$CPGBN$模型：

$\theta_j^{(T)} \sim Gam(\gamma, 1/c_j^{(T+1)}),$

$...$

$\theta_j^{(t)} \sim Gam(\Phi^{(t+1)}\theta_j^{(t+1)}, 1/c_j^{(t+1)}),$

$...$

$\theta_j^{(1)} \sim Gam(\Phi^{(2)}\theta_j^{(2)}, 1/c_j^{(2)}),$

$w_{jk^{(1)}}^{(1)} = \pi_{jk^{(1)}}^{(1)}\theta_{jk^{(1)}}^{(1)}, \pi_{jk^{(1)}}^{(1)} \sim Dir(\Phi_{k^{(1)}:}^{(2)}\theta_j^{(2)} / S_w^{(1)} 1_{S_w^{(1)}}), \Leftrightarrow w_{jk^{(1)}}^{(1)} \sim Gam(\Phi_{k^{(1)}:}^{(2)}\theta_j^{(2)} / S_w^{(1)}, 1/c_j^{(2)})$

$X_j^{(1)} = 1(M_j^{(1)} > 0), M_j^{(1)} \sim Pois(\sum_{k^{(1)}=1}^{K^{(1)}} D_{k^{(1)}}^{(1)} * w_{jk^{(1)}}^{(1)}),$

$d_{k^{(1)}s_d^{(1)}}^{(1)}$表示$D_{k^{(1)}}^{(1)}$中的一列,$\phi_{k^{(t)}}^{(t)}$表示$\Phi^{(t)}$的一列

$D_{k^{(1)}}^{(1)} \sim Dir(\eta^{(1)} 1_{|V| \times S_d^{(1)}}), \phi_{k^{(t)}}^{(t)} \sim Dir(\eta^{(t)} 1_{K^{(t-1)}}), t = 2:T$

$\gamma_{k^{(T)}} \sim Gam(1/K^{(T)}, 1), c_j^{(t)} \sim Gam(e_0, 1/f_0)$

模型中$w_{jk^{(1)}}^{(1)}, \pi_{jk^{(1)}}^{(1)}, \theta_{jk^{(1)}}^{(1)}$之间的关系

给定$w_{jk^{(1)}}^{(1)}$推导$\pi_{jk^{(1)}}^{(1)}, \theta_{jk^{(1)}}^{(1)}$

$given: w_{jk^{(1)}}^{(1)} \sim Gam(\Phi_{k^{(1)}:}^{(2)}\theta_j^{(2)} / S_w^{(1)}, 1/c_j^{(2)}),$

$then: w_{jk^{(1)}}^{(1)} / \sum_{S_w^{(1)}} w_{jk^{(1)}s_w^{(1)}}^{(1)} \sim Dir(\Phi_{k^{(1)}:}^{(2)}\theta_j^{(2)} / S_w^{(1)} 1_{S_w^{(1)}})$,利用$Gamma$和$Dir$的关系

$define: w_{jk^{(1)}}^{(1)} / \sum_{S_w^{(1)}} w_{jk^{(1)}s_w^{(1)}}^{(1)} = \pi_{jk^{(1)}}^{(1)}$

$then: w_{jk^{(1)}}^{(1)} = \pi_{jk^{(1)}}^{(1)} \sum_{S_w^{(1)}} w_{jk^{(1)}s_w^{(1)}}^{(1)}, \pi_{jk^{(1)}}^{(1)} \sim Dir(\Phi_{k^{(1)}:}^{(2)}\theta_j^{(2)} / S_w^{(1)} 1_{S_w^{(1)}})$

$define: \sum_{S_w^{(1)}} w_{jk^{(1)}s_w^{(1)}}^{(1)} = \theta_{jk^{(1)}}^{(1)}$

$then: \theta_{jk^{(1)}}^{(1)} \sim Gam(\Phi_{k^{(1)}:}^{(2)}\theta_j^{(2)}, 1/c_j^{(2)})$,利用$Gamma$分布的可加性

$proof: w_{jk^{(1)}}^{(1)} \sim Gam(\Phi_{k^{(1)}:}^{(2)}\theta_j^{(2)} / S_w^{(1)}, 1/c_j^{(2)})$

