2021年合肥工业大学第十三届高等数学竞赛试题及解答

（2021年6月24日19：00-21：00）

一、简答题（每小题8分，共40分）

1、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n(e^x-(1+\frac{x}{n})^n), x\in R$.

解：原式 $\xlongequal[令t=\frac{1}{n}]{\infty\cdot 0} \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{e^x-(1+xt)^{\frac{1}{t}}}{t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{e^x(1-e^{\frac{1}{t}\ln(1+xt)-x})}{t}=-e^x\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{t}\ln(1+xt)-x}{t}$

$=-e^x\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+xt)-xt}{t^2}=-e^x\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{xt-\frac{1}{2}(xt)^2+o(t^2)-xt}{t^2}=\frac{1}{2}x^2e^x$.

2、设函数 $f(x,y,z)$ 有连续导数，且 $f(0,0,0)=1$，当 $x^2+y^2+z^2\le 9$ 时，$|gradf|\le 1$，

证明：在球体 $x^2+y^2+z^2\le 9$ 上，$|f(x,y,z)|\le 4$.

证明：由 Taylor 公式 $f(x,y,z)=f(0,0,0)+f_x'(\xi,\eta,\zeta)x+f_y'(\xi,\eta,\zeta)y+f_z'(\xi,\eta,\zeta)z$

$=1+gradf(\xi,\eta,\zeta)\{x,y,z\}$，$\xi,\eta,\zeta$ 分别介于0于 x,y,z 之间，所以

$|f(x,y,z)|\le 1+|gradf(\xi,\eta,\zeta)\{x,y,z\}\le 1+1\cdot 3=4$.

3、计算积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}|z|ds$，其中 Σ 是柱体 $x^2+y^2\le ax$ 被球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2$ 截取的部分的表面.$(a>0)$

解：用 $\sum_1$ 表示 Σ 在第一象限的部分，用 $\sum_{11,}\sum_{12}$ 分别表示 $\sum_1$ 的柱面和球面部分，由对称性

知 $I=4\iint\limits_{\Sigma_{1,}}zds=4\iint\limits_{\Sigma_{11,}}zds+4\iint\limits_{\Sigma_{12,}}zds$，$\sum_{11}:y=\sqrt{ax-x^2}$, $D_{xz}:0\le z\le\sqrt{a^2-ax}, 0\le x\le a,$

$ds=\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dxdz$，$\iint\limits_{\Sigma_{11,}}zds=\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-ax}}\frac{az}{2\sqrt{ax-x^2}}dz=\frac{\pi}{8}a^3$，

$\sum_{12}:z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, D_{xy}:0\le y\le\sqrt{ax-x^2}, 0\le x\le a$，$ds=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$，

$\iint\limits_{\Sigma_{12}}zds=a\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\frac{\pi}{8}a^3$，故 $I=\pi a^3$.

4、设 $f(t)$ 是定义在实数 R 上的单调增加且连续的奇函数，$I=\iiint\limits_{\Omega}f(z+x-y)dxdydz$，

其中 Ω 是上半球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2, z\ge 0,(a>0)$，试判断 I 的值是大于0，小于0或者等

于 0，请给出理由.

解：$I>0$.由于 $f(t)$ 单增，$z\ge 0$，故 $f(z+x-y)\ge f(x-y)$，$\therefore I>\iiint\limits_{\Omega} f(x-y)dxdydz$

$=\iiint\limits_{\Omega} f(y-x)dxdydz=\dfrac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}(f(x-y)+f(y-x))dxdydz=0$（$f(t)$ 为奇函数）.

5、设数列 $x_n=\sqrt[n]{n!}$，请找出当 $n\to\infty$ 时与 x_n 一样快的无穷大.

解：答案是 n.事实上，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}}=e^{\int_0^1\ln xdx}=e^{-1}$，故当 $n\to\infty$ 时

$x_n=\sqrt[n]{n!}$ 与 n 趋于无穷的速度一样快.

二、(15 分）设 $y=\cos(\beta\arcsin x),$ 其中 β 为常数，求 $y^{(n)}(0).$

解：$y'=-\beta\sin(\beta\arcsin x)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},y'(0)=0$，

$y''=-\beta^2\cos(\beta\arcsin x)\dfrac{1}{1-x^2}-\beta x\dfrac{\sin(\beta\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{-\beta^2 y}{1-x^2}+\dfrac{xy'}{1-x^2}$，且

$y''(0)=-\beta$，故得 $(1-x^2)y''-xy'+\beta^2y=0$，对上式两边求 $n-2$ 阶导数得

$C_{n-2}^0y^{(n)}(1-x^2)+C_{n-2}^1y^{(n-1)}(-2x)+C_{n-2}^2y^{(n-2)}(-2)-C_{n-2}^0y^{(n-1)}x$

$-C_{n-2}^1y^{(n-2)}+\beta^2y^{(n-2)}=0$，令 $x=0$ 得 $y^{(n)}(0)=[(n-2)^2-\beta^2]y^{(n-2)}(0)$，

$\therefore y^{(2m-1)}(0)=0,y^{(2m)}(0)=4(m-1)^2-\beta^2$.

