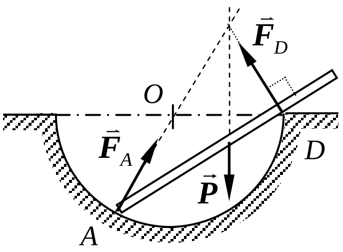
班级　　　　学号　　　　姓名　　　　日期

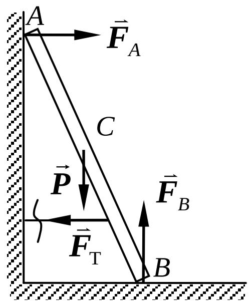
第一篇　静力学

一、静力学公理和物体的受力分析

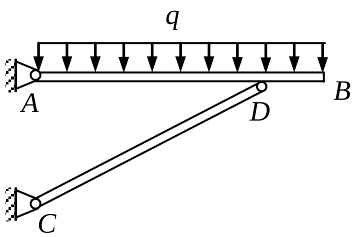
1.1　下列习题中假定接触处都是光滑的，物体的重量除图上注明者外均略去不计。画出下列指定物体的受力图。



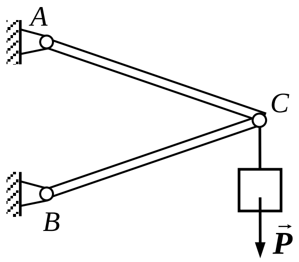
(a) 杆 AB



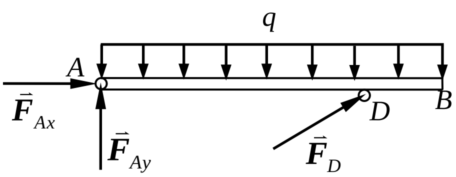
(b) 杆 AB

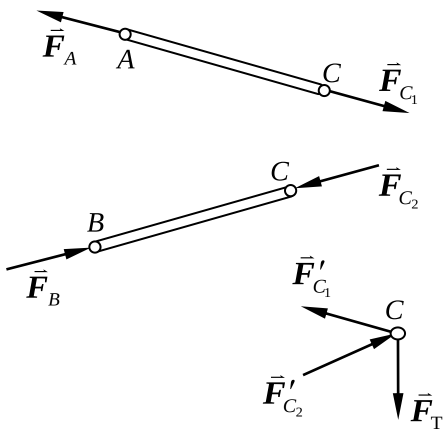


(c) 杆 AB

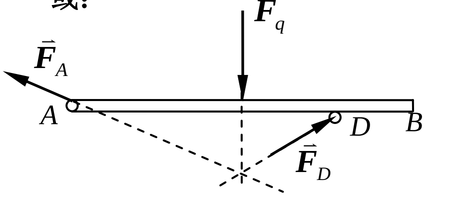


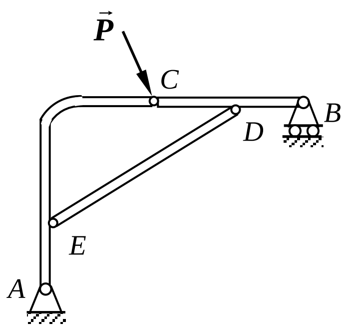
(d) 杆 AC, 杆 BC, 销 C



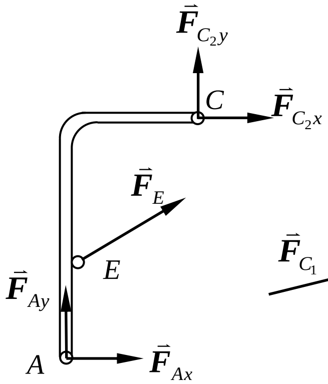


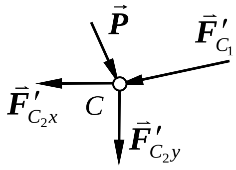
或：

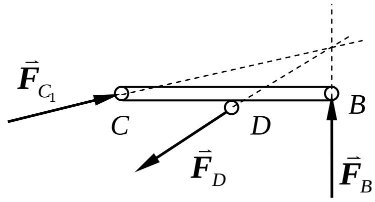




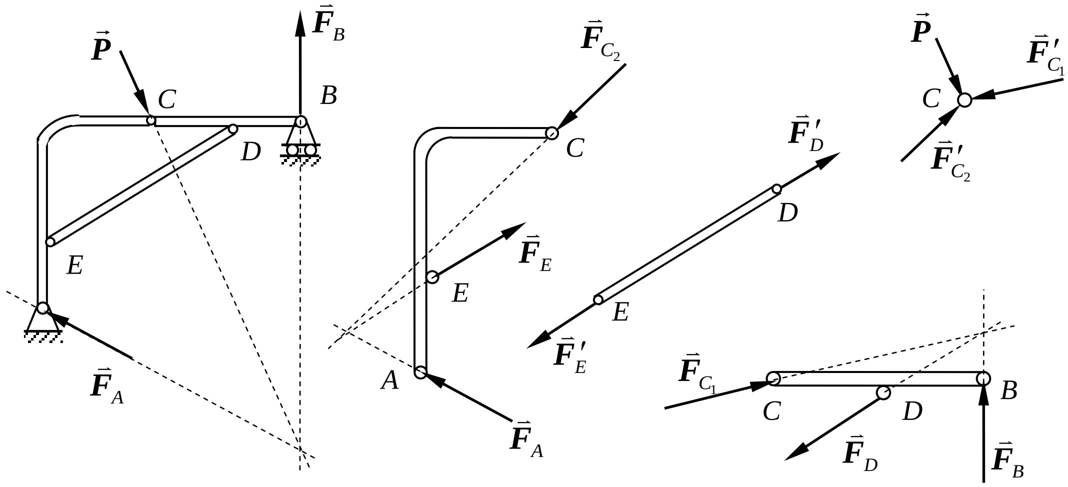
(e) 杆 AC, 杆 BC, 销 C



