Rozwiązania zadań   C5

Zad.1. Stwierdzono, że iloraz inteligencji IQ osób w pewnej populacji ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej 100 i wariancji 225.

(a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że iloraz inteligencji losowo wybranej osoby przekracza 125.
(b) Wyznaczyć frakcję osób, których IQ zawiera się w przedziale od 95 do 110.
(c) Wyznaczyć wartość IQ, której nie przekracza 70% badanej populacji osób.

Rozw. Niech zmienna losowa X oznacza IQ losowo wybranej osoby z badanej populacji. Wiemy, że X ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej $\mu = 100$ oraz wariancji $\sigma^2 = 225$, co w skrócie zapisujemy jako: $X \sim N(100,15)$.

(a) Należy wyznaczyć $P(X > 125)$. Skorzystamy z tw., że standaryzowana zmienna losowa $Z = \frac{X-100}{15} \sim N(0,1)$ oraz z tablic wartości dystrybuanty $\Phi(\cdot)$ zmiennej losowej Z.

Uwaga. Działania arytmetyczne na zmiennych losowych są takie same jak na liczbach, gdyż przekształcamy wartości zmiennych losowych, jak np. poniżej

$$\{X > 125\} = \{s \in S: X(s) > 125\} = \left\{s \in S: \frac{X(s) - 100}{15} > \frac{125 - 100}{15}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{X-100}{15} > \frac{125-100}{15}\right\}.$$

Stąd w naszym przypadku mamy

$$P(X > 125) = P\left(\frac{X - 100}{15} > \frac{125 - 100}{15}\right) = P\left(Z > \frac{5}{3}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{5}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{3}\right) =$$

$$\cong 1 - \Phi(1{,}67) \cong 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475.$$

(b) $P(95 < X < 110) = P\left(\frac{95-100}{15} < \frac{X-100}{15} < \frac{110-100}{15}\right) = P\left(-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}\right) =$

$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) \cong \Phi(0{,}67) - \big(1 - \Phi(0{,}33)\big) = 0{,}7486 - 1 + 0{,}6923 = 0{,}4409$$

(c) Znaleźć stałą c taką, że $P(X \leq c) = 0{,}7$.

$$P(X \leq c) = P\left(\frac{X - 100}{15} \leq \frac{c - 100}{15}\right) = 0{,}7$$

Ostatnia równość jest równaniem na stałą c postaci

$$\Phi\left(\frac{c-100}{15}\right) = 0{,}7 \qquad (1)$$

$$\Phi(0{,}52440) = 0{,}7 \qquad (2)$$

(kwantylem rzędu 0,7 rozkładu zmiennej *Z* jest 0,52440 = $z_{0,7}$).

Dystrybuanta Φ jest funkcją ściśle rosnącą, bo gęstość zmiennej *Z* jest dla wszystkich argumentów dodatnia. Z równości prawych stron (1) i (2) otrzymujemy równość argumentów dystrybuanty po lewych stronach (1) i (2). Zatem

$$\frac{c-100}{15} = 0{,}52440$$

$$c - 100 = 15 \cdot 0{,}52440$$

$$c = 100 + 15 \cdot 0{,}52440 = 107{,}866$$

(z_p, dla ustalonego dowolnie $p \in (0{,}1)$, oznacza kwantyl rzędu p rozkładu zmiennej losowej $Z \sim N(0{,}1)$: $\Phi(z_p) = p$)

Zad.2. Waga cukru pakowanego w torebki 1 kg przez maszynę paczkującą ma rozkład normalny o odchyleniu standardowym 20 g. Istnieje możliwość ustawienia maszyny pacz - kującej w zakresie wartości średniej pakowanego cukru z dokładnością do 1grama, przy nie zmienionym odchyleniu standardowym. Przepisy dotyczące paczkowania cukru mówią, że 1) średnio w torebkach ma być co najmniej 1000g; 2) nie więcej niż 2,5% paczek zawiera mniej niż 975 g; 3) nie więcej niż 1 na 10000 paczek zawiera mniej niż 950 g. W chwili obecnej maszyna ustawiona jest na pakowanie średnio 1010 g.

