Statystyczna analiza danych SAD-2020/2021

Wykład 11

Parametryczne testy istotności

Schemat postępowania

- $\alpha \in (0,1)$ – poziom istotności testu, mała liczba rzędu 0,01; 0,05; 0,1, ….

- Sformułowanie założeń o rozkładzie cechy w populacji (wybór modelu):

➢ Cecha X ma rozkład prawdopodobieństwa zależny od nieznanego parametru θ

➢ $X_1, X_2, \dots, X_n$ – prosta próba losowa, $X_j \sim X$

➢ $x_1, x_2, \dots, x_n$ – próbka

Parametryczne testy istotności

1. $H_0: \theta = \theta_0$ przeciwko $H_1: \theta > \theta_0$

lub: $H_1: \theta < \theta_0$ lub: $H_1: \theta \neq \theta_0$

2. Statystyka testowa $G \coloneqq G(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta_0)$ ma znany rozkład, jeśli hipoteza zerowa prawdziwa

3. Zbiór krytyczny C = podzbiór zbioru wartości statystyki testowej taki, że

$$P(G \in C | H_0 - \text{prawdziwa}) = \alpha$$

4. Obliczenie wartości statystyki testowej

$$G_{obs} = G(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_0)$$

Parametryczne testy istotności

5. Podjęcie decyzji na podstawie 4. według reguły:

- Jeśli $G_{obs} \in C$, to przyjmujemy H_1 na poziomie istotności α (α – prawdopodobieństwo błędnej decyzji)

- Jeśli $G_{obs} \notin C$, to nie mamy podstaw do odrzucenia H_0 (przyjęcia H_1) na poziomie istotności α

Uwaga: Modele parametrycznych testów istotności są na

ftp/public/elaw/Informatyka dzienne2021 w

testowanie hipotez – modele.pdf

Test zgodności chi-kwadrat

Założenia

1. Badana cecha jednostek populacji może przyjmować k różnych wartości (może należeć do k różnych klas, kategorii): c_1, c_2,…, c_k. Niech zmienna losowa X oznacza kategorię (klasę) losowo wybranej jednostki.
2. $H_0: P(X = c_1) = p_1,\ P\ (X = c_2) = p_2, \dots ,\ P(X = c_k) = p_k$.
3. Dla próby losowej cech n losowo wybranych jednostek populacji niech $N_1, N_2, \dots, N_k$ oznaczają liczności jednostek o cechach c_1, c_2,…, c_k, odpowiednio.
4. Jeśli hipoteza zerowa jest prawdziwa to oczekiwane liczności wynoszą:

$$EN_1 = np_1,\ EN_2 = np_2,\dots,\ EN_k = np_k.$$

Test zgodności chi-kwadrat

5. Odstępstwo empirycznych liczności (z próby) od oczekiwanych liczności jest mierzone za pomocą statystyki chi-kwadrat χ^2 postaci:

$$\frac{(N_1 - EN_1)^2}{EN_1} + \frac{(N_2 - EN_2)^2}{EN_2} + \cdots + \frac{(N_k - EN_k)^2}{EN_k}.$$

6. Jeśli wszystkie oczekiwane liczności są nie mniejsze niż 5, tzn $EN_j \geq 5$, $j = 1,2,..,k$, to rozkład χ^2 można przybliżyć rozkładem chi-kwadrat. Jest k kategorii więc liczba stopni swobody rozkładu chi-kwadrat wynosi wynosi $k - 1$.

