**Rozwiązania zadań   C09**

**Zad.1.** Rozkład prawdopodobieństwa wektora losowego $(X, Y)$ jest następujący:

| | $X$ | | |
|---|---|---|---|
| $Y$ | 0 | 1 | 2 |
| 0 | $\frac{1}{8}+\varepsilon$ | 0 | $\frac{3}{8}-\varepsilon$ |
| 1 | $\frac{1}{4}-\varepsilon$ | $\frac{1}{4}$ | $\varepsilon$ |

gdzie $\varepsilon$ jest dowolną liczbą rzeczywistą z przedziału $[0, 1/4]$.

- Wyznaczyć rozkłady brzegowe zmiennych losowych $X$ i $Y$.
- Czy zależą one od wartości $\varepsilon$?
- Wyciągnąć wnioski!.

**Rozw.**

-

| | $X$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 0 | 1 | 2 | $f_Y(y)$ |
| 0 | $\frac{1}{8}+\varepsilon$ | 0 | $\frac{3}{8}-\varepsilon$ | $\frac{4}{8}$ |
| 1 | $\frac{1}{4}-\varepsilon$ | $\frac{1}{4}$ | $\varepsilon$ | $\frac{4}{8}$ |
| $f_X(x)$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | 1 |

-

$$f_X(0)=\frac{1}{8}+\varepsilon+\frac{1}{4}-\varepsilon=\frac{3}{8},\quad f_X(1)=\frac{1}{4},\quad f_X(2)=\frac{3}{8}-\varepsilon+\varepsilon=\frac{3}{8}$$

$$f_Y(0)=\frac{1}{8}+\varepsilon+0+\frac{3}{8}-\varepsilon=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},\quad f_Y(1)=\frac{1}{4}-\varepsilon+\frac{1}{4}+\varepsilon=\frac{1}{2}$$

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $f_X(x)$ | 3/8 | 1/4 | 3/8 |

| $y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f_Y(y)$ | 1/2 | 1/2 |

Rozkłady brzegowe nie zależą od $\varepsilon$.

- Łączny rozkład prawdopodobieństwa wektora losowego (X,Y) zależy od $\varepsilon \in [0,1/4]$, a rozkłady brzegowe nie zależą. Stąd można oczekiwać, że zmienne losowe X, Y nie są niezależne, czyli są zależne.
- Zauważmy, że nie trzeba anlizować zależności rozkładu łącznego od $\varepsilon$, gdyż

$0=f(1,0)\neq\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{8}=f_X(1)f_Y(0)$, a stąd zmienne X, Y sa zależne niezależnie od wartości $\varepsilon$.

**Zad.2.** Rozkład prawdopodobieństwa wektora losowego $(X, Y)$ jest następujący:

| | $Y$ | | |
|---|---|---|---|
| $X$ | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 0,1 | 0,1 | $p$ |
| 2 | 0,1 | 0,2 | 0,3 |

(a) Znaleźć $p$.
(b) Obliczyć $F(2, 1)$, $F(1.5, 3)$, gdzie $F$ oznacza dystrybuantę rozkładu wektora losowego $(X, Y)$.
(c) Wyznaczyć rozkłady brzegowe zmiennych losowych $X$ i $Y$ oraz sprawdzić czy $X$ i $Y$ są niezależne.
(d) Czy zmienne losowe $X$ i $Y$ są skorelowane? Jeśli tak, to w jakim stopniu?

**Rozw.**

(a) $p$ jest takie, że

$$\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=1}^{2} f(x,y) = 1 \quad \equiv \quad 0{,}1 + 0{,}1 + p + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 = 1 \quad \equiv \quad p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

(b) $$F(2,1) = P(X \leq 2, Y \leq 1) = f(1,0) + f(1,1) + f(2,0) + f(2,1) =$$
$$= 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}5$$

$$F(1{,}5;3) = P(X \leq 1{,}5; Y \leq 3) = f(1,0) + f(1,1) + f(1,2) = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}4$$

| $y$ / $x$ | 0 | 1 | 2 | $f_X(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,4 |
| 2 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,6 |
| $f_Y(y)$ | 0,2 | 0,3 | 0,5 | 1 |

(c) X, Y są zależne, bo np. $f(1,1) = 0{,}1 \neq 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12 = f_X(1) \cdot f_Y(1)$