1) Ile procent torebek zawiera mniej niż 975 g cukru?
2) Ile procent torebek zawiera mniej niż 950 g cukru?
3) Jaka minimalna wartość średnia wagi cukru powinna być ustawiona, aby spełnione były wymagania zawarte w przepisach?

Rozw. Niech zmienna losowa X będzie wagą losowo wybranej paczki cukru. Z treści zadania $X \sim N(1010{,}20)$.

1) Należy znaleźć $P(X < 975)$

$$P(X < 975) = P\left(\frac{X-1010}{20} < \frac{975-1010}{20}\right) = P(Z < -1{,}75) = \Phi(-1{,}75)$$
$$= 1 - \Phi(1{,}75) \cong 1 - 0{,}9599 = 0{,}0401$$

Odp. 4,01% paczek zawiera mniej niż 975 gram

2) $P(X < 950) = P\left(\frac{X-1010}{20} < \frac{950-1010}{20}\right) = P(Z < -3) = \Phi(-3) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0{,}998650 = 0{,}00135$

Odp. 0,135% paczek zawiera mniej niż 975 gram

3) Niech μ oznacza wartość średnią zmiennej losowej $X \sim N(\mu, 20)$ spełniającą wymagania 1) - 3):

1) $\mu \geq 1000$
2) Procent paczek o wadze < 975 jest nie większy niż 2,5%.

$$P(X < 975) \cdot 100 \leq 2{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad P(X < 975) \leq 0{,}025$$

$$P(X < 975) = P\left(\frac{X-\mu}{20} < \frac{975-\mu}{20}\right) = P\left(Z < \frac{975-\mu}{20}\right) \leq 0{,}025 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Phi\left(\frac{975-\mu}{20}\right) \leq 0{,}025 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{975-\mu}{20}\right) \leq \Phi(z_{0,025}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{975-\mu}{20} \leq z_{0,025} \quad \Leftrightarrow$$

$$975 - \mu \leq 20 \cdot z_{0,025} \quad \Leftrightarrow \quad \mu \geq 975 - 20 \cdot (-1{,}96) \quad \Leftrightarrow \quad \mu \geq 975 + 39{,}2 = 1014{,}2$$

$$\Phi(z_{0,025}) = 0{,}025 \quad \Rightarrow \quad z_{0,025} = -z_{0,975} \cong -1{,}96$$

3) Proporcja (frakcja, częstość) paczek o wadze < 950 jest nie większa niż 1/10000, tzn.

$$P(X < 950) \leq 0{,}0001 \Leftrightarrow \quad P\left(Z < \frac{950-\mu}{20}\right) \leq \Phi(z_{0,0001}) \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{950-\mu}{20}\right) \leq \Phi(-z_{0,9999}) \cong \Phi(-3{,}49)$$

$$\Phi\left(\frac{950-\mu}{20}\right) \leq \Phi(-z_{0,9999}) \cong \Phi(-3{,}72) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{950-\mu}{20} \leq -3{,}72 \quad \Leftrightarrow$$

$$\mu \geq 950 + 20 \cdot 3{,}72 \quad \Leftrightarrow \quad \mu \geq 1024{,}4$$

Minimalne μ spełniające

1) $\mu \geq 1000$ i 2) $\mu \geq 935{,}8$ i 3) $\mu \geq 1024{,}4$

i dodatkowo z dokładnością do 1 g, to $\mu = 1025.$

Odp. Najmniejsza średnia spełniająca 1)-3), to $\mu = 1025$

<u>Zad. 3</u>. Egzamin składa się z 48 pytań, na które można odpowiedzieć poprawnie lub nie. Aby zdać egzamin należy poprawnie odpowiedzieć na co najmniej 30 pytań. Student A na losowo wybrane pytanie odpowiada poprawnie z prawdopodobieństwem 0,75. Student B wybiera odpowiedzi całkowicie losowo. Porównaj przybliżone prawdopodobieństwa zdania egzaminu obu studentów.

