

## 2009 年第一届初赛（非数学类）试卷及参考答案

一、填空题(本题共 4 个小题，每题 5 分，共 20 分)：

(1) 计算  $\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}} dx dy =$  \_\_\_\_\_, 其中区域  $D$  由直线  $x+y=1$  与两坐标轴所围三角形区域.

【参考答案】令  $\sqrt{1-x-y}=u, 1+\frac{y}{x}=v$ , 解得  $x=\frac{1-u^2}{v}, y=\frac{(1-u^2)(v-1)}{v}$

$$D_{uv} = \{(u, v) | 0 < u \leq 1, 1 \leq v < +\infty\}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{2u}{v} & -\frac{1-u^2}{v^2} \\ -\frac{2u(v-1)}{v} & \frac{1-u^2}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{2u(u^2-1)}{v^2}$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{2u(1-u^2)}{v^2}, \quad \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}} = \frac{(1-u^2)\ln v}{u},$$

所以由二重积分换元法的积分变换公式，原积分也就等于

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}} dx dy &= 2 \iint_{D_{uv}} (1-u^2)^2 \cdot \frac{\ln v}{v^2} du dv \\ &= 2 \int_0^1 (1-u^2)^2 du \int_1^{+\infty} \frac{\ln v}{v^2} dv = 2 \cdot \frac{8}{15} \cdot 1 = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

(2) 设  $f(x)$  是连续函数，满足  $f(x) = 3x^2 - \int_0^2 f(x) dx - 2$ ，则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.

【参考答案】令  $A = \int_0^2 f(x) dx$ ,  $f(x) = 3x^2 - 2 - A$

$$\int_0^2 (3x^2 - 2 - A) dx = \left[ x^3 - 2x - Ax \right]_0^2 = 8 - 4 - 2A = 4 - 2A$$

所以  $A = 4 - 2A \Rightarrow A = \frac{4}{3}$ ，代入所设函数表达式，得

$$f(x) = 3x^2 - 2 - A = 3x^2 - 2 - \frac{4}{3} = 3x^2 - \frac{10}{3}.$$

(3) 曲面  $z = \frac{x^2}{2} + y^2 - 2$  平行平面  $2x + 2y - z = 0$  的切平面方程是\_\_\_\_\_.

【参考答案】曲面在任意点  $(x, y, z)$  处的法向量可以取为  $\vec{n}_S = (f'_x, f'_y, -1) = (x, 2y, -1)$ 。平面  $\pi: 2x + 2y - z = 0$  的法向量为  $\vec{n}_\pi = (2, 2, -1)$ 。于切平面的法向量与平面  $\pi$  的法向量平行，

也就有

$$\vec{n}_S / \vec{n}_\pi = (x, 2y, -1) / (2, 2, -1)$$

所以  $\frac{x}{2} = \frac{2y}{2} = \frac{-1}{-1}$ , 即  $\frac{x}{2} = y = 1$ , 得  $x = 2, y = 1$ ,

$$z(2, 1) = \left( \frac{x^2}{2} + y^2 - 2 \right)_{(2,1)} = 2 + 1 - 2 = 1$$

因此, 所求的平面即为经过点  $(2, 1, 1)$ , 法向量为  $\vec{n}_S = (2, 2, -1)$  的平面, 于是有平面的点法式方程, 有  $2(x - 2) + 2(y - 1) - (z - 1) = 0$ , 展开化简后有  $2x + 2y - z - 5 = 0$ .

(4) 设  $y = y(x)$  由方程  $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$  确定, 其中  $f$  具有二阶导数, 且  $f' \neq 1$ , 则  $\frac{d^2 y}{dx^2} =$  \_\_\_\_\_.

**【参考答案】** 对等式两端分别关于  $x$  求导数,  $e^{f(y)} + xe^{f(y)} f'(y) y'(x) = e^y \cdot y'(x) \ln 29$ . 因为  $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$ , 所以

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{e^{f(y)}}{[1 - f'(y)] e^y \ln 29} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= [y'(x)]' = \left[ \frac{e^{f(y)}}{e^y [1 - f'(y)] \ln 29} \right]'_x \\ &= \frac{\left( e^{f(y)} \right)' \cdot e^y [1 - f'(y)] - e^{f(y)} \cdot \left\{ e^y [1 - f'(y)] \right\}'_x}{e^{2y} [1 - f'(y)]^2 \ln 29} \\ &= \frac{\left\{ e^{f(y)} \cdot f'(y) \cdot y'(x) \cdot e^y [1 - f'(y)] - e^{f(y)} \cdot e^y y'(x) [1 - f'(y) - f''(y)] \right\}}{e^{2y} [1 - f'(y)]^2 \ln 29} \\ &= \frac{e^{f(y)} y'(x) \cdot \{ 2f'(y) - f''(y) - 1 + f''(y) \}}{e^y [1 - f'(y)]^2 \ln 29} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{代入一阶导数表达式 } y'(x) &= \frac{e^{f(y)}}{[1 - f'(y)] e^y \ln 29}, \text{ 有} \\ y'' &= \frac{e^{2f(y)} \{ 2f'(y) - f''(y) - 1 + f''(y) \}}{e^{2y} [1 - f'(y)]^3 \ln^2 29} \end{aligned}$$

由原等式  $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$  可以推得  $\frac{e^{2f(y)}}{e^{2y} \ln^2 29} = \left( \frac{e^{f(y)}}{e^y \ln 29} \right)^2 = \frac{1}{x^2}$ , 所以

$$y'' = \frac{2f'(y) - f'^2(y) - 1 + f''(y)}{x^2 [1 - f'(y)]^3} = \frac{-[1 - f'(y)]^2 + f''(y)}{x^2 [1 - f'(y)]^3}$$

**第二题：(5 分)** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{e}{x}}$ , 其中  $n$  是给定的正整数.

**【参考答案】** 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{e}{x} \ln \left( \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e}{x} \ln \left( \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)}$

由洛必达法则, 有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e \left[ \ln(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) - \ln n \right]}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(e^x + 2e^x + \cdots + ne^{nx})}{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}} \\ &= \frac{e(1 + 2 + \cdots + n)}{n} = \frac{n+1}{2} e \end{aligned}$$

于是  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{e}{x}} = e^{\frac{n+1}{2} e}$ .

**第三题：(15 分)** 设函数  $f(x)$  连续,  $g(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ ,  $A$  为常数, 求  $g'(x)$  并讨论  $g'(x)$  在  $x = 0$  处的连续性.

**【参考答案】** 由题设, 知  $f(0) = 0$ ,  $g(0) = 0$ . 令  $u = xt$ , 得  $g(x) = \frac{\int_0^x f(u) du}{x}$  ( $x \neq 0$ ),

$$g'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

由导数定义有  $g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}$ . 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} = g'(0) \end{aligned}$$

从而知  $g'(x)$  在  $x = 0$  处连续.

**第四题：(15 分)** 已知平面区域  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ ,  $L$  为  $D$  的正向边界, 试证:

$$(1) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx;$$

$$(2) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx \geq \frac{5}{2} \pi^2.$$

【参考证法一】由于区域  $D$  为一正方形，可以直接用对坐标曲线积分的计算法计算。

$$\text{左边} = \int_0^\pi \pi e^{\sin y} dy - \int_\pi^0 \pi e^{-\sin x} dx = \pi \int_0^\pi (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) dx,$$

$$\text{右边} = \int_0^\pi \pi e^{-\sin y} dy - \int_\pi^0 \pi e^{\sin x} dx = \pi \int_0^\pi (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) dx,$$

$$\text{所以 } \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx.$$

$$\text{由于 } e^{\sin x} + e^{-\sin x} \geq 2 + \sin^2 x,$$

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \pi \int_0^\pi (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) dx \geq \frac{5}{2} \pi^2$$

【参考证法二】(1) 根据格林公式，有

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) d\sigma$$

$$\oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x}) d\sigma$$

因为关于  $y = x$  对称，所以

$$\iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) d\sigma = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x}) d\sigma,$$

$$\text{故 } \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx.$$

$$(2) \text{ 由 } e^t + e^{-t} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \geq 2 + t^2,$$

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) d\sigma = \iint_D (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) d\sigma \geq \frac{5}{2} \pi^2.$$

**第五题：(10 分)** 已知  $y_1 = x e^x + e^{2x}$ ， $y_2 = x e^x + e^{-x}$ ， $y_3 = x e^x + e^{2x} - e^{-x}$  是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程。

【参考解法】根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的知识，由题设可知： $e^{2x}$  与  $e^{-x}$  是相应齐次方程两个线性无关的解，且  $x e^x$  是非齐次的一个特解。因此可以用下述两种解法。

【解法一】：故此方程式  $y'' - y' - 2y = f(x)$ 。将  $y = x e^x$  代入上式，得

$$f(x) = (x e^x)'' - (x e^x)' - 2x e^x = 2e^x + x e^x - e^x - x e^x - 2x e^x = e^x - 2x e^x$$

因此所求方程为  $y'' - y' - 2y = e^x - 2x e^x$ 。

【解法二】故  $y = x e^x + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$ ，是所求方程的通解，由

$$y' = e^x + xe^x + 2c_1e^{2x} - c_2e^{-x}, \quad y'' = 4c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + 2e^x + xe^x$$

消去  $c_1, c_2$  得所求方程为  $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$ .

**第六题：(10分)** 设抛物线  $y = ax^2 + bx + 2\ln c$  过原点，当  $0 \leq x \leq 1$  时， $y \geq 0$ ，又已知该抛物线与  $x$  轴及直线  $x = 1$  所围图形的面积为  $\frac{1}{3}$ 。试确定  $a, b, c$  使此图形绕  $x$  轴旋转一周而成的旋转体的体积  $V$  最小。

**【参考答案】** 因抛物线过原点，故  $c = 1$ ，由题设有

$$\int_0^1 (ax^2 + bx) dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{3} \text{ 即 } b = \frac{2}{3}(1 - a),$$

$$\text{而 } V = \pi \int_0^1 (ax^2 + bx)^2 dx = \pi \left[ \frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}b^2 \right]$$

$$= \pi \left[ \frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{3}a(1 - a) + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}(1 - a)^2 \right].$$

令  $\frac{dv}{da} = \pi \left[ \frac{2}{5}a + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}a - \frac{8}{27}(1 - a) \right] = 0$ ，得  $a = -\frac{5}{4}$ ，代入  $b$  的表达式得  $b = \frac{3}{2}$ 。  
所以  $y \geq 0$ 。

$$\text{又因 } \frac{d^2v}{da^2} \Big|_{a=-\frac{5}{4}} = \pi \left[ \frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{8}{27} \right] = \frac{4}{135}\pi > 0 \text{ 及实际情况, 当 } a = -\frac{5}{4}, b = \frac{3}{2}, c = 1$$

时，体积最小。

**第七题：(15分)** 已知  $u_n(x)$  满足  $u_n'(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x$  ( $n$  为正整数)，且  $u_n(1) = \frac{e}{n}$ ，

求函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  之和。

**【参考答案】** 先解一阶常系数微分方程  $u_n'(x) - u_n(x) = x^{n-1}e^x$  通解为

$$u_n(x) = e^{\int dx} \left( \int x^{n-1} e^x e^{-\int dx} dx + c \right) = e^x \left( \frac{x^n}{n} + c \right)$$

由条件  $u_n(1) = \frac{e}{n}$ ，得  $c = 0$ ，故  $u_n(x) = \frac{x^n e^x}{n}$ ，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n e^x}{n} = e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \cdot s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

其收敛域为  $[-1, 1)$ ，当  $x \in (-1, 1)$  时，有  $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ ，故

$$s(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x).$$

当  $x = -1$  时， $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = -e^{-1} \ln 2$ 。于是，当  $-1 \leq x < 1$  时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = -e^x \ln(1-x).$$

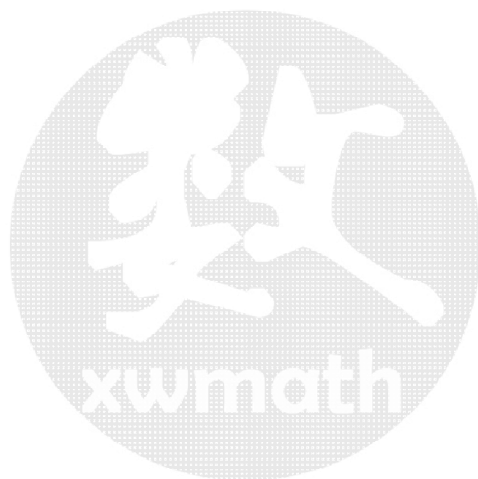
第八题：(10分)求  $x \rightarrow 1 -$  时，与  $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$  等价的无穷大量.

**【参考答案】**  $\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \leq 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt,$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2 \ln \frac{1}{x}} dt = \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} \int_0^{+\infty} e^{-\left(t\sqrt{\ln \frac{1}{x}}\right)^2} d\left(t\sqrt{\ln \frac{1}{x}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\ln \frac{1}{x}}} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}. \end{aligned}$$

微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)



## 2010 年第二届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷及参考答案

一、计算下列各题(本题共 5 个小题，每题 5 分，共 25 分，要求写出重要步骤)

(1) 设  $x_n = (1+a) \cdot (1+a^2) \cdots (1+a^{2^n})$ ，其中  $|a| < 1$ ，求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

$$\begin{aligned} \text{【参考答案】 } x_n &= \frac{1}{(1-a)} (1-a)(1+a) \cdot (1+a^2) \cdots (1+a^{2^n}) \\ &= \frac{1}{(1-a)} (1-a^2) \cdot (1+a^2) \cdots (1+a^{2^n}) \\ &= \frac{1}{(1-a)} (1-a^4) \cdot (1+a^4) \cdots (1+a^{2^n}) = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a} \end{aligned}$$

由于  $|a| < 1$ ，所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{2^{n+1}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{1-a}$ 。

(2) 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$ 。

$$\begin{aligned} \text{【参考答案】 } \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ e^{-1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^x \\ &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 1 \right] x \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[ x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[ x \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) - 1 \right] \right\} = e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

【注】  $\exp(x) = e^x$ 。

(3) 设  $s > 0$ ，求  $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^n dx (n=1, 2, \cdots)$ 。

【参考答案】 因为  $s > 0$  时，  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-sx} x^n = 0$ ，所以

$$I_n = -\frac{1}{s} \int_0^{+\infty} x^n d(e^{-sx}) = -\frac{1}{s} \left[ x^n e^{-sx} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-sx} d(x^n) \right] = \frac{n}{s} I_{n-1}$$

由此得  $I_n = \frac{n}{s} I_{n-1} = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} I_{n-2} = \cdots = \frac{n!}{s^{n-1}} I_1$ 。

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x dx = -\frac{1}{s} \left[ x^n e^{-sx} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-sx} dx \right] = \frac{1}{s^2}$$

$$I_n = \frac{n!}{s^{n-1}} I_1 = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

(4) 设  $f(t)$  有二阶连续导数,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $g(x, y) = f\left(\frac{1}{r}\right)$ , 求  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ .

【参考答案】因为  $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ ,  $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ , 所以

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{x}{r^3} f'\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^6} f''\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{2x^2 - y^2}{r^5} f'\left(\frac{1}{r}\right),$$

利用对称性, 可得

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{y}{r^3} f'\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^6} f''\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{2y^2 - x^2}{r^5} f'\left(\frac{1}{r}\right),$$

所以

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{1}{r^4} f''\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r^3} f'\left(\frac{1}{r}\right).$$

(5) 求直线  $l_1: \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$  与直线  $l_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$  的距离.