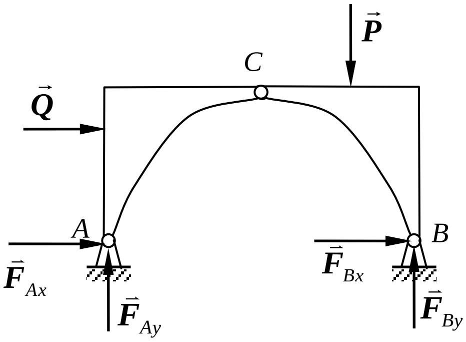


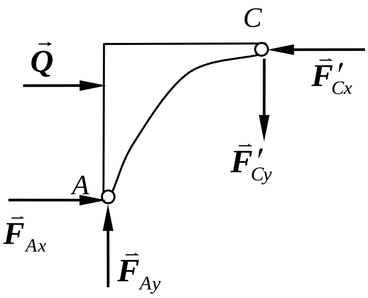


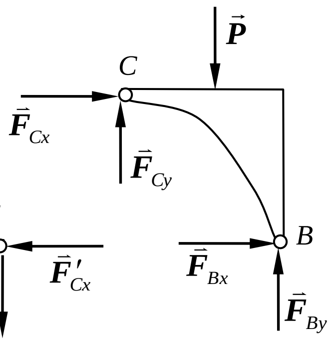
或：



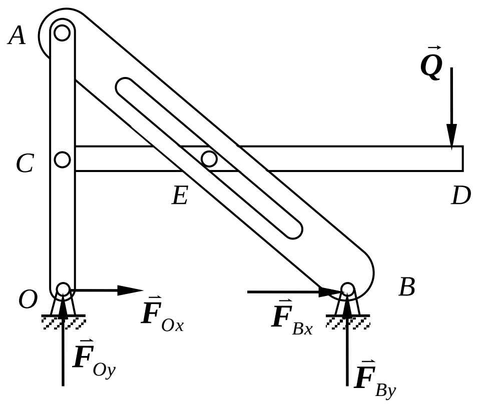
1.2 画出下列各物系中指定物体的受力图和整个系统的受力图。物体自重均不计。

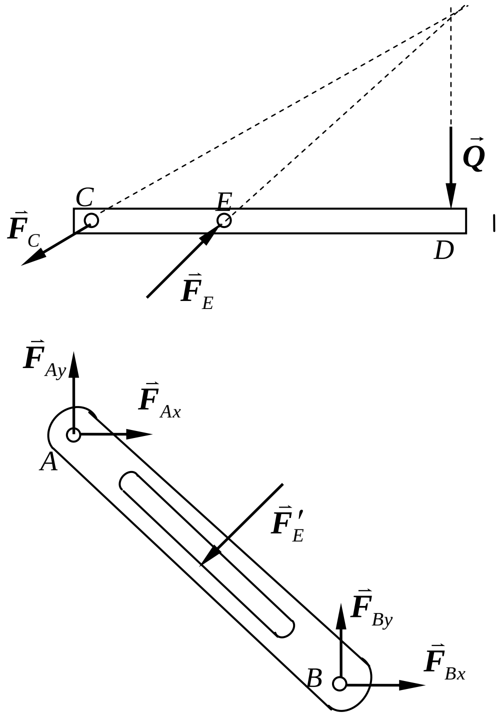




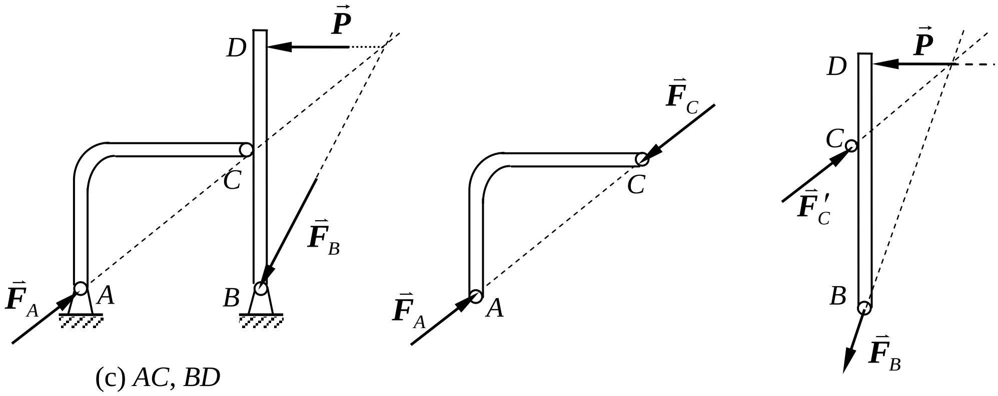


(b) AC, BC

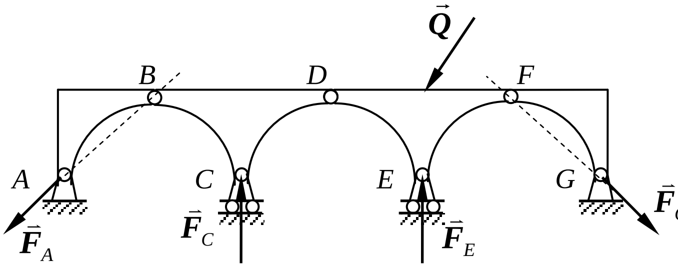




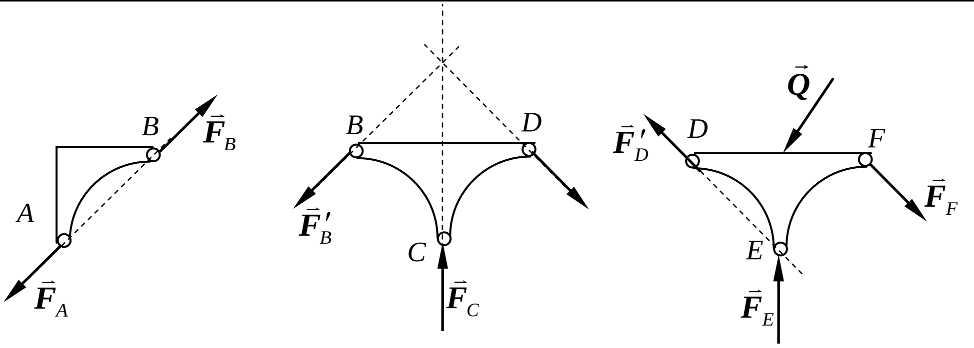
(a) *AB*, *CD*



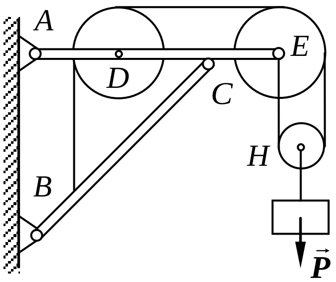
(c) *AC*, *BD*

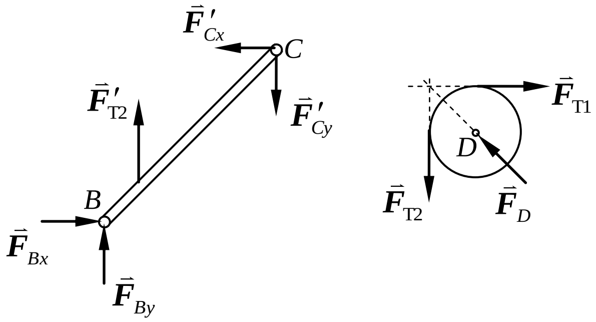


(d) *AB*, *BCD*, *DEF*

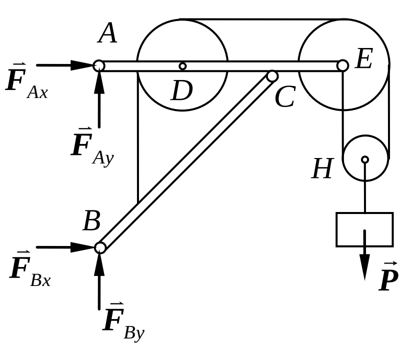


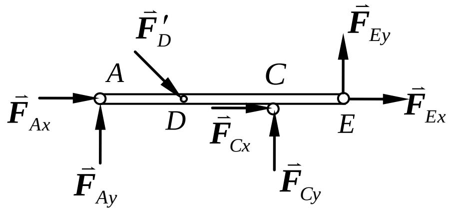
1.3　　如图所示各构架中，除标识重物外，各构件自重均不计，画出下列各物系中指定物体的受力图和整个物系的受力图。。