<u>Rozw.</u> Wprowadźmy zmienne losowe: X – liczba poprawnych odpowiedzi studenta A,

Y – liczba poprawnych odpowiedzi studenta B**.**

$$X \sim Bin(48; 0{,}75), \qquad Y \sim Bin(48; 0{,}5)$$

$$E(X) = 48 \cdot 0{,}75 = 36, \;\; Var(X) = 48 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 9$$

$$E(Y) = 48 \cdot 0{,}50 = 24, \;\; Var(Y) = 48 \cdot 0{,}50 \cdot 0{,}50 = 12$$

Z CTG dystrybuantę zmiennej losowej X można przybliżyć dystrybuantą rozkładu normalnego $N\left(36, \sqrt{9}\right)$, ponieważ

$$np = 36 \geq 5 \text{ oraz } nq = 48 \cdot 0{,}25 = 12 \geq 5$$

Podobnie sprawdzamy, że można zastosować CTG dla zmiennej losowej Y, ponieważ:

$$np = 24 \geq 5, \quad nq = 24 \geq 5$$

$$P(X \geq 30) = 1 - P(X < 30), \;\; P(Y \geq 30) = 1 - P(Y < 30)$$

$$P(X < 30) = P(X \leq 29) = P(X \leq 29{,}5) = P\left(\frac{X - 36}{3} \leq \frac{29{,}5 - 36}{3}\right) \cong \Phi\left(-\frac{6{,}5}{3}\right)$$

$$P(X < 30) \cong 1 - \Phi(2{,}167) \cong 1 - 0{,}9525$$

$$P(X \geq 30) \cong 0{,}9525$$

$$P(Y < 30) = P(Y \leq 29) = P(Y \leq 29{,}5) = P\left(\frac{Y - 24}{\sqrt{24}} \leq \frac{29{,}5 - 24}{\sqrt{24}}\right) \cong \Phi\left(-\frac{5{,}5}{\sqrt{24}}\right)$$

$$P(Y < 30) \cong 1 - \Phi(1{,}123) \cong 1 - 0{,}87$$

$$P(Y \geq 30) \cong 0{,}87$$

Odp. Student A zda z prawdopodob. 0,95 a student B z prawdopodob. 0,87.

Zad. 4. Z poprzednich dostaw wiadomo, że średnio 10% zakupionych od pewnego kontrahenta podzespołów spełnia podwyższone wymagania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kupując 100 takich podzespołów, będziemy mieli co najmniej 15 podzespołów spełniających podwyższone wymagania? Podać wartość przybliżoną tego prawdopodobieństwa korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego (CTG) oraz lematu Poissona.

Rozw. Niech zmienna losowa X będzie liczbą podzespołów wśród 100 zakupionych, które spełniają podwyższone wymagania.

a) $X \sim Bin(100; 0{,}1), \;\; n = 100, p = 0{,}1.$

Należy znaleźć wartość przybliżoną prawdopodobieństwa:

$$P(X \geq 15) = 1 - P(X < 15)$$

$np = 10 \geq 5, \; n(1-p) = 90 \geq 5$, więc można stosować przybliżenie rozkładu dwumianowego rozkładem normalnym – twierdzenie Moivre'a - Laplace'a (SADW4, SADW4IIcz.) $E(X) = np = 10, \; Var(X) = npq = 10 \cdot 0{,}9 = 9$

$$P(X \geq 15) = 1 - P(X < 15)$$

$$P(X < 15) = P(X \leq 14{,}5) = P\left(\frac{X-10}{\sqrt{9}} \leq \frac{14{,}5-10}{\sqrt{9}}\right) \cong P\left(Z \leq \frac{4{,}5}{3}\right)$$

$P(X < 15) \cong \Phi(1{,}5) \cong 0{,}9332 \quad \Longrightarrow \quad P(X \geq 15) \cong 0{,}0668$ (z CTG przybliżenie rozkładem normalnym)

Przybliżenie rozkładem Poissona stosujemy z $\lambda = np = 100 \cdot 0{,}1 = 10$

$P(X < 15) = P(X \leq 14) \cong F_{Poisson(10)}(14) = 0{,}9165 \Longrightarrow P(X \geq 15) \cong 0{,}0835$ (z przybliżenia rozkładem normalnym)

$P(X < 15) = F_{Bin(100;0,1)}(14) = 0{,}9274 \Longrightarrow \; P(X \geq 15) \cong 0{,}0726$

Rozkład	$P(X \geq 15)$	Błąd przybliżenia
$Bin(100; 0{,}1)$	0,0726	0
$N(10{,}3)$	0,0668	- 0,0058
Poisson(10)	0,0835	0,0109

Zad. 5. Przy produkcji elementów otrzymuje się 3% braków. Produkcję ilu elementów trzeba zaplanować, aby z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż 0,99 był zabezpieczony program wysyłki elementów, dla którego potrzeba 400 niewadliwych elementów.