Test zgodności chi-kwadrat

7. Jeśli H_0 jest prawdziwa, to odstępstwo empirycznych liczności od oczekiwanych liczności powinno być małe. Stąd wartości statystyki χ^2 też powinny być małe. Z kolei jeśli występuje duża rozbieżność pomiędzy obserwowanymi licznościami kategorii a "teoretycznymi", to wątpimy o prawdziwości H_0 w przypadku dużych wartości statystyki χ^2. Stąd zbiór krytyczny ma postać:

$$C = \left\{\chi^2 : \chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha,k-1}\right\} = [\chi^2_{1-\alpha,k-1}, \infty).$$

8. Reguła decyzyjna: Odrzucenie H_0 , jeśli obliczona wartość $\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha,k-1}$

Test zgodności chi-kwadrat

Przykład. Przypuszcza się, że proporcje ludzi z grupami krwi: A, B, AB, i 0 wynoszą, odpowiednio: 0.4, 0.2, 0.1, 0.3. Wśród 400-tu losowo wybranych osób liczby osób o powyższych grupach krwi wyniosły: 148, 96, 50, 106. Czy na poziomie istotności 5% można zaprzeczyć powyższemu przypuszczeniu?

Rozwiązanie.

$$H_0\colon p_A = 0.4,\ p_B = 0.2,\ p_{AB} = 0.1,\ p_0 = 0.3.$$

Test zgodności chi-kwadrat

Obliczenie wartości χ^2:

Grupa krwi	Liczności z próbki N	Średnie liczności EN	$(N - EN)$	$(N - EN)^2$	$(N - EN)^2/EN$
A	148	160	- 12	144	0.90
B	96	80	16	256	3.20
AB	50	40	10	196	2.50
0	106	120	-14	100	1.63
suma	400	400	0		**8.23**

Test zgodności chi-kwadrat

Liczba stopni swobody: k – 1 = 4 – 1 = 3

Poziom istotności testu α = 0,05, stąd 1 – α = 0,95

Kwantyl $\chi^2_{0.95,3}$ = 7,81.

Wartość statystyki chi-kwadrat 8,23 > 7,81, więc odrzucamy hipotezę zerową.

Test zgodności chi-kwadrat

Przykład. Załóżmy, że prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi ½.

(a) Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa liczby chłopców w rodzinie z czwórką dzieci.

(b) Wylosowano 160 rodzin z czwórką dzieci. Niech N_i będzie liczbą rodzin, które mają i chłopców, $i = 0,1,2,3,4$. Znaleźć wartość oczekiwaną liczby rodzin, w których jest i chłopców: $E(N_i)$.

(c) Dla 160 wylosowanych rodzin otrzymano następujące dane:

Liczba chłopców	0	1	2	3	4
Liczba rodzin	12	35	53	44	16

Przyjmując 5 – procentowy poziom ufności przetestować hipotezę, że prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi ½.

Test zgodności chi-kwadrat

(a) rozkład prawdopodobieństwa liczby chłopców w rodzinie z 4 dzieci.

$$X \sim Binomial(4; 0{,}5)$$

$$p_k = P(X = k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4, k = 0{,}1{,}2{,}3{,}4$$

$$p_0 = P(X = 0) = \frac{1}{16}, \quad P(X = 1) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16}$$

$$p_2 = P(X = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{2!\,2!}\frac{1}{16} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{4}\frac{1}{16} = \frac{6}{16}$$

$$p_3 = P(X = 3) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{3!\,1!}\frac{1}{16} = \frac{4}{16}$$

$$p_4 = P(X = 4) = \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

Test zgodności chi-kwadrat

(b) Wylosowano 160 rodzin z czwórką dzieci. Niech N_i będzie liczbą rodzin, które mają i chłopców, $i = 0,1,2,3,4$. Znaleźć wartość oczekiwaną liczby rodzin, w których jest i chłopców: $E(N_i)$.

$$E(N_0) = 160p_0 = 160\frac{1}{16} = 10, \qquad E(N_1) = 160p_1 = 160\frac{4}{16} = 40$$

$$E(N_2) = 160p_2 = 160\frac{6}{16} = 60, \qquad E(N_3) = 160p_3 = 160\frac{4}{16} = 40$$

$$E(N_4) = 160p_4 = 160\frac{1}{16} = 10$$

Test zgodności chi-kwadrat

(c) Dla 160 wylosowanych rodzin otrzymano następujące dane:

Liczba chłopców	0	1	2	3	4
Liczba rodzin	12	35	53	44	16

Przyjmując 5 – procentowy poziom ufności przetestować hipotezę, że prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi ½.