(d) $\rho = ?$ (trzeba znaleźć $E(X)$, $\sigma_X$ , $E(Y)$, , $\sigma_Y$, $E(XY)$)

$$E(X) = 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}6, \quad E(X^2) = 1^2 \cdot 0{,}4 + 2^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}4 + 2{,}4 = 2{,}8$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(Y)^2 = 2{,}8 - (1{,}6)^2 = 0{,}24, \quad \sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{0{,}24}$$

$$E(Y) = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}5 = 1{,}3, \quad E(Y^2) = 0^2 \cdot 0{,}2 + 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}5 = 2{,}3$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 2{,}3 - (1{,}3)^2 = 2{,}3 - 1{,}69 = 0{,}61, \quad \sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{0{,}61}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \sum_{x=1}^{2}\sum_{y=0}^{2} xyf(x,y) - E(X)E(Y) =$$

$$= \sum_{x=1}^{2}\sum_{y=1}^{2} xyf(x,y) - E(X)E(Y) = f(1,1) + 2f(1,2) + 2f(2,1) + 4f(2,2) - 1{,}6 \cdot 1{,}3 =$$

$$= 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}3 - 2{,}08 = 2{,}1 - 2{,}08 = 0{,}02$$

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{0{,}02}{\sqrt{0{,}24}\sqrt{0{,}61}} = \frac{2}{\sqrt{24 \cdot 61}} = 0{,}052.$$

Zmienne losowe X, Y są skorelowane, bo współczynnik korelacji jest różny od zera. Wynosi 0,052, czyli można mówić o bardzo niewielkiej współzależności liniowej dodatniej.

**Zad.3.** Rozkład prawdopodobieństwa wektora losowego $(X,\ Y)$ jest następujący:

| | $Y$ | |
|---|---|---|
| $X$ | 0 | 1 |
| 0 | 0,1 | 0,2 |
| 1 | 0,3 | 0,1 |
| 2 | 0,2 | $a$ |

(a) Znaleźć $a$ oraz obliczyć prawdopodobieństwa:

$$P(1 \leq X \leq 2, Y < 4),\ \ P(X = 1|Y = 0),\ \ \ P(Y = 1|X = 0).$$

**Rozw. (a)**

$$a = 1 - (0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$

$$P(1 \leq X \leq 2, Y < 4) = f(1,0) + f(1,1) + f(2,0) + f(2,1) = 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}7$$

$$P(X = 1|Y = 0) = \frac{P(X = 1, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{f(1,0)}{0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = \frac{1}{2}$$

$$P(Y = 1|X = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 1)}{P(X = 0)} = \frac{f(0,1)}{0{,}1 + 0{,}2} = \frac{0{,}2}{0{,}3} = \frac{2}{3}$$

(b) Wyznaczyć rozkłady brzegowe zmiennych losowych $X$ i $Y$ oraz sprawdzić czy $X$ i $Y$ są niezależne.

| | $Y$ | |
|---|---|---|
| $X$ | 0 | 1 |
| 0 | 0,1 | 0,2 |
| 1 | 0,3 | 0,1 |
| 2 | 0,2 | 0,1 |

| $y$<br>$x$ | 0 | 1 | $f_X(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 |
| 1 | 0,3 | 0,1 | 0,4 |
| 2 | 0,2 | 0,1 | 0,3 |
| $f_Y(y)$ | 0,6 | 0,4 | 1 |

$$\mathrm{X, Y} \text{ są niezależne} \quad \equiv \quad \mathrm{f(x,y) = f_X(x) f_Y(y), \text{dla wszystkich } x, y}\ ?$$

$$\mathrm{f(0{,}0) = 0{,}1 \neq 0{,}3 \cdot 0{,}6 = f_X(x) f_Y(y)} \quad \Longrightarrow \mathrm{X, Y} \text{ są zależne}$$

(c) Obliczyć $\mathrm{Cov(X, Y)}$. Czy zmienne losowe $\mathrm{X}$ i $\mathrm{Y}$ są skorelowane?

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

| $y$ <br> $x$ | 0 | 1 | $f_X(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 |
| 1 | 0,3 | 0,1 | 0,4 |
| 2 | 0,2 | 0,1 | 0,3 |
| $f_Y(y)$ | 0,6 | 0,4 | 1 |

$$E(XY) = 1 \cdot 1 \cdot f(1{,}1) + 2 \cdot 1 \cdot f(2{,}1) = 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}3$$

$$E(X) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 = 1\,, \quad E(Y) = 0 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}4 = 0{,}4$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0{,}3 - 1 \cdot 0{,}4 = -0{,}1.$$

Zmienne losowe $X$ i $Y$ są skorelowane $\equiv$ $Cov(X,Y) \neq 0$

(d) Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej $2\mathrm{X} + \mathrm{Y}$.

