合肥工业大学大学生（非数学）高数竞赛模拟题答案（一）

一、简答题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^{x^2}+a_2^{x^2}+\cdots+a_n^{x^2}}{a_1^{x}+a_2^{x}+\cdots+a_n^{x}}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a_i>0, i=1,2,\cdots n)$。

解：原式 $\overset{1^\infty}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{a_1^{x^2}+a_2^{x^2}+\cdots+a_n^{x^2}-a_1^{x}-a_2^{x}-\cdots-a_n^{x}}{a_1^{x}+a_2^{x}+\cdots+a_n^{x}})^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a_1^{x^2}+a_2^{x^2}+\cdots+a_n^{x^2}-a_1^{x}-a_2^{x}-\cdots-a_n^{x}}{a_1^{x}+a_2^{x}+\cdots+a_n^{x}}\right)^{\frac{a_1^{x}+a_2^{x}+\cdots+a_n^{x}}{a_1^{x^2}+a_n^{x^2}-a_1^{x}-\cdots-a_n^{x}}\cdot\frac{a_1^{x^2}+\cdots+a_n^{x^2}-a_1^{x}-\cdots-a_n^{x}}{x(a_1^{x}+\cdots+a_n^{x})}}$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_1^{x^2}+a_2^{x^2}+\cdots+a_n^{x^2}-a_1^{x}-a_2^{x}-\cdots-a_n^{x}}{x(a_1^{x}+a_2^{x}+\cdots+a_n^{x})}$

$$=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{a_1^{x^2}+a_2^{x^2}+\cdots+a_n^{x^2}-a_1^{x}-a_2^{x}-\cdots-a_n^{x}}{x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'}{=\!=\!=}}\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}((a_1^{x^2}\ln a_1+a_2^{x^2}\ln a_2+\cdots+a_n^{x^2})2x-a_1^{x}\ln a_1-a_2^{x}\ln a_2-\cdots-a_n^{x}\ln a_n)$$

$$=\frac{1}{n}(-\ln a_1a_2\cdots a_n)=-\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$.

2. 设函数 $y(x)$ 具有一阶连续的导数，且满足 $x\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t=(x+1)\int_0^x ty(t)\,\mathrm{d}t$，求 $x\neq 0$ 时 $y(x)$ 的表达式。

解：对等式两边关于 x 同时求导可得 $xy(x)+\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t=x(x+1)y(x)+\int_0^x ty(t)\,\mathrm{d}t$，所以有 $\int_0^x(1-t)y(t)\,\mathrm{d}t=x^2y(x)$，再求导可得 $(1-x)y(x)=2xy(x)+x^2y'(x)$，解方程可得 $y(x)$ 的表达式为 $y(x)=\dfrac{C}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$，此处 C 为任意常数。

3. 如果积分是 $\int\dfrac{x^2+\lambda x-1}{x^3}e^x\mathrm{d}x$ 一个初等函数，试求出 λ 的值。

解：因为 $\int\dfrac{x^2+\lambda x-1}{x^3}e^x\mathrm{d}x=\dfrac{(1+2\lambda)x+1}{2x^2}e^x+(\lambda+\dfrac{1}{2})\int\dfrac{1}{x}e^x\mathrm{d}x$，而 $\int\dfrac{1}{x}e^x\mathrm{d}x$ 不是初等函数，故有 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$。

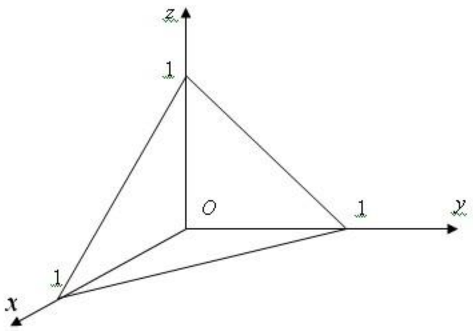
4. 设函数 $z = f(x,y) = \dfrac{\sin(x-1)\cos y - y\cos\sqrt{x+1}}{x+\sin y}$，求 $\mathrm{d}z\big|_{(1,0)}$。

解：$f(1,0)=0,\ f_x'(1,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x,0)-f(1,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin\Delta x}{1+\Delta x}-0}{\Delta x}=1,$

$$f_y'(1,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,\Delta y)-f(1,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{-\Delta y\cos\sqrt{2}}{1+\sin\Delta y}-0}{\Delta y}=-\cos\sqrt{2},$$

$\therefore \mathrm{d}z\big|_{(1,0)}=f_x'(1,0)\mathrm{d}x+f_y'(1,0)\mathrm{d}y=\mathrm{d}x-\cos\sqrt{2}\mathrm{d}y$。

5. 设曲面Σ：$|x|+|y|+|z|=1$，求 $\iint\limits_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S$。



解：利用对称性，

$$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S=0,\iint\limits_{\Sigma}|x|\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}|y|\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}|z|\mathrm{d}S$$

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(|x|+|y|+|z|)\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{8}{3}\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\sqrt{3}。$$

二、 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}(x>0)$，记 $f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}\left[p_n(x)\cos x+q_n(x)\sin x\right]$，其中 $p_n(x)$，$q_n(x)$ 是 x 的多项式，求 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n(x)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}q_n(x)$。

解：由 *Leibniz* 公式得 $f^{(n)}(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}c_n^i(\frac{1}{x})^{(i)}(\sin x)^{(n-i)}=\sum\limits_{i=0}^{n}c_n^i\dfrac{(-1)^i i!}{x^{i+1}}\sin(x+\dfrac{n-i}{2}\pi)$

$$=\sum_{i=0}^{n}c_n^i(-1)^i\frac{i!}{x^{i+1}}\left[\sin\frac{n-i}{2}\pi\cos x+\cos\frac{n-i}{2}\pi\sin x\right]$$

$$=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}\left\{\left[\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\frac{1}{(n-i)!}\sin\frac{n-i}{2}\pi x^{n-i}\right]\cos x+\left[\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\frac{1}{(n-i)!}\cos\frac{n-i}{2}\pi x^{n-i}\right]\sin x\right\}$$

$$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\frac{1}{(n-i)!}\sin\frac{(n-i)\pi}{2}x^{n-i}$$

$$\underline{\underline{k=n-i}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}\sin\frac{k\pi}{2}x^k=-x+\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}\qquad n=2m+1$$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}p_n(x)=-\sin x$，同理 $\lim\limits_{n\to\infty}q_n(x)=\cos x$。

三、计算定积分$\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，其中$n$为正整数。

解：由于$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)=\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}$

所以$\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\ln\frac{1}{x}dx=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x$。

令$t=\ln\frac{1}{x}$，　原式$=\int_0^{2n\pi}t\left|\sin t\right|\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}t\sin t\mathrm{d}t-\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}t\sin t\mathrm{d}t)$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left((-t\cos t+\sin t)\ \Big|_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}-(-t\cos t+\sin t)\ \Big|_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left[(4k+1)\pi+(4k+3)\pi\right]=4\pi\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)=4n^2。$$

四、设$\boldsymbol{u=x+y\sin u}$确定了可微函数$\boldsymbol{u=u(x,y)}$,试证明：$\mathbf{(1)}\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial y}=\sin u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}};$

$(2)\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}(\sin^n u\cdot\frac{\partial u}{\partial x})$。

证明：(1) 由 $\boldsymbol{u=x+y\sin u}$ 两边对 x 求偏导数得 $\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial x}=1+y\cos u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}},$　所以

$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1-y\cos u}}$.　由$\boldsymbol{u=x+y\sin u}$两边对$y$求偏导数得$\frac{\partial u}{\partial y}=\sin u+y\cos u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$,

所以$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\sin u}{1-y\cos u}=\sin u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}}$..

(2) 由$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial x}}$与$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial y}}$的表达式易知，$u$对$x,y$可求任意阶连续偏导数，且$\boldsymbol{n=1}$时（2）成立，设

对$\boldsymbol{n=k}$时，$\frac{\partial^k u}{\partial y^k}=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}(\sin^k u\cdot\frac{\partial u}{\partial x})$ 成立，于是有

$$\frac{\partial^{k+1}u}{\partial y^{k+1}}=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}(\frac{\partial}{\partial y}(\sin^k u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}))=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}(k\sin^{k-1}u\cdot\cos u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\sin^k u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y})$$

$$=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}(k\sin^{k-1}u\cdot\cos u\cdot\sin u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\sin^k u\frac{\partial}{\partial x}(\sin u\cdot\frac{\partial u}{\partial x})$$

$$=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}[k\sin^k u\cdot\cos u\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\sin^k u\cos u\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\sin^{k+1}u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}]$$

$$=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}(\frac{\partial}{\partial x}(\sin^{k+1}u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}))=\frac{\partial^k}{\partial x^k}(\sin^{k+1}u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}).$$

即当 $\boldsymbol{n=k+1}$ 时，（2）也成立，由数学归纳法，对一切正整数 n，（2）成立.

五、设函数 $f(x,y,z)$ 连续，$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 记 Ω 在 xoz 平面上的投影区域为 D_{zx}，求二重积分 $I=\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{|z-x^2|}\mathrm{d}\sigma$。

解：由所给的积分等式知 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|0\le z\le x^2+y^2,0\le y\le 1,0\le x\le 1\right\}$

即 Ω 是由抛物线面 $z=x^2+y^2$，平面 $x=1,y=1$ 及三坐标平面围成的立体，它在 xoz 平面上的投影 D_{xz} 为的曲边梯形 OABC，其中曲边 $BC:z=x^2+1$ 是曲线 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ y=1,\end{cases}$ 在 xoz 平面的投影，其余三条为直线 $x=0,x=1$ 及 $z=0$。用 $z=x^2$ 将 D_{xz} 划分成 D_1 和 D_2 两部分，

$D_1=\left\{(x,z)\middle|0\le z\le x^2,0\le x\le 1\right\}$，$D_2=\left\{(x,z)\middle|x^2\le z\le x^2+1,0\le x\le 1\right\}$，

于是 $\iint\limits_{D_{xz}}\sqrt{|z-x^2|}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}\sqrt{|x^2-z|}\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}\sqrt{|z-x^2|}\mathrm{d}\sigma$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-z}\mathrm{d}z+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x^2+1}\sqrt{z-x^2}\mathrm{d}z=\frac{5}{6}.$$

六、设 $\{a_n\}$ 为单调递增且各项为正的数列，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛的充分必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛。

证明：“$\Rightarrow$”因为 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n\le\cdots$，所以 $a_1+a_2+\cdots+a_n\le na_n$，因而有

$\frac{1}{a_n}\le\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$，由正项级数的比较审敛法可知当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 也是收敛的；

“$\Leftarrow$”因为 $a_1+a_2+\cdots+a_n \ge [\frac{n}{2}]a_{[\frac{n}{2}]}$，所以 $n\ge 2$ 时有 $\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \le \frac{n}{[\frac{n}{2}]a_{[\frac{n}{2}]}} \le \frac{3}{a_{[\frac{n}{2}]}}$，

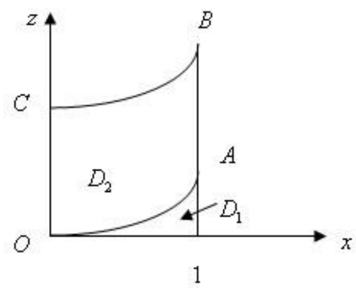
级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛，不妨设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=s$，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3}{a_{[\frac{n}{2}]}}$ 的前 n 项部分和为

$s_n=\begin{cases}\frac{3}{a_1}+\frac{3}{a_2}+\cdots\frac{3}{a_{[\frac{n}{2}]}}, n=2,4,6,\cdots \\ \frac{3}{a_1}+\frac{3}{a_2}+\cdots\frac{3}{a_{[\frac{n+1}{2}]}}, n=1,3,5,\cdots\end{cases}$，因而有 $s_n\le 3s$，即级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3}{a_{[\frac{n}{2}]}}$ 的前 n 项部分和数列有上界，因而是收敛的，由此可得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 也是收敛的。

七.设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\ge 0, \\ e^{-x}, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 2, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 计算 $\int_L f(x)g(y-x)\mathrm{d}s$，其中 $L:|x|+|y|=1$。

解：由于 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\ge 0,-\infty<y<+\infty, \\ e^{-x}, & x<0,-\infty<y<+\infty,\end{cases}$ $g(y-x)=\begin{cases}1, & 0\le y-x\le 2, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

所以 $f(x)g(y-x)=\begin{cases}e^x, & x\ge 0,0\le y-x\le 2, \\ e^{-x}, & x<0,0\le y-x\le 2, \\ 0, & \text{其他},\end{cases}$



因此 $f(x)g(y-x)$ 的函数值仅为 $y=x$ 与 $y=x+2$ 两直线之间不为零.（如图）

于是 $\int_L f(x)g(y-x)\mathrm{d}s=\int_{\overline{AB}}e^x\mathrm{d}s+\int_{\overline{BC}}e^{-x}\mathrm{d}s+\int_{\overline{CD}}e^{-x}\mathrm{d}s$。

而 $\overline{AB}$ 的参数方程 $\begin{cases}x=t, \\ y=1-t,\end{cases}$ A 的参数为 $t=\frac{1}{2}$，B 的参数 $t=0$。

因此 $\int_{\overline{AB}}e^x\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{1}{2}}e^t\sqrt{1^2+1^2}\mathrm{d}t=\sqrt{2}\left(\sqrt{e}-1\right)$。

$\overline{BC}$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=t, \\ y=1+t,\end{cases}$ B 点 $t=0$，C 点 $t=-1$ 因此 $\int_{\overline{BC}}e^{-x}\mathrm{d}s=\int_{-1}^{0}e^{-t}\sqrt{2}\mathrm{d}t=\sqrt{2}\left(e-1\right)$。

$\overline{CD}$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=t, \\ y=-1-t,\end{cases}$ C 点 $t=-1$，D 点 $t=-\frac{1}{2}$，

因此$\int_{\overline{CD}} e^{-x}\mathrm{d}s=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\sqrt{2}\mathrm{d}t=\sqrt{2}\left(e-\sqrt{e}\right)$。

所以$\int_L f(x)g(y-x)\mathrm{d}s=\sqrt{2}\left(\sqrt{e}-1\right)+\sqrt{2}\left(e-1\right)+\sqrt{2}\left(e-\sqrt{e}\right)=2\sqrt{2}\left(e-1\right)$。

合肥工业大学大学生（非数学）高数竞赛模拟题答案（三）

一、简答题:

1. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中$a>0,a\neq1$.