$\Leftrightarrow w_{jk^{(1)}}^{(1)} = \pi_{jk^{(1)}}^{(1)}\theta_{jk^{(1)}}^{(1)}, \pi_{jk^{(1)}}^{(1)} \sim Dir(\Phi_{k^{(1)}:}^{(2)}\theta_j^{(2)} / S_w^{(1)} 1_{S_w^{(1)}}), \theta_{jk^{(1)}}^{(1)} \sim Gam(\Phi_{k^{(1)}:}^{(2)}\theta_j^{(2)}, 1/c_j^{(2)})$

模型推导

$M_j^{(1)} \sim Pois(\sum_{k^{(1)}=1}^{K^{(1)}} D_{k^{(1)}}^{(1)} * w_{jk^{(1)}}^{(1)})$

$\Rightarrow (M_{j1}^{(1)},...,M_{jK^{(1)}}^{(1)} \mid M_j^{(1)}) \sim Multi(M_j^{(1)}; \xi_{j1}^{(1)},..., \xi_{jK^{(1)}}^{(1)}), \xi_{jk^{(1)}}^{(1)} = D_{k^{(1)}}^{(1)} * w_{jk^{(1)}}^{(1)} \,/\, \sum_{k^{(1)}=1}^{K^{(1)}} D_{k^{(1)}}^{(1)} * w_{jk^{(1)}}^{(1)}$

$\Rightarrow M_{jk^{(1)}}^{(1)} \sim Pois(D_{k^{(1)}}^{(1)} * w_{jk^{(1)}}^{(1)}),$

$\Rightarrow m_{jk^{(1)}vl}^{(1)} \sim Pois(\sum_{s_w^{(1)}=1}^{S_w^{(1)}} d_{k^{(1)}vs_d^{(1)}}^{(1)} w_{jk^{(1)}s_w^{(1)}}^{(1)})$, 这边的$s_d^{(1)}, s_w^{(1)}$会和$l$有关

在$w_{jk^{(1)}s_w^{(1)}}^{(1)}$的方向上展开

$m_{jk^{(1)}vl}^{(1)} \sim Pois(\sum_{s_w^{(1)}=1}^{S_w^{(1)}} d_{k^{(1)}vs_d^{(1)}}^{(1)} w_{jk^{(1)}s_w^{(1)}}^{(1)}),$

推导$: s_d^{(1)} = l - s_w^{(1)} + 1, 1 \le s_w^{(1)} \le S_w^{(1)}, 1 \le l - s_w^{(1)} + 1 \le S_d^{(1)} \Rightarrow \max(1, l - S_d^{(1)} + 1) \le s_w^{(1)} \le \min(l, S_w^{(1)}),$

编程$: s_d^{(1)} = l - s_w^{(1)}, 0 \le s_w^{(1)} \le S_w^{(1)} - 1, 0 \le l^{(1)} - s_w^{(1)} \le S_d^{(1)} - 1 \Rightarrow \max(0, l - S_d^{(1)} + 1) \le s_w^{(1)} \le \min(l, S_w^{(1)} - 1)$

$\Rightarrow (m_{jk^{(1)}vl1}^{(1)},...,m_{jk^{(1)}vlS_w^{(t)}}^{(1)} \mid m_{jk^{(1)}vl}^{(1)}) \sim Multi(m_{jk^{(1)}vl}^{(1)}; \delta_{j1}^{(1)},...,\delta_{jS_w^{(1)}}^{(1)}), \delta_{js_w^{(1)}}^{(1)} = d_{k^{(1)}vs_d^{(1)}}^{(1)} w_{jk^{(1)}s_w^{(1)}}^{(1)} \,/\, \sum_{s_w^{(1)}=1}^{S_w^{(1)}} d_{k^{(1)}vs_d^{(1)}}^{(1)} w_{jk^{(1)}s_w^{(1)}}^{(1)}$

$\Rightarrow m_{jk^{(1)}vls_w^{(t)}}^{(1)} \sim Pois(d_{k^{(1)}vs_d^{(1)}}^{(1)} w_{jk^{(1)}s_w^{(1)}}^{(1)})$, 参照系是$s_w^{(1)}$，改变$v, l$的值会改变$s_d^{(1)}$

$\Rightarrow \sum_{v=1}^{|V|} \sum_{l=1}^{L_j} m_{jk^{(1)}vls_w^{(t)}}^{(1)} \sim Pois(w_{jk^{(1)}s_w^{(1)}}^{(1)}), w_{jk^{(1)}s_w^{(1)}}^{(1)} \sim Gam(\Phi_{k^{(1)}:}^{(2)} \theta_j^{(2)} / S_w^{(1)}, 1/c_j^{(2)})$

