Andrzej Sierociński

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Przykłady zmiennych dyskretnych

Wykład 6

13 Przykłady zmiennych dyskretnych

13.1 Rozkład Bernoulliego i rozkład dwumianowy

Załóżmy, że mamy pojedyncze doświadczenie Bernoulliego. Niech X będzie zmienną losową, dla której $X = 1$, jeżeli doświadczenie Bernoulliego kończy się sukcesem oraz $X = 0$, jeżeli mamy porażkę.

Definicja
Mówimy, że zmienna losowa X ma **rozkład Bernoulliego**, jeżeli jej funkcja prawdopodobieństwa ma postać

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1 - p & \text{dla} \quad x = 0 \\ p & \text{dla} \quad x = 1, \end{cases}$$

dla pewnego $p \in (0, 1)$.

Nośnikiem rozkładu Bernoulliego jest $\mathcal{X} = \{0, 1\}$.

Wartość oczekiwana jest równa

$$E[X] = 0 \cdot P(X = x) + 1 \cdot P(X = 1) = p.$$

Ponieważ $E[X^2] = p$, to wariancja

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

Zmienna losowa o rozkładzie Bernoulliego jest najprostszym przykładem zmiennej losowej typu dyskretnego. Nośnik zawiera jedynie dwie wartości: 0 i 1.

Wiele eksperymentów losowych spełnia dokładnie lub w przybliżeniu następujący zestaw warunków:

1. Eksperyment składa się z n mniejszych doświadczeń, zwanych *próbami*, gdzie n jest ustalone i znane przed doświadczeniem.

2. Każda próba kończy się jednym z dwóch możliwych wyników (dychotomia), które zwane są sukcesem (1) i porażką (0). Prawdopodobieństwo sukcesu p jest takie same we wszystkich próbach.

3. Próby są niezależne, co oznacza, że wynik w danej próbie nie ma żadnego wpływu na wyniki w innych próbach.

Definicja.
Doświadczenie opisane warunkami 1-3 nazywamy **doświadczeniem dwumianowym**.

Definicja.
Zmienną losową X równą liczbie sukcesów w n niezależnych doświadczeniach (próbach) Bernoulliego nazywamy zmienną losową o rozkładzie **dwumianowym** z parametrami (n, p).

Zmienną losową o rozkładzie dwumianowym oznaczamy przez $X \sim b(n, p)$.

Twierdzenie Funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej $X \sim b(n, p)$, $n \in \mathcal{N}$, $p \in (0, 1)$ jest równa

$$P(X = k) = b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Nośnikiem rozkładu dwumianowego $X \sim b(n, p)$ jest $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots n\}$.

Zauważmy, że $b(1, p)$ jest rozkładem Bernoulliego.

Definicja.
Momentem różnicowym rzędu n zmiennej losowej X nazywamy

$$E[(X)_n] = E[X(X - 1) \cdot \ldots \cdot (X - n + 1)]$$

gdzie $(x)_n = x(x - 1)(x - 2) \cdots (x - n + 1)$.

Twierdzenie Jeżeli $X \sim b(n, p)$, $n \in \mathcal{N}$, $p \in (0, 1)$, to

$$E[X] = np, \text{ oraz } V(X) = np(1 - p).$$

Dowód.

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{x \in \mathcal{X}} x \cdot P(X = x) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot b(k; n, p) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1 - p)^{n-k} = \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1) - (k-1)]!} p^{k-1} (1 - p)^{(n-1)-(k-1)}.
\end{aligned}$$

Podstawiając $j = k - 1$ otrzymujemy, że

$$E[X] = np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1 - p)^{n-1-j} = np.$$

Do wyznaczenia wariancji, niezbędne będzie obliczenie drugiego momentu różnicowego $E[X(X-1)]$.

$$\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =
\end{aligned}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)![(n-2)-(k-2)]!} p^{k-2}(1-p)^{[(n-2)-(k-2)]}.$$

