Zadania pomocne do kolokwium 1/egzaminu
(rozwiązania niektórych zadań będą sukcesywnie uzupełniane)

Zad. 1 Zanotowano liczby reklamacji w kolejnych 8 miesiącach w wybranym oddziale pewnego banku:

15, 23, 10, 18, 19, 15, 9, 20.

a) Obliczyć średnią i wariancję, medianę, dolny i górny kwartyl dla zaobserwowanych liczby reklamacji.
b) Naszkicować wykres ramkowy. Znaleźć obserwacje odstające.
c) Zinterpretuj otrzymane wyniki.
Rozw.

a) n=8

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 129, \;\; \bar{x} = \frac{129}{8} = 16{,}125, \quad \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 2245$$

$$s^2 = \frac{1}{8-1}\sum_{i=1}^{8}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{7}\left(\sum_{i=1}^{8} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{8} x_i)^2}{8}\right) = \frac{1}{7}\left(2245 - \frac{129^2}{8}\right) = 23{,}554$$

Uporządkowane rosnąco dane: 9 10 15 15 18 19 20 23 , stąd

Mediana = $Q_2 = \frac{15+18}{2} = 16{,}5$, $Q_1 = \frac{10+15}{2} = 12{,}5$ $Q_3 = \frac{19+20}{2} = 19{,}5$ $\frac{3}{2}\, IQR = \frac{3}{2} 7 = 10{,}5$

Brak obserwacji w przedziałach $\left(-\infty, Q_1 - \frac{3}{2}\, IQR\right] = (-\infty, 2]$ oraz $\left[Q_3 + \frac{3}{2}\, IQR, \infty\right) = [30, \infty)$, zatem brak odstających.

Wykres ramkowy ma wykres, który ma rzuty na oś poziomą (ew. pionową) :

Lewy koniec lewego wąsa = 9
$Q_1 = 12{,}5$
Mediana = 16,5, $\bar{x} = 16{,}125$
$Q_3 = 19{,}5$
Prawy koniec prawego wąsa = 23
Brak odstających, wąsy tej samej długości, minimalna lewostronna skośność

Zad. 2. W grupie 10-ciu studentów 5-ciu nie zaliczyło 2 kolokwiów w ciągu roku, trzech nie zaliczyło 4, a dwóch nie zaliczyło 5 kolokwiów.
a) Oblicz średnią, medianę, dolny i górny kwartyl liczby niezaliczonych kolokwiów.
b) Narysuj wykres ramkowy. Znajdź obserwacje odstające.
c) Zinterpretuj otrzymane wyniki.
Rozw.
a)

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{10} = 3{,}2$$

2 2 2 2 2   4 4 4 5 5 , stąd $Q_2 = \frac{2+4}{2} = 3$, $Q_1 = 2, Q_3 = 4$, $\frac{3}{2} IQR = \frac{3}{2}(4-2) = 3$

Odstające są? w $\left(-\infty, Q_1 - \frac{3}{2}\, IQR\right] \cup \left[Q_3 + \frac{3}{2}\, IQR, \infty\right) = (-\infty, -1] \cup [7, \infty)$, stąd brak jest obserwacji odstających.

$x_{min} = 2 = Q_1,\ stąd\ brak\ lewego\ wąsa$, rzut końca prawego = 5= x_{max}

Zad. 3. Ceny jednego m^2 (w tys. zł.) stu nowych mieszkań w dzielnicy X zanotowano w tabeli:

cena 1 m^2	[4,5; 5,5)	[5,5; 6,5)	[6,5; 7;5)	[7,5;8,5)	[8,5; 9,5)
liczba mieszkań	20	30	20	25	5

(a) Narysuj histogram częstości cen jednego m^2 zbadanych mieszkań.
(b) Oblicz średnią cenę jednego m^2 zbadanych mieszkań (w zł.)
(c) Podaj przedziały, w którym znajdują się dolny i górny kwartyl cen jednego m^2 nowych mieszkań.
Rozw.

