Statystyczna analiza danych SAD-2020/2021

Wykład 9

Testowanie hipotez statystycznych

Hipoteza statystyczna jest to przypuszczenie dotyczące nieznanej własności rozkładu prawdopodobieństwa badanej cechy populacji.

Testowanie hipotez statystycznych

Przykłady

(a) Producent opon twierdzi, że nowy typ opony ma trwałość większą niż 60000 km. Jeśli μ (km) oznacza wartość średnią trwałości opon, to hipotezą producenta jest $\boxed{H : \mu > 60000}$.

(b) Producent twierdzi, że średni czas bezawaryjnej pracy drukarki to więcej niż 200 godzin. Wówczas: $\boxed{H : \mu > 200}$

(c) Socjolog twierdzi, że dzieci w miastach mają lepsze wyniki w nauce niż dzieci poza ośrodkami miejskimi. Niech p_1 (p_2) oznacza proporcję dzieci w miastach (poza miastami) o średnich ocenach rocznych co najmniej dobrych. Hipotezą socjologa jest $\boxed{H : p_1 > p_2}$.

(d) Fizycy przypuszczają, że ilość cząstek emitowanych przez substancję radioaktywną w przedziałach czasu o danej długości jest zmienną losową o rozkładzie Poissona. Wówczas: $\boxed{H : X \sim P(\lambda), \lambda > 0.}$

Testowanie hipotez statystycznych

Hipotezę nazywamy **parametryczną**, jeśli jest stwierdzeniem dotyczącym nieznanego parametru liczbowego lub wektorowego rozkładu cechy populacji, np. hipotezy (a), (b), (c).

W przeciwnym przypadku hipoteza jest **nieparametryczna,** np. hipoteza (d).

W zadaniach testowania hipotez formułowane są 2 hipotezy:

Hipoteza zerowa to hipoteza testowana w celu jej ewentualnego odrzucenia, oznaczana przez $\boxed{H_0}$.

Hipoteza alternatywna to hipoteza, która będzie przyjęta, jeśli odrzucimy hipotezę zerową, oznaczana przez $\boxed{H_1}$.

Testowanie hipotez statystycznych

Hipotezy H_0 i H_1 muszą się nawzajem wykluczać (nie mogą być jednocześnie prawdziwe), np. niech $p \in (0,1)$ oznacza prawdopodobieństwo sukcesu w doświadczeniu Bernoulli'ego. Możliwe są hipotezy:

$$\boxed{H_0 : p = \frac{1}{2}, \quad H_1 : p \neq \frac{1}{2}},$$

lub

$$\boxed{H_0 : p = \frac{1}{2}, \quad H_1 : p > \frac{1}{2}},$$

ale niemożliwe

$$\boxed{H_0 : p = \frac{1}{2}, \quad H_1 : p > \frac{1}{3}},$$

ponieważ wartość $p = \frac{1}{2}$ jest parametrem z zakresu H_0 i H_1 jednocześnie. Zbiory parametrów wymieniane w obu hipotezach nie są więc rozłączne.

Testowanie hipotez statystycznych

Rola hipotez H_0 i H_1 nie jest symetryczna:

- Hipoteza alternatywna H_1 to ta, którą zaakceptujemy, jeśli próbka dostarczy nam dostatecznych dowodów jej prawdziwości, ta o której sądzimy, że jest prawdziwa i szukamy potwierdzenia w próbce (ta na której nam zależy aby była prawdziwa).

- Hipoteza zerowa H_0 to ta, o której prawdziwości nie jesteśmy przekonani w sytuacji gdy nie możemy zaakceptować na podstawie próbki hipotezy alternatywnej (ta którą poddajemy w wątpliwość).

Testowanie hipotez statystycznych

Przykład. Załóżmy, że skuteczność pewnej terapii medycznej wynosi 80%. Zaproponowano nową terapię, której oczekiwana skuteczność $p \times 100\%$ powinna być lepsza (tzn. oczekujemy, że $p \geq 0{,}8$).
Nowa terapia będzie szeroko stosowana, jeśli po badaniach wstępnych uzyskamy „pewność”, że $p > 0{,}8$. Zatem:

$$H_0\colon\ p = 0{,}8 \qquad\qquad H_1\colon\ p > 0{,}8$$

Testowanie hipotez statystycznych

Przykład. Nowa technologia produkcji może zmniejszyć dobowy poziom emisji zanieczyszczeń do atmosfery. Chcielibyśmy wiedzieć, czy zmniejsza ona poziom zanieczyszczeń? Wówczas:

H_0: Nowa technologia nie zmniejsza dobowego poziomu emisji zanieczyszczeń atmosfery (nie jest lepsza od starej).

