Pontificia Universidad Católica de Chile
Electricidad y Magnetismo: FIS1533
Profesor: Rodrigo López
Rafael Lorca — rafael.lorca@uc.cl
Fecha: 2024

Apuntes Electro

Preámbulo

Créditos a las ayudantías del curso hechas por Vicente Sepúlveda y Sebastián Carmona. También algunas definiciones/ejercicios fueron sacados del libro "Introduction to Electrodynamics" de David J. Griffiths y a veces, mis apuntes personales.

I1

Fuerza y campo eléctrico

- **Distribución discreta**:
  Dos cuerpos con cargas q_1 y q_2, separados una distancia r sienten una fuerza que es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Esta fuera se llama **fuerza eléctrica** F_e y su magnitud está dada por:

  $$F_e = \frac{|q_1||q_1|}{r^2}$$

  Esta fuerza será atractiva para cargas de distinto signo, y repulsiva para cargas de igual signo. Vectorialmente, es posible encontrar también la dirección de la fuerza que el cuerpo 1 ejerce sobre el cuerpo 2, de la forma:

  $$\vec{F_{12}} = k_e \frac{q_1 \cdot q_2}{{r^2}_{12}} \hat{r} \ , \ r_{12} = |\vec{r_2} - \vec{r_1}| \ \& \ \hat{r_{12}} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|}$$

  Esta formula que permite encontrar la fuerza eléctrica se llama la *Ley de Coulomb*. El campo eléctrico $\vec{E}$ se define como la fuerza por unidad de carga que se ejerce sobre una carga de prueba en cualquier punto (siempre que la carga de prueba sea suficientemente pequeña para no perturbar a la carga fuente), y matemáticamente corresponde a:

  $$\vec{E} = \frac{1}{q_2}\vec{F} = k_e \frac{q_1}{|\hat{r}_{21}|^3}\hat{r}_{21}$$

  Esto permite estudiar el efecto que una carga fuente puede tener sobre cualquier otra, independiente de la carga de esta. Por último, una propiedad muy útil, tanto de la fuerza eléctrica como del campo eléctrico, es que para un conjunto de cargas discretas aplica el principio de superposición, esto es, que el campo o fuerza neta en un punto es igual la suma de todos los campos o fuerzas generados por cada una de las cargas en el espacio, matemáticamente:

  $$\vec{F}_{neto} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \ \& \ \vec{E}_{neto} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

- **Distribución continua**:
  Dada una distribución continua de cargas, se define el campo eléctrico como una distribución continua de cargas como:

  $$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{(|\vec{r} - \vec{r'}|)^2} \hat{R} dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{(|\vec{r} - \vec{r'}|)^3} (|\vec{r} - \vec{r'}|) dq$$

  Donde el diferencial de carga 'dq' dependerá del problema planteado:

- Distribución de carga lineal: dq = λdx'
- Distribución de carga superficial: dq = σdA'
- Distribución de carga volumétrica: dq = σdV'

En cada caso se tendrá que resolver una integral simple, doble o triple respectivamente.

Flujo eléctrico

Medida de "cuanto campo eléctrico" pasa a través de una superficie. Se calcula de la forma:

$$\phi_E = \int \int_S \vec{E} \cdot d\hat{S}$$

Si la superficie es plana: $\phi_E = \vec{E} \cdot A$ o $\phi_E = \vec{E} A \cos\theta$, con θ el ángulo entre el campo y el vector normal a la superficie. **Ley de Gauss**: Si la superficie es cerrada (o gaussiana), el cálculo anterior el flujo se reduce a la carga encerrada por la superficie, o sea:

$$\phi_E = \oint \oint_S \vec{E} \cdot d\hat{S} = \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0}$$

Recordatorio teo div (C3): La integral de superficie de un campo vectorial sobre una superficie cerrada es igual a la integral de volumen de la divergencia del campo sobre el volumen al interior de la superficie.

$$\oint \oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int \int \int_V div\vec{F} dV$$

Podemos reescribir la ley de Gauss entonces como:

$$\epsilon_0 \oint \oint_S \vec{E} \cdot d\hat{S} = Q$$

$$Q = \int \int \int_R div\vec{E} \cdot \epsilon_0 \cdot dV \ , \ div\vec{E} \cdot \epsilon_0 = \rho \ (densidad\ de\ carga).$$

O bien en su forma diferencial:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Dando como resultado:

$$Q = \int \int \int_R \rho dV$$

Conductores

No existe el conductor ideal, pero nosotros podemos suponer que para el curso, los conductores cumplen las siguientes propiedades electrostáticas:

- E = 0 **dentro del conductor**
- $\rho = 0$ **dentro del conductor**: Si el volumen posee una cavidad, la densidad de carga puede ser distinta de 0 en esa región vacía
- E es **perpendicular** justo fuera de la superficie del conductor
- En la frontera:

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = E \ , \ con\ E\ =\ Campo\ electrico\ fuera\ del\ conductor$$

Potencial Eléctrico

La fuerza eléctrica es conservativa, esto quiere decir que la integral de linea sobre un camino cerrado es nula. Lo miso se puede decir para la integral sobre un camino cerrado en el campo eléctrico:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Con esto se puede mostrar que $\nabla \times \vec{E} = 0$. Debido a este resultado definimos $V(\vec{r})$:

$$V(\vec{r}) = -\int_{O}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ , con } O \text{ el punto de referencia}$$

$V(\vec{r})$ = Potencial eléctrico, es nulo en ∞. Podemos calcular el campo eléctrico como:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Se desprende de la ecuación:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

El potencial está asociado al trabajo eléctrico necesario para mover una carga q bajo la fuerza de un campo eléctrico E:

$$W = -\int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} F d\vec{l} = -q \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{E} d\vec{l} = -q(V_2 - V_1)$$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{todo el espacio}} |\vec{E}|^2 dV = \frac{1}{2} \int V dq$$

Donde U es la energía y el dV de la primera integral se refiere al Volumen, el V de la segunda al potencial.

Capacitores

Consideremos dos conductores de cargas opuestas pero de igual magnitud. Ya que el campo es constante sobre los conductores se puede considerar la diferencia de potencial entre ambos: $V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{l}$. Aunque no se sepa la distribución de carga, sabemos que el campo es proporcional a Q, por lo tanto V también lo es. Esta razón de proporcionalidad se llama capacitancia y se define como C:

$$C = \frac{Q}{V}$$

El trabajo necesario para cargar un condensador es:

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Y si definimos la energía potencial de un condensador como 0, entonces el trabajo es igual a la energía potencial U del condensador con carga:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}$$

En un circuito podemos conectar condensadores en serie o en paralelo:

- Capacitor en serie:

$$\frac{1}{C_{eq}} = frac1C_1 + \frac{1}{C_2}$$

- Capacitor en paralelo:

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

I2

Dipolo eléctrico

El dipolo eléctrico ocurre cuando hay dos o más cargas de igual magnitud pero distinto signo separadas por una distancia d. Cuando ocurre esto se asigna un vector $\vec{p}$ que se nombra momento dipolar, el cual para dos cargas se define como:

$\vec{p} = q\vec{d}$, con v desde la carga negativa a la positiva.

Para distribuciónes con varias cargas se calcula de la forma:

$$\vec{p} = \int \vec{r} dq$$

$\vec{r}$ es casi siempre una parametrización de la distribución. Recordemos que el potencial en un punto r en el espacio viene dado por:

$$V(r) = k_e \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'| dq}$$

Pero cuando calculamos el potencial por un dipolo, si el la distancia d entre el dipolo « r (punto donde se quiere calcular), entonces se puede hacer la aproximación del punto lejano:

$$V(\vec{r}) = k_e \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$E(\vec{r}) = k_e \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{p}$$

O se puede calcular ya que $E = -\nabla(V)$.
El torque que siente un dipolo cuando es colocado en un campo eléctrico es:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Finalmente la energía de un dipolo para mantenerse en un campo eléctrico es:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Dielectricos

Los dieléctricos son malos conductores de electricidad, tienen la propiedad de formar dipolos en su interior y se dicen que sus cargas están *ligadas*. Una fórmula que podemos recordar para algunos ejercicios si tenemos el potencial de una superficie polarizada a un potencial es:

$$V(a) - V(b) = -\int_b^a \vec{E} d\vec{l}$$

La fórma anterior puede ser más fácil que la forma general de calcular V para un objeto polarizado:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S dS(\vec{r}') \frac{\sigma_P(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \frac{\rho_P(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Donde:

$$\sigma_p(\vec{x}) = \vec{P}(\vec{x}) \cdot \hat{n}(\vec{x})$$

$$\rho_p(\vec{x}) = -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{x})$$

que serían las respectivas densidades de cargas superficial y volumétrica de polarización respectivamente. Cuando calculamos la divergencia de $\vec{P}$, el cual es un campo vectorial en coordenadas esféricas, su laplaciano es:

$$\nabla \cdot \vec{P} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 P_r \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta \, P_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial P_\phi}{\partial \phi}$$