Rozw. Niech n będzie liczbą elementów, $p = 0{,}97$ prawdop., że element nie jest brakiem

$$X \sim Bin(n; 0{,}97)$$

$$P(X \geq 400) \geq 0{,}99$$

$(n \cdot 0{,}97 \geq 400 \cdot 0{,}97 \geq 5, \quad nq \geq 400 \cdot 0{,}03 = 12 \geq 5)$ $\Longrightarrow$ z CTG przybliżamy rozkład $Bin(n; 0{,}97)$ rozkładem $N\left(n \cdot 0{,}97; \sqrt{n \cdot 097 \cdot 0{,}03}\right)$.

$$P(X \geq 400) = 1 - P(X < 400) \geq 0{,}99$$
$$P(X < 400) \leq 0{,}01$$
$$P(X < 400) = P(X \leq 399{,}5) \leq 0{,}01$$
$$P(X \leq 399{,}5) \cong P\left(Z \leq \frac{399{,}5 - n \cdot 0{,}97}{\sqrt{n \cdot 097 \cdot 0{,}03}}\right) \leq 0{,}01$$
$$\Phi\left(\frac{399{,}5 - 0{,}97n}{0{,}0291\sqrt{n}}\right) \leq 0{,}01 \qquad (1)$$
$$0{,}01 = \Phi(z_{0{,}01}) = \Phi(-z_{0{,}99}) \quad (2)$$

Na podstawie (2) nierówność (1) zapiszemy w postaci:

$$\Phi\left(\frac{399{,}5 - 0{,}97n}{0{,}0291\sqrt{n}}\right) \leq \Phi(-2{,}32634) \quad (1)$$

Nierówność (1) jest równoważna nierówności analogicznej dla argumentów dystrybuanty Φ (ponieważ jest funkcją ściśle rosnącą), stąd

$$\frac{399{,}5 - 0{,}97n}{0{,}0291\sqrt{n}} \leq -2{,}32634$$
$$399{,}5 - 0{,}97n \leq -0{,}0677\sqrt{n}$$

Zad. 6. W hotelu jest 100 pokoi. Ponieważ z doświadczenia wynika, że jedynie 90% dokonanych wcześniej rezerwacji jest później wykorzystywanych, właściciel hotelu polecił przyjmować rezerwacje na więcej niż 100 pokoi.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy przyjęciu 104 rezerwacji w hotelu zabraknie wolnych pokoi?
b) Ile dodatkowych rezerwacji można dokonać by mieć 90% pewności, że dla nikogo nie zabraknie miejsc?

Rozw. (a) Niech $p = 0{,}9$ będzie prawdopodobieństwem, że losowa rezerwacja będzie wykorzystana (klient nie zrezygnuje z pokoju), $n = 104$ oznacza liczbę przyjętych rezerwacji.

Niech X będzie liczbą wykorzystanych rezerwacji przy przyjęciu 104 rezerwacji. Wówczas $X \sim Bin(104; 0{,}9)$.

$$P(X > 100) = 1 - P(X \leq 100) = 1 - P(X \leq 100{,}5).$$

$$P(X \leq 100{,}5) = P\left(\frac{X - 104 \cdot 0{,}9}{\sqrt{104 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}6}} \leq \frac{100{,}5 - 104 \cdot 0{,}9}{\sqrt{104 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right) \cong P\left(Z \leq \frac{-3{,}15}{\sqrt{9{,}36}}\right) =$$

$$\Phi\left(-\frac{3{,}15}{3{,}059}\right) = \Phi(1{,}03) \cong 0{,}8485$$

$$P(X > 100) \cong 1 - 0{,}8485 = 0{,}1515$$

Odp. Prawdopod., że przy przyjęciu 104 rezerwacji zabraknie miejsc wynosi ok. 0,1515.

(b) Dla jakiego n $\quad P(X \leq 100) \geq 0{,}9, \quad X \sim Bin(n; 0{,}9)$.