Podstawmy $j = k-2$, wówczas

$$\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^j (1-p)^{[(n-2)-j]} = \\
&= n(n-1)p^2.
\end{aligned}$$

Ponieważ

$$E[X(X-1)] = E[X^2] - E[X],$$

to

$$V(X) = E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2.$$

Ostatecznie

$$V(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p).$$

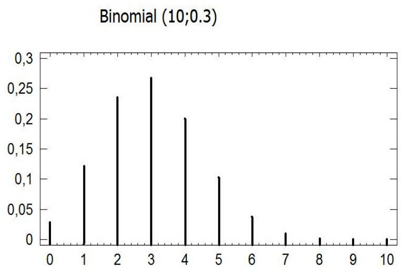
■

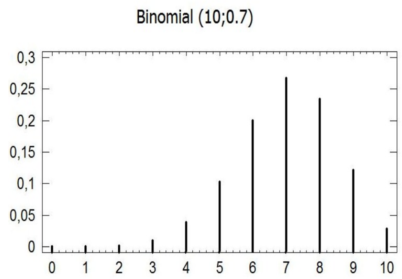
Odchylenie standardowe $X \sim b(n,p)$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}.$$

Zbadajmy zachowanie się funkcji prawdopodobieństwa zmiennej losowej o rozkładzie dwumianowym.

Poniżej mamy dwa wykresy słupkowe funkcji prawdopodobieństwa dla rozkładów $b(10, 0.3)$ oraz $b(10, 0.7)$..





Oznaczmy przez k^* najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w n niezależnych doświadczeniach Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Wówczas

$$b(k^*; n, p) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} b(k; n, p).$$

Twierdzenie

Dla zmiennej losowej $X \sim b(n, p)$ najbardziej prawdopodobną liczbą sukcesów k^* jest

$$k^* = \begin{cases} \lfloor (n+1)p \rfloor & \text{dla} \quad (n+1)p \quad \text{niecałkowitego} \\ (n+1)p \vee (n+1)p - 1 & \text{dla} \quad (n+1)p \quad \text{całkowitego.} \end{cases}$$

Dowód. Rozważmy funkcję

$$\phi(k) = \frac{b(k; n, p)}{b(k-1; n, p)} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{1-p}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Zauważmy, że k^* spełnia następujące dwie nierówności:

$$\phi(k^*) \geqslant 1 \quad \text{oraz} \quad \phi(k^*+1) \leqslant 1.$$

Stąd

$$\frac{n-k^*+1}{k^*} \cdot \frac{p}{1-p} \geqslant 1 \;\; \text{oraz} \;\; \frac{n-k^*}{k^*+1} \cdot \frac{p}{1-p} \leqslant 1.$$

Rozwiązując te dwie nierówności otrzymujemy

$$(n+1)p - 1 \leqslant k^* \leqslant (n+1)p.$$

■

Przykład. *System komunikacyjny składający się z n elementów, działających niezależnie, o niezawodnościach p, uważa się za sprawny, jeżeli działa przynajmniej połowa jego elementów. Dla jakich wartości p system złożony z 5 elementów ma wyższą niezawodność od systemu złożonego z 3 elementów?*

Rozwiązanie.
Liczba elementów sprawnych jest zmienną losową o rozkładzie dwumianowym z parametrami (n, p). Zatem, dla systemu złożonego z pięciu elementów, prawdopodobieństwo działania jest równe

$$\binom{5}{3}p^3(1-p)^2 + \binom{5}{4}p^4(1-p) + p^5.$$

Odpowiednie prawdopodobieństwo, dla systemu złożonego z trzech elementów wynosi

$$\binom{3}{2}p^2(1-p) + p^3.$$

Stąd wynika, że system złożony z pięciu elementów jest bardziej niezawodny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5 \geqslant 3p^2(1-p) + p^3,$$

co daje nam

$$6p^2 - 9p + 3 \leqslant 0$$

lub $p \in [0.5, 1]$.