三、(15 分）计算二重积分 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}|x^2+y^2-x-y|dxdy$.

解：由对称性 $I=2\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ y\ge x}}|x^2+y^2-x-y|dxdy=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}d\varphi\int_0^1|\rho-\sqrt{2}\sin(\varphi+\dfrac{\pi}{4})|\rho^2d\rho$，

令 $\varphi=\theta-\dfrac{\pi}{4}$，$I=2\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1|\rho-\sqrt{2}\cos\theta|\rho^2d\rho$，$D:0\le\rho\le 1,0\le\theta\le\pi$，

$D_1:0\le\rho\le 1,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，$D_2:0\le\rho\le 1,\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\pi$，圆 $\rho=\sqrt{2}\cos\theta$ 将 D_1 分成两块，期

中一块为 $D_3:\sqrt{2}\cos\theta\le\rho\le 1,\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，记 $I_i=\iint\limits_{D_i}|\rho-\sqrt{2}\cos\theta|\rho^2d\rho$，$i=1,2,3$，

则 $I=2(I_1+I_2)$. $I_3=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{\sqrt{2}\cos\theta}^{1}(\rho-\sqrt{2}\cos\theta)\rho^2d\rho=\dfrac{3\pi}{32}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，

$$I_1=\iint\limits_{D_1-D_3}|\rho-\sqrt{2}\cos\theta|\rho^2 d\rho d\theta+\iint\limits_{D_3}|\rho-\sqrt{2}\cos\theta|\rho^2 d\rho d\theta=$$

$$\iint\limits_{D_1}(\sqrt{2}\cos\theta-\rho)\rho^2 d\rho d\theta+2I_3=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$I_2=\iint\limits_{D_2}(\rho-\sqrt{2}\cos\theta)\rho^2 d\rho d\theta=\frac{\pi}{8}+\frac{\sqrt{2}}{3}，\ \therefore I=2(I_1+I_2)=1+\frac{3}{8}\pi.$$

四、（15 分）计算 $I=\int_L\dfrac{(4x-y)dx+(x+y)dy}{4x^2+y^2}$，其中 L 为上半圆周 $(x-1)^2+y^2=4, y\ge 0$ 从点 $A(-1,0)$ 到 $B(3,0)$ 的一段弧.

解：$P=\dfrac{4x-y}{4x^2+y^2}, Q=\dfrac{x+y}{4x^2+y^2}$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{-4x^2-8xy+y^2}{(4x^2+y^2)^2}$，在某不包含 $(0,0)$ 的单连通区域内积分与路径无关，取 $B_1(1,0)$，作上半椭圆弧 AB_1：$4x^2+y^2=4, y\ge 0$，直线段 $B_1B: y=0, x:1\to 3$，故 $I=\int_{AB_1}+\int_{B_1B} pdx+Qdy$，其中 $\int_{AB_1} pdx+Qdy$

$=\dfrac{1}{4}\int_\pi^0 2d\theta=-\dfrac{\pi}{2}$，$\int_{B_1B} pdx+Qdy=\int_1^3\dfrac{dx}{x}=\ln 3$，故 $I=\ln 3-\dfrac{\pi}{2}$.

五、（15 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有连续导数，证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right)=\frac{b-a}{2}(f(a)-f(b)).$$

证明：n 等分区间 $[a,b]$，分点为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，记 $h=\dfrac{b-a}{n}$，则 $x_k=a+kh, x_k-x_{k-1}=h, k=1,2,\cdots,n$，$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\int_a^b f(x)dx-\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^n f\left(a+\dfrac{k(b-a)}{n}\right)\right)$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx-\sum_{k=1}^n hf(x_k)\right)=\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x)-f(x_k))dx$$

$=\lim\limits_{n\to\infty} n\sum\limits_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}\dfrac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}\cdot(x-x_k)dx=\lim\limits_{n\to\infty} n\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{f(\xi_k)-f(x_k)}{\xi_k-x_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)dx$（第一积分中值定理）$=\lim\limits_{n\to\infty} n\sum\limits_{k=1}^n f'(\eta_k)(-\dfrac{1}{2})(x_k-x_{k-1})^2$（利用 Lagrange 公式）

$$=-\frac{b-a}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f'(\eta_k)h=-\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)dx=\frac{b-a}{2}(f(a)-f(b)).$$