Санкт-Петербургский политехнический университет имени Петра Великого

Физико-механический институт

Кафедра прикладной математики

Интервальный анализ
Отчёт по курсовой работе

Выполнил:

Студент: Бочкарев И. А.
Группа: 3630102/80201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент
Баженов Александр Николаевич

2022 г.

Содержание

Список таблиц

Список иллюстраций

1 Постановка задачи

Исследовать поведение субдифференциального метода Ньютона при решении ИСЛАУ:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2,4] & [-5,-1] & [-2,3] \\ [-3,1] & [5,7] & [4,6] \\ [-1,1] & [-2,1] & [-7,-2] \end{pmatrix} \tag{1}$$

, где правая часть:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-28,43] \\ [-60,29] \\ [-11,39] \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [3,4] & [-5,-2] & [-2,2] \\ [-3,-1] & [6,7] & [5,6] \\ [-1,0] & [-1,1] & [-4,1] \end{pmatrix} \tag{3}$$

, где правая часть:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-28,43] \\ [-60,69] \\ [-11,39] \end{pmatrix} \tag{4}$$

Проанализировать результаты и исследовать сходимость метода.

2 Теория

2.1 Особенные матрицы

Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ называется неособенной (невырожденной), если неособенными являются все точечные $n \times n$ - матрицы $A \in \mathbf{A}$.

Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ называется особенной (вырожденной), если она содержит особенную точечную матрицу.

Теорема. Пусть интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ такова, что $mid\ \mathbf{A}$ неособенная и

$$\max_{1\le j\le n}(rad\ \mathbf{A} \cdot |(mid\ \mathbf{A})^{-1}|)_{jj} \ge 1$$

Тогда $\mathbf{A}$ особенная.

2.2 Субдифференциальный метод Ньютона

Итерационный метод строится по следующей формуле

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \tau(D^{(k-1)})^{-1}\mathcal{F}(x^{(k-1)}) \tag{5}$$

где $(D^{(k-1)})^{-1}\mathcal{F}(x^{(k-1)})$ - субградиент в $x^{(k-1)}$, $\tau \in [0;1]$ - релаксационный параметр, с помощью которого можно расширить область сходимости. На практике рекомендуется брать $\tau = 1$, тогда метод даст наиболее точное решение. В этой работе в качестве τ будет взята единица

При этом

$$\mathcal{F}(y) = sti(Asti^{-1}(y)b) \tag{6}$$

$$sti(x) \ : \ (x_1, ..., x_n) \to (-\underline{x_1}, ..., -\underline{x_n}, \overline{x_1}, ..., \overline{x_n}) \tag{7}$$

2.2.1 Условие остановки

$$\|\mathcal{F}(x^{(k)})\| < \varepsilon \tag{8}$$

2.2.2 Сходимость метода

Теорема. Пусть интервальная $n \times n$ - матрица $\mathbf{C}$ удовлетворяет условию построчной согласованности, и интервальная $2n \times 2n$ - матрица

$$\begin{pmatrix} (pro\ \mathbf{C})^{+} & (pro\ \mathbf{C})^{-} \\ (pro\ \mathbf{C})^{-} & (pro\ \mathbf{C})^{+} \end{pmatrix}$$

является неособенной. Если при этом $\mathbf{C}$ достаточно узка, то алгоритм SubDiff2 со значением релаксационного параметра $\tau = 1$ сходится за конечное число итераций к $sti(\mathbf{x}^{*})$, где $\mathbf{x}^{*}$ — формальное решение интервальной системы $\mathbf{C}x + \mathbf{d} = 0$.

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена на языке программирования Python в среде разработки PyCharm. Использованы библиотеки numpy, kaucherpy для реализации вычислений. Исходный код лабораторной работы приведён в приложении в виде ссылки на репозиторий GitHub.

4 Результаты

Будем использовать параметр релаксации $\tau = 1$ в методе Ньютона.