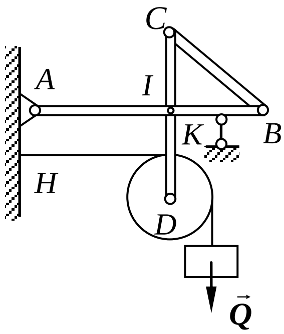


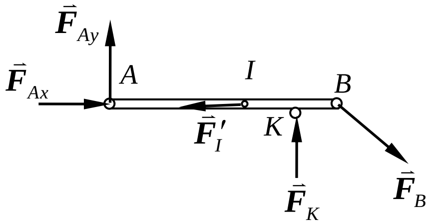


(a)　杆 *AE*，*BC* 和轮 *D*

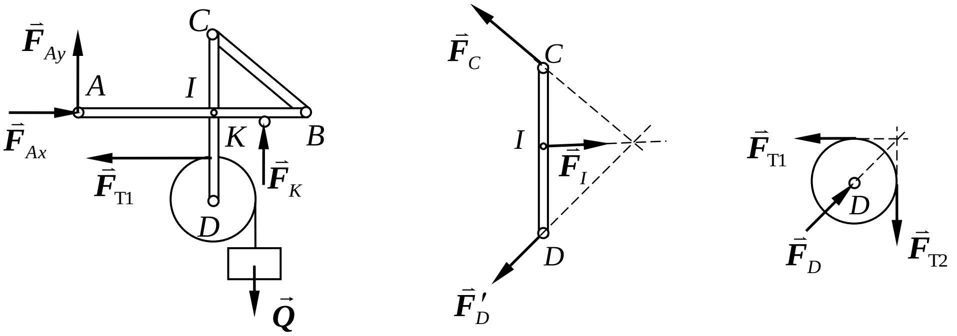




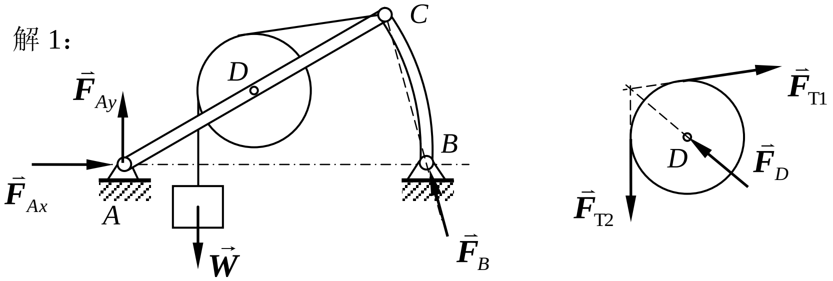




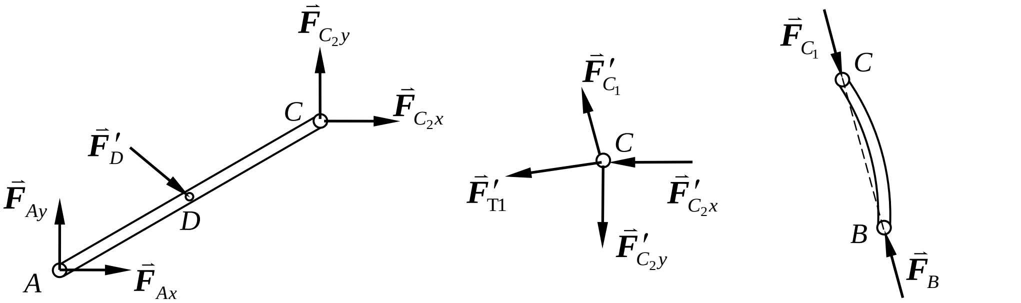
(b)　杆 *AB*，*CD* 和轮 *D*



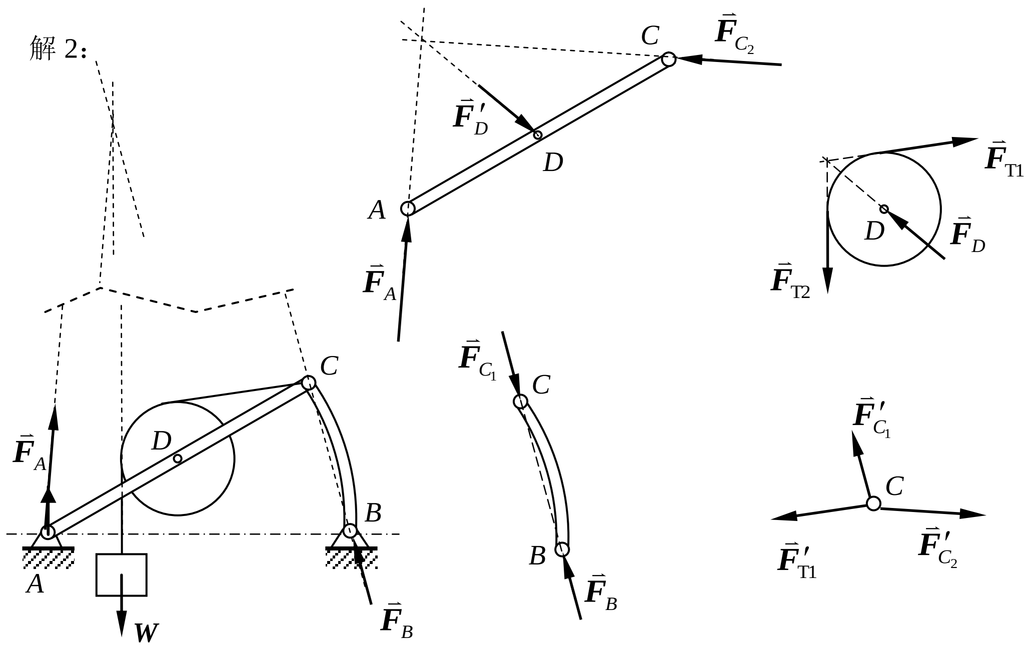
解 1：



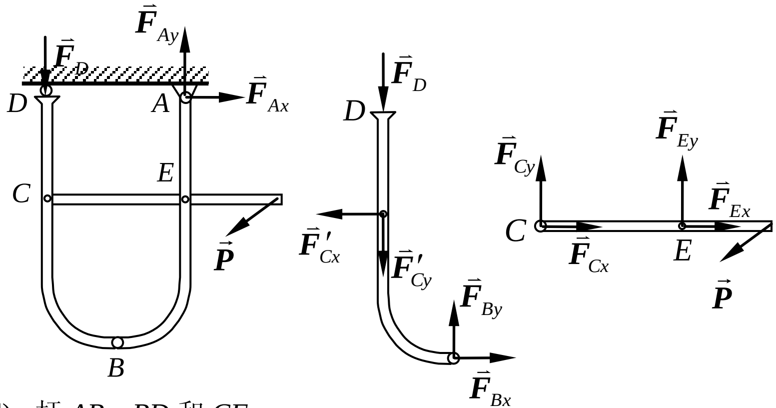
(c)　杆 *AC*，*BC* 和轮 *D*

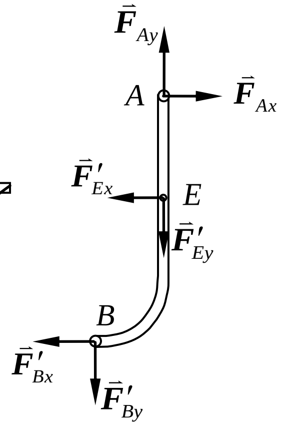


解 2：



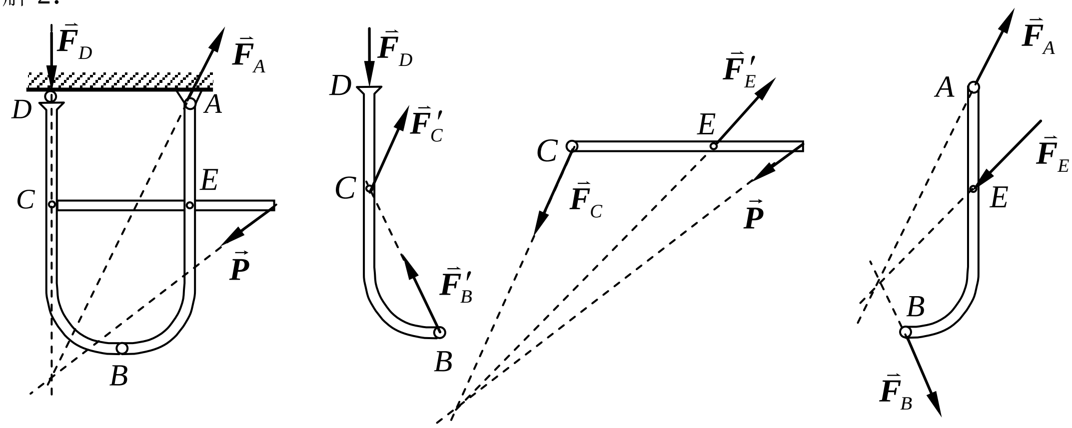
解 1：





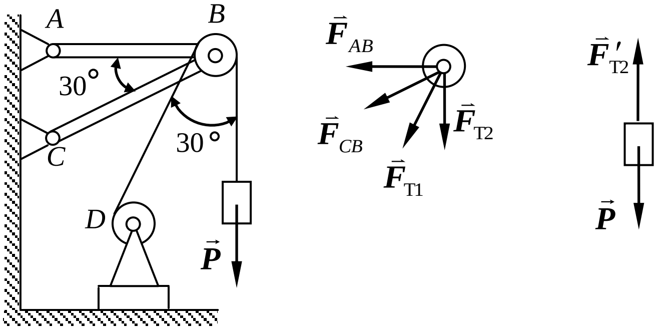
(d)　杆 *AB*，*BD* 和 *CF*

解 2：



二、平面力系

2.1 物体重 P=20kN，用绳子挂在支架的滑轮 B 上，绳子的另一端接在绞车 D 上，如图所示，转动绞车物体便能升起。设滑轮的大小及其中的摩擦略去不计，A、B、C 三处均为铰链连接。当物体处于平衡状态时，试求拉杆 AB 和支杆 CB 所受的力。



