Andrzej Sierociński

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Zmienne losowe
Wykład 3

6 Zmienne losowe jednowymiarowe

W dowolnym eksperymencie losowym mamy do czynienia z bardzo dużą liczbą możliwych wielkości, które można obserwować, mierzyć itp. Jednakże w większości przypadków, przeprowadzający eksperyment, ogranicza się do rejestracji jedynie kilku z nich, gdyż pozostałe albo są nieistotne z punktu widzenia badacza, albo nie wnoszą nic istotnego do analizy badanego eksperymentu.

Na przykład

- przy rzucie kostką do gry, często jesteśmy zainteresowani sumą oczek na dwóch kostkach, a nie poszczególnymi wynikami;
- w problemie badania jakości komponentów dostarczanych nam przez dostawcę zewnętrznego, zwykle rejestrujemy liczbę komponentów, które uległy uszkodzeniu przed ustalonym czasem T, a nie czasy poprawnej pracy poszczególnych komponentów.

W ogólności, każdemu wynikowi eksperymentu (zdarzeniu elementarnemu) możemy przypisać, wg określonej reguły, wartość lub wartości pewnych cech nas interesujących.

Taką regułę przypisania (funkcję) będziemy nazywać **zmienną losową (zm. los.)**.

Zmienne losowe mogą być jedno- lub wielowymiarowe (jedna lub wiele cech). Na razie prześledzimy zachowanie się zm. los. jednowymiarowych.

Definicja.
Zmienną losową (jednowymiarową) X określoną na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazywamy taką funkcję rzeczywistą

$$X : \Omega \longrightarrow \mathcal{R},$$

że dla każdego $x \in \mathcal{R}$ zbiór

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{F}$$

jest zdarzeniem losowym.

Zmienne losowe zwykle oznaczamy dużymi literami z końca alfabetu, jak X, Y, Z itp.. Ponadto oznaczmy przez $\mathcal{X}$ ($\mathcal{S}_X$) zbiór wartości (**nośnik**) zm. los. X ($\mathcal{X} = \mathcal{S}_X = X(\Omega)$).

Uwaga.
Bezpośrednio z definicji zm. los. wynika, że $\forall x \in \mathcal{R}$ możemy zdefiniować prawdopodobieństwo

$$P(X \leqslant x) = P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}\right).$$

Definicja.
Dystrybuantą F zmiennej losowej X nazywamy określoną na prostej $x \in \mathcal{R}$ funkcję

$$F(x) = P(X \leqslant x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}).$$

Oznacza to, że F jest funkcją prawdopodobieństwa zdarzenia losowego, że zm. los. X przyjmuje wartości mniejsze bądź równe wartości x.

Dlatego czasami mówi się, że jest funkcją rozkładu prawdopodobieństwa skumulowanego (ang. *cumulative distribution function - cdf*).

Własności dystrybuanty

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{i} \quad \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$
2. Dystrybuanta jest funkcją niemalejącą.
3. Dystrybuanta jest funkcją prawostronnie ciągłą.

Twierdzenie.
Warunki 1-3 są warunkami koniecznymi i dostatecznymi (WKD) na, aby funkcja rzeczywista F była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej.

Przykład
Rozważmy trzykrotny rzut symetryczną monetą. Niech X oznacza liczbę orłów. Znaleźć dystrybuantę F zm.los. X.

Rozwiązanie.
Zakładając niezależność poszczególnych rzutów, otrzymujemy zbiór ośmiu jednakowo prawdopodobnych zdarzeń elementarnych

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ROO, ORR, ROR, RRO, RRR\}.$$

Jest oczywistym, że nośnikiem zm.los. X jest $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3\}$, oraz

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\} = \{RRR\}, \text{ i } P(X = 0) = \frac{1}{8}.$$

Podobnie

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\} = \{ORR, ROR, RRO\}, \text{ i } P(X = 1) = \frac{3}{8},$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 2\} = \{OOR, ORO, ROO\}, \text{ i } P(X = 2) = \frac{3}{8},$$

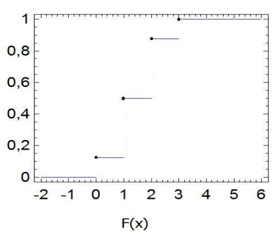
oraz

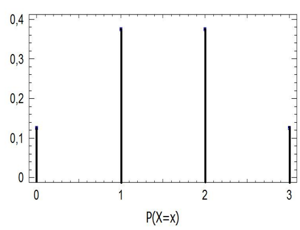
$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 3\} = \{OOO\}, \text{ i } P(X = 3) = \frac{1}{8}.$$

Zatem dystrybuanta F ma postać:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{dla} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{dla} \quad 1 \leqslant x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{dla} \quad 2 \leqslant x < 3 \\ 1 & \text{dla} \quad 3 \leqslant x \end{cases}$$

Ponadto, możemy znaleźć wykresy dystrybuanty $F(x)$ oraz funkcji $p(x) = P(X = x)$ dla $x \in \mathcal{X}$.





