Rozwiązania zadań C3

Zad.1. $P(A) = P(B) = P(C) = 1/3,\ P(A - B) = P(C - B) = 1/6, A \cap C = \emptyset.$
Obliczyć: $P(A|B),\ P(C|B),\ P(A \cup B \cup C),\ P(A \cup B),\ P(B \cap C).$

Rozw.

- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = ?$

Aby obliczyć $P(A \cap B)$ zauważmy: $A = A \cap (B \cup B') = (A \cap B) \cup (A \cap B')$.
Z wykluczania się zdarzeń $A \cap B$ i $A \cap B'$ oraz aksjomatu trzeciego prawdopodobieństwa

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B') = P(A \cap B) + P(A - B)$$

Stąd podstawiając dane prawdopodobieństwa mamy:

$$\frac{1}{3} = P(A \cap B) + \frac{1}{6} \iff P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \iff P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- $P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2}$, ponieważ wystarczy za C podstawić A, gdyż zdanych zadania mamy:

$$P(A) = P(C) = \tfrac{1}{3},\quad P(A - B) = P(C - B) = \tfrac{1}{6},\ \text{stąd}\quad P(A \cap B) = P(C \cap B) = \tfrac{1}{6},$$

a stąd

$$P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B) = \frac{1}{2}$$

- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) +$

$$+P(A \cap B \cap C) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} - 0 - \tfrac{1}{6} + 0 = \tfrac{2}{3}.$$

Powyżej skorzystaliśmy z

$$0 \leq P(A \cap B \cap C) \leq P(A \cap C) = P(\emptyset) = 0.$$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

- $P(B \cap C) = P(C \cap B) = \frac{1}{6}$

Zad.2. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Dane są trzy zdarzenia: A – suma oczek większa od 6, B - szóstka na pierwszej kostce, C - jedynka na drugiej kostce. Zbadać niezależność (wzajemną oraz parami) zdarzeń A, B i C oraz obliczyć

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}), \quad \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}), \quad \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{C}).$$

Rozw. $S = \{(i,j)\colon\ i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$, $n(S) = 6 \cdot 6 = 36$

(a) $A = \{(i,j) \in S\colon i + j \geq 7\} =$

$\{(1,6),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\} \cup$

$\{(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$, $n(A) = 21$

$B = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$, $n(B) = 6$

$C = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$, $n(C) = 6$

$$P(A) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}, \qquad P(B) = P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$A \cap B \cap C = \{(6,1)\}$, $n(A \cap B \cap C) = 1$,

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36}, \ \ P(A)P(B)P(C) = \frac{7}{12}\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{7}{12 \cdot 36}.$$

$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$, zatem zdarzenia A, B, C nie są niezależne (inaczej mówiąc: nie są niezależne wzajemnie) .

Sprawdzimy teraz niezależność parami:

$$P(A \cap B) = P(B) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A)P(B) \ \Leftrightarrow A, B \ \text{ są zależne}$$

$$P(A \cap C) = P(\{(6,1)\}) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A)P(C) \ \Leftrightarrow \ \ A, C \ \text{ są niezależne}$$

$$P(B \cap C) = P(\{(6,1)\}) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(B)P(C) \ \Leftrightarrow \ \ B, C \ \text{są niezależne}$$

(a) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$, $P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Zauważamy, że $A \cup B \cup C = A \cup \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1)\}$, skąd

$n(A \cup B \cup C) = 21 + 5 = 26.$

Zatem $\qquad P(A \cup B \cup C) = \frac{n(A \cup B \cup C)}{n(S)} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}.$

Można też skorzystać ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy 3 zdarzeń:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) +$$
$$+P(A \cap B \cap C) = \frac{7}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{13}{18}.$$

(Powyższy wzór otrzymamy ze wzoru na sumę dwu zdarzeń:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, który zastosujemy dwukrotnie, najpierw dla dwóch zdarzeń C oraz $A \cup B$, a następnie dla zdarzeń *A* oraz *B*).

Zad.3. Rzucamy raz kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadła liczba oczek mniejsza od 5, jeśli wiadomo, że wyrzucono nieparzystą liczbę oczek.

Rozw. Przestrzeń zdarzeń elementarnych $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Należy obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B)$, gdzie

A = {otrzymanie liczby oczek < 5} = {1, 2, 3, 4}

B = {otrzymanie parzystej liczby oczek} = {2, 4, 6}.

<u>**Stwierdzenie 1**</u>. Niech $S = \{s_1, s_2, \dots, s_M\}$.