[**解**] 取滑轮 B 为研究对象,受力如图所示，列平衡方程：

$$\sum F_x = 0: -F_{AB} - F_{CB}\cos 30° - F_{T1}\sin 30° = 0$$

$$\sum F_y = 0: -F_{CB}\sin 30° - P - F_{T2}\cos 30° = 0$$

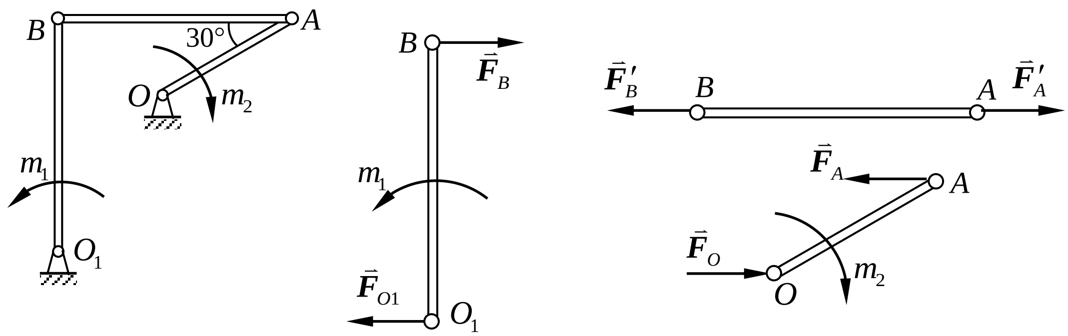
且：$$F_{T1} = F_{T2} = P = 20\,(\text{kN})$$

联立上述方程，解得：

$$\underline{F_{AB} = 54.64\,(\text{kN})\ F_{CB} = -74.64\,(\text{kN})}$$

即：AB 杆受 54.64kN 的拉力；支杆 CB 受 74.64kN 的压力。

2.2 　四连杆机构 $OABO_1$，在图示位置平衡。已知 OA= 40cm，O_1B = 60cm，作用在曲柄 OA 上的力偶矩大小为 $m_2 = 1\text{Nm}$,不计杆重，求作用在 O_1B 上的力偶矩 m_1 的大小及连杆 AB 所受的力。



[**解**] AB 为二力杆，受力如图。

① 以 AO 杆为对象，

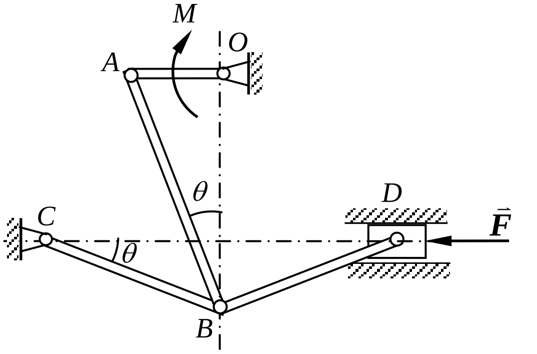
可解得：　$F_A = 5\,(\text{N})$　且 $F_B = 5\,(\text{N})$

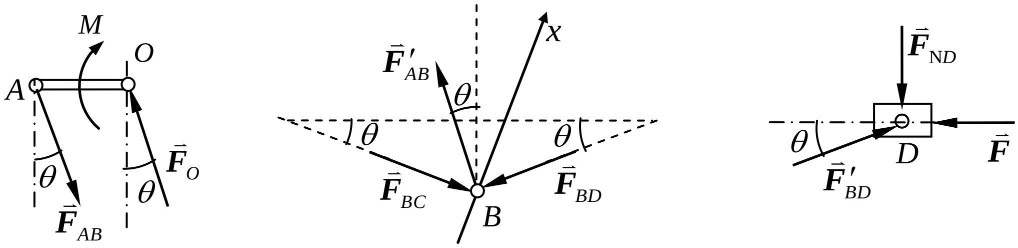
② BO_1 杆受力如图,

$$\sum M = 0,\quad -F_B \cdot BO_1 + m_1 = 0$$

解得：$\underline{m_1 = 3\,(\text{N}\cdot\text{m})}$

2.3　　图示机构中，曲柄 OA 上作用一力偶，其矩为 M，滑块 D 上作用水平力 F。已知 $OA=a$，$BC=BD=l$。求当机构在图示位置平衡时，力 $\boldsymbol{F}$ 与力偶矩 M 的关系。





解：易知杆 AB、BC、BD 均为二力杆。

研究 OA，受力如图。

$$\sum M_O=0,\ F_{AB}a\cos\theta-M=0,\quad F_{AB}=\frac{M}{a\cos\theta}$$

研究节点 B，受力如图。

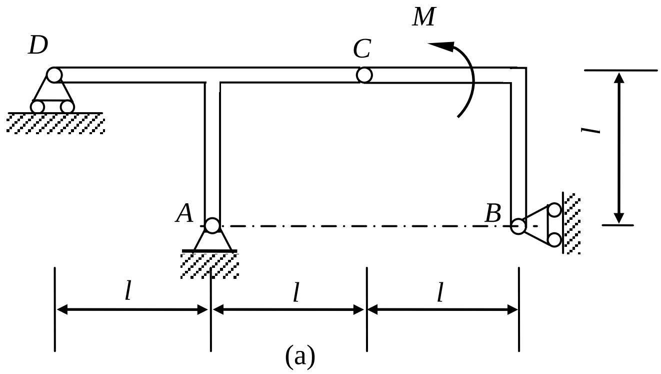
$$\sum F_x=0,\ F'_{AB}\cos2\theta-F_{BD}\sin2\theta=0,\quad F_{BD}=\frac{M}{a\cos\theta\tan2\theta}$$

研究滑块 D，受力如图。

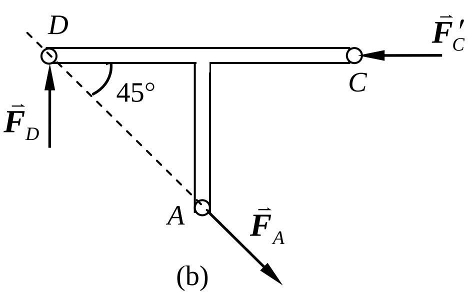
$$\sum F_x=0,\ F'_{BD}\cos\theta-F=0$$

解得力 $\boldsymbol{F}$ 与力偶矩 M 的关系　$F=\dfrac{M}{a\tan2\theta}$

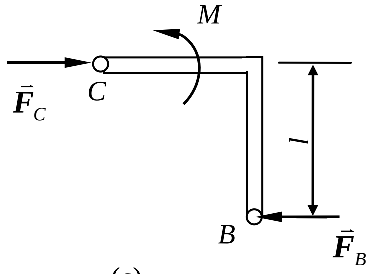
2.4　　在图示结构中，各构件的自重略去不计，在构件 BC 上作用一力偶矩为 M 的力偶，各尺寸如图，求支座 A 的约束力。



(a)



(b)



(c)

解：（1）研究对象 BC，受力如图（c）。

B、C 两处约束力构成力偶与主动力偶 M 平衡，

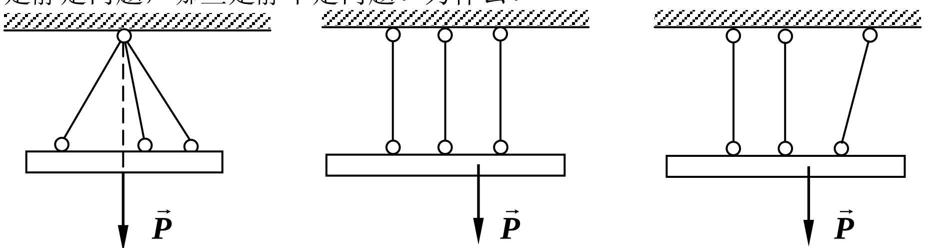
$$\sum M_O = 0, -F_B \cdot l + M = 0, \quad F_B = \frac{M}{l}, \quad F_B = F_C = \frac{M}{l}$$

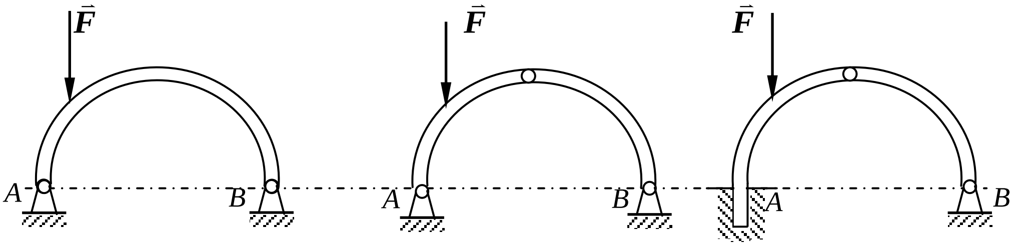
（2）研究对象 ADC，受力如图（b）。

$$\sum F_x = 0, \quad -F_C' + F_A \cos 45° = 0, \quad F_A = \sqrt{2} F_C' = \frac{\sqrt{2}M}{l}$$

