合肥工业大学 2016 年大学生数学竞赛(非数学专业)试题

学号________________ 姓名________________ 成绩________________

1. 简答题 (每小题 10 分, 共 60 分)

(1) 试求曲面 $\begin{cases} z = y\cot x \\ x = y^2+z^2 \end{cases}$ 上的点 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2\pi}}{4}, \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\right)$ 到点 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2\pi}}{2}, 0\right)$ 间的一段弧长.

(2) 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}dx, (a>0)$.

(3) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)dx = m$, 试求 $\int_0^1\int_x^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)dxdydz$.

(4) 当实数 p,q 满足何条件时, 多项式 x^3+px+q 有三个不同的零点.

(5) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\left(2\pi en!\right)$.

(6) 证明 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3C_n^k = n^2(n+3)2^{n-3}$.

2. 解答题 (每小题 20 分, 共 40 分)

(1) 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续的二阶导数,$f(1)=0, f'(1)=1$, 且二元函数 $z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 求 $f(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值.

(2) 设有一小山, 取它的底面所在的平面为 xoy 平面, 其底部所占的区域为 $D:\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2-xy\le 75\right\}$, 小山的高度函数为 $h(x,y)-75-x^2-y^2+xy$.

1° 设 $M(x_0,y_0)$ 是 D 上一点, 问 $h(x,y)$ 在该点处沿什么方向的方向导数最大? 若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$, 求 $g(x_0,y_0)$.

2° 现欲利用此小山开展攀岩活动, 为此需要在山脚找一上山坡度最大的点作为攀岩的起点, 试确定此攀岩起点的位置?.

合肥工业大学 2015 年大学生数学竞赛(非数学专业)试题

学号________ 姓名________ 成绩________

1. 简答题 (答题时需要写出主要解题过程, 每小题 8 分, 共 40 分)

(1) 设 $x_1,x_2,\cdots$ 是将方程 $\tan x=x$ 的全部正根按由小到大的次序编号而成的, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n-x_{n-1}\right)$.

(2) 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$, 其中 α 为实数.

(3) 若 $\overrightarrow{l}_j, j=1,2,\cdots,n$ 是平面上点 p_0 处 $n\geq 2$ 个方向向量, 相邻两个向量之间的夹角为 $\dfrac{2\pi}{n}$, 若函数 $f(x,y)$ 在点 p_0 处有连续偏导数, 求 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(p_0)}{\partial\overrightarrow{l}_j}$.

(4) 设曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$, 计算 $\displaystyle\oiint_\Sigma\left(x+\frac{1}{2}|y|+\frac{1}{3}|z|\right)dS$.

(5) 计算曲线积分 $\displaystyle\oint_L\frac{xdy-ydx}{|x|+|y|}$, 其中 L 是以 $A(1,0),B(0,1),C(-1,0),D(0,-1)$ 为顶点的正方向的边界曲线, 方向为逆时针方向.

2. 证明题

(1).(本题 10 分)

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(x)\geq 0$, 证明: 在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ, 使得 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

(2).(本题 10 分)

设 $Y(x)$ 是微分方程 $y+e^xy=0$ 的解的全体, 证明 $Y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

3. (本题 15 分). 计算曲面积分 $I=\displaystyle\iint_\Sigma\frac{xdydz+ydxdz+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$, 其中曲面 Σ 为 $1-\dfrac{z}{7}=\dfrac{(x-2)^2}{15}+\dfrac{(y-1)^2}{16}(z\geq 0)$ 的上侧.

4. (本题 10 分) 设 $f(x,y)$ 是定义在区域 $0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$ 上的二元函数,$f(0,0)=0$, 且在点 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$ 可微, 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}dt\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)du}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}}$.

5. (本题 15 分) 证明:$\dfrac{1}{4}(x^2+y^2)\leq e^{x+y-2}$, 对 $x\geq 0,y\geq 0$ 成立.

合肥工业大学 2013 年大学生数学竞赛(非数学专业)试题

学号________________ 姓名________________ 成绩________________

1. 简答题 (每小题 6 分, 共 30 分, 答题时需要写出主要答题过程)

   (1) 设 $f'(1)=1$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\ln(1+x^2)+e^x-x)-f(1)}{\tan x\cdot(\sqrt{1+x}-1)}$.

   (2) 计算不定积分 $\int(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

   (3) 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^p\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$ 其中 p 为正整数, 当 p 为何值时,$f(x,y)$ 在原点有一阶连续的偏导数.

   (4) 计算 $\iint\limits_D min\left\{\sqrt{\frac{3}{16}-x^2-y^2},2(x^2+y^2)\right\}d\sigma$, 其中 $D:\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leq\frac{3}{16}\right\}$.