b)

$$\bar{x} = \frac{20 \cdot 5 + 30 \cdot 6 + 20 \cdot 7 + 25 \cdot 8 + 5 \cdot 9}{100} = 6{,}65$$

$$s^2 = \frac{1}{99}\left[\sum_{i=1}^{5} n_i \bar{x}_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{5} n_i \bar{x}_i\right)^2}{100}\right] = \frac{1}{99}[20 \cdot 25 + 30 \cdot 36 + 20 \cdot 49 + 25 \cdot 64 + 5 \cdot 81]$$

$$= \frac{1}{99}\left[20 \cdot 25 + 30 \cdot 36 + 20 \cdot 49 + 25 \cdot 64 + 5 \cdot 81 - \frac{665^2}{2}\right] =?$$

c)

$$\boldsymbol{Q_1} \in [5{,}5; 6{,}5), \quad Q_3 \in [7{,}5; 8{,}5)$$

cena 1 m^2	[4,5; 5,5)	[5,5; 6,5)	[6,5; 7;5)	[7,5;8,5)	[8,5; 9,5)
liczba mieszkań	20	30	20	25	5
Częstość	0,2	0,3	0,2	0,25	0,05
procent	20%	30%	20%	25%	5%
Procent skumulowany	20%	50%	70%	95%	100%

Zad. 4. Zanotowano ceny pewnego produktu w dużej sieci sklepów (w zł.):

10, 15, 13, 22, 12, 10, 12, 10, 13, 13, 31

a) Oblicz średnią, medianę, dolny i górny kwartyl dla zaobserwowanych cen.
b) Narysuj wykres ramkowy. Znajdź obserwacje odstające.
c) Zinterpretuj otrzymane wyniki.
Rozw.
(a) Obliczymy dolny kwartyl metodą z wyłączeniem mediany (z włączeniem mediany)
Z wyłączeniem mediany:

$$10 \quad 10 \quad 10 \quad 12 \quad 12 \quad \mathbf{13} \quad 13 \quad 13 \quad 15 \quad 22 \quad 31$$

$Q_2 = x_{(6)} = 13$ -- mediana

$Q_1 = x_{(3)} = 10$ = mediana z podpróbki $10 \quad 10 \quad 10 \quad 12 \quad 12$

Z włączeniem mediany:
$Q_1 = \frac{10+12}{2} = 11$ - mediana podpróbki $10 \quad 10 \quad 10 \quad 12 \quad 12 \quad \mathbf{13}$

Analogicznie wyznaczamy górny kwartyl

Zad. 5. Układ 6-ciu przekaźników połączono w następujący sposób: przekaźnik A szeregowo z (B i C połączonymi równolegle), szeregowo z (D, E, F połączonymi równolegle). Przekaźniki działają niezależnie. Prawdopodobieństwo poprawnej pracy każdego z nich wynosi p = 0,9. Oblicz prawdopodobieństwo poprawnej pracy układu. Narysuj schemat układu.
Rozw. Niech $A, B, C, \ldots., E, F$ zdarzenia niezależne oznaczające poprawną pracę kolejnych przekaźników, są zdarzeniami niezależnymi, stąd zdarzenia $A, B \cup C, D \cup E \cup F$ są też niezależne. Zatem

$$P(N) = P[A \cap (B \cup C) \cap (D \cup E \cup F)] = P(A)P(B \cup C)P(D \cup E \cup F) =$$

$$= p(p + p - p^2)(p + p + p - p^2 - p^2 - p^2 + p^3) = p(2p - p^2)(3p - 3p^2 + p^3)$$

Odp. 0,8901.

Zad. 6. Niech ***A,B,C*** będą zdarzeniami**.** Wykazać prawdziwość wzoru:

$$P(A \cup B \cup C)$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Wsk. Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy dwu zdarzeń, np. najpierw dla zdarzeń $(A \cup B)$ i C.

Zad. 6b) Zdarzenia A, B są niezależne. Pokazać, ze zdarzenia A, B' są niezależne.

Rozw.

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B') - P(A \cap B \cap A \cap B')$$

$$P(A) = P(A)P(B) + P(A \cap B')$$

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A)P(B) = P(A) \cdot [1 - P(B)] = P(A)P(B')$$

Zad. 6c) Zbiorem zdarzeń elementarnych jest $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, Zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Niech $A = \{1,3\}$, $B = \{3,4,5\}$, $C = \{1,2,3\}$. Czy zdarzenia

(a) A, B są niezależne (b) A, C są niezależne?