- $X -$ liczba chłopców w rodzinie z 4 dzieci
- $P(X = i) = p_i,\ i - 0,1,2,3,4$

1. $H_0 \colon X\ ma\ rozkład\ prawdopodobieństwa$

i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

przeciwko $H_1 \colon X\ ma\ inny\ rozkład\ prawdopodobieństwa$

Test zgodności chi-kwadrat

2. Statystyka testowa

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{4} \frac{(N_i - 160p_i)^2}{160p_i}$$

jeśli hipoteza zerowa prawdziwa, ma rozkład chi-kwadrat o $5 - 1 = 4$ stopniach swobody

3 . $\alpha = 0{,}05,\ 1 - \alpha = 0{,}95,\ \chi^2_{1-\alpha,k-1} = \chi^2_{0{,}95;4} = 9{,}488$

$C = [9{,}488; \infty)$ - zbiór krytyczny

Test zgodności chi-kwadrat

4. Wartość statystyki testowej

i	n_i	$160p_i$	$n_i - 160p_i$	$\frac{(n_i - 160p_i)^2}{160p_i}$
0	12	10	2	0,4
1	35	40	-5	25/40=0,625
2	53	60	-7	49/60=0,817
3	44	40	4	16/40=0,4
4	16	10	6	36/10=3,6
$\chi^2_{obs} = 0{,}4 + 0{,}625 + 0{,}4 + 3{,}6 = 5{,}842$				

Test zgodności chi-kwadrat

5.

$$5{,}842 < 9{,}488 \quad \equiv \quad 5{,}842 \notin [9{,}488; \infty) \Longrightarrow$$

$$nie\ ma\ podstaw\ do\ odrzucenia\ hipotezy\ zerowej$$

Odp. Na poziomie istotności 0,05, nie można przyjąć, że prawdopodobieństwo urodzenia chłopca jest różne od ½.

Test dla proporcji

Przykład. Wylosowano 160 rodzin z czwórką dzieci. Niech N_i będzie liczbą rodzin, które mają i chłopcow, $i = 0,1,2,3,4$. Otrzymane wartości N_i podaje tabela

Liczba chłopców	0	1	2	3	4
Liczba rodzin	12	35	53	44	16

Przyjmując 5 – procentowy poziom ufności przetestować hipotezę, że prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi ½.

- $n = 160 \cdot 4 = 640$ – ogólna liczba dzieci w zbadanych rodzinach
- $k = 0 + 35 + 2 \cdot 53 + 3 \cdot 44 + 4 \cdot 16 = 337$ – liczba chłopców

Test dla proporcji

$X \sim Binomial(1, p), p -$ prawdopodobieństwo, że dziecko w rodzinie jest chłopcem

- $n = 160 \cdot 4 = 640 -$ ogólna liczba dzieci w zbadanych rodzinach
- $k = 0 + 35 + 2 \cdot 53 + 3 \cdot 44 + 4 \cdot 16 = 337 -$ liczba chłopców

1. $H_0: p = \frac{1}{2}$ $\quad$ przeciw $\quad$ $H_1: p \neq \frac{1}{2}$

2. Statystyka testowa

$$Z = \frac{\hat{p} - 1/2}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \sim N(0,1), jeśli\ H_0\ prawdziwa$$

$$\hat{p} = \frac{K}{n} - proporcja\ empiryczna$$

$K -$ liczba chłopców wśród n losowo wybranych dzieci

Test dla proporcji

3. Zbiór krytyczny

$$C = \left(-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty\right) = (-\infty, -1{,}96] \cup [1{,}96; \infty)$$

$$\alpha = 0{,}05, \qquad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975, \ \ z_{0975} = 1{,}96$$

4. z danych: $n = 640, \ k = 337, więc \ \hat{p} = \frac{337}{640} = 0{,}527$

$$Z_{obs} = z = \frac{\hat{p} - 1/2}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} = \frac{0{,}527 - 0{,}5}{\sqrt{\frac{0{,}527 \cdot 0{,}473}{640}}} = -0{,}043$$

5. $-0{,}043 \notin C \implies$ poziomie istotności 0,05 nie można odrzucić hipotezy zerowej, nie można twierdzić, że prawdopodobieństwo urodzenia chłopca jest różne niż dziewczynki.

