Zadanie. Badano zależność między ceną jednostkową towaru (zł.) (cecha *X*) a podażą na ten towar (w tys. sztuk) (cecha *Y*). Zakładamy model regresji liniowej 1-wymiarowej:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon, \text{ gdzie } \varepsilon \sim N(\mu, \sigma).$$

W próbie 15 elementowej otrzymano wyniki

x_i	2	2	3	4	4	4	4	5	7	7	8	9	10	11	10
y_i	1	3	2	4	5	6	7	5	8	9	7	9	9	12	10

a) Oblicz współczynnik korelacji z tej próby .
b) Wyznacz (empiryczną) prostą regresji cechy *Y* względem *X* .
c) Wyznacz przedziały ufności dla współczynników regresji (teoretycznych), na poziomach ufności 0,95.
d) Sprawdź hipotezy : $H_0\colon\ \beta_0 = 0$ przeciw $H_1\colon\ \beta_0 \neq 0$, na poziomie istotności 0,05.
e) Sprawdź hipotezy : $H_0\colon\ \beta_1 = 1$ przeciw $H_1\colon\ \beta_1 < 1$, na poziomie istotności 0,05.

a) $r = \frac{1}{n-1}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{s_X s_Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$

$\bar{x} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} x_i = \frac{92}{15} = 6,13$, $\bar{y} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} y_i = \frac{97}{15} = 6,47,$

$\sum_{i=1}^{15}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{15} x_i^2 - 15(\bar{x})^2 = 670 - 15\cdot 37{,}58 = 670 - 563{,}7 = 106{,}3$

$\sum_{i=1}^{15}(y_i-\bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{15} y_i^2 - 15(\bar{y})^2 = 765 - 15\cdot 41{,}86 = 137{,}1$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot y_i - n\bar{x}\cdot\bar{y} = 705 - 15\cdot 6{,}13\cdot 6{,}47 = 705 - 594{,}92 = 110{,}08$$

$$r = \frac{110{,}08}{\sqrt{106{,}3}\cdot\sqrt{137{,}1}} = \frac{110{,}08}{120{,}7} = 0{,}912.$$

b) $b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \frac{110{,}08}{106{,}3} = 1{,}04$

$b_0 = \bar{y} - b_1\cdot\bar{x} = 6{,}47 - 1{,}04\cdot 6{,}13 = 6{,}47 - 6{,}37 = 0{,}10$

$$\hat{y} = 0{,}1 + 1{,}04x.$$

x_i	2	2	3	4	4	4	4	5	7	7	8	9	10	11	10
y_i	1	3	2	4	5	6	7	5	8	9	7	9	9	12	10
$\hat{y}_i$	2,09	2,09	3,22	4,26	4,26	4,26	4,26	5,03	7,38	7,38	8,42	9,46	10,5	11,54	10,5
$(y_i - \hat{y}_i)^2$	1,19	0,83	1,49	0,67	0,55	3,03	7,51	0,0009	0,38	2,62	0,34	0,21	0,25	0,21	0,25

$S^2 = \sum_{i=1}^{15}(y_i-\hat{y}_i)^2/13 = \frac{9{,}53}{13} = 0{,}73$, $S = \sqrt{0{,}73} = 0{,}85$

c) Przedział ufności dla współczynnika kierunkowego prostej regresji

$$\left(b_1 - t_{0,975;13}SE(b_1), b_1 + t_{0,975;13}SE(b_1)\right),$$

$$SE(b_1) = \frac{S}{\sqrt{\sum_{i=1}^{15}(x_i - \bar{x})^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{15}(y_i - \hat{y}_i)^2 / 13}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{15}(x_i - \bar{x})^2}} = \frac{\sqrt{9,53/13}}{\sqrt{106,3}} = \frac{0,85}{10,31} = 0,082$$

$$(1,04 - 2,16 \cdot 0,082; 1,04 + 2,16 \cdot 0,082) = (0,86; 1,22)$$

Przedział ufności dla wyrazu wolnego

$$\left(b_0 - t_{0,975;13}SE(b_0), b_0 + t_{0,975;13}SE(b_0)\right)$$

$$SE(b_0) = S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{15}(x_i - \bar{x})^2}} = 0,85 \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{15}(x_i - \bar{x})^2}}$$

$$SE(b_0) = 0,85 \cdot \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{6,13^2}{106,3}} = 0,85 \cdot 0,647 = 0,55$$

$$(0,1 - 2,16 \cdot 0,55; 0,1 + 2,16 \cdot 0,55) = (-0,088; 2,188)$$

d) $H_0\colon \beta_0 = 0$ przeciw $H_1\colon \beta_0 \neq 0$, na poziomie istotności 0,05,

Wartość statystyki testowej

$t = \frac{b_0}{SE(b_0)} = \frac{0,1}{0,053} = 1,89$, $t_{1-\frac{\alpha}{2};n-2} = t_{0,975;13} = 2,16$, $C = (-\infty; -2,16) \cup (2,16; +\infty)$

$t \notin C$

e) $H_0\colon \beta_1 = 1$ przeciw $H_1\colon \beta_1 > 1$, na poziomie istotności 0,05.

$t = \frac{b_1 - 1}{SE(b_1)} = \frac{1,04-1}{0,082} = 0,49$, $C = (1,77; +\infty)$