13.2 Rozkład hipergeometryczny

Założenia prowadzące do rozkładu hipergeometrycznego są następujące:

1. Losujemy ze zbioru złożonego z N elementów (tzw. populacja skończona).

2. Każdemu z N obiektów można przypisać jedną z dwóch cech: (1) sukces lub (0) porażka, zakładamy, że mamy wśród tych N obiektów M sukcesów oraz $N - M$ porażek.

3. Ze zbioru N elementowego wybieramy n obiektów bez zwracania, w taki sposób, że wybór każdego podzbioru n elementowego ma to samo prawdopodobieństwo.

Definicja.
Zmienną losową X równą liczbie sukcesów w n elementowej próbie, wybranej bez zwracania z populacji skończonej o liczności N zawierającej dokładnie M sukcesów oraz $N - M$ porażek nazywamy zmienną losową o **rozkładzie hipergeometrycznym** z parametrami (n, M, N), gdzie N, M oraz n są liczbami naturalnymi, $M \leqslant N$ and $n \leqslant N$. Używamy oznaczenia $X \sim HG(n, M, N)$.

Twierdzenie Funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej o rozkładzie hipergeometrycznym jest równa

$$P(X = x) = h(x; n, M, N) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}},$$

dla x całkowitego spełniającego nierówności $\max(0, n - N + M) \leqslant x \leqslant \min(n, M)$.

Dowód.
Funkcja prawdopodobieństwa jest równa ilorazowi liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $\{X = x\}$ i liczby wszystkich możliwych wyników losowania. Musimy jedynie wyjaśnić ograniczenia na wartości zmiennej losowej X. Jeżeli mamy próbę o liczności n, która jest mniejsza od liczby sukcesów M w całej populacji, to największą możliwą wartością X jest n. W przeciwnym przypadku, gdy $M < n$, to X może być co najwyżej równe M.

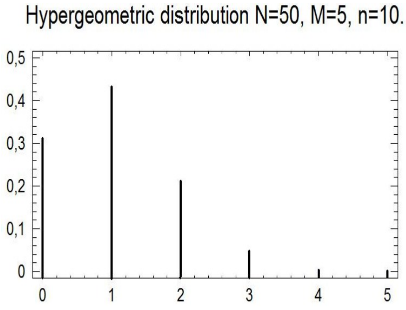
Podobnie, jeżeli liczba porażek w populacji $N - M$ jest większa od liczności próby n, to najmniejszą możliwą wartością X jest 0 (w przypadku, gdy wszystkie wylosowane elementy próby są porażkami). Jeżeli $N - M < n$, to najmniejszą wartością X jest $n - (N - M)$.

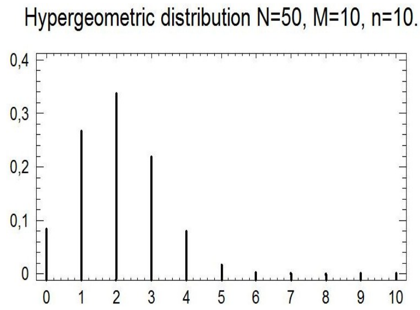
Podsumowując, nośnikiem zmiennej losowej X jest

$$\{x \in Z : \max(0, n - N + M) \leqslant x \leqslant \min(n, M)\}.$$

■

Poniżej podano dwa przykłady wykresów słupkowych funkcji prawdopodobieństwa rozkładów hipergeometrycznych.





Przykład. *Pięć osobników z ginącej populacji pewnych zwierząt zostało schwytanych i zaobrączkowanych. Następnie je wypuszczono tak, aby mogły wrócić do swego naturalnego środowiska.*

Po kilku dniach, ponownie urządzono bezkrwawe łowy i schwytano 10 osobników z tej populacji.

Niech X oznacza liczbę zwierząt zaobrączkowanych w drugiej próbie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że $X = 2$, jeżeli cała populacja składa się z: 23, 24, 25, 26 zwierząt?

