MYNTAI-QAs

高洪臣

2019 年 8 月 7 日

第一题

已知两图像上的 n 对匹配点，其对应的归一化平面坐标分别为 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{p}'$，请求取两帧之间的本质矩阵 $\mathbf{E}$。

答：

根据对极约束

$$\mathbf{p}'^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{p} = 0$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_4 & e_5 & e_6 \\ e_7 & e_8 & e_9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

矩阵 $\mathbf{E}$ 展开，写成向量形式 $\mathbf{e}$，并把所有点（n 对点，n>=8）放到一个方程中，齐次线性方程组如下：

$$\begin{bmatrix} x'^1 x^1 & x'^1 y^1 & x'^1 & y'^1 x^1 & y'^1 y^1 & y'^1 & x^1 & y^1 & 1 \\ x'^2 x^2 & x'^2 y^2 & x'^2 & y'^2 x^2 & y'^2 y^2 & y'^2 & x^2 & y^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x'^n x^n & x'^n y^n & x'^n & y'^n x^n & y'^n y^n & y'^n & x^n & y^n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \end{bmatrix} = 0$$

即（the essential matrix lying in the null space of this matrix A）

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad s.t. \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times 9}, n \geq 8$$

对上式求解最小二乘解（尺度等价性）

$$\min_{\mathbf{e}} \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}\|^2 \quad s.t. \quad \|\mathbf{e}\| = 1 \quad \text{or} \quad \|\mathbf{E}\|_F = 1$$

SVD 分解 $\mathbf{A}$（或者 EVD 分解 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$）

$$\mathrm{SVD}(\mathbf{A}) = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$$

$\mathbf{e}$ 正比于 $\mathbf{V}$ 的最后一列，得到 $\mathbf{E}$

根据奇异性约束 $\mathrm{rank}(\mathbf{E}) = 2$，再 SVD 分解 $\mathbf{E}$

$$\mathrm{SVD}(\mathbf{E}) = \mathbf{U}_E\mathbf{D}_E\mathbf{V}_E^T$$

求出的 $\mathbf{E}$ 可能不满足其内在性质（奇异值是 $[\sigma, \sigma, 0]^T$ 的形式），此时对 $\mathbf{D}_E$ 进行调整，假设 $\mathbf{D}_E = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 且 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$，则令

$$\mathbf{D}'_E = \mathrm{diag}(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0)$$

或者，更简单的（尺度等价性）

$$\mathbf{D}'_E = \mathrm{diag}(1, 1, 0)$$

最后，$\mathbf{E}$ 矩阵的正确估计为

$$\mathbf{E}' = \mathbf{U}_E\mathbf{D}'_E\mathbf{V}_E^T$$