- **Vector desplazamiento y ley de Gauss** Se define el desplazamiento eléctrico como:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Si el material dieléctrico es lineal entonces nos queda la ecuación:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} == (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E} = \vec{P}$$

Luego la ley de Gauss para dieléctricos se puede enunciar de la forma:

$$\oint_S \vec{D} d\hat{S} = Q_{libre} \longrightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{libre}$$

Finalmente, si se tiene una interfaz de dos medios dieléctricos:

$$E_{1tangente} == E_{2tangente}$$

$$D_{in,normal} - D_{out,normal} = \sigma_{libre}$$

- **Suceptibilidad y condensadores**

$$\vec{P}(\vec{x}) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{x})$$

Y se llega a la misma euación de arriba:

$$\vec{D}\,(\vec{x}) = \epsilon_0 \vec{E}\,(\vec{x}) + \vec{P}\,(\vec{x}) = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}\,(\vec{x}) = \epsilon \vec{E}$$

Con $(1 + \chi_e) = \kappa = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$

Circuitos

- **Corriente eléctrica**: Se define como $I = \frac{dq}{dt} = nqv_d \cdot A$. No he visto que se use tanto esto asique si sale mala cuea xD. Igualmente, podemos definir:

$$\vec{J} = \sum_j n_j q_j \vec{v}_j \text{ , que es la densidad de corriente.}$$

Con esto se define la **ecuación de continuidad**:

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Luego,

$$I = \int \int_S \vec{J} \cdot dS = dI = \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

- **Ley de Ohm**
La ley de Ohm macroscópica se expresa de la forma: $V = IR$, con R = Resistencia en un circuito. Otra forma para modelar la resistencia es R = $\frac{\rho L}{A} = \int \frac{\rho}{A} dl$ Con L el largo de un conductor y A su área transversal.
La ley de Ohm microscópica se expresa de la forma: $\vec{J} = \sigma \vec{E}, \sigma = \frac{1}{\rho}$

- **Generalidades de circuitos**
Un dispositivo que suministra energía eléctrica a un circuito se llama fuente de fuerza electromotriz o fem: $\epsilon = \frac{dW}{dq}$. Para una batería real: $\Delta V = \epsilon - Ir - IR$, con r la resistencia interna.

  Cuando se tienen resistencias en un circuito:

  - En paralelo: $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_p \frac{1}{R_p}$
  - En serie: $R_{eq} = \sum_s R_s$

  La potencia se calcula: $P = I^2 R = VI$

- **Leyes de Kirchhoff**
  Goated
  Se tiene:

  1. Nodo: punto donde convergen 2 o más conductores
  2. Espira/malla: camino cerrado formado por elementos circuitales.

  Con esto, la primera ley establece que la suma de las corrientes que entran a un nodo tienen que ser iguales a las corrientes que salen:

  $$\sum_{nodo} I_{in} = \sum_{nodo} I_{out}$$

  La segunda ley establece que la suma de los voltajes en una espira, tiene que ser cero:

  $$\sum_{espira} V_k = 0$$

- **Condensadores**: Placas paralelas que almacenan cargas opuestas, $C = \frac{Q}{V}$. Cuando se tienen condensadores en un circuito:

  - En paralelo: $C_{eq} = \sum_p C_p$
  - En serie: $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_s \frac{1}{C_s}$

- **Circuito RC**

  Para la **carga** se tiene:

  $$i = \frac{dq}{dt}$$

  Luego,

  $$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC}$$

  Resolviendo, obtenemos

  $$q(t) = Q_f\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), \quad i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

  $$\tau = RC$$

  Para la **descarga** se tiene:

  $$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q}{RC}$$

  Luego, se obtiene:

  $$q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

  $$\tau = RC$$

Fuerza de Lorentz

$$\vec{F}_B(\vec{x}) = q\vec{E} + q\vec{v}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})$$

La magnitud de $\vec{F}_B(\vec{x})$ está dada por:

$$F_B = |q|vB\sin\vartheta$$

La unidad en el SI para $\vec{B}(\vec{x})$ es el tesla $T = 1\,\mathrm{N/Am}$. Notar que $\vec{F}_B(\vec{x})$ es siempre perpendicular a $\vec{v}(\vec{x})$ y $\vec{B}(\vec{x})$, de forma que una fuerza magnética no puede alterar la rapidez de la partícula. (No realiza trabajo sobre ella). En efecto:

$$dW(\vec{x}) = \vec{F}_B(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = (q\vec{v}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})) \cdot \vec{v}(\vec{x})dt = q(\vec{v}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})) \cdot \vec{v}(\vec{x})\,dt = 0$$

