Rozwiązania zadań C12

Zad. 1. Czas rozwiązywania pewnego testu jest zmienną losową o rozkładzie normalnym z odchyleniem standardowym 5 minut. Wykładowca uważa, że rozwiązanie zadania zajmuje 10 minut. Wśród studentów panuje jednak przekonanie, że taki czas jest zbyt krótki. Zmierzono czas rozwiązywania testu przez wybranych losowo 6 studentów i otrzymano następujące wyniki (w minutach):

17, 0 8, 5 20, 0 10, 5 11, 0 15, 5.

Czy na tej podstawie można twierdzić, że przekonanie studentów jest słuszne? Zweryfikować odpowiednią hipotezę przyjmując poziom istotności α = 0, 05.

UWAGA: wszystkie zadania rozwiązujemy wg schematu podanego poniżej:

Wybór modelu z uzasadnieniem.

1. Hipotezy:
2. Statystyka testowa: … = ………………… ma rozkład …………
3. Wartość statystyki testowej: …………
4. Zbiór krytyczny: ………….
5. Decyzja i jej uzasadnienie: ………….

Rozw. Niech zmienna losowa X oznacza czas rozwiązania testu. $X \sim N(\mu, \sigma)$, przy czym $\sigma = 5$ (minut). Zatem do weryfikacji hipotez o wartości oczekiwanej μ wykorzystujemy Model 1.

Dane zadania: $n = 6$, próbka: 17,0; 8,5; 20,0; 10,5; 11,0, 15,5, $\sigma = 5$, poziom istotności $\alpha = 0{,}05$. Stąd średnia próbkowa: $\bar{x} = \frac{82{,}5}{6} = 13{,}75$.

1. Hipotezy: H_0: $\mu = 10$, H_1: $\mu > 10$
2. Statystyka testowa: $Z = \frac{\bar{X} - 10}{5}\sqrt{6}$ ma rozkład standardowy normalny o ile H_0 prawdziwa
3. Wartość statystyki testowej: $z = \frac{13{,}75 - 10}{5}\sqrt{6} = 1{,}8371$
4. Zbiór krytyczny $C = \left[z_{0,95}, \infty\right) = [1{,}645, \infty)$
5. **Decyzja i jej uzasadnienie**: $z \in C$, więc odrzucamy hipotezę zerową i przyjmujemy hipotezę alternatywną na poziomie istotności 0,05: na poziomie istotności 0,05 można twierdzić, że studenci mają rację.

Zad.2 Dział kontroli jakości w zakładach chemicznych chce oszacować średnią wagę proszku do prania sprzedawanego w pudełkach o nominalnej wadze 3 kg. Pobrano w tym celu próbkę losową 7 pudełek proszku do prania. Każde pudełko zważono i otrzymano następujące wyniki (w kg):

$$2,93 \quad 2,97 \quad 3,05 \quad 2,91 \quad 3,02 \quad 2,87 \quad 2{,}92.$$

Wiadomo, że rozkład wagi pudełka proszku do prania jest normalny. Na poziomie istotności 0,05 zweryfikować przypuszczenie, że średnia waga pudełka proszku do prania jest mniejsza niż 3 kg.

Rozw. Niech zmienna losowa X oznacza wagę proszku do prania w pudełku o nominalnej wadze 3 kg. $X \sim N(\mu, \sigma)$, przy czym parametry rozkładu nie są znane. Zatem do weryfikacji hipotez o wartości oczekiwanej μ wykorzystujemy Model 2.

Dane zadania:

- $n = 7,\ próbka$: 2,93 2,97 3,05 2,91 3,02 2,87 2,92
- poziom istotności $\alpha = 0{,}05$

1. Hipotezy: H_0: $\mu = 3$, H_1: $\mu < 3$
2. Statystyka testowa: $T = \frac{\bar{X}-3}{S}\sqrt{7}$ ma rozkład t-Studenta o 6 stopniach swobody, oznaczany jako t_6 , o ile H_0 prawdziwa
3. Wartość statystyki testowej: $t = \frac{\bar{x}-3}{s}\sqrt{7} = \frac{2{,}95-3}{0{,}06396}\sqrt{7} = -2{,}0683$
4. Zbiór krytyczny $C = \left(-\infty, -t_{0{,}95;6}\right] = (-\infty; -1{,}9432]$
5. **Decyzja i jej uzasadnienie:** t ∈ C, więc odrzucamy hipotezę zerową i przyjmujemy hipotezę alternatywną na poziomie istotności 0,05: można twierdzić, na poziomie istotności 0,05, ze średnia waga pudełka proszku do prania jest mniejsza niż 3 kg.