- $E(2X + Y) = 2E(X) + E(Y) = 2 + 0{,}4 = 2{,}4.$

$$Var(2X+Y) = Var(2X) + 2Cov(2X,Y) + Var(Y) = 2^2 Var(X) + 2 \cdot 2 \cdot Cov(X,Y) + Var(Y). \ (**)$$

$$Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = ?$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot 0{,}3 + 1^2 \cdot 0{,}4 + 2^2 \cdot 0{,}3 = 1{,}6, \quad E(Y^2) = 0^2 \cdot 0{,}6 + 1^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}4$$

$$Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 1{,}6 - 1^2 = 0{,}6,$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - \big(E(Y)\big)^2 = 0{,}4 - 0{,}4^2 = 0{,}4 - 0{,}16 = 0{,}24$$

Podstawiając do (**) mamy

- $Var(2X+Y) = 4 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot (-0{,}1) + 0{,}24 = 2{,}4 - 0{,}4 + 0{,}24 = 2{,}24.$

**Uwaga**. Wykorzystaliśmy wzory prawdziwe dla dowolnych stałych $a, b$ i dowolnych zmiennych losowych:

- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
- $Var(X + Y) = Var(X) + 2Cov(X,Y) + Var(Y)$
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

- $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$

**Zad.4.** Rozkład prawdopodobieństwa wektora losowego ($X$, $Y$) jest następujący:

| | $X$ | | |
|---|---|---|---|
| $Y$ | 0 | 2 | 3 |
| -1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |
| 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

(a) Wyznaczyć rozkłady brzegowe zmiennych losowych $X$ i $Y$ oraz sprawdzić czy $X$ i $Y$ są niezależne.

(b) Czy zmienne losowe $X$ i $Y$ są nieskorelowane?

| | $X$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 0 | 2 | 3 | $f_Y(y)$ |
| -1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{4}$ |
| 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{4}$ |
| $f_X(x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

$f(0, -1) = \frac{1}{4} = f_X(0) f_Y(-1),\ f(2, -1) = \frac{1}{8} = f_X(2) f_Y(-1),\ f(3, -1) = \frac{1}{8} = f_X(3) f_Y(-1),$
$f(0,1) = \frac{1}{4} = f_X(0) f_Y(1),\ f(2,1) = \frac{1}{8} = f_X(2) f_Y(1),\ f(3,1) = \frac{1}{8} = f_X(3) f_Y(1),$

Zatem, zmienne losowe $X$ i $Y$ są niezależne.

(b) Zmienne losowe $X$ i $Y$ są nieskorelowane, co wynika z punktu (a) oraz twierdzenia:

**Twierdzenie**. Jeśli zmienne losowe $X$ i $Y$ są niezależne, to są nieskorelowane, tzn. $Cov(X, Y) = 0$.

**Zad.5.** W wyniku przeprowadzonych badań, ustalono, ze w pewnej fabryce wytwarzającej sprzęt RTV, liczba wyprodukowanych w ciągu dnia niesprawnych odbiorników telewizyjnych ma rozkład Poissona o średniej 2. Podobnie, liczba niesprawnych zestawów stereo ma również rozkład Poissona o wartości oczekiwanej 3. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, ze w ciągu 2 dni, liczba niesprawnych produktów nie przekroczy 5.

- $X \sim Poisson(2)$, liczba wyprod. niesprawnych odbiorników tv w ciągu losowego dnia
- $Y \sim Poisson(3)$, —" — zestawów stereo —" —
- $X_1, X_2$ − niezależne zmienne losowe o rozkładach $Poisson(2)$
- $Y_1, Y_2$ − niezależne zmienne losowe o rozkładach $Poisson(3)$

- $X_1, X_2, Y_1, Y_2$ − niezależne zmienne losowe
- $W = X_1 + X_2 + Y_1 + Y_2 \sim Poisson(2+2+3+3) = Poisson(10)$

**Uwaga**. W ostatnim punkcie skorzystaliśmy z

**Twierdzenie**. Jeśli zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_n$ są niezależne i mają rozkłady Poissona, z parametrami, odpowiednio, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, to