【参考答案】直线  $l_1$  的对称式方程为  $l_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$ , 记两直线的方向向量分别为  $\vec{l}_1 = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{l}_2 = (4, -2, -1)$ , 两直线上两定点分别为  $P_1(0, 0, 0)$ ,  $P_2(2, 1, 3)$ , 并记

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1 P_2} = (2, 1, 3), \quad \vec{l}_1 \times \vec{l}_2 = (-1, 1, -6);$$

于是两点间的距离为  $d = \frac{|\vec{a} \cdot (\vec{l}_1 \times \vec{l}_2)|}{|\vec{l}_1 \times \vec{l}_2|} = \frac{|-2 + 1 - 18|}{\sqrt{38}} = \sqrt{\frac{19}{2}}.$

第二题: (15分) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上具有二阶导数, 并且

$$f''(x) > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha > 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \beta < 0,$$

且存在一点  $x_0$ , 使得  $f(x_0) < 0$ . 证明: 方程  $f(x) = 0$  在  $(-\infty, +\infty)$  恰有两个实根.

【参考证法】由于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha > 0$ , 必有一个充分大的  $a > x_0$ , 使得  $f'(a) > 0$ .  $f''(x) > 0$  可

知  $y = f(x)$  对应的图形为凹函数, 从而  $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$  ( $x > a$ ). 当  $x \rightarrow +\infty$  时,

$$f(+\infty) + f'(a)(x - a) \rightarrow +\infty.$$

故存在  $b > a$ , 使得  $f(b) > f(a) + f'(a)(b - a) > 0$ .

由  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \beta < 0$ , 必有一个充分大的  $c < x_0$ , 使得  $f'(c) > 0$ .  $f''(x) > 0$  可知  $y = f(x)$

为凹函数, 从而  $f(x) > f(c) + f'(c)(x - c)$  ( $x < c$ ). 当  $x \rightarrow -\infty$  时,

$$f(-\infty) + f'(c)(x - c) \rightarrow +\infty.$$

故存在  $d < c$ , 使得  $f(d) > f(c) + f'(c)(d - c) > 0$ .

在  $[x_0, b]$  和  $[d, x_0]$  利用零点定理,  $\exists x_1 \in (x_0, b)$ ,  $x_2 \in (d, x_0)$  使得  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ .

下面证明方程  $y = f(x)$  只有两个实根.

用反证法. 假设  $f(x) = 0$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有三个实根, 不妨设为  $x_1, x_2, x_3$  且  $x_1 < x_2 < x_3$ . 对



$f(x)$  在区间  $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$  上分别用罗尔定理, 则各至少存在一点  $\xi_1 \in (x_1, x_2), \xi_2 \in (x_2, x_3)$ , 使得  $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ 。再将  $f'(x)$  在  $[\xi_1, \xi_2]$  上应用罗尔定理, 则至少存在一点  $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$ , 使得  $f''(\eta) = 0$ , 与已知条件  $f''(x) > 0$  矛盾, 所以方程不能多于两个实根。

**第三题: (15 分)** 设  $y = f(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \psi(t) \end{cases} (t > -1)$  所确定. 且  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$ , 其中  $\psi(t)$

具有二阶导数, 曲线  $y = \psi(t)$  与  $y = \int_1^{t^2} e^{-u^2} du + \frac{3}{2e}$  在  $t = 1$  处相切. 求函数  $\psi(t)$ 。

**【参考答案】** 因为  $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{2+2t}$ ,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2+2t} \frac{(2+2t)\psi''(t) - 2\psi'(t)}{(2+2t)^3} = \frac{(1+t)\psi''(t) - \psi'(t)}{4(1+t)^3}$$

由题设  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$ , 故

$$\frac{(1+t)\psi''(t) - \psi'(t)}{4(1+t)^3} = \frac{3}{4(1+t)},$$

从而有  $(1+t)\psi''(t) - \psi'(t) = 3(1+t)^2$ , 即

$$\psi''(t) - \frac{1}{(1+t)}\psi'(t) = 3(1+t)$$

设  $u = \psi'(t)$ , 故有  $u' - \frac{1}{(1+t)}u = 3(1+t)$ , 由一阶非齐次线性微分方程通解计算公式, 有

$$\begin{aligned} u &= e^{-\int \left(-\frac{1}{1+t}\right) dt} \left[ \int 3(1+t)e^{\int \left(-\frac{1}{1+t}\right) dt} dt + C_1 \right] \\ &= (1+t) \left[ \int 3(1+t)(1+t)^{-1} dt + C_1 \right] = (1+t)(3t + C_1) \end{aligned}$$

由曲线  $y = \psi(t)$  与  $y = \int_1^{t^2} e^{-u^2} du + \frac{3}{2e}$  在  $t = 1$  处相切知  $\psi(1) = \frac{3}{2e}, \psi'(1) = \frac{2}{e}$ . 所以有

$$u|_{t=1} = \psi'(1) = \frac{2}{e} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{e} - 3.$$

于是有

$$\psi(t) = \int (1+t)(3t + C_1) dt = t^3 + \frac{3+C_1}{2}t^2 + C_1 t + C_2$$

$$\text{由 } \psi(1) = \frac{3}{2e} \Rightarrow C_2 = 2, \text{ 于是有 } \psi(t) = t^3 + \frac{1}{2e}t^2 + \left(\frac{1}{e} - 3\right)t + 2 \quad (t > -1).$$

**第四题: (15 分)** 设  $a_n > 0$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ , 证明: (1) 当  $\alpha > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$  收敛; (2) 当  $\alpha \leq 1$ ,

且  $S_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$  时,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$  发散.

**【参考答案】** 令  $f(x) = x^{1-\alpha}$ ,  $x \in [S_{n-1}, S_n]$ , 将  $f(x)$  在  $[S_{n-1}, S_n]$  上用拉格朗日中值定理, 存在  $\xi \in (S_{n-1}, S_n)$ , 使得  $f(S_n) - f(S_{n-1}) = f'(\xi)(S_n - S_{n-1})$ , 即

$$S_n^{1-\alpha} - S_{n-1}^{1-\alpha} = (1-\alpha)\xi^{-\alpha}a_n.$$

(1) 当  $\alpha > 1$  时,  $\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}} = (\alpha-1)\frac{a_n}{\xi^\alpha} \geq (\alpha-1)\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ , 显然  $\left\{\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right\}$  的前  $n$  项和有

界, 从而收敛, 所以级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$  收敛.

(2) 当  $\alpha = 1$  时, 因为  $a_n > 0$ ,  $S_n$  单调递增, 所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \geq \frac{1}{S_{n+p}} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}$$

因为  $S_n \rightarrow +\infty$  对任意的  $n$ , 当  $p \in N$ ,  $\frac{S_n}{S_{n+p}} < \frac{1}{2}$ , 从而  $\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \geq \frac{1}{2}$ . 所以级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$  发散.

(3) 当  $\alpha < 1$  时,  $\frac{a_n}{S_n^\alpha} \geq \frac{a_n}{S_n}$ , 由  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$  发散及比较判别法,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$  发散.

**第五题: (15 分)** 设  $l$  是过原点、方向为  $(\alpha, \beta, \gamma)$  (其中  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ ) 的直线, 均匀椭球

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad (\text{其中 } 0 < c < b < a, \text{ 密度为 } 1) \text{ 绕 } l \text{ 旋转.}$$

(1) 求其转动惯量; (2) 求其转动惯量关于方向  $(\alpha, \beta, \gamma)$  的最大值和最小值.

**【参考答案】** (1) 设旋转轴  $l$  的方向向量为  $\vec{s} = (\alpha, \beta, \gamma)$ , 椭球内任意点  $P(x, y, z)$  的径向量为  $\vec{r}$ , 则点  $P$  到旋转轴  $l$  的距离的平方为

$$d^2 = \vec{r}^2 - (\vec{r} \cdot \vec{s})^2 = (1 - \alpha^2)x^2 + (1 - \beta^2)y^2 + (1 - \gamma^2)z^2 - 2\alpha\beta xy - 2\beta\gamma yz - 2\alpha\gamma xz$$

由积分区域的对称性可知

$$\iiint_{\Omega} (2\alpha\beta xy + 2\beta\gamma yz + 2\alpha\gamma xz) dV = 0,$$

其中  $\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$  而

$$\iiint_{\Omega} x^2 dV = \int_{-a}^a x^2 dx \iint_{\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 - \frac{x^2}{a^2}} dy dz = \int_{-a}^a x^2 \cdot \pi ab \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4a^3 bc \pi}{15}.$$

或者使用换元法，有

$$\iiint_{\Omega} x^2 dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 a^2 r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \cdot abc r^2 \sin \varphi dr = \frac{4a^3 bc \pi}{15}.$$

所以可得

$$\iiint_{\Omega} y^2 dV = \frac{4ab^3 c \pi}{15}, \quad \iiint_{\Omega} z^2 dV = \frac{4abc^3 \pi}{15}.$$

由转动惯量的定义，有

$$I_l = \iiint_{\Omega} d^2 dV = \frac{4abc \pi}{15} \left[ (1 - \alpha^2) a^2 + (1 - \beta^2) b^2 + (1 - \gamma^2) c^2 \right].$$

(2) 考虑函数  $V(\alpha, \beta, \gamma) = (1 - \alpha^2) a^2 + (1 - \beta^2) b^2 + (1 - \gamma^2) c^2$  在约束条件  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$  的约束条件下的条件极值。

$$L(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = (1 - \alpha^2) a^2 + (1 - \beta^2) b^2 + (1 - \gamma^2) c^2 + \lambda (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1)$$

令  $L'_\alpha(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = 0, L'_\beta(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = 0, L'_\gamma(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = 0, L'_\lambda(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = 0$ ，解得极值点为

$$Q_1(\pm 1, 0, 0, a^2), Q_2(0, \pm 1, 0, b^2), Q_3(0, 0, \pm 1, c^2).$$

比较可知，绕  $z$  轴（短轴）的转动惯量最大，并且有  $I_{\max} = \frac{4abc \pi}{15} (a^2 + b^2)$ 。绕  $x$  轴（长轴）的转动

惯量最小，并且有  $I_{\min} = \frac{4abc \pi}{15} (b^2 + c^2)$ 。

**第六题：(15 分)** 设函数  $\varphi(x)$  具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线  $C$  上，曲线积分

$\oint_C \frac{2xy dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2}$  的值为常数。

(1) 设  $L$  为正向闭曲线  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ 。证明： $\oint_L \frac{2xy dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2} = 0$ ；

(2) 求函数  $\varphi(x)$ ；(3) 设  $C$  是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求  $\oint_C \frac{2xy dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2}$ 。

**【参考答案】** 设  $\oint_L \frac{2xy dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2} = I$ ，将曲线  $L$  分割成两段  $L = L_1 + L_2$ 。设  $L_0$  不经过原点的

光滑曲线，使得  $L_0 \cup L_1^-$  和  $L_0 \cup L_2$  分别组成围绕原点的分段光滑闭曲线。由已知条件可知  $L_0 \cup L_1^-$  和  $L_0 \cup L_2$  上曲线积分相等，有

$$\begin{aligned} \oint_{L_0 \cup L_1^-} \frac{2xy dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2} &= \oint_{L_0 \cup L_2} \frac{2xy dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2} \\ \Rightarrow \int_{L_2} + \int_{L_0} &= \int_{L_0} + \int_{L_1^-} \Rightarrow \int_{L_2} - \int_{L_1^-} = 0 \Rightarrow \int_{L_2 + L_1} = 0 \Rightarrow \oint_L \frac{2xy dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2} = 0. \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 设 } P(x, y) = \frac{2xy}{x^4 + y^2}, Q(x, y) = \frac{\varphi(x)}{x^4 + y^2}. \text{ 令 } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ 即}$$

$$\frac{2x^5 - 2xy^2}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{\varphi'(x)(x^4 + y^2) - 4x^3\varphi(x)}{(x^4 + y^2)^2}.$$

解得  $\varphi(x) = -x^2$ .

(3) 设  $D$  为正向闭曲线  $C_a: x^4 + y^2 = 1$  所围的闭区域, 则

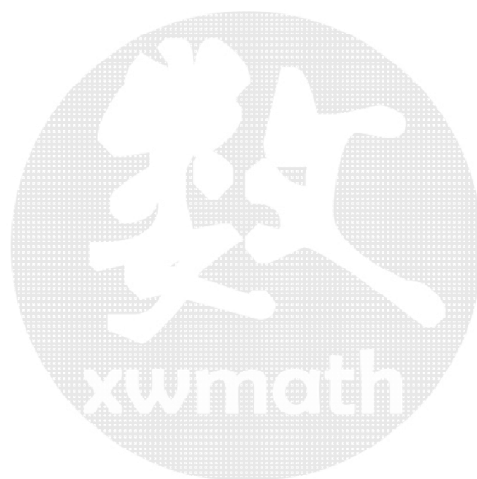
$$\oint_C \frac{2xy dx + \varphi(x) dy}{x^4 + y^2} = \oint_{C_a} \frac{2xy dx - x^2 dy}{x^4 + y^2}$$

利用格林公式, 有

$$\oint_{C_a} \frac{2xy dx - x^2 dy}{x^4 + y^2} = \oint_{C_a} 2xy dx - x^2 dy = \iint_D (-4x) dx dy = 0.$$

微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)

## 2011 年第三届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）

### 试卷及参考答案

一、计算下列各题(本题共 4 个小题，每题 6 分，共 24 分)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2(1 - \ln(1+x))}{x}.$$

【参考解答】：因为  $\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2(1 - \ln(1+x))}{x} = \frac{e^{\frac{2}{x} \ln(1+x)} - e^2(1 - \ln(1+x))}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2}{x} \ln(1+x)}}{x} = e^2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2}{x} \ln(1+x)} - e^2}{x} = e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2}{x} \ln(1+x) - 2} - 1}{x} = e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x} \ln(1+x) - 2}{x}$$

$$= 2e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = 2e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -e^2.$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2(1 - \ln(1+x))}{x} = 0.$$

【注】可以考虑洛必达法则、带皮亚诺余项的麦克劳林公式，具体参见视频解析！

$$(2) \text{ 设 } a_n = \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n}, \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

【参考解答】：若  $\theta = 0$ ，则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

若  $\theta \neq 0$ ，则当  $n$  充分大，使得  $0 < \left| \frac{\theta}{2^n} \right| < \frac{\pi}{2}$  时，

$$\begin{aligned} a_n &= \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n} = \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n} \cdot \sin \frac{\theta}{2^n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2^n}} \\ &= \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{2^2} \sin \frac{\theta}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2^n}} = \frac{\sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} \end{aligned}$$

$$\text{从而有, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} = \frac{\sin \theta}{\theta}.$$

$$(3) \text{ 求 } \iint_D \operatorname{sgn}(xy-1) dx dy, \text{ 其中}$$



$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}.$$

【参考解答】：设  $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 2\}$ ,

$$D_2 = \{(x, y) \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}, D_3 = \{(x, y) \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq 2\},$$

$$\iint_{D_1 \cup D_2} dx dy = 1 + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x} = 1 + 2 \ln 2, \quad \iint_{D_3} dx dy = 3 - 2 \ln 2,$$

$$\iint_D \operatorname{sgn}(xy - 1) dx dy = \iint_{D_3} dx dy - \iint_{D_1 \cup D_2} dx dy = 2 - 4 \ln 2.$$

【注】由积分的几何意义，积分等于 2 倍  $D_3$  矩形的面积减去矩形的面积。具体分析参见解析视频！

(4) 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$  的和函数，并求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{2n-1}}$  的和。

【参考解答】：令  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ ，定义区间为  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 。  $\forall x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ，则

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2n-1}{2^n} t^{2n-2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2^n} = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1} = \frac{x}{2-x^2}.$$

$$\text{所以有 } S(x) = \left(\frac{x}{2-x^2}\right)' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}, x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2} = S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{10}{9}.$$

【注】一般思路参见解析视频！

第二题：(本题两问，每问 8 分，共 16 分) 设  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  为数列， $a, \lambda$  为有限数，求证：

1. 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ，则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$ ；

2. 如果存在正整数  $p$ ，使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda$ ，则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}$ 。

【参考证明】：1. 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ， $\exists M > 0$  使得  $|a_n| \leq M$ ，且  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ ，

当  $n > N_1$  时， $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ 。因为  $\exists N_2 > N_1$ ，当  $n > N_2$  时， $\frac{N_1(M + |a|)}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ 。

于是

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| \leq \frac{N_1(M+|a|)\varepsilon}{n} + \frac{(n-N_1)\varepsilon}{n} < \varepsilon,$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$ .