Rozwiązanie.
Oczywiście, X ma rozkład hipergeometryczny. Parametrami rozkładu X są $n = 10$, $M = 5$ oraz $N = 23, 24, 25, 26$. Stąd

$$g(N) = P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{N-5}{8}}{\binom{N}{10}}, \quad N = 23, 24, 25, 26.$$

W tabeli poniżej podano wartości odpowiednich prawdopodobieństw.

N	23	24	25	26
$P(X = 2)$	0.382478	0.385376	0.385376	0.383096

Można pokazać, że funkcja $g(N)$ osiąga wartość największą dla $N = 24$ oraz $N = 25$. Fakt ten można zinterpretować w ten sposób, że skoro złapano 2 oznakowane osobniki, to najbardziej prawdopodobna liczebność populacji tych zwierząt wynosi 24-25.

Twierdzenie
Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej X o rozkładzie hipergeometrycznym z parametrami (n, M, N) jest równa

$$E[X] = n \cdot \frac{M}{N}, \quad \text{oraz} \quad V(X) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \cdot n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right).$$

Iloraz M/N jest frakcją sukcesów w populacji. Jeśli w wyrażeniach na wartość oczekiwaną i wariancję oznaczymy tę frakcję przez p, to

$$E[X] = np, \quad \text{oraz} \quad V(X) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \cdot np(1-p).$$

Wartość oczekiwana liczby sukcesów w schemacie dwumianowym i hipergeometrycznym jest identyczna. Wariancje się nieznacznie różnią a współczynnik

$$\frac{N-n}{N-1},$$

nazywany jest często poprawką wariancji dla losowania z populacji skończonych (ang. finite population correction factor).

Współczynnik ten jest zawsze mniejszy od 1, zatem rozkład hipergeometryczny ma zawsze mniejszą wariancję od zm. los. o rozkładzie dwumianowym. Jeżeli n małe względem N, to współczynnik korekcji jest w przybliżeniu równy 1.

Przykład. (kontynuacja przykładu z obrączkowaniem zwierząt) Załóżmy, że $n = 10$, $M = 5$, a $N = 25$, wówczas

$$p = \frac{5}{25} = 0,2$$

$$\begin{aligned} E[X] &= np = 10 \cdot 0,2 = 2 \\ V(X) &= \frac{15}{24} \cdot 2 \cdot (1 - 0,8) = 1. \end{aligned}$$

Zauważmy, że w przypadku losowania ze zwracaniem, wariancja $V(X) = 1,6$.

Załóżmy, że wielkość populacji N nie jest znana, i na podstawie liczby schwytanych zwierząt zaobrączkowanych x chcemy oszacować wielkość populacji N.

Wydaje się rozsądnym porównanie frakcji

$$\hat{p} = \frac{x}{n}$$

sukcesów w próbie z frakcją sukcesów w populacji

$$p = \frac{M}{N}.$$

Wówczas otrzymujemy oszacowanie

$$\hat{N} = \frac{M \cdot n}{x}.$$

W naszym przykładzie

$$\hat{N} = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25.$$

13.3 Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala) oparty jest na następujących założeniach:

1. Eksperyment składa się z ciągu niezależnych doświadczeń Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu $p \in (0, 1)$.
2. Eksperyment kończy się w chwili uzyskania r-tego sukcesu, gdzie r jest ustaloną liczbą naturalną.

Definicja.
Zmienną losową X równą liczbie porażek do chwili uzyskania r-tego sukcesu, ($r \in \mathcal{N}$), nazywamy zmienną losową o rozkładzie **ujemnym dwumianowym** i oznaczamy $X \sim NB(r, p)$, gdzie $p \in (0, 1)$ jest prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczym doświadczeniu Bernoulliego.

W przeciwieństwie do rozkładu dwumianowego, w rozkładzie ujemnym dwumianowym, losowa jest liczba doświadczeń a nielosowa liczba sukcesów.