即：支座 A 的约束力为 $F_A = \dfrac{\sqrt{2}M}{l}$ （↘）

2.5　简明回答下列问题：怎样判定静定和静不定问题？图中所示的六种情况哪些是静定问题，哪些是静不定问题？为什么？



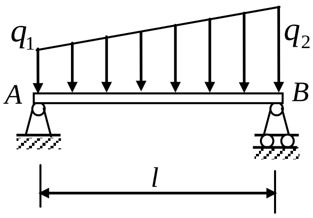


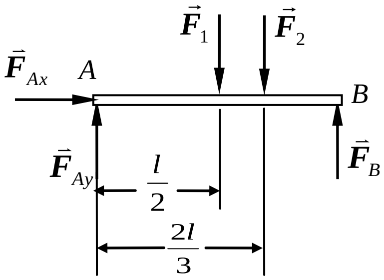
(d)　　(e)　　(f)

答：未知量数等于独立的平衡方程数，能用静力平衡方程求解的问题称为静定问题；
未知量数大于独立的平衡方程数，不能用静力平衡方程求解的问题称为静不定问题。
图示的六种情况中，(c)、(e)两种情况为静定问题，其余为静不定问题。

图(a)：平面汇交力系，有 2 个方程，未知量有 3 个，1 次静不定问题；
图(b)：平面平行力系，有 2 个方程，未知量有 3 个，1 次静不定问题；
图(c)：平面一般力系，有 3 个方程，未知量有 3 个，静定问题；
图(d)：平面一般力系，有 3 个方程，未知量有 4 个，1 次静不定问题；
图(e)：平面一般力系，有 6 个方程，未知量有 6 个，静定问题；
图(f)：平面一般力系，有 6 个方程，未知量有 7 个，1 次静不定问题。

2.6　简支梁如图，梯形载荷的集度分别为 q_1、q_2，求支座 A、B 处的反力。





[解] 研究 AB 梁，梯形载荷可分解为集度 q_1 的均布载荷和最大集度为 (q_2-q_1) 的线性载荷，

AB 梁受力如图，其中 $F_1 = q_1 l$， $F_2 = \dfrac{1}{2}(q_2-q_1)l$

$$\sum F_x = 0,\ F_{Ax} = 0$$

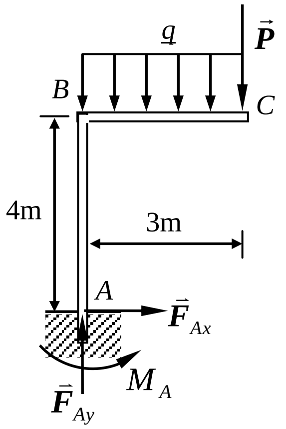
$$\sum F_y = 0,\ F_{Ay} - F_1 - F_2 + F_B = 0$$

$$\sum M_A(\vec{F}) = 0,\ F_B l - F_1\left(\frac{l}{2}\right) - F_2\left(\frac{2l}{3}\right) = 0$$

$$\begin{cases} F_{Ax} = 0 \\ F_{Ay} - q_1 l - \dfrac{1}{2}(q_2-q_1)l + F_B = 0 \\ F_B l - q_1 l\left(\dfrac{l}{2}\right) - \dfrac{1}{2}(q_2-q_1)l\left(\dfrac{2l}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

解得： $F_{Ax}=0$； $F_{Ay}=\dfrac{1}{6}(2q_1+q_2)l$； $F_B=\dfrac{1}{6}(q_1+2q_2)l$

2. 7 刚架尺寸如图，已知 q = 4kN/m, P = 5kN，求固定端 A 处的约束力。



AC 刚架受力如图所示，列平衡方程。

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}=0$$

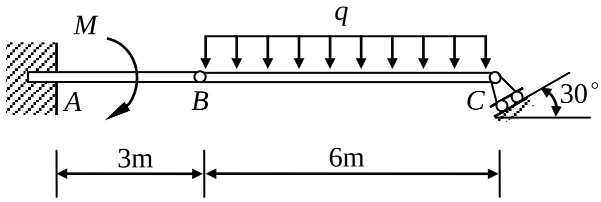
$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}-q\cdot 3-P=0$$

$$\sum M_A=0,\quad M_A-P\cdot 3-q\times 3\times\frac{3}{2}=0$$

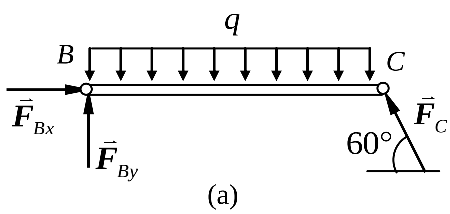
代入数据 q = 4kN/m, P = 5kN，解得：

$F_{Ax}=0\ \text{(kN)};\ F_{Ay}=17\ \text{(kN)};\ M_A=33\ (\text{kN}\cdot\text{m})$

2.8 求下列各梁的支座反力和中间铰处的约束反力。



(1) 已知 q=20kN/m，M=40kN·m



(a)

[**解法 1**] 研究 BC 梁，受力如图(a)所示，

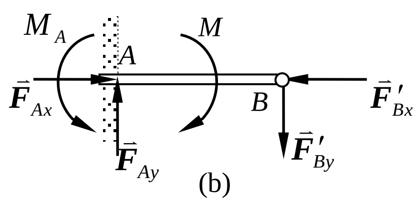
$$\sum M_C(\vec{F})=0,\ -F_{By}\cdot 6+q\times 6\times 3=0$$

$$\sum F_x=0,\ F_{Bx}-F_C\cos 60^\circ=0$$

$$\sum F_y=0,\ F_{By}+F_C\sin 60^\circ-q\cdot 6=0$$

解得： $F_C=69.28\ \text{(kN)};$

$F_{Bx}=34.64\ \text{(kN)};\ \ F_{By}=60\ \text{(kN)};$



(b)

再研究 *AB* 梁，受力如图(b)所示，

$$\sum F_x = 0,\ F_{Ax} - F_{Bx} = 0$$

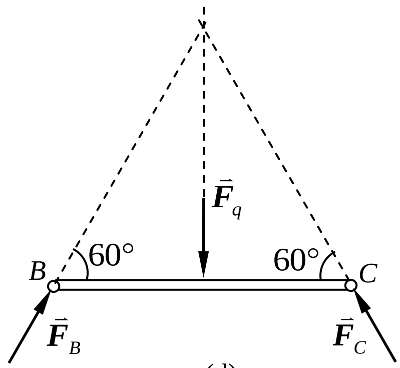
$$\sum F_y = 0,\ F_{Ay} + F_{By} = 0$$

$$\sum M_A(\vec{F}) = 0,\ M_A - M - F'_{By} \cdot 3 = 0$$

解得 $F_{Ax} = 34.64\ (\mathrm{kN})$;

$F_{Ay} = 60\ (\mathrm{kN})$;

$M_A = 220\ (\mathrm{kN\cdot m})$



(d)

[解法 2] 研究 *BC* 梁，受力如图(d)所示，均布载荷用合力代替 $F_q = q(6) = 120\mathrm{kN}$，三力汇交平衡，

$$\sum F_x = 0,\ F_B\cos 60° - F_C\cos 60° = 0$$

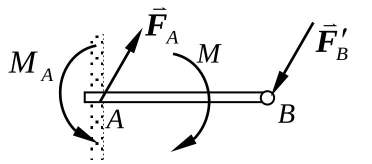
$$\sum F_y = 0,\ F_B\sin 60° + F_C\sin 60° - F_q = 0$$

解得：$F_C = 69.28\ (\mathrm{kN})$;　$F_B = 69.28\ (\mathrm{kN})$

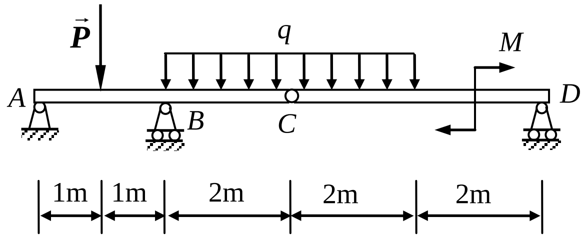
再研究 *AB* 梁，受力如图(c)所示，为力偶系平衡，$F_A = F'_B$

$$\sum M_A(\vec{F}) = 0,\ M_A - M - F'_B(3)\sin 60° = 0$$

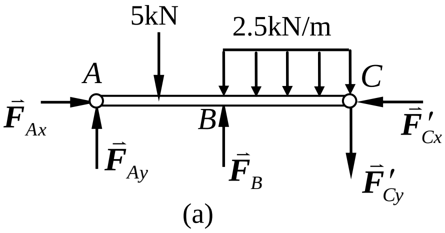
解得：$F_A = 69.28\ (\mathrm{kN})$; $M_A = 220\ (\mathrm{kN\cdot m})$



