, \quad nq = 104 \cdot 0,1 = 10,4 \geq 5 \quad (*)$$

Nierówności (*) \Rightarrow można stosować CTG.

$$E(S_{104}) = 93,6, \quad \text{Var}(S_{104}) = 104 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 9,36$$

$$P(S_{104} > 100) = 1 - P(S_{104} \leq 100) = 1 - P\left(\frac{S_{104} - 93,6}{\sqrt{9,36}} \leq \frac{100 - 93,6}{\sqrt{9,36}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{6,4}{\sqrt{9,36}}\right) = 1 - \Phi(2,0919) = 1 - 0,982 = 0,018.$$

(b) Dla jakiego $n = ?$

$$\text{🚦 } P(S_n \leq 100) = 0,9$$

$$P(S_n \leq 100) = P\left(\frac{S_n - n \cdot 0,9}{\sqrt{n \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \leq \frac{100 - n \cdot 0,9}{\sqrt{n \cdot 0,9 \cdot 0,1}}\right) \approx \Phi\left(\frac{100 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right) = 0,9 \quad (1)$$

$$\Phi(z_{0,9}) = 0,9 = \Phi(1,28155) \approx \Phi(1,28) \quad (2)$$

Z (1) i (2) mamy:

$$\Phi\left(\frac{100 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right) = \Phi(1,28155) \Rightarrow \frac{100 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}} = 1,28155$$

Niech $x := \sqrt{n} \geq \sqrt{100} = 10, x^2$ – całkowite. Należy rozwiązać równanie

$$\frac{100 - 0,9x^2}{0,3 \cdot x} = 1,28155 \quad \Leftrightarrow \quad 0,9x^2 + 0,3 \cdot 1,28155 \cdot x - 100 = 0 \quad (*)$$

Znajdziemy rozwiązania równania kwadratowego (*).

$$\Delta = 1,28155^2 \cdot 0,09 + 4 \cdot 0,9 \cdot 100 = 360,1478$$

Pierwiastki równania:

$$x_1 = \frac{-0,3 \cdot 1,28155 - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 0,9} < 0, \quad x_2 = \frac{-0,3 \cdot 1,28155 + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 0,9} = \frac{18,5931}{1,8} = 10,329$$

$$n \geq 10,329^2 = 106,69.$$

Odp. Należy przyjmować 107 rezerwacji aby mieć 90% pewności, że nie zabraknie miejsc.

Sprawdzamy w Excelu: $S_{107} \sim \text{Binomial}(107; 0,9)$

$$P(S_{107} \leq 100) \approx 0,91$$

Zad. 7 - rozwiązane na wykładzie SADW07

- Niech X_1, X_2, \dots, X_{144} będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa z gęstością

$$f(x) = \begin{cases} x + 0,5 & \text{dla } x \in [0,1] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0,1] \end{cases}$$

- Korzystając z CTG oszacować prawdopodobieństwo

$$P\left(78 \leq \sum_{n=1}^{144} X_n \leq 90\right) \approx ?$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x(x + 0,5) dx =$$

$$\int_0^1 x \cdot x dx + \int_0^1 0,5 x dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + 0,5 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 (x + 0,5) dx = \\
 &= \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 0,5 x^2 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 + 0,5 \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

$$Var(X) = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$$

$$S_{144} := X_1 + X_2 + \dots + X_{144}, \quad E(X) := \mu = \frac{7}{12}$$

$$\sigma := \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{11}{144}}, \quad \text{Niech } Z \sim N(0,1)$$

$$P\left(78 \leq \sum_{n=1}^{144} X_n \leq 90\right) = P\left(\frac{78 - 144 \cdot \mu}{\sqrt{144} \cdot \sigma} \leq \frac{S_{144} - 144 \cdot \mu}{\sqrt{144} \cdot \sigma} \leq \frac{90 - 144 \cdot \mu}{\sqrt{144} \cdot \sigma}\right) \approx$$

$$= P\left(\frac{78 - 144 \cdot \frac{7}{12}}{\sqrt{144} \cdot \sqrt{11/144}} \leq Z \leq \frac{90 - 144 \cdot \frac{7}{12}}{\sqrt{144} \cdot \sqrt{11/144}}\right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{11}}\right) - \Phi\left(-\frac{6}{\sqrt{11}}\right) = \Phi(1,8091) - (1 - \Phi(1,8091)) = 2 \cdot 0,970621 - 1 \\
 &= 0,941242.
 \end{aligned}$$