H_1: Nowa technologia zmniejsza dobowy poziom emisji zanieczyszczeń atmosfery (tzn. jest lepsza).

Możliwe decyzje weryfikacyjne:

- Nie ma dostatecznych dowodów aby odrzucić H_0, (i tym samym. przyjąć H_1), tzn. na podstawie obserwacji nie możemy stwierdzić, że nowa technologia zmniejsza poziom zanieczyszczeń.
- Obserwacje dostarczają dostatecznych dowodów, aby przyjąć H_1, równoważnie odrzucić H_0, tzn. stwierdzamy, iż można uznać, że nowa technologia zmniejsza poziom zanieczyszczeń.

Testowanie hipotez statystycznych

Model matematyczny

(a) μ_0 - znany średni poziom dobowy emisji przy starej technologii

(b) μ - nieznany średni poziom dobowy emisji przy nowej technologii

(c) wiemy, że $\mu \leq \mu_0$. Chcielibyśmy stwierdzić, że nowa technologia zmniejsza poziom emisji. Zatem:

$$H_0\colon \mu = \mu_0 , \qquad\qquad H_1\colon \mu < \mu_0.$$

(d) w ciągu *n* losowo wybranych dni obserwujemy dobowe poziomy emisji przy nowej technologii: $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

(e) zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są <u>niezależne o jednakowym rozkładzie</u> $N(\mu, \sigma)$, gdzie σ jest znane.

Testowanie hipotez statystycznych

Decyzje: „**przyjąć** $\boldsymbol{H_1}$", lub „**nie można odrzucić** $\boldsymbol{H_0}$" oprzemy na podstawie realizacji **średniej z próby losowej** $\bar{X}$, tzn. **średniej z próbki** $\bar{x}$.

Uzasadnienie

Średnia z próby losowej $\bar{X}$ ma rozkład $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ skoncentrowany wokół μ. Zatem dostatecznie małe wartości $\bar{X}$ sugerują, że hipoteza $H_1: \mu < \mu_0$ jest prawdziwa, ponieważ:

(1) jeśli $H_0: \mu = \mu_0$ jest prawdziwa, to wartości $\bar{X}$ skupiają się wokół μ_0, a statystyka

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \approx N(0,1)$$

(2) jeśli $H_1: \mu < \mu_0$ jest **prawdziwa**, tzn. nieznane $\mu = \mu_1 < \mu_0$, to wartości $\bar{X}$ skupiają się wokół μ_1. Wówczas Z jest sumą zmiennej o rozkładzie $N(0,1)$ oraz stałej ujemnej

$$\boxed{Z = \frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}}$$

Testowanie hipotez statystycznych

Punkty (1) i (2) sugerują **sposób testowania.**

Niech c będzie odpowiednio dobraną stałą, a $\bar{x}$ wartością statystyki $\bar{X}$ obliczoną dla konkretnej próbki, wówczas

(i) jeśli $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \le c$, to przyjmujemy H_1:**.**

(ii) jeśli $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > c$, to nie ma podstaw do odrzucenia H_0**.**

Wybór stałej c

Niech α będzie małą liczbą z przedziału (0,1), np. α = 0,01, 0,05,

zaś $c = z_\alpha = -z_{1-\alpha}$.

Wówczas jeśli $H_0 : \mu = \mu_0$ prawdziwa, to $P_{H_0}(Z \le z_\alpha) = \alpha$.

