Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento Ingeniería Industrial y Sistemas
ICS113H - Optimización Honors

Cheatsheet Exámen

30 de junio de 2025

1º semestre 2025 - Profesor Juan Pablo Contreras

Rafael Lorca - rafael.lorca@uc.cl

---

1. Trucos Modelación

Balance de inventario: $S_{it-1} + x_{it} = d_{it} + S_{it}$. Con S_{it} la cantidad almacenada de i en el período t. (S_{i0} = stock inicial casi siempre es dato, si no se activa igualando a 0).

Linealización PERT: A veces se tiene algo del estilo $\min \max_{i \in S} \{x_i + t_i\}$. Para linealizar, introducimos una variable auxiliar T y el problema queda:

$$\begin{aligned} &\min T \\ &s.a \ T \geq \{x_i + t_i\} \ \forall i \in S \end{aligned}$$

1.1. Modelación de variables binarias

1. Si $x_i = 1 \implies x_j = 1 : x_i \leq x_j$
2. Si $x_i = 1 \ \wedge \ x_j = 1 \implies x_k = 1 : x_i + x_j - 1 = x_k$
3. Si $x_i = 1 \ \implies x_j = 0 : x_i \leq 1 - x_j \ \vee x_i + x_j \leq 1$
4. Si $x_i = 1 \implies$ no se puede seleccionar $P \subseteq S : x_i \leq 1 - x_j \ , \forall j \in P$
5. Si $x_i = 1 \ \vee \ x_j = 1 \implies x_k = 0 : \begin{cases} x_k \leq 1 - x_i \\ x_k \leq 1 - x_j \end{cases}$

1.2. Modelamiento de operadores lógicos

- $\wedge : w_{ij} = 1 \leftrightarrow x_i = 1 \ \wedge x_j = 1$.
$$(\rightarrow) : x_i + x_j - 1 \leq w_{ij}$$
$$(\leftarrow) : 2w_{ij} \leq x_i + x_j$$
- $\vee : w_{ij} = 1 \leftrightarrow x_i = 1 \ \vee x_j = 1$
$$(\rightarrow) : w_{ij} \leq x_i + x_j$$
$$(\leftarrow) : x_i + x_j \leq 2w_{ij}$$
- $xor \oplus : w_{ij} = 1 \leftrightarrow x_i = 1 \ \oplus x_j = 1, x_i + x_j = 1$
$$(\rightarrow) : w_{ij} \leq x_i + x_j, w_{ij} \leq 2 - x_i, x_j$$
$$(\leftarrow) : x_j - x_i \leq w_{ij} \ , \ x_i - x_j \leq w_{ij}$$

1.3. Modelación de valores en desigualdades + Big M

Supongamos que tenemos variables binarias o_j, v_j, r_j que modelan si Y_j está dentro o fuera de rangos (u_1, u_2).

- $v_j = 1$ si $Y_j < u_1$:
$$\begin{cases} u_1 - Y_j \leq M v_j \\ Y_j - u_1 \leq M(1 - v_j) \\ v_j \in \{0, 1\} \end{cases}$$
- $r_j = 1$ si $Y_j \geq u_2$:
$$\begin{cases} Y_j - u_2 \leq M r_j \\ u_2 - Y_j \leq M(1 - r_j) \\ r_j \in \{0, 1\} \end{cases}$$
- $o_j = 1$ si $u_1 \leq Y_j < u_2$
$$\begin{cases} o_j \leq 1 - v_j, \\ o_j \leq 1 - r_j, \\ o_j \geq 1 - v_j - r_j, \\ o_j \in \{0, 1\} \end{cases}$$
- Luego, es importante garantizar:
$$v_j + o_j + r_j = 1$$
- Big-M:
$$i)\ a^\top x \geq b - M(1 - z) \quad ii)\ a^\top x \leq b + M(1 - z)$$