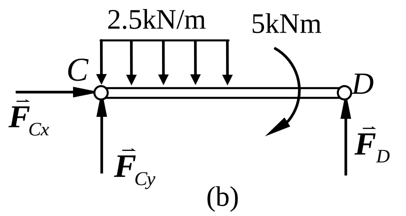
(c)



(2)已知 *P*=5kN，*q*=2.5kN/m，*M*=5kN·m



(a)



(b)

[**解**] (1) 研究 *CD* 梁，受力如图(b)。

$$\sum M_C = 0, F_D \cdot 4 - 2.5\times 2\times 1 - 5 = 0 \qquad F_D = 2.5\ (\mathrm{kN})$$

$$\sum F_x = 0,\ F_{Cx} = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{Cy} - 2.5\times 2 + F_D = 0,\ F_{Cy} = 2.5\ (\mathrm{kN})$$

(2) 研究 *AC* 梁，受力如图(a).

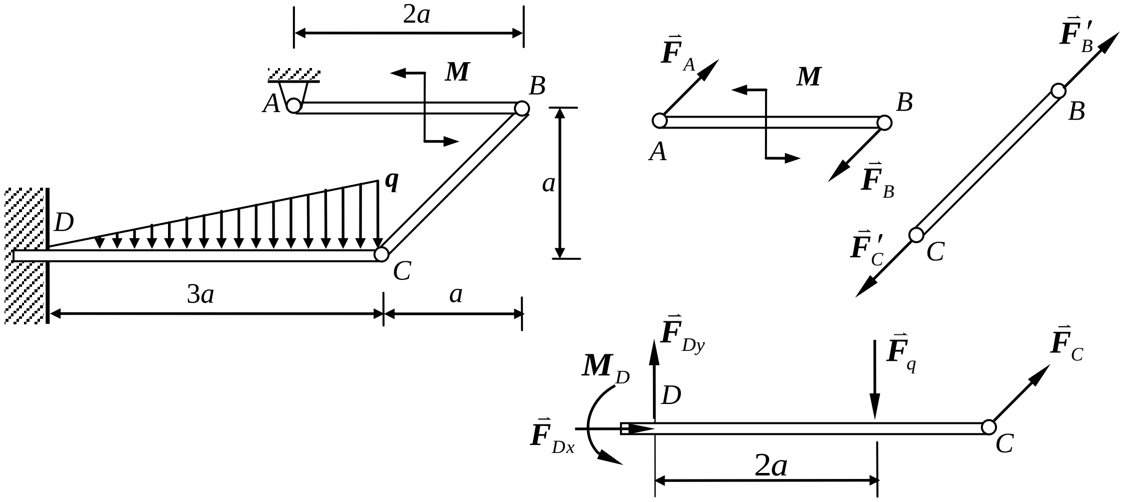
$$\sum F_x = 0,\ \ F_{Ax} - F'_{Cx} = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_{Ay} - 5 + F_B - 2.5\times 2 - F'_{Cy} = 0$$

$$\sum M_A = 0,\ -5\times 1 + F_B \cdot 2 - 2.5\times 2\times 3 - F'_{Cy}\cdot 4 = 0$$

解得：$F_{Ax} = 0\,(\text{kN})$；$F_{Ay} = -2.5\,(\text{kN})$；$F_B = 15\,(\text{kN})$

2.9 图示平面构架，构件 *AB* 上作用一个矩为 *M* 的力偶，梁 *DC* 上作用一最大集度为 ***q*** 的线性分布载荷，各构件重量均不计，试求支座 *A*、*D* 处的约束力。



解：研究 *BC*，可知 *BC* 为二力杆。

研究 *AB*，画受力图。

由 $\sum M_B(\vec{F}) = 0,\ M - F_A(2a)\sin 45^\circ = 0$

解得 $F_A = \dfrac{M}{\sqrt{2}a}$　　且 $F_B = F_C = F_A = \dfrac{M}{\sqrt{2}a}$

研究 *CD*，画受力图。线性分布载荷用合力代替：$F_q = \dfrac{1}{2}q(3a) = \dfrac{3}{2}qa$

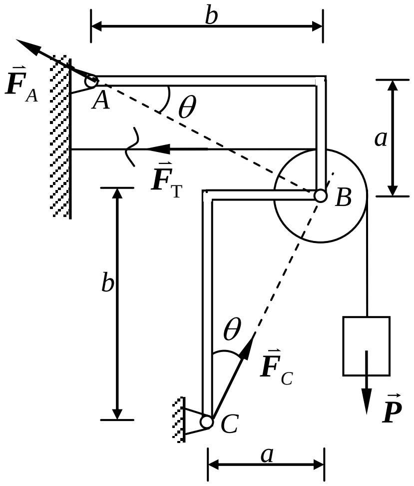
由 $\sum F_x = 0,\ F_{Dx} + F_C\cos 45^\circ = 0$

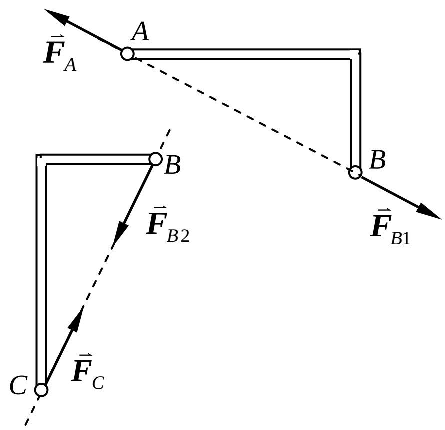
$$\sum F_y = 0,\ F_{Dy} + F_C\sin 45^\circ - \frac{3}{2}qa = 0$$

$$\sum M_D(\vec{F}) = 0,\ M_D + F_C\sin 45^\circ(3a) - \frac{3}{2}qa(2a) = 0$$

解得 $F_{Dx} = -\dfrac{M}{2a}$，$F_{Dy} = \dfrac{1}{2a}(3qa^2 - M)$，$M_D = \dfrac{3}{2}M - 3qa^2$

2.10 　　图示机架上挂一重 *P* 的物体，各构件的尺寸如图示。不计滑轮及杆的自重与摩擦，求支座 *A*、*C* 的约束力。





解：研究 AB、BC，可知 AB、BC 均为二力体，受力如图。

研究系统，画系统的受力图。

法一：

由 $$\sum M_A(\vec{F})=0,\ F_C\sqrt{a^2+b^2}-F_T(a-r)-P(b+r)=0$$

$$\sum M_C(\vec{F})=0,\ F_A\sqrt{a^2+b^2}+F_T(b+r)-P(a+r)=0$$

式中 r 为滑轮 D 的半径，$F_T=P$

解得支座 A、C 的约束力分别为 $F_A=\dfrac{a-b}{\sqrt{a^2+b^2}}P$，$F_C=\dfrac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}P$

法二：

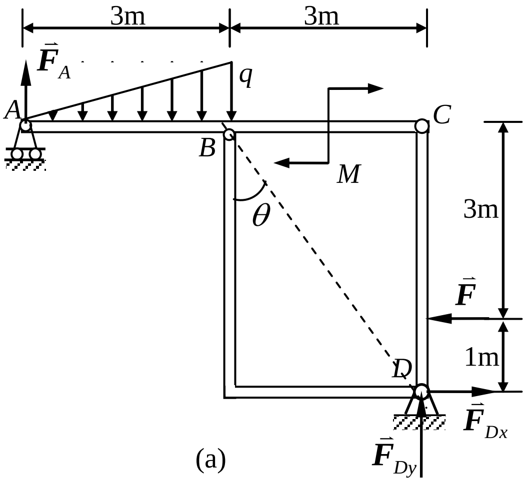
由 $$\sum F_x=0,\ -F_A\cos\theta-F_T+F_C\sin\theta=0$$

$$\sum F_y=0,\ F_A\sin\theta+F_C\cos\theta-P=0$$

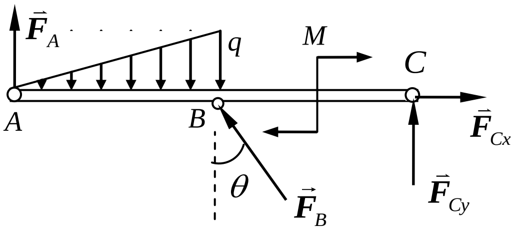
式中 $\sin\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$F_T=P$，