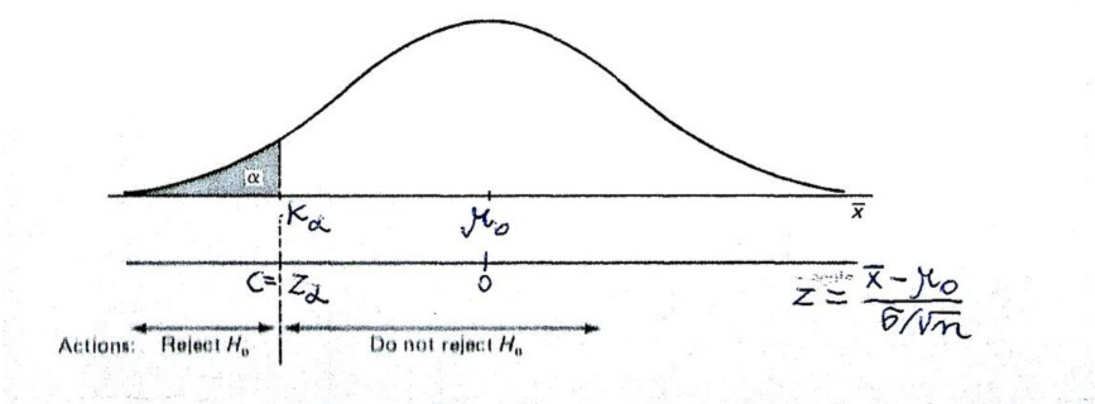
Stąd α jest prawdopodobieństwem podjęcia błędnej decyzji (polegającej na przyjęciu hipotezy H_1) w przypadku gdy hipoteza H_0 jest prawdziwa.

Testowanie hipotez statystycznych

$$H_0\colon \mu = \mu_0 \quad \text{przeciw} \quad H_1\colon \mu < \mu_0$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \qquad \bar{x} \to \mu, \ \text{gdy} \ n \to \infty$$

$$\alpha = P_{H_0}(\bar{X} \le k_\alpha) = P_{H_0}(Z \le z_\alpha)$$



$$z \le z_\alpha \implies \text{odrzuć } H_0 \qquad\qquad z > z_\alpha \implies \text{nie odrzucaj } H_0$$

Testowanie hipotez statystycznych

Prawdopodobieństwo α podjęcia błędnej decyzji (polegającej na przyjęciu hipotezy H_1, w przypadku gdy hipoteza H_0 jest prawdziwa) nazywamy **prawdopodobieństwem błędu I rodzaju,** lub **poziomem istotności testu.**

Zbiór $C = \{z : z \leq z_\alpha\}$ nazywamy **zbiorem krytycznym -** jest to zbiór wartości statystyki testowej Z dla których **odrzucamy** H_0 na korzyść H_1.

Testowanie hipotez statystycznych

Błędy testowania,
(przy symetrycznym traktowaniu hipotez)

		Podjęta decyzja	
		Akceptacja H_0	Odrzucenie H_0 (Akceptacja H_1)
Stan rzeczywisty	H_0 prawdziwa	Decyzja prawidłowa	Błąd I rodzaju
	H_1 prawdziwa	Błąd II rodzaju	Decyzja prawidłowa

Testowanie hipotez statystycznych

Błędy testowania,
(przy **„niesymetrycznym”** traktowaniu hipotez)

		Podjęta decyzja	
		Nie odrzucamy H_0 (H_0?)	Odrzucenie H_0 (Akceptacja H_1)
Stan rzeczywisty	H_0 prawdziwa	(?)	Błąd I rodzaju
	H_1 prawdziwa	(?) Błąd II rodzaju	Decyzja prawidłowa

Model 1. Testowanie hipotez o wartości średniej rozkładu normalnego, gdy znana jest wariancja.

Założenie: Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tworzą prostą próbę losową z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$, $\sigma -$ znane.

$$H_0\colon\ \mu = \mu_0$$

Statystyka testowa:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Jeśli H_0 prawdziwa, to

$$Z \sim N(0,1)$$

Testy istotności dla wartości średniej

Sytuacja 1. H_0: $\mu = \mu_0$ przeciw H_1: $\mu > \mu_0$. (prawostronna hip.alt.)

Wówczas przyjmujemy $\boxed{C = \{z : z \geq z_{1-\alpha}\}}$ = zbiór krytyczny testu hipotezy H_0 przeciw H_1 na poziomie istotności α, gdzie

$$P_{H_0}(Z \in C) = P_{H_0}(Z \geq z_{1-\alpha}) = \alpha.$$

Sytuacja 2. H_0: $\mu = \mu_0$ przeciw H_1: $\mu < \mu_0$. (lewostronna hip.alt.)

Wówczas przyjmujemy $\boxed{\{z : z \leq -z_{1-\alpha}\}}$ - zbiór krytyczny, gdzie

$$P_{H_0}(Z \in C) = P_{H_0}(Z \leq -z_{1-\alpha}) = \alpha.$$

Sytuacja 3. H_0: $\mu = \mu_0$ przeciw H_1: $\mu \neq \mu_0$.(obustronna hip. alt.)