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n).$$

- $P(W \le 5) = \sum_{k=0}^{5} P(W = k) = \sum_{k=0}^{5} e^{-10} \frac{10^k}{k!} =$

$$= e^{-10}\left(1 + \frac{10^1}{1!} + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} + \frac{10^4}{4!} + \frac{10^5}{5!}\right) = 0{,}0671.$$

**Zad.6.** Cukier pakowany jest w torebki o nominalnej masie 1kg. W rzeczywistości, w wyniku błędów ważenia, masa pojedynczej torebki ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej $1kg$ i wariancji $0,\ 025kg^2$. Torebki są pakowane w paczki po 10 torebek. Jaki jest procent paczek, nominalnie dziesięciokilogramowych, które mają masę mniejszą niż $9,\ 5\ kg$?
**Rozw**.

- $X \sim N(1, \sqrt{0{,}025})$, $X$ − masa 1kg torebki cukru
- $X_1, X_2, \dots, X_9, X_{10}$ − masy 10-ciu 1kg torebek cukru w paczce, niezależne zmienne losowe o jednakowych rozkładach $N(1, \sqrt{0{,}025})$,
- $S_{10} = X_1 + X_2 + \cdots + X_9 + X_{10} \sim N\left(10, \sqrt{10 \cdot 0{,}025}\right) = N(10; 0{,}5)$

**Uwaga.** Ostatni punkt wynika z tw. o dodawaniu dla niezależnych zmiennych losowych o rozkładach normalnych:

**Twierdzenie**. Jeśli zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_n$ są niezależne i mają rozkłady normalne, takie, że $X_j \sim N(\mu_j, \sigma_j), j = 1,2, \dots, n$, to

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim N\left(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2}\right)$$

$$p = P(S_{10} < 9{,}5) = P\left(\frac{S_{10} - 10}{0{,}5} < \frac{9{,}5 - 10}{0{,}5}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413$$
$$= 0{,}1587$$

**Odp**. 15,87% 10-ciu opakowań paczek 1kg cukru ma rzeczywistą wagę mniejszą niż 9,5kg.

**Zadanie 7.** W pewnym kiosku sprzedawanych jest średnio:
- 1000 egzemplarzy "Gazety Wyborczej" oraz
- 200 egzemplarzy "Przeglądu Sportowego" dziennie,

z odchyleniem standardowym, odpowiednio 100 i 15. Współczynnik korelacji miedzy liczbą sprzedawanych gazet obu tytułów wynosi 0,6. Wiedząc, ze zysk ze sprzedaży jednego egzemplarza "Gazety" wynosi 0,1 zł, natomiast ze sprzedaży "Przeglądu" 0,2 zł, obliczyć średni dzienny zarobek kioskarza i odchylenie standardowe zarobku pochodzącego ze sprzedaży wspomnianych gazet.

**Rozw**.

- $E(X) = 1000,\ X -$ liczba egzemplarzy GW sprzedanych losowego dnia, $\sigma_X = 100$
- $E(Y) = 200,\ Y -$ liczba egzemplarzy PS sprzedanych losowego dnia, $\sigma_Y = 15$
- $\rho = 0{,}6$
- $W = 0{,}1X + 0{,}2Y -$ dzienny zysk ze sprzedaży obu tytułów

$$E(W) = E(0{,}1X + 0{,}2Y) = 0{,}1E(X) + 0{,}2E(Y) = 100 + 40 = 140$$

$$Var(W) = Var(0{,}1X + 0{,}2Y) = Var(0{,}1X) + 2Cov(0{,}1X; 0{,}2Y) + Var(0{,}2Y) =$$
$$= 0{,}1^2 \cdot 100 + 2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 100 \cdot 15 + 0{,}2^2 \cdot 9 = 145$$
$$\sigma_W = \sqrt{145} = 12{,}04$$

$$Var(0{,}1X) = 0{,}1^2 Var(X) = 0{,}1^2 \cdot 100^2 = 100$$
$$Var(0{,}2Y) = 0{,}2^2 Var(Y) = 0{,}2^2 \cdot 15^2 = \frac{4}{100}225 = \frac{900}{100} = 9$$

$$Cov(0{,}1X; 0{,}2Y) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot Cov(X,Y) = 0{,}02 \cdot \rho \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y = 0{,}02 \cdot 0{,}6 \cdot 100 \cdot 15 = 18$$