2. Dualidad

Considere el problema estándar de optimización lineal

$$(P)\ \min_{x\in\mathbb{R}}\{c^\top x : Ax = b, x \geq 0\}$$

El problema dual asociado al problema anterior es

$$(D)\ \max\{b^\top y : A^\top y = c, y \in \mathbb{R}\}$$

El problema dual tiene tantas variables como filas tiene A. En completa generalidad:

$$\left.\begin{array}{rrcl} & \min\ c^\top x & & \\ (\forall i \in M_1) & a_i^\top x & \geq & b_i \\ (\forall i \in M_2) & a_i^\top x & \leq & b_i \\ (\forall i \in M_3) & a_i^\top x & = & b_i \\ (\forall j \in N_1) & x_j & \geq & 0 \\ (\forall j \in N_2) & x_j & \leq & 0 \\ (\forall j \in N_3) & x_j & \in & \mathbb{R} \end{array}\right\}(P) \qquad \left.\begin{array}{rrcl} & \max\ y^\top b & & \\ (\forall i \in M_1) & y_i & \geq & 0 \\ (\forall i \in M_2) & y_i & \leq & 0 \\ (\forall i \in M_3) & y_i & \in & \mathbb{R} \\ (\forall j \in N_1) & y^\top A_j & \leq & c_j \\ (\forall j \in N_2) & y^\top A_j & \geq & c_j \\ (\forall j \in N_3) & y^\top A_j & = & c_j \end{array}\right\}(D)$$

Figura 1: Primal y Dual

Maximizar		Minimizar
Restricciones		Variables
$\leq$	$\leftrightarrow$	≥ 0
$=$	$\leftrightarrow$	libre
$\geq$	$\leftrightarrow$	≤ 0
Variables		Restricciones
≥ 0	$\leftrightarrow$	$\geq$
libre	$\leftrightarrow$	$=$
≤ 0	$\leftrightarrow$	$\leq$

Figura 2: Primal y Dual 2

Dualidad débil

Dados los pares primal-dual, si $\tilde{x}$ es una solución factible de (P) e $\tilde{y}$ es una solución factible de (D), entonces

$$\tilde{y}^\top b \leq c^\top \tilde{x}$$

Teorema de Dualidad fuerte

Si (P) tiene solución óptima x^*, entonces existe y^*, solución óptima de (D) y

$$(y^*)^\top b = c^\top x^*$$

- Si x es sol factible en (P) e y es sol factible de (D) y se tiene $c^\top x = y^\top b$, entonces x e y son óptimas en sus respectivos problemas.
- Si el primal alcanza el óptimo, por dualidad fuerte, el dual alcanza el óptimo en algún $\hat{\pi}$.

Teorema de Holguras complementarias

Sean x e y soluciones factibles para (P) y (D), respectivamente. Dichas soluciones son óptimas si y solo si:

$$(\forall i \in \{1, \ldots, m\}) \quad y_i(a_i^\top x - b_i) = 0$$
$$(\forall j \in \{1, \ldots, n\}) \quad x_j(c_j - y^\top A_j) = 0$$

Lo que nos quiere decir es que:

- Si una restricción primal tiene holgura (no es activa $a_i - b_i \neq 0$), entonces su variable dual asociada es cero.
- Si una variable primal es positiva, entonces su restricción dual asociada se cumple con igualdad.

3. Análisis de sensibilidad

¿Qué pasa con el valor óptimo del problema si es que cambia: un corso, un recurso, se agregan variables o restricciones?

3.1. Cambios en b

Si ya tenemos resuelto el problema de minimización, existe solución óptima x^* que tiene asociada una base B, luego solo nos interesa analizar la **factibilidad** del nuevo vector.

$$x_B = A_B^{-1}\tilde{b} \geq 0$$

Por ejemplo, para un cambio en b_1:

$$A_B^{-1}\tilde{b} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ 1500 \\ 800 \end{pmatrix} \geq 0 \rightarrow \begin{matrix} b_1 \leq 8000 \\ b_1 \geq 2000 \\ b_1 \leq 5000 \end{matrix}$$

3.2. Cambios en los costos

Queremos mantener **optimalidad**, analizamos entonces

$$\tilde{c_N^\top} = c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1} A_N \geq 0$$

Luego, si se tiene un nuevo valor para el costo c_j, c'_j, si:

- $c'_j > c_j$ Entonces $c'_j - c_B^\top A_B^{-1} A_j \geq 0$ aun vale y la base no cambia.
- $c'_j < c_j$ Entonces se analiza$c'_j \geq c_B^\top A_B^{-1} A_j$. Si no se cumple lo anterior, la base cambia.

Si lo que cambia es un costro de una variable básica, cambia el vector $c_B^\top$, luego se tiene que hacer un sistema de ecuaciones para obtener el rango.

4. Programación No Lineal

4.1. Cortes de Gomory

$$\sum (\bar{a_{kj}} - \lfloor \bar{a_{kj}} \rfloor) x_j \geq \bar{b_k} - \lfloor \bar{b_k} \rfloor$$

Para que sea un corte válido:

1. Elimina solución fraccionaria actual
2. No elimina soluciones enteras

En general, cada corte nos acerca a la encoltura convexa del dominio.