解得支座 A、C 的约束力分别为 $F_A=\dfrac{a-b}{\sqrt{a^2+b^2}}P$，$F_C=\dfrac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}P$

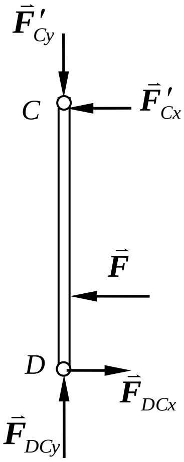
2.11　平面构架的尺寸及支座如图所示，三角形分布载荷的最大集度 $q=2$kN/m，M=10kNm，F=2kN，各杆自重不计。求铰支座 D 处的销钉对杆 CD 的作用力。



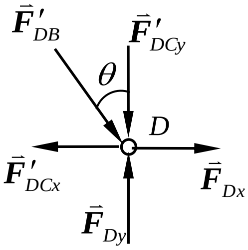
(a)



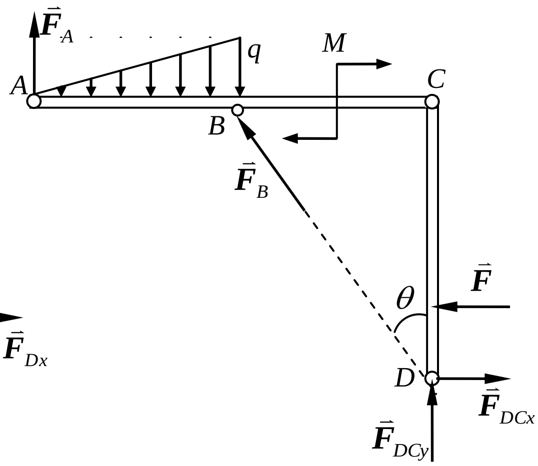
(b)



(c)



(d)



(e)

解 1：

(1) 研究系统，受力如图(a)。

$$\sum M_D(\vec{F})=0,\quad -F_A\cdot 6+\frac{1}{2}q\times 3\times 4-M+F\cdot 1=0，\quad F_A=\frac{2}{3}\ \text{(kN)}$$

(2) 研究 BD 可知其为二力杆。

(3) 研究 AC，受力如图(b)。

$$\sum M_B(\vec{F})=0,\quad -F_A\cdot 3+\frac{1}{2}q\times 3\times 1-M+F_{Cy}\cdot 3=0$$

(4) 研究 CD，受力如图(c)。

$$\sum M_C(\vec{F})=0,\ F_{DCx}\cdot 4-F\cdot 3=0$$

$$\sum F_y=0,\quad -F'_{Cy}+F_{DCy}=0$$

解得支座 D 处的销钉对杆 CD 的作用力为 $F_{DCx}=1.5\,\text{(kN)}$，$F_{DCy}=3\,\text{(kN)}$

解 2：

(1)研究系统，受力如图(a)。

$$\sum M_D(\vec{\boldsymbol{F}})=0,\ -F_A\cdot 6+\frac{1}{2}q\times 3\times 4-M+F\cdot 1=0$$

$$\sum F_x=0,\ F_{Dx}-F=0$$

$$\sum F_y=0,\ F_A-\frac{1}{2}q\cdot 3+F_{Dy}=0$$

(2) 研究 BD 可知其为二力杆。

(3) 研究 AC，受力如图(b)。

$$\sum M_C(\vec{\boldsymbol{F}})=0,\ -F_A\cdot 6+\frac{1}{2}q\times 3\times 4-F_B\cos\theta\cdot 3-M=0\,,$$

(4)研究销钉 D，受力如图(d)。

$$\sum F_x=0,\ F'_{DB}\sin\theta+F_{Dx}-F'_{DCx}=0\,,$$

$$\sum F_y=0,\ -F'_{DB}\cos\theta+F_{Dy}-F'_{DCy}=0\,,$$

式中 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$， $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$

解得杆 CD 对铰支座 D 处的销钉的作用力为 $F'_{DCx}=1.5\,(\text{kN})$，$F'_{DCy}=3\,(\text{kN})$

铰支座 D 处的销钉对杆 CD 的作用力与之大小相等，方向相反。

解 3：

(1)研究系统，受力如图(a)。

$$\sum M_D(\vec{\boldsymbol{F}})=0,\ -F_A\cdot 6+\frac{1}{2}q\times 3\times 4-M+F\cdot 1=0\,,$$

(2) 研究 BD ，可知其为二力杆。

(3) 研究 CD，受力如图(c)。

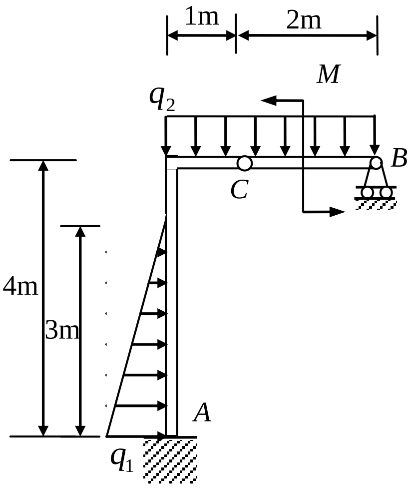
$$\sum M_C(\vec{\boldsymbol{F}})=0,\ F_{DCx}\cdot 4-F\cdot 3=0$$

(4) 研究 AC、CD 系统，受力如图(e)。

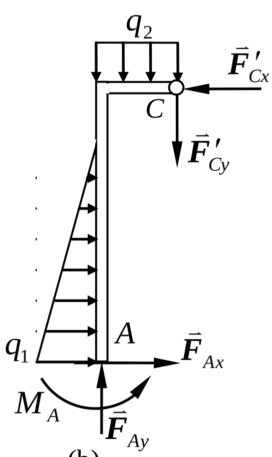
$$\sum M_B(\vec{\boldsymbol{F}})=0,\ -F_A\cdot 3+\frac{1}{2}q\times 3\times 1-M+F_{DCy}\cdot 3+F_{DCx}\cdot 4=0$$

解得支座 D 处的销钉对杆 CD 的作用力为 $F_{DCx}=1.5\,(\text{kN})$，$F_{DCy}=3\,(\text{kN})$

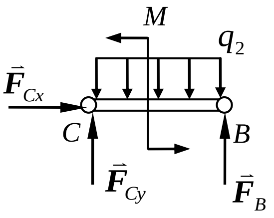
2.12 图示结构由 AC 和 CB 组成。已知线性分布载荷 $q_1=3\,\text{kN/m}$，均布载荷 $q_2=0.5\,\text{kN/m}$，$M=2\,\text{kN}\cdot\text{m}$，尺寸如图。不计杆重，求固定端 A 与支座 B 的约束力和铰链 C 的内力。



(a)



(b)



(c)

[**解**] (1)研究 *BC*，受力如图(c)所示。

$$\begin{cases}\sum F_x = 0, \quad F_{Cx} = 0 \\ \sum M_C(\vec{F}) = 0, \quad M + F_B \cdot 2 - q_2 \times 2 \times 1 = 0 \\ \sum F_y = 0, \quad F_{Cy} + F_B - q_2 \cdot 2 = 0\end{cases}$$

解得铰链 *C* 的内力 $\underline{F_{Cx} = 0\,(\text{kN})}$，$\underline{F_{Cy} = 1.5\,(\text{kN})}$，