4.1 Проверка на работоспособность

Прежде чем решать поставленную задачу, проверим работоспособность реализованных методов на примере, на который заранее знаем ответ[1].

$$\begin{pmatrix} [2,\ 4] & [-2,\ 1] \\ [-1,\ 2] & [2,\ 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2,\ 2] \\ [-2,\ 2] \end{pmatrix}$$

С помощью теоремы из пункта 2.1 получаем, что матрица не является особенной.

4.1.1 Субдифференциальный метод

С помощью теоремы из пункта 2.2.1 получили, что субдифференциальный метод на данной системе сходится за конечное число итераций.

Действительно, всего за 2 итерации алгоритм сошелся к следующим значениям

$$\begin{pmatrix} [-0.3333333,\ 0.3333333] \\ [-0.3333333,\ 0.3333333] \end{pmatrix}$$

Теперь, когда мы уверенны в рабоспособности запрограммированного метда, перейдем к исследованию ИСЛАУ 1 и 3

4.2 Решение поставленной задачи

Для ИСЛАУ 1 получаем уверенную сходимость метода за 4 итерации к точному решению

$$\begin{pmatrix} [2,\ 5] \\ [-3,\ 4] \\ [-4,\ -1] \end{pmatrix}$$

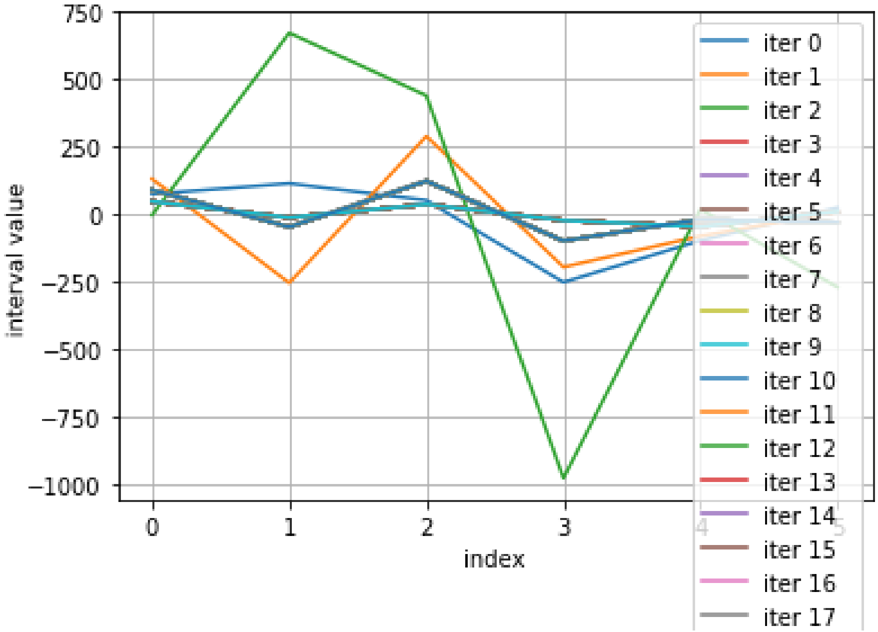
С помощью теоремы из пункта 2.1 получаем, что матрица не является особенной.

4.2.1 Субдифференциальный метод

С помощью теоремы из пункта 2.2.1 получили, что субдифференциальный метод на данной системе сходится за конечное число итераций. Для ИСЛАУ 3 метод останавливается посе 100 итераций, но так и не сходится к точному значению. Получаем следующий выход метода

$$\begin{pmatrix} [-1.66666667\ -56.66666667] \\ [-46.11111111\ 19.44444444] \\ [41.22222222\ -8.77777778] \end{pmatrix}$$

Посмотрим на график изменения значений выходного вектора в зависимости от числа итераций, по оси x отмечечны индексы вектора интервалов, так например в интервале $[a_{11}, a_{12}] a_{11} = 1 a_{12} = 2$.



С помощью теоремы из пункта 2.1 получаем, что матрица является особенной.

Субдифференциальный метод на данной системе не сходится за конечное число итераций.

Для этой интервальной линейной системы алгоритм генерирует осциллирующую последовательность, которая, очевидно, не сходится ни к какому пределу. Интересно отметить, что правая часть этой системы шире, чем в предыдущем примере, а все элементы матрицы, кроме a_{33}, тоньше, что говрит о том, что данная ИСЛАУ еще лучше подчинаетсятеореме о сходимости. Тем не менее метод не работает.