Rozw. (a) $P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = P(A)P(B)$, stąd A, B są niezależne

(b) $P(A \cap C) = \frac{2}{6} \neq \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = P(A)P(C)$, stąd A, C są zależne

Zad. 6d) Zbiorem zdarzeń elementarnych jest $S = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. P(A) = pole (A), $A \subset S$. Niech $A = \left\{(x, y):\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\right\}$,

$B = \left\{(x, y):\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\ 0 \leq y \leq 1\right\}$, Wyznaczyć: $P(B - A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B') = \frac{3}{4}$

Zad. 7. Pewien test laboratoryjny ma 90% efektywność wykrycia choroby, jeżeli pacjent jest w istocie chory. Jednocześnie wśród zdrowych osób test ten daje 5% fałszywych pozytywnych wyników. Załóżmy, że 10% wszystkich ludzi jest chorych na tę chorobę.

(a) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że pacjent jest zdrowy, jeżeli test dał wynik negatywny.
(b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że test ten dał wynik negatywny?

Wsk. Niech $B_1 = \{$losowo wybrana osoba jest zdrowa$\}$, $P(B_1) = 0{,}9$

$B_2 = \{$losowo wybrana osoba jest chora$\}$, $P(B_2) = 0{,}1$,

$A = \{$test stwierdza chorobę u losowo zbadanej osoby, tzn. daje wynik pozytywny$\}$,

$P(A|B_2) = 0{,}9$, $P(A|B_1) = 0{,}05$, $P(A'|B_1) = 1 - P(A|B_1) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.
$P(A'|B_2) = 0{,}1$

$$P(B_1|A') = \frac{P(A'|B_1)P(B_1)}{P(A')} = \frac{0{,}95 \cdot 0.9}{0{,}865} =?$$

$$P(A') = 0{,}95 \cdot 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}865.$$

Zad 8. Wiadomo, że co szósty maturzysta zamierza studiować na politechnice, co czwarty ma inne plany. Wśród maturzystów, którzy zamierzają studiować na politechnice jest 30% kobiet, a wśród tych co mają inne plany jest 50% kobiet. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybrany losowo maturzysta zamierza studiować na politechnice, jeśli jest on mężczyzną.

Zad.9. 80 % uczestników konferencji zna język angielski, a pozostali znają inny język obcy. Wśród osób znających język angielski jest 60% kobiet, natomiast wśród osób znających inny język obcy jest 50% kobiet. Wybrana losowo osoba jest mężczyzną. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że zna on język angielski.

Zad 10. Liczba przedmiotów zaliczonych po I roku studiów, przez losowo wybranego studenta jest zmienną losową X mającą funkcję prawdopodobieństwa określoną tabelą:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0,1+c	0,2	0,3	0,4-c

Wiadomo, że wartość oczekiwana liczby przedmiotów zaliczonych wynosi 1,7. (a) Wyznacz stałą c oraz wariancję liczby przedmiotów zaliczonych po I roku przez losowo wybranego studenta . (b) Podaj określenie dystrybuanty $F(x)$ zmiennej losowej X słownie oraz wzorem. (c) Oblicz wartości dystrybuanty $F(1{,}5)$, $F(2)$. (d) Oblicz prawdopodobieństwo, że student o którym wiadomo, że zaliczył co najmniej 1 przedmiot zaliczył 3 przedmioty.
(e) Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej X i naszkicuj jej wykres.

Rozw. (a) $EX = 0 + 0{,}2 + 0{,}6 + 3(0{,}4 - c) = 1{,}7$, stąd $2 - 3c = 1{,}7$, czyli $c = 0{,}1$.

$E(X^2) = 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}3 = 4{,}1$, $Var(X) = 4{,}1 - 1{,}7^2 = 4{,}1 - 2{,}89 = 1{,}21$.

(b) $F(x) = P(X \le x) = P(\{s \in S: X(s) \le x\})$, $x \in (-\infty, \infty)$, prawdopodobieństwo zdarzenia zawierającego te zdarzenia elementarne dla których wartości zmiennej losowe X są $\le x$.