Cuando hagamos los ejercicios podemos notar la trayectoria circular de las cargas cuando entran a un campo magnético, esto se debe a que la fuerza de Lorentz es una fuerza centrípeta, por lo que cuando no hay campo eléctrico se puede por dinámica:

$$F_{\text{centrípeta}} = \frac{mc^2}{R}, \text{ con R el radio de giro}$$

$$\sum Fuerzas = ma = \frac{m(v_c)^2}{R} == q\vec{v}(\vec{n}) \times \vec{B}(\vec{m})$$

$$\frac{m(v_c)^2}{R} = qvB(\vec{n} \times \vec{m})$$

Cuando hay un movimiento de una partícula en un campo magnético el radio de giro se despeja de la ecuación anterior como:

$$R = \frac{mv}{|q|B}$$

Y también se puede definir la frecuencia angular ω como:

$$\omega = \frac{v_c}{R} = \omega = \frac{|q|B}{m} \text{ , con } \frac{2\pi}{\omega} = T, \text{ T = tiempo en completar 1 ciclo.}$$

Exámen

Fuerza sobre un conductor

$$F_B = (q\vec{v_d} \times \vec{B})nAl$$

Como la corriente es I = nqv_dA, entonces:

$$F_B = I\vec{l'} \times B$$

$$F = BIL$$

Se define también el torque neto en un contuctor como: $\tau = I\vec{A} \times \vec{B} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

Ley de Biot - Savart

Una carga puntual q con velocidad v, produciría a una distancia r un campo magnético:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$

Para una línea estable de corriente:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Idl' \times (\vec{r} - \vec{r'})}{(|\vec{r} - \vec{r'})|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl' \times \hat{r}}{r^2}$$

Con dl' = el camino de dirección del flujo.

Y con: $\begin{cases} \vec{r} & \text{Vector desde origen a punto P} \\ \vec{r'} & \text{Vector desde origen a distribucion de carga} \end{cases}$

Es útil saber que el campo magnético de un cable recto es: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta}$.

Flujo y ley de Ampère

El flujo es la "cantidad" de campo magnético que pasa por una superficie S:

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BAcos(\theta)$$

Por otro lado, la Ley de Ampère se usa como un "Gauss" para calcular campos magnéticos en problemas con simetría.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

Inducción Magnética

la **Ley de Faraday** postula que "La fem inducida en una espira cerrada es igual al negativo de la tasa de cambio del flujo magnético a través de la espira en el tiempo".

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Con N = nro de espiras.
La **Ley de Lenz** es la que indica el signo de la relación anterior, la fem inducida siempre se opone al cambio de flujo.
Para algunos ejercicios es conveniente escribir el cambio de flujo de la forma:[1]

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = -(Acos(\theta)\frac{dB}{dt} + Bcos(\theta)\frac{dA}{dt} + BAsin(\theta)\frac{d\theta}{dt})$$

[1] Créditos a Santiago Hadad

Finalmente definimos la **corriente de desplazamiento** como una ”corriente ficticia” (ya no saben que inventar) presente entre dos condensadores, la cual nos entrega la Ley de Ampere completa:

$$i_D = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Ley	**Forma Integral**	**Forma Diferencial**
Ley de Gauss para el campo eléctrico	$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Ley de Gauss para el campo magnético	$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
Ley de Ampère-Maxwell	$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I_{\text{enc}} + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$
Ley de Faraday	$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Table 1: Leyes de Maxwell: Forma Integral y Diferencial

Corriente Alterna

El voltaje y la corriente varían de forma sinusoidal. -¿ Llevamos las volas al plano complejo y de ahí hacemos $V(t) =< Re(\hat{v}) >$, que por la identidad de euler = $e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$ las cantidades quedan:

$$q(t) = Qe^{i\omega t}$$

$$v(t) = Ve^{i\omega t}$$

$$i(t) = Ie^{i\omega t}$$

Elemento	**Impedancia (Z)**	**Reactancia (X)**	**Relación con el Voltaje**
Resistencia (R)	$Z_R = R$	$X_R = 0$	Igual en serie y paralelo ($V_R = IR$)
Inductor (L)	$Z_L = i\omega L$	$X_L = \omega L$	Serie: $V_L = IX_L$, Paralelo: $I_L = \frac{V}{X_L}$
Capacitor (C)	$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$	$X_C = \frac{-1}{\omega C}$	Serie: $V_C = IX_C$, Paralelo: $I_C = \frac{V}{X_C}$

Table 2: Resumen de impedancia, reactancia y relación con el voltaje en un circuito LRC.