4.2. Branch and Bound

Importante: Siempre que se baja en el árbol empeora el valor óptimo obtenido. → En un problema de maximización, los valores decrecen ($z^{(0)} \geq z^{(i)} \quad \forall i \in \{1, \dots\}$. Para problemas de minimización, el valor óptimo aumenta.

Incumbente: Mejor valor óptimo de las soluciones enteras obtenidas.

	Maximización	Minimización
Mejor cota inferior	Incumbente	Mejor valor fraccionario
Mejor cota superior	Mejor valor fraccionario	Incumbente

Error si se deja de explorar el árbol = GAP

$$GAP = \frac{\text{mejor cota superior} - \text{mejor cota inferior}}{\text{mejor cota superior}}$$

4.3. P.N.L irrestricta

$A = \text{matriz simétrica } n \times n \begin{cases} s.d.p & \text{si } x^\top Ax \geq 0 \\ d.p & \text{si } x^\top Ax > 0 \end{cases}$

¿Cómo se comprueba? : Menores principales

1. Si las menores principales son $\Delta_i > 0$: matriz es d.p
2. Si las menores principales son $\forall i \in par \Delta_i > 0 \ \wedge \ \forall i \in impar \Delta_i < 0$: matriz es d.n

4.3.1. Condiciones

- Condición necesaria de primer orden: Si x^* es mínimo local, entoces $\nabla f(x) = 0$.
- Condición necesaria de segundo orden: Si $x^* \in \mathbb{R}^n$ es mínimo local, entoces $\nabla f(x) = 0$ y $\nabla^2 f(x^*)$ es s.d.p (Convexa).
- Condición suficiente de segundo orden: Sea $x^* \in R^n$. Si $\nabla f(x) = 0 \ \wedge \ H_f(x^*)$ es d.p, x^* es mínimo local de f.
- Condición suficiente de primero orden (Fermat): Sea $f \in C^1$ una función convexa, x^* es mínimo global de f $\leftrightarrow \nabla f(x^*) = 0$.

Una CN es requerida para que el punto sea óptimo localmente (pero no garantiza que lo sea). Una CS garantiza que el punto sea óptimo local (pero no es requerida para que lo sea).

4.4. P.N.L restricta

Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) \\ s.a\ & Ax = b \\ & Ax \leq b \end{aligned}$$

- Punto regular: Se obtiene por lagrange o KKT, diremos que $\bar{x}$ es regular si el conjunto de vectores gradientes de las restricciones en ese punto es l.i.
- Punto singular: Punto en que el jacobiano de las restricciones no es de rango completo

Teorema de Lagrange

Sea x^* factible y regular. Sea $\mathcal{I}$ el conjunto de índices de restricciones activas. Si x^* es mínimo local, $\exists \lambda \in R^{|\mathcal{I}|}$ tal que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \nabla h_i(x^*) = 0$$

Teorema de Karush-Kuhn-Tucker

Sea x^* factible y regular. Si x^* es mínimo local, $\exists \lambda \in R_+^r$ tal que

$$1. \quad \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

$$2. \quad \mu_i g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, r$$

Para que un punto crítico sea óptimo debe cumplir con Lagrange y KKT:

- Estacionariedad: $\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = 0 \leftrightarrow \nabla f(x) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \nabla h_j(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0$
- Factibilidad primal: $\begin{cases} g_i(x) \leq 0 & i = 1, \dots, m \\ h_j(x) \leq 0 & j = 1, \dots, r \end{cases}$
- Factibilidad dual: $\begin{cases} \lambda_j \in \mathbb{R} & \forall j \\ \mu_i \geq 0 & \forall i \end{cases}$
- Complementariedad: $\mu_i \cdot g_i(x) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$

Condición de Slater

Sea (P) un problema no lineal con restricciones de igualdad h_j y de desigualdad g_i. Si $f, g_1, \dots, g_m$ son cónvexas, h_j son afines y $\exists \bar{x}$ tal que $h_j(\bar{x}) = 0$, $(j = 1, \dots, r)$ y $g_i(\bar{x}) < 0$, $(i = 1, \dots, m)$, entonces

$$v(P) = v(D)$$

En general si se tiene un problema convexo + la condición de Slater (regular en todo el dominio) + x^* cumple KKT, x^* es la solución óptima del problema.