Twierdzenie.
Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b, $(a \leqslant b)$,

$$P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a).$$

Dowód. Ponieważ $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant a\} \subset \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant b\}$, to

$$\begin{aligned} P(a < X \leqslant b) &= P(\{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leqslant b\}) = \\ &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant b\} - \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant a\}) = \\ &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant b\}) - P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant a\}) = \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

■

Dany jest dowolny ciąg $\epsilon_n > 0$, gdzie $n \in \mathcal{N}$ oraz $\epsilon_n \searrow 0$. Wówczas dla dowolnego $a \in R$

$$P(a - \epsilon_n < X \leqslant a) = F(a) - F(a - \epsilon_n) \longrightarrow_{n\to\infty} F(a) - F(a^-),$$

jednocześnie mamy, że

$$\{\omega \in \Omega : a - \epsilon_n < X(\omega) \leqslant a\} \longrightarrow_{n\to\infty} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\}.$$

Zatem

$$\forall a \in R \quad P(X = a) = F(a) - F(a^-).$$

$F(a^-)$ oznacza lewostronną granicę dystrybuanty F w a.

Uwaga.

$$P(X = a) = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dystrybuanta F jest ciągła w a.

Uwaga.
Dla dowolnych a i b, $(a \leqslant b)$,

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a^-).$$

$$P(a \leqslant X < b) = F(b^-) - F(a^-).$$

7 Typy zmiennych losowych

7.1 Zmienne losowe typu dyskretnego

Definicja.
Zmienną losową, dla której nośnik $\mathcal{X}$ jest zbiorem przeliczalnym (skończonym lub nie) nazywamy zmienną losową **typu dyskretnego**.

Innymi słowy dla zm. los. typu dyskretnego X *nośnik ma postać* $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$. *Wówczas, przyjmujemy, że dla każdego* $x_i \in \mathcal{X}$, $P(X = x_i) > 0$ *oraz* $P(X = x) = 0$ *jeżeli* $x \notin \mathcal{X}$.

Definicja. Dla dowolnego $a \in R$ funkcję

$$p(a) = P(X = a)$$

nazywamy **funkcją prawdopodobieństwa** zm. los. typu dyskretnego.

Z przykładu zm. los. X będącej liczbą orłów przy trzykrotnym rzucie symetryczną monetą nośnikiem jest zbiór $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3\}$, a funkcja prawdopodobieństwa jest równa $p(0) = p(3) = 1/8$, $p(1) = p(2) = 3/8$.

Własności funkcji prawdopodobieństwa
Dla dowolnej zm. los. X typu dyskretnego o nośniku $\mathcal{X}$, mamy

1. $p(x) \geqslant 0, \quad \text{dla} \quad \text{dowolnego } x \in R.$
2. $\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = 1.$

Twierdzenie. Warunki 1-2 są warunkami koniecznymi i wystarczającymi na to, aby funkcja $p(\cdot)$ była funkcją prawdopodobieństwa pewnej zmiennej losowej typu dyskretnego.

Dystrybuanta F zmiennej losowej typu dyskretnego X może być wyznaczona z funkcji prawdopodobieństwa $p(\cdot)$.

Postać dystrybuanty zmiennej losowej typu dyskretnego
Dla dowolnej zm. los. typu dyskretnego X o nośniku $\mathcal{X}$, mamy

$$F(x) = \sum_{\{x_i \in \mathcal{X} : x_i \leqslant x\}} p(x_i).$$

Załóżmy, że wartości zm. los. X są uporządkowane $x_1 < x_2 < \ldots$. Wówczas dystrybuanta F jest funkcją schodkową (skokową), tzn. wartość F jest stała na każdym z przedziałów $[x_{i-1}, x_i)$ a wartość jej skoku jest równa $p(x_i)$ w punkcie x_i.