分析：当$a>1$时，原式为∞^0型，当$0<a<1$时，原式为0^0型

解：当$a>1$时，原式$=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}[\ln(a^x-1)-\ln x-\ln(a-1)]}$，

其中$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(a^x-1)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{a^x-1}=\ln a$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}[-\ln x-\ln(a-1)]=0$

故 原式$=e^{\ln a}=a$.

当$0<a<1$时 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}[\ln\frac{a^x-1}{a-1}-\ln x]}=e^0=1.$

2．求不定积分$\int\frac{dx}{y^2}$，其中：$y^2(x-y)=x^2$.

解： 令：$y=tx$,

代入$y^2(x-y)=x^2$有：$t^2x^2(1-t)x=x^2$,

故有：$x=\frac{1}{t^2(1-t)}$，$y=\frac{1}{t(1-t)}$，$\mathrm{d}x=\frac{3t-2}{t^3(1-t)^2}dt$,

所以，原式$=\int\frac{3t-2}{t}dt=3t-2\ln|t|+c=\frac{3y}{x}-2\ln\left|\frac{y}{x}\right|+c$.

3．设二阶线性微分方程$y''+ay'+by=ce^x$（a,b,c均为常数）有特解$y=e^{-x}(1+xe^{2x})$，求此方程的通解.

解：由题设可知函数$y_1=e^x, y_2=e^{-x}$均为该方程相应的齐次线性微分方程特解，$y^*=xe^x$为原方程的一个特解，故此方程的通解为$y=C_1e^{-x}+(C_2+x)e^x$.

4. 设 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 求函数 u 在点 M(1,1,1)处沿曲面 $2z=x^2+y^2$ 在点 M 处的外法线方向 $\vec{n}$ 的方向导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$

解：$\because z=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$， $\therefore z'_x=x, z'_y=y$，

$\vec{n}=\{x,y,-1\}$ 即为曲面的外法线方向，$\left.\vec{n}\right|_M=\{1,1,-1\}$， $\vec{n}^0=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

又 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_M=\frac{1}{\sqrt{3}}$， $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_M=\frac{1}{\sqrt{3}}$，

$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=\left.\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_M=\frac{1}{\sqrt{3}}$，

$\therefore \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}.$

5. 设曲线 Γ 是平面 $x+y+z=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线，试求积分 $\oint_\Gamma (x+y^2)\mathrm{d}s$.

解：利用对称性，

因 $\oint_\Gamma x\mathrm{d}s=\oint_\Gamma y\mathrm{d}s=\oint_\Gamma z\mathrm{d}s, \oint_\Gamma y^2\mathrm{d}s=\oint_\Gamma x^2\mathrm{d}s=\oint_\Gamma z^2\mathrm{d}s$

于是积分为：

$$\tfrac{1}{3}\oint_\Gamma[(x+y+z)+(x^2+y^2+z^2)]\mathrm{d}s=\tfrac{1}{3}\oint_\Gamma(1+1)\mathrm{d}s$$

$$=\tfrac{2}{3}\cdot\Gamma\text{的长度}=\tfrac{2}{3}\cdot 2\pi\cdot\tfrac{\sqrt{6}}{3}=\tfrac{4\sqrt{6}}{9}\pi .$$

二、设当 $x>0$ 时，方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解，求 k 的取值范围.

解：设 $f(x)=kx+\frac{1}{x^2}-1$， $\therefore f'(x)=k-\frac{2}{x^3}$， $f''(x)=\frac{6}{x^4}>0$ ，

1）当 $k\le 0$ 时， $f'(x)<0$, $f(x)$ 单减，又

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ （其中 $k=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$

$\therefore$ 当 $k\le 0$ 时， $f(x)$ 只有一个零点.

2）当 $k>0$ 时，令 $f'(x)=0$ 得唯一驻点 $x_0=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$ 且 $f''\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)>0$, $\therefore f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)=k^{\frac{2}{3}}2^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{2}{3}}-1$ 是 $(0,+\infty)$ 内的极小值，也是最小值 m，

①当 $m=0$ 得 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$，此时方程有且仅有一个根;

②当 $m>0$ 得 $k>\frac{2}{9}\sqrt{3}$，此时方程无根;

③当 $m<0$ 得 $k<\frac{2}{9}\sqrt{3}$，方程恰有两个根.

$\therefore$ 当 $k\le 0$ 或 $k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$ 时，方程有且有一根.

三、求最小的实数 C，对于连续函数 $f(x)$，总有 $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx \le C\int_0^1 |f(x)|dx$ 成立。

解：一方面，$\int_0^1 f(\sqrt{x})dx \overset{\sqrt{x}=t}{=} \int_0^1 f(t)2tdt \le 2\int_0^1 |f(t)|dt$，

另一方面令 $f_n(x)=(n+1)x^n$，则有：$\int_0^1 f_n(x)dx=1$，

而 $\int_0^1 f_n(\sqrt{x})dx \overset{\sqrt{x}=t}{=} 2\int_0^1 t\, f_n(t)dt = 2\int_0^1 (n+1)t^{n+1}dt = \frac{2(n+1)}{n+2} \to 2 \quad (n\to\infty)$，

从而最小实数 $C=2$.

四、设 $\begin{cases} z=ux+y\varphi(u)+\psi(u), \\ 0=x+y\varphi'(u)+\psi'(u), \end{cases}$ 其中函数 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，证明：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0.$$

证明：$\begin{cases} z=ux+y\varphi(u)+\psi(u), & (1) \\ 0=x+y\varphi'(u)+\psi'(u), & (2) \end{cases}$，两边对 x 求导得

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=u+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+\psi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}=u+(x+y\varphi'(u)+\psi'(u))\frac{\partial u}{\partial x} \\ 0=1+y\varphi''(u)\frac{\partial u}{\partial x}+\psi''(u)\frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

结合方程（2）得 $\frac{\partial z}{\partial x}=u, \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}$,

又 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{y\phi''(u)+\psi''(u)}, \therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{y\phi''(u)+\psi''(u)}$.

同理，原方程组两边对 y 求导得

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial u}{\partial y}+\varphi(u)+y\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}+\psi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi(u)+(x+y\varphi'(u)+\psi'(u))\frac{\partial u}{\partial y} \\ 0=\varphi'(u)+y\varphi''(u)\frac{\partial u}{\partial y}+\psi''(u)\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(u), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\phi'(u)}{y\phi''(u)+\psi''(u)},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{[\phi'(u)]^2}{y\phi''(u)+\psi''(u)}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\phi'(u)}{y\phi''(u)+\psi''(u)},$$

故 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0.$

五、设球 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\le R^2$ 和球 $\Omega_2: x^2+y^2+z^2\le 2Rz(R>0)$ 的公共部分体积为 $\dfrac{5\pi}{12}$ 时，求 Ω_1 的表面位于 Ω_2 内的部分 S_1 的面积.

解：记 $\Omega=\Omega_1\cap\Omega_2=\left\{(x,y,z)\middle|R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2},(x,y)\in D_{xy}\right\}$,

其中 $D_{xy}=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le\dfrac{3}{4}R^2\right\}$ 是 Ω 在 xoY 平面上的投影,

$\therefore\Omega$ 的体积

$$\begin{aligned}V&=\iiint_{\Omega}dv=\iint_{D_{xy}}d\sigma\int_{R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dz\\&=\iint_{D_{xy}}\left(2\sqrt{R^2-x^2-y^2}-R\right)dxdy\\&=\int_0^{2\pi}d\sigma\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\left(2\sqrt{R^2-r^2}-R\right)rdr=\frac{5\pi}{12}R^3\end{aligned}$$

由题设 $R=1$.

由此得 S_1 的面积

$$A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,d\sigma=\iint_{D_{xy}}\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr=\pi.$$

六、设函数 $y_1(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{3(n+1)^2}\ (n\pi\le x<(n+1)\pi),n=0,1,2,\cdots,$ $y_2(x)$ 是方程 $y''+2y'-y=e^{-x}\sin x$ 满足条件 $y(0)=0,y'(0)=-\dfrac{1}{3}$ 的特解，求广义积分 $\int_0^{+\infty}\min\{y_1(x),y_2(x)\}\,\mathrm{d}x$.

解：方程 $y''+2y'-y=0$ 的通解为 $y(x)=C_1e^{(\sqrt{2}-1)x}+C_2e^{-(\sqrt{2}+1)x}$，方程 $y''+2y'-y=e^{-x}\sin x$ 的特解可设为 $y^*(x)=e^{-x}(A\sin x+B\cos x)$ 代人原方程可解得

$A=-\frac{1}{3},B=0$，所以方程 $y''+2y'-y=e^{-x}\sin x$ 的通解为

$y(x)=C_1e^{(\sqrt{2}-1)x}+C_2e^{-(\sqrt{2}+1)x}-\frac{1}{3}e^{-x}\sin x$，由初始条件可得 $C_1=C_2=0$，

所以 $y_2(x)=-\frac{1}{3}e^{-x}\sin x$，考察函数 $f(x)=e^{\pi x}-(x+1)^2(x\ge 0)$，则 $f(0)=0$，

当 $x>0$ 时，$f'(x)=\pi e^{\pi x}-2(x+1)>0$，故函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单增的，因而当

$x\in[0,+\infty)$ 时有 $\frac{1}{3e^{\pi x}}<\frac{1}{3(x+1)^2}$，所以当 $n\pi\le x<(n+1)\pi$ 时有

$|y_2(x)|\le\frac{1}{3e^x}<\frac{1}{3(\frac{x}{\pi}+1)^2}<\frac{1}{3(n+1)^2}=|y_1(x)|$，

所以当 $n=0,2,4,\cdots$，时 $\min\{y_1(x),y_2(x)\}=y_1(x)$，

当 $n=1,3,5,\cdots$，时 $\min\{y_1(x),y_2(x)\}=y_2(x)$，由此可得

$$\int_0^{+\infty}\min\{y_1(x),y_2(x)\}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}y_1(x)\,\mathrm{d}x+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}y_2(x)\,\mathrm{d}x$$

$=-\frac{\pi}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}-\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$，而 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$，

$\sum_{k=0}^{\infty}\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-(2k+1)\pi}(e^{\pi}+1)=\frac{-1}{2(e^{\pi}-1)}$，所以

$$\int_0^{+\infty}\min\{y_1(x),y_2(x)\}\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi^3}{24}+\frac{1}{6(e^{\pi}-1)}.$$

七、设 $A=\iint\limits_S x^2zdydz+y^2zdzdx+xz^2dxdy$，其中 S 是曲面 $az=x^2+y^2(0\le z\le a)$ 的第一卦限部分上侧，求满足 $f(0)=A,f'(0)=-A$ 的二阶可导函数 $f(x)$，使得 $y\left(f(x)+3e^{2x}\right)dx+f'(x)dy$ 是某个二元函数的全微分.