2. 对于  $i = 0, 1, \cdots, p-1$ , 令  $A_n^{(i)} = a_{(n+1)p+i} - a_{np+i}$ , 易知  $\{A_n^{(i)}\}$  为  $\{a_{n+p} - a_n\}$  的子列. 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda$ , 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{(i)} = \lambda$ , 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \cdots + A_n^{(i)}}{n} = \lambda,$$

而  $A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \cdots + A_n^{(i)} = a_{(n+1)p+i} - a_{p+i}$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i} - a_{p+i}}{n} = \lambda.$$

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{p+i}}{n} = 0$ , 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{n} = \lambda$ . 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)p+i} \cdot \frac{a_{(n+1)p+i}}{n} = \frac{\lambda}{p}.$$

$\forall m \in N, \exists n, p, i \in N, (0 \leq i \leq p-1)$ , 使得  $m = np + i$ , 且当  $m \rightarrow \infty$  时,  $n \rightarrow \infty$ ,

所以有  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{m} = \frac{\lambda}{p}$ .

**【注】** 探索思路过程参见解析视频

**第三题：(15 分)** 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[-1, 1]$  上具有连续的三阶导数, 且  $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$ , 求证: 在开区间  $(-1, 1)$  内至少存在一点  $x_0$ , 使得  $f'''(x_0) = 3$ .

**【参考证明】:** 由麦克劳林公式, 得  $f(x) = f(0) + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3$ ,  $\eta$  介于 0 和  $x$  之间,  $x \in [-1, 1]$ . 分别取  $x = 1, x = -1$ , 得

$$1 = f(1) = f(0) + \frac{1}{2!}f''(0) + \frac{1}{3!}f'''(\eta_1), 0 < \eta_1 < 1.$$

$$0 = f(-1) = f(0) + \frac{1}{2!}f''(0) - \frac{1}{3!}f'''(\eta_2), -1 < \eta_2 < 0.$$

两式相减, 得  $f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2) = 6$ .

由于  $f'''(x)$  在闭区间  $[-1, 1]$  上连续, 因此  $f'''(x)$  在闭区间  $[\eta_2, \eta_1]$  上有最大值  $M$  和最小值  $m$ , 从而有  $m \leq \frac{f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)}{2} \leq M$ .

再由闭区间上连续函数的介值定理, 至少存在一点  $x_0 \in [\eta_2, \eta_1] \subset (-1, 1)$ , 使得

$$f'''(x_0) = \frac{f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)}{2} = 3.$$

**第四题：(15 分)**在平面上，有一条从点 $(a, 0)$ 向右的射线，线密度为 $\rho$ 。在点 $(0, h)$ 处（其中 $h > 0$ ）有一质量为 $m$ 的质点。求射线对该质点的引力。

**【参考解答】**：在 $x$ 轴的 $x$ 处取一小段 $dx$ ，其质量为 $\rho dx$ ，到质点的距离为 $\sqrt{h^2 + x^2}$ ，这一小段与质点的引力是 $dF = \frac{Gm\rho dx}{h^2 + x^2}$ （其中 $G$ 为引力常数），则有

$$\begin{aligned} F_x &= \int_a^{+\infty} dF_x = \int_a^{+\infty} \frac{Gm\rho x dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{Gm\rho}{2} \int_a^{+\infty} \frac{d(x^2)}{(h^2 + x^2)^{3/2}} \\ &= -Gm\rho (h^2 + x^2)^{-1/2} \Big|_a^{+\infty} = \frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2 + a^2}}. \end{aligned}$$

类似有

$$\begin{aligned} F_y &= \int_a^{+\infty} dF_y = \int_a^{+\infty} \frac{Gm\rho h dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = \int_{\arctan \frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Gm\rho h^2 \sec^2 t dt}{h^3 \sec^3 t} \\ &= \frac{Gm\rho}{h} \int_{\arctan \frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \frac{Gm\rho}{h} \left( 1 - \sin \arctan \frac{a}{h} \right) \end{aligned}$$

所求引力向量为 $\vec{F} = (F_x, F_y)$ 。

**第五题：(15 分)**设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $F\left(z + \frac{1}{x}, z - \frac{1}{y}\right) = 0$ 确定的隐函数，且具有连续的二阶偏导数，求证：

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \text{ 和 } x^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy(x-y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - y^3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 = 0.$$

**【参考解答】**：对方程两边分别关于 $x, y$ 求导，

$$\frac{\partial z}{\partial x} F'_u - \frac{1}{x^2} F'_u + \frac{\partial z}{\partial x} F'_v = 0, \quad F'_u \frac{\partial z}{\partial y} + F'_v \frac{\partial z}{\partial y} + F'_v \frac{1}{y^2} = 0$$

由此可得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'_u}{x^2(F'_u + F'_v)}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F'_v}{y^2(F'_u + F'_v)}$ ，所以 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ 。对该式

再关于 $x, y$ 求导，有

$$2x \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0, \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2y \frac{\partial z}{\partial y} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

第一个等式乘以 $x$ ，第二个等式乘以 $y$ ，相加借助于第一个等式的结论可得

$$x^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy(x-y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - y^3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 = 0.$$

**第六题：(15 分)** 设函数  $f(x)$  连续， $a, b, c$  为常数， $\Sigma$  是单位球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 。记第一型曲面积分  $I = \iint_{\Sigma} f(ax + by + cz) dS$ 。求证： $I = 2\pi \int_{-1}^1 f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} u\right) du$ 。

**【参考证明】**：由  $\Sigma$  的面积为  $4\pi$ 。当  $a, b, c$  都为零时，等式显然成立。当它们不全为 0 时，可知原点到平面  $ax + by + cz + d = 0$  的距离是  $\frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ 。

设平面  $P_u : u = \frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$  其中  $u$  固定，则  $|u|$  是原点到平面  $P_u$  的距离，从而  $-1 \leq u \leq 1$ 。两平面  $P_u$  和  $P_{u+du}$  截单位球  $\Sigma$  的截下的部分上，被积函数取值为  $f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} u\right)$ 。这部分摊开可以看成是一个细长条，这个细长条的长是  $2\pi\sqrt{1-u^2}$ ，宽是  $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ ，它的面积为  $2\pi du$ ，故得证。

## 2012 年第四届全国大学生数学竞赛初赛 (非数学类)

### 试卷及参考答案

#### 一、简答下列各题(本题共 5 个小题, 每题 6 分, 共 30 分)

1. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$ .

【参考答案】: 因为  $(n!)^{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{1}{n^2} \ln(n!)}$ , 而

$$\frac{1}{n^2} \ln(n!) \leq \frac{1}{n} \left( \frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \cdots + \frac{\ln n}{n} \right), \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \cdots + \frac{\ln n}{n} \right) = 0$ . 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln(n!) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1$ .

2. 求通过直线  $L: \begin{cases} 2x + y - 3z + 2 = 0, \\ 5x + 5y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$  的两个相互垂直的平面  $\pi_1, \pi_2$ , 使其中一个平面

过点  $(4, -3, 1)$ .

【参考答案】: 过直线  $L$  的平面束方程为  $\lambda(2x + y - 3z + 2) + \mu(5x + 5y - 4z + 3) = 0$ ,

$$\text{即 } (2\lambda + 5\mu)x + (\lambda + 5\mu)y - (3\lambda + 4\mu)z + 2\lambda + 3\mu = 0.$$

若平面  $\pi_1$  过点  $(4, -3, 1)$ , 代入得  $\lambda + \mu = 0$ , 即  $\mu = -\lambda$ , 从而  $\pi_1$  的方程为  $3x + 4y - z + 1 = 0$ .

若平面束中的平面  $\pi_2$  与  $\pi_1$  垂直, 则  $3(2\lambda + 5\mu) + 4(\lambda + 5\mu) + 1(3\lambda + 4\mu) = 0$ . 解得  $\lambda = -3\mu$ , 从而平面  $\pi_2$  的方程为  $x - 2y - 5z + 3 = 0$ .

3. 已知函数  $z = u(x, y)e^{ax+by}$ , 且  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ , 确定常数  $a, b$ , 使函数  $z = z(x, y)$  满足

$$\text{方程 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

【参考答案】:  $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{ax+by} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + au(x, y) \right], \frac{\partial z}{\partial y} = e^{ax+by} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + bu(x, y) \right],$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{ax+by} \left[ b \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial y} + abu(x, y) \right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = e^{ax+by} \left[ (b-1) \frac{\partial u}{\partial x} + (a-1) \frac{\partial u}{\partial y} + (ab-a-b+1)u(x, y) \right],$$

若是上式等于 0, 只有  $(b-1) \frac{\partial u}{\partial x} + (a-1) \frac{\partial u}{\partial y} + (ab-a-b+1)u(x, y) = 0$ , 由此可得  $a = b = 1$ .

4. 设  $u = u(x)$  连续可微,  $u(2) = 1$ , 且  $\int_L (x+2y)u \, dx + (x+u^3)u \, dy$  在右半平面上与路径无关, 求  $u(x)$ .

【参考答案】: 由  $\frac{\partial [(x+2y)u]}{\partial y} = \frac{\partial [u(x+u^3)]}{\partial x}$ , 得



$$(x + 4u^3)u' = u, \text{ 即 } \frac{dx}{du} - \frac{1}{u}x = 4u^2,$$

这是一个一阶线性微分方程，于是由公式有通解为

$$x = e^{\ln u} \left( \int 4u^2 e^{-\ln u} du + C \right) = u \left( \int 4u du + C \right) = u(2u^2 + C)$$

由  $u(2) = 1$  得  $C = 0$ ，所以  $u = \left(\frac{x}{2}\right)^{1/3}$ 。

5. 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t + \cos t}} dt$ .

【参考答案】：因为当  $x > 1$  时，

$$\begin{aligned} \left| \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t + \cos t}} dt \right| &\leq \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt \\ &\leq 2\sqrt[3]{x} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) = \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t + \cos t}} dt = 0$ .

第二题：(10 分) 计算  $\int_0^{+\infty} e^{-2x} |\sin x| dx$ .

【参考答案】：由于

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-2x} |\sin x| dx = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (-1)^{k-1} e^{-2x} \sin x dx$$

应用分部积分法，有

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (-1)^{k-1} e^{-2x} \sin x dx = \frac{1}{5} e^{-2k\pi} (1 + e^{2\pi})$$

$$\text{所以有 } \int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx = \frac{1}{5} (1 + e^{2\pi}) \sum_{k=1}^n e^{-2k\pi} = \frac{1}{5} (1 + e^{2\pi}) \frac{e^{-2\pi} - e^{-2(n+1)\pi}}{1 - e^{-2\pi}}$$

$$\text{当 } n\pi \leq x \leq (n+1)\pi \text{ 时, } \int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx \leq \int_0^x e^{-2x} |\sin x| dx \leq \int_0^{(n+1)\pi} e^{-2x} |\sin x| dx$$

$$\text{当 } n \rightarrow \infty, \text{ 由两边夹法则, 得 } \int_0^{\infty} e^{-2x} |\sin x| dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-2x} |\sin x| dx = \frac{1}{5} \frac{e^{2\pi} + 1}{e^{2\pi} - 1}.$$

【注】如果最后不用夹逼准则，而用

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} |\sin x| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx = \frac{1}{5} \frac{e^{2\pi} + 1}{e^{2\pi} - 1}.$$

需要先说明  $\int_0^{\infty} e^{-2x} |\sin x| dx$  收敛。

第三题：(10 分) 求方程  $x^2 \sin \frac{1}{x} = 2x - 501$  的近似解，精确到 0.001。

【参考解答】：由泰勒公式  $\sin t = t - \frac{\sin(\theta t)}{2} t^2$  ( $0 < \theta < 1$ )。令  $t = \frac{1}{x}$  得

$$\sin \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)}{2} \left(\frac{1}{x}\right)^2,$$

代入原方程，得

$$x - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{x}\right) = 2x - 501 \text{ 即 } x = 501 - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{x}\right).$$

由此知  $x > 500, 0 < \frac{\theta}{x} < \frac{1}{500}$ , 所以有  $|x - 501| = \frac{1}{2} \left| \sin\left(\frac{\theta}{x}\right) \right| \leq \frac{1}{2} \frac{\theta}{x} < \frac{1}{1000} = 0.001$ , 即当

$x = 501$  即为满足题设条件的解。

**第四题：(12 分)** 设函数  $y = f(x)$  二阶可导，且  $f''(x) > 0, f(0) = 0, f'(0) = 0$ . 求

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f(u)}{f(x) \sin^3 u}$ , 其中  $u$  是曲线  $y = f(x)$  上点  $P(x, f(x))$  处切线在  $x$  轴上的截距。

**【参考答案】:**  $y = f(x)$  上点  $P(x, f(x))$  处切线方程为  $Y - f(x) = f'(x)(X - x)$ . 令  $Y = 0$ ,

$X = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ , 由此得  $u = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  且有

$$\lim_{x \rightarrow 0} u = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right] = - \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\frac{f(x) - f(0)}{x}}{\frac{f'(x) - f'(0)}{x}} \right] = \frac{f'(0)}{f''(0)} = 0.$$

由  $f(x)$  在  $x = 0$  处的二阶泰勒公式,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} \text{可得 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{x} &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{xf'(x)} = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)}{xf'(x)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(0) + o(1)}{f'(x) - f'(0)} = 1 - \frac{1}{2} \frac{f''(0)}{f''(0)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f(u)}{f(x) \sin^3 u} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left( \frac{f''(0)}{2} u^2 + o(u^2) \right)}{u^3 \left( \frac{f''(0)}{2} x^2 + o(x^2) \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{u} = 2.$$

**第五题：(12 分)** 求最小实数  $C$ , 使得满足  $\int_0^1 |f(x)| dx = 1$  的连续的函数  $f(x)$  都有

$$\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx \leq C.$$

**【参考答案】:** 由于  $\int_0^1 |f(\sqrt{x})| dx = \int_0^1 |f(t)| 2t dt \leq 2 \int_0^1 |f(t)| dt = 2$ , 取  $f_n(x) = (n+1)x^n$ , 则有

$$\int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^1 f_n(x) dx = 1$$

而  $\int_0^1 f_n(\sqrt{x}) dx = 2 \int_0^1 t f_n(t) dt = 2 \frac{n+1}{n+2} = 2 \left( 1 - \frac{1}{n+2} \right) \rightarrow 2 (n \rightarrow \infty)$ . 因此最小的实数为  $C = 2$ .

**第六题：(12 分)** 设  $f(x)$  为连续函数,  $t > 0$ .  $\Omega$  是由抛物面  $z = x^2 + y^2$  和球面  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2 (t > 0)$  所围成起来的部分. 定义  $F(t) = \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dV$ ,

求  $F'(t)$ .