**Uzasadnienie**

- $\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \implies Cov(X,Y) = \rho \sigma_X \sigma_Y$
- $Cov(aX, bY) = E\big((aX - E(aX))(bY - E(bY)\big) = E\big(a(X-\mu_X)b(Y-\mu_Y)\big) =$
  $= abE\big((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big) = abCov(X,Y)$

**Zad. 8.** Pewna firma sprzedaje miesięcznie towar średnio za 30 tys. zł. z odchyleniem standardowym 3 tys. zł. Miesięczne koszty wynoszą średnio 20 tys. zł. z odchyleniem standardowym 4 tys. zł. Współczynnik korelacji miedzy przychodem uzyskanym ze sprzedaży, a poniesionymi kosztami oszacowano na 0.75. Obliczyć wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe miesięcznego zysku tej firmy.

**Rozw**.

- $E(X) = 30000$ (zł.), $\sigma_X = 3000$ (zł.), $X -$ miesięczna wartość sprzedaży
- $E(Y) = 20000$ (zł.), $\sigma_Y = 4000$ (zł.), $Y -$ miesięczna wartość kosztów
- $\rho = 0{,}75$
- $W = X - Y -$ miesięczny zysk
- $E(W) = ?,\ \sigma_W = ?$

$$E(W) = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 30000 - 20000 = 10000,$$

$$Var(W) = Var(X - Y) = Var(X) + 2Cov(X, -Y) + Var(-Y) =$$
$$= 3000^2 + 2(-1) \cdot 0{,}75 \cdot 3000 \cdot 4000 + (-1)^2 4000^2 =$$
$$= 1000^2(9 - 1{,}5 \cdot 12 + 16) = 1000^2 \cdot 7$$

$$\sigma_W = \sqrt{7} \cdot 1000$$

**Zad. 9** Niech X oznacza liczbę błędów drukarskich w książce liczącej 144 strony. Liczba błędów drukarskich na jednej stronie jest zmienną losową o rozkładzie Poissona. Średnio mamy 1 błąd na 12 stron. Podać wzór na wartość prawdopodobieństwa, ze liczba błędów jest nie mniejsza niż 20 i nie większa niż 30. Przybliżyć to prawdopodobieństwo stosując przybliżenie wynikające z Centralnego Twierdzenia Granicznego.

**Rozw**. Trzeba założyć, że liczby błędów drukarskich na 144 stronach są niezależnymi zmiennymi losowymi.

- $X_i$ − liczba błędów drukarskich na stronie i-tej, $i = 1,2,\dots,144$.
- $X_i \sim Poisson(\lambda)$.

Własność rozkładu Poissona: $X \sim Poisson(\lambda) \implies E(X) = Var(X) = \lambda$

- $X_1, X_2, \dots, X_{144}$ − niezależne zmienne losowe.

- $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{12}) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{12}) = 12E(X_1) = 12\lambda = 1$

Stąd $\lambda = \frac{1}{12}$.

$$S_{144} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{144} \sim Poisson(144\lambda) = Poisson(12)$$

- Dokładny wzór:

$$P(20 \le S_{144} \le 30) = \sum_{k=20}^{30} e^{-144\lambda} \frac{(144\lambda)^k}{k!} = \sum_{k=20}^{30} e^{-12} \frac{12^k}{k!} = e^{-12} \sum_{k=20}^{30} \frac{12^k}{k!}$$

= 0,0212 (odczyt z Excela)

- ✓ Z CTG $S_{144}$ ma rozkład bliski rozkładowi normalnemu z wartością średnią $E(S_{144})$ i wariancją $Var(S_{144})$
- ✓ $E(S_{144}) = 144E(X_1) = 144\lambda = 12$
- ✓ $Var(S_{144}) = 144Var(X_1) = 144\lambda = 12$

Przybliżenie z CTG z uwzględnieniem korekty ciągłości:

- $P(20 \le S_{144} \le 30) = P(19 < S_{144} < 31) = P(19{,}5 < S_{144} < 30{,}5) =$

$$= P\left(\frac{19{,}5 - 12}{\sqrt{12}} < \frac{S_{144} - 12}{\sqrt{12}} < \frac{30{,}5 - 12}{\sqrt{12}}\right) \approx \Phi\left(\frac{18{,}5}{\sqrt{12}}\right) - \Phi\left(\frac{7{,}5}{\sqrt{12}}\right) =$$

$$= \Phi(5{,}34049) - \Phi(2{,}16506) = 0{,}0153.$$