$q(w_{jk^{(1)}}^{(1)} \mid -) \sim Gam(\sum_{v=1}^{|V|} \sum_{l=1}^{L_j} m_{jk^{(1)}vl}^{(1)} + \Phi_{k^{(1)}:}^{(2)} \theta_j^{(2)} / S_w^{(1)}, 1/(1 + c_j^{(2)}))$

在$d_{k^{(1)}vs_d^{(1)}}^{(1)}$的方向上展开

$m_{jk^{(1)}vl}^{(1)} \sim Pois(\sum_{s_d^{(1)}=1}^{S_d^{(1)}} d_{k^{(1)}vs_d^{(1)}}^{(1)} w_{jk^{(1)}s_w^{(1)}}^{(1)})$, 注意$s_d^{(1)}$和$s_w^{(1)}$对应，且维度相同

推导$: s_w^{(1)} = l^{(1)} - s_d^{(1)} + 1$

编程$: s_w^{(1)} = l^{(1)} - s_d^{(1)}$

$\Rightarrow (d_{jk^{(1)}vl1}^{(1)},...,d_{jk^{(1)}vlS_d^{(t)}}^{(1)} \mid m_{jk^{(1)}vl}^{(1)}) \sim Multi(m_{jk^{(1)}vl}^{(1)}; \xi_{j1}^{(1)},..., \xi_{jS_d^{(1)}}^{(1)}), \xi_{js_d^{(1)}}^{(1)} = d_{k^{(1)}vs_d^{(1)}}^{(1)} w_{jk^{(1)}s_w^{(1)}}^{(1)} \,/\, \sum_{s_d^{(1)}=1}^{S_d^{(1)}} d_{k^{(1)}vs_d^{(1)}}^{(1)} w_{jk^{(1)}s_w^{(1)}}^{(1)}$

$\Rightarrow d_{jk^{(1)}vls_d^{(1)}}^{(1)} \sim Pois(d_{k^{(1)}vs_d^{(1)}}^{(1)} w_{jk^{(1)}s_w^{(1)}}^{(1)})$, 参照系是$s_d^{(1)}$，改变$v, l$的值会改变$s_w^{(1)}$

$\neq \sum_{v=1}^{|V|} \sum_{s_d^{(1)}=1}^{S_d^{(1)}} d_{jk^{(1)}vls_d^{(1)}}^{(1)} \sim Pois(w_{jk^{(1)}s_w^{(1)}}^{(1)}), (D_{jk^{(1)}:l:}^{(1)} \mid \sum_{v=1}^{|V|} \sum_{s_d^{(1)}=1}^{S_d^{(1)}} d_{jk^{(1)}vls_d^{(1)}}^{(1)}) \sim Multi(\sum_{v=1}^{|V|} \sum_{s_d^{(1)}=1}^{S_d^{(1)}} d_{jk^{(1)}vls_d^{(1)}}^{(1)} \mid D_{k^{(1)}}^{(1)})$, 论文上的错误写

$\Rightarrow \sum_{l=1}^{L_j} d_{jk^{(1)}vls_d^{(1)}}^{(1)} \sim Pois(d_{k^{(1)}vs_d^{(1)}}^{(1)} \sum_{s_w^{(1)}=1}^{S_w^{(1)}} w_{jk^{(1)}s_w^{(1)}}^{(1)}), \sum_{v=1}^{|V|} \sum_{l=1}^{L_j} \sum_{s_d^{(1)}=1}^{S_d^{(1)}} d_{jk^{(1)}vls_d^{(1)}}^{(1)} \sim Pois(\sum_{s_w^{(1)}=1}^{S_w^{(1)}} w_{jk^{(1)}s_w^{(1)}}^{(1)})$

$\Rightarrow (\sum_{l=1}^{L_j} D_{jk^{(1)}:l:}^{(1)} \mid \sum_{v=1}^{|V|} \sum_{l=1}^{L_j} \sum_{s_d^{(1)}=1}^{S_d^{(1)}} d_{jk^{(1)}vls_d^{(1)}}^{(1)}) \sim Multi(\sum_{v=1}^{|V|} \sum_{l=1}^{L_j} \sum_{s_d^{(1)}=1}^{S_d^{(1)}} d_{jk^{(1)}vls_d^{(1)}}^{(1)} \mid D_{k^{(1)}}^{(1)})$，实际用的