【解法一】: 即  $g = g(t) = \frac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$ , 则  $\Omega$  在  $xOy$  面上的投影为  $x^2 + y^2 \leq g$ . 在曲线

$S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \end{cases}$  上任取一点  $(x, y, z)$ , 则圆雕到点的射线和  $z$  轴的夹角为

$$\theta_t = \arccos \frac{z}{t} = \arccos \frac{g}{t}.$$

取  $\Delta t > 0$ , 则  $\theta_t > \theta_{t+\Delta t}$ . 对于固定的  $t > 0$ , 考虑积分差  $F(t+\Delta t) - F(t)$ , 这是一个在厚度为  $\Delta t$  的球壳上的积分. 原点到球壳边缘上的点的射线和  $z$  轴的夹角在  $\theta_t, \theta_{t+\Delta t}$  之间. 用球坐标计算积分, 由积分的连续性可知, 存在  $\alpha = \alpha(\Delta t)$ ,  $\theta_{t+\Delta t} \leq \alpha \leq \theta_t$  使得

$$F(t+\Delta t) - F(t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha d\theta \int_t^{t+\Delta t} f(r^2) r^2 \sin \theta dr$$

即  $F(t+\Delta t) - F(t) = 2\pi(1 - \cos \alpha) \int_t^{t+\Delta t} f(r^2) r^2 dr$ . 当  $\Delta t \rightarrow 0^+$ ,

$$\cos \alpha \rightarrow \cos \theta_t = \frac{g(t)}{t}, \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(r^2) r^2 dr \rightarrow t^2 f(t^2).$$

故  $F(t)$  的右导数为

$$2\pi \left(1 - \frac{g(t)}{t}\right) t^2 f(t^2) = \pi \left(2t + 1 - \sqrt{1+4t^2}\right) t f(t^2).$$

当  $\Delta t < 0$ , 考虑  $F(t+\Delta t) - F(t)$  可得到同样的左导数, 因此

$$F'(t) = \pi \left(2t + 1 - \sqrt{1+4t^2}\right) t f(t^2).$$

【解法二】: 令  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$ , 则区域  $\Omega$  表示为

$$\Omega: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a, r^2 \leq z \leq \sqrt{t^2 - r^2},$$

其中  $a$  满足  $a^2 + a^4 = t^2, a = \frac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$ , 有

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}} f(r^2 + z^2) dz = 2\pi \int_0^a \left[ \int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}} f(r^2 + z^2) dz \right] r dr$$

从而有

$$F'(t) = 2\pi \left[ a \int_{a^2}^{\sqrt{t^2-a^2}} f(a^2 + z^2) dz \frac{da}{dt} + \int_0^a r f(r^2 + t^2 - r^2) \frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr \right]$$

注意到  $\sqrt{t^2 - a^2} = a^2$ , 第一个积分为 0, 所以有

$$F'(t) = 2\pi t f(t^2) \int_0^a \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr = -\pi t f(t^2) \int_0^a \frac{d(t^2 - r^2)}{\sqrt{t^2 - r^2}}$$

所以  $F'(t) = \pi t f(t^2) (2t + 1 - \sqrt{1+4t^2})$ .

第七题: (14 分) 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  为正项级数,

(1) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1} b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) > 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

(2) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) < 0$  且  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

【参考证明】: (1) 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = 2\delta > \delta > 0$ , 则存在  $N \in \mathbb{N}$ , 对于任意的  $n \geq N$  时,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} > \delta, \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \delta a_{n+1}, a_{n+1} < \frac{1}{\delta} \left( \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right)$$

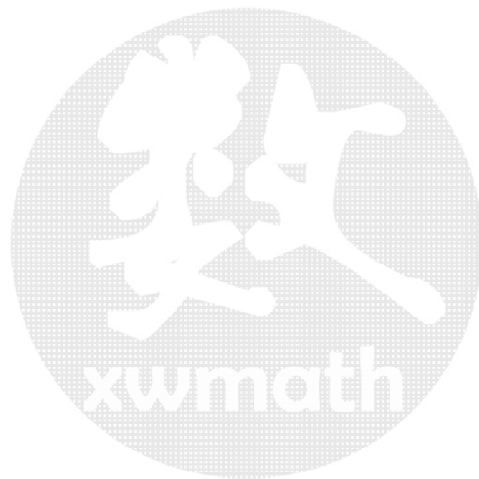
$$\sum_{n=N}^m a_{n+1} < \frac{1}{\delta} \sum_{n=N}^m \left( \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) \leq \frac{1}{\delta} \left( \frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \right) \leq \frac{1}{\delta} \frac{a_N}{b_N},$$

因而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和有上界, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛。

(2) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) < \delta < 0$ , 则存在  $N \in \mathbb{N}$ , 对于任意的  $n \geq N$  时,  $\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{b_n}{b_{n+1}}$ , 有

$$a_{n+1} > \frac{b_{n+1}}{b_n} a_n > \dots > \frac{b_{n+1}}{b_n} \frac{b_n}{b_{n-1}} \dots \frac{b_{N+1}}{b_N} a_N = \frac{a_N}{b_N} b_{n+1},$$

于是由  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散, 得到  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散。



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)

## 2013 年第五届全国大学生数学竞赛初赛 (非数学类)

### 试卷及参考答案

一、解答下列各题(共 4 小题,每小题 6 分,共 24 分)。

1. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \pi \sqrt{1 + 4n^2}\right)^n$ 。

【参考解答】: 因为  $\sin(\pi \sqrt{1 + 4n^2}) = \sin(\pi \sqrt{1 + 4n^2} - 2n\pi) = \sin \frac{\pi}{\sqrt{1 + 4n^2} + 2n}$ 。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{\pi}{\sqrt{1 + 4n^2} + 2n}\right)^n \\ &= \exp \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \sin \frac{\pi}{\sqrt{1 + 4n^2} + 2n}\right) \right] = \exp \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{\sqrt{1 + 4n^2} + 2n} \right] \\ &= \exp \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\pi}{\sqrt{1 + 4n^2} + 2n} \right] = e^{\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

2. 证明广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  不是绝对收敛的。

【参考证明】:  $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$ . 只要证明  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  发散。

$$\text{因为 } a_n \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| dx = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{(n+1)\pi}.$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)\pi}$  发散. 由正项级数的比较判别法可知,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  发散, 即  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  不绝对收敛。

3. 设  $y = y(x)$  由  $x^3 + 3x^2y - 2y^3 = 2$  所确定, 求  $y(x)$  的极值。

【参考解答】: 方程两边对  $x$  求导, 得  $3x^2 + 6xy + 3x^2y' - 6y^2y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x(x+2y)}{2y^2 - x^2}$

令  $y'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2y$ . 将  $x = 0, x = -2y$  代入所给方程, 得  
 $x = 0, y = -1; x = -2, y = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{又有 } y'' &= \frac{(2y^2 - x^2)(2x + 2xy' + 2y) + (x^2 + 2xy)(4yy' - 2x)}{(2y^2 - x^2)^2}, \text{ 从而有} \\ y'' \Big|_{\substack{x=0 \\ y=-1 \\ y'=0}} &= -1 < 0, y'' \Big|_{\substack{x=-2 \\ y=1 \\ y'=0}} = 1 > 0. \end{aligned}$$

所以,  $y(0) = -1$  为极大值,  $y(-2) = 1$  为极小值。

4. 过曲线  $y = \sqrt[3]{x} (x \geq 0)$  上的点  $A$  作切线, 使得该切线与曲线及  $x$  轴所围成的平面图形的面积为  $\frac{3}{4}$ . 求点  $A$  的坐标。



**【参考解答】**：设切点  $A$  的坐标为  $(t, \sqrt[3]{t})$ ，曲线过  $A$  点的切线为  $y - \sqrt[3]{t} = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}(x - t)$ 。

令  $y = 0$ ，可得切线与  $x$  轴交点的横坐标为  $x_0 = -2t$ 。因此平面图形的面积  $S = \Delta Ax_0t$  的面积-曲边梯形  $OtA$  的面积

$$S = \frac{1}{2} \sqrt[3]{t} \cdot 3t - \int_0^t \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} t \sqrt[3]{t} = \frac{3}{4} \Rightarrow t = 1。$$

所以  $A$  的坐标为  $(1, 1)$ 。

**第二题：(12 分)** 计算定积分  $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx$ 。

$$\begin{aligned} \text{【参考解答】: } I &= \int_{-\pi}^0 \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx + \int_0^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^{-x}}{1 + \cos^2 x} dx + \int_0^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\pi} \left( \arctan e^{-x} + \arctan e^x \right) \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = - \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \arctan(\cos x) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{8}。 \end{aligned}$$

(其中  $\arctan e^{-x} + \arctan e^x = \frac{\pi}{2}$ ，另外

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - u) \sin u}{1 + \cos^2 u} du = - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx + \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx。$$

这样可以得到第二个  $\frac{\pi}{2}$ )

**第三题：(12 分)** 设  $f(x)$  在  $x = 0$  处存在二阶导数  $f''(0)$ ，且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 。证明：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \text{ 收敛。}$$

**【参考证明】**：由于  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ ，则

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot x = 0, f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0。$$

应用洛必达法则，则有  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2(x - 0)} = \frac{1}{2} f''(0)$ 。所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} f''(0)。由于 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛，所以 } \sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \text{ 收敛。}$$

**第四题：(10 分)** 设  $|f(x)| \leq \pi, f'(x) \geq m > 0 (a \leq x \leq b)$ ，证明：

$$\left| \int_a^b \sin f(x) dx \right| \leq \frac{2}{m}.$$

【参考证明】：因为  $f'(x) \geq m > 0 (a \leq x \leq b)$ ，所以  $f(x)$  在  $[a, b]$  上严格单调增加，从而有反函数。设  $A = f(a), B = f(b)$ ， $\varphi$  是  $f$  的反函数，则

$$0 < \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \leq \frac{1}{m},$$

又  $|f(x)| \leq \pi$ ，则  $-\pi \leq A < B \leq \pi$ ，所以

$$\left| \int_a^b \sin f(x) dx \right| \stackrel{x = \varphi(y)}{=} \left| \int_A^B \varphi'(y) \sin y dy \right| \leq \int_0^\pi \frac{\sin y}{m} dy = \frac{2}{m}.$$

第五题：(14 分) 设  $\Sigma$  是一个光滑封闭曲面，方向朝外，给定第二型的曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x^3 - x) dy dz + (2y^3 - y) dz dx + (3z^3 - z) dx dy.$$

试确定曲面  $\Sigma$ ，使得积分  $I$  的值最小，并求该最小值。

【参考解答】：设  $\Sigma$  围成的立体的体积为  $V$ ，则由高斯公式，有

$$I = \iiint_V (3x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 3) dV = 3 \iiint_V (x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1) dV$$

为了使得  $I$  达到最小，就是要求  $V$  使得  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 \leq 0$  的最大空间区域，即

$$V = \{(x, y, z) | x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1\}$$

所以  $V$  是一个椭球， $\Sigma$  是椭球  $V$  的表面时，积分  $I$  最小。

$$\text{为了求该最小值，做变换 } x = u, y = v / \sqrt{2}, z = w / \sqrt{3}, \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{\sqrt{6}} \iiint_{u^2 + v^2 + w^2 \leq 1} (u^2 + v^2 + w^2 - 1) dV \\ &= \frac{3}{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^1 (r^2 - 1) r^2 \sin \theta dr = -\frac{4\sqrt{6}}{15} \pi. \end{aligned}$$

第六题：(14 分) 设  $I_a(r) = \int_C \frac{y dx - x dy}{(x^2 + y^2)^a}$ ，其中  $a$  为常数，曲线  $C$  为椭圆

$$x^2 + xy + y^2 = r^2, \text{ 取正向。求极限 } \lim_{r \rightarrow +\infty} I_a(r).$$

【参考解答】：作变换  $x = \frac{u-v}{\sqrt{2}}, y = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$ 。曲线  $C$  变为  $uOv$  平面上的

$$\Gamma: \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 = r^2, \text{ 也是取正向且有 } x^2 + y^2 = u^2 + v^2, ydx - xdy = vdu - u dv,$$

$$I_a(r) = \int_{\Gamma} \frac{vdu - u dv}{(u^2 + v^2)^a}.$$

作变换  $u = \sqrt{\frac{2}{3}}r \cos \theta, v = \sqrt{2}r \sin \theta$ , 则有  $vdu - u dv = -\frac{2}{\sqrt{3}}r^2 d\theta$

$$I_a(r) = -\frac{2r^{2(1-a)}}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(2\cos^2 \theta / 3 + 2\sin^2 \theta\right)^a} = -\frac{2r^2}{\sqrt{3}} J_a$$

其中  $J_a = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(2\cos^2 \theta / 3 + 2\sin^2 \theta\right)^a}, 0 < J_a < +\infty$ .

因此当  $a > 1$  和  $a < 1$ , 所求极限分别为 0 和  $-\infty$ 。当  $a = 1$ ,

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\cos^2 \theta / 3 + 2\sin^2 \theta} = \sqrt{3}\pi.$$

所求极限为  $\lim_{r \rightarrow +\infty} I_a(r) = \begin{cases} 0, a > 1, \\ -\infty, a < 1, \\ -2\pi, a = 1. \end{cases}$

**第七题: (14 分)** 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$  的敛散性, 若收敛, 求其和。

**【参考解答】:** (1) 记  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, u_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}, n = 1, 2, \cdots$ .

因为  $n$  充分大时

$$0 < a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \ln n < \sqrt{n}$$

所以  $u_n \leq \frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^{3/2}}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$  收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛。

(2)  $a_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} (k = 1, 2, \cdots)$ , 则

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k+1)(k+2)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{a_k}{k+1} - \frac{a_k}{k+2} \right) = \left( \frac{a_1}{2} - \frac{a_1}{3} \right) + \left( \frac{a_2}{3} - \frac{a_2}{4} \right) + \cdots + \left( \frac{a_{n-1}}{n} - \frac{a_{n-1}}{n+1} \right) + \left( \frac{a_n}{n+1} - \frac{a_n}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{3} (a_2 - a_1) + \frac{1}{4} (a_3 - a_2) + \cdots + \frac{1}{n+1} (a_n - a_{n-1}) - \frac{1}{n+2} a_n \\ &= \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n-1)} \right) - \frac{1}{n+2} a_n = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} a_n. \end{aligned}$$

因为  $0 < a_n < 1 + \ln n$ , 所以  $0 < \frac{a_n}{n+2} < \frac{1 + \ln n}{n+2}$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \ln n}{n+2} = 0$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n+2} = 0. \text{ 于是 } S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - 0 - 0 = 1.$$

## 2014 年第六届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）

### 试卷及参考答案

#### 一、填空题(共有 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分)

(1) 已知  $y_1 = e^x$  和  $y_2 = xe^x$  是齐次二阶常系数线性微分方程的解, 则该微分方程是\_\_\_\_\_.

【参考解答】: 由解的表达式可知微分方程对应的特征方程有二重根  $r = 1$ , 故所求微分方程为

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0.$$

(2) 设有曲面  $S: z = x^2 + 2y^2$  和平面  $\pi: 2x + 2y + z = 0$ , 则与  $\pi$  平行的  $S$  的切平面方程是\_\_\_\_\_.

【参考解答】: 设  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  是  $S$  上一点, 则  $S$  在点  $P_0$  的切平面方程为  $-2x_0(x - x_0) - 4y_0(y - y_0) + (z - z_0) = 0$ . 由于该切平面与已知平面  $L$  平行, 则

$(-2x_0, -4y_0, 1)$  平行于  $(2, 2, 1)$ , 故存在常数  $k \neq 0$ , 使得  $(-2x_0, -4y_0, 1) = k(2, 2, 1)$ , 故得

$$x_0 = -1, y_0 = -\frac{1}{2}, z_0 = \frac{3}{2}, \text{ 所以切平面方程就为 } 2x + 2y + z + \frac{3}{2} = 0.$$

(3) 设  $y = y(x)$  由  $x = \int_1^{y-x} \sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) dt$  所确定, 则  $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} =$ \_\_\_\_\_.

【参考解答】: 易知  $y(0) = 1$ , 两边对变量  $x$  求导, 则

$$1 = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right)(y'-1) \Rightarrow y' = \csc^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right) + 1$$

把  $x = 0$  代入可得  $y' = 3$ .

