

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Интервальный анализ
Отчёт по лабораторной работе №2

Выполнил:

Студент: Бочкарев И. А.

Группа: 3630102/80201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

2022 г.

Содержание

| | | |
|----------|-----------------------------------|----------|
| 1 | Постановка задачи | 2 |
| 1.1 | Линейный случай | 2 |
| 1.2 | Нелинейный случай | 2 |
| 2 | Теория | 3 |
| 2.1 | Линейный метод Кравчика | 3 |
| 2.2 | Общий метод Кравчика | 3 |
| 3 | Реализация | 4 |
| 4 | Результаты | 4 |
| 4.1 | Линейный случай | 4 |
| 4.2 | Нелинейный случай | 6 |
| 5 | Обсуждение | 8 |

1 Постановка задачи

1.1 Линейный случай

Выбрать ИСЛАУ 2×2 вида:

$$\begin{cases} a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = c \\ 1 \cdot x_1 - k \cdot x_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где a, b - положительные числа, c, k - положительные интервалы.

Оценить внешнее множество решений этой системы методом Кравчика.

- Определить спектральный радиус матрицы
- Провести оценку начального бруса решений

Провести вычисления и привести иллюстрации:

- Положения брусков при итерациях
- Графики радиусов рабочих брусков
- Сходимость алгоритма

1.2 Нелинейный случай

Выбрать систему вида:

$$\begin{cases} a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = c \\ \frac{x_1}{x_2} = k \end{cases} \quad (2)$$

где a, b - положительные числа, c, k - положительные интервалы.

Оценить внешнее множество решений этой системы методом Кравчика.

Провести вычисления и привести иллюстрации:

- Положения брусков при итерациях
- Графики радиусов рабочих брусков
- Сходимость алгоритма

2 Теория

2.1 Линейный метод Кравчика

Рассматриваем ИСЛУА $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Выбираем начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)}$ так, чтобы $\Xi_{uni} \subseteq \mathbf{x}^{(0)}$ и затем итерируем:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\Lambda \mathbf{b} + (I - \Lambda \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)}) \cap \mathbf{x}^{(k)}, k = 0, 1, \dots \quad (3)$$

где Λ - некоторая фиксированная точечная матрица, которая является предобуславливающей матрицей для исходной ИСЛУА.

Обычно Λ берут следующим образом.

$$\Lambda = (\text{mid} \mathbf{A})^{-1} \quad (4)$$

Если $\eta = \|I - \Lambda \mathbf{A}\|_{\infty} \leq 1$, тогда в качестве начального приближения можно выбрать брус:

$$\mathbf{x}^{(0)} = ([-\theta, \theta], \dots, [-\theta, \theta])^T \quad (5)$$

где $\theta = \frac{\|\Lambda \mathbf{b}\|_{\infty}}{1-\eta}$.

Предложение. Итерационный процесс

$$x^{(k+1)} = C(x^{(k)}) + d, k = 0, 1, \dots \quad (6)$$

сходится, когда $\rho(|C|) \leq 1$, где $|C|$ - матрица составленная из модулей элементов C .

2.2 Общий метод Кравчика

Пусть на бресе $\mathbf{X} \in IR$ задана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$F(x) = 0 \quad (7)$$

где $F(x) = \{F_1(x), \dots, F_n(x_n)\}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Оператором Кравчика относительно точки \bar{x} называется отображение $K : ID \times R \rightarrow IR^n$:

$$K(\mathbf{X}, \bar{x}) = \bar{x} - \Lambda \cdot F(\bar{x}) - (I - \Lambda \cdot \mathbf{L}) \cdot (\mathbf{X} - \bar{x}) \quad (8)$$

где \mathbf{L} - интервальная матрица Липшица отображения F на бресе \mathbf{X} , Λ - некоторая точечная матрица, выполняющая роль предобуславливателя. Тогда итерационный процесс:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} \cap K(\mathbf{X}^{(k)}, \bar{x}^{(k)}) \quad (9)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, и $\bar{x}^{(k)} \in \mathbf{X}^{(k)}$, сходится для некоторого начального бруса $\mathbf{X}^{(0)}$.