解:

$$A=\iint\limits_S x^2zdydz+y^2zdzdx+xz^2dxdy$$
$$=\oiint\limits_{S+S_1+S_2+S_3}-\iint\limits_{S_1}-\iint\limits_{S_2}-\iint\limits_{S_3}$$

其中，S_1,S_2 分别是 S 在平面 $y=0$ 与平面 $x=0$ 上的投影，方向分别为右侧与前侧，S_3 是 S 在

平面 $z=a$ 上的投影，方向为下侧，

$$\iint\limits_{s+s_1+s_2+s_3}\underline{\underline{高斯公式}}-\iiint\limits_{\Omega}2z(2x+y)dy=-\iint\limits_{D_{xy}}d\sigma\int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{a}2z(2x+y)dz$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}[\frac{(x^2+y^2)^2}{a^2}-a^2](2x+y)dxdy,$$

其中：$D_{xy}:x^2+y^2\le a^2\quad x\ge 0\ y\ge 0$

而 $\iint\limits_{S_1}=\iint\limits_{S_2}=0$，$\iint\limits_{S_3}=-a^2\iint\limits_{D_{xy}}xdxdy$

$$\therefore A=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\frac{(x^2+y^2)^2}{a^2}(2x+y)-a^2(x+y)\right]dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\left[(2\cos\theta+\sin\theta)\frac{r^6}{a^2}-(\cos\theta+\sin\theta)a^2r^2\right]dr$$

$$=\frac{1}{7}a^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta+\sin\theta)d\theta-\frac{1}{3}a^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta=-\frac{5}{21}a^5$$

由于 $y\left(f(x)+3e^{2x}\right)dx+f'(x)dy$ 是某个二元函数的全微分，

所以

$$\frac{\partial\left\{y\left[f(x)+3e^{2x}\right]\right\}}{\partial y}=\frac{df'(x)}{dx}$$

$$f''(x)-f(x)=3e^{2x}\qquad(1)$$

对应的齐次方程通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$，此外（1）有特解 $y^*=e^{2x}$，

所以（1）的通解为 $\begin{matrix}f(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}+e^{2x}\\ f'(x)=ce^x-c_2e^{-x}+2e^{2x}\end{matrix}$，

由 $f(0)=A,\quad f'(0)=-A$ 得方程组 $\begin{matrix}A=c_1+c_2+1\\ -A=c_1-c_2+2\end{matrix}$

解 $c_1=-\frac{3}{2},\quad c_2=\frac{1}{2}-\frac{5}{21}a^5$

因此 $f(x)=-\frac{3}{2}e^x+\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{21}a^5\right)e^{-x}+e^{2x}$.

合肥工业大学年大学生（非数学）高数竞赛模拟题答案（七）

一、简答题

1．设 $f\left(x\right)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x} & x>0 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-x}\right)^{n}+\beta & x\le 0 \end{cases}$，试讨论 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

解答:

$$\because \lim_{n\to\infty}(\frac{n+x}{n-x})=e^{2x},\quad \therefore \lim_{x\to 0^-}(e^{2x}+\beta)=1+\beta=f(0)=1+\beta \quad \text{左连续}$$

$$\because \lim_{n\to 0^+} x^{x}\sin\frac{1}{x}=\begin{cases} 0 & \alpha>0 \\ \text{不存在} & \alpha\le 0 \end{cases}$$

$\therefore$ 当 $\alpha>0$ 且 $\beta=-1$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处连续

2．对于连续函数 $f(x)$，证明：$\int_0^{2\pi} f(a\cos x+b\sin x)dx=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin x)dx$。

解答:

$$\int_0^{2\pi} f(a\cos x+b\sin x)dx=\int_0^{2\pi} f[\sqrt{a^2+b^2}(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x)]dx$$

$$=\int_0^{2\pi} f[\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)]dx,\ \text{其中：}\theta=\arctan\frac{a}{b}$$

$$=\int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin u)du=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin u)du$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin u)du+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin u)du$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin x)dx$$

3．设 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x-y}{x^2+y^2}\tan(x^2+y^2), & (x,y)\ne(0,0) \\ 0 \quad\quad , & (x,y)=(0,0) \end{cases}$，证明：$f(x,y)$ 在（0,0）处可微，并求 $df(x,y)\big|_{(0,0)}$。

解答:

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x^2}{x^3}=1,$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y\tan y^2}{y^3}=-1,$$

故，$w=f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y$

$$=\frac{x-y}{x^2+y^2}\tan(x^2+y^2)-x+y$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{w}{\rho}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\frac{x-y}{x^2+y^2}\tan(x^2+y^2)-x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{\tan(x^2+y^2)}{x^2+y^2}-1\right)=0$$

（$\because\left|\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le 2,\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{\tan(x^2+y^2)}{x^2+y^2}-1\right)=0$）

所以，$f(x,y)$ 在（0，0）处可微，且：$df(x,y)\big|_{(0,0)}=dx-dy$ 。.

4．设Ω是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，Σ 是 Ω 的整个边界的外侧，试求：$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

解答：

$$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint\limits_{\Omega}dv=3\left[\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R}\pi r^2dr+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}R}^{R}\pi(R^2-r^2)dr\right]$$

$$=(2-\sqrt{2})\pi R^2$$

5．设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,0\le x\le\frac{1}{2},\\ 1-x,\frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$ 的正弦级数展开式为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，其中系数

$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}\,x\ (n=1,2,\cdots)$，若记 $s(x)$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$ 的和函数，求 $s(-\frac{5}{2})$ 与 $s(\frac{13}{4})$ 的值。

解答：

$$s(-\frac{5}{2})=s(-\frac{1}{2})=-s(\frac{1}{2})=-\frac{f((\frac{1}{2})^-)+f((\frac{1}{2})^+)}{2}=-\frac{3}{4},$$

$$s(\frac{13}{4})=s(-\frac{3}{4})=-f(\frac{3}{4})=-\frac{1}{4}。$$

二、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数，且存在 $c\in(a,b)$，使得 $f'(c)=0$，证明：存在

$\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(\xi) - f(a)}{b-a}$

分析：将结论中的 ξ 改为 x 得 $f'(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{b-a}$

$$\therefore \left(f(x) - f(a)\right)' = \frac{1}{b-a}\left(f(x) - f(a)\right)$$

上式两边乘以 $e^{\frac{x}{b-a}}$ 得 $e^{-\frac{x}{b-a}}\left(f(x) - f(a)\right)' - e^{-\frac{x}{b-a}}\dfrac{1}{b-a}\left(f(x) - f(a)\right) = 0$

$$\therefore \left[e^{\frac{x}{b-a}}\left(f(x) - f(a)\right)\right]' = 0$$

解答：

令 $F(x) = e^{-\frac{x}{b-a}}\left(f(x) - f(a)\right)$，则：$F(a) = 0$

1）若 $F(c) = 0$ 即 $f(a) = f(c)$ 时，由罗尔定理，存在 $\xi \in (a,c)$

使 $F'(\xi) = 0$，即 $F'(\xi) = \dfrac{f(\xi) - f(a)}{b-a}$

2）若 $F(c) \neq 0$，不妨设 $F(c) > 0$，则

$$\begin{aligned} F'(c) &= e^{-\frac{c}{b-a}}\left(f(c) - \frac{1}{b-a}\left(f(c) - f(a)\right)\right) \\ &= e^{-\frac{c}{b-a}}\left[-\frac{1}{b-a}\left(f(c) - f(a)\right)\right] \\ &= -\frac{1}{b-a}F(c) < 0 \end{aligned}$$

而 $F(x)$ 在 $[a,c]$ 上利用 Lagrange 公式得，$\exists \xi_1 \in (a,c)$

使 $F'(\xi_1) = \dfrac{F(c) - F(a)}{c-a} = \dfrac{F(c)}{c-a} > 0$

所以由 $F'(x)$ 在 $[\xi_1, c] \subset [a,b]$ 上连续及连续函数的零点定理得，存在 $\xi \in (\xi_1, c) \subset (a,b)$，

使 $F'(\xi) = 0$ 即 $f'(\xi) = \dfrac{f(\xi) - f(a)}{b-a}$

三、设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left|\dfrac{\sin nt}{\sin t}\right|^3 dt$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 发散。

解答：

对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$，有：

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3 dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\frac{\sin^2 nt}{\sin^3 t}\left|\sin nt\right|dt\le\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\frac{\sin^2 nt}{\sin^3 t}dt$$

$$\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{t}{\sin t})^3\frac{\sin^2 nt}{t^2}dt\le M^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nt}{t^2}dt=nM^3\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{\sin^2 s}{s^2}ds$$

$$\le nM^3\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt=nM^3\frac{\pi}{2}$$

故，结论成立。

四、设在上半空间 $z>0$ 上函数有连续的二阶偏导数，

且 $u'_x=2x+y+z+x\phi(r),u'_y=x+y\phi(r),u'_z=x+z+z\phi(r),$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ，

$\lim\limits_{r\to0^+}\phi(r)$ 存在，$\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}u(x,y,z)=0$，$div[gradu(x,y,z)]=0$，求 $u(x,y,z)$ 的表达式。

解答：

由 $div[gradu(x,y,z)]=0$ 得 $\dfrac{\partial u'_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u'_y}{\partial y}+\dfrac{\partial u'_z}{\partial z}=0$，

即 $[2+\varphi(r)+x\varphi'(r)\cdot\dfrac{x}{r}]+[\varphi(r)+y\varphi'(r)\cdot\dfrac{y}{r}]+[1+\varphi(r)+z\varphi'(r)\cdot\dfrac{z}{r}]=0$

化简得：$r\varphi'(r)+3\varphi(r)+3=0$，即 $\varphi'(r)+\dfrac{3}{r}\varphi(r)=-\dfrac{3}{r}$，

通解为 $\varphi(r)=e^{-\int\frac{3}{r}dr}[-\int\dfrac{3}{r}e^{\int\frac{3}{r}dr}dr+C]=\dfrac{C}{r^3}-1$

由 $\lim\limits_{r\to0^+}\varphi(r)$ 存在 $\Rightarrow C=0\quad\therefore\varphi(r)=-1$，

从而 $u'_x=2x+y+z-x=x+y+z$， $u'_y=x-y$， $u'_z=x$，

由此可得：$du=u'_xdx+u'_ydy+u'_zdz=(x+y+z)dx+(x-y)dy+xdz$

$$=(xdx-ydy)+(ydx+xdy)(zdx+xdz)=d(\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}+xy+xz)$$

所以 $u=\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)+x(y+z)+C_1$，又由 $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}u(x,y,z)=0\quad\Rightarrow C_1=0$

故：$u=\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)+x(y+z)$。

五、设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)dv}{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma}，\quad G(t)=\frac{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)dx}$$

其中 $\Omega(t)=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le t^2\right\}$，$D(t)=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le t^2\right\}$。

1．讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性；

2．证明：当 $t>0$ 时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$。

解答：

1．

因为：$F(t)=\dfrac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{t}f(r^2)r^2\sin\varphi dr}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{t}f(r^2)rdr}=\dfrac{2\int_0^{t}f(r^2)r^2dr}{\int_0^{t}f(r^2)rdr}$

$$F'(t)=2tf(t^2)\frac{\int_0^{t}f(r^2)r(t-r)dr}{[\int_0^{t}f(r^2)rdr]^2}$$

所以在 $(0,+\infty)$ 内 $F'(t)>0$，故：$F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加。

2．因为 ：$G(t)=\dfrac{\pi\int_0^{t}f(r^2)rdr}{\int_0^{t}f(r^2)dr}$

要证明 $t>0$ 时 $F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$，只需证明 $t>0$ 时 $F(t)-\dfrac{2}{\pi}G(t)>0$

即：$\int_0^{t}f(r^2)r^2dr\int_0^{t}f(r^2)dr-[\int_0^{t}f(r^2)rdr]^2>0$

令：$g(t)=\int_0^{t}f(r^2)r^2dr\int_0^{t}f(r^2)dr-[\int_0^{t}f(r^2)rdr]^2$

则：$g'(t)=f(t^2)\int_0^{t}f(r^2)(t-r)^2dr>0$，故：$g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加。

因为 $g(t)$ 在 $t=0$ 处连续，所以当 $t>0$ 时，有 $g(t)>g(0)$。

而 $g(0)=0$，故当 $t>0$ 时，$g(t)>0$。

因此，当 $t>0$ 时 $F(t)-\dfrac{2}{\pi}G(t)>0$。

六、设$a>0$，判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$的敛散性。

解答:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{n+1})}}{\dfrac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{1+a^{n+1}}=\begin{cases}0, a<1,\\ \dfrac{1}{2}, a=1,\\ 1, a>1,\end{cases}$$

由正项级数的比值审敛法可知当$a\le 1$时该级数收敛。

而当$a>1$时，由于$x>0$时$e^x>1+x$，当$a>1$时有

$$\frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}=\frac{1}{(1+a^{-1})(1+a^{-2})\cdots(1+a^{-n})}>e^{-\sum_{k=1}^{n}a^{-k}}=e^{-\frac{1-\frac{1}{a^{-(n+1)}}}{1-\frac{1}{a}}}>e^{\frac{-a}{a-1}},$$