Zad. 3 W celu oszacowania dokładności pomiarów wykonywanych pewnym przyrządem dokonano 8 pomiarów pewnego elementu i otrzymano wartość wariancji z próby 0,0675. Na poziomie istotności 0,05 stwierdzić, czy wariancja wskazań badanego przyrządu istotnie różni się od 0,06. Przyjąć założenie, ze rozkład badanej cechy jest normalny.

(Uwaga: W rozwiązaniu zadania przyjęto liczebność próbki 7. Proszę rozwiązać oryginalne zadanie dla n = 8)

Rozw. Niech zmienna losowa X oznacza wielkość losowego pomiaru pewnego elementu. $X \sim N(\mu, \sigma)$, przy czym parametry rozkładu nie są znane. Zatem do weryfikacji hipotez o wariancji σ^2 wykorzystujemy Model 4.

Dane zadania: $n = 7$, $s^2 = 0{,}0675$, poziom istotności $\alpha = 0{,}05$

1. Hipotezy: H_0: $\sigma^2 = 0{,}06$, H_1: $\sigma^2 \neq 0{,}06$

2. Statystyka testowa: $\chi^2 = \frac{6S^2}{0{,}06}$ ma rozkład χ^2_6, o ile H_0 prawdziwa

3. Wartość statystyki testowej: $\chi^2_{obs} = \frac{6 \cdot 0{,}0675}{0.06} = 6{,}75$

4. Zbiór krytyczny $C = ?$

$$C = \left(0; \chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\right] \cup [\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}; \infty),$$

gdzie $n - 1 = 6$, $\alpha = 0{,}05$, $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$, $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = \chi^2_{0{,}025;6} = 1{,}2373, \quad \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = \chi^2_{0{,}975;6} = 14{,}4494$$

$$C = (0; 1{,}2373] \cup [14{,}4494; \infty),$$

5. **Decyzja i jej uzasadnienie**: $\chi^2_{obs} \notin C$, więc nie można twierdzić, że $\sigma^2 \neq 0{,}06$, na poziomie istotności 0,05.

Zad. 4 W celu zbadania zawartości procentowej skrobi w ziemniakach zbadano 41 losowo wybranych ziemniaków i otrzymano następujące wyniki:

zawartość skrobi	liczba ziemniaków
9 - 13	2
13 - 17	14
17 - 21	22
21 - 25	3

Zakładamy, że zawartość skrobi w ziemniakach ma rozkład normalny. Na poziomie istotności 0,1 zweryfikować hipotezę, że wariancja zawartości skrobi w ziemniakach jest większa niż 5,5.

Rozw. Niech zmienna losowa X oznacza zawartość skrobi w ziemniaku. $X \sim N(\mu, \sigma)$, przy czym parametry rozkładu nie są znane. Zatem do weryfikacji hipotez o wariancji σ^2 wykorzystujemy Model 4.

Dane zadania:

$n = 41,\ \ dane\ zgrupowane\ w\ szeregu\ rozdzielczym,$ poziom istotności $\alpha = 0{,}1$

1. Hipotezy: H_0: $\sigma^2 = 5{,}5$, H_1: $\sigma^2 > 5{,}5$

2. Statystyka testowa: $\chi^2 = \frac{40S^2}{5{,}5}$ ma rozkład χ^2_{40} , o ile H_0 prawdziwa

3. Wartość statystyki testowej $\chi^2_{obs} = \frac{40 \cdot s^2}{5{,}5} = ?$

Zawartość skrobi	Liczba ziemniaków n_i	Środek $\bar{x}_i$	$n_i \cdot (\bar{x}_i - \bar{x})^2$
9-13	2	11	$2(11 - 719/41)^2$
13-17	14	15	$14(15 - 719/41)^2$
17-21	22	19	$22(19 - 719/41)^2$
21-25	3	23	$3(23 - 719/41)^2$
Suma			312,1951

$$\bar{x} = \frac{1}{41}\sum_{i=1}^{4} n_i \bar{x}_i = \frac{1}{41}(2 \cdot 11 + 14 \cdot 15 + 22 \cdot 19 + 3 \cdot 23) = \frac{719}{41} = 17{,}54$$

$$\chi^2_{obs} = \frac{40 \cdot s^2}{5{,}5} = \frac{312{,}1952}{5{,}5} = 56{,}7628$$

