π的莱布尼茨公式

维基百科，自由的百科全书

在数学领域，**π的莱布尼茨公式**说明

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

右边的展式是一个无穷级数，被称为**莱布尼茨级数**，这个级数收敛到$\frac{\pi}{4}$。它通常也被称为**格雷戈里-莱布尼茨级数**用以纪念莱布尼茨同时代的天文学家兼数学家詹姆斯·格雷戈里。使用求和符号可记作：

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

目录

证明

考虑下面的幾何數列：

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots = \frac{1}{1+x^2}, \qquad |x| < 1.$$

对等式两边积分可得到反正切的幂级数：

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots = \tan^{-1} x, \qquad |x| < 1.$$

将$x = 1$代入，便得莱布尼兹公式(1的反正切是$\pi/4$)。这种推理产生的一个问题是1不在幂级数的收敛半径以内。因此，需要额外论证当$x = 1$时级数收敛到$\tan^{-1}(1)$。一种方法是利用交替级数判别法，然后使用阿贝尔定理证明级数收敛到$\tan^{-1}(1)$。然而，也可以用一个完全初等的证明。

初等证明

考虑如下分解

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

对于$|x| < 1$，右侧的分式是余下的几何级数的和。然而，上面的方程并没有包含无穷级数，并且对任何实数x成立。上式两端从0到1积分可得：

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx.$$

当$n \to \infty$时，除积分项以外的项收敛到莱布尼茨级数。同时，积分项收敛到0：

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx \le \int_0^1 x^{2n+2}\,dx = \frac{1}{2n+3} \to 0 \text{当} n \to \infty$$

这便证明了莱布尼茨公式。

格点与数论证明

通过以$(0,0)$为圆心，R为半径的圆上及圆内格点（即横坐标与纵坐标皆为整数）个数计算公式来得出，在这里先考虑费马平方和定理：一个奇素数能表示成两个平方数之和当且仅当该素数模4余1，并且不考虑符号与交换律下其形式唯一（由于必为一奇一偶，因此不考虑符号但考虑交换律下必然为两种形式），比如$29 \equiv 1 \pmod 4$可以得出$29 = 2^2 + 5^2 = 5^2 + 2^2$，而$23 \equiv 3 \pmod 4$因此无法分解成两个平方和形式。

现在对于所有正整数N，有其唯一的素因数分解形式：

$$N = 2^k (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m})(q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_n^{\beta_n})$$

其中$\{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$为互不相同的模4余1的素数，$\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$为互不相同的模4余3素数。

- 如果$\{\beta_1, \beta_2 \cdots, \beta_n\}$只要其中一个为奇数，则正整数$N$不存在表示成两个平方和的形式（比如$75 = 3 \times 5^2$，3的次数为1，因此不能表示成两平方和）；
- 而当$\{\beta_1, \beta_2 \cdots, \beta_n\}$全为偶数时，此时能表示成平方数形式的数量等于$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_m + 1)$（不考虑符号但考虑交换律的情况，比如$65 = 5 \times 13$，其中5与13次数均为1，因此有$(1+1)(1+1) = 4$，即$65 = 1^2 + 8^2 = 2^2 + 7^2 = 7^2 + 2^2 = 8^2 + 1^2$）；
- 2的幂次k不影响N表示两平方和形式的个数，比如不管k是多少，$2^k \times 65$能表示成两个平方和形式都是4种。

接下来引入狄利克雷特征函数，定义$\chi(N) = \begin{cases} 1 & N \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & N \equiv 3 \pmod 4 \\ 0 & N \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$，因此为积性函数，满足$\chi(a) \cdot \chi(b) = \chi(ab)$。

- 对于模4余1的素数p以及自然数α，总有$p^\alpha \equiv 1 \pmod 4$，因此$\chi(1) + \chi(p) + \chi(p^2) + \cdots + \chi(p^\alpha) = \alpha + 1$；
- 对于模4余3的素数q以及自然数β，则有$q^\beta \equiv (-1)^\beta \pmod 4$，因此$\chi(1) + \chi(q) + \chi(q^2) + \cdots + \chi(q^\beta) = \begin{cases} 1 & \beta \equiv 0 \pmod 2 \\ 0 & \beta \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$；
- 对于2以及自然数k，当$k = 0$时$2^0 = 1$，即$\chi(1) = 1$；当$k > 0$时总有$\chi(2^k) = 0$，因此$\chi(1) + \chi(2) + \chi(4) + \cdots + \chi(2^k) = 1$。

由于$\chi(a)\cdot\chi(b)=\chi(ab)$，而这些结果正好与上述性质相吻合，因此$N$表示成两个平方和形式的数量可以由其所有因数$t$相应的$\chi(t)$之和$\sum_{t|N}\chi(t)$来表示，比如$30=2\times 3\times 5$，于是相应地有$\chi(1)+\chi(2)+\chi(3)+\chi(5)+\chi(6)+\chi(10)+\chi(15)+\chi(30)=0$。

小于等于R^2能被正整数n整除的正整数有$\left\lfloor \frac{R^2}{n} \right\rfloor$个，因此对于半径为$R$圆上及圆内格点数总和为：

$$1+4\left[\left\lfloor \frac{R^2}{1} \right\rfloor \chi(1)+\left\lfloor \frac{R^2}{2} \right\rfloor \chi(2)+\cdots+\left\lfloor \frac{R^2}{R} \right\rfloor \chi(R)\right]=1+4\left(\left\lfloor \frac{R^2}{1} \right\rfloor-\left\lfloor \frac{R^2}{3} \right\rfloor+\cdots+\left\lfloor \frac{R^2}{R'} \right\rfloor^{\frac{R'-1}{2}}\right)$$

其中R'为不超过R的最大奇数，再由圆面积为πR^2，当$R\to\infty$时，两者比值极限得$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$。[1]

参考文献

- Jonathan Borwein, David Bailey & Roland Girgensohn, *Experimentation in Mathematics - Computational Paths to Discovery*, A K Peters 2003, ISBN 1-56881-136-5, pages 28–30.

1. 【官方双语】隐藏在素数规律中的π_哔哩哔哩_bilibili. [2022-04-06]. （原始内容存档于2022-04-06）.

外部链接

- Implementation of the Leibniz formula for TI Basic (http://timjoh.com/calculating-pi-in-ti-basic-using-the-leibniz-formula/) （页面存档备份 (https://web.archive.org/web/20210810115248/http://timjoh.com/calculating-pi-in-ti-basic-using-the-leibniz-formula/)，存于互联网档案馆）
- use the Leibniz formula to approximate pi (https://web.archive.org/web/20080211115011/http://sethborders.googlepages.com/Calculatepi.html)
- Leibniz Formula in C, x86 FPU Assembly, x86-64 SSE3 Assembly, and DEC Alpha Assembly (http://mattst88.com/programming/?page=leibniz) （页面存档备份 (https://web.archive.org/web/20210413023016/http://mattst88.com/programming/?page=leibniz)，存于互联网档案馆）