由此可知，该级数不收敛。

七、设抛物面$\Sigma_1: z=1+x^2+y^2$及圆柱面$\Sigma_2: (x-1)^2+y^2=1$

1．求Σ_1的一个切面π_0，使得由它及Σ_1与Σ_2围成的立体Ω体积达到最小;

2．当由（1）确定的最小体积的立体Ω_0上有质量分布，其密度$\rho=1$，求Ω_0的质心坐标。

解答:

1．设$P=(\alpha,\beta,\gamma)$是Σ_1上的任一点，则Σ_1在点P处的法向量为

$$(2x,2y,-1)\big|_P=(2\alpha,2\beta,-1),\gamma=1+\alpha^2+\beta^2$$

所以，Σ_1在点P处的切平面π的方程为：$2\alpha(x-\alpha)+2\beta(y-\beta)-(z-\gamma)=0$

即：$z=2\alpha x+2\beta y-\gamma+2$

于是，由π，Σ_1和Σ_2围成的立体Ω的体积$V(\alpha,\beta,\gamma)=\iiint\limits_{\Omega}dv$

其中$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\begin{array}{c}2\alpha x+2\beta y-\gamma+2\le z\le 1+x^2+y^2\\ (x-1)^2+y^2\le 1\end{array}\right\}$

$$V(\alpha,\beta,\gamma)=\iint\limits_{D_{xy}}d\sigma\int_{2\alpha x+2\beta y-\gamma+2}^{1+x^2+y^2}dz=\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma-1\right)d\sigma$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\left[r^2-2\left(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta\right)r+\gamma-1\right]rdr=\left(\frac{1}{2}-2\alpha+\gamma\right)\pi$$

记$F(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=V(\alpha,\beta,\gamma)+\lambda\left(1+\alpha^2+\beta^2-\gamma\right)$

$$=\left(\frac{1}{2}-2\alpha+\gamma\right)\pi+\lambda\left(1+\alpha^2+\beta^2-\gamma\right)$$

$$令\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}=-2\pi+2\lambda\alpha=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial \beta}=-2\lambda\beta=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial \gamma}=\pi-\lambda=0\\ 1+\alpha^2+\beta^2-\gamma=0\end{cases}$$

解得唯一解$\alpha=0,\beta=0,\gamma=2$

所以$V(\alpha,\beta,\gamma)$在约束条件$\gamma=1+\alpha^2+\beta^2$下只有唯一可能极值点，由问题本身知$V(\alpha,\beta,\gamma)$有最小值，因此最小值必在$\alpha=1,\beta=0,\gamma=2$处达到，所以切平面方程为$z=2x$。

2．设由π_0，Σ_1和Σ_2围成的立体Ω_0的质心为$\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)$

$$则\ \bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega_0}xdv}{\iiint\limits_{\Omega_0}dv},\quad \bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega_0}ydv}{\iiint\limits_{\Omega_0}dv},\quad \bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega_0}zdv}{\iiint\limits_{\Omega_0}dv}$$

$$其中\iiint\limits_{\Omega_0}dv=V(1,0,2)=\frac{1}{2}\pi$$

$$\iiint\limits_{\Omega_0}xdv=\iint\limits_{D_{xy}}d\sigma\int_{2x}^{1+x^2+y^2}xdz=\iint\limits_{D_{xy}}x(1+x^2+y^2-2x)d\sigma$$

$$\underline{\underline{\text{极坐标}}}\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\gamma\cos\theta\left(1+r^2-2r\cos\theta\right)rdr=\frac{\pi}{2}$$

$$\iiint\limits_{\Omega_0}ydv=0\quad（由于\Omega_0关于平面y=0对称）$$

$$\iiint\limits_{\Omega_0}zdv=\iint\limits_{D_{xy}}d\sigma\int_{2x}^{1+x^2+y^2}zdz=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}\left[\left(1+x^2+y^2\right)^2-4x^2\right]d\sigma$$

$$\underline{\underline{\text{极坐标}}}\quad \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\left[\left(1+r^2\right)^2-4r^2\cos^2\theta\right]rdr$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\theta+8\cos^4\theta-\frac{16}{3}\cos^6\theta\right)d\theta=\frac{7}{6}\pi$$

$$\therefore \bar{x}=1,\ \bar{y}=0,\ \bar{z}=\frac{7}{3}\pi$$

合肥工业大学大学生（非数学）高数竞赛模拟题答案（二）

一、简答题

1．设$u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)}-x\right)$，其中$a_i=\ln\dfrac{i}{n}=1,2,\cdots n,$ 求$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$。

解：令$x=\dfrac{1}{t}$，$u_n=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sqrt[n]{1+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_it+o(t)\right)}-1}{t}\ldots=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_it+o(t)\right)}{t}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}}{n}=\int_0^1\ln xdx=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1x\cdot\frac{1}{x}dx=-1。$$

2. 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，由积分中值公式有$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=(x-a)f(\xi)$，其中$(a\le\xi\le x<b)$，若导数$f_+'(a)$存在且非零，试求$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\xi-a}{x-a}$的值。

解：$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\xi-a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\xi-a}{f(\xi)-f(a)}\dfrac{f(\xi)-f(a)}{x-a}=\dfrac{1}{f_+'(a)}\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(\xi)-f(a)}{x-a}$

$$=\frac{1}{f_+'(a)}\lim_{x\to a^+}\frac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-(x-a)f(a)}{(x-a)^2}=\frac{1}{2}。$$

3. 设 $\boldsymbol{f(x,y)}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中连续，且存在偏导数，又 $\boldsymbol{f(0,0)=0,}$ 且当 $\boldsymbol{x^2+y^2\le5}$ 时，$|\boldsymbol{gradf}|\le\mathbf{1},$ 请给出 $f(1,2)$ 值的范围。

证明：由二元函数的中值定理得

$$\boldsymbol{f(1,2)=f(1,2)-f(0,0)=f_x'(\xi,\eta)\cdot1+f_y'(\xi,\eta)\cdot2=\{f_x'(\xi,\eta),\ f_y'(\xi,\eta)\}\cdot\{1,2\}}$$

$=gradf(\xi,\eta)\cdot\{1,2\}$，所以 $|f(1,2)|=|gradf(\xi,\eta)\cdot\{1,2\}|\le|gradf(\xi,\eta)|\cdot\sqrt{1+2^2}\le\sqrt{5}.$

（其中$\boldsymbol{\xi}$介于 0 和 1 之间，$\boldsymbol{\eta}$介于 0 和 2 之间，$\boldsymbol{\xi^2+\eta^2\le5}$）。

4. 计算$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b e^{\max\{b^2x^2,a^2y^2\}}\mathrm{d}y$，其中$a>0,b>0$。

解：$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^b e^{\max\{b^2x^2,a^2y^2\}}\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}x}e^{b^2x^2}\mathrm{d}y+\int_0^a\mathrm{d}x\int_{\frac{b}{a}x}^{b}e^{a^2y^2}\mathrm{d}y$

$$=\int_0^a\frac{b}{a}xe^{b^2x^2}\mathrm{d}x+\int_0^b\mathrm{d}y\int_0^{\frac{a}{b}y}e^{a^2y^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{ab}(e^{a^2b^2}-1)。$$

5. 设级数$\sum_{n=2}^{\infty}\ln[(n(n+1)^a(n+2)^b]$是收敛的，试求常数$a,b$的值。

解：因为$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$，因而

$$\ln[(n(n+1)^a(n+2)^b]=(1+a+b)\ln n+(a+2b)\frac{1}{n}-(\frac{a}{2}+2b)\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

由题设有$1+a+b=0,a+2b=0$，解得$a=-2,b=1$。

二、设函数$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<-1,\\ x^3, & -1\le x<2,\\ x^2+4, & x\ge 2,\end{cases}$又设$\alpha,\beta$分别是$y=f(x)$的反函数$y=g(x)$的最小不可导点与最大不可导点，设$x_0\in(\alpha,\beta)$，$x_{n+1}=\dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}$，$n=0,1,2,\cdots,$求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解：法一　由$y=f(x)$的表达式得其反函数

$$y=g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x-1), & x<-1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1\le x<8,\\ \sqrt{x-4}, & 8\le x,\end{cases}$$

易知$y=g(x)$不可导点为$-1,0,8$，　$\therefore\alpha=-1,\beta=8$

法一：由于$x_0\in(-1,8)$所以$x_{n+1}=\dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}>0$，　$x_{n+1}=\dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}=2-\dfrac{2}{2+x_n}<2$，

$\therefore n\ge 1,\quad x_n\in(0,2)\quad\therefore\{x_n\}$有界。

$$x_{n+1}-x_n=\frac{2(1+x_n)}{2+x_n}-\frac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}}=2\frac{(1+x_n)(2+x_{n-1})-(1+x_{n-1})(2+x_n)}{(2+x_n)(2+x_{n-1})}$$

$$=\frac{2(x_n-x_{n-1})}{(2+x_n)(2+x_{n-1})}=\cdots=\frac{2^n(x_1-x_0)}{\prod_{i=1}^{n}(2+x_i)}=\frac{2^n(2-x_0^2)}{\prod_{i=0}^{n}(2+x_i)},$$

所以当$x_0\in(-1,8)$且$x_0\ne\sqrt{2}$时，$\{x_n\}$单调。当$x_0\in(-1,\sqrt{2})$时，$\{x_n\}$单增；

当$x_0\in(-\sqrt{2},8)$时，$\{x_n\}$单减。由数列极限存在准则知，$x_0\in(-1,8)$时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在记其极限值为$A$，对$x_{n+1}=\dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n},\quad n\to\infty$得$A=\dfrac{2(1+A)}{2+A}$得$A=\sqrt{2},-\sqrt{2}$（舍去）。

当 $x_0=\sqrt{2}$ 时，$x_{n+1}=\sqrt{2}$，（$n=1,2,\cdots$），此时 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$。综上所得，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$。

法二：由于

$$\left|x_{n+1}-\sqrt{2}\right|=\left|\frac{2(1+x_n)}{2+x_n}-\sqrt{2}\right|=\left|\frac{2(1+x_n)-\sqrt{2}(2+x_n)}{2+x_n}\right|=\left|\frac{2-2\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})x_n}{2+x_n}\right|$$

$$=\frac{(2-\sqrt{2})}{2+x_n}\left|x_n-\sqrt{2}\right|\le\frac{(2-\sqrt{2})}{2}\left|x_n-\sqrt{2}\right|\le\cdots\le\left(\frac{(2-\sqrt{2})}{2}\right)^n\left|x_1-\sqrt{2}\right|\to 0(n\to\infty),$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}.$$

三、当 $x>-1$ 时，可微函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)+f(x)-\dfrac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$，且 $f(0)=1$，

证明：当 $x\ge 0$ 时，有 $e^{-x}\le f(x)\le 1$ 成立。

证明： 由题设，$f'(0)=-1$，所给方程为：$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$

两边求导并整理，$(x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0$，对于这个可降阶的二阶微分方程，解得：

$f'(x)=\dfrac{ce^{-x}}{1+x}$，再由 $f'(0)=-1$ 得，$f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{1+x}$，于是 $f(x)$ 单调减少，故有：

$f(x)\le f(0)=1$，又 $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=1-\int_0^x\dfrac{e^{-t}}{1+t}\mathrm{d}t\ge 1-\int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t=e^{-t}$。

于是，结论成立。

四、设 $f(x)$ 在 (a,b) 上 $2p+1$ 阶可导，在 $[a,b]$ 上 $2p$ 阶连续可导，在此区间的两个端点 $x=a$ 与 $x=b$ 处，$f(x)$，$f'(x),f''(x),\ldots,f^{(p)}(x)$ 皆取零值，试证：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f^{(2p+1)}(\xi)=0$。

证明：对函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用罗尔定理，存在 $\xi_1\in(a,b)$，使得 $f'(\xi_1)=0$ 且 $f'(a)=f'(b)=0$；

对函数 $f'(x)$ 分别在 $[a,\xi_1],[\xi_1,b]$ 上应用罗尔定理，存在 $\xi_2\in(a,b),\xi_3\in(a,b)$，使得 $f''(\xi_2)=f''(\xi_3)=0$ 且 $f''(a)=f''(b)=0$，因此；$f''(x)$ 在 (a,b) 内至少有两个不同的零点，且 $f''(a)=f''(b)=0$。