$q(D_{k^{(1)}}^{(1)} \mid -) \sim Dir(\sum_{j=1}^{J} \sum_{l=1}^{L_j} D_{jk^{(1)}:l:}^{(1)} + \eta^{(1)})$

$w_{jk^{(1)}}^{(1)} = \pi_{jk^{(1)}}^{(1)} \theta_{jk^{(1)}}^{(1)}$

$\sum_{v=1}^{|V|} \sum_{l=1}^{L_j} \sum_{s_w^{(t)}=1}^{S_w^{(t)}} m_{jk^{(1)}vls_w^{(t)}}^{(1)} \sim Pois(\theta_{jk^{(1)}}^{(1)}), \theta_{jk^{(1)}}^{(1)} \sim Gam(\Phi_{k^{(1)}:}^{(2)} \theta_j^{(2)}, 1/c_j^{(2)}),$

$q(w_{jk^{(1)}}^{(1)} \mid -) \sim Gam(\sum_{v=1}^{|V|} \sum_{l=1}^{L_j} m_{jk^{(1)}vl}^{(1)} + \Phi_{k^{(1)}:}^{(2)} \theta_j^{(2)} / S_w^{(1)}, 1/(1 + c_j^{(2)}))$

$q(\theta_{jk^{(1)}}^{(1)} \mid -) \sim Gam(\sum_{v=1}^{|V|} \sum_{l=1}^{L_j} \sum_{s_w^{(t)}=1}^{S_w^{(t)}} m_{jk^{(1)}vls_w^{(t)}}^{(1)} + \Phi_{k^{(1)}:}^{(2)} \theta_j^{(2)}, 1/(1 + c_j^{(2)}))$

$\sum_{v=1}^{|V|} \sum_{l=1}^{L_j} m_{jk^{(1)}vls_w^{(t)}}^{(1)} \sim Pois(\pi_{jk^{(1)}s_w^{(t)}}^{(1)} \theta_{jk^{(1)}}^{(1)}), \sum_{v=1}^{|V|} \sum_{l=1}^{L_j} \sum_{s_w^{(t)}}^{S_w^{(t)}} m_{jk^{(1)}vls_w^{(t)}}^{(1)} \sim Pois(\theta_{jk^{(1)}}^{(1)})$

$(\sum_{v=1}^{|V|} \sum_{l=1}^{L_j} m_{jk^{(1)}vls_w^{(t)}}^{(1)} \mid \sum_{v=1}^{|V|} \sum_{l=1}^{L_j} \sum_{s_w^{(t)}=1}^{S_w^{(t)}} m_{jk^{(1)}vls_w^{(t)}}^{(1)}) \sim Multi(\pi_{jk^{(1)}}^{(1)}), \pi_{jk^{(1)}}^{(1)} \sim Dir(\Phi_{k^{(1)}:}^{(2)} \theta_j^{(2)} / S_w^{(1)} 1_{S_w^{(1)}})$

$$\pi_{jk^{(1)}}^{(1)} \sim Dir(\frac{\sum_{v=1}^{|V|} \sum_{l=1}^{L_j} m_{jk^{(1)}vls_w^{(t)}}^{(1)}}{\sum_{v=1}^{|V|} \sum_{l=1}^{L_j} \sum_{s_w^{(t)}}^{S_w^{(t)}} m_{jk^{(1)}vls_w^{(t)}}^{(1)}} + \frac{\Phi_{k^{(1)}:}^{(2)} \theta_j^{(2)}}{S_w^{(1)}})$$

$$Possion(x=k \mid \lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2..., Gamma(x \mid \alpha,\beta)=\frac{(\frac{1}{\beta})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{1}{\beta}x}$$

$$\theta_j^{(1)} \sim Gam(\Phi^{(2)}\theta_j^{(2)}, 1/c_j^{(2)}), c_j^{(2)} \sim Gam(a_0, 1/b_0)$$

$$q(c_j^{(2)} \mid -) \sim \prod_{k^{(1)}=1}^{K^{(1)}} (c_j^{(2)})^{\Phi_{k^{(1)}:}^{(2)}\theta_j^{(2)}} e^{-c_j^{(2)}\theta_{jk^{(1)}}^{(1)}} (c_j^{(2)})^{a_0-1} e^{-b_0 c_j^{(2)}}$$