Cuando hay un circuito LRC en serie: $V = ZI$ con Z = $(R + i\omega l - \frac{i}{\omega C})$. Luego:

$$i(t) = \frac{v}{Z} = \frac{V_0}{|Z|}e^{i(\omega t - \phi)}$$

Circuito LRC

Volas que hay que saber:

- Inductancia: $\varepsilon = -L\frac{di}{dt}$
- $U_{Capacitor} = \frac{Q^2}{2C}$
- $U_{Inductancia} = \frac{LI^2}{2}$
- LRC sin FEM: Kirchhoff = $\frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} - IR$ Y $I = -\frac{dQ}{dt}$
- $V_a - V_b = L\frac{dI}{dt}$, si no hay variación de corriente, la inductancia actúa como cortocircuito. (ESto no significa que no pueda almacenar energía!).

La corriente alterna corresponde cuando la corriente (y voltaje), no son constantes en el tiempo, y por lo general toman la forma

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi) \tag{1}$$

donde V_0 es la amplitud, ω es la frecuencia angular, y ϕ la fase. Sin embrago, las funciones trigonométricas no siempre son comodas de trabajar, por lo que podemos notar que

$$V(t) = \mathbf{Re}\{V_0 e^{i\omega t}\} \tag{2}$$

donde se tomo que $\phi = 0$. De esta forma, se define que el *fasor* de voltaje (o corriente) como

$$\hat{V}(t) = V_0 e^{i\omega t} \tag{3}$$

Gracias a esta nueva definición de voltaje, se pude generalizar la ley de Ohm a inductores y capacitores, reemplazando la resistencia por una *impedancia*, la cual es una resistencia compleja, tal que

$$Z_c = \frac{1}{i\omega c} \quad \& \quad Z_L = i\omega L \tag{4}$$

Ademas, a la parte imaginaria de la impedancia se le llama *reactancia*.

Como ahora la corriente y el voltaje varian en el tiempo, se define la potencia instantanea como

$$P = I(t)V(t) \tag{5}$$

y la frecuencai promedio como

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} V(t)I(t)dt = \frac{1}{2}V_0 I_0 \cos(\theta) \tag{6}$$

donde θ es la fase entre la corriente y el voltaje. Ademas, se define el voltaje y corriente rms como

$$V_{rms} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad \& \quad I_{rms} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \tag{7}$$

Figure 1: Resumen penca de corriente alterna

Anexos

Algunos cálculos de integrales importantes:

$$\int \frac{1}{(x^2+R^2)^{3/2}}\,dx$$

Para eso se usa $x = R\tan(\theta)$, y $dx = R\sec^2(\theta)\,d\theta$, entonces:

$$\int \frac{1}{(x^2+R^2)^{3/2}}\,dx = \int \frac{1}{(R^2\tan^2(\theta)+R^2)^{3/2}} R\sec^2(\theta)\,d\theta$$

$$= \int \frac{1}{[R^2(\tan^2(\theta)+1)]^{3/2}} R\sec^2(\theta)\,d\theta$$

$$= \int \frac{1}{R^3\sec^3(\theta)} R\sec^2(\theta)\,d\theta$$

$$= \int \frac{1}{R^2\sec(\theta)}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{R^2}\int \cos(\theta)\,d\theta$$

Si uno tiene límites de integración, reemplazar arriba.

$$= \frac{1}{R^2}\sin(\theta) + C$$

Notar que un triángulo rectángulo de catetos x y R cumple que $\frac{x}{R} = \tan(\theta)$, la cual es la sustitución que se usó. Para ese mismo triángulo se tiene por teorema de Pitágoras que $\sin(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}$, por lo que finalmente

$$\int \frac{1}{(x^2+R^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{R^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} + C$$

La otra muy utilizada es

$$\int \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} dx$$

para la cual se hace la sustitución $v = x^2 + R^2$, y $dv = 2xdx$, entonces

$$\int \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} dx = \int \frac{1}{2v^{3/2}} dv$$

$$\int \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} dx = \int \frac{1}{2v^{3/2}} dv = -\frac{1}{v^{1/2}} + C$$

$$\int \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{2(x^2+R^2)^{1/2}} + C$$