对函数 $f''(x)$ 在此每两相邻零点上应用罗尔定理，可得 $f'''(x)$ 在 (a,b) 内至少有 3 个

不同的零点，且 $f'''(a)=f'''(b)=0$。

依次类推，可得 $f^{(p+1)}(x)$ 在 (a,b) 内至少有 $p+1$ 个不同的零点。

对函数 $f^{(p+1)}(x)$ 在这 $p+1$ 个不同的零点中每两个相邻的零点间应用罗尔定理，可得 $f^{(p+2)}(x)$ 在 (a,b) 内至少有 p 个不同的零点。

对函数 $f^{(p+2)}(x)$ 在这 p 个不同的零点中每两个相邻的零点间应用罗尔定理，可得 $f^{(p+3)}(x)$ 在 (a,b) 内至少有 $p-1$ 个不同的零点。

依次类推，可得 $f^{(2p)}(x)$ 在 (a,b) 内至少有 2 个不同的零点；最后对函数 $f^{(2p)}(x)$ 在这 2 个不同的零点间应用罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f^{(2p+1)}(\xi)=0$。

五、设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球的表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比（比例常数 $k>0$），求球体的重心位置。

解法一　记所考虑的球体为 Ω，以 Ω 的球心为原点 O，射线 OP_0 为正 x 轴建立直角坐标系，则 P_0 的坐标为 $(R,0,0)$，球面的方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$。设 Ω 的重心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性得，$\bar{y}=0,\bar{z}=0$，$\bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} x\cdot k\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega} k\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]\mathrm{d}v}$。

而 $\iiint\limits_{\Omega}\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\left[(x^2+y^2+z^2)\right]\mathrm{d}v+\iiint\limits_{\Omega}R^2\mathrm{d}v$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r+\frac{4}{3}\pi R^5=\frac{32}{15}\pi R^5$$

$$\iiint\limits_{\Omega}x\cdot\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]\mathrm{d}v=-2R\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}v=\frac{-2R}{3}\iiint\limits_{\Omega}\left[(x^2+y^2+z^2)\right]\mathrm{d}v=-\frac{8}{15}\pi R^6$$

故 $\bar{x}=-\dfrac{R}{4}$。因此球体的中心位置为 $(-\dfrac{R}{4},0,0)$。

解法二 记所考虑的球体为 Ω，以 Ω 的球心为原点 $\overline{O}$，P_0 为原点，射线 $P_0\overline{O}$ 为正 z 轴建立直角坐标系，则球面的方程为 $x^2+y^2+z^2=2Rz$。

设Ω的中心位置为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性得，$\bar{x}=0,\bar{y}=0$，$\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} kz(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega} k(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v}$。

而$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\dfrac{32}{15}\pi R^5$。故$\bar{x}=\dfrac{5R}{4}$。

因此球体的中心位置为$(0,0,\dfrac{5R}{4})$。

六、设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有一阶连续导数，$f(1)=1$，G是不包含原点的单连通区域，任取$M,N\in G$，在G内曲线积分$\int_M^N\dfrac{1}{2x^2+f(y)}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)$与积分路径无关。

（1）求$f(x)$；（2）求$\mathrm{I}=\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{1}{2x^2+f(y)}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)$，其中$\Gamma$为$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，取正向。

解：（1）记$P(x,y)=\dfrac{y}{2x^2+f(y)},Q(x,y)=\dfrac{-x}{2x^2+f(y)}$，因为在 G 内曲线积分$\int_M^N P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$与积分路径无关，所以对任意$(x,y)\in$G 有$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，即

$\dfrac{2x^2-f(y)}{\left(2x^2+f(y)\right)^2}=\dfrac{2x^2+f(y)-yf'(y)}{\left(2x^2+f(y)\right)^2}$，由此推得$yf'(y)=2f(y)$，又$f(1)=1$，解得$f(y)=y^2$，即$f(x)=x^2$；

（2）取小椭圆$\Gamma_\varepsilon:2x^2+y^2=\varepsilon^2$，取正向，其中$\varepsilon$为充分小的正数，使得$\Gamma_\varepsilon$位于$\Gamma$的内部，设$\Gamma$与$\Gamma_\varepsilon$所包围的区域为 D，在 D 上 P，Q 一阶偏导数连续，且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，应用格林公式得$\oint\limits_{\Gamma+\Gamma_\varepsilon^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，其中$\Gamma_\varepsilon^-$为负向（顺时针方向），

于是$\mathrm{I}=\oint\limits_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\oint\limits_{\Gamma_\varepsilon^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint\limits_{\Gamma_\varepsilon}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-\varepsilon^2\sin^2\theta-\varepsilon^2\cos^2\theta}{\varepsilon^2}\right)\mathrm{d}\theta=-\sqrt{2}\pi\text{。}$$

七. 设$a_n=\int_n^{n+1}\dfrac{\sin\pi x}{x^p+1}\mathrm{d}x$，证明：（1）当$p>1$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛；（2）当$0<p\le 1$时

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛。

证明：（1）$|a_n| \le \int_n^{n+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x^p + 1} \right| \mathrm{d}\, x \le \frac{1}{n^p} \int_n^{n+1} |\sin \pi x| \mathrm{d}\, x = \frac{2}{\pi n^p}$，因为 $p > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^p}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 在 $p > 1$ 时绝对收敛；

（2）若 $0 < p \le 1$，则 $a_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin \pi x}{x^p + 1} \mathrm{d}\, x \overset{x=n+t}{=\!=\!=} (-1)^n \int_0^1 \frac{\sin \pi t}{(n+t)^p + 1} \mathrm{d}\, x$，

记 $u_n = \int_0^1 \frac{\sin \pi t}{(n+t)^p + 1} \mathrm{d}\, x$，则 $\{u_n\}$ 是单减正的数列，且 $u_n \le \frac{1}{n^p} \int_0^1 \sin \pi t \,\mathrm{d}\, t = \frac{2}{\pi n^p}$，所以有

$\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$，由莱布尼茨判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的，

又 $|a_n| = u_n \ge \frac{1}{1 + (n+1)^p} \int_0^1 \sin \pi t \,\mathrm{d}\, t = \frac{2}{\pi (1+n)^p + 1} \sim \frac{2}{\pi n^p}\ (n \to \infty)$ 。

而 $0 < p \le 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^p}$ 发散，故此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 也发散，

因而当 $0 < p \le 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛。

合肥工业大学大学生（非数学）高数竞赛模拟题答案（八）

一、简答题：

1．求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n (2n+1)!} t^{2n+1} dt - \frac{x^2}{2}}{x^3 (\sqrt[3]{1+x} - e^x)}$

分析：由于 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n (2n+1)!} t^{2n+1} = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} (\frac{t}{\sqrt{2}})^{2n+1} = \sqrt{2} \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \quad t \in R$

$$x^3 (\sqrt[3]{1+x} - e^x) = x^4 \frac{[(\sqrt[3]{1+x} - 1) - (e^x - 1)]}{x}$$

且：$\lim\limits_{x \to 0} \frac{3\sqrt{1+x-1} - 1 - (e^x - 1)}{x} = \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3}$

解答:

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sqrt{2}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}dt-\frac{x^2}{2}}{-\frac{2}{3}x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-x}{-\frac{8}{3}x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-1}{-8x^2}=\frac{1}{32}$$

2．设正值函数 $f(x)$ 在闭区间上连续，$\int_a^b f(x)dx=1$，证明:

$$\int_a^b f(x)e^{f(x)}dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \ge (b-a)(b-a+1) \text{ 成立。}$$

解答:

记 $D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b, a\le y\le b\}$，则:

$$\int_a^b f(x)e^{f(x)}dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx=\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}e^{f(x)}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}(\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}e^{f(x)}dxdy+\iint_D \frac{f(y)}{f(x)}e^{f(y)}dxdy)\ge \iint_D e^{\frac{f(x)+f(y)}{2}}dxdy$$

$$\ge \iint_D (1+\frac{f(x)+f(y)}{2})dxdy=(b-a)(b-a+1)$$

3．证明: 曲面 $z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x^3 f(\frac{y}{x})$ 任意点处的切平面在 oz 轴上的截距与切点到坐标原点的距离之比为常数。并求出此常数。

解答:

为方便起见，记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ （即原点到点 (x,y,z) 的距离），$u=\frac{y}{x}$，

$\boldsymbol{F(x,y,z)=z+r-x^3 f(u)}$，则

$$\boldsymbol{F'_x=\frac{x}{r}-3x^2 f(u)+xyf'(u)},\quad \boldsymbol{F'_y=\frac{y}{r}-x^2 f'(u)},\quad \boldsymbol{F'_z=\frac{z}{r}+1}$$

曲面在任意点 P(x, y, z)处切平面的法向量为 $\{\boldsymbol{F'_x,F'_y,F'_z}\}$,

所以，切平面方程为 $\boldsymbol{F'_x\cdot(X-x)+F'_y\cdot(Y-y)+F'_z\cdot(Z-z)=0}$，

即 $\boldsymbol{F'_x\cdot X+F'_y\cdot Y+F'_z\cdot Z=-2(r+z)}$，

当 $\boldsymbol{X=0,Y=0}$ 时,

切平面在 oz 轴上的截距 $\boldsymbol{C=Z=\frac{-2(y+z)}{F'_z}=\frac{-2(y+z)}{\frac{z}{y}+1}=-2r}$，故 $\boldsymbol{\frac{C}{r}=-2}$，

即截距与切点到坐标原点的距离之比为常数。

4．试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$ 的值。

解答:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}})(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{j^2}{n^2}})$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi\ln 2}{4}$$

5．求以函数 $y(x)=xe^x+3\sin 3x$ 为特解的四阶常系数齐次线性微分方程的表达式和通解。

解答:

由题设及常系数齐次线性微分方程解的性质可知 $r=1$ 为该方程相应的特征方程的 2 重根，而 $r=\pm 3i$ 为该方程相应的特征方程的单根。

因而它的特征方程为 $(r-1)^2(r^2+9)=0$，

因此该方程的表达式为 $y^{(4)}-2y'''+10y''-18y'+9y=0$，

它的通解为： $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3\sin 3x+C_4\cos 3x$ 。

二、求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)}$ 。

解答:

由于 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{k+1}-\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{k+2}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{k+1}-\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}}{k+2}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{k+1}-\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}}{k+2}\right]+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

又因为

$$0<\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{n+2}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}Ln(n+1)\to 0(n\to\infty)$$

因而，原式=1。

三、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续可导，证明:

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f[a+\frac{k(b-a)}{n}]\right\}=\frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]$$

解答:

$$n\left\{\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f[a+\frac{k(b-a)}{n}]\right\}$$

$$=n(b-a)\left\{\int_0^1 f[a+x(b-a)]dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f[a+\frac{k(b-a)}{n}]\right\}$$

$$=n(b-a)\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f[a+x(b-a)]dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f[a+\frac{k(b-a)}{n}]\right\}$$

$$=(b-a)\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{k-1}^{k} f[a+\frac{x}{n}(b-a)]dx-f[a+\frac{k(b-a)}{n}]\right\}$$

$$=(b-a)\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\left\{f[a+\frac{x}{n}(b-a)]-f[a+\frac{k(b-a)}{n}]\right\}dx$$

$$=-\frac{1}{n}(b-a)^2\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}dx\int_x^k f'(a+\frac{y(b-a)}{n})dy$$

$$=-\frac{1}{n}(b-a)^2\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}dy\int_{k-1}^{y} f'(a+\frac{y(b-a)}{n})dx$$

$$=-\frac{1}{n}(b-a)^2\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}(y-k+1)f'(a+\frac{y(b-a)}{n})dy$$

$$=-\frac{1}{n}(b-a)^2\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k)\int_{k-1}^{k}(y-k+1)dy,\text{ 这里}:\frac{\xi_k-a}{b-a}\in(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})$$

$$=-\frac{1}{2n}(b-a)^2\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k)=-\frac{b-a}{2}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k),\frac{\xi_k-a}{b-a}\in(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})$$

当 $n\to\infty$ 时，有:

$$=-\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)dx=\frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]$$

四、设函数 $\boldsymbol{u=f(x,y,z)}$ 是可微函数，如果 $\boldsymbol{\frac{f'_x}{x}=\frac{f'_y}{y}=\frac{f'_z}{z}}$，证明：u 仅为 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的函数。

解答:

将 u 写成球坐标 $\boldsymbol{\theta}$，$\boldsymbol{\varphi}$，$\boldsymbol{r}$ 为自变量的函数，只要证明 $\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{\partial u}{\partial\varphi}=0}$，即 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{\theta,\varphi}$ 无关，只与 r 有关。

设 $\boldsymbol{u=f(x,y,z)=f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)}$，

令 $\boldsymbol{\frac{f'_x}{x}=\frac{f'_y}{y}=\frac{f'_z}{z}=t}$， 则 $\boldsymbol{f'_x=tx,f'_y=ty,f'_z=tz}$，于是