Test niezależności cech

- **Cel**: testowanie hipotezy, że dwie cechy jednostek populacji są niezależne.

- **Przykłady**:

Grupa krwi i kolor oczu
Wiek i zapatrywania polityczne
Kolor oczu i kolor włosów
Picie alkoholu i palenie papiersów
Dochód i wykształcenie
Podatki i PKB
Niezawodność systemu i producent

Test niezależności cech

Tablica kontyngencyjna

	d_1	d_2		d_j		d_r	
c_1	n_{11}	n_{12}		n_{1i}		n_{1r}	$n_{1\bullet}$
c_2	n_{21}	n_{22}		n_{2i}		n_{2r}	$n_{2\bullet}$
c_i	n_{i1}	n_{i2}		n_{ij}		n_{ir}	$n_{i\bullet}$
c_k	n_{k1}	n_{k2}		n_{kj}		n_{kr}	$n_{k\bullet}$
	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$		$n_{\bullet j}$		$n_{\bullet r}$	n

Test niezależności cech

Założenia oraz test

1. Jednostka populacji scharakteryzowana jest parą cech (atrybutów). Niech (X,Y) będzie parą atrybutów wybranej losowo jednostki populacji. Możliwe wartości X należą do k różnych klas (kategorii): c_1, c_2,…, c_k możliwe wartości cechy Y należą do r różnych klas (kategorii): d_1, d_2,…, d_r.

2. H_0 : X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi:

$$H_0\colon P(X=c_1, Y=d_1) = P(X=c_1)P(Y=d_1),\ldots,$$

$$P(X=c_k, Y=d_r) = P(X=c_k)P(Y=d_r).$$

W skrócie $H_0\colon p_{ij} = p_{i}.p_{.j},\ \ i=1,2\ldots,k; j=1,2,\ldots,r$

Test niezależności cech

Założenia oraz test (kont.)

3. Niech N_{ij} będzie liczbą elementów prostej próby losowej o liczności n(próbki) z tej populacji, dla których cechą pierwszą jest klasa *i*, a drugą klasa *j*. Niech dla próbki:
   n_{ij} = liczba elementów próbki o charakterystykach
   $$c_i, d_j, i = 1,2, \dots, k, j = 1,2 \dots, r.$$
4. Jeśli H_0 prawdziwa, to oczekiwane liczby obserwacji o charakterystykach (c_i, d_j) wynoszą:

$$np_{ij} = np_{i\cdot}p_{\cdot j}, \text{ gdzie } p_{i\cdot} = P(X = c_i),\ p_{\cdot j} = P\left(Y = d_j\right).$$

Uzasadnienie: $N_{ij} \sim Bin\left(n, p_{ij}\right) \Longrightarrow E\left(N_{ij}\right) = np_{i\cdot}p_{\cdot j},$

$$X, Y - niezależne \Longrightarrow \quad p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

Test niezależności cech

5. Odstępstwo empirycznych liczebności klas N_{ij} od oczekiwanych liczebności klas $E(N_{ij})$, przy założeniu, że hipoteza zerowa jest prawdziwa, wyraża statystyka chi-kwadrat:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r} \frac{\left(N_{ij} - \widehat{N_{ij}}\right)^2}{\widehat{N_{ij}}},$$

gdzie $\widehat{N_{ij}} = \frac{N_{i\cdot} N_{\cdot j}}{n}$ jest estymatorem $E(N_{ij})$.