(c) $F(1{,}5) = f(0) + f(1) = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$, $F(2) = 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}7$.

$$(d)\ \ P(X = 3|X \ge 1) = \frac{P(X = 3,\ X \ge 1)}{P(X \ge 1)} = \frac{P(X = 3)}{P(X \ge 1)} = \frac{f(3)}{f(1) + f(2) + f(3)} = \frac{0{,}3}{0{,}8} = 3/8.$$

(d)

x	0	1	2	3
$p(x)$	0,2	0,2	0,3	0,3

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0{,}2, & 0 \le x < 1 \\ 0{,}4, & 1 \le x < 2 \\ 0{,}7, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

…..wykres powyższej funkcji przedziałami stałej (schodkowej)

Zad. 11. Prawdopodobieństwo wygrania w grze losowej wynosi 0,2. Jaś zagrał 3 razy.

(a) Oblicz prawdopodobieństwo, że wygra cokolwiek.
(b) Oblicz prawdopodobieństwo, że wygra 2 razy.
(c) Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję liczby wygranych Jasia.
(d) Wyznacz dystrybuantę liczby wygranych gier Jasia?

Rozw. Niech X = liczba wygranych w 3 niezależnych grach z prawdopodobieństwem wygrania w pojedynczej grze p=0,2.

$X\sim$rozkład dwumianowy z parametrami n =3, p = 0,2 (ozn. $Bin(3; 0,2)$

$(c)\ E(X) = np = 3 \cdot 0,2$=0,6, $Var(X) = npq = 3 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,48$

(a) $P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - q^3 = 1 - 0,8^3 = 0,488$

(b)) $P(X = 2) = \binom{3}{2} 0,2^2 0,8^{3-2} = 3 \cdot 0,04 \cdot 0,8 = 0,096$

x	0	1	2	3
$f(x)$	0,512	$\binom{3}{1} 0,2 \cdot 0,8^2 = 0,384$	0,096	$0,2^3 = 0,008$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0,512, & 0 \le x < 1 \\ 0,896, & 1 \le x < 2 \\ 0,992, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

Zad 12. Liczba zdanych egzaminów przez losowo wybranego studenta Akademii SUKCES jest zmienną losową X o rozkładzie dwumianowym z parametrami n = 3 oraz p = 0,6. Wyznacz: (a) prawdopodobieństwo, że student zda mniej niż 3 egzaminy: P(X < 3);
(b) prawdopodobieństwo warunkowe, że student zda co najmniej 2 egzaminy, jeśli wiadomo, że już zdał 1 egzamin: P(X > 1 | X > 0);
(c) Jaka jest wartość oczekiwana EX i wariancja Var(X) liczby zdanych egzaminów przez losowo wybranego studenta.
Rozw.
(b)

$$X \sim Bin(3; 0,6)$$

$$P(X > 1|X > 0) = \frac{P(X>1, X>0)}{P(X>0)} = \frac{P(X>1)}{1-P(X=0)} = \frac{1-P(X=0)-P(X=1)}{1-P(X=0)}$$

$$P(X = 0) = 0,4^3 = 0,064$$
$$P(X = 1) = 3 \cdot 0,6 \cdot 0,4^2 = 0,288$$

Zad. 13. Można założyć, że dochód miesięczny losowo wybranego absolwenta uczelni technicznej jest zmienną losową X mającą rozkład normalny o wartości średniej 4500 (zł) i standardowym odchyleniu 300 (zł.). (a) Jaki procent absolwentów uczelni technicznej ma dochód miesięczny nie przekraczający 4000 zł. ? (b) Jaki procent absolwentów ma dochód większy niż 4500 zł i nie większy niż 6000 zł? (c) Jaki dochód przekracza 5% najlepiej zarabiających absolwentów?
Rozw.

(c) C = ? $P(X > c) = 0{,}05$ $P(X \leq c) = 0{,}95$ $c = z_{0,95} = 1{,}645$

Zad. 14. Można założyć, że miesięczny czynsz losowo wybranej rodziny jest zmienną losową X mającą rozkład normalny o wartości średniej 450 (zł) i odchyleniu standardowym 40(zł.).

(a) Jaki procent rodzin płaci czynsz nie przekraczający 400 zł. ?
(b) Jaka jest najmniejsza wartość czynszu płaconego przez 20% rodzin płacących największe czynsze?
(c) Oblicz prawdopodobieństwo, że rodzina płaci czynsz większy niż 500 zł, jeśli wiadomo, że przekracza on 450 zł.