Twierdzenie
Dla zmiennej losowej $X \sim NB(r, p)$ o rozkładzie ujemnym dwumianowym funkcja prawdopodobieństwa dana jest wzorem:

$$nb(x; r, p) = \binom{x + r - 1}{r - 1} p^r (1 - p)^x, \quad x = 0, 1, \ldots.$$

Dowód.
Oczywistym jest fakt, iż mamy $x + r$ doświadczeń z sukcesem na ostatnim miejscu. Zatem

$$nb(x; r, p) = b(r - 1; x + r - 1, p) \cdot p = \binom{x + r - 1}{r - 1} p^{r-1} (1 - p)^x \cdot p.$$

■

Nośnik $\mathcal{X}$ rozkładu ujemnego dwumianowego jest zbiorem wszystkich liczb nieujemnych całkowitych. ($\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \ldots\}$).

Dla dowolnego $y \in (0, 1)$ rozważmy funkcję

$$S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y}.$$

Jako suma zbieżnego szeregu potęgowego, funkcja ta jest różniczkowalna k razy, dla dowolnego $k \in \mathcal{N}$. Stąd mamy

$$S^{(k)}(y) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} y^{n-k} = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{(k)} = \frac{k!}{(1-y)^{k+1}}$$

lub

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} y^{n-k} = \frac{1}{(1-y)^{k+1}}.$$

Kładąc $k = r - 1$, $n = x + r - 1$ oraz $y = 1 - p$ mamy

$$\sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+r-1}{r-1} (1-p)^x = \frac{1}{p^r}.$$

Stąd $\{nb(x; r, p)\}$ jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Różniczkując powyższe równanie po p otrzymujemy

$$-\sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \binom{x+r-1}{r-1} (1-p)^{x-1} = -\frac{r}{p^{r+1}}.$$

Stąd mamy

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \binom{x+r-1}{r-1} p^r (1-p)^x = \frac{r(1-p)}{p}.$$

Dwukrotne różniczkowanie po p pozwala na wyznaczenie drugiego momentu różnicowego i wariancji.

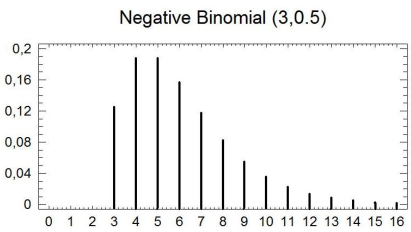
Twierdzenie

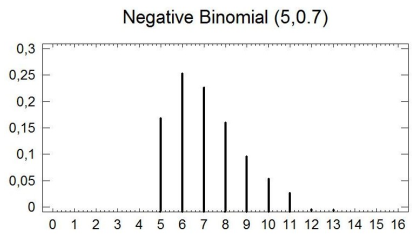
Dla zm. los. $X \sim NB(r, p)$ mamy

$$E[X] = \frac{r(1-p)}{p} \quad \text{oraz} \quad V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Niektórzy definiują zmienną losową o ujemnym rozkładzie dwumianowym, jako liczbę doświadczeń do r-tego sukcesu włącznie $(X + r)$ a nie jedynie liczbę porażek (X).

Poniżej podano przykładowe, wykresy słupkowe dwóch rozkładów ujemnych dwumianowych $(X + r)$.





Przykład.
Koncern farmaceutyczny chce zatrudnić 50 ochotników - palaczy do programu testowania nowej gumy do żucia zawierającej nikotynę. Na $0,1$ *oszacowano prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba jest palaczem i wyrazi zgodę na udział w badaniu.*

- *Obliczyć prawdopodobieństwo, że zanim wybierze się 50 ochotników, trzeba będzie zapytać o udział w badaniu więcej niż 700 osób?*
- *Jaka jest oczekiwana liczba osób, które trzeba będzie zapytać?*

Rozwiązanie.
Niech X będzie zm. los. równą liczbie osób, które poproszono o udział w programie i z pewnych powodów nie wyraziły na to zgody. Oczywistym jest, że $X \sim NB(50; 0,1)$. Ponieważ X jest liczba "porażek", to interesuje nas prawdopodobieństwo, że $X > 650$.

