

Zadania na Centralne Twierdzenie Graniczne (CTG)

Zad. 1. Prawdopodobieństwo powstania usterki podczas wykonywania detalu wynosi $p = 0,1$. Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo, że wśród 100-tu detali wybranych losowo z bieżącej produkcji znajdzie się co najmniej 13 detali z usterkami. (Zastosuj przybliżenie rozkładem normalnym odpowiedniego rozkładu dwumianowego, sprawdzając uprzednio, że można je stosować).

Zad. 2. Komputer Jasia zawiesza się podczas jego ulubionej gry komputerowej średnio 36 razy na 100 gier. Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo, że podczas 25-ciu gier komputer Jasia zawiesi się mniej niż 10 razy. (Zastosuj przybliżenie rozkładem normalnym odpowiedniego rozkładu dwumianowego, sprawdzając uprzednio, że można je stosować).

Zad. 3. Liczba awarii sprzętu komputerowego supermarketu w ciągu losowo wybranego kwartału jest zmienną losową X o rozkładzie Poissona o średniej $\lambda = 36$. Jakie jest w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że w ciągu kwartału będzie co najwyżej 30 awarii?

Zad. 4. Liczba zamówień na usługi informatyczne, które otrzymuje w ciągu miesiąca pewna firma komputerowa jest zmienną losową o rozkładzie Poissona ze średnią 49. Korzystając z przybliżenia rozkładem normalnym oblicz przybliżone prawdopodobieństwo, że firma otrzyma w ciągu miesiąca

- (a) co najmniej 40 zamówień,
- (b) mniej niż 55 zamówień.

Zadanie 5. W populacji dorosłych Polaków 30% ma kłopoty ze snem. Oszacować prawdopodobieństwo, że wśród 160 losowo wybranych dorosłych Polaków nie więcej niż 50 osób ma kłopoty ze snem.

Zadanie 6. Astronom, chcąc zmierzyć odległość (w latach świetlnych) do pewnej odległej gwiazdy, dokonuje wielu pomiarów odległości. Pomiaru są niezależne o jednakowym rozkładzie o średniej d i wariancji 4. Wyznaczyć minimalną liczbę pomiarów, które musi wykonać, aby prawdopodobieństwo, że wyznaczona odległość (jako średnia z pomiarów) nie różni się od prawdziwej o więcej niż 0,5 roku świetlnego było nie większe niż 0,05.

Zadanie 7. Rzucono 30-ma kostkami do gry. Wyznaczyć (stosując CTG) przybliżone prawdopodobieństwo, że suma oczek jest zawarta między 90 a 120.

Wskazówka. Oblicz

$$P\left(90 \leq \sum_{i=1}^{30} X_i \leq 120\right).$$

Zadanie 8. Niech X_i , $i=1, \dots, 12$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $(0, 1)$. Wyznacz przybliżone prawdopodobieństwo

$P(\sum_{i=1}^{12} X_i > 6)$. (Uwaga: dla rozkładu jednostajnego można dla $n=12$ stosować CTG)

Zadanie 9. Niech $X_i, i=1,...,25$, będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona ze średnią 1. Znajdź przybliżone prawdopodobieństwo

$$P\left(\sum_{i=1}^{25} X_i > 15\right).$$

Zadanie 10. Pięćdziesiąt liczb rzeczywistych zaokrąglono do najbliższej liczby całkowitej. Zakładamy, że błędy zaokrągleń mają rozkład jednostajny na przedziale $(-0,5, 0,5)$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma 50 liczb otrzymanych w wyniku zaokrąglenia jest większa co najmniej o 3 od sumy 50 liczb niezaokrąglonych.

Zadanie 11. Mamy 100 żarówek, których czas działania jest wykładniczy o średniej 5 godzin. Używamy jednocześnie tylko jednej żarówki, a w przypadku zepsucia się żarówki natychmiast wstawiamy na jej miejsce nową. Wyznacz prawdopodobieństwo, że po 525 godzinach będzie działała jeszcze jakaś żarówka.

Zadanie 12. W pojedynczej grze gracz traci 1 zł z prawdopodobieństwem 0,7, traci 2 zł z prawdopodobieństwem 0,2, lub wygrywa 10 zł z prawdopodobieństwem 0,1. Wyznacz przybliżone prawdopodobieństwo, że po 100 grach łączna wygrana gracza będzie mniejsza od 0.

Zad. 13. Na podstawie danych historycznych bank stwierdził, że 5% kredytobiorców nie wywiązuje się z umów kredytowych. Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo, że wśród stu klientów banku, którzy otrzymali kredyty co najmniej 50% klientów nie wywiąże się z umów kredytowych.

Zad. 14. Opóźnienie pociągu (w minutach) na pewnej trasie jest zmienną losową X o gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(x) = Cx, \text{ dla } x \in [0,10],$$

$$= 0, \text{ dla } x \notin [0,10].$$

- (a) Oblicz stałą C .
- (b) Oblicz prawdopodobieństwo, że pewnego dnia pociąg na tej trasie spóźni się więcej niż 5 minut.
- (c) Znajdź medianę $q_{0,5}$ zmiennej losowej X , podaj jej interpretację ważną dla codziennego pasażera tej trasy (zakładamy że opóźnienia każdego dnia są niezależnymi zmiennymi losowymi).

Zad. 15. Na podstawie obserwacji dużego portfela niezależnych polis obliczono, że prawdopodobieństwo, że losowo wybrana polisa wygeneruje jakąkolwiek szkodę w ciągu roku wynosi 0,05. Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo, że wśród 160 losowo wybranych polis z tego portfela nie mniej niż 152 polisy nie wygenerują żadnej szkody w ciągu roku

Zad. 16. Czas trwania rozmowy telefonicznej jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym ze średnią 5 (minut). Oblicz:

- (d) Jaki procent rozmów trwa dłużej niż 5 minut oraz nie dłużej niż 10 minut.
- (e) W jakim przedziale czasowym znajduje się 25% najdłuższych trwających rozmów?
- (f) Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo, że łączny czas trwania 50 - ciu niezależnych rozmów przekroczy 300 minut?