$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial\theta}=f'_x\cdot r\sin\varphi(-\sin\theta)+f'_y\cdot r\sin\varphi\cos\theta}$$

$$\boldsymbol{=t[rx\sin\varphi(-\sin\theta)+yr\sin\varphi\cos\theta]=t(-xy+xy)=0},$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial\varphi}=f'_x\cdot r\cos\varphi\cos\theta+f'_y\cdot r\cos\varphi\sin\theta+f'_z\cdot r(-\sin\varphi)}$$

$$\boldsymbol{=tr^2(\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta+\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta-\sin\varphi\cos\varphi)=0},$$

所以 u 仅是 r 的函数。

五、设对于半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S，都有

$$\iint\limits_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy=0$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数，并且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，求 $f(x)$。

解答:

有题设与 Gauss 公式得,

$$0=\iint\limits_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy=\pm\iiint_V(xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x})dv$$

其中 V 为 S 围成的有界闭区域，当有向封闭曲面 S 的法向量指向外侧时，取"+"号；当有向封闭曲面 S 的法向量指向内侧时，取"—"号。

由 S 的任意性，知: $xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}=0,(x>0)$

即: $f'(x)+(\frac{1}{x}-1)f(x)=\frac{1}{x}e^{2x},(x>0)$

利用一阶线性微分方程的通解公式，有：$f(x)=\frac{e^x}{x}(e^x+C)$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=1$，得：$C=-1$

故：$f(x)=\frac{e^x}{x}(e^x-1)$

六、证明级数 $1-\frac{1}{2}+\frac{1\times3}{2\times4}-\cdots+(-1)^n\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times(2n)}+\cdots$ 收敛，并求它的和。

解答：

记 $u_n=\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times(2n)}$，则

$u_n^2=\frac{1\times3}{2^2}\times\frac{3\times5}{4^2}\times\cdots\frac{(2n-3)\times(2n-1)}{(2n-2)^2}\times\frac{2n-1}{(2n)^2}<\frac{1}{2n}$，即 $u_n<\frac{1}{\sqrt{2n}}$，

由此可得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，由莱布尼茨判别法知该级数收敛。

令 $f(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$，则 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，则有：

$f'(x)=-x(1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n})=-x(xf(x))'=-xf(x)-x^2f'(x)$，

故函数 $f(x)$ 满足方程 $f'(x)=\frac{-x}{1+x^2}f(x), f(0)=1$，

解得 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，由此可得

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1\times3}{2\times4}-\cdots+(-1)^n\frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times(2n)}+\cdots=f(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

七、已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$，其中，$D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le1,0\le y\le1\right\}$。计算二重积分：$I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy$。

解答：

因为 $f(1,y)=f(x,1)=0$，所以 $f_y'(1,y)=f_x'(x,1)=0$。从而

$$I=\int_0^1xdx\int_0^1yf''_{xy}(x,y)dy=\int_0^1x[yf_x'(x,y)\big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1f_x'(x,y)dy]dx$$

$$=-\int_0^1 dy\int_0^1 xf_x'(x,y)dx=-\int_0^1[xf(x,y)|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 f(x,y)dx]dy$$
$$=\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx=a$$

合肥工业大学大学生（非数学）高数竞赛模拟题答案（四）

一、简答题:

1．求 $\lim\limits_{n\to 0}\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\cos 2t}{4t^2}dt$.

解：由于 $0<t\le 1,\quad 1-2t^2<\cos 2t<1$

所以 $\frac{1}{4t^2}-\frac{1}{2}<\frac{\cos 2t}{4t^2}<\frac{1}{4t^2}$

于是

$$\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{1}(\frac{1}{4t^2}-\frac{1}{2})dt<\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\cos 2t}{4t^2}dt<\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{dt}{4t^2}=\frac{1}{4}\frac{n-1}{n}\to\frac{1}{4}(n\to\infty)$$
$$\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{1}(\frac{1}{4t^2}-\frac{1}{2})dt=\frac{1}{n}\left[\frac{n-1}{4}-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})\right]=\frac{1}{4}\frac{n-1}{n}-\frac{n-1}{2n^2}\to\frac{1}{4}(n\to\infty)$$

由夹逼准则 $\lim\limits_{n\to 0}\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\cos 2t}{4t^2}dt=\frac{1}{4}$.

2．设 $f(x)=\int_{-1}^{x}t|t|dt,(x\ge -1)$，求曲线 $f(x)$ 与 x 轴所围封闭图形的面积 S.

解：首先，寻找函数的零点。
容易看出，x = -1 是一个零点，再由积分的奇偶性可得到另一个零点 x=1;

而 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上单调递减，在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

可知不存在其他的零点。

其次，注意到函数在 $[-1,+1]$ 上取负数，故:

$$S=\int_{-1}^{1}|f(x)|dx=2\int_{-1}^{0}|f(x)|dx=-2\int_{-1}^{0}f(x)dx=-2\int_{-1}^{0}dx\int_{-1}^{x}t|t|dt$$
$$=2\int_{-1}^{0}dx\int_{-1}^{x}t^2dt=\frac{2}{3}\int_{-1}^{0}(x^3+1)dx=\frac{1}{2}.$$

3．设函数 f（x, y)可微，且对任意 x,y,t,满足 $f(tx,ty)=t^2f(x,y)$， $P_0(1,-2,2)$ 是曲面 $\Sigma: z=f(x,y)$ 上的一点，求当 $f_x'(1,-2)=4$ 时，Σ 在点 P_0 处的法线方程.

解： $f(tx,ty)=t^2f(x,y)$ 两边对 t 求导得

$xf_{tx}'(tx,ty)+yf_{ty}'(tx,ty)=2tf(x,y),\quad$ 将 $t=1$ 代入得

$xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)=2f(x,y)$, 将 $x=1, y=-2$ 代入上式得

$f_x'(1,-2)-2f_y'(1,-2)=2f(1,-2)$, 由 $f_x'(1,-2)=4$ 及 $f(1,-2)=2$, 得 $f_y'(1,-2)=0$.

所以 Σ 在点 P_0 处的法向量 $\vec{n}=\{4,0,-1\}$，故法线方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-2}{-1}$.

4．设连续函数 $f(u)$ 在 u=0 处可导, 且 $f(0)=0$， $f'(0)=-3$。

试求: $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解: $\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$=\frac{1}{\pi t^4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\phi\mathrm{d}\phi\int_0^t f(r)r^2\mathrm{d}r=\frac{4}{t^4}\int_0^t f(r)r^2\mathrm{d}r$

因此，原式$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{4f(t)t^2}{4t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'(0)=-3$.

5．求方程 $(2+x)^2y''+(2+x)y'+y=x\ln(2+x)$ 的通解.

解: 令 $2+x=e^t$ 则方程可变化为 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=te^t-2t$，方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=0$ 的通解为

$y=C_1\cos t+C_2\sin t$，方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=te^t$ 的特解可设为 $y_1^*=(At+B)e^t$ 代人方程解得

$A=\dfrac{1}{2}, B=-\dfrac{1}{2}$，所以 $y_1^*=\dfrac{1}{2}(t-1)e^t$，方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=-2t$ 的特解可设为 $y_2^*=Ct+D$ 代人

方程解得 $y_2^*=-2t$，由此可得原方程通解为

$y=C_1\cos\ln(2+x)+C_2\sin\ln(2+x)+\dfrac{1}{2}(2+x)[\ln(2+x)-1]-2\ln(2+x)$.

二、设函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上可微，且对 $x>1$ 满足

$f'(x)=\dfrac{x^2-f^2(x)}{x^2(f^2(x)+1)}$ 证明: $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+x)=+\infty.$

分析: 令 $g(x)=f(x)+x$

$\therefore g'(x)=f'(x)+1=\dfrac{x^2-f^2(x)}{x^2\left(f^2(x)+1\right)}+1=\dfrac{2x^2+\left(x^2-1\right)f^2(x)}{x^2\left(f^2(x)+1\right)}>\dfrac{2x^2}{x^2\left(f^2(x)+1\right)}>0\quad(x>0)$

$\therefore$ 当 $x>1$ 时，$g(x)$ 单增， $\therefore\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ 存在或为 $+\infty$，

设 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=L<+\infty$，

则对 $g(x)$ 在 $[x,x+1]$ 上利用 $Lagrange$ 公式得

存在 $\xi\in(x,x+1)$，使得 $g'(\xi)=g(x+1)-g(x)$

令 $x\to+\infty$，对上式两边取极限得

$\lim\limits_{x\to+\infty} g'(\xi)=L-L=0$ 即 $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)=0$，而

$$g'(x)=\frac{x^2-f^2(x)}{x^2(f^2(x)+1)}+1=\frac{x^2-(g(x)-x)^2}{x^2[(g(x)-x)^2+1]}+1=\frac{1-\left(\dfrac{g(x)}{x}-1\right)^2}{(g(x)-x)^2+1}+1\to 1\,(x\to+\infty)$$

矛盾，$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)+x\right)=\infty$.

三、是否存在 $[0,\pi]$ 上的连续函数 $f(x)$，

使得：$\int_0^\pi |f(x)-\sin x|^2\,dx\le\frac{3}{4}$ 与 $\int_0^\pi |f(x)-\cos x|^2\,dx\le\frac{3}{4}$ 成立

解：不存在。事实上，

$$\pi=\int_0^\pi|\cos x-\sin x|^2\,dx=\int_0^\pi|[f(x)-\cos x]-[f(x)-\sin x]|^2\,dx$$

$=$

$$\int_0^\pi|[f(x)-\cos x]|^2\,dx+\int_0^\pi|[f(x)-\sin x]|^2\,dx+2\int_0^\pi|f(x)-\cos x||f(x)-\sin x|dx$$

$$\le 2\int_0^\pi|[f(x)-\cos x]|^2\,dx+2\int_0^\pi|[f(x)-\sin x]|^2\,dx$$

如果两不等式同时成立，则有，

$\le 2(\frac{3}{4}+\frac{3}{4})=3$，矛盾！

四、设二元函数 $u(x,y)=75-x^2-y^2+xy$，其定义域为 $D=\{(x,y)|x^2+y^2-xy\le 75\}$

（1）设点 $M(x_0,y_0)\in D,$ 求过点 M_0 的方向向量 $\vec{l}$，使 $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0}$ 为最大，并记此最大值

为 $g(x_0,y_0)$.

(2)设 M_0 在 D 的边界 $x^2+y^2-xy=75$ 上变动，求 $g(x_0,y_0)$ 的最大值.

解：（1）使 $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0}$ 最大的方向为 $\vec{l}=gradu|_{M_0}=\{y_0-2x_0,x_0-2y_0\}$

$\therefore \quad g(x_0,y_0)=\left|gradu|_{M_0}\right|=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}$.

（2）设 $f(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$，下面求 $f(x,y)$ 在条件 $x^2+y^2-xy=75$ 下的最大值.

令 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda(75-x^2-y^2+xy)$，

由 $\begin{cases} F_x'=10x-8y+\lambda(y-2x)=0 & (1) \\ F_y'=10y-8x+\lambda(x-2y)=0 & (2) \\ F_\lambda'=x^2+y^2-xy-75=0 & (3) \end{cases}$

（1）+（2）得 $(x+y)(2-\lambda)=0,\Rightarrow y=-x$ 或 $\lambda=2$，

若 $\lambda=2$，由 ⑴ 式得 $y=x$，再由（3）式得 $x=\pm5\sqrt{3}$, $y=\pm5\sqrt{3}$，

若 $y=-x$，由式（3）得 $x=\pm5$, $y=\mp5$.

于是得 4 个可能极值点：$M_1(5,-5);M_2(-5,5);M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3});M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3})$，

而 $f(M_1)=f(M_2)=450;\ f(M_3)=f(M_4)=150$，

故最大值 $g(M_1)=g(M_2)=\sqrt{450}$.

五、设在上半平面 $D=\{(x,y)|y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$.证明：对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L,都有

$$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0 .$$

证明： 由格林公式知，对 D 内的任意有向简单闭曲线 L，$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$ 的充分必要条件是：对任意 $(x,y)\in D$，有

$$0=\frac{\partial}{\partial y}(yf(x,y))+\frac{\partial}{\partial x}(xf(x,y))=2f(x,y)+yf_2'(x,y)+xf_1'(x,y).$$

由于对任意的 $(x,y)\in D$ 及 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$，两边对 t 求导，得

$$xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y) .$$

令 $t=1$，得

$$2f(x,y)+yf_2'(x,y)+xf_1'(x,y)=0,\quad 即\frac{\partial}{\partial y}(yf(x,y))+\frac{\partial}{\partial x}(xf(x,y))=0 .$$

所以 $\oint_L yf(x,y)dx - xf(x,y)dy = 0$.

六、设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续的导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = a(a>0)$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\dfrac{1}{n})$ 条件收敛.