Jeśli $P(\{s_1\}) = P(\{s_2\}) = \cdots = P(\{s_M\})$, to dla dowolnego *m* - elementowego podzbioru *A* zbioru *S* zachodzi

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{m}{M}, \qquad (*)$$

Prawdopodobieństwa otrzymania dowolnej liczby oczek są jednakowe, tzn. zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, więc ze stw. 1, wzór (*), mamy

$$P(\{j\}) = \frac{1}{6},\ j = 1,2,3,4,5,6, \text{ oraz } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6},\ P(B) = \frac{3}{6}.$$

Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego mamy:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{2,4\})}{P(\{2,4,6\})} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}.$$

Zad.4. Każdy z dwóch niezależnych systemów alarmowych działa z prawdopodobieństwem 0.9. Jakie jest prawdopodobieństwo, że oba zawiodą jednocześnie?

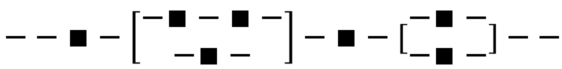
Rozw. Wprowadźmy zdarzenia:
- $A -$ system 1 zawiedzie, $P(A) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$
- $B -$ system 2 zawiedzie, $P(B) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

- C — oba systemy zawiodą , $C = A \cap B$
- Zdarzenia A, B są niezależne $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Zatem $P(C) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01.$

Zad.5. Rzucamy czworościanem foremnym, którego trzy ścianki pomalowane są jednolicie: jedna na czerwono, jedna na biało i jedna na zielono, natomiast czwarta ścianka pomalowana jest w czerwono-biało-zielone pasy. Niech C, B, Z oznaczają, odpowiednio, zdarzenia: C - "czworościan upadł na ściankę, na której jest kolor czerwony", B - "czworościan upadł na ściankę, na której jest kolor biały", Z- "czworościan upadł na ściankę, na której jest kolor zielony". Sprawdzić, czy zdarzenia C,B,Z są niezależne.
Rozw. Zad. 5 rozwiązujemy identycznie jak zadanie z wykładu 2. Ściany czworościanu należy zamienić kulami.

Zad.6. Oblicz prawdopodobieństwo przekazania sygnału przez układy pokazane na rysunku, składające się przekaźników działających niezależnie od siebie, jeśli prawdopodobieństwo działania każdego z przekaźników wynosi *p.*

a) 

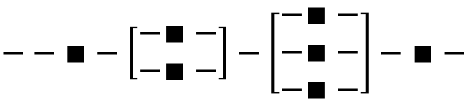
Rozw.

a) Niech A_i oznacza działanie przekaźnika *i* – tego, a B - poprawną pracę układu. Wówczas

$$B = A_1 \cap \big((A_2 \cap A_3) \cup A_4\big) \cap A_5 \cap (A_6 \cup A_7).$$

Zdarzenia A_1, $(A_2 \cap A_3) \cup A_4$, A_5, $A_6 \cup A_7$ są niezależne , bo wszystkie przekaźniki działają niezależnie. Stąd

$$P(B) = p \cdot (p^2 + p - p^3) \cdot p \cdot (p + p - p^2) = p^4 \cdot (1 + p - p^2) \cdot (2 - p).$$

b) 

$$B = A_1 \cap (A_2 \cup A_3) \cap (A_4 \cup A_5 \cup A_6) \cap A_7$$

$$P(B) = p \cdot (p + p - p^2) \cdot (p + p + p - p^2 - p^2 - p^2 + p^3) \cdot p = \\ = p^4 \cdot (2 - p) \cdot (3 - 3p + p^2).$$

Zad. 7. Na rynku telekomunikacyjnym działają 3 sieci komórkowe. Sieć A ma 25% klientów, siec B ma 35% klientów, a sieć C ma 40 % klientów. Dodatkowy abonament na internet bezprzewodowy wykupuje wśród klientów sieci A 30% klientów, a w sieci B i C, odpowiednio 20% i 15%. Wiadomo, że losowo wybrany użytkownik telefonu komórkowego korzysta dodatkowo z internetu bezprzewodowego w swojej sieci komórkowej. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest on klientem sieci A, B, C ?

Rozw. Należy wykorzystać **wzór** (regułę) **Bayes'a**.

- Niech B_1 będzie zdarzeniem, że losowo wybrany użytkownik telefonu komórkowego jest klientem sieci A, B_2 jest klientem sieci B, a B_3 jest klientem sieci C.
- Niech D będzie zdarzeniem, że ten losowo wybrany klient korzysta dodatkowo z internetu bezprzewodowego w swojej sieci komórkowej.