Wówczas przyjmujemy $\boxed{C = \{z : |z| \geq z_{1-\alpha/2}\}}$ - zbiór krytyczny, gdzie

$$P_{H_0}(Z \leq -z_{1-\alpha/2}) = \alpha / 2$$

$$P_{H_0}(Z \in C) = P_{H_0}(|Z| \geq z_{1-\alpha/2}) = \alpha.$$

Testy istotności dla wartości średniej

Rozkład cechy $N(\mu,\sigma)$, σ – znane, $H_0: \mu = \mu_0$		
H_1	Zbiór krytyczny: C	Decyzja: Odrzuć H_0
Prawostronna: $\mu > \mu_0$	$[z_{1-\alpha}, \infty)$	$z \in C \equiv$ $z \geq z_{1-\alpha}$
Lewostronna: $\mu < \mu_0$	$(-\infty, -z_{1-\alpha}]$	$z \in C \equiv$ $z \leq -z_{1-\alpha}$
Obustronna: $\mu \neq \mu_0$	$\left(-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \cup [z_{1-\alpha/2}, \infty)$	$z \in C \equiv$ $z \geq z_{1-\alpha/2}$ lub $z \leq -z_{1-\alpha/2}$

Testy istotności dla wartości średniej

Przykład. Dotychczasowa dzienna wartość sprzedaży pewnego artykułu miała rozkład normalny o średniej 1000 ($) i standardowym odchyleniu 100 ($). Po serii reklam telewizyjnych, w ciągu 9 losowo wybranych dni uzyskano następujące wartości sprzedaży:

1280, 1250, 990, 1100, 880, 1300, 1100, 950, 1050.

Czy, na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$, można twierdzić, że reklamy spowodowały zwiększenie sprzedaży, jeśli można założyć, że wartości dziennych sprzedaży są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie normalnym?

Testy istotności dla wartości średniej

Rozwiązanie:

1. H_0: μ = 1000 przeciw H_1: $\mu > 1000$

2. Statystyka testowa: $Z = \dfrac{\bar{X} - 1000}{\sigma / \sqrt{n}}$

3. $\alpha = 0{,}01$, $1 - \alpha = 0{,}99$, $z_{0,99} = 2{,}33$.

Zbiór krytyczny $C = \{ z\colon z \geq 2{,}33\}$

4. $\sigma = 100$, $n = 9$, średnia próbkowa $\bar{x} = 1100$, stąd wartość statystyki testowej

$$z = \frac{\bar{x} - 1000}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{1100 - 1000}{100/3} = 3.$$

5. Ponieważ $3 \geq 2{,}33$ ($z = 3 \in C$) odrzucamy H_0) .

Odpowiedź: Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ stwierdzamy, że średnia wartość sprzedaży wzrosła po serii reklam.

Testy istotności dla wartości średniej

Model 2. Testowanie hipotez o wartości średniej rozkładu normalnego, gdy nieznana jest wariancja.

Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będzie prostą próbą losowa z rozkładu $N(\mu, \sigma)$, σ - nieznane.

$$H_0: \mu = \mu_0$$

Statystyka testowa:

$$\boxed{T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} + \frac{\mu - \mu_0}{S/\sqrt{n}}.$$

Jeśli H_0 **prawdziwa,** to $T \sim t_{n-1}$ = rozkład t Studenta o n – 1 stopniach swobody

Testy istotności dla wartości średniej

Sytuacja 1. $\boldsymbol{H_0}$**:** $\mu = \mu_0$ **przeciw** $\boldsymbol{H_1}$**:** $\mu > \mu_0$.

Wówczas przyjmujemy ***C*** = $\{t : t \geq t_{1-\alpha,n-1}\}$ = **zbiór krytyczny** testu hipotezy H_0 przeciw H_1 **na poziomie istotności** α, gdzie

$$P_{H_0}(T \in C) = P_{H_0}(T \geq t_{1-\alpha,n-1}) = \alpha,$$

$t_{1-\alpha,n-1}$ = kwantyl rzędu **1 -** α rozkładu t Studenta z *n* - 1 stopniami swobody.

Sytuacja 2. $\boldsymbol{H_0}$**:** $\mu = \mu_0$ **przeciw** $\boldsymbol{H_1}$**:** $\mu < \mu_0$.