$$P(X > 650) = 1 - P(X \leqslant 650) = 1 - \sum_{x=0}^{650} \binom{x+49}{49} 0,1^{50} 0,9^{x} = 0,00353.$$

Oczekiwana liczba osób, które trzeba będzie spytać wynosi

$$r + \frac{r(1-p)}{p} = 50 + \frac{50 \cdot 0,9}{0,1} = 500.$$

13.4 Rozkład geometryczny

W szczególnym przypadku, gdy $r = 1$, zarówno zm. los. X będąca liczbą porażek oraz $Y = X + 1$ będąca liczbą doświadczeń do uzyskania pierwszego sukcesu włącznie, nazywana jest zmienną losową o rozkładzie **geometrycznym**.

Definicja.
Zmienną losową X równą liczbie porażek w ciągu niezależnych doświadczeń Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p, do uzyskania pierwszego sukcesu, o nośniku na zbiorze $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ nazywamy zmienna losową o rozkładzie geometrycznym.

Uwagi

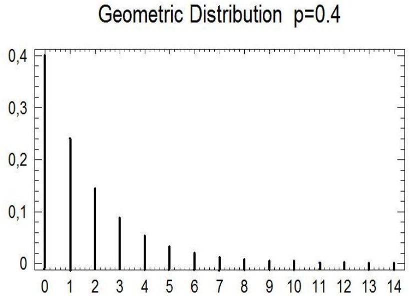
- Zmienną losową
$$Y = X + 1$$
(czas do pierwszego sukcesu włącznie) o nośniku $\mathcal{Y} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ również nazywamy zmienną losową o rozkładzie geometrycznym.

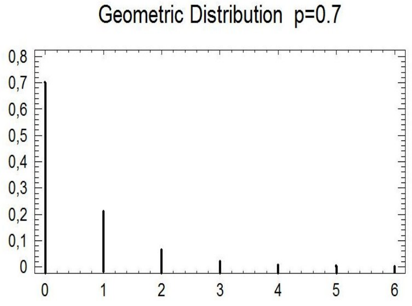
- Którą z tych zmiennych nazywamy o rozkładzie geometrycznym jest umowne i uwarunkowane jedynie naszą wygodą.

- Czasami, aby uniknąć niejednoznaczności, używa się terminu *przesunięty (ang. shifted)* rozkład geometryczny dla rozkładu zmiennej losowej Y.

- Zauważmy, że
$$E(Y) = \frac{1}{p} \quad \text{oraz} \quad V(Y) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Poniżej, jako przykładowe, podano dwa wykresy słupkowe funkcji prawdopodobieństwa dla rozkładu geometrycznego.





13.5 Rozkład Poissona

Jeżeli liczba n niezależnych doświadczeń Bernoulliego jest duża a prawdopodobieństwo sukcesu p bardzo małe, to z lematu Poissona można prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów przybliżyć wartością

$$e^{-n \cdot p} \cdot \frac{(n \cdot p)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Ta aproksymacja prowadzi nas do koncepcji zmiennej losowej o rozkładzie **Poissona**.

Załóżmy, że startując w chwili $t = 0$, zainteresowani jesteśmy w zliczaniu liczby zdarzeń, które pojawiają się losowo, jak np. cząstki radioaktywne zliczane przez licznik Geigera-Müllera, liczba klientów stacji benzynowej, liczba pomyłek telefonicznych itp..

Założenia

1. Istnieje takie $\lambda > 0$, że w dowolnie krótkim przedziale czasowym Δt, prawdopodobieństwo tego, że zaobserwowane zostanie dokładnie jedno zdarzenie losowe wynosi $\lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ ($o(\Delta t)$ oznacza wielkość, dla której $o(\Delta t)/\Delta t \to 0$ jak $\Delta t \to 0$).

2. Prawdopodobieństwo zaobserwowania w dowolnie krótkim czasie Δt więcej niż jednego zdarzenia losowego wynosi $o(\Delta t)$.

3. Liczba zaobserwowanych zdarzeń losowych w przedziale czasowym Δt jest niezależna od liczby wcześniej zaobserwowanych zdarzeń.