Zad. 15. Dzienny dochód brutto sklepu internetowego jest zmienną losową Y mającą rozkład normalny o wartości oczekiwanej $\mu = 1500$ zł. oraz odchyleniu standardowym $\sigma = 100$ zł. Dzienny dochód netto X kształtuje się zgodnie ze wzorem $X = 0{,}8\ Y - 200$.

(a) Znajdź rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.
X ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej $0{,}8 \cdot 1500 - 200 = \ldots$ oraz odchyleniu standardowym 80.

$$E(X) = E(0{,}8Y - 200) = 0{,}8E(Y) - 200 = 0{,}8 \cdot 1500 - 200 = 1000$$

$$Var(X) = Var(0{,}8Y - 200) = 0{,}8^2 Var(Y) = 0{,}8^2 \cdot 100^2$$

$$\sigma_X = 0{,}8 \cdot 100 = 80$$

$$X \sim N(1000{,}80)$$

(b) Znajdź prawdopodobieństwo zdarzenia, że dochód netto nie przekroczy 1000 zł., czyli $P(X \leq 1000) =$

$$= P\left(Z \leq \frac{1000-1000}{80}\right) = \Phi(0) = 0{,}5$$

(b) Jakiej kwoty nie przekracza 25% dziennych dochodów netto tego sklepu internetowego?

Dzienny dochód netto nie przekracza wartości kwantyla rozkładu X rzędu 0,25, tzn. $P(X \leq q_{0,25}) = 0{,}25$ lub równoważnie

$P\left(Z \leq \frac{q_{0,25}-1000}{80}\right) = 0{,}25$, tzn. $\Phi\left(\frac{q_{0,25}-1000}{80}\right) = 0{,}25$.

Stąd $\frac{q_{0,25}-1000}{80} = z_{0,25} = -z_{0,75} = kwantyl\ rzędu\ 0{,}25\ rozkładu\ N(0{,}1) = \cdots$.

$$q_{0,25} = 1000 + 80z_{0,25} = 1000 - 80 \cdot 0{,}67449 = ?$$

Zad. 16. Czas opóźnienia (w minutach) pociągu na pewnej trasie jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale [0,20]. (a) Wyznacz średni czas opóźnienia pociągu i wariancję tego czasu. (b) Oblicz prawdopodobieństwo, że pociąg będzie miał więcej niż 15 minut opóźnienia, jeśli już opóźnił się więcej niż 10 minut.

Rozw. (a) $E(X) = 10,\ Var(X) = E(X^2) - 10^2 = \int_0^{20} x^2 \frac{1}{20} dx - 100 = \frac{1}{20}\left(\frac{20^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) - 100 = \frac{100}{3}$, lub od razu ze wzoru dla rozkładu U(0,20) mamy $Var(X) = \frac{400}{12}$.

(c) $P(X > 15 | X > 10) = \frac{P(X>15, X>10)}{P(X>10)} = \frac{P(X>15)}{P(X>10)} = \frac{5}{10}$,

$(P(X > 15) = \int_{15}^{\infty} f_X(x) dx = \int_{15}^{20} \frac{1}{20} dx = \frac{5}{20},\ \ P(X > 10) = \frac{10}{20})$

Zad. 17. Urządzenie składa się z 2 podzespołów pracujących niezależnie. Czas poprawnej pracy każdego z nich jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym mającym wartość oczekiwaną 20 (godzin). Urządzenie ulegnie awarii, jeśli co najmniej 1 podzespół ulegnie awarii. Oblicz prawdopodobieństwo, że urządzenie będzie pracowało krócej niż 10 godzin.

Rozw. Niech X – czas poprawnej pracy pierwszego podzespołu, Y – czas poprawnej pracy drugiego podzespołu, A – zdarzenie oznaczające awarię urządzenia. Z treści zadania należy obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że czas poprawnej pracy będzie krótszy niż 10 godzin, tzn.

$$P(\{X < 10\} \cup \{Y < 10\}) = P(\{X < 10\}) + P(\{Y < 10\}) - P(\{X < 10\} \cap \{Y < 10\})$$

$$= 1 - e^{-\frac{10}{20}} + 1 - e^{-\frac{10}{20}} - (1 - e^{-\frac{10}{20}})(1 - e^{-\frac{10}{20}}).$$

Skorzystaliśmy z dystrybuanty rozkładu wykładniczego oraz z niezależności zdarzeń $\{X < 10\}, \{Y < 10\}$.