(4) 设  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ \_\_\_\_\_.

【参考解答】:  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right], 1 - \frac{1}{(n+1)!} \rightarrow 1.$

(5) 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} =$ \_\_\_\_\_.

【参考解答】: 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$  可得  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right) = 3.$

于是  $\frac{1}{x} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right) = 3 + \alpha, \alpha \rightarrow 0 (x \rightarrow 0),$  即有  $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{e^{3x+\alpha x} - 1}{x} - 1,$  从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x+\alpha x} - 1}{x} - 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \alpha x}{x} - 1 = 2.$$

第二题: (12 分) 设  $n$  为正整数, 计算  $I = \int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| \frac{d}{dx} \cos \left( \ln \frac{1}{x} \right) \right| dx.$

**【参考解答】：**  $I = \int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| \frac{d}{dx} \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \right| dx = \int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| \frac{d}{dx} \cos(\ln x) \right| dx = \int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| \sin(\ln x) \right| \frac{1}{x} dx$

令  $\ln x = u$ ，则有  $I = \int_{-2n\pi}^0 |\sin(u)| du = \int_0^{2n\pi} |\sin t| dt = 4n \int_0^{\pi/2} |\sin t| dt = 4n$ .

**第三题：(14 分)** 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上有二阶导数，且有正常数  $A, B$  使得

$$|f(x)| \leq A, |f''(x)| \leq B, \text{ 证明：对于任意 } x \in [0,1], \text{ 有 } |f'(x)| \leq 2A + \frac{B}{2}.$$

**【参考证明】：** 由泰勒公式，有

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{f''(\xi)}{2}(0-x)^2, \xi \in (0, x)$$

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2, \eta \in (x, 1)$$

上面两式相减，得到  $f'(x) = f(1) - f(0) - \frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2 + \frac{f''(\xi)}{2}x^2$

由条件  $|f(x)| \leq A, |f''(x)| \leq B$ ，得到  $|f'(x)| \leq 2A + \frac{B}{2}[(1-x)^2 + x^2]$

由于  $(1-x)^2 + x^2$  在  $[0,1]$  的最大值为 1，所以有  $|f'(x)| \leq 2A + \frac{B}{2}$ .

**第四题：(14 分)** (1) 设一球缺高为  $h$ ，所在球半径为  $R$ 。证明该球缺的体积为

$$\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2, \text{ 球冠的面积为 } 2\pi Rh.$$

(2) 设球体  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 12$  被平面  $P: x+y+z=6$  所截的小球缺为  $\Omega$ 。记球缺上的球冠为  $\Sigma$ ，方向指向球外，求第二型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy.$$

**【参考证明】(1)：** 设球缺所在球表面方程为  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ ，球缺的中心线为  $z$  轴，且设球缺所在的圆锥顶角为  $2\alpha$ 。

记球缺的区域为  $\Omega$ ，则其体积为

$$\iiint_{\Omega} dV = \int_{R-h}^R dz \iint_{D_z} dx dy = \int_{R-h}^R \pi(R^2 - z^2) dz = \frac{\pi}{3}(3R-h)h^2.$$

由于球面的面积微元为  $dS = R^2 \sin \theta d\theta$ ，故球冠的面积为

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} R^2 \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha) = 2\pi Rh.$$

(2) 记球缺  $\Omega$  的底面圆为  $P_1$ ，方向指向球缺外，且记  $J = \iint_{P_1} x dy dz + y dz dx + z dx dy$ 。由高斯

公式，有  $I + J = \iiint_{\Omega} 3dV = 3V(\Omega)$ ，其中  $V(\Omega)$  为  $\Omega$  的体积。由于平面  $P$  的正向单位法向

量为  $\frac{-1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ ，故  $J = \frac{-1}{\sqrt{3}} \iint_{P_1} (x+y+z) dS = \frac{-6}{\sqrt{3}} \sigma(P_1) = -2\sqrt{3}\sigma(P_1)$ ，

其中  $\sigma(P_1)$  为  $P_1$  的面积。故  $I = 3V(\Omega) - J = 3V(\Omega) + 2\sqrt{3}\sigma(P_1)$ 。

因为球缺底面圆心为  $Q(2,2,2)$ ，而球缺的顶点为  $D(3,3,3)$ ，故球缺的高度为



$h = |QD| = \sqrt{3}$ . 再由(1)所证并代入  $h = \sqrt{3}$  和  $R = 2\sqrt{3}$  得

$$I = 3 \cdot \frac{\pi}{3} (3R - h) h^2 + 2\sqrt{3}\pi (2Rh - h^2) = 33\sqrt{3}\pi.$$

**第五题：(15 分)** 设  $f$  在  $[a, b]$  上非负连续，严格单增，且存在  $x_n \in [a, b]$  使得

$$[f(x_n)]^n = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^n dx, \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

**【参考解答】**：考虑特殊情形： $a = 0, b = 1$ 。下面证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ 。

首先， $x_n \in [0, 1]$ ，即  $x_n \leq 1$ ，只要证明  $\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon < 1)$ ， $\exists N, \forall n > N$  时， $1 - \varepsilon < x_n$ 。由  $f$  在  $[0, 1]$  上严格单增，就是要证明  $f^n(1 - \varepsilon) < [f(x_n)]^n = \int_0^1 [f(x)]^n dx$ 。

由于  $\forall c \in (0, 1)$ ，有  $\int_c^1 [f(x)]^n dx > f^n(c)(1 - c)$ 。取  $c = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ ，则  $f(1 - \varepsilon) < f(c)$ ，即  $\frac{f(1 - \varepsilon)}{f(c)} < 1$ ，于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(1 - \varepsilon)}{f(c)} \right]^n = 0$ ，所以  $\exists N, \forall n > N$  时有  $\left[ \frac{f(1 - \varepsilon)}{f(c)} \right]^n < \frac{\varepsilon}{2} = 1 - c$ 。即

$$f^n(1 - \varepsilon) < [f(c)]^n (1 - c) \leq \int_c^1 [f(x)]^n dx \leq \int_0^1 [f(x)]^n dx = f^n(x_n).$$

从而  $1 - \varepsilon < x_n$ ，由  $\varepsilon$  的任意性得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ 。

再考虑一般情形。令  $F(t) = f(a + t(b - a))$ ，由  $f$  在  $[a, b]$  上非负连续，严格单增，知  $F$  在  $[0, 1]$  上非负连续，严格单增。从而  $\exists t_n \in [0, 1]$ ，使得  $F^n(t_n) = \int_0^1 F^n(t) dt$ ，且  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$ 。即

$$f^n(a + t_n(b - a)) = \int_0^1 f^n(a + t(b - a)) dt.$$

记  $x_n = a + t_n(b - a)$ ，则有  $[f(x_n)]^n = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^n dx$ ，且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a + (b - a) = b$ 。

**第六题：(15 分)** 设  $A_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2}$ ，求  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{\pi}{4} - A_n \right)$ 。

**【参考解答】**：令  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ，因  $A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+i^2/n^2}$ ，所以有  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}$ 。

记  $x_i = \frac{i}{n}$ ，则  $A_n = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i) dx$ ，故  $J_n = n \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)] dx$ 。

由拉格朗日中值，存在  $\zeta_i \in (x_{i-1}, x_i)$  使得  $J_n = n \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\zeta_i)(x - x_i) dx$ 。

记  $m_i, M_i$  分别是  $f'(x)$  在  $[x_{i-1}, x_i]$  上的最大值和最小值，则  $m_i \leq f'(\zeta_i) \leq M_i$ ，故积分

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\zeta_i)(x - x_i) dx \text{ 介于 } m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) dx, M_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) dx$$

之间，所以存在  $\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$  使得  $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\zeta_i)(x - x_i) dx = -f'(\eta_i)(x_i - x_{i-1})^2 / 2$ 。

于是，有  $J_n = -\frac{n}{2} \sum_{i=1}^n f'(\eta_i)(x_i - x_{i-1})^2 = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n f'(\eta_i)$ 。从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{\pi}{4} - A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = -\frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) dx = -\frac{1}{2} [f(1) - f(0)] = \frac{1}{4}.$$

## 2015 年第七届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）

### 试卷及参考答案

#### 一、填空题（共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

(1) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n^2 + 1} + \frac{\sin 2 \frac{\pi}{n}}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n^2 + n} \right)$ .

【参考解答】：由于  $\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n + \frac{i}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)\pi} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi}.$$

所以由夹逼准则，可得原极限为  $\frac{2}{\pi}$ .

(2) 设  $z = z(x, y)$  由方程  $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$  所决定，其中  $F(u, v)$  具有连续偏导数，

且  $xF_u + yF_v \neq 0$ ，则（结果要求不显含有  $F$  及其偏导数）  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【参考解答】：对等式两端关于  $x, y$  分别求偏导数，有

$$\left(1 + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial x}\right) F_u + \left(\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{z}{x^2}\right) F_v = 0 \Rightarrow x \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(zF_v - x^2 F_u)}{xF_u + yF_v},$$

类似可得  $y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(zF_u - y^2 F_v)}{xF_u + yF_v}$ ，于是有

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-xy(xF_u + yF_v) + z(xF_u + yF_v)}{xF_u + yF_v} = z - xy.$$

(3) 曲面  $z = x^2 + y^2 + 1$  在点  $M(1, -1, 3)$  的切平面与曲面  $z = x^2 + y^2$  所围区域的体积为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

【参考解答】：曲面  $z = x^2 + y^2 + 1$  在点  $M(1, -1, 3)$  切平面：

$$2(x-1) - 2(y+1) - (z-3) = 0, \text{ 即 } z = 2x - 2y - 1.$$

联立  $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 2x - 2y - 1. \end{cases}$  所围区域在  $xOy$  面上的投影  $D$  为：

$$D = \{(x, y) | (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 1\},$$

所求体积为

$$V = \iint_D [(2x - 2y - 1) - (x^2 + y^2)] d\sigma = \iint_D [1 - (x-1)^2 - (y+1)^2] d\sigma$$

令  $x-1 = r \cos t, y+1 = r \sin t$ ，则原积分为

$$V = \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 (1-r^2) r dr = \frac{\pi}{2}.$$

(4) 函数  $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [-5, 0), \\ 0, & x \in [0, 5) \end{cases}$  在  $(-5, 5]$  的傅里叶级数  $x=0$  收敛的值\_\_\_\_\_.

【参考解答】：由狄利克雷收敛定理，容易得到  $s(0) = \frac{3}{2}$ .

(5) 设区间  $(0, +\infty)$  上的函数  $u(x)$  定义为  $u(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$ ，则  $u(x)$  的初等函数表达式为\_\_\_\_\_.

【参考解答】：由于  $u^2(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt \int_0^{+\infty} e^{-xs^2} ds = \iint_{s \geq 0, t \geq 0} e^{-x(t^2+s^2)} ds dt$

$$\text{所以 } u^2(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-x\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{4x} \int_0^{+\infty} e^{-x\rho^2} d(x\rho^2) = -\frac{\pi}{4x} e^{-x\rho^2} \Big|_{\rho=0}^{\rho=+\infty} = \frac{\pi}{4x}.$$

$$\text{所以有 } u(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

第二题：(12分) 设  $M$  是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程。

【参考解答】：显然  $O(0,0,0)$  为  $M$  的顶点，

$A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$  在  $M$  上。由三点决定的平面  $x+y+z=1$  与球面  $x^2+y^2+z^2=1$  的交线  $L$  是  $M$  的准线。

设  $P(x,y,z)$  是  $M$  上的点， $(u,v,w)$  是  $M$  的母线  $OP$  与  $L$  的交点，则  $OP$  的方程为

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w} = \frac{1}{t}, \text{ 即 } u = xt, v = yt, z = zt.$$

代入准线方程，得  $\begin{cases} (x+y+z)t = 1, \\ (x^2+y^2+z^2)t^2 = 1 \end{cases}$  消去  $t$ ，得圆锥面  $M$  的方程为  $xy + yz + zx = 0$ .

第三题：(12分) 设  $f(x)$  在  $(a,b)$  内二次可导，且存在常数  $\alpha, \beta$ ，使得对于  $\forall x \in (a,b)$ ，有  $f'(x) = \alpha f(x) + \beta f''(x)$ ，则  $f(x)$  在  $(a,b)$  内无穷次可导。

【参考证明】：1. 若  $\beta = 0$ 。对于  $\forall x \in (a,b)$ ，有

$$f'(x) = \alpha f(x), f''(x) = \alpha f'(x) = \alpha^2 f(x), \dots, f^{(n)}(x) = \alpha^n f(x).$$

从而  $f(x)$  在  $(a,b)$  内无穷次可导。

2. 若  $\beta \neq 0$ 。对于  $\forall x \in (a,b)$ ，有

$$f'(x) = \frac{f'(x) - \alpha f(x)}{\beta} = A_1 f'(x) + B_1 f(x), \quad (1)$$

$$\text{其中 } A_1 = \frac{1}{\beta}, B_1 = \frac{\alpha}{\beta}.$$

因为(1)右端可导，从而有

$$f'''(x) = A_1 f''(x) + B_1 f'(x).$$

设  $f^{(n)}(x) = A_1 f^{(n-1)}(x) + B_1 f^{(n-2)}(x), n > 1$ ，则  $f^{(n+1)}(x) = A_1 f^{(n)}(x) + B_1 f^{(n-1)}(x)$ .

所以  $f(x)$  在  $(a,b)$  内无穷次可导。

**第四题：(14 分)**求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + 2}{(n+1)!} (x-1)^n$  的收敛域与和函数.

**【参考解答】**：因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + 2}{(n+1)(n^3 + 2)} = 0$ . 所以收敛半径为  $R = +\infty$ , 即收敛域为

$(-\infty, +\infty)$ . 由

$$\frac{n^3 + 2}{(n+1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n)!} + \frac{1}{(n+1)!} \quad (n \geq 2)$$

及幂级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n-2)!}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n)!}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$  的收敛域都为  $(-\infty, +\infty)$ , 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + 2}{(n+1)!} (x-1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n-2)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$$

用  $S_1(x), S_2(x), S_3(x)$  分别表示上式右端三个幂级数的和, 依据  $e^x$  的幂级数展开式可得到

$$S_1(x) = (x-1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} = (x-1)^2 e^{x-1}, \quad S_2(x) = e^{x-1},$$

$$(x-1)S_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} = e^{x-1} - 1,$$

当  $x \neq 1$  时, 有  $S_3(x) = \frac{e^{x-1} - 1}{x-1}$ . 又由于  $S_3(1) = 1$ .

$$\text{综合以上讨论, 最终幂级数的和函数为 } S(x) = \begin{cases} (x^2 - 2x + 2)e^{x-1} + \frac{1}{x-1}(e^{x-1} - 1), & x \neq 1, \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

**第五题：(16 分)**设函数  $f$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ ,  $\int_0^1 xf(x) dx = 1$ . 试证:

(1)  $\exists x_0 \in [0, 1]$  使得  $|f(x_0)| > 4$ ; (2)  $\exists x_1 \in [0, 1]$  使得  $|f(x_1)| = 4$ .

**【参考证明】**: (1) 若  $\forall x \in [0, 1], |f(x)| \leq 4$ , 则

$$1 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f(x) dx \leq \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| |f(x)| dx \leq 4 \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| dx = 1.$$

因此  $\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| |f(x)| dx = 1$ . 而  $4 \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| dx = 1$ , 故  $\int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| (4 - |f(x)|) dx = 0$ . 所以对于任意的  $\forall x \in [0, 1], |f(x)| = 4$ , 由连续性知  $f(x) \equiv 4$  或  $f(x) \equiv -4$ . 这与条件  $\int_0^1 f(x) dx = 0$  矛盾. 所以  $\exists x_0 \in [0, 1]$  使得  $|f(x_0)| > 4$ .