   (5) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n^2}\dfrac{n}{n^2+i^2}$.

2. (本题 10 分). 设函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$, 求 $f^{(n)}(0)$.

3. (本题 15 分). 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微,$f(0)=0,f(1)=1$

   (1) 证明: 在 $(0,1)$ 内存在两个不同的点 x_1,x_2, 使 $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2$.

   (2) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调, 证明: 对于任意 n 个不同的正数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$, 在 $(0,1)$ 内存在一组互不相等的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{k_i}{f'(x_i)}=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i$ 成立.

4. (本题 10 分) 设圆 $C:(x-1)^2+y^2=1$ 含于椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$ 之内, 问 a,b 取何值时, 此椭圆的面积为最小, 并求此时椭圆的面积.

5. (本题 15 分). 设 $A=\iint\limits_S x^2zdydz+y^2zdzdx+xz^2dxdy$, 其中 S 是曲面 $az=x^2+y^2,(0\leq z\leq a)$ 的第一卦限部分上侧, 求满足 $f(0)=A,f'(0)=-A$ 的二阶可导函数 $f(x)$, 使得 $y\left(f(x)+3e^{2x}\right)dx+f'(x)dy$ 为某个二元函数的全微分.

6. (本题 10 分) 设函数 $u(x,y)$ 在有界区域 D 上有二阶连续偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$, 记 D 的边界为 L,L 的外法线向量为 n, 且当 $(x,y)\in L$ 时,$u(x,y)=A$

   (1) 求曲线积分 $\oint_L u\dfrac{\partial u}{\partial n}ds$ 的值.

   (2) 证明:$u(x,y)=A,(x,y)\in D$.

7. (本题 10 分) 设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx, n$ 为正整数, 求证:

(1) $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

合肥工业大学 2012 年大学生数学竞赛(非数学专业)试题

学号________________ 姓名________________ 成绩________________

1. 简答题 (答题时需要写出主要解题过程, 每小题 6 分, 共 30 分)

(1) 设 $u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)} - x$, 其中 $a_n = \ln\dfrac{i}{n}, i = 1,2,\cdots n$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 由积分中值公式有 $\int_a^x f(t)dt = (x-a)f(\xi)$, 其中 $(a\le\xi\le b)$, 若导数 $f'_+(a)$ 存在且非零, 试求 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\xi-a}{x-a}$ 的值.

(3) 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中连续, 且存在偏导数, 又 $f(0,0)=0$, 且当 $x^2+y^2\le 5$ 时,$|grad f|\le 1$, 请给出 $f(1,2)$ 值的范围.

(4) 计算 $\int_0^a dx\int_0^b e^{max\{b^2x^2,a^2y^2\}}dy$, 其中 $a>0, b>0$.

(5) 设曲面 $\Sigma: |x|+|y|+|z|=1$, 求 $\oiint\limits_{\Sigma}\left(x+|y|\right)dS$

2. (本题 10 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, x<-1 \\ x^3, \quad -1\le x<2 \\ x^2+4, x\ge 2 \end{cases}$, 又设 α,β 分别是 $y=f(x)$ 的反函数 $y=g(x)$ 的最小不可导点与最大不可导点, 设 $x_0\in(\alpha,\beta)$,$x_{n+1}=\dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}, n=0,1,2,\cdots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

3. (本题 12 分) 设当 $x>0$ 时, 方程 $kx+\dfrac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解, 求 k 的取值范围.

4. (本题 12 分) 设 $u=x+y\sin u$ 确定了可微函数 $u=u(x,y)$, 试证明:

(1)$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\sin u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}$;

(2)$\dfrac{\partial^n u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}}(\sin^n u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x})$.

5. (本题 12 分) 设函数 $f(x,y)$ 连续,$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$, 记 Ω 在 xoz 平面上的投影区域为 D_{zx}, 求二重积分 $\iint\limits_{D_{xz}}\sqrt{|z-x^2|}d\sigma$.

6. (本题 12 分) 设抛物面 $\Sigma_1: z=1+x^2+y^2$ 及圆柱面 $\Sigma_2: (x-1)^2+y^2=1$.

(1). 求 Σ_1 的一个切面 π_0, 使得由它及 Σ_1 与 Σ_2 围成的立体 Ω 体积达到最小;

(2). 当由 (1) 确定的最小体积的立体 Ω_0 上有质量分布, 其密度 $\rho=1$, 求 Σ_0 的质心坐标.

7. (本题 12 分) 设函数 $\begin{cases} e^x, x \geq 0 \\ e^{-x}, x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x \leq 2 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$, 计算 $\int_L f(x)g(y-x)ds$, 其中 $L: |x|+|y|=1$.