Uzasadnienie: $E(N_{ij}) = np_{i\cdot} p_{\cdot j} \Longrightarrow$

$$E\widehat{(N_{ij})} = n\widehat{p_{i\cdot}} \cdot \widehat{p_{\cdot j}} = n \frac{N_{i\cdot}}{n} \frac{N_{\cdot j}}{n} = \widehat{N_{ij}}$$

$N_{i\cdot}, N_{\cdot j}$ – liczby elementów próby, dla których, odpowiednio, cecha X ma i-tą wartość, a cecha Y j-tą

Test niezależności cech

6. Jeśli wszystkie $\widehat{N}_{ij} \geq 5$, to można przyjąć, że rozkład statystyki chi-kwadrat jest bliski rozkładowi chi-kwadrat o liczbie stopni swobody $(k-1)(r-1)$.

7. Jeśli H_0 jest prawdziwa, to odstępstwo empirycznych liczności od oczekiwanych liczności powinno być małe. Stąd wartości statystyki chi-kwadrat też powinny być małe. Z kolei jeśli występuje duża rozbieżność pomiędzy obserwowanymi licznościami kategorii a "teoretycznymi", to wątpimy o prawdziwości H_0 w przypadku dużych wartości statystyki chi-kwadrat. Stąd zbiór krytyczny ma postać:

$$C = [\chi^2_{1-\alpha,(k-1)(r-1)}, \infty)$$

Test niezależności cech

8. **Reguła decyzyjna**: Odrzucenie hipotezy o niezależności cech, tzn. stwierdzenie zależności cech, na poziomie istotności α, jeśli

$$\chi^2_{obs} \geq \chi^2_{1-\alpha,(k-1)(r-1)}.$$

Jeśli zachodzi nierówność przeciwna, to nie możemy odrzucić hipotezy, że cechy X, Y są niezależne.

Test niezależności cech

Przykład. W celu zbadania, czy istnieje związek między kolorem oczu i kolorem włosów przeprowadzono badanie na losowej grupie osób i otrzymano następujące wyniki:

	niebieski kolor oczu	inny kolor oczu
włosy jasne	67	32
włosy ciemne	53	68

Zweryfikować hipotezę na poziomie istotności 0,01.

Rozw. Interesuje nas, czy istnieje związek między dwiema cechami: kolorem włosów i kolorem oczu.

Test niezależności cech

1. H_0: $kolor\ oczu\ i\ kolor\ włosów\ są\ cechami\ niezależnymi$ **przeciw**

   H_1: $kolor\ oczu\ i\ kolor\ włosów\ są\ cechami\ zależnymi$

2. Statystyka testowa

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\left(N_{ij} - \widehat{N_{ij}}\right)^2}{\widehat{N_{ij}}},\quad gdzie\ \widehat{N_{ij}} = \frac{N_{i}.N_{.j}}{n}$$

ma rozkład chi kwadrat o liczbie stopni swobody (2 – 1)(2 – 1)=1, jeśli hipoteza zerowa jest prawdziwa.

3. Zbiór krytyczny ma postać: $C = [\chi^2_{1-\alpha,1}, \infty)$

Dla $\alpha = 0{,}01,\ 1 - \alpha = 0{,}99,\ \chi^2_{0{,}99;1} = 6{,}635 \Longrightarrow$

$$C = [6{,}635; \infty)$$

Test niezależności cech

4. Wartość statystyki testowej obliczamy z

(kolor oczu) Y X (kolor włosów)	1	2	$n_{i\cdot}$
1	67	32	99
2	53	68	121
$n_{\cdot j}$	120	100	220

$$\chi^2_{obs} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\left(n_{ij} - n_{i\cdot} n_{\cdot j}/220\right)^2}{n_{i\cdot} n_{\cdot j}/220}$$