(2) 先证  $\exists x_2 \in [0, 1]$  使得  $|f(x_2)| < 4$ . 若不然, 对于  $\forall x \in [0, 1], |f(x)| \geq 4$  成立, 则  $f(x) \geq 4$  或  $f(x) \leq -4$  恒成立, 与  $\int_0^1 f(x) dx = 0$  矛盾.

再由  $f(x)$  的连续性及(1)的结果, 利用介值定理, 可得  $\exists x_1 \in [0, 1]$  使得  $|f(x_1)| = 4$ .

**第六题：(16 分)**设  $f(x, y)$  在  $x^2 + y^2 \leq 1$  上有连续的二阶导数,  $f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 \leq M$ .

若  $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ , 证明:  $\left| \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x,y) dx dy \right| \leq \frac{\pi\sqrt{M}}{4}.$

【参考证明】: 在点  $(0,0)$  展开  $f(x,y)$  得

$$f(x,y) = \frac{1}{2} \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(\theta x, \theta y) = \frac{1}{2} \left( x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(\theta x, \theta y)$$

其中  $\theta \in (0,1)$ 。

$$\text{记 } (u,v,w) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(\theta x, \theta y), \text{ 则 } f(x,y) = \frac{1}{2} (ux^2 + 2vxy + wy^2).$$

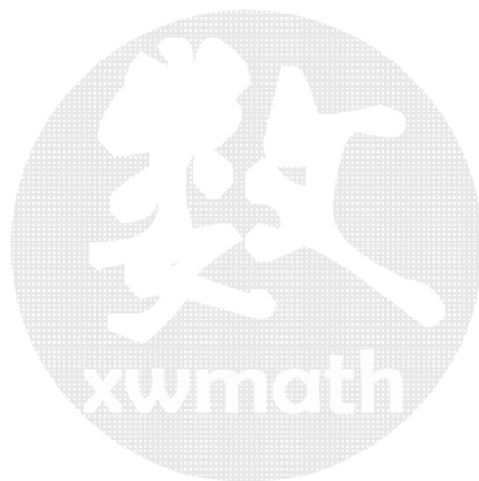
由于  $\|(u, \sqrt{2}u, w)\| = \sqrt{u^2 + 2v^2 + w^2} \leq \sqrt{M}$  以及  $\|(x^2, \sqrt{2}xy, y^2)\| = x^2 + y^2$ , 于是有

$$\left| (u, \sqrt{2}u, w) \cdot (x^2, \sqrt{2}xy, y^2) \right| \leq \sqrt{M} (x^2 + y^2),$$

即  $|f(x,y)| \leq \frac{1}{2} \sqrt{M} (x^2 + y^2)$ . 从而

$$\left| \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x,y) dx dy \right| \leq \frac{\sqrt{M}}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\pi\sqrt{M}}{4}.$$

考研竞赛数学(xwmath)



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)



## 2016 年第八届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）

### 试卷及参考答案

#### 一、填空题(满分 30 分，每小题 5 分)

1. 若  $f(x)$  在点  $x = a$  处可导，且  $f(a) \neq 0$ ，则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(a + 1/n)}{f(a)} \right]^n = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【参考解答】：由于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(a + \frac{1}{x})}{f(a)} \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{f(a+x)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{x}}$ ，由已知条件： $f(x)$  在点  $x = a$  处

可导，且  $f(a) \neq 0$ ，由带皮亚诺余项的泰勒公式，有

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

可得  $f(a+x) = f(a) + f'(a)x + o(x)$ ，将其代入极限式，则有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{f(a+x)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{f(a) + f'(a)x + o(x)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ 1 + \left( \frac{f'(a)}{f(a)}x + o(x) \right) \right]^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{f'(a)}{f(a)}x + o(x) \right) \right]^{\frac{1}{\left( \frac{f'(a)}{f(a)}x + o(x) \right)}} \right\}^{\frac{1}{x} \left[ \frac{f'(a)}{f(a)}x + o(x) \right]} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(a)}{f(a)} \left[ 1 + \frac{o(x)}{x} \right]} = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}. \end{aligned}$$

2. 若  $f(1) = 0, f'(1)$  存在，则极限  $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) \tan 3x}{(e^{x^2} - 1) \sin x} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【参考解答】： $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) \cdot 3x}{x^2 \cdot x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{x^2}$   
 $= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) - f(1)}{\sin^2 x + \cos x - 1} \cdot \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2}$   
 $= 3f'(1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2} = 3f'(1) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{\cos x - 1}{x^2} \right)$   
 $= 3f'(1) \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} f'(1).$

3. 设  $f(x)$  有连续导数，且  $f(1) = 2$ 。记  $z = f(e^x y^2)$ ，若  $\frac{\partial z}{\partial x} = z$ ， $f(x)$  在  $x > 0$  的表达式为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

【参考解答】：由题设，得  $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(e^x y^2) e^x y^2 = f(e^x y^2)$ 。令  $u = e^x y^2$ ，得到当  $u > 0$ ，有  $f'(u)u = f(u)$ ，即



$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{1}{u} \Rightarrow (\ln f(u))' = (\ln u)'$$

所以有  $\ln f(u) = \ln u + C_1$ ,  $f(u) = Cu$ . 再由初值条件  $f(1) = 2$ , 可得  $C = 2$ , 即  $f(u) = 2u$ .  
所以当  $x > 0$  时, 有  $f(x) = 2x$ .

4. 设  $f(x) = e^x \sin 2x$ , 则  $f^{(4)}(0) =$  \_\_\_\_\_.

【参考解答】: 由带皮亚诺余项的麦克劳林公式, 有

$$f(x) = \left[ 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \right] \cdot \left[ 2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + o(x^4) \right]$$

所以  $f(x)$  展开式的 4 次项为  $-\frac{1}{3!}(2x^3) \cdot x + \frac{2}{3!}x^4 = -x^4$ , 即有

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -1, \text{ 故 } f^{(4)}(0) = -24.$$

5. 曲面  $z = \frac{x^2}{2} + y^2$  平行于平面  $2x + 2y - z = 0$  的切平面方程为 \_\_\_\_\_.

【参考解答】: 移项, 曲面的一般式方程为  $F(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + y^2 - z = 0$ , 有

$$\vec{n}(x, y, z) = (F'_x, F'_y, F'_z) = (x, 2y, -1).$$

$$\vec{n}(x, y, z) / |\vec{n}_1| \Rightarrow (x, 2y, -1) / (2, 2, -1),$$

可得  $\frac{x}{2} = \frac{2y}{2} = \frac{-1}{-1}$ . 由此可得  $x = 2, y = 1$ , 将它代入到曲面方程, 可得  $z = 3$ , 即曲面上点  $(2, 1, 3)$  处切平面与已知平面平行, 所以由平面的点法式方程可得切平面方程为

$$2(x-2) + 2(y-1) - (z-3) = 0, \text{ 即 } 2x + 2y - z = 3.$$

第二题: (14 分) 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上可导,  $f(0) = 0$ , 且当  $x \in (0, 1)$ ,  $0 < f'(x) < 1$ . 试

证: 当  $a \in (0, 1)$  时, 有  $\left( \int_0^a f(x) dx \right)^2 > \int_0^a f^3(x) dx$ .

【参考解答】: 不等式的证明转换为证明不等式  $\left( \int_0^a f(x) dx \right)^2 - \int_0^a f^3(x) dx > 0$ . 于是对函数

$$\text{求导, } F'(x) = 2f(x) \int_0^x f(t) dt - f^3(x) = 2f(x) \left( \int_0^x f(t) dt - f^2(x) \right)$$

已知条件  $f(0) = 0$ , 可得  $F'(0) = 0$ , 并且由  $0 < f'(x) < 1$ , 所以函数  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内单调增加, 即  $f(x) > 0$ , 所以只要证明  $g(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x) > 0$ .

又  $g(0) = 0$ , 所以只要证明  $g'(x) > 0$ , 于是有

$$g'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)[1 - f'(x)] > 0$$

所以  $g(x)$  单调增加, 所以  $g(x) > 0, x > 0$ . 所以也就有  $g(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x) > 0$ , 即

$F'(x) > 0$ , 可得  $F(x) > 0$ , 因此  $F(x) = \left( \int_0^x f(t) dt \right)^2 - \int_0^x f^3(t) dt$  单调增加, 所以  $F(a) > F(0) = 0$ , 即有

$$F(a) = \left( \int_0^a f(t) dt \right)^2 - \int_0^a f^3(t) dt > 0 \Rightarrow \left( \int_0^a f(t) dt \right)^2 > \int_0^a f^3(t) dt.$$

**第三题：(14 分)** 某物体所在的空间区域为  $\Omega: x^2 + y^2 + 2z^2 \leq x + y + 2z$ ，密度函数为  $x^2 + y^2 + z^2$ ，求质量  $M = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ .

**【参考解答】**：令  $u = x - \frac{1}{2}, v = y - \frac{1}{2}, w = \sqrt{2} \left( z - \frac{1}{2} \right)$ ，即

$$x = u + \frac{1}{2}, y = v + \frac{1}{2}, z = \frac{w}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2},$$

则椭球面转换为变量为  $u, v, w$  的单位球域，即  $\Omega_{uvw}: u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$ 。则由三重积分的换元公式，即

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \iiint_{\Omega_{uvw}} F(u, v, w) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw. \\ F(u, v, w) &= \left( u + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( v + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{w}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right)^2 = u^2 + u + v^2 + v + \frac{w^2}{2} + \frac{w}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \\ \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

所以原积分就等于

$$M = \iiint_{\Omega_{uvw}} \left( u^2 + u + v^2 + v + \frac{w^2}{2} + \frac{w}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} du dv dw$$

由于单元圆域  $\Omega_{uvw}: u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$  关于三个坐标面都对称，所以积分也就等于

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \iiint_{\Omega_{uvw}} \left( u^2 + v^2 + \frac{w^2}{2} \right) du dv dw + \frac{3}{4\sqrt{2}} \iiint_{\Omega_{uvw}} du dv dw$$

$$\text{其中 } \frac{3}{4\sqrt{2}} \iiint_{\Omega_{uvw}} du dv dw = \frac{3}{4\sqrt{2}} \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

由于积分区域具有轮换对称性，所以有

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_{uvw}} u^2 du dv dw &= \iiint_{\Omega_{uvw}} v^2 du dv dw = \iiint_{\Omega_{uvw}} w^2 du dv dw \\ \iiint_{\Omega_{uvw}} \left( u^2 + v^2 + \frac{w^2}{2} \right) du dv dw &= \frac{5}{2} \iiint_{\Omega_{uvw}} u^2 du dv dw = \frac{5}{6} \iiint_{\Omega_{uvw}} (u^2 + v^2 + w^2) du dv dw \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \iiint_{\Omega_{uvw}} \left( u^2 + v^2 + \frac{w^2}{2} \right) du dv dw &= \frac{5}{6\sqrt{2}} \iiint_{\Omega_{uvw}} (u^2 + v^2 + w^2) du dv dw \\ &= \frac{5}{6\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{5}{6\sqrt{2}} \cdot 2\pi \cdot [-\cos \varphi]_0^{\pi} \cdot \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{5\pi}{3\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{\sqrt{2}\pi}{3} \end{aligned}$$

所以最终的结果就为  $M = \frac{\sqrt{2}\pi}{3} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{3} + \frac{\sqrt{2}\pi}{2} = \frac{5\sqrt{2}\pi}{6}$ .

**第四题：(14 分)** 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上具有连续导数， $f(0) = 0, f(1) = 1$ . 证明：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = -\frac{1}{2}.$$

**【参考解答】**：将区间  $[0, 1]$   $n$  等份，分点  $x_k = \frac{k}{n}$ ，则  $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ ，且

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(x_k)] dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} (x - x_k) dx \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sum_{k=1}^n \frac{f(\xi_k) - f(x_k)}{\xi_k - x_k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_k) dx \right), \xi_k \in (x_{k-1}, x_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sum_{k=1}^n f'(\eta_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_k) dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sum_{k=1}^n f'(\eta_k) \left[ -\frac{1}{2} (x_k - x_{k-1})^2 \right] \right) \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n f'(\eta_k) (x_k - x_{k-1}) \right) = -\frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) dx = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**第五题：(14 分)** 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续，且  $I = \int_0^1 f(x) dx \neq 0$ . 证明：在  $(0, 1)$

内存在不同的两点  $x_1, x_2$ ，使得  $\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} = \frac{2}{I}$ .

**【参考解答】**：设  $F(x) = \frac{1}{I} \int_0^x f(t) dt$ ，则  $F(0) = 0, F(1) = 1$ . 由介值定理，存在  $\xi \in (0, 1)$ ，使得  $F(\xi) = \frac{1}{2}$ . 在两个子区间  $(0, \xi), (\xi, 1)$  上分别应用拉格朗日中值定理：

$$\begin{aligned} F'(x_1) &= \frac{f(x_1)}{I} = \frac{F(\xi) - F(0)}{\xi - 0} = \frac{1/2}{\xi}, x_1 \in (0, \xi), \\ F'(x_2) &= \frac{f(x_2)}{I} = \frac{F(1) - F(\xi)}{1 - \xi} = \frac{1/2}{1 - \xi}, x_2 \in (\xi, 1), \\ \frac{I}{f(x_1)} + \frac{I}{f(x_2)} &= \frac{1}{F'(x_1)} + \frac{1}{F'(x_2)} = \frac{\xi}{1/2} + \frac{1 - \xi}{1/2} = 2. \end{aligned}$$

**第六题：(14 分)** 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可导，且  $f(x) = f(x+2) = f(x+\sqrt{3})$ ，用傅里叶(Fourier)级数理论证明  $f(x)$  为常数。

**【参考解答】**：由  $f(x) = f(x+2) = f(x+\sqrt{3})$  可知， $f$  是以  $2, \sqrt{3}$  为周期的函数，所以它的傅里叶系数为

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x dx, b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x dx$$

由于  $f(x) = f(x+\sqrt{3})$ ，所以

$$\begin{aligned}
 a_n &= \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x dx = \int_{-1}^1 f(x + \sqrt{3}) \cos n\pi x dx \\
 &= \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t) \cos n\pi(t - \sqrt{3}) dt \\
 &= \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t) [\cos n\pi t \cos \sqrt{3}n\pi + \sin n\pi t \sin \sqrt{3}n\pi] dt \\
 &= \cos \sqrt{3}n\pi \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t) \cos n\pi t dt + \sin \sqrt{3}n\pi \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t) \sin n\pi t dt \\
 &= \cos \sqrt{3}n\pi \int_{-1}^1 f(t) \cos n\pi t dt + \sin \sqrt{3}n\pi \int_{-1}^1 f(t) \sin n\pi t dt
 \end{aligned}$$

所以  $a_n = a_n \cos \sqrt{3}n\pi + b_n \sin \sqrt{3}n\pi$  ; 同理可得

$$b_n = b_n \cos \sqrt{3}n\pi - a_n \sin \sqrt{3}n\pi .$$

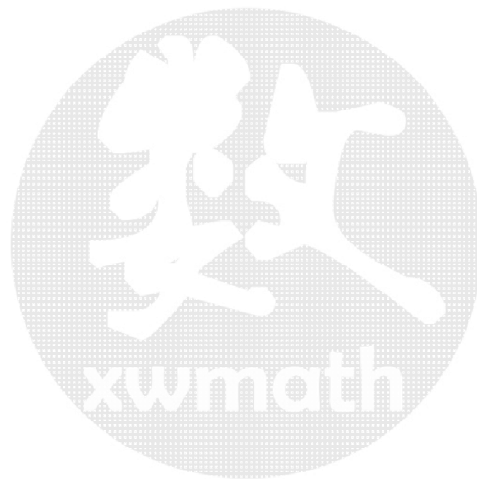
联立, 有

$$\begin{cases} a_n = a_n \cos \sqrt{3}n\pi + b_n \sin \sqrt{3}n\pi \\ b_n = b_n \cos \sqrt{3}n\pi - a_n \sin \sqrt{3}n\pi \end{cases}$$

得  $a_n = b_n = 0 (n=1, 2, \dots)$ . 而  $f$  可导, 其 Fourier 级数处处收敛于  $f(x)$ , 所以有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} ,$$

其中  $a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx$  为常数.