Twierdzenie
Jeżeli są spełnione warunki 1-3, to prawdopodobieństwo $P_k(t)$, że liczba zdarzeń losowych zaobserwowanych do chwili t jest równa k, $k = 0, 1, \ldots,$ dana jest wzorem

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Dowód. Z warunków 1 i 2 wynika, że prawdopodobieństwo - nie pojawienia się żadnego zdarzenia losowego w czasie Δt wynosi

$$P_0(\Delta t) = 1 - \lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t),$$

- jednego zdarzenia

$$P_1(\Delta t) = \lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t),$$

- wiecej niż jednego zdarzenia

$$P_j(\Delta t) = o(\Delta t) \text{ for } j > 1.$$

Stąd oraz z warunku 3 mamy

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) \cdot P_0(\Delta t) = P_0(t) \cdot (1 - \lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t)),$$

lub

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda \cdot P_0(t) + \frac{o(\Delta t))}{\Delta t}.$$

Przy $\Delta t \to 0$, otrzymujemy następujące równanie różniczkowe

$$P_0^{'}(t) = -\lambda \cdot P_0(t)$$

z warunkiem początkowym $P_0(0) = 0$. Zatem

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Do wyznaczenia pozostałych prawdopodobieństw możemy wykorzystać indukcję matematyczną. Załóżmy, że dla $k \geqslant 0$ i wszystkich j, $0 \leqslant j \leqslant k$

$$P_j(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} P_{k+1}(t + \Delta t) &= \sum_{j=0}^{k+1} P_{k+1-j}(t) \cdot P_j(\Delta t) = \\ &= P_{k+1}(t) \cdot P_0(\Delta t) + P_k(t) \cdot P_1(\Delta t) + o(\Delta t) = \\ &= P_{k+1}(t) \cdot (1 - \lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t)) + \\ &\quad + P_k(t) \cdot \lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

to

$$\frac{P_{k+1}(t + \Delta t) - P_{k+1}(t)}{\Delta t} = -\lambda \cdot P_{k+1}(t) + \lambda \cdot P_k(t) + \frac{o(\Delta t))}{\Delta t}.$$

Jeżeli $\Delta t \to 0$ to mamy

$$P_{k+1}^{'}(t) = -\lambda \cdot P_{k+1}(t) + \lambda \cdot P_k(t).$$

Wystarczy pokazać, że

$$P_{k+1}(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!}$$

spełnia powyższe równanie różniczkowe. Istotnie

$$\begin{aligned} P'_{k+1}(t) &= -\lambda \cdot e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} + e^{-\lambda t}\cdot (k+1)\frac{\lambda^{k+1}t^k}{(k+1)!} = \\ &= -\lambda \cdot P_{k+1}(t) + \lambda \cdot P_k(t). \end{aligned}$$

■

Jeżeli X jest liczbą zdarzeń, które pojawiły się losowo w jednostkowym przedziale czasowym $t = 1$, to mówimy, że X jest zm. los. o rozkładzie Poissona.

Definicja.
Mówimy, że zmienna losowa X ma **rozkład Poissona** z parametrem λ ($\lambda > 0$), oznaczamy $X \sim P(\lambda)$, jeżeli funkcja prawdopodobieństwa zm. los. X ma postać

$$P(x;\lambda) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

Twierdzenie
Jeżeli $X \sim P(\lambda)$ ma rozkład Poissona z parametrem λ, to

$$E[X] = \lambda, \text{ oraz } V(X) = \lambda.$$

Przykład.
W książce średnio mamy 1 błąd drukarski na 5 stron.
Jakie jest prawdopodobieństwo, że na losowo wybranej stronie zaobserwujemy co najmniej 1 błąd drukarski?

Rozwiązanie.
Na podstawie dwóch poprzednich twierdzeń wnioskujemy, że zmienna losowa X równa liczbie błędów na wybranej stronie ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda = 0,2$.
Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-0,2} = 1 - 0,8187 = 0,1813.$$