Przykład.
Funkcja prawdopodobieństwa zm. los. X podana jest w tabelce poniżej

x	*1*	*2*	*3*	*4*
$p(x)$	*0.4*	*0.3*	*0.2*	*0.1*

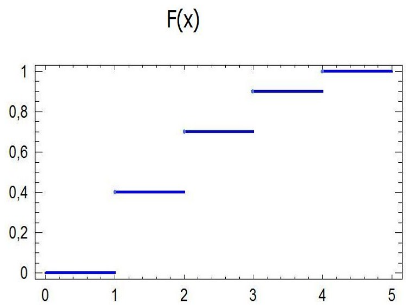
Znaleźć dystrybuantę F oraz naszkicować jej wykres.

Rozwiązanie.
Wyznaczmy najpierw wartości F dla punktów nośnika $x \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned}
F(1) &= P(X \leqslant 1) = p(1) = 0.4; \\
F(2) &= P(X \leqslant 2) = p(1) + p(2) = 0.4 + 0.3 = 0.7; \\
F(3) &= P(X \leqslant 3) = p(1) + p(2) + p(3) = 0.4 + 0.3 + 0.2 = 0.9; \\
F(4) &= P(X \leqslant 4) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = \\
&= 0.4 + 0.3 + 0.2 + 0.1 = 1
\end{aligned}$$

Wówczas dystrybuanta F jest równa

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 1 \\ 0.4 & \text{dla} \quad 1 \leqslant x < 2 \\ 0.7 & \text{dla} \quad 2 \leqslant x < 3 \\ 0.9 & \text{dla} \quad 3 \leqslant x < 4 \\ 1 & \text{dla} \quad 4 \leqslant x \end{cases}$$



Definicja.
Mówimy, że zm. los. X ma **dyskretny rozkład jednostajny na skończonym zbiorze** $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $n \in \mathcal{N}$, oznaczmy to $X \sim UD(\mathcal{X})$, jeżeli $\mathcal{X}$ jest nośnikiem X oraz dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, n$, mamy

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}.$$

7.2 Zmienne losowe typu ciągłego

Często wielkość (zmienna) losowa, którą badamy, ma nośnik nieprzeliczalny, np. przedział.

Definicja. Mówimy, że zmienna losowa X jest **typu ciągłego**, jeżeli istnieje taka nieujemna funkcja rzeczywista $f(x)$, zdefiniowana na całej prostej $x \in \mathcal{R}$, że dla dowolnego $B \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ ($\mathcal{B}(\mathcal{R})$ jest σ-ciałem zbiorów borelowskich na $\mathcal{R}$), mamy

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx.$$

Funkcję $f(x)$ nazywamy **funkcją gęstości prawdopodobieństwa** lub krócej **gęstością prawdopodobieństwa** zm. los. X.

Dla zm. los. X typu ciągłego dystrybuantę F można przedstawić za pomocą funkcji gęstości f, mianowicie

Postać dystrybuanty zm.los X typu ciągłego
Dla dowolnej zm. los. X typu ciągłego o gęstości f, mamy

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Przy założeniu, że gęstość f zm. los. X jest ciągła w punkcie x, to różniczkując obie strony poprzedniej równości, otrzymujemy

Zależność gęstości od dystrybuanty

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x), \quad \text{dla każdego punktu ciągłości gęstości } x.$$

Ponadto,

Uwaga.
Dla dowolnych $a, b \in R$, $a \leqslant b$

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a).$$

Jeżeli położymy $a = b$, to otrzymamy
Uwaga.
Dla dowolnego $a \in R$

$$P(X = a) = 0.$$

Innymi słowy, ***prawdopodobieństwo, że zmienna losowa typu ciągłego przyjmuje konkretną wartość, jest równe 0****.*

Własności funkcji gęstości
Dla dowolnej zm.los. X typu ciągłego o gęstości f

1. $f(x) \geqslant 0, \quad$ dla wszystkich $x \in \mathcal{R}$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Twierdzenie.
Warunki 1-2 są warunkami koniecznymi i dostatecznymi na to, aby funkcja $f(\cdot)$ była gęstością prawdopodobieństwa pewnej zmiennej losowej.

Przykład. *Załóżmy, że zm. los. X jest zm. los. typu ciągłego*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \vee x > 1 \\ c \cdot x^3 & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

1. *Wyznacz wartość c.*
2. *Oblicz $P(X > 0.5)$.*
3. *Wyznacz dystrybuantę F oraz narysuj jej wykres.*

Rozwiązanie.

Najpierw wyznaczmy c. Ponieważ

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

to

$$\int_0^1 c \cdot x^3 dx = \left[\frac{c}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{c}{4} = 1,$$

i $\quad c = 4$.