Wówczas przyjmujemy ***C*** = $\{t : t \leq -t_{1-\alpha,n-1}\}$ - **zbiór krytyczny**, gdzie

$$P_{H_0}(T \in C) = P_{H_0}(T \leq -t_{1-\alpha,n-1}) = \alpha.$$

Testy istotności dla wartości średniej

Sytuacja 3. H_0: $\mu = \mu_0$ **przeciw** H_1: $\mu \neq \mu_0$.

Wówczas $C = \{t : |t| \geq t_{1-\alpha/2,n-1}\}$ - **zbiór krytyczny**, gdzie

$$P_{H_0}(T \leq -t_{1-\alpha/2,n-1}) = \alpha/2, \quad \text{skąd} \quad P_{H_0}(|T| \geq t_{1-\alpha/2,n-1}) = \alpha.$$

Zadanie. Producent twierdzi, że nowy model samochodu ma wartość średnią przebiegu nie wymagającą żadnej interwencji 120000 (km). W teście dla 4 losowo wybranych samochodów uzyskano następujące przebiegi nie wymagające żadnego serwisu: 110000, 120000, 118000, 11200o. Czy można twierdzić, że producent zawyża wartość średniego przebiegu nowego modelu? Przyjmij α = **0,05** oraz rozkład normalny przebiegu.

Testy istotności dla wartości średniej

Rozkład cechy $N(\mu, \sigma)$, σ – nieznane, $H_0\colon \mu = \mu_0$		
H_1	Zbiór krytyczny: C	Decyzja: Odrzuć H_0
Prawostronna: $\mu > \mu_0$	$[t_{1-\alpha,n-1}, \infty)$	$t \in C \equiv$ $t \geq t_{1-\alpha,n-1}$
Lewostronna: $\mu < \mu_0$	$(-\infty, -t_{1-\alpha,n-1}]$	$t \in C \equiv$ $t \leq -t_{1-\alpha,n-1}$
Obustronna: $\mu \neq \mu_0$	$\left(-\infty, -t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right] \cup \left[t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}, \infty\right)$	$t \in C \equiv$ $t \geq t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ lub $t \leq -t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$

Test istotności dla wartości średniej

1. **H_0: μ = 120000 przeciw H_1: μ < 120000**

2. **Statystyka testowa:**

$$\boxed{T = \frac{\overline{X} - 120000}{S / \sqrt{n}}}$$ ma rozkład t-Studenta o n-1 st. Swobody

3. α **= 0,05, 1 – α = 0,95, liczba stopni swobody** = $n - 1$ **= 4 –1 = 3**,

$\boxed{t_{0,95,3}}$ = 2,353. Stąd **zbiór krytyczny C** = { t: $t \leq -$ 2,353}.

Test istotności dla wartości średniej

4. $n = 4$, z obliczeń $\bar{x} = 115000$, $s^2 = \dfrac{680000}{4-1} = 226667$, stąd wartość statystyki testowej

$$t = \frac{\bar{x} - 120000}{s/\sqrt{n}} = \frac{115000 - 120000}{\sqrt{226667}/\sqrt{4}} = -2{,}10.$$

5. –2,10 > – 2,353, więc nie ma podstaw do odrzucenia $\boldsymbol{H_0}$ na poziomie istotności 0,05.

Odpowiedź: Na poziomie istotności α **= 0,05** stwierdzamy, że nie można odrzucić twierdzenia producenta

p – wartość (p-value)

Definicja. Najmniejszy poziom istotności, przy którym zaobserwowana wartość statystyki testowej prowadzi do **odrzucenia hipotezy zerowej nazywamy *p* - wartością** przeprowadzonego testu.

Np. w ostatnim zadaniu

$$t = -2{,}10, \qquad P_{H_0}(T \le -t_{1-\alpha,n-1}) = \alpha$$

$$P_{H_0}(T \le -2{,}10) = 0{,}063.$$

Im mniejsza jest ***p*-wartość**, tym mocniejsze staje się przekonanie testującego o fałszywości hipotezy zerowej i prawdziwości hipotezy alternatywnej.