В качестве интервальной матрицы \mathbf{L} можно взять Якобиан $J(\mathbf{X})$, а в матрицу $\Lambda = (\text{mid} J(\mathbf{X}))^{-1}$

3 Реализация

Язык программирования: Python. Среда разработки PyCharm. Ссылка на реализацию: <https://github.com/Bo11Al/Interval-Analysis/labs/reports/lab2>

4 Результаты

4.1 Линейный случай

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = [4, 5] \\ 1 \cdot x_1 - [1, 2] \cdot x_2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Матрица $I - \Lambda A$ имеем вид:

$$\begin{pmatrix} [0, 0] & [-0.25, 0.25] \\ [0, 0] & [-0.167, 0.167] \end{pmatrix} \quad (11)$$

Тогда $\rho(|I - \Lambda A|) \approx 0.1667$, значит итерационный процесс 3 сходиться.

Дадим оценку начального бруса:

$\eta = \|I - \Lambda A\|_\infty = 0.25 < 1$, тогда справедлива оценка 5. Вычисляя коэффициент θ , получим $\theta \approx 1.667$.

Критерий останова: малость изменения бруса, $\varepsilon < 10^{-16}$.

Процесс остановился после 22 итераций в точке: $\mathbf{x} = ([0.750, 1.50], [0.50, 1.00])^T$.

Приведём соответствующие иллюстрации:

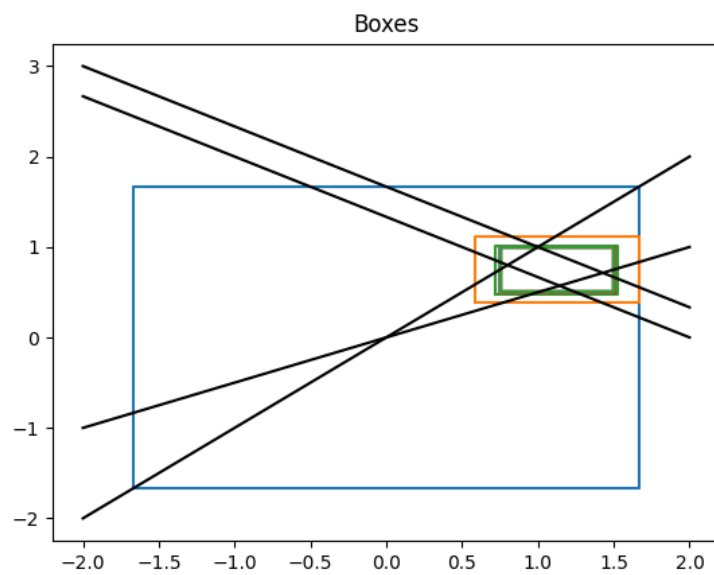


Рис. 1: Положения брусков при итерациях

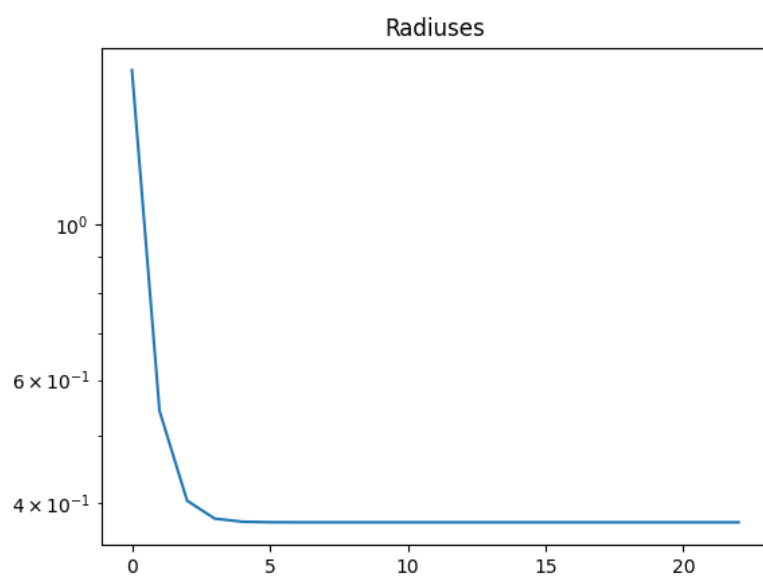


Рис. 2: График радиусов рабочих брусков

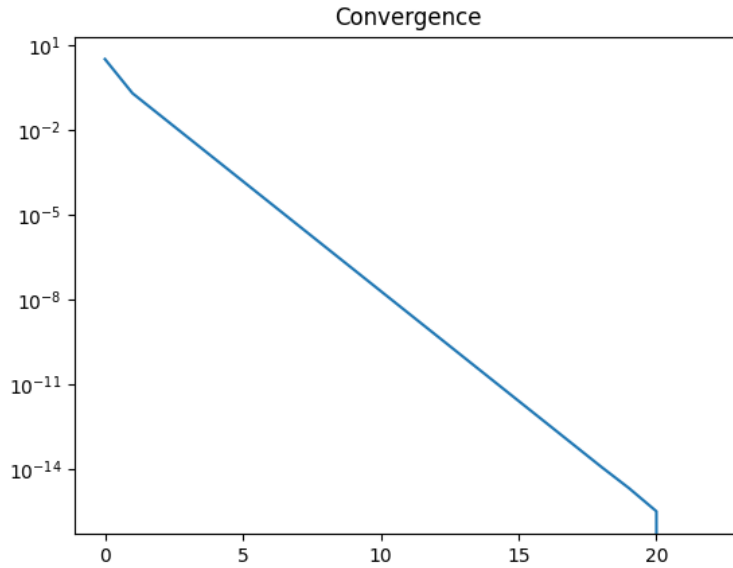


Рис. 3: Сходимость алгоритма

4.2 Нелинейный случай

Рассмотрим систему с теми же коэффициентами a, b и интервалами c, k , что и в 10:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = [4, 5] \\ \frac{x_1}{x_2} = [1, 2] \end{cases} \quad (12)$$

В качестве начального возьмём брус $X^{(0)} = ([0.25, 4], [0.25, 4])^T$.

Критерий останова: малость изменения бруса, $\varepsilon < 10^{-16}$.

Процесс остановился на 174 итерации в точке: $\mathbf{x} = ([0.250, 2.111], [0.250, 1.412])^T$.

Приведём соответствующие иллюстрации:

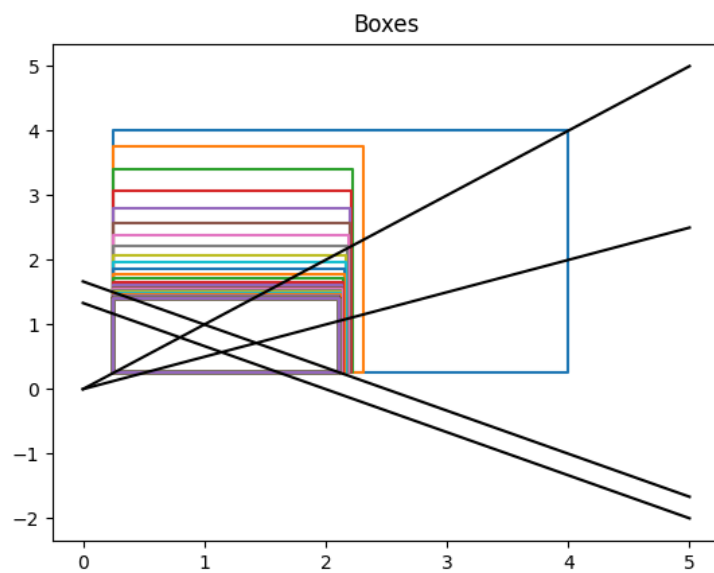


Рис. 4: Положения брусов при итерациях

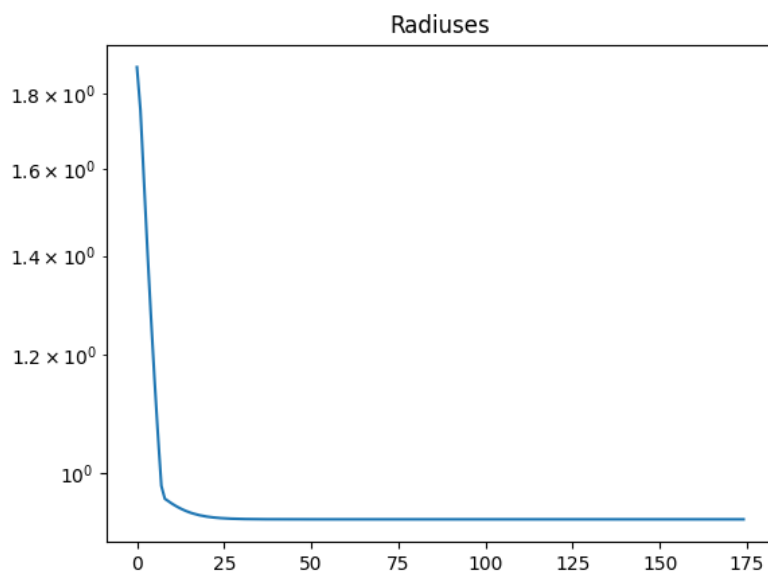


Рис. 5: График радиусов рабочих брусков

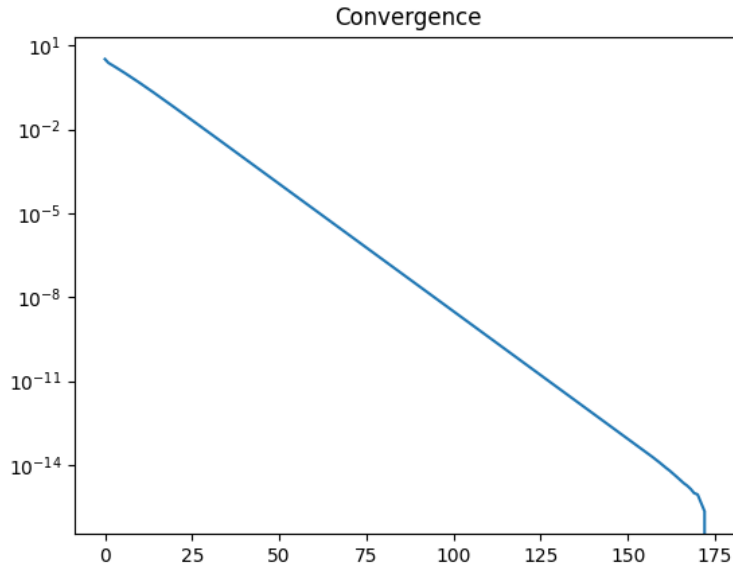


Рис. 6: Сходимость алгоритма

5 Обсуждение

Сначала отметим, что системы 10 и 12 имеют одинаковое объединённое множество решений, что также видно на рисунках 1, 4. На рисунках 1 и 4 видно, как с каждой итерацией уменьшается брус, только для линейного случая наблюдается куда более быстрая сходимость. Через три итерации радиус бруса почти перестаёт изменяться, а центр бруса почти не перемещается, что также подтверждают рисунки 2, 3. В свою очередь для нелинейного случая наблюдается куда более медленная сходимость: для достижения той же точности требуется на порядок больше итераций, также на каждой итерации заметно уменьшение радиуса бруса и смещение его центра, рисунки 5, 6. При этом в линейном случае брус значительно лучше приближает множество решений системы и со всех сторон почти "касается" множества решений. Также стоит отметить, что на рисунке 4 видно, как брус приближается только с двух сторон, и никак не улучшает нижнюю оценку по каждой их координат.