证明：由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = a$ 可得 $f(0)=0, f'(0)=a$，又 $f'(x)$ 连续，故 $\exists\delta>0$，当 $x\in[0,\delta)$ 时恒有 $f'(x) > \dfrac{a}{2} > 0$，因而 $f(x)$ 在 $[0,\delta]$ 上单增，由此可得当 $n>[\dfrac{1}{\delta}]$ 时 $u_n = f(\dfrac{1}{n})$ 单减，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = f(0)=0$，由莱布尼茨判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\dfrac{1}{n})$ 收敛.

又当 $n>[\dfrac{1}{\delta}]=N$ 时由 Lagrange 中值定理可知 $\exists\xi_n\in(0,\dfrac{1}{n})$ 使得

$f(\dfrac{1}{n}) = f(0)+f'(\xi_n)\dfrac{1}{n} > \dfrac{a}{2n}$，而级数 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} f(\dfrac{1}{n})$ 是发散的，从而级数 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\dfrac{1}{n})\right|$ 也是发散的，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\dfrac{1}{n})$ 条件收敛.

七、设函数 $f(x)$ 在区间[0,1]上具有连续导数， $f(0)=1$，且满足

$$\iint_{D_t} f'(x,y)dxdy = \iint_{D_t} f(t)dxdy,$$

其中 $D_t = \{(x,y)|0\le y\le t-x, 0\le x\le t\}$ $(0<t\le 1)$.求 $f(x)$ 的表达式.

解： $\iint_{D_t} f'(x,y)dxdy = \int_0^t dx\int_0^{t-x} f'(x+y)dy = \int_0^t (f(t)-f(x))dx = tf(t) - \int_0^t f(x)dx$.

又 $\iint_{D_t} f(t)dxdy = \dfrac{t^2}{2}f(t)$，由题设有

$$tf(t) - \int_0^t f(x)dx = \frac{t^2}{2}f(t).$$

两边求导整理得 $(2-t)f'(t) = 2f(t)$，解得 $f(t) = \dfrac{C}{(2-t)^2}$.

将 $f(0)=1$ 代入得 $C=4$. 故 $f(x) = \dfrac{4}{(2-x)^2}$ $(0\le x\le 1)$.

合肥工业大学大学生（非数学）高数竞赛模拟题答案（五）

一、简答题

1．求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int_0^x[1+f(t-\sin t+1,\sqrt{1+t^3}+1)]^{\frac{1}{\ln(1+t^3)}}\,\mathrm{d}t$，其中二元函数 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，且对 $\forall t\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $f(tu,tv)=t^2f(u,v),\ f(1,2)=0,\ f_u'(1,2)=3$。

解：$I=\lim\limits_{x\to 0}[1+f(x-\sin x+1,\sqrt{1+x^3}+1)]^{\frac{1}{\ln(1+x^3)}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{[1+f(x-\sin x+1,\sqrt{1+x^3}+1)]^{\frac{1}{f(x-\sin x+1,\sqrt{1+x^3}+1)}}\right\}^{\frac{f(x-\sin x+1,\sqrt{1+x^3}+1)}{\ln(1+x^3)}},$$

因为 $x\to 0$ 时 $x-\sin x+1=1+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3),\sqrt{1+x^3}+1=2+\dfrac{1}{2}x^3+o(x^3)$，

对等式 $f(tu,tv)=t^2f(u,v)$ 两边关于 t 同时求导可得 $uf_u'(tu,tv)+vf_v'(tu,tv)=2tf(u,v)$，

令 $t=1,u=1,v=2$，可得 $f_v'(1,2)=-\dfrac{3}{2}$，因而有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x-\sin x+1,\sqrt{1+x^3}+1)}{\ln(1+x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{f_u'(1,2)\dfrac{x^3}{6}+f_v'(1,2)\dfrac{x^3}{2}+o(x^3)}{x^3}=-\frac{1}{4},$$

故原式 $=e^{-\frac{1}{4}}$。

2．求 $\sum\limits_{n=1}^{10^9}n^{-\frac{2}{3}}$ 的整数部分。

解：由于 $x\in(n,n+1)$ 时有 $n^{-\frac{2}{3}}>x^{-\frac{2}{3}}$，因而有 $\sum\limits_{n=1}^{10^9}n^{-\frac{2}{3}}>\sum\limits_{n=1}^{10^9}\int_n^{n+1}x^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x=3(\sqrt{10^9+1}-1)$，

又 $x\in(n,n+1)$ 时有 $(n+1)^{-\frac{2}{3}}<x^{-\frac{2}{3}}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{10^9}n^{-\frac{2}{3}}<1+\sum\limits_{n=1}^{10^9-1}\int_n^{n+1}x^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x=2998$，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{10^9}n^{-\frac{2}{3}}$ 的整数部分是 2997。

3．求经过直线 $L:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{2z-1}{-2}$ 且与椭球面 $S:x+2y^2+3z^2=21$ 相切的平面方程。

解：设切点为 $M(x_0,y_0,z_0)$，则椭球面在该点处的切平面方程为 $x_0x+2y_0y+3z_0z=21$，

由题设有 $\begin{cases}2x_0+2y_0-3z_0=0,\\ x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21,\\ 6x_0+6y_0+\dfrac{3}{2}z_0=21,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=3,\\ y_0=0,\\ z_0=2,\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}x_0=1,\\ y_0=2,\\ z_0=2\end{cases}$ 因而所求的平面方程为

$3x+6z=21$ 或 $x+4y+6z=21$。

4．设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，Σ 是 Ω 的整个边界的外侧，计算 $\iint\limits_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$。

解：由高斯公式可得原式$=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2\,\mathrm{d}r=(2-\sqrt{2})\pi R^3$。

5．求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}$的收敛域。

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n+1}})}}{\frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+x^{2^{n+1}})}=\begin{cases}0,|x|>1,\\ \frac{1}{2},|x|=1\\ 1,|x|<1\end{cases}$，

且$|x|<1$时$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}=1-x^2>0$，所以该级数的收敛域是$(-\infty,-1]\bigcup[1,+\infty)$。

二、设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且存在$c\in(a,b)$使得$f'(c)=0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$。

证明：令$F(x)=e^{-\frac{x}{b-a}}[f(x)-f(a)]$，则$F(a)=0$，此时有

（1）若$F(c)=0$，由 Rolle 定理知$\exists\xi\in(a,c)$使得$F'(\xi)=e^{-\frac{\xi}{b-a}}[f'(\xi)-\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}]=0$

即有$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$；

（2）若$F(c)\neq 0$，不妨设$F(c)>0$，则$F'(c)=-\frac{F(c)}{b-a}<0$，由导数的定义知$\exists x_1\in(c,b)$使得$0<F(x_1)<F(c)$，再由连续函数的介值定理知$\exists x_2\in(a,c)$，使得$F(x_1)=F(x_2)$，再对函数$F(x)$在区间$[x_1,x_2]$上应用 Rolle 定理知$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$使得$F'(\xi)=e^{-\frac{\xi}{b-a}}[f'(\xi)-\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}]=0$，即有$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$。

三、设$f(x)$在上连续$[a,b]$，证明：$\lim_{h\to 0^+}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0)$。

证明：$f(x)$在上连续$[a,b]$，因而有界，所以$\exists M>0$，当$x\in[a,b]$时有$|f(x)|\leq M$。

对于$\forall\varepsilon>0$，因为$\lim_{h\to 0^+}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(0)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi f(0)}{2}$，故$\exists\delta_1>0$当$h\in(0,\delta_1)$时有

$\left|\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{\pi f(0)}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$。

$f(x)$在$x=0$处连续，$\exists\delta_2>0$，当$x\in[0,\delta_2]$时有$|f(x)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{2\pi}$，因而有

$$\left|\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{\pi f(0)}{2}\right|$$

$$\leq\left|\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(0)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{\pi f(0)}{2}\right|$$

$$\leq\int_0^{\delta}\frac{h}{h^2+x^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x+\int_{\delta}^1\frac{h}{h^2+x^2}|f(x)-f(0)|\,\mathrm{d}x+\left|\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{\pi f(0)}{2}\right|$$

$$\le \frac{\varepsilon}{4}+2M\int_{\delta}^{1}\frac{h}{h^2+\delta^2}\mathrm{d}\,x+\left|\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}\,x-\frac{\pi f(0)}{2}\right|\le\frac{\varepsilon}{4}+\frac{2Mh}{\delta^2}+\left|\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}\,x-\frac{\pi f(0)}{2}\right|,$$

若令 $\delta=\min\{\frac{\delta_2^2}{8M}\varepsilon,\delta_1\}$，当 $0<h<\delta$ 时有 $\frac{\varepsilon}{4}+\frac{2Mh}{\delta^2}+\left|\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}\,x-\frac{\pi f(0)}{2}\right|<\varepsilon$，

因此 $\lim\limits_{h\to 0^+}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}\,x=\frac{\pi f(0)}{2}$，故原结论成立。

四、设函数 $f(x,y)$ 可微，$f_x'(,x,y)=-f(x,y),\ f(0,\frac{\pi}{2})=1$，且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}\right]^n=e^{\cot y}$，求 $f(x,y)$。

解：方法一 先计算极限并由题意得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{f(0,y+\frac{1}{n})-f(0,y)}{f(0,y)}\right]^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f(0,y+\frac{1}{n})-f(0,y)}{\frac{1}{n}f(0,y)}\right]}=e^{\frac{f_y'(0,y)}{f(0,y)}}=e^{\cot y}$$

所以，$\frac{f_y'(0,y)}{f(0,y)}=\cot y$，两边积分得：$\ln|f(0,y)|=\ln|\sin y|+\ln C$

故 $f(0,y)=C\sin y$，由 $f(0,\frac{\pi}{2})=1\Rightarrow C=1$, 即 $f(0,y)=\sin y$

又由 $\frac{\partial f}{\partial x}=-f$，积分得 $f(x,y)=\varphi(y)e^{-x}$，再由 $f(0,y)=\sin y$ 知

$\varphi(y)=\sin y$, 故 $f(x,y)=e^{-x}\sin y$.

方法二 视 y 为常数，由方程 $\frac{df(x,y)}{f(x,y)}=-dx$ 得

$\ln|f(x,y)|=-x+\ln\varphi(y)$，即 $f(x,y)=\varphi(y)e^{-x}$. 又由题意得

$$e^{\cot y}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\varphi(y+\frac{1}{n})}{\varphi(y)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{\varphi(y+\frac{1}{n})-\varphi(y)}{\varphi(y)}\right]^n=e^{\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}}$$

所以 $\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}=\cot y$，两边积分得：$\ln|\varphi(y)|=\ln|\sin y|+\ln C\Rightarrow\varphi(y)=C\sin y$

又 $\varphi(\frac{\pi}{2})=1\Rightarrow C=1$，故 $f(x,y)=e^{-x}\sin y$。

五、设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}x^2, & |x|+|y|<1,\\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1\le|x|+|y|\le 2,\end{cases}$ $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 2\}$，求 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$。

解：记 D_1 为 D 位于第一象限内的部分，由对称性可知 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，

记 $D_2=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$，$D_3=\{(x,y)\,|\,1\le |x|+|y|\le 2, x\ge 0, y\ge 0\}$，则有

$\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_3} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，$\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{12}$，

$$\iint\limits_{D_3} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}\mathrm{d}r=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln[\sec(\theta-\frac{\pi}{4})+\tan(\theta-\frac{\pi}{4})]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)\text{，}$$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{3}+4\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)\text{。}$$

六、设函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，且 $F(0)=1$，$F(x)f(x)=\cos 2x$，

$a_n=\int_0^{n\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x, n=1,2,\cdots$，求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^2-1}x^n$ 的收敛域与和函数。

解：由题设有 $\int_0^x F(t)f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\cos 2t\,\mathrm{d}t$，即 $F^2(x)-F^2(0)=\sin 2x$，由此可得

$|F(x)|=\sqrt{1+\sin 2x}=|\cos x+\sin x|$ ，

$|f(x)|=\left|\dfrac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}\right|=|\cos x-\sin x|=\sqrt{2}\left|\cos(\dfrac{\pi}{4}-x)\right|$，因 $|f(x)|$ 是一个周期为 π 的周期

函数，故有 $a_n=\int_0^{n\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}n\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+\pi}\left|\cos(x-\dfrac{\pi}{4})\right|\mathrm{d}x=2\sqrt{2}n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=2\sqrt{2}n$，

所以该级数为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2\sqrt{2}n}{n^2-1}x^n=\sqrt{2}\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n+1})x^n$，它的收敛域为 $[-1,1)$，由于

$$\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1})x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n+\frac{1}{x}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n-x-\frac{1}{2}x^2)=\frac{-(1+x^2)}{x}\ln(1-x)-1-\frac{x}{2}\text{，}$$