p-wartość

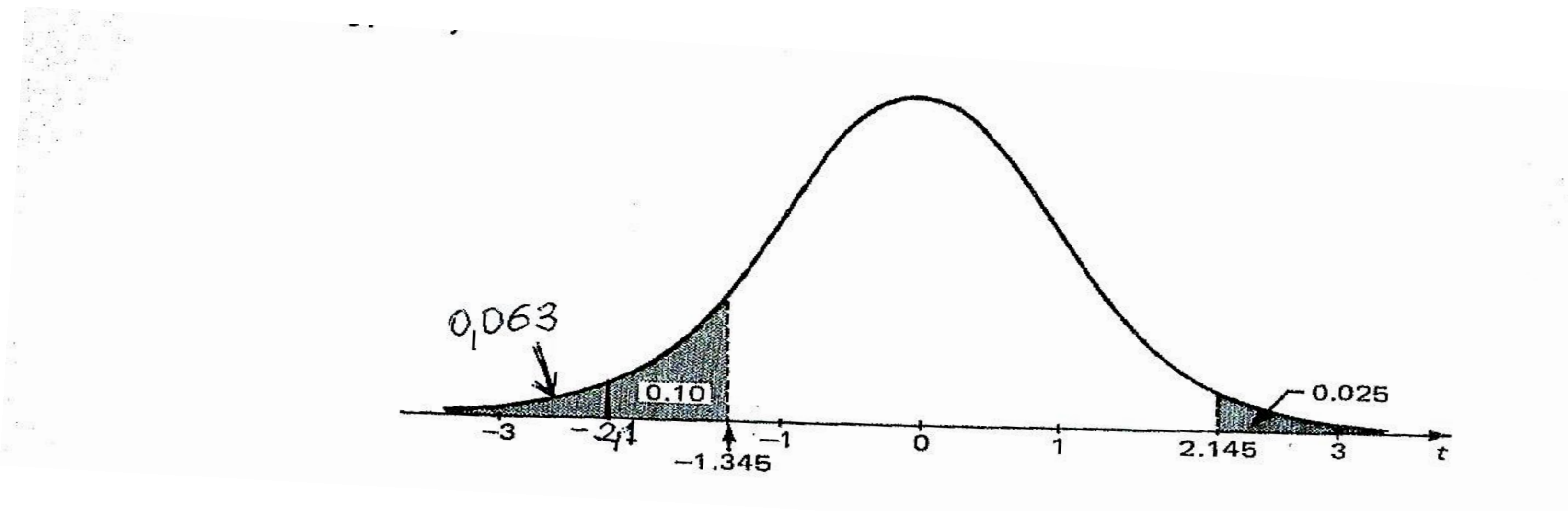
$P_{H_0}\left(T \le -t_{1-\alpha,n-1}\right) = \alpha,\qquad P_{H_0}(T \le t) := \alpha_1 = p - \text{wartość}\,?$

$$\alpha \ge \alpha_1 \Rightarrow t \le -t_{1-\alpha,n-1} \equiv t \in C \quad (1)$$

$$\alpha < \alpha_1 \Rightarrow t > -t_{1-\alpha,n-1} \equiv t \notin C \quad (2)$$

Z (1) i (2) α_1 jest $p - \text{wartością}$

na rysunku ilustracja (1), w zadaniu (2): $\alpha = 0{,}05 < 0{,}063 = p - w$.



Testy istotności dla wartości średniej

Model 3. Testowanie hipotez o wartości średniej rozkładu dowolnego, gdy liczebność próby jest duża.

Założenie: Niech zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_n$ są prostą próbą losową z dowolnego rozkładu, którego μ, σ – nieznane.

$$H_0\colon\ \mu = \mu_0$$

Statystyka testowa:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}.$$

Jeśli H_0 prawdziwa i n jest duże (co najmniej 100), to T ma rozkład bliski $N(0,1)$. Podstawiając $T = Z$, postępujemy tak jak w Modelu 1 (str. 16)

Testy istotności dla wariancji

Model 4. Testowanie hipotez o wariancji rozkładu normalnego, gdy nieznana jest wartość średnia.

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie prostą próbą losowa z rozkładu $N(\mu, \sigma)$, μ, σ - nieznane.

$$\boxed{H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2}.$$

Statystyka testowa:

$$\boxed{\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}} = \boxed{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \times \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}}$$

Jeśli $\boxed{H_0}$ **prawdziwa,** to $\chi^2 \sim \chi_{n-1}^2$.

Testy istotności dla wariancji

Sytuacja 1. $\boxed{H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2}$, $\boxed{H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2}$.