Z treści zadania mamy

$$P(B_1) = 0{,}25, \quad P(B_2) = 0{,}35, \quad P(B_3) = 0{,}40.$$

(zdarzenia B_i, $i = 1{,}2{,}3$, tworzą zupełny układ zdarzeń, a ich prawdopodobieństwa nazywane są często **prawdopodobieństwami a priori**) oraz

$$P(D|B_1) = 0{,}30, \; P(D|B_2) = 0{,}20, \; P(D|B_3) = 0{,}15.$$

Należy wyznaczyć tzw. **prawdopodobieństwa a posteriori**:

$$P(B_1|D), \quad P(B_2|D), \quad P(B_3|D)$$

Obliczymy najpierw prawdopodobieństwo całkowite

$$P(D) = P(D|B_1) \cdot P(B_1) + P(D|B_2) \cdot P(B_2) + P(D|B_3) \cdot P(B_3) =$$

$$= 0{,}30 \cdot 0{,}25 + 0{,}20 \cdot 0{,}35 + 0{,}15 \cdot 0{,}40 = 0{,}205.$$

Wzór Bayesa otrzymujemy ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe

$$P(B_i|D) = \frac{P(D \cap B_i)}{P(D)} = \frac{P(D|B_i) \cdot P(B_i)}{P(D)}.$$

$$P(B_1|D) = \frac{0{,}30 \cdot 0{,}25}{0{,}205} = \frac{0{,}075}{0{,}205} \cong 0{,}366$$

$$P(B_2|D) = \frac{0{,}20 \cdot 0{,}35}{0{,}205} \cong 0{,}341$$

$$P(B_3|D) = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}40}{0{,}205} \cong 0{,}293$$

Uwaga: Prawdopodobieństwo warunkowe spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa, więc powyższe 3 prawd. war. sumują się do 1 (trzeba to uwzględnić przy zaokrągleniach liczb).

Zad.8. W zbiorze N monet jedna ma po obu stronach orły, pozostałe zaś są prawidłowe.
W wyniku 10 rzutów losowo wybraną monetą otrzymaliśmy 10 orłów.
Oblicz prawdopodobieństwo, że była to moneta z orłami po obu stronach. Wyznacz wartość prawdopodobieństwa dla N=100 oraz N=100000. Zinterpretuj otrzymane wyniki.

Rozw. Niech monety $1,2,\ldots,N-1$ będą prawidłowe, a moneta N ma po obu stronach orły. Można na 2 sposoby wprowadzić zdarzenia z układu zupełnego zdarzeń:

a) Wprowadźmy zdarzenia:

- $B_1 -$ wylosowanie monety prawidłowej , $P(B_1)=\frac{N-1}{N}$
- $B_2 -$ wylosowanie monety z orłami po obu stronach, $P(B_2)=\frac{1}{N}$
- $A -$ wyrzucenie 10-ciu orłów w 10 - ciu rzutach wylosowaną monetą

$$P(A|B_1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{10},\quad P(A|B_2)=1$$

Ze wzoru Bayes'a mamy:

$$P(B_2|A)=\frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)}=\frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)}=$$

$$\frac{1\cdot\frac{1}{N}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot\frac{N-1}{N}+1\cdot\frac{1}{N}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot(N-1)+1}=\frac{2^{10}}{N-1+2^{10}}$$

Jeśli $N=100$, to

$$P(B_2|A)=\frac{2^{10}}{2^{10}+100-1}=0{,}911843\approx 0{,}9118$$

Jeśli $N=1000$, to

$$P(B_2|A)=\frac{2^{10}}{2^{10}+1000-1}=0{,}506178\approx 0{,}5062$$

Jeśli $N=100000$, to

$$P(B_2|A)=\frac{2^{10}}{2^{10}+100000-1}=0{,}0101363\approx 0{,}0101$$

b) Wprowadźmy zdarzenia:

- $B_i -$ wylosowanie monety $i-$ tej , $i=1,2,\ldots,N$
- B_N – wylosowanie monety nieprawidłowej

$$P(B_i)=\frac{1}{N}, i=1,2,\ldots,N$$

- $A -$ wyrzucenie 10-ciu orłów w 10 - ciu rzutach wylosowaną monetą

$$P(A|B_i)=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}, i=1,2,\ldots,N-1,\ P(A|B_N)=1,$$

Należy obliczyć:

$$P(B_N|A) = \frac{P(A|B_N)P(B_N)}{P(A)},$$

gdzie ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_{N-1})P(B_{N-1}) + P(A|B_N)P(B_N)$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} P(A|B_i)P(B_i) + P(A|B_N)P(B_N) = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \frac{1}{N} + 1 \cdot \frac{1}{N} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \frac{N-1}{N} + \frac{1}{N}.$$

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{N-1}{N}\right) + \frac{1}{N} = \frac{1}{N}\left(1 + \frac{N-1}{2^{10}}\right)$$

$$P(B_N|A) = \frac{P(A|B_N)P(B_N)}{P(A)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{N}}{\frac{1}{N}\left(1 + \frac{N-1}{2^{10}}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{N-1}{2^{10}}}$$

Po uproszczeniu mamy

$$P(B_N|A) = \frac{2^{10}}{2^{10} + N - 1}$$

Zadania dodatkowe

Zad. . Wiadomo, ze 96% detali jest zgodnych z wymaganiami. Podczas kontroli jakości detale dobre są przepuszczane (traktowane jako dobre) z prawdopodobieństwem 0,98, natomiast przedmioty wadliwe z prawdopodobieństwem jako 0,05. Obliczyć prawdopodobieństwo , ze przedmiot, który został przepuszczony przez kontrolę jakości jest zgodny z wymaganiami.

