范式

动机

命题公式千变万化，这对研究其性质和应用带来困难 因此要建立一个标准，这个标准就称为**范式**

析取范式和合取范式

合取式称为**积**，析取式称为**和**

命题公式中的一些命题变元和一些命题变元的否定之积，称为**基本积**；一些命题变元和一些命题变元的否定之和，称为**基本和**。（相互对偶的）

Eg

给定命题变元P和Q，则 P、$\neg P \wedge Q$ 、 $P \wedge Q$、$\neg P \wedge P$、$\neg Q \wedge P \wedge Q$等都是基本积； Q、$\neg Q \vee P$、$P \vee Q$、$P \vee \neg P$、$P \vee Q \vee \neg Q$等都是基本和。

基本积(和)中的**子公式**称为此基本积(和)的**因子**。注意：命题变元或命题变元的否定既是基本积也是基本和。

定理1.3-1

一个基本积是永假式，当且仅当它含有P和$\neg P$形式的两个因子。

定理1.3-2

一个基本和是永真式，当且仅当它含有P、$\neg P$形式的两个因子。

定义

一个由基本积之和组成的公式，如果与给定的命题公式A等价，则称它是A的**析取范式**，记为$A \Leftrightarrow A1 \vee A2 \vee \cdots \vee An, n \geq 1$这里$A1, A2, \cdots, An$是基本积。

- 任何一个命题公式都可求得它的析取范式，这是因为命题公式中出现的→和↔可用∧、∨和¬表达，括号可通过德·摩根定律和∧在∨上的分配律消去。
- 但一个命题公式的析取范式不是唯一的，我们把其中运算符最少的称为最简析取范式。
- 如果给定的公式的析取范式中每个基本积都是永假式，则该式也必定是永假式。

> 例如
>
> 如果需要求出最简的析取范式，那么
>
> $$P \wedge (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg P \vee P \wedge Q$$
>
> 还可化简成
>
> $$P \wedge (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow F \vee P \wedge Q \Leftrightarrow P \wedge Q$$
>
> $P \wedge Q$是$P \wedge (P \rightarrow Q)$的最简析取范式。
>
> 求最简析取范式的方法有卡诺图法和奎因—麦克劳斯基方法等，详见有关“数字逻辑”的教材，这里不多叙述。

定义1.3-3 一个由基本和之积组成的公式，如果与给定的命题公式A等价，则称它是A的合取范式，记为$A \Leftrightarrow A1 \wedge A2 \wedge \cdots \wedge An, n \geq 1$这里$A1, A2, \cdots, An$是基本和。

- 任何一个命题公式都可求得它的合取范式，这是因为命题公式中出现的→和↔可用∧、∨和¬表达，否定号可通过德·摩根定律深入到变元上，再利用∨在∧上的分配律可化成合取范式。
- 一个公式的合取范式也不是唯一的，其中运算符最少的称为**最简合取范式**。可利用卡诺图等方法求得最简合取范式。
- 如果给定的公式的合取范式中每个基本和都是永真式，则该式也必定是永真式。

主析取范式

极小项

在n个变元的基本积中，若每一个变元与其否定不同时存在，而两者之一必出现一次且仅出现一次，则这种基本积叫极小项。

- n个变元可构成2^n^个不同的极小项。

- 我们把命题变元看成1，命题变元的否定看成0，那么每一极小项对应一个二进制数，因而也对应一个十进制数

对应情况如下:

极小项	0、1编码（二进制编码）	十进制编码
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	0 0 0	0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	0 0 1	1
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	0 1 0	2
$\neg P \wedge Q \wedge R$	0 1 1	3
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	1 0 0	4
$P \wedge \neg Q \wedge R$	1 0 1	5
$P \wedge Q \wedge \neg R$	1 1 0	6
$P \wedge Q \wedge R$	1 1 1	7

我们把对应的十进制数当作足标，用m_i表示这一项，即

$m_0 \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
$m_1 \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge R$
$m_2 \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \wedge \neg R$
$m_3 \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \wedge R$
$m_4 \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
$m_5 \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge R$
$m_6 \Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \neg R$
$m_7 \Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R$

定义1.3-5

一个由极小项之和组成的公式，如果与给定的命题公式A等价，则称它是A的**主析取范式**

- 任何一个命题公式都可求得它的主析取范式，这是因为任何一个命题公式都可求得它的析取范式，而析取范式可化为主析取范式。

命题公式的主析取范式和它的真值表的关系

每一极小项和它的足标的二进制数一一对应，因而和一种指派一一对应，例如有三个变元时：

极小项	足标	指派
$P \wedge \neg Q \wedge$ R	1 0 1	1、0、1

当且仅当将对应的指派代入该极小项，该极小项的值才为 1。因此，在命题公式的主析取范式中，诸极小项都与真值表中相应指派处的该公式的真值1相对应，反之亦然。

> 性质 一个命题公式的真值表是唯一的，因此一个命题公式的主析取范式也是唯一的。 两个命题公式如果有相同的主析取范式，那么这两个命题公式是**逻辑等价**的。

极大项

在n个变元的基本和中，若每一个变元与其否定不同时存在，而二者之一必出现一次且仅出现一次，则这种基本和叫极大项。

n个变元可构成2^n个不同的极大项。类似于(但不同于)极小项的记法，它们是:

$M_0 \Leftrightarrow P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_{n-2} \vee P_{n-1} \vee P_n$
$M_1 \Leftrightarrow P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_{n-2} \vee P_{n-1} \vee \neg P_n$
$M_2 \Leftrightarrow P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_{n-2} \vee \neg P_{n-1} \vee P_n$
$\cdots$
$M_{2^n-1} \Leftrightarrow \neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \cdots \vee \neg P_{n-2} \vee \neg P_{n-1} \vee \neg P_n$

将命题变元对应于 0，命题变元的否定对应于 1，恰与极小项记法相反，例如3个变元的极大项是这样对应的

极小项	足标	指派
$P \wedge \neg Q \wedge$ R	0 1 0	0、1、0

目的：当且仅当将极大项的对应指派代入该极大项时，才使该极大项的真值为 0，这样可使今后许多运算得到方便

定义1.3-7

一个由极大项之积组成的公式，如果与给定的命题公式A等价，则称它是A的**主合取范式。**

求主析(合)范式的两种常用方法:

① 公式化归法 ② 真值表法

主析(合)取范式公式化归法步骤:

1. 把给定命题公式化成析(合)取范式.
2. 删除析(合)取范式中所有为永假(真)的基本积(和).
3. 用等幂律将重复出现的变元化简为一次出现.
4. 用同一律补进析(合)取范式中未出现的所有变元

Eg

用公式化归法求$A \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge Q$主析取范式

解:

$$A \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge Q$$
$$\Leftrightarrow \neg P \wedge Q \vee Q \wedge Q \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \vee Q$$
$$\Leftrightarrow \neg P \wedge Q \vee T \wedge Q \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \vee (P \vee \neg P) \wedge Q$$
$$\Leftrightarrow \neg P \wedge Q \vee P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q$$
$$\Leftrightarrow \neg P \wedge Q \vee P \wedge Q$$
$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3$$
$$\Leftrightarrow \sum(1,3)$$