4. Zbiór krytyczny $C = ?$

$$C = [\chi^2_{1-\alpha, n-1}; \infty),$$

gdzie $n - 1 = 41 - 4 = 40,\ \alpha = 0{,}1,\quad 1 - \alpha = 0{,}9$

$$\chi^2_{0{,}9;40} = \ 51{,}8051$$

$$C = [51{,}8051; \infty),$$

6. **Decyzja i jej uzasadnienie**: $\chi^2_{obs} \in C$, więc można twierdzić, że $\sigma^2 > 5{,}5$, na poziomie istotności 0,05.

<u>**Zad. 5**</u> Przeprowadzono badania dotyczące czasu poświęcanego tygodniowo przez studentów pewnej uczelni na studiowanie w bibliotece. W tym celu wylosowano próbę 125 studentów i otrzymano dla niej następujące wyniki (czas studiowania w bibliotece w godzinach):

czas	liczba studentów
0 - 2	10
2 - 4	28
4 - 6	42
6 - 8	30
8 - 10	15

Czy na podstawie tych danych można twierdzić, że studenci tej uczelni spędzają w bibliotece średnio mniej niż 6 godzin tygodniowo? Przyjąć poziom istotności 0,06.

Rozw. Niech zmienna losowa X oznacza czas poświęcany tygodniowo przez studenta badanej uczelni na studiowanie w bibliotece. Nie ma w zadaniu informacji o rozkładzie zmiennej losowej X. Oznaczmy $E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$. Są to też nieznane parametry rozkładu. Liczebność próbki jest duża $n = 125 \geq 100$. Zatem do weryfikacji hipotezy o wartości oczekiwanej μ wykorzystujemy Model 3.

Dane zadania:

$n = 125,$ $dane\ zgrupowane\ w\ szeregu\ rozdzielczym,$ poziom istotności $\alpha = 0{,}06$.

1. Hipotezy: H_0: $\mu = 6$, H_1: $\mu < 6$
2. Statystyka testowa: $Z = \frac{\bar{X}-6}{S}\sqrt{125}$ ma rozkład bliski rozkładowi standardowemu normalnemu, o ile H_0 prawdziwa
3. Wartość statystyki testowej: $z = \frac{\bar{x}-6}{s}\sqrt{125} = ?$

czas	liczba studentów	środek $\bar{x}_i$	$n_i \cdot (\bar{x}_i - \bar{x})^2$
$0-2$	10	1	$10(1-5{,}192)^2$
$2-4$	28	3	$28(3-5{,}192)^2$
$4-6$	42	5	$42(5-5{,}192)^2$
$6-8$	30	7	$30(7-5{,}192)^2$
$8-10$	15	9	$15(9-5{,}192)^2$
Suma			627,392

$$\bar{x} = \frac{1}{125}\sum_{i=1}^{5} n_i\bar{x}_i = \frac{1}{125}(10 \cdot 1 + 28 \cdot 3 + 42 \cdot 5 + 30 \cdot 7 + 15 \cdot 9) = \frac{649}{125} = 5{,}192$$

$$s^2 = \frac{627,392}{124} = 5,0596, \quad s = \sqrt{5,0596} = 2,2494$$

$$z = \frac{\bar{x} - 6}{s}\sqrt{125} = \frac{5,192 - 6}{2,2494} \cdot 11,1803 = -4,0160$$

4. Zbiór krytyczny $C = (-\infty, -z_{0,94}] = (-\infty; -1,55477]$

5. **Decyzja i jej uzasadnienie**: $z \in C$, więc odrzucamy hipotezę zerową i przyjmujemy hipotezę alternatywną na poziomie istotności 0,06: można twierdzić, na poziomie istotności 0,06, że średni czas spędzany tygodniowo w bibliotece przez studenta jest mniejszy niż 6 godzin.

Zad. 6 W losowej próbie 500 mieszkańców pewnego rejonu będących w wieku produkcyjnym znalazło się 126 bezrobotnych. Czy na poziomie istotności 0,05 można stwierdzić, że stopa bezrobocia w tym rejonie jest większa od 20%?

Rozw.