Zad. 18. Liczba błędów w aplikacji ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda = 5$. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie więcej błędów niż 4, jeśli już wykryto 2 błędy.

$$X \sim Poisson(5),\ \ to\ \ \ P(X = k) = e^{-5} \frac{5^k}{k!},$$

$$P(X > 4 | X \geq 2) = \frac{P(X > 4)}{P(X \geq 2)} = \frac{1 - e^{-5}\left(1 + 5 + \frac{25}{2} + \frac{125}{3!} + \frac{25 \cdot 25}{4!}\right)}{1 - e^{-5}(1 + 5)}$$

Zad. 19. Zmienna losowa X ma rozkład ciągły o gęstości danej wzorem:

$$f(x) = \begin{matrix} 0, gdy\ \ x < 0\ lub\ x > 10 \\ Cx, \qquad gdy\ \ x \in [0,10] \end{matrix}.$$

(a) Wyznacz stałą *C*. (b) Oblicz prawdopodobieństwo, że zmienna X przyjmie wartość mniejszą niż 5.

Zad. 20. Zmienna losowa X ma rozkład ciągły o gęstości danej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \; lub \;\; x > 2 \\ \dfrac{1}{4}, & 0 \le x \le 1 \\ A, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

(a) Wyznaczyć wartość stałej A, obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X.
(b) Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej X oraz narysować jej wykres.

Zad. 21. Czas przygotowania do egzaminu (w godz.) losowo wybranego studenta jest zmienną losową X mającą gęstość

$f(x) = \begin{cases} Cx, \; dla \; x \in [0,10] \\ 0, w \; przeciwnym \; przypadku \end{cases}$. Oblicz (a) stałą C, (b) $P(X \in [4,6])$ (c) E(X).

Zad. 22. Czas obsługi klienta (w min.) w pewnym systemie jest zmienną losową Y mającą gęstość

$f(y) = \begin{cases} Ay, \; dla \; y \in [5,10] \\ 0, w \; przeciwnym \; przypadku \end{cases}$. Oblicz (a) stałą A, (b) $P(Y \le 7)$ (c) E($2Y$).

Zad. 23. Czas rozwiązania zadania na kolokwium losowo wybranego studenta (w min.) jest zmienną losową X mającą gęstość

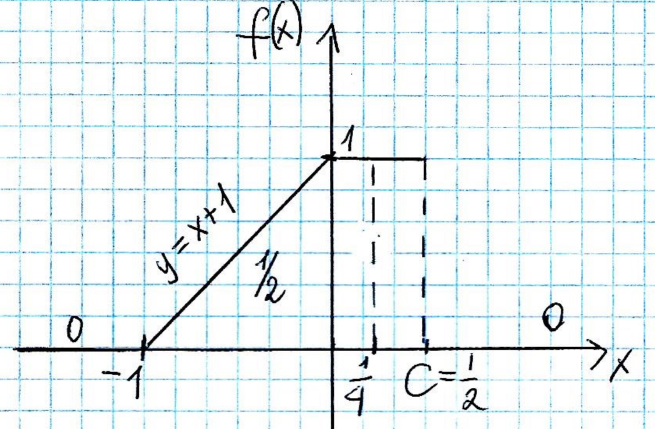
$f(x) = \begin{cases} C(1-x), \; dla \; x \in [5,15] \\ 0, w \; przeciwnym \; przypadku \end{cases}$. Oblicz (a) stałą C (b) $P(X \in [4,10])$ (c) E(X)
(d) wartość dystrybuanty zmiennej losowej X: $F(10)$.

Zad. 24. Zmienna losowa X ma gęstość postaci:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ x+1, & -1 < x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le C \\ 0, & x > C \end{cases}$$

(a) Wyznacz stałą C , b) Oblicz wartości dystrybuanty $F(1/2)$, $F(C/2)$. c) Oblicz EX.