因而该级数的的和函数为 $\dfrac{-\sqrt{2}(1+x^2)}{x}\ln(1-x)-\sqrt{2}-\dfrac{x}{\sqrt{2}}$。

七、在 ox 轴上有一动点 P 从 $x=x_0$ 开始以常速度 v_1 沿 x 轴正向移动，在 xoy 面上另一动点 M 同时从点 $(x_0,y_0)(y_0>0)$ 以常速率 $v_2(v_2>v_1)$ 开始移动，且 M 运动方向总是对着 P。（1）求动点 M 运动轨迹方程；（2）求 M 追赶到点 P 时所走过的路程。

解：（1）设在时刻 t 动点 M 所在的位置为 (x,y)，则有 $\dfrac{y}{x-(x_0+v_1t)}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdots\cdots$①

且满足 $\sqrt{(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2+(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}=v_2\cdots\cdots$②

等式①可变形为 $y\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=x-(x_0+v_1t)$，两边同时对 y 求导可得

$y\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-v_1\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\cdots\cdots$③

由②式可得 $\sqrt{(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^2+1}=-v_2\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$ 代人到③式可得 $\dfrac{v_1}{v_2}\sqrt{(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^2+1}=y\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$，

令 $p=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，则上述方程可变化为 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}=\dfrac{v_1}{v_2}\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$，积分后可得 $\operatorname{arsh}p=\dfrac{v_1}{v_2}(\ln y-\ln C_1)$，

即有 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{2}[(\dfrac{y}{C})^{\frac{v_1}{v_2}}-(\dfrac{y}{C_1})^{-\frac{v_1}{v_2}}]$ 由 $y=y_0$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=0$ 可得 $C_1=y_0$，所以

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{2}[(\dfrac{y}{y_0})^{\frac{v_1}{v_2}}-(\dfrac{y}{y_0})^{-\frac{v_1}{v_2}}]$，积分后可得 $x=\dfrac{1}{2}[\dfrac{v_2y_0}{v_1+v_2}(\dfrac{y}{y_0})^{\frac{v_1+v_2}{v_2}}-\dfrac{v_2y_0}{v_2-v_1}(\dfrac{y}{y_0})^{\frac{v_2-v_1}{v_2}}]+C_2$，

由 $x=x_0$ 时 $y=y_0$ 可得 $C_2=x_0+\dfrac{v_1v_2y_0}{v_2^2-v_1^2}$，因而动点 M 的轨迹方程为

$x=\dfrac{1}{2}[\dfrac{v_2y_0}{v_1+v_2}(\dfrac{y}{y_0})^{\frac{v_1+v_2}{v_2}}-\dfrac{v_2y_0}{v_2-v_1}(\dfrac{y}{y_0})^{\frac{v_2-v_1}{v_2}}]+x_0+\dfrac{v_1v_2y_0}{v_2^2-v_1^2}$；

（2）当 M 追赶到点 P 时 $y=0$，此时 P 走过的路程为 $\dfrac{v_1v_2y_0}{v_2^2-v_1^2}$，动点 M 走过的路程为

$\dfrac{v_2^2y_0}{v_2^2-v_1^2}$。

合肥工业大学大学生（非数学）高数竞赛模拟题（六）

一、简答题

1．求曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}(x>0)$ 的斜渐近线方程。

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^x}{(1+x)^x}=\dfrac{1}{e}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(y-\dfrac{1}{e}x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ex^{1+x}-x(1+x)^x}{e(1+x)^x}$

$=\dfrac{1}{e}\lim\limits_{x\to+\infty}x[e^{1-x\ln(1+\frac{1}{x})}-1]=\dfrac{1}{e}\lim\limits_{x\to+\infty}x[\dfrac{1}{2x}+o(\dfrac{1}{x})]=\dfrac{1}{2e}$，因而所求斜渐近线方程为

$y=\dfrac{1}{2e}(2x+1)$。

2．设 $f(x)$ 为周期函数，证明：$\displaystyle\int_0^{2\pi}f(a\cos x+b\sin x)\,\mathrm{d}x=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(\sqrt{a^2+b^2}\sin x)\,\mathrm{d}x$。

证明：设 $\theta=\arctan\dfrac{a}{b}$，则有 $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(a\cos x+b\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}f[\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)]\,\mathrm{d}x$，

因为 $f[\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)]$ 是周期为 2π 的周期函数，故有 $\displaystyle\int_0^{2\pi}f[\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)]\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle=\int_{-\theta}^{2\pi-\theta}f[\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)]\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}f[\sqrt{a^2+b^2}\sin u]\,\mathrm{d}u$

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f[\sqrt{a^2+b^2}\sin u]\,\mathrm{d}u+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f[\sqrt{a^2+b^2}\sin u]\,\mathrm{d}u=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(\sqrt{a^2+b^2}\sin x)\,\mathrm{d}x$。

3．设函数 $f(x,y)=e^{-x}(ax+b-y^2)$，若 $f(-1,0)$ 为 $f(x,y)$ 的极大值，求常数 a,b 满足的条件。

解：由题设应有$\begin{cases} f_x'(-1,0)=e^{-x}(-ax-b+y^2+a)\big|_{(-1,0)}=e(2a-b)=0, \\ f_y'(-1,0)=-2ye^{-x}\big|_{(-1,0)}=0, \end{cases}$ 即有$b=2a$，

又$A=f_{xx}''(-1,0)=-ae,B=f_{xy}''(-1,0)=0,C=f_{yy}''(-1,0)=-2e$，因此当

$a>0,b=2a,AC-B^2=2ae^2>0$时，$f(-1,0)$为$f(x,y)$的极大值；

当$a<0$时，则$f(-1,0)$一定不是$f(x,y)$的极大值；当$a=0,b=0$时

$f(x,y)=-y^2e^{-x}\le f(-1,0)$，因而$f(-1,0)$也是$f(x,y)$的极大值。

4．设$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$，计算$\iiint\limits_{\Omega}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})\,\mathrm{d}v$。

解：由对称性可得$\iiint\limits_{\Omega}\frac{x^2}{a^2}\,\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2})\,\mathrm{d}v=\frac{1}{3a^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r$

$=\frac{4\pi}{15a^2}$，同理有$\iiint\limits_{\Omega}\frac{y^2}{b^2}\,\mathrm{d}v=\frac{4\pi}{15b^2},\iiint\limits_{\Omega}\frac{z^2}{c^2}\,\mathrm{d}v=\frac{4\pi}{15c^2}$，所以

$\iiint\limits_{\Omega}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})\,\mathrm{d}v=\frac{4\pi}{15}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})$。

5．求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$的和。

解：$\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=\frac{1}{(n+2)n!}$，考察级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)n!}x^{n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{1}{n!}t^{n+1}\,\mathrm{d}t$

$=\int_0^x t(e^t-1)\,\mathrm{d}t=(x-1)e^x+1-\frac{x^2}{2}=f(x)$，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=f(1)=\frac{1}{2}$。

二、设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且$f(a)=f(b)=0$，$f_+'(a)>0,f_-'(b)>0$，证明：$\exists\eta_1,\eta_2\in(a,b)$，使得$f''(\eta_1)<0,f''(\eta_2)>0$。

证明：由$f_+'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,f_-'(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$及极限的保号性知$\exists x_1,x_2\in(a,b)$使得$f(x_1)>0,f(x_2)<0$，且$x_1<x_2$，对函数$f(x)$分别在区间$[a,x_1]$，$[x_1,x_2]$和$[x_2,b]$上应用 Lagrange 中值定理知$\exists\xi_1\in(a,x_1),\xi_2\in(x_1,x_2),\xi_3\in(x_2,b)$，使得$f'(\xi_1)=\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}>0,f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0,f'(\xi_3)=\frac{f(b)-f(x_2)}{b-x_2}>0$，再对函数$f'(x)$分别在区间$[\xi_1,\xi_2]$及$[\xi_2,\xi_3]$上应用 Lagrange 中值定理知$\exists\eta_1\in(\xi_1,\xi_2),\eta_2\in(\xi_2,\xi_3)$使得$f''(\eta_1)=\frac{f(\xi_2)-f(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0,f''(\eta_2)=\frac{f(\xi_3)-f(\xi_2)}{\xi_3-\xi_2}>0$。

三、设函数$f(x)$满足$f(1)=1$，且对$x\ge1$时，有$f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}$，证明：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在；(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\le1+\frac{\pi}{4}$。

证明：(1) 由题设可知函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上单增，因此$x\in[1,+\infty)$时有$f(x)\ge1$，

$f(x)=f(1)+\int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t\le1+\int_1^x\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=1+\arctan x-\frac{\pi}{4}\le1+\frac{\pi}{4}$，由单调有界收敛原理可知$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在；

（2）由（1）的证明过程可知 $f(x)\le 1+\dfrac{\pi}{4}$，对上述不等式两边同时取极限 $x\to+\infty$ 可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\le 1+\dfrac{\pi}{4}$。

四、设 $f(u,v)$ 具有二阶连续的偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=2$，用变量代换 $u=xy$，$v=\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)$ 将 $f(u,v)$ 变成 $g(x,y)$，试求满足 $a\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}-b\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2+y^2$ 的常数 a 和 b。

解： $g(x,y)=f[xy,\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)]$， $g'_x=yf'_u+xf'_v, g''_{xx}=y^2f''_{uu}+2xyf''_{uv}+x^2f''_{vv}+f'_v$，$g'_y=xf'_u-yf'_v, g''_{yy}=x^2f''_{uu}-2xyf''_{uv}+y^2f''_{vv}-f'_v$，代人到 $a\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}-b\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2+y^2$ 可得

$(ay^2-bx^2)f''_{uu}+(a+b)2xyf''_{uv}+(ax^2-by^2)f''_{vv}+(a+b)f'_v=x^2+y^2$，再把 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=2$ 代人可得 $2(ax^2-by^2)+(a+b)[(y^2-x^2)f''_{uu}+2xyf''_{uv}+f'_v]=x^2+y^2$，所以有 $a+b=0$，$2a=1$，即 $a=\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{1}{2}$。

五、求曲线积分 $I=\oint_L (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z$，其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=2bx$ 与柱面 $x^2+y^2=2ax(0<a<b)$ 的交线在 $z\ge 0$ 的部分，L 的方向规定为：从 z 轴正向往下看曲线 L 所围成的球面部分 Σ 总在 L 的左边。

解：由斯托克斯公式得 $I=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S$，其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 是 Σ 上侧法向量的方向余弦，由题设应有 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\dfrac{1}{b}\{x-b,y,z\}$，因而有

$$I=\frac{2}{b}\iint\limits_{\Sigma}[(x-b)(y-z)+y(z-x)+z(x-y)]\,\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma}(z-y)\,\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S$$

$$=2\iint\limits_{x^2+y^2\le 2ax}\sqrt{2bx-x^2-y^2}\sqrt{1+\frac{(b-x)^2+y^2}{2bx-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2b\iint\limits_{x^2+y^2\le 2ax}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi a^2 b。$$

六、设数列 $\{a_n\}$ 为单调递减数列且极限为零，且对任意正整数 n 均有 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-na_n$ 是有界的。证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

证明：由题设知 $a_n>0$，若记 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，那么只要证明数列 $\{s_n\}$ 有界即可。

因为 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-na_n$ 有界，因而 $\exists M>0$，对 $\forall n=1,2,\cdots$ 均有 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-na_n\le M$，

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 那么对于任意取定的正整数 m，$\exists n$ 使得 $a_n\le\dfrac{a_m}{2}$。由此可得

$$M \ge \sum_{k=1}^{n} a_k - na_n = \sum_{k=1}^{m} a_k - ma_n + \sum_{k=m+1}^{n} (a_k - a_n) \ge \sum_{k=1}^{m} a_k - \frac{ma_m}{2} \ge \frac{ma_m}{2}$$

所以$M \ge \sum_{k=1}^{m} a_k - M$，即$\sum_{k=1}^{m} a_k \le 2M$，由$m$的任意性，可得数列$\{s_n\}$有界，因而级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。

七、设$f(x) \ge 0, f''(x) \le 0$，对任意的$x \in [a,b]$成立，证明：$f(x) \le \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$。

证明：设函数在$x = x_0$处取最大值，并考察在x处的 Taylor 展开，有：

$$f(x_0) = f(x) + f'(x)(x_0 - x) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x_0 - x)^2 \le f(x) + f'(x)(x_0 - x)$$

两边积分，得：$\int_a^b f(x_0)\,\mathrm{d}\,x \le \int_a^b [f(x) + f'(x)(x_0 - x)]\,\mathrm{d}\,x$

即：$(b-a) f(x_0) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_a^b f'(x)(x_0 - x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_a^b (x_0 - x)\,\mathrm{d}\,f(x)$

$= 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x + f(b)(x_0 - b) - f(a)(x_0 - a) \le 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$

由于$f(x_0)$取最大值，故结论成立。