Wówczas ***C*** **=** $\{\chi^2_{obl} : \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{1-\alpha,n-1}\}$ **= zbiór krytyczny** testu

hipotezy H_0 przeciw H_1 na **poziomie istotności** α, gdzie

$$P_{H_0}(\chi^2 \in C) = P_{H_0}(\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha,n-1}) = \alpha,$$

$\chi^2_{1-\alpha,n-1}$ **= kwantyl rzędu 1 - α rozkładu** χ^2_{n-1}.

Testy istotności dla wariancji

Sytuacja 2. $\boxed{H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2}$, $\boxed{H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2}$.

Wówczas ***C*** = $\{\chi^2_{obl} : \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{\alpha,n-1}\}$ **- zbiór krytyczny**, gdzie

$$P_{H_0}(\chi^2 \in C) = P_{H_0}(\chi^2 \leq \chi^2_{\alpha,n-1}) = \alpha.$$

Testy istotności dla wariancji

Sytuacja 3. $\boxed{H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2}$, $\boxed{H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2}$.

Wówczas **zbiór krytyczny** ***C*** =

$$\{\chi^2_{obl} : \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{\alpha/2}\} \cup \{\chi^2_{obl} : \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{1-\alpha/2}\},$$

gdzie $\chi^2_{\alpha/2} = \chi^2_{\alpha/2,n-1}$, $\chi^2_{1-\alpha/2} = \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$.

Test istotności dla wariancji

Zadanie. Zmierzono czas życia 15 losowo wybranych żarówek z bieżącej produkcji. Policzono standardowe odchylenie próbkowe *s* = 13 (godz.). Czy na poziomie istotności α = 0,05 (5%) można twierdzić, że odchylenie standardowe czasu życia losowo wybranej żarówki jest różne od 10 (godz.)

Rozwiązanie.

1. $\boxed{H_0 : \sigma = 10}$ **przeciw** $\boxed{H_1 : \sigma \neq 10}$

2. Statystyka testowa: $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{10^2}$

3. $\alpha = 0{,}05$, $\alpha/2 = 0{,}025$, $1-\alpha/2 = 0{,}975$, $n = 15$, liczba stopni swobody $n-1 = 15-1 = 14$,

$$\chi^2_{\alpha/2, n-1} = \chi^2_{0{,}025,14} = 5{,}629, \quad \chi^2_{1-\alpha/2, n-1} = \chi^2_{0{,}975,14} = 26{,}119.$$

Reguła decyzyjna (na podstawie **zbioru krytycznego**): **odrzuć *H* $_0$, jeśli obliczona wartość statystyki**

$$\chi^2_{obl} \leq 5{,}629 \quad \text{lub} \quad \chi^2_{obl} \geq 26{,}119.$$

Test istotności dla wariancji

Rozwiązanie (c.d.)

4. *s* =13, stąd wartość statystyki testowej

$$\boxed{\chi^2_{obl}} = \frac{(n-1)s^2}{100} = \frac{(14)(13^2)}{100} = 23{,}66.$$

5. 5,629 < 23,66 < 26,119, więc nie ma podstaw do odrzucenia ***H*** $_{\mathbf{0}}$.

Odpowiedź. Na poziomie istotności 0,05, brak jest dostatecznych dowodów aby twierdzić, że $\sigma \neq 10$.

Test o różnicy wartości średnich rozkładów brzegowych (dane „sparowane”) Model 5

Niech $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n)$ będzie prostą próbą losową z rozkładu dwuwymiarowego. Niech $D_i = X_i - Y_i, i = 1,..,n,$ tworzą prostą próbę losową z rozkładu normalnego o nieznanej średniej μ_D.

Hipoteza zerowa: $\boxed{H_0 : \mu_D = 0}$,

Możliwe hipotezy alternatywne:

$\boxed{H_1 : \mu_D > 0}$ $\boxed{H_1 : \mu_D < 0}$ $\boxed{H_1 : \mu_D \neq 0}$.

Statystyka testowa: $\boxed{T = \frac{\overline{D}}{S_D / \sqrt{n}}}$.

Test o różnicy wartości średnich rozkładów brzegowych (dane „sparowane”)

Jeśli H_0 prawdziwa, to $T \sim t_{n-1}$.

Zatem obszary krytyczne takie same jak przy testowaniu hipotez o wartości średniej jednej populacji normalnej przy nieznanym odchyleniu standardowym.