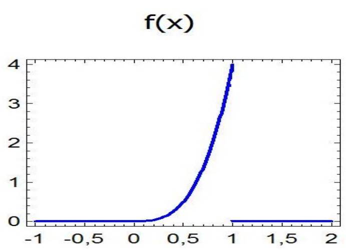
$$\begin{aligned} P(X > 0.5) &= \int_{0,5}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0.5}^{1} 4 \cdot x^3 dx = \\ &= \left[x^4\right]_{0.5}^{1} = 1 - 0.0625 = 0.9375. \end{aligned}$$

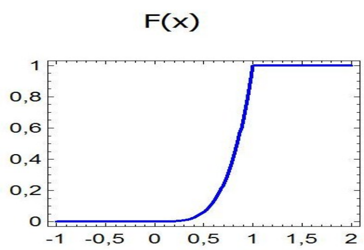
Nośnikiem $\mathcal{X}$ zm.los. X jest przedział $[0, 1]$, zatem $F(x) = 0$ dla $x < 0$ oraz $F(x) = 1$ dla $x \geqslant 1$. Niech $0 \leqslant x < 1$, wówczas

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x 4 \cdot t^3 dt = \left[t^4\right]_0^x = x^4.$$

Stąd

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x < 0 \\ x^4 & \text{for} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{for} \quad 1 \leqslant x. \end{cases}$$





Prawdopodobieństwo zdarzenia $P(X > 0.5)$ wyznaczamy używając dystrybuanty F. Mianowicie,

$$P(X > 0.5) = 1 - F(0.5) = 1 - 0.5^4 = 1 - 0.0625 = 0.9375.$$

7.3 Zmienne losowe typu mieszanego

Definicja.
Zmienną losową X nazywamy zmienną losową **typu mieszanego** jeżeli jej dystrybuanta jest funkcją nieciągłą w co najmniej jednym punkcie i jednocześnie ciągłą i ściśle rosnącą w co najmniej jednym przedziale wartości x.

Twierdzenie.
Dla zm.los. X typu mieszanego, jej dystrybuanta F spełnia następujący warunek: istnieje takie $p \in (0, 1)$, że

$$F(x) = p \cdot F_d(x) + (1 - p) \cdot F_c(x), \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathcal{R},$$

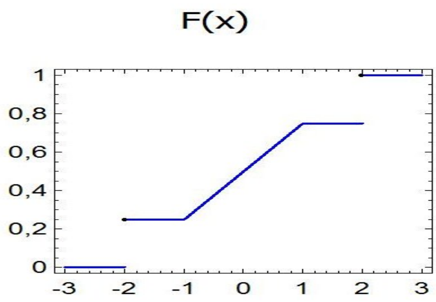
gdzie F_d jest dystrybuantą typu dyskretnego oraz F_c dystrybuantą typu ciągłego.

Przykład. *Niech X będzie zmienną losową o dystrybuancie*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < -2 \\ \frac{1}{4} & \text{dla} \quad -2 \leqslant x < -1 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(x+1) & \text{dla} \quad -1 \leqslant x < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{dla} \quad 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{dla} \quad 2 \leqslant x \end{cases}$$

Rozłożyć dystrybuantę F na część dyskretną i część ciągłą.

Rozwiązanie.
Z wykresu poniżej widzimy, że X jest zm. los. typu mieszanego.



Ponieważ dystrybuanta F ma tylko dwa skoki: dla $x = -2$ oraz $x = 2$, to część dyskretna ma nośnik na zbiorze $\mathcal{X}_d = \{-2, 2\}$.

Ponadto $F'(x) \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-1, 1)$, co dowodzi, że nośnikiem części ciągłej jest $\mathcal{X}_c = (-1, 1)$. Zauważmy, że $P(X = -2) = P(X = 2) = 1/4$. Wynika stąd, że część dyskretna ma rozkład jednostajny $X_d \sim UD(\mathcal{X}_d)$

$$F_d(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < -2 \\ \frac{1}{2} & \text{dla} \quad -2 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{dla} \quad 2 \leqslant x \end{cases}$$

a część ciągła jest równa

$$F_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < -1 \\ \frac{1}{2} \cdot (x+1) & \text{dla} \quad -1 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{dla} \quad 1 \leqslant x. \end{cases}$$

Ostatecznie otrzymujemy, że $p = 1/2$ i

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot F_d(x) + \frac{1}{2} \cdot F_c(x).$$