Rozw. Należy wykorzystać **wzór** (regułę) **Bayes'a**.

- Niech B_1 będzie zdarzeniem, że losowo wybrany przedmiot jest zgodny z wymaganiami, a B_2 jest zdarzeniem, że losowo wybrany przedmiot jest niezgodny z wymaganiami.
- Niech A będzie zdarzeniem, że przedmiot przeszedł przez kontrolę jakości (zdarzenie obserwowane), stwierdzono, że jest zgodny z wymaganiami.

Należy wyznaczyć tzw. **prawdopodobieństwo a posteriori**, że przedmiot jest zgodny z wymaganiami pod warunkiem, że przeszedł przez kontrolę, tzn.

$$P(B_1|A).$$

Z treści zadania mamy

$$P(B_1) = 0{,}96, \quad P(B_2) = 0{,}04,$$

$$P(A|B_1) = 0{,}98, \quad P(A|B_2) = 0{,}05.$$

Obliczymy najpierw prawdopodobieństwo całkowite

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + \ P(A|B_2) \cdot P(B_2) = 0{,}98 \cdot 0{,}96 + 0{,}05 \cdot 0{,}04 = 0{,}9428.$$

$$P(B_1|A) = \frac{0{,}98 \cdot 0{,}96}{0{,}9428} = \frac{0{,}9408}{0{,}9428} \cong 0{,}9979.$$

Elementy dobre przechodzą przez kontrolę jakości z prawdopodobieństwem bliskim 1.

Zad. Kanał łączności przesyła jeden z trzech ciągów bitów: 10011, 11011 lub 10101 z prawdopodobieństwami, odpowiednio, 0,3; 0,3; 0,4. Poszczególne bity podlegają niezależnie zakłóceniom losowym, w wyniku których 0 może być odczytane jako 1 a 1 jako 0. Prawdopodobieństwo błędnego odczytu każdego bitu wynosi 0,1. Odebrano ciąg bitów 10111. Który z sygnałów został najprawdopodobniej nadany?

Rozw. Należy wykorzystać **wzór** na prawdopodobieństwo warunkowe i całkowite (wzór Bayesa). Niech

- B_1 oznacza nadanie ciągu bitów 10011
- B_2 oznacza nadanie ciągu bitów 11011
- B_3 oznacza nadanie ciągu bitów 10101
- A oznacza odbiór ciągu bitów 10111

Z treści zadania mamy $P(B_1) = 0{,}3, \quad P(B_2) = 0{,}3, \quad P(B_3) = 0{,}4$

Zauważmy, że $B_1 \cap A$ = {nadanie 10011}∩{odczyt 10111},

$$P(B_1 \cap A) = P(B_1)P(A|B_1) = 0{,}3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}03 \cdot 0{,}9^4$$

$B_2 \cap A$ = {nadanie 11011}∩{odczyt 10111},

$$P(B_2 \cap A) = P(B_2)P(A|B_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}003 \cdot 0{,}9^3$$

$B_3 \cap A$ = {nadanie 10101}∩{odczyt 10111},

$$P(B_3 \cap A) = P(B_3)P(A|B_3) = 0{,}4 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}04 \cdot 0{,}9^4.$$

$$P(A) = 0{,}03 \cdot 0{,}9^4 + 0{,}003 \cdot 0{,}9^3 + 0{,}4 \cdot 0{,}9^4 = 0{,}9^3 \cdot (0{,}03 \cdot 0{,}9 + 0{,}003 + 0{,}4 \cdot 0{,}9) =$$

$$= 0{,}9^3 \cdot 0{,}066$$

Dla $i = 1,2,3$ mamy $P(B_i|A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)}$.

Licznik ostatniego ilorazu największy dla $i = 3$, a stąd sygnał trzeci 10101 najbardziej prawdopodobny. Ponadto:

$$P(B_1|A) = \frac{0{,}03 \cdot 0{,}9^4}{0{,}066 \cdot 0{,}9^3} = \frac{0{,}027}{0{,}066} = \frac{9}{22}$$

$$P(B_2|A) = \frac{0{,}003 \cdot 0{,}9^3}{0{,}066 \cdot 0{,}9^3} = \frac{0{,}003}{0{,}066} = \frac{1}{22}$$

$$P(B_3|A) = \frac{0{,}04 \cdot 0{,}9^4}{0{,}066 \cdot 0{,}9^3} = \frac{0{,}036}{0{,}066} = \frac{12}{22}$$