微信公众号:

考研竞赛数学(xwmath)

## 2017 年第九届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）

### 试卷及参考答案

#### 一、填空题（本题 42 分，共 6 小题，每小题 7 分）

1. 已知可导函数  $f(x)$  满足  $f(x) \cos x + 2 \int_0^x f(t) \sin t \, dt = x + 1$ ，则  $f(x) =$ \_\_\_\_\_。

【参考解答】：首先令  $x = 0$ ，则由等式可得  $f(0) = 1$ ；对等式两端求导数，则有

$$f'(x) \cos x - f(x) \sin x + 2f(x) \sin x = 1$$

$$\Rightarrow f'(x) \cos x + f(x) \sin x = 1$$

$$\Rightarrow f'(x) + f(x) \tan x = \sec x$$

这是一个非齐次的一阶线性微分方程，由计算公式可得

$$f(x) = e^{-\int \tan x \, dx} \left( \int \sec x e^{\int \tan x \, dx} \, dx + C \right)$$

$$= e^{\ln \cos x} \left( \int \frac{1}{\cos x} e^{-\ln \cos x} \, dx + C \right)$$

$$= \cos x \left( \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx + C \right)$$

$$= \cos x (\tan x + C) = \sin x + C \cos x$$

代入初值  $f(0) = 1$ ，得  $C = 1$ ，所以  $f(x) = \cos x + \sin x$ 。只要求出满足条件的  $f(x)$  即可，并没有求出所有满足条件的函数。只要满足条件的  $f(x)$  都为所求的函数。

2. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left( \pi \sqrt{n^2 + n} \right) =$ \_\_\_\_\_。

【参考解答】：与第五届第一题差不多，基本思路应该一致，并且由于有平方，所以直接由正弦函数公式

$$\sin(n\pi + x) = \pm \sin x \Rightarrow \sin^2(n\pi + x) = \sin^2 x,$$

$$\Rightarrow \sin^2(x - n\pi) = \sin^2 x, n \in \mathbb{Z}$$

于是有

$$\sin^2 \left( \pi \sqrt{n^2 + n} \right) = \sin^2 \left( \pi \sqrt{n^2 + n} - n\pi \right)$$

$$= \sin^2 \pi \left( \sqrt{n^2 + n} - n \right) = \sin^2 \frac{n\pi}{\sqrt{n^2 + n} + n}$$

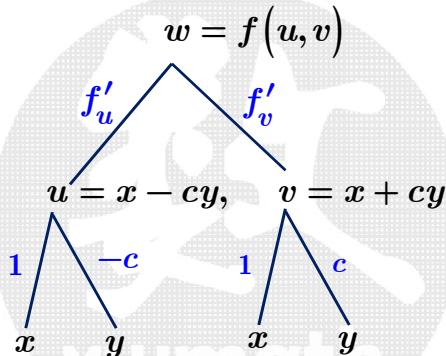
所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left( \pi \sqrt{n^2 + n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{n\pi}{\sqrt{n^2 + n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{n\pi}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1.$$

3. 设  $w = f(u, v)$  具有二阶连续偏导数, 且  $u = x - cy, v = x + cy$ , 其中  $c$  为非零常数, 则  $w_{xx} - \frac{1}{c^2}w_{yy} =$  \_\_\_\_\_。

【参考解答】：这样类型的问题在各阶试题中都有, 并且在最后发布第三届解题试题时特别强调, 多元复合函数求导的重要性; 而且这里的复合结构是已知的, 所以直接有变量关系图。



由复合函数求导数, 有变量关系图。于是有  $w_x = f'_u + f'_v, w_y = -cf'_u + cf'_v$ ; 由于连个偏导数仍然具有与原函数函数相同的复合结构, 所以对上面的导函数继续求导, 则有

$$\begin{aligned} w_{xx} &= (f'_u)'_x + (f'_v)'_x = f''_{uu} + f''_{uv} + f''_{vu} + f''_{vv} = f''_{uu} + 2f''_{uv} + f''_{vv}, \\ w_{yy} &= -c(f'_u)'_y + c(f'_v)'_y \\ &= -c[-cf''_{uu} + cf''_{uv}] + c[-cf''_{vu} + cf''_{vv}] \\ &= c^2[f''_{uu} - f''_{uv} - f''_{vu} + f''_{vv}] = c^2[f''_{uu} - 2f''_{uv} + f''_{vv}] \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} w_{xx} - \frac{1}{c^2}w_{yy} &= f''_{uu} + 2f''_{uv} + f''_{vv} - \frac{1}{c^2}[c^2(f''_{uu} - 2f''_{uv} + f''_{vv})] \\ &= f''_{uu} + 2f''_{uv} + f''_{vv} - (f''_{uu} - 2f''_{uv} + f''_{vv}) = 4f''_{uv}. \end{aligned}$$

4. 设  $f(x)$  具有二阶连续导数, 且  $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 6$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x)}{x^4} =$  \_\_\_\_\_。

【参考解答】【解法一】在有泰勒公式应用于解题的竞赛题解析中, 特别强调了泰勒公式的两种类型适用的问题类型。这里是求极限, 并且是求自变量趋于 0 的极限; 毫无疑问, 就是用带皮亚诺余项的泰勒公式, 并且由于函数由二阶连续导数, 所以可以在 0 点可以展开为二阶带皮亚诺余项的泰勒公式, 即有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2) \\ &= 3x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

由此可得  $f(\sin^2 x) = 3\sin^4 x + o(\sin^4 x)$ , 所以将其代入可得极限为



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^4 x + o(\sin^4 x)}{x^4} = 3.$$

【解法二】洛必达法则。

5. 不定积分  $I = \int \frac{e^{-\sin x} \sin 2x}{(1 - \sin x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【参考解答】:  $I = \int \frac{e^{-\sin x} \sin 2x}{(1 - \sin x)^2} dx = \int \frac{e^{-\sin x} 2 \sin x}{(1 - \sin x)^2} d \sin x$  令  $\sin x = t$ , 则有

$$I = 2 \int \frac{te^{-t}}{(1-t)^2} dt.$$

$$\int \frac{te^{-t}}{(1-t)^2} dt = - \int \frac{e^{-t} - te^{-t} - e^{-t}}{(1-t)^2} dt$$

$$= - \int \frac{e^{-t}(1-t) - e^{-t}}{(1-t)^2} dt = - \int \frac{e^{-t}}{1-t} dt + \int \frac{e^{-t}}{(1-t)^2} dt$$

$$- \int \frac{e^{-t}}{1-t} dt = \int \frac{1}{1-t} de^{-t} = \frac{e^{-t}}{1-t} - \int e^{-t} d\left(\frac{1}{1-t}\right)$$

$$= \frac{e^{-t}}{1-t} - \int \frac{e^{-t}}{(1-t)^2} dt$$

代入上式可得  $\int \frac{te^{-t}}{(1-t)^2} dt = \frac{e^{-t}}{1-t} + C$ , 由于  $\sin x = t$ , 所以

$$I = \int \frac{e^{-\sin x} \sin 2x}{(1 - \sin x)^2} dx = \frac{2e^{-\sin x}}{1 - \sin x} + C$$

6. 记曲面  $z^2 = x^2 + y^2$  和  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  围成的空间区域为  $V$ , 则三重积分

$$\iiint_V z dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【参考解答一】由两个方程, 可得边界线方程为  $x^2 + y^2 = 2$ , 这个题目由被积函数的结构, 只包含一个变量  $z$ , 而且用平行于  $xOy$  的平面取截取立体区域, 截面都为圆, 所以考虑先二后一的截面法计算要简单。以  $z = \sqrt{2}$  作为分割面, 将区域分割成上下两部分, 则有

$$\iiint_V z dx dy dz = \iiint_{\Omega_{\text{上}}} z dx dy dz + \iiint_{\Omega_{\text{下}}} z dx dy dz$$

其中上下积分区域可以描述为

$$\Omega_{\text{上}} : \sqrt{2} \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq 4 - z^2;$$

$$\Omega_{\text{下}} : 0 \leq z \leq \sqrt{2}, x^2 + y^2 \leq z^2;$$

所以有

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_{\text{上}}} z \, dx \, dy \, dz &= \int_{\sqrt{2}}^2 z \, dz \iint_{D(x)} dx \, dy \\ &= \int_{\sqrt{2}}^2 z \left( \pi (4 - z^2) \right) dz = \int_{\sqrt{2}}^2 (4\pi z - \pi z^3) dz \\ &= \left[ 2\pi z^2 - \frac{\pi z^4}{4} \right]_{\sqrt{2}}^2 = \pi \\ \iiint_{\Omega_{\text{下}}} z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{\sqrt{2}} z \, dz \iint_{D(z)} dx \, dy \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \pi z^3 \, dz = \left[ \frac{\pi z^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = \pi \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \iiint_V z \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Omega_{\text{上}}} z \, dx \, dy \, dz + \iiint_{\Omega_{\text{下}}} z \, dx \, dy \, dz = 2\pi.$$

【参考解答二】使用球面坐标

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V z \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^2 \rho \cos \varphi \cdot \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \Big|_0^{\pi/4} \cdot \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^2 = 2\pi \end{aligned}$$

二、(本题 14 分) 设二元函数  $f(x, y)$  在平面上有连续的二阶偏导数, 对任意角度  $\alpha$ , 定义一元函数

$g_\alpha(t) = f(t \cos \alpha, t \sin \alpha)$ , 若对任何  $\alpha$  都有  $\frac{dg_\alpha(0)}{dt} = 0$  且  $\frac{d^2 g_\alpha(0)}{dt^2} > 0$ , 证明:  $f(0, 0)$  是  $f(x, y)$  的极小值。

【参考解答】根据基于二元函数极值判定极小值的充分条件, 如果函数在  $(0, 0)$  点取到极小值, 第一步, 判定梯度向量为零向量, 即  $\nabla f(0, 0) = (f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)) = \vec{0}$ ;

第二步: 判定黑塞矩阵为正定矩阵, 对于存在二阶连续偏导数的函数, 即由三个偏导数构成的矩阵

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}_{(0,0)} \text{ 为正定矩阵.}$$

如果符合这样两个前提条件, 则可以判定函数  $f(x, y)$  在原点  $(0, 0)$  取到极小值, 即  $f(0, 0)$  是  $f(x, y)$  的极小值。

下面，就依据已知条件我们来验证这样两个条件是满足的。两个步骤中需要二元函数的一阶、二阶偏导数，而已知条件是计算函数  $g_\alpha(t)$  关于  $t$  的导数，下面就来计算一下，是否会出现需要的描述形式。

根据已知条件，对函数  $g_\alpha(t)$  关于  $t$  求导数，其实又是一个复合函数求导数，令  $x = t \cos \alpha, y = t \sin \alpha$ ，绘制变量关系图，可得

$$\begin{aligned} g'_\alpha(t) &= f'_x(t \cos \alpha, t \sin \alpha) \cdot \cos \alpha + f'_y(t \cos \alpha, t \sin \alpha) \cdot \sin \alpha \\ \Rightarrow g'_\alpha(0) &= f'_x(0, 0) \cdot \cos \alpha + f'_y(0, 0) \cdot \sin \alpha = [f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)] \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha) \\ &= \left\| [f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)] \right\| \cos \theta, \theta = \left( [f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)], (\cos \alpha, \sin \alpha) \right) = 0 \end{aligned}$$

要求对于任意的任何  $\alpha$  都有  $\frac{d g_\alpha(0)}{d t} = 0$ ，则必定有

$$\left\| [f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)] \right\| = 0 \Rightarrow f'_x(0, 0) = 0, f'_y(0, 0) = 0$$

因此  $(0, 0)$  是二元函数  $f(x, y)$  的驻点。

根据已知条件，继续求二阶导数，则有

$$\begin{aligned} g''_\alpha(t) &= (f'_x)'_x \cdot \cos \alpha + (f'_y)'_x \cdot \sin \alpha \\ &= \cos \alpha [f''_{xx} \cdot \cos \alpha + f''_{xy} \cdot \sin \alpha] + \sin \alpha [f''_{yx} \cdot \cos \alpha + f''_{yy} \cdot \sin \alpha] \\ &= (\cos \alpha, \sin \alpha) \begin{pmatrix} f''_{xx} \cdot \cos \alpha + f''_{xy} \cdot \sin \alpha \\ f''_{yx} \cdot \cos \alpha + f''_{yy} \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} \\ &= (\cos \alpha, \sin \alpha) \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

则由  $\frac{d^2 g_\alpha(0)}{d t^2} > 0$ ，有

$$(\cos \alpha, \sin \alpha) \begin{pmatrix} f''_{xx}(0, 0) & f''_{xy}(0, 0) \\ f''_{yx}(0, 0) & f''_{yy}(0, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} > 0$$

由  $\alpha$  的任意性，并且向量  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  为非零向量，由此可知这是一个正定二次型，并且矩阵为实对称矩阵，所以矩阵为正定矩阵。矩阵正定，所以驻点为极小值点。

**三、(本题 14 分)** 设曲线  $\Gamma$  为曲线  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  上从点  $A(1, 0, 0)$  到点  $B(0, 0, 1)$  的一段。求曲线积分  $I = \int_{\Gamma} y dx + z dy + x dz$ 。

**【参考解答一】** 对于曲线积分，尤其是开放曲线的曲线积分，最开始应该考虑的积分计算的直接法，即写出曲线的参数方程来计算曲线积分。用连个方程消去  $z$ ，即由  $x + z = 1, z = 1 - x$  代入球面方程，则有

$$x^2 + y^2 + (1-x)^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2y^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t, y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t,$$

$$\Rightarrow z = 1 - x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t, t: 0 \rightarrow \pi$$

将它代入积分表达式, 则有

$$I = \int_0^\pi \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t \left( -\frac{1}{2}\sin t \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t \right) + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t \right) \left( \frac{1}{2}\sin t \right) \right] dt$$

$$= I = \int_0^\pi \left[ -\frac{\sqrt{2}}{4}\sin^2 t + \left( \frac{\sqrt{2}}{4}\cos t - \frac{\sqrt{2}}{4}\cos^2 t \right) + \left( \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{4}\cos t \sin t \right) \right] dt$$

$$= I = \int_0^\pi \left[ -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\cos t + \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{4}\cos t \sin t \right] dt$$

$$= -\frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4}[-\cos t]_0^\pi = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

**【参考解答二】** 记  $\Gamma_1$  为从  $B$  到  $A$  的直线段, 则

$$x = t, y = 0, z = 1 - t, 0 \leq t \leq 1,$$

$$\int_{\Gamma_1} ydx + zdz + xdz = \int_0^1 td(1-t) = -\frac{1}{2}.$$

设  $\Gamma$  和  $\Gamma_1$  围成的平面区域  $\Sigma$ , 方向按右手法则. 由 Stokes 公式得到

$$\left( \int_{\Gamma} + \int_{\Gamma_1} \right) ydx + zdz + xdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dydz + dzdx + dxdy$$

$$= -\iint_{\Sigma} dydz + dzdx + dxdy$$

右边三个积分都是  $\Sigma$  在各个坐标面上的投影面积, 而  $\Sigma$  在  $zx$  面上投影面积为零. 故

$$I + \int_{\Gamma_1} = -\iint_{\Sigma} dydz + dxdy.$$

曲线  $\Gamma$  在  $xy$  面上投影的方程为

$$\frac{(x - 1/2)^2}{(1/2)^2} + \frac{y^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1.$$

又该投影 (半个椭圆) 的面积得知  $\iint_{\Sigma} dxdy = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ . 同理,  $\iint_{\Sigma} dydz = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ . 这样就有

$$I = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

**四、(本题 15 分)** 设函数  $f(x) > 0$  且在实轴上连续, 若对任意实数  $t$ , 有  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x) dx \leq 1$ .