$$\sim Gam(\sum_{k^{(1)}=1}^{K^{(1)}} \Phi_{k^{(1)}:}^{(2)}\theta_j^{(2)} + a_0, 1/(\sum_{k^{(1)}=1}^{K^{(1)}} \theta_{jk^{(1)}}^{(1)} + b_0))$$

$$m_{jk^{(1)}vls_w^{(t)}}^{(1)} \sim Pois(d_{k^{(1)}vs_d^{(1)}}^{(1)} w_{jk^{(1)}s_w^{(1)}}^{(1)}) \Rightarrow m_{jk^{(1)}vls_w^{(t)}}^{(1)} \sim Pois(-\ln(1-p_j^{(1)}) d_{k^{(1)}vs_d^{(1)}}^{(1)} w_{jk^{(1)}s_w^{(1)}}^{(1)}), p_j^{(1)} = 1-e^{-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{v=1}^{|V|}\sum_{l=1}^{L_j}\sum_{s_w^{(t)}}^{S_w^{(t)}} m_{jk^{(1)}vls_w^{(t)}}^{(1)} \sim Pois(-\ln(1-p_j^{(1)})\theta_{jk^{(1)}}^{(1)}), \theta_{jk^{(1)}}^{(1)} \sim Gam(\Phi_{k^{(1)}:}^{(2)}\theta_j^{(2)}, 1/c_j^{(2)})$$

$$\Rightarrow \sum_{v=1}^{|V|}\sum_{l=1}^{L_j}\sum_{s_w^{(t)}}^{S_w^{(t)}} m_{jk^{(1)}vls_w^{(t)}}^{(1)} \sim NB(\Phi^{(2)}\theta_j^{(2)}, p_j^{(2)}), p_j^{(2)} := -\ln(1-p_j^{(1)})/[c_j^{(2)} - \ln(1-p_j^{(1)})]$$

$$p(x_{jk^{(1)}}^{(2)} \mid \sum_{v=1}^{|V|}\sum_{l=1}^{L_j}\sum_{s_w^{(t)}}^{S_w^{(t)}} m_{jk^{(1)}vls_w^{(t)}}^{(1)}) \sim CRT(\sum_{v=1}^{|V|}\sum_{l=1}^{L_j}\sum_{s_w^{(t)}}^{S_w^{(t)}} m_{jk^{(1)}vls_w^{(t)}}^{(1)}, \Phi_{k^{(1)}:}^{(2)}\theta_j^{(2)})$$

$$\Leftrightarrow x_{jk^{(1)}}^{(2)} \sim Pois(-\ln(1-p_j^{(2)})\Phi_{k^{(1)}:}^{(2)}\theta_j^{(2)})$$

$$(m_{jk^{(1)}1}^{(2)}, ..., m_{jk^{(1)}K^{(2)}}^{(2)} \mid x_{jk^{(1)}}^{(2)}) \sim Multi(x_{jk^{(1)}}^{(2)} \mid \frac{\Phi_{k^{(1)}k^{(2)}}^{(2)}\theta_{jk^{(2)}}^{(2)}}{\Phi_{k^{(1)}:}^{(2)}\theta_j^{(2)}}), m_{jk^{(1)}k^{(2)}}^{(2)} \sim Pois(-\ln(1-p_j^{(2)})\Phi_{k^{(1)}k^{(2)}}^{(2)}\theta_{jk^{(2)}}^{(2)})$$

$$\sum_{k^{(1)}=1}^{K^{(1)}} m_{jk^{(1)}k^{(2)}}^{(2)} \sim Pois((-\ln(1-p_j^{(2)})\theta_{jk^{(2)}}^{(2)}), \theta_{jk^{(2)}}^{(2)} \sim Gam(\Phi_{k^{(2)}:}^{(3)}\theta_j^{(3)}, 1/c_j^{(3)})$$

$$q(\theta_{jk^{(2)}}^{(2)} \mid -) \sim \frac{((-\ln(1-p_j^{(2)})\theta_{jk^{(2)}}^{(2)})^{\sum_{k^{(1)}=1}^{K^{(1)}} m_{jk^{(1)}k^{(2)}}^{(2)}}}{(\sum_{k^{(1)}=1}^{K^{(1)}} m_{jk^{(1)}k^{(2)}}^{(2)})!} e^{-(-\ln(1-p_j^{(2)})\theta_{jk^{(2)}}^{(2)})} \frac{(c_j^{(3)})^{\Phi_{k^{(2)}:}^{(3)}\theta_j^{(3)}}}{\Gamma(\Phi_{k^{(2)}:}^{(3)}\theta_j^{(3)})} (\theta_{jk^{(2)}}^{(2)})^{\Phi_{k^{(2)}:}^{(3)}\theta_j^{(3)}-1} e^{-c_j^{(3)}\theta_{jk^{(2)}}^{(2)}}$$