Niech zmienna losowa X ma wartość 1, jeśli osoba jest bezrobotna, a 0 w przeciwnym przypadku, zatem $X \sim Bin(1, p)$, $p \in (0,1)$, $p -$ proporcja osób bezrobotnych w badanym rejonie. Zatem do weryfikacji hipotezy o wartości p wykorzystujemy Model 10? o ile spełnione są warunki (*)

Dane zadania: $n = 500$, $k = 126$, poziom istotności $\alpha = 0,05$, $p_0 = 0,2$.

$$n\hat{p} = 126 \geq 5, \ n(1 - \hat{p}) = 500\left(1 - \frac{126}{500}\right) = 374 \geq 5 \quad (*)$$

Spełnione są warunki (*), więc można stosować Model 10.

1. Hipotezy: H_0: $p = 0,2$, H_1: $p > 0,2$

2. Statystyka testowa:

$$Z = \frac{\hat{p} - 0,2}{\sqrt{\frac{0,2(1 - 0,2)}{500}}}$$

ma rozkład bliski rozkładowi $N(0,1)$, o ile H_0 prawdziwa

3. Wartość statystyki testowej:

$$z = \frac{\frac{126}{500} - 0{,}2}{\sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{500}}} = 2{,}91$$

4. Zbiór krytyczny $C = [z_{0,95}; \infty) = [1{,}64485; \infty)$

5. **Decyzja i jej uzasadnienie**: $z = 2{,}91 \in C$, więc odrzucamy hipotezę zerową i przyjmujemy hipotezę alternatywną na poziomie istotności 0,05: na poziomie istotności α=0,05 można twierdzić, że stopa bezrobocia w danym rejonie jest większa niż 20%.

Zad. 7 Przeprowadzono ankietę wśród pracowników naukowych pewnej uczelni dotyczącą stażu pracy. Stwierdzono, że wśród 140 respondentów znalazło się: 47 osób o stażu krótszym niż 10 lat, 53 osoby pracujące co najmniej 10, ale nie dłużej niż 15 lat oraz 40 osób o stażu pracy dłuższym niż 15 lat. Zweryfikować hipotezę, że 70% pracowników tej uczelni legitymuje się stażem pracy nie dłuższym niż 15 lat. Przyjąć poziom istotności 0,05.

Rozw.

Niech Y oznacza staż pracy pracownika naukowego uczelni, a

$$X = \begin{cases} 1, & jeśli\ Y \leq 15 \\ 0, & jeśli\ Y > 15 \end{cases}$$

$X \sim Bin(1, p)$, $p \in (0,1), p -$ proporcja pracowników naukowych uczelni mających staż pracy nie dłuższy niż 15 lat

Dane zadania: $n = 140$ – liczebność próbki

Staż pracy	< 10	[10,15]	>15
Liczba osób	47	53	40

$k = 100 - liczba\ pracowników\ w\ próbce\ o\ stażu\ pracy \leq 15,$

poziom istotności $\alpha = 0{,}05$, $p_0 = 0{,}7$.

$$n\hat{p} = 140 \cdot \frac{100}{140} = 100 \geq 5,\ \ n(1-\hat{p}) = 140\left(1 - \frac{100}{140}\right) = 40 \geq 5 \quad (*)$$

Zachodzą nierówności (*), więc można stosować Model 10.

Należy zweryfikować

1. Hipotezy: H_0: $p = 0{,}7$, H_1: $p \neq 0{,}7$

2. Statystyka testowa:

$$Z = \frac{\hat{p} - 0{,}7}{\sqrt{\frac{0{,}7(1-0{,}7)}{140}}}$$

ma rozkład bliski rozkładowi $N(0{,}1)$, o ile H_0 prawdziwa

3. Wartość statystyki testowej:

$$z = \frac{\frac{100}{140} - 0{,}7}{\sqrt{\frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{140}}} = 0{,}36886$$

4. Zbiór krytyczny $C = ?$

$$C = \left(-\infty; -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \cup [z_{1-\frac{\alpha}{2}}; \infty),$$

gdzie $\alpha = 0{,}05$, $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$, $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$, $z_{0{,}975} = 1{,}96$,

$$C = (-\infty; -1{,}96] \cup [1{,}96; \infty)$$

5. **Decyzja i jej uzasadnienie**: $z = 0{,}36886 \notin C$, więc na poziomie istotności 0,05 nie można odrzucić hipotezy, że 70% pracowników ma staż pracy nie dłuższy niż 15 lat.