证明:  $\forall a, b, a < b$ , 有  $\int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a+2}{2}$ .

**【参考解答】:** 这个竞赛题是考研竞赛数学公众号每日一题栏目中发布的第 62 个题目, 完全一模一样的。下面我们也来讨论一下, 思路是怎样的。

根据题目的条件, 函数  $f(x) > 0$ , 而且自然常数为底的函数也是大于 0 的, 所以, 可以知道已知积分中的被积函数  $e^{-|t-x|} f(x) > 0$ , 并且积分区间越大, 积分值越大, 所以由原积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x) dx \leq 1$ , 当然也就可以得到  $\forall a, b (a < b)$ ,

$$\int_a^b e^{-|t-x|} f(x) dx \leq 1.$$

右边要出现  $b-a$  的表达式, 于是由积分的保序性, 两边同时关于  $t$  变量在  $[a, b]$  积分, 可得

$$\int_a^b \left[ \int_a^b e^{-|t-x|} f(x) dx \right] dt \leq b-a.$$

左边就是一个先对  $x$  后对  $t$  积分的二重积分的累次积分表达式, 对于它的操作, 好像就积分而言不能执行什么有效的处理。但是, 看到二重积分的累次积分表达式, 可以尝试性的考虑交换积分次序, 即先对  $t$  求积分, 再对  $x$  积分, 于是左边的累次积分也就等于

$$\int_a^b \left[ \int_a^b e^{-|t-x|} f(x) dx \right] dt = \int_a^b \left[ f(x) \int_a^b e^{-|t-x|} dt \right] dx$$

里面对  $t$  积分, 应该就是属于可以计算的了。只要考虑将绝对值去掉就可以了。由于在积分中对  $x$  在  $[a, b]$  区间上积分, 所以  $x$  夹在  $a, b$  之间, 因此以  $x$  作为区间的分割点, 则有

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{-|t-x|} dt &= \int_a^x e^{t-x} dt + \int_x^b e^{x-t} dt \\ &= \left[ e^{t-x} \right]_a^x + \left[ -e^{x-t} \right]_x^b = 1 - e^{a-x} - e^{x-b} + 1 = 2 - e^{a-x} - e^{x-b} \end{aligned}$$

所以上面的不等式等价于

$$\int_a^b \left[ f(x) (2 - e^{a-x} - e^{x-b}) \right] dx \leq b-a.$$

将左边拆开, 则有

$$\int_a^b \left[ f(x) (2 - e^{a-x} - e^{x-b}) \right] dx = 2 \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \left[ f(x) e^{a-x} \right] dx - \int_a^b \left[ f(x) e^{x-b} \right] dx \leq b-a.$$

$$\text{即 } \int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2} \int_a^b \left[ f(x) e^{a-x} \right] dx + \frac{1}{2} \int_a^b \left[ f(x) e^{x-b} \right] dx$$

这样, 再由已知条件, 并且有  $t$  的任意性, 可以将右边的两个积分改写成

$$\int_a^b e^{a-x} f(x) dx = \int_a^b e^{-|x-a|} f(x) dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-a|} f(x) dx \leq 1$$

因为  $x$  属于  $(-\infty, +\infty)$  都有积分小于等于 1, 所以同理可得  $\int_a^b e^{x-b} f(x) dx \leq 1$ .



$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{2} + 1.$$

这就是这个竞赛题的解题过程。

五、(本题 15 分) 设  $\{a_n\}$  为一个数列,  $p$  为固定的正整数, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda$ . 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}.$$

【参考证明】对于  $i = 0, 1, \dots, p-1$ , 记

$$A_n^{(i)} = a_{(n+1)p+i} - a_{np+i}.$$

由题设  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{(i)} = \lambda$ , 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \dots + A_n^{(i)}}{n} = \lambda.$$

而  $A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \dots + A_n^{(i)} = a_{(n+1)p+i} - a_{p+i}$ . 由题设知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{n} \cdot \frac{n}{(n+1)p+i} = \frac{\lambda}{p}$$

对正整  $m$ , 设  $m = np + i$ , 其中  $0, 1, \dots, p-1$ , 从而可以把正整数依照  $i$  分为  $p$  个子列类。考虑任何

这样的子列, 下面极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i} = \frac{\lambda}{p}$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m}{m} = \frac{\lambda}{p}$ .

## 第十届全国大学生数学竞赛试卷 (非数学类, 2018 年 10 月)

### 一、填空题 (本题满分 24 分, 共 4 小题, 每小题 6 分)

(1) 设  $\alpha \in (0, 1)$ , 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ (n+1)^\alpha - n^\alpha \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

**【参考解析】: 【思路一】** 因为  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha < 1 + \frac{1}{n}$ , 所以

$$0 < (n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \right] < n^\alpha \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = \frac{1}{n^{1-\alpha}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

所以由夹逼准则可得  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ (n+1)^\alpha - n^\alpha \right] = 0.$

**【思路二】**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ (n+1)^\alpha - n^\alpha \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x^\alpha}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha x}{x^\alpha} = \alpha \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-\alpha} = 0.$$

(2) 若曲线  $y = y(x)$  由  $\begin{cases} x = t + \cos t \\ e^y + ty + \sin t = 1 \end{cases}$  确定, 则此曲线在  $t = 0$  对应点处的切线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

**【参考解析】:** 当  $t = 0$  时,  $x = 1$  且  $e^y = 1$ , 即  $y = 0$ , 即求点  $(1, 0)$  处曲线  $y = y(x)$  的切线方程. 在方程组两端对  $t$  求导, 得

$$\begin{cases} x'(t) = 1 - \sin t \\ e^y \cdot y'(t) + y + ty'(t) + \cos t = 0 \end{cases}$$

将  $t = 0, y = 0$  代入方程, 得  $x'(0) = 1, y'(0) = -1$ , 所以  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \frac{y'(0)}{x'(0)} = -1$ , 所

以切线方程为  $y - 0 = (-1)(x - 1)$ , 即  $y = -x + 1$ .

(3)  $\int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

**【参考解析】: 【思路一】** 典型三角代换结构  $\sqrt{1+x^2}$ , 令  $x = \tan t, dx = \sec^2 t dt$ , 所以

$$F(x) = \int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \int \frac{\ln(\sec t + \tan t)}{\sec t} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \ln(\sec t + \tan t) d(\sin t) = \sin t \ln(\sec t + \tan t) - \int \frac{\sin t}{\cos t} dt \\
 &= \sin t \ln(\sec t + \tan t) + \ln |\cos t| + C
 \end{aligned}$$

由于  $\tan t = \frac{x}{1}$ , 所以  $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ,  $\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ,  $\sec t = \sqrt{1+x^2}$ , 代入得原积分为

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(\sqrt{1+x^2} + x) + \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C \\
 &\text{或 } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(\sqrt{1+x^2} + x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C
 \end{aligned}$$

**【思路二】** 
$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
 &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{x^2+1} dx \\
 &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C
 \end{aligned}$$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

**【参考解析】：【思路一】** 
$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \cos x (1 - \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2} \\
 &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} \\
 &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos 2x} (1 - \sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2} \\
 &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \sqrt{(\cos 2x - 1) + 1}}{x^2} + \frac{1 - \sqrt[3]{(\cos 3x - 1) + 1}}{x^2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{3x^2} \\
 &= \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3.
 \end{aligned}$$

**【思路二】** 带皮亚诺余项的麦克劳林公式，有

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), (\cos 2x)^{\frac{1}{2}} = 1 - x^2 + o(x^2)$$

$$(\cos 3x)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{3x^2}{2} + o(x^2)$$

所以  $\cos x (\cos 2x)^{\frac{1}{2}} (\cos 3x)^{\frac{1}{3}} = 1 - 3x^2 + o(x^2)$ , 代入得

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + o(x^2)}{x^2} = 3.$$

**二(本题满分8分)** 设函数  $f(t)$  在  $t \neq 0$  时一阶连续可导, 且  $f(1) = 0$ , 求函数  $f(x^2 - y^2)$ , 使得曲线积分  $\int_L y[2 - f(x^2 - y^2)]dx + xf(x^2 - y^2)dy$  与路径无关, 其中  $L$  为任一不与直线  $y = \pm x$  相交的分段光滑曲线.

**【参考解析】**: 令  $P(x, y) = y[2 - f(x^2 - y^2)]$ ,  $Q(x, y) = xf(x^2 - y^2)$ , 于是

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2 - f(x^2 - y^2) + y[-f'(x^2 - y^2)(-2y)]$$

$$= 2 - f(x^2 - y^2) + 2y^2 f'(x^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = f(x^2 - y^2) + 2x^2 f'(x^2 - y^2)$$

由积分与路径无关的条件  $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ , 代入结果整理得

$$(x^2 - y^2)f'(x^2 - y^2) + f(x^2 - y^2) - 1 = 0$$

令  $x^2 - y^2 = u$ , 即  $uf'(u) + f(u) - 1 = 0$ , 分离变量得  $\frac{df(u)}{1 - f(u)} = \frac{1}{u} du$ , 由分离变

量法, 两端积分, 得  $\frac{1}{1 - f(u)} = C_1 u$ , 即  $f(u) = 1 + \frac{C}{u}$ , 由  $f(1) = 0$ , 得  $C = -1$ ,

$$\text{即 } f(x^2 - y^2) = 1 - \frac{1}{x^2 - y^2}.$$

**【注】**其中微分方程  $uf'(u) + f(u) - 1 = 0$  的通解可以通过改写微分方程为  $[uf(u)]' = 1$ , 得到通解为  $uf(u) = u + C$ .

**三(本题满分14分)** 设  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续, 且  $1 \leq f(x) \leq 3$ . 证明:

$$1 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{4}{3}.$$

**【参考解析】**: 由柯西不等式, 得

$$\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \geq \left[ \int_0^1 \sqrt{f(x)} \sqrt{\frac{1}{f(x)}} dx \right]^2 = 1$$

又由于  $[f(x) - 1][f(x) - 3] \leq 0$ , 则  $\frac{[f(x) - 1][f(x) - 3]}{f(x)} \leq 0$ , 即

$$f(x) + \frac{3}{f(x)} \leq 4, \text{ 所以 } \int_0^1 \left[ f(x) + \frac{3}{f(x)} \right] dx \leq 4. \text{ 由于}$$

$$\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{3}{f(x)} dx \leq \frac{1}{4} \left[ \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 \frac{3}{f(x)} dx \right]^2 \leq 4$$

$$\text{所以 } 1 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{4}{3}.$$

**四 (本题满分 12 分)** 计算三重积分  $\iiint_{(V)} (x^2 + y^2) dV$ , 其中  $(V)$  是由

$$x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \geq 4, x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 9$$

及  $z \geq 0$  所围成的空间图形.

**【参考解析】**: 画图 (关键), 考虑区域的特殊性, 采用容易计算的整体减去容易计算的部分来完成计算, 从而分成三个部分来讨论:

第一部分: 整个大球  $(V_1)$  的积分: 采用球坐标换元, 令

$$\begin{aligned} x &= r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = 1 + r \cos \varphi \\ 0 &\leq r \leq 3, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

于是有

$$\iiint_{(V_1)} (x^2 + y^2) dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^3 r^2 \sin^2 \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{648\pi}{5}$$

第二部分: 小球  $(V_2)$  的积分: 采用球坐标换元, 令

$$\begin{aligned} x &= r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = 2 + r \cos \varphi \\ 0 &\leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

于是有

$$\iiint_{(V_2)} (x^2 + y^2) dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^2 r^2 \sin^2 \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{256\pi}{15}$$

第三部分: 大球  $z = 0$  下部分的积分  $(V_3)$ , 采用柱坐标:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, y = r \sin \theta, 1 - \sqrt{9 - r^2} \leq z \leq 0 \\ 0 &\leq r \leq 2\sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

$$\text{于是有 } \iiint_{(V_3)} (x^2 + y^2) dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} r dr \int_{1-\sqrt{9-r^2}}^0 r^2 dz = \frac{136\pi}{5}$$

所以最终的积分为



$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} (x^2 + y^2) dV &= \iiint_{(V_1)} - \iiint_{(V_2)} - \iiint_{(V_3)} \\ &= \frac{648}{5} \pi - \frac{256}{15} \pi - \frac{136}{5} \pi = \frac{256}{3} \pi. \end{aligned}$$

**五 (本题满分 14 分)** 设  $f(x, y)$  在区域  $D$  内可微, 且  $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \leq M$ ,

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  是  $D$  内两点, 线段  $AB$  包含在  $D$  内. 证明:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq M |AB|,$$

其中  $|AB|$  表示线段  $AB$  的长度.

**【参考解析】**: 作辅助函数  $\varphi(t) = f[x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1)]$ , 显然函数  $\varphi(t)$  在  $[0, 1]$  上可导. 根据拉格朗日中值定理, 存在  $c \in (0, 1)$ , 使得

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(c) = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}(x_2 - x_1) + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}(y_2 - y_1)$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |\varphi(1) - \varphi(0)| &= |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \\ &= \left| \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}(x_2 - x_1) + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}(y_2 - y_1) \right| \\ &\leq \sqrt{\left[ \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \right]^2 + \left[ \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \right]^2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \leq M |AB|. \end{aligned}$$

**六 (本题满分 14 分)** 证明: 对于连续函数  $f(x) > 0$ , 有

$$\ln \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 \ln f(x) dx.$$

**【参考解析】**: 由于  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 所以

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k), x_k \in \left[ \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right].$$

由算术几何不等式  $[f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)]^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$ . 于是有

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln f(x_k) \leq \ln \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right]$$

根据  $\ln x$  的连续性, 两边取极限, 得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln f(x_k) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right]$$

$$\text{即 } \ln \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 \ln f(x) dx.$$

**七 (本题满分 14 分)** 已知  $\{a_k\}, \{b_k\}$  是正数数列, 且  $b_{k+1} - b_k \geq \delta > 0, k = 1, 2, \dots, \delta$

为一常数. 证明: 若级数  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  收敛, 则级数  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^k \sqrt[k]{(a_1 a_2 \cdots a_k)(b_1 b_2 \cdots b_k)}}{b_{k+1} b_k}$  收敛.

【参考解析】: 令  $S_k = \sum_{i=1}^k a_i b_i, a_k b_k = S_k - S_{k-1},$

$$S_0 = 0, a_k = \frac{S_k - S_{k-1}}{b_k}, k = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N a_k &= \sum_{k=1}^N \frac{S_k - S_{k-1}}{b_k} = \sum_{k=1}^{N-1} \left( \frac{S_k}{b_k} - \frac{S_k}{b_{k+1}} \right) + \frac{S_N}{b_N} \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{b_{k+1} - b_k}{b_k b_{k+1}} S_k + \frac{S_N}{b_N} \geq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\delta}{b_k b_{k+1}} S_k \end{aligned}$$

所以  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{S_k}{b_k b_{k+1}}$  收敛. 由不等式

$$\sqrt[k]{(a_1 a_2 \cdots a_k)(b_1 b_2 \cdots b_k)} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k}{k} = \frac{S_k}{k}$$

可知  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^k \sqrt[k]{(a_1 a_2 \cdots a_k)(b_1 b_2 \cdots b_k)}}{b_{k+1} b_k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{S_k}{b_k b_{k+1}},$  故原不等式成立.