(a) C = ½, (b) F(1/2) = 1, F(1/4) = 3/4, (c) $EX = \int_{-1}^{0} x(x+1)dx + \int_{0}^{1/2} xdx = -1/24$.



$$\frac{1}{2}+C=1 \Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

$$F\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{3}{4}=\int_{-\infty}^{1/4} f(x)dx$$

Dodatkowo wyznaczymy dystrybuantę zmiennej losowej *X*.

(i) Niech $x \leq -1$. Wówczas $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_{-\infty}^{x} 0dy = 0.$

(ii) Niech $-1 < x \leq 0$. Wówczas

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_{-\infty}^{-1} 0dy + \int_{-1}^{x} (y+1)dy = 0 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + x - (-1) =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$$

(iii) Niech $0 < x \leq \frac{1}{2}$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_{-\infty}^{0} f(x)dy + \int_{0}^{x} 1dy = F(0) + x = \frac{1}{2} + x$$

(iv) Jeśli $x > \frac{1}{2}$, to $F(x) = 1$.

Zad. 25. Wygrana na loterii losowo wybranego uczestnika jest zmienną losową X o dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 0, & dla\; x < 0 \\ 0{,}5, & dla\; 0 \leq x < 100 \\ 0{,}8, & dla\; 100 \leq x < 200 \\ C, & dla\; x \geq 200 \end{cases}$$

Znajdź: (a) stałą C, (b) rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X, (c) wartość oczekiwaną wygranej $E(X)$

Rozw.

$$P(X = 0) = 0{,}5, \quad P(X = 100) = 0{,}3, \quad P(X = 200) = 0{,}2$$

Zad. 26. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) charakteryzuje losowo wybranego absolwenta informatyki. Zmienna losowa X oznacza ocenę na dyplomie, a Y określa zaliczenie ostatniej sesji w terminie, tak że wartość $y = 1$ oznacza zaliczenie sesji w terminie, a $y = 0$ niezaliczenie sesji w terminie. . Funkcję prawdopodobieństwa łącznego zmiennej (X,Y) określa tabela:

x / y	3	4	5
0	0,2	C	0,1
1	0,1	0,2	0,3

a) Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że losowo wybrany absolwent ma ocenę mniejszą niż 5, jeśli wiadomo, że nie zaliczył sesji w terminie.
b) Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej X.
c) Oblicz wartość oczekiwaną oceny na dyplomie losowo wybranego absolwenta.
d) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 27. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) charakteryzuje losowo wybranego kierowcę amatora. Zmienna losowa X oznacza liczbę szkód zgłoszonych w ciągu 1-go roku po zdaniu egzaminu na prawo jazdy, a zmienna losowa Y przyjmuje wartość 1, gdy kierowca zdał egzamin na prawo jazdy w pierwszym terminie, oraz 0 w przypadku gdy musiał powtarzać egzamin. Funkcję prawdopodobieństwa łącznego zmiennej (X,Y) określa tabela:

x / y	0	1	2
0	0,4	C	0,05
1	0,3	0,1	0,05

(a) Wyznacz stałą C oraz oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że losowo wybrany kierowca zgłosił co najmniej 1 szkodę w czasie pierwszego roku jazdy, jeśli wiadomo, że nie zdał egzamin na prawo jazdy za pierwszym razem.
(b) Oblicz wartości oczekiwane EX oraz EXY.
(c) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 28. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) charakteryzuje losowo wybranego absolwenta uczelni technicznej. Zmienna losowa X oznacza ocenę z pracy dyplomowej, a Y oznacza ocenę z egzaminu dyplomowego. Funkcję prawdopodobieństwa łącznego zmiennej (X,Y) określa tabela:

x y	3	4	5
3	0,2	C	0,1
4	0,1	0,1	0,05
5	0,05	0,1	0,2

a) Wyznacz stałą C oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że losowo wybrany absolwent ma ocenę z egzaminu Y mniejszą niż 5, jeśli wiadomo, że ocena z pracy dyplomowej X była większa niż 3: $P(Y < 5|X > 3)$.
b) Oblicz wartość oczekiwaną EY oceny z pracy dyplomowej losowo wybranego absolwenta.
c) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnij.