

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

**Интервальный анализ**  
**Отчёт по лабораторной работе №4**

Выполнил:

Студент: Бочкарев И. А.

Группа: 3630102/80201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

2022 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>2</b>
1.1	Получение решения по теореме Зюзина . . . . .	2
1.2	Получение формального решения ИСЛАУ субдифференциальным методом Ньютона . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Теория</b>	<b>2</b>
2.1	Теорема Зюзина . . . . .	2
2.2	Субдифференциальный метод Ньютона . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Реализация</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Результаты</b>	<b>4</b>
4.1	Получение решения по теореме Зюзина . . . . .	4
4.2	Получение формального решения ИСЛАУ субдифференциальным методом Ньютона . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Обсуждения</b>	<b>11</b>

# 1 Постановка задачи

## 1.1 Получение решения по теореме Зюзина

Выбрать ИСЛАУ  $2 \times 2$ . Построить итерационную схему с разложением матрицы на диагональную и недиагональную части.

Провести вычисления и привести иллюстрации:

- Брусов итерационного процесса
- Радиусов решения в зависимости от номера итерации

## 1.2 Получение формального решения ИСЛАУ субдифференциальным методом Ньютона

Для ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} [3, 4] & [5, 6] \\ [-1, 1] & [-3, 1] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [-3, 3] \\ [-1, 2] \end{pmatrix} \quad (1)$$

построить итерационную схему субдифференциального метода Ньютона. Провести вычисления и привести иллюстрации:

- Брусов итерационного процесса
- Сравнить результаты с решением ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} [3, 4] & [5, 6] \\ [-1, 1] & [-3, 1] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [-3, 4] \\ [-1, 2] \end{pmatrix} \quad (2)$$

# 2 Теория

## 2.1 Теорема Зюзина

Говорят, что квадратная интервальная  $n \times n$  матрица  $\mathbf{A}$  имеет диагональное преобладание, если для любого  $i = 1, 2, \dots, n$ , если

$$\langle \mathbf{a}_{ii} \rangle > \sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| \quad (3)$$

$\langle \mathbf{a} \rangle$  - мигнитуда интервала.

### Теорема Зюзина

Для ИСЛАУ

$$\mathbf{C}x = \mathbf{d} \quad (4)$$

где  $\mathbf{C} \in KR^{n \times n}$ ,  $\mathbf{d} \in KR^n$ . Правильная проекция матрицы  $\mathbf{C}$  имеет диагональное преобладание. Тогда решение системы существует и единственно. Пусть  $\mathbf{D} = \text{diag}\{\mathbf{c}_{11}, \mathbf{c}_{22}, \dots, \mathbf{c}_{nn}\}$ ,  $\mathbf{E}$  - матрица, полученная из  $\mathbf{C}$  занулением диагональных элементов. Тогда для некоторого  $x^0$  итерационный процесс:

$$x^{k+1} = \text{invD}(\mathbf{d} \ominus \mathbf{E}x^{(k)}), k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

в силу диагонального преобладания  $\mathbf{C}$  будет сходиться к единственной неподвижной точке.

## 2.2 Субдифференциальный метод Ньютона

Рассматриваем ИСЛАУ:

$$\mathbf{C}x = \mathbf{d} \quad (6)$$

Отображение  $si : KR^n \rightarrow R^{2n}$  вида

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \rightarrow (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \quad (7)$$

называется простейшим погружением.

Для решения индуцированных уравнения  $G(y) = 0$  такого что

$$G(y) = si(\mathbf{C}si^{-1}(\mathbf{y})) - si(\mathbf{d}) \quad (8)$$

в  $R^{2n}$  развит субдифференциальный метод Ньютона:

Выбираем некоторое начальное приближение  $x^0 \in R^{2n}$ . Если  $(k-1)$  приближение  $x^{(k-1)} \in R^{2n}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  уже найдено, то вычисляем какой-нибудь субградиент  $D^{(k-1)}$  отображение  $G$  в точке  $x^{(k-1)}$  и полагаем

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \tau(D^{(k-1)})^{-1}G(x^{(k-1)}) \quad (9)$$

где  $\tau \in [0, 1]$  - некоторая константа. Начальное приближение можно найти из решения "средней" системы.

$$(\text{mid}\mathbf{C})' \cdot x^{(0)} = \text{sid} \quad (10)$$

где через  $'$  обозначена точечная матрица вида:

$$A = \begin{pmatrix} A^+ & -A^- \\ -A^- & A^+ \end{pmatrix} \quad (11)$$

## 3 Реализация

Язык программирования: Python. Среда разработки: PyCharm. Ссылка на реализацию: <https://github.com/Bo11Al/Interval-Analysis/labs/reports/lab4>

## 4 Результаты

### 4.1 Получение решения по теореме Зюзина

Возьмём матрицу

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [5, 6] & [3, 4] \\ [-1, 1] & [2, 3] \end{pmatrix} \quad (12)$$

и вектор  $\mathbf{x} = ([1, 2], [2, 4])^T$  и построим вектор правых частей:

$$\mathbf{b} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} [11, 28] \\ [2, 14] \end{pmatrix} \quad (13)$$

Будем рассматривать систему:

$$\begin{cases} [5, 6] \cdot x_1 + [3, 4] \cdot x_2 = [11, 28] \\ [-1, 1] \cdot x_1 + [2, 3] \cdot x_2 = [2, 14] \end{cases} \quad (14)$$

В качестве начального приближения возьмём точку  $\mathbf{x}^{(0)} = ([-10, 10], [-10, 10])^T$

Видно, что интервальная матрица  $\mathbf{C}$  имеет диагональное преобладание.

Значит для ИСЛАУ 14 справедлива теорема Зюзина.

Критерий останова итерационного процесса 5 - малость изменения бруса на текущей итерации относительно бруса на предыдущей итерации:  $\varepsilon < 10^{-16}$ .

Процесс остановился после 52 итераций в точке  $\mathbf{x} = ([1.0, 2.0], [2.0, 4.0])^T$ .

Приведём соответствующие иллюстрации:

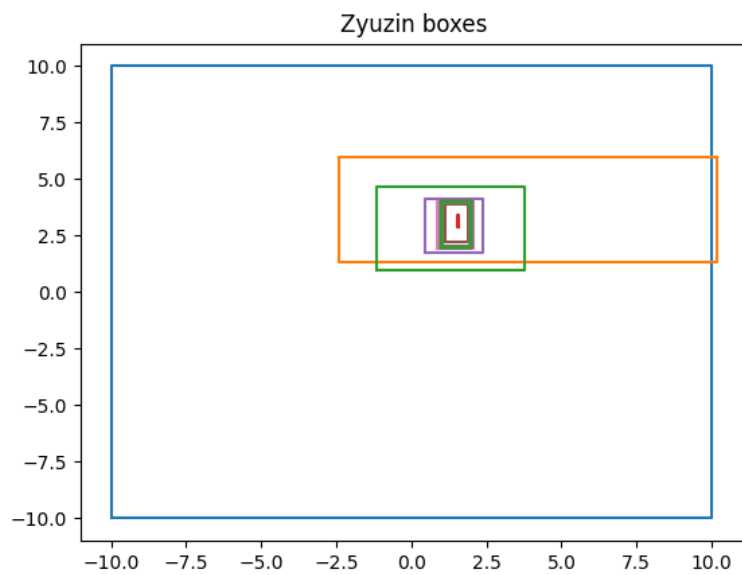


Рис. 1: Положения брусов при итерациях

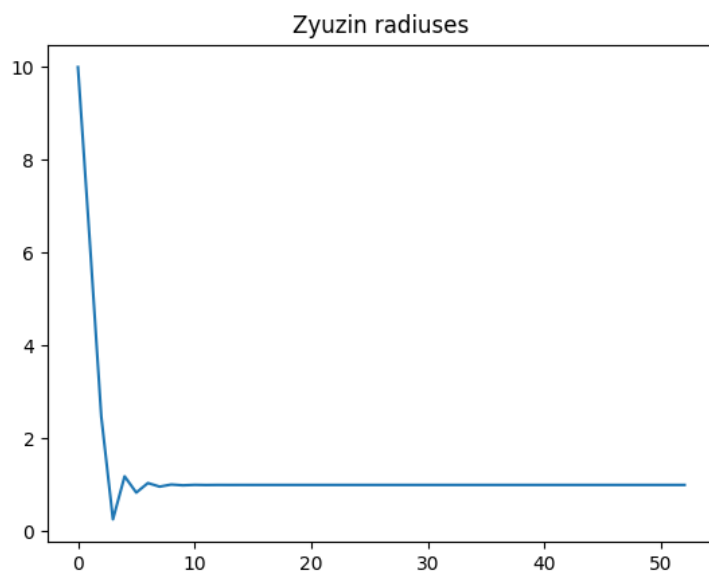


Рис. 2: График радиусов брусов в зависимости от номера итерации

## 4.2 Получение формального решения ИСЛАУ субдифференциальным методом Ньютона

Сначала рассмотрим решение системы 1.

Критерий останова итерационного процесса 9 - малость изменения бруса на текущей итерации относительно бруса на предыдущей итерации:  $\varepsilon < 10^{-16}$ . Параметр  $\tau = 1$ .

Процесс остановился после 4 итераций в точке  $\mathbf{x} = ([0.0, 0.5], [-0.5, 0.167])^T$ . Приведём соответствующие иллюстрации.

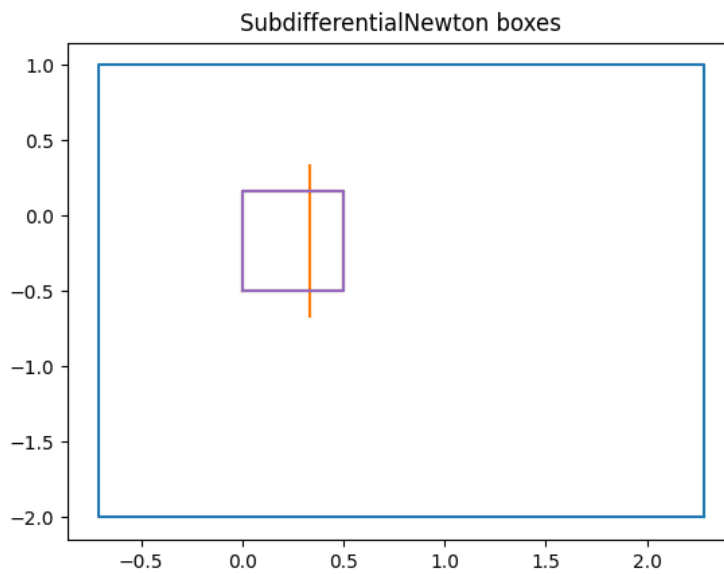


Рис. 3: Положения брусков при итерациях

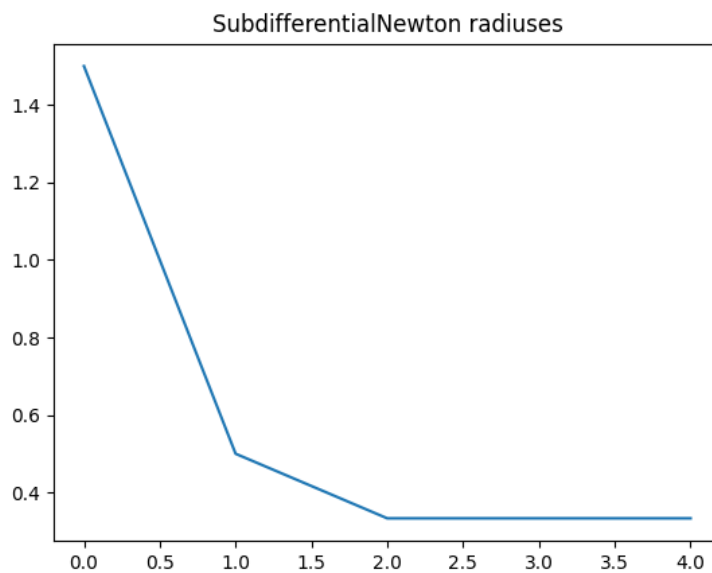


Рис. 4: График радиусов брусков в зависимости от номера итерации

Теперь рассмотрим решение системы 1.2.

Итерационный процесс не сходится, а через 8 итерации уходит в цикл длиной 4 точки. Параметр  $\tau = 1$ . Соответствующие иллюстрации для первых 100 итераций.



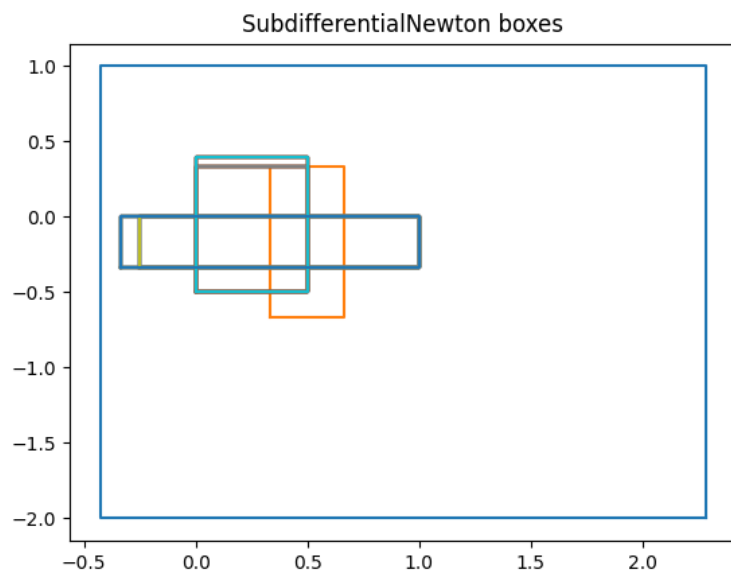


Рис. 5: Положения брусов при итерациях,  $\tau = 1$

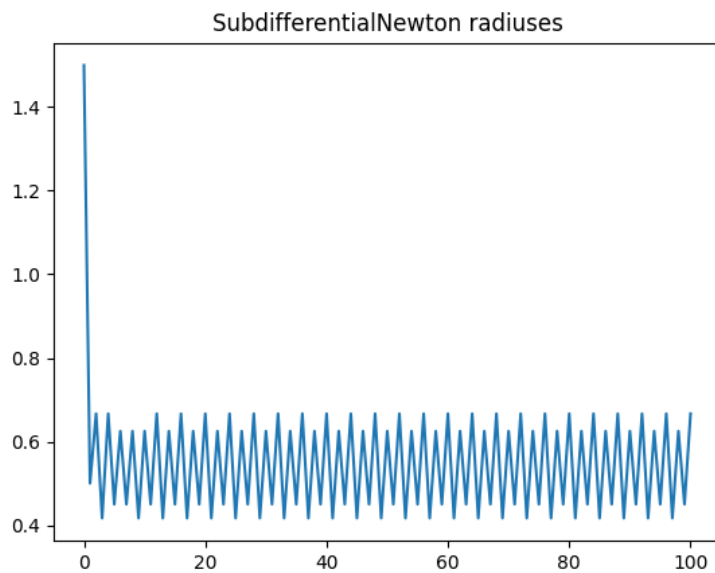


Рис. 6: График радиусов брусов в зависимости от номера итерации,  $\tau = 1$

Уменьшим параметр  $\tau = 0.1$ . Соответствующие иллюстрации для пер-

вых 100 итераций.

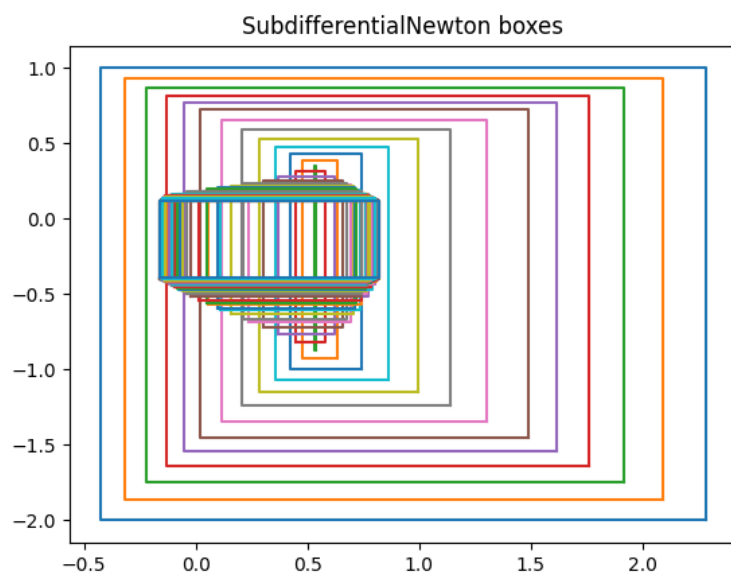


Рис. 7: Положения брусов при итерациях,  $\tau = 0.1$

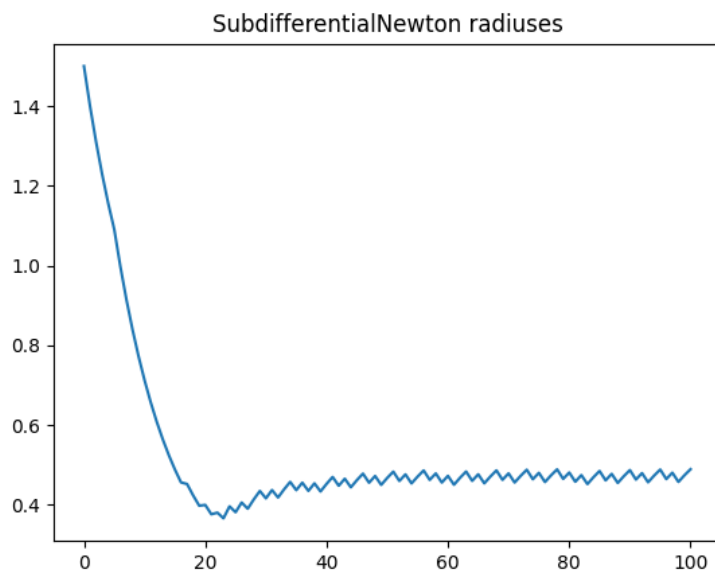


Рис. 8: График радиусов брусков в зависимости от номера итерации,  $\tau = 0.1$

Итерационный процесс также не сходится, как и в случае с  $\tau = 1$ , а ходит по циклу той длины 5.

Рассмотрим подробнее как меняются брусья в области минимума

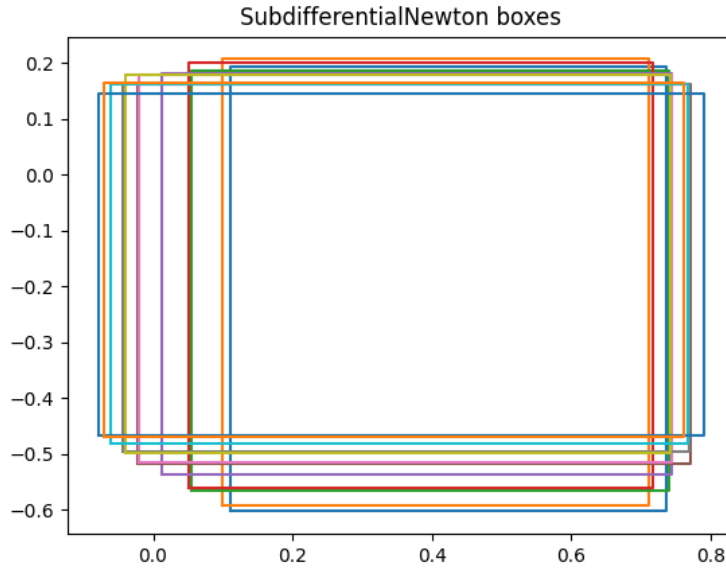


Рис. 9: Положения брусов с 18-ой по 30-ую итерацию,  $\tau = 0.1$

## 5 Обсуждения

Из результатов решения системы 14 видно, что итерационная схема с разложением матрицы на диагональную и недиагональную для системы, удовлетворяющей условию теоремы Зюзина, сходиться. На рисунках 1 - 2 можно заметить, что до четвёртой итерации радиус бруса монотонно убывает и, достигнув минимального значения, которое сильно меньше радиуса бруса решения, на четвёртой итерации, затем постепенно начинает сходиться к решению системы.

Из результатов решения систем 1, 1.2 видно, что у субдифференциального метода Ньютона могут возникнуть проблемы со сходимостью. Итерационный процесс 9 для системы 1 сходится достаточно быстро. В свою очередь для системы 1.2 процесс не сходится, а закичивается. В таком случае подбор параметра  $\tau$  может улучшить ситуацию:

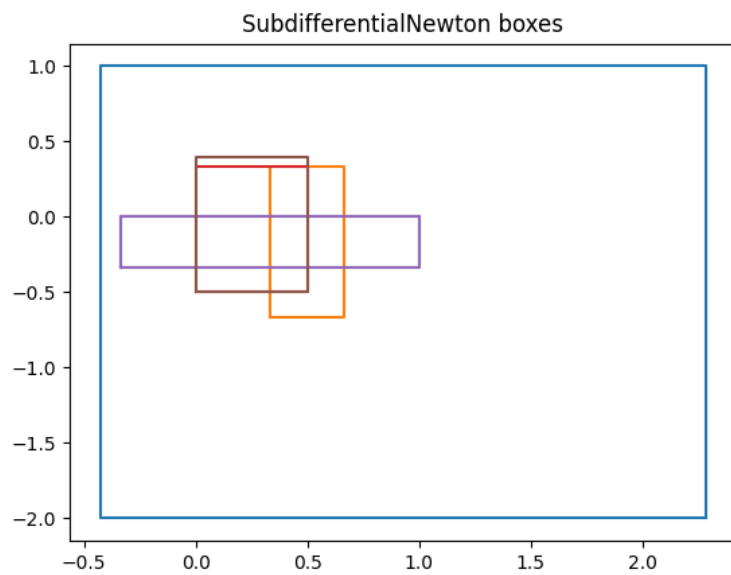


Рис. 10: Цикл брусьев при итерациях, система 1.2,  $\tau = 1$

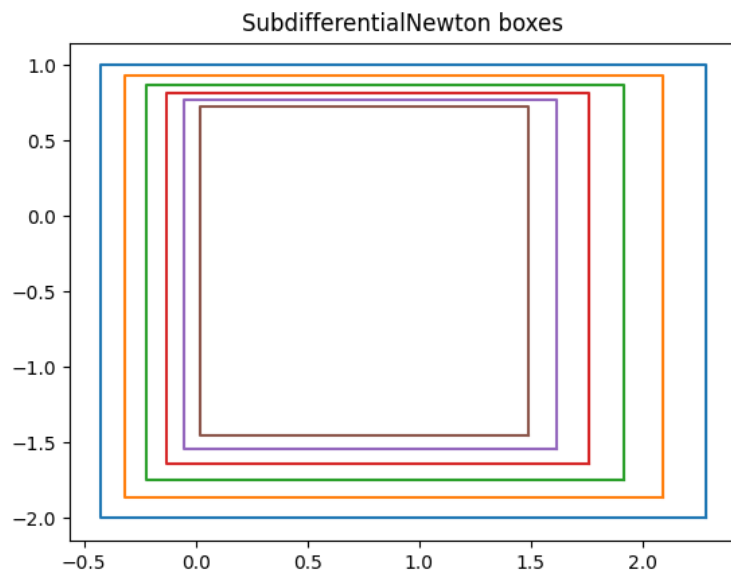


Рис. 11: Цикл брусьев при итерациях, система 1.2,  $\tau = 0.1$

На рисунках 10 - 11 видно, что при значении  $\tau = 0.1$  брусья в цикле

изменяются на каждой итерации меньше, чем при  $\tau = 1$ . Хотя радиус брусьев почти не меняется при разных значениях  $\tau$ , что видно на рисунках 6, 9. Также стоит отметить, что при  $\tau = 0.1$  средний брус в цикле  $\mathbf{x} = ([-0.15, 0.8], [-0.4, 0.13])$  достаточно близко к решению системы 1.2.