Test o różnicy wartości średnich dla danych „sparowanych”

Przykład. Zmierzono ciśnienie tętnicze wśród losowo wybranej grupy chorych na pewną chorobę przed i po podaniu takiego samego leku każdemu z pacjentów. Otrzymano następujące wyniki:

Pacjent:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Przed :	210	180	260	270	190	250	180
Po :	180	160	220	260	200	230	180

Czy można twierdzić, na poziomie istotności 0,05, że lek powoduje zmniejszenie wartości średniej ciśnienia?(podać odpowiednie założenia).

1 . $\boxed{H_0 : \mu_1 = \mu_2} \equiv \boxed{H_0 : \mu_D = \mu_1 - \mu_2 = 0}$

$\boxed{H_1 : \mu_1 > \mu_2} \equiv \boxed{H_1 : \mu_D = \mu_1 - \mu_2 > 0}$

3. Statystyka testowa: $\boxed{T = \dfrac{\overline{D}}{S_D / \sqrt{n}}}$.

Test o różnicy wartości średnich dla danych „sparowanych"

4. ***d**_i_***:** 30, 20, 40, 10, -10, 20, 0, $\bar{d} = 15{,}7$, s_D = 15,9, *n* = 7.

$$\boxed{t = \frac{15{,}7}{15{,}9/\sqrt{7}} = 2{,}24}$$

5. $\boxed{\alpha = 0{,}05,}$ $\boxed{1-\alpha = 0.95,}$ $n-1 = 7-1 = 6,$

$$\boxed{t_{0,95,6} = 1{,}94}$$

6. 2,24 >1,94, więc odrzucamy hipotezę zerową.

Odpowiedź. Można twierdzić, że lek obniżył wartość średnią ciśnienia w populacji pacjentów, na poziomie istotności 0,05.

Test dla proporcji (wskaźnika struktury)

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie prostą próbą losową z rozkładu Bernoulli'ego o nieznanym parametrze *p*. Wówczas $\mu = E(X_1) = p$, $\sigma^2 = p(1-p)$.

Np. gdy *p* jest proporcją obiektów populacji mających pewną własność, przyjmujemy $X_i = 1$ (0) gdy wylosowany obiekt posiada (nie posiada) tę własność. Niech $\hat{p} = \overline{X} =$ częstość = proporcja elementów próby o danej własności. Z CTG dla dostatecznie dużego *n* zmienna losowa

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

ma rozkład bliski rozkładowi standardowemu normalnemu $N(0,1)$. (musi zachodzić $np \geq 5, n(1-p) \geq 5$).

Test dla proporcji

Hipoteza zerowa: $\boxed{H_0 : \; p = p_0}$

Statystyka testowa

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}} \sim \text{bliski } N(0{,}1),$$

jeśli hipoteza H_0 jest prawdziwa. Możliwe sytuacje:

- $H_1 : p > p_0, \quad C = \{z : z \geq z_{1-\alpha}\}$
- $H_1 : p < p_0, \quad C = \{z : z \leq -z_{1-\alpha}\}$
- $H_1 : p \neq p_0, \quad C = \{z : |z| \geq z_{1-\alpha/2}\}$

Test dla proporcji

Przykład. Przypuszczamy, że proporcja samochodów w Warszawie używających gazu jako paliwa jest mniejsza niż 0,15. W próbie 200 losowo samochodów 21 było samochodami na gaz. Czy te dane potwierdzają nasze przypuszczenie, przy poziomie istotności 0,05 ?

1. $H_0: \; p = 0{,}15$, $\quad H_1: p < 0{,}15$

2. Statystyka testowa

$$Z = \frac{\hat{p} - 0{,}15}{\sqrt{\frac{0{,}15 \times 0{,}85}{200}}} \sim \text{bliski } N(0{,}1),$$ jeśli hipoteza H_0 jest prawdziwa.

Test dla proporcji

3. Wartość statystyki testowej dla próbki:

$$Z = \frac{21/200 - 0{,}15}{\sqrt{\frac{0{,}15 \times 0{,}85}{200}}} = -1.79$$

4. Kwantyl $z_{0,95} = 1{,}64$

5. Zbiór krytyczny $C = \{z : z \leq -1{,}64\}$

6. $-1{,}79 \in C$, więc stwierdzamy, że proporcja samochodów na gaz jest mniejsza niż 0,15, przyjmując poziom istotności 0,05 (0,05 = prawdopodobieństwo, że nasza decyzja jest błędna)

Dziękuję za uwagę