$$\sim Gam(\sum_{k^{(1)}=1}^{K^{(1)}} m_{jk^{(1)}k^{(2)}}^{(2)} + \Phi_{k^{(2)}:}^{(3)}\theta_j^{(3)}, 1/(-\ln(1-p_j^{(2)}) + c_j^{(3)}))$$

$$((m_{j1k^{(2)}}^{(2)}, ..., m_{jK^{(1)}k^{(2)}}^{(2)}) \mid \sum_{k^{(1)}=1}^{K^{(1)}} m_{jk^{(1)}k^{(2)}}^{(2)}) \sim Multi(\sum_{k^{(1)}=1}^{K^{(1)}} m_{jk^{(1)}k^{(2)}}^{(2)}, \phi_{:k^{(2)}}^{(2)}), \phi_{:k^{(2)}}^{(2)} \sim Dir(\eta^{(2)})$$

$$q(\phi_{:k^{(2)}}^{(2)} \mid -) \sim \prod_{j=1}^{J}\prod_{k^{(1)}=1}^{K^{(1)}} (\phi_{k^{(1)}k^{(2)}}^{(2)})^{m_{jk^{(1)}k^{(2)}}^{(2)}} \prod_{k^{(1)}=1}^{K^{(1)}} (\phi_{k^{(1)}k^{(2)}}^{(2)})^{\eta^{(2)}}$$

$$\sim Dir(\sum_{j=1}^{J} m_{jk^{(1)}k^{(2)}}^{(2)} + \eta^{(2)})$$

$$\theta_j^{(2)} \sim Gam(\Phi^{(3)}\theta_j^{(3)}, 1/c_j^{(3)}), c_j^{(3)} \sim Gam(a_0, 1/b_0)$$

$$q(c_j^{(3)} \mid -) \sim \prod_{k^{(2)}=1}^{K^{(2)}} (c_j^{(3)})^{\Phi_{k^{(2)}:}^{(3)}\theta_j^{(3)}} e^{-c_j^{(3)}\theta_{jk^{(2)}}^{(2)}} (c_j^{(3)})^{a_0-1} e^{-b_0 c_j^{(3)}}$$

$$\sim Gam(\sum_{k^{(2)}=1}^{K^{(2)}} \Phi_{k^{(2)}:}^{(3)}\theta_j^{(3)} + a_0, 1/(\sum_{k^{(2)}=1}^{K^{(2)}} \theta_{jk^{(2)}}^{(2)} + b_0))$$

$$m^{(2)}_{jk^{(1)}k^{(2)}} \sim Pois(-\ln(1-p_j^{(2)})\Phi^{(2)}_{k^{(1)}k^{(2)}}\theta^{(2)}_{jk^{(2)}})$$

$$\Rightarrow \sum\nolimits_{k^{(1)}=1}^{K^{(1)}} m^{(2)}_{jk^{(1)}k^{(2)}} \sim Pois(-\ln(1-p_j^{(2)})\theta^{(2)}_{jk^{(2)}}), \theta^{(2)}_{jk^{(2)}} \sim Gam(\Phi^{(3)}_{k^{(2)}:}\theta_j^{(3)}, 1/c_j^{(3)})$$

$$\Rightarrow \sum\nolimits_{k^{(1)}=1}^{K^{(1)}} m^{(2)}_{jk^{(1)}k^{(2)}} \sim NB(\Phi^{(3)}_{k^{(2)}:}\theta_j^{(3)}, p_j^{(3)}), p_j^{(3)} := -\ln(1-p_j^{(2)})/[c_j^{(3)} - \ln(1-p_j^{(2)})]$$

$$p(x^{(3)}_{jk^{(2)}} \mid \sum\nolimits_{k^{(1)}=1}^{K^{(1)}} m^{(2)}_{jk^{(1)}k^{(2)}}) \sim CRT(\sum\nolimits_{k^{(1)}=1}^{K^{(1)}} m^{(2)}_{jk^{(1)}k^{(2)}}, \Phi^{(3)}_{k^{(2)}:}\theta_j^{(3)})$$