Test niezależności cech

(i,j)	n_{ij}	$n_{i}.n_{.j}$	$\left(n_{ij} - \frac{n_{i}.n_{.j}}{220}\right)^2 / (\frac{n_{i}.n_{.j}}{220})$
$(1,1)$	67	99x120	$\frac{(67-52{,}91)^2}{52{,}91} = 3{,}13$
$(1,2)$	32	99x100	$\frac{(32-45)^2}{45} = 3{,}76$
$(2,1)$	53	121x120	$\frac{(53-66)^2}{66} = 2{,}56$
$(2,2)$	68	121x100	$\frac{(68-55)^2}{55} = 3{,}07$
$\chi^2_{obs} = 3{,}13 + 3{,}76 + 2{,}56 + 3{,}07 = 12{,}52$			

Test niezależności cech

5. $12{,}52 \in [6{,}635; \infty) \implies$

Na poziomie istotności 0,01 można stwierdzić, że kolor oczu i kolor włosów są cechami zależnymi

Test niezależności cech

Przykład Na pewnej uczelni technicznej mającej 3 wydziały A,B,C przeprowadzono egzamin semestralny ze statystyki. Niech X oznacza przynależność losowo wybranego studenta do wydziału (1 = A, 2 = B, 3 = C), a wartość Y wynosi 1, jeśli student zdał egzamin, 0 w przypadku przeciwnym.

Test niezależności cech

Wyniki badania

y / *x*	1	0	
1	350	50	400
2	450	150	600
3	200	100	300
	1000	300	1300

Obliczona wartość statystyki chi-kwadrat wynosi 44,2.

Niech poziom istotności $\alpha = 0{,}01$.

Liczba stopni swobody (3-1)(2-1) = 2

Kwantyl $\chi^2_{0,99} = 9{,}210$

Zbiór krytyczny $C = [9.210, \infty)$, $44{,}2 \in C$

Decyzja: Wynik egzaminu zależy od wydziału, przy założonym poziomie istotności 0,01.

Test niezależności cech

Wyniki badania

y x - wydział	1-zdany	0-niezdany	$n_{i\cdot}$
1- A	350	50	400
2- B	450	150	600
3- C	200	100	300
$n_{\cdot j}$	1000	300	1300

$$\chi^2_{obs} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j}}{n}} = 1300 \frac{\left(350 - \frac{400 \cdot 1000}{1300}\right)^2}{400 \cdot 1000} +$$

$$+1300 \frac{\left(50 - \frac{400 \cdot 300}{1300}\right)^2}{400 \cdot 300} + 1300 \frac{\left(450 - \frac{600 \cdot 1000}{1300}\right)^2}{600 \cdot 1000} + \cdots$$

Test niezależności cech

y x - wydział	1-zdany	0-niezdany	$n_{i\cdot}$
1- A	350	50	400
2- B	450	150	600
3- C	200	100	300
$n_{\cdot j}$	1000	300	1300

$$\chi^2_{obs} = 1300\frac{\left(350-\frac{400\cdot 1000}{1300}\right)^2}{400\cdot 1000} + 1300\frac{\left(50-\frac{400\cdot 300}{1300}\right)^2}{400\cdot 300} +$$

$$+1300\frac{\left(450-\frac{600\cdot 1000}{1300}\right)^2}{600\cdot 1000} + 1300\frac{\left(150-\frac{600\cdot 300}{1300}\right)^2}{600\cdot 300} +$$

$$+1300\frac{\left(200-\frac{300\cdot 1000}{1300}\right)^2}{300\cdot 1000} + 1300\frac{\left(100-\frac{300\cdot 300}{1300}\right)^2}{300\cdot 300}$$

Test niezależności cech

Wyniki badania

y / *x*	1	0	
1	350	50	400
2	450	150	600
3	200	100	300
	1000	300	1300

Obliczona wartość statystyki chi-kwadrat wynosi 44,2.

Niech poziom istotności $\alpha = 0{,}01$.

Liczba stopni swobody (3-1)(2-1) = 2

Kwantyl $\chi^2_{0,99} = 9{,}210$

Zbiór krytyczny $C = [9.210,\infty)$, $44{,}2 \in C$

Decyzja: Wynik egzaminu zależy od wydziału, przy założonym poziomie istotności 0,01.

Dziękuję za uwagę