4.3 Исследование

Сразу стоит отметить, что изменение параметра τ при применении метода к системам, на которых метод показывает хорошую сходимость, значительно замедляет работу.

В качестве же экспeремента было принято решение внести изменения в компоненту a_{33} и проверить сходимость метода. Был получен следующий результат:

$\mathbf{a}_{33-inf}$	**Results**	$\mathbf{a}_{33-sup}$	**Results**
0.0	Расходимость	-10.0	Сходимость
0.5	Расходимость	-9.5	Сходимость
1.0	Расходимость	-9.0	Сходимость
1.5	Сходимость	-8.5	Сходимость
2.0	Расходимость	-8.0	Сходимость
2.5	Расходимость	-7.5	Сходимость
3.0	Расходимость	-7.0	Сходимость
3.5	Сходимость	-6.5	Сходимость
4.0	Расходимость	-6.0	Сходимость
4.5	Расходимость	-5.5	Сходимость
5.0	Сходимость	-5.0	Сходимость
5.5	Сходимость	-4.5	Сходимость
6.0	Расходимость	-4.0	Сходимость
6.5	Расходимость	-3.5	Сходимость
7.0	Сходимость	-3.0	Сходимость
7.5	Расходимость	-2.5	Сходимость
8.0	Сходимость	-2.0	Сходимость
8.5	Сходимость	-1.5	Сходимость
9.0	Сходимость	-1.0	Сходимость
9.5	Сходимость	-0.5	Расходимость

Таблица 1: Результаты коррекции значения интервала a_{33} при $\tau = 1$

с каждым шагом изменялось значение inf или sup интервала a_{33}. Несложно заметить, что второе действие принесло более однозначный результат.

Проведем еще один эксперимент и попробуем изменить параметр релаксации на $\tau = 0.6$, продолжая варьировать значение inf и sup

$\mathbf{a}_{33-inf}$	**Results**	$\mathbf{a}_{33-sup}$	**Results**
0.0	Расходимость	−10.0	Сходимость
0.5	Расходимость	−9.5	Сходимость
1.0	Расходимость	−9.0	Сходимость
1.5	Сходимость	−8.5	Сходимость
2.0	Сходимость	−8.0	Сходимость
2.5	Сходимость	−7.5	Сходимость
3.0	Сходимость	−7.0	Сходимость
3.5	Сходимость	−6.5	Сходимость
4.0	Сходимость	−6.0	Сходимость
4.5	Сходимость	−5.5	Сходимость
5.0	Сходимость	−5.0	Сходимость
5.5	Сходимость	−4.5	Сходимость
6.0	Сходимость	−4.0	Сходимость
6.5	Сходимость	−3.5	Сходимость
7.0	Сходимость	−3.0	Сходимость
7.5	Сходимость	−2.5	Сходимость
8.0	Сходимость	−2.0	Сходимость
8.5	Сходимость	−1.5	Сходимость
9.0	Сходимость	−1.0	Сходимость
9.5	Сходимость	−0.5	Расходимость

Таблица 2: Результаты коррекции значения a_{33} при $\tau = 0.6$

$\Longrightarrow$ область сходимости расширилась

5 Обсуждение

- Субдифференциальный метод Ньютона является модификацией метода градиентного спуска, который, однако, не накладывает на отображение требования дифференцируемости, а требует лишь порядковой выпуклости
- Алгоритм дает точное решение задачи за небольшое конечное число итераций, обычно не превышающее размерность системы. В некоторых случаях параметр релаксации $\tau < 1$ улучшает сходимость субдифференциального метода Ньютона. Но чем меньше τ, тем медленнее работает Алгоритм.
- Кроме того, понижение параметра релаксации помогает выделить четкую "область сходимости"в ситуациях колебания. Операция не дает результата, если колебания нет.

6 Приложения

Код программы на GitHub, URL: `https://github.com/BoIlAl/Interval-Analysis/coursework`