$$\Leftrightarrow x^{(3)}_{jk^{(2)}} \sim Pois(-\ln(1-p_j^{(3)})\Phi^{(3)}_{k^{(2)}:}\theta_j^{(3)})$$

$$(m^{(3)}_{jk^{(2)}1}, ..., m^{(3)}_{jk^{(2)}K^{(3)}} \mid x^{(3)}_{jk^{(2)}}) \sim Multi(x^{(3)}_{jk^{(2)}} \mid \frac{\Phi^{(3)}_{k^{(2)}k^{(3)}}\theta^{(3)}_{jk^{(3)}}}{\Phi^{(3)}_{k^{(2)}:}\theta_j^{(3)}}), m^{(3)}_{jk^{(2)}k^{(3)}} \sim Pois(-\ln(1-p_j^{(3)})\Phi^{(3)}_{k^{(2)}k^{(3)}}\theta^{(3)}_{jk^{(3)}})$$

$$\sum\nolimits_{k^{(2)}=1}^{K^{(2)}} m^{(3)}_{jk^{(2)}k^{(3)}} \sim Pois((-\ln(1-p_j^{(3)})\theta^{(3)}_{jk^{(3)}}), \theta^{(3)}_{jk^{(3)}} \sim Gam(\gamma, 1/c_j^{(4)})$$

$$q(\theta^{(3)}_{jk^{(3)}} \mid -) \sim \frac{((-\ln(1-p_j^{(3)})\theta^{(3)}_{jk^{(3)}})^{\sum_{k^{(2)}=1}^{K^{(2)}} m^{(3)}_{jk^{(2)}k^{(3)}}}}{(\sum\nolimits_{k^{(1)}=1}^{K^{(1)}} m^{(2)}_{jk^{(1)}k^{(2)}})!} e^{-(-\ln(1-p_j^{(3)})\theta^{(3)}_{jk^{(3)}})} \frac{(c_j^{(4)})^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)} (\theta^{(3)}_{jk^{(3)}})^{\gamma-1} e^{-c_j^{(4)}\theta^{(3)}_{jk^{(3)}}}$$

$$\sim Gam(\sum\nolimits_{k^{(2)}=1}^{K^{(2)}} m^{(3)}_{jk^{(2)}k^{(3)}} + \gamma, 1/(-\ln(1-p_j^{(3)}) + c_j^{(4)}))$$

$$((m^{(3)}_{j1k^{(3)}}, ..., m^{(3)}_{jK^{(2)}k^{(3)}}) \mid \sum\nolimits_{k^{(2)}=1}^{K^{(2)}} m^{(3)}_{jk^{(2)}k^{(3)}}) \sim Multi(\sum\nolimits_{k^{(2)}=1}^{K^{(2)}} m^{(3)}_{jk^{(2)}k^{(3)}}, \phi^{(3)}_{:k^{(3)}}), \phi^{(3)}_{:k^{(3)}} \sim Dir(\eta^{(3)})$$

$$q(\phi^{(3)}_{:k^{(3)}} \mid -) \sim \prod\nolimits_{j=1}^{J} \prod\nolimits_{k^{(2)}=1}^{K^{(2)}} (\phi^{(3)}_{k^{(2)}k^{(3)}})^{m^{(3)}_{jk^{(2)}k^{(3)}}} \prod\nolimits_{k^{(2)}=1}^{K^{(2)}} (\phi^{(3)}_{k^{(2)}k^{(3)}})^{\eta^{(3)}}$$

$$\sim Dir(\sum\nolimits_{j=1}^{J} m^{(3)}_{jk^{(2)}k^{(3)}} + \eta^{(3)})$$

$$\theta_j^{(3)} \sim Gam(\gamma, 1/c_j^{(4)}), c_j^{(4)} \sim Gam(a_0, 1/b_0)$$

$$q(c_j^{(4)} \mid -) \sim \prod\nolimits_{k^{(3)}=1}^{K^{(3)}} (c_j^{(4)})^{\gamma} e^{-c_j^{(4)}\theta^{(3)}_{jk^{(3)}}} (c_j^{(4)})^{a_0-1} e^{-b_0 c_j^{(4)}}$$

$$\sim Gam(\sum\nolimits_{k^{(3)}=1}^{K^{(3)}} \gamma + a_0, 1/(\sum\nolimits_{k^{(3)}=1}^{K^{(3)}} \theta^{(3)}_{jk^{(3)}} + b_0))$$