支座 *B* 的约束力 $F_B = -0.5\,(\text{kN}) \quad (\downarrow)$

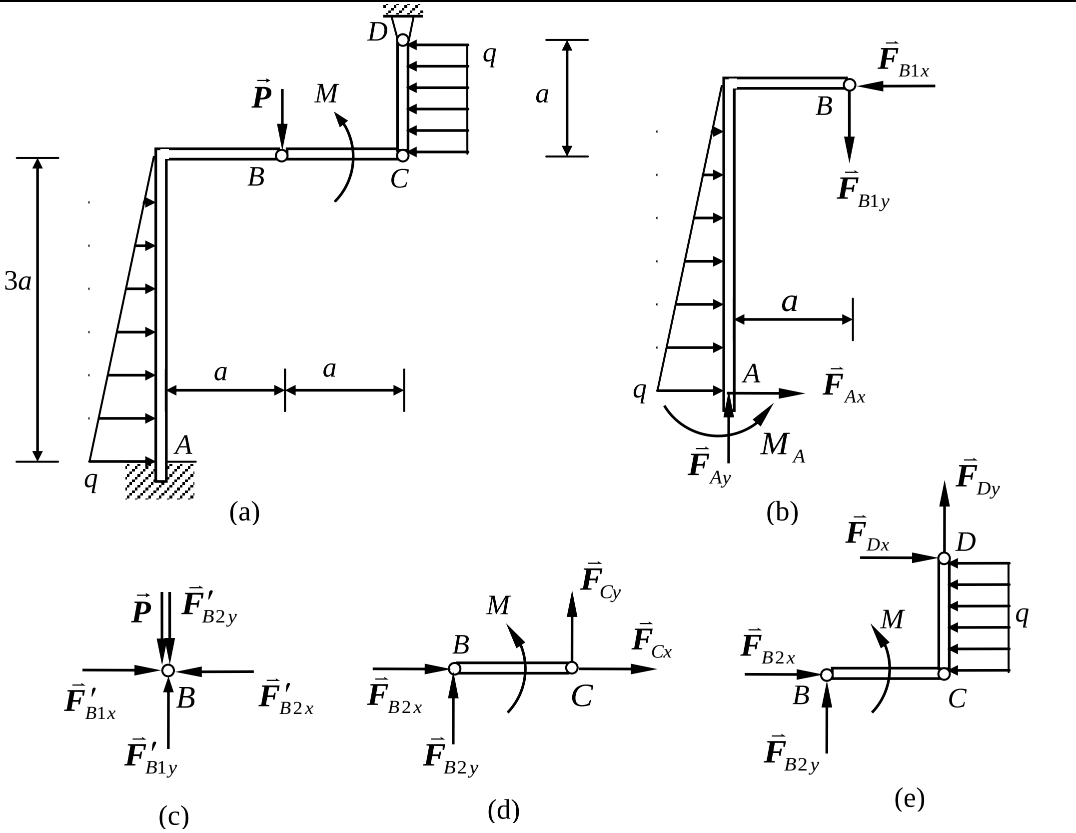
(2)研究 *AC*，受力如图(b)所示。

$$\begin{cases}\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + \dfrac{1}{2}q_1 \cdot 3 - F'_{Cx} = 0 \\ \sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - F'_{Cy} - q_2 \cdot 1 = 0 \\ \sum M_A(\vec{F}) = 0, \quad M_A - \dfrac{1}{2}q_1 \times 3 \times 1 - q_2 \times 1 \times \dfrac{1}{2} - F'_{Cy} \cdot 1 + F'_{Cx} \cdot 4 = 0\end{cases}$$

解得固定端 *A* 的约束力为

$\underline{F_{Ax} = -4.5\,(\text{kN}) \quad (\leftarrow)}$　$\underline{F_{Ay} = 2\,(\text{kN}) \quad (\uparrow)}$　$\underline{M_A = 6.25 \quad (\text{kN}\cdot\text{m})}$ ($\circlearrowright$)

2.13　　图示构架由直杆 *BC*，*CD* 及直角弯杆 *AB* 组成，各杆自重不计，载荷分布及尺寸如图。销钉 *B* 穿透 *AB* 及 *BC* 两构件，在销钉 *B* 上作用集中力 *P*。已知 *q*，*a*，*M*，且 $M = qa^2$。求（1）固定端 *A* 的约束力及销钉 *B* 对 *BC*、*AB* 的作用力。



(a)　(b)　(c)　(d)　(e)

[解] (1)研究 BC，受力如图(d)所示。

$$\sum M_C(\vec{F})=0,\quad M-aF_{B2y}=0\text{，得 }F_{B2y}=\frac{M}{a}=qa$$

(2)研究 BC，CD 系统，受力如图(e)所示。

$$\sum M_D(\vec{F})=0,\quad aF_{B2x}-aF_{B2y}+M-qa\frac{a}{2}=0$$

解得　$F_{B2x}=\dfrac{3}{2}qa-\dfrac{M}{a}=\dfrac{1}{2}qa$

即销钉 B 对 BC 的作用力为 $F_{B2x}=\dfrac{1}{2}qa\ (\rightarrow)$，$F_{B2y}=qa\quad(\uparrow)$

(3)研究销钉 B，受力如图(c)。

$$\sum F_x=0,\quad F'_{B1x}-F'_{B2x}=0$$
$$\sum F_y=0,\quad F'_{B1y}-F'_{B2y}-P=0$$

解得 $F'_{B1x}=\dfrac{1}{2}qa$，$F'_{B1y}=P+qa$

即销钉 B 对 AB 的作用力为 $F_{B1x}=\dfrac{1}{2}qa\quad(\leftarrow)$，$F_{B1y}=P+qa\quad(\downarrow)$

研究 AB，受力如图(b)。

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + \frac{1}{2} q \cdot 3a - F_{B1x} = 0$$

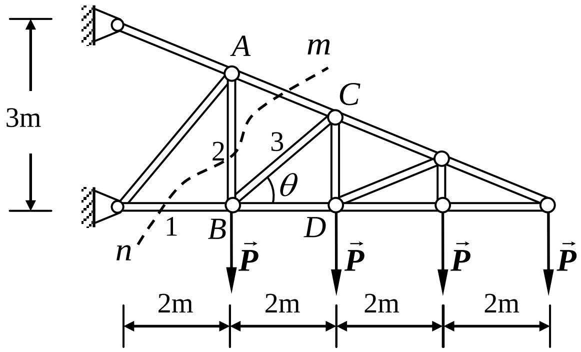
$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - F_{B1y} = 0$$

$\sum M_A(\vec{F}) = 0, M_A - aF_{B1y} - \dfrac{1}{2} q \cdot 3a \cdot a + 3aF_{B1x} = 0$ 解得固定端 A 处约束反力

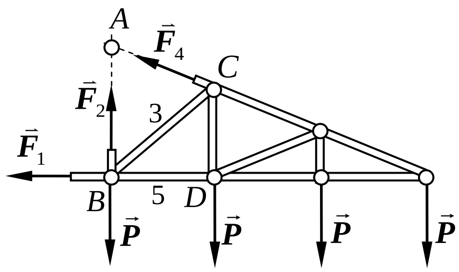
$F_{Ax} = -qa \ (\leftarrow), F_{Ay} = P + qa \ (\uparrow), \ M_A = (P + qa)a \ (\circlearrowleft)$

负号表示该力的实际方向与图设的方向相反。

2.14 已知桁架结构及其受力如图。试用截面法求杆 1、2、3 的内力。



(a)



(b)

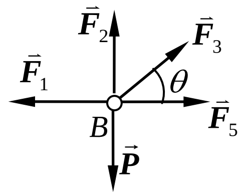
[**解**] 用截面 mn 截取桁架右部研究，受力如图(b)所示，由

$$\sum M_A(\vec{F}) = 0, \quad -F_1 \cdot AB - 2P - 4P - 6P = 0$$

$$\sum M_C(\vec{F}) = 0, \quad -F_1 \cdot CD - 2F_2 + 2P - 2P - 4P = 0$$

由比例关系 $\dfrac{AB}{3} = \dfrac{6}{8}$，$\dfrac{CD}{3} = \dfrac{4}{8}$，$AB = 2.25\text{m}$，$CD = 1.5\text{m}$,

解得 $F_1 = -5.333P$（压），$F_2 = 2P$（拉）



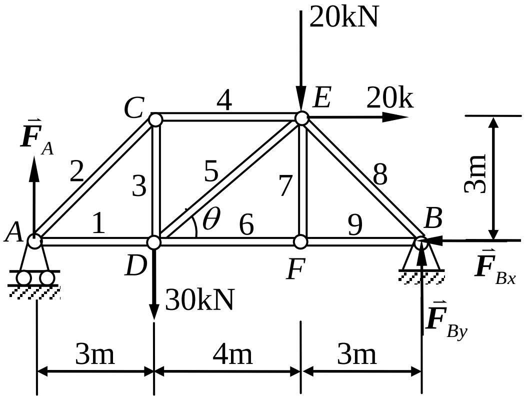
(c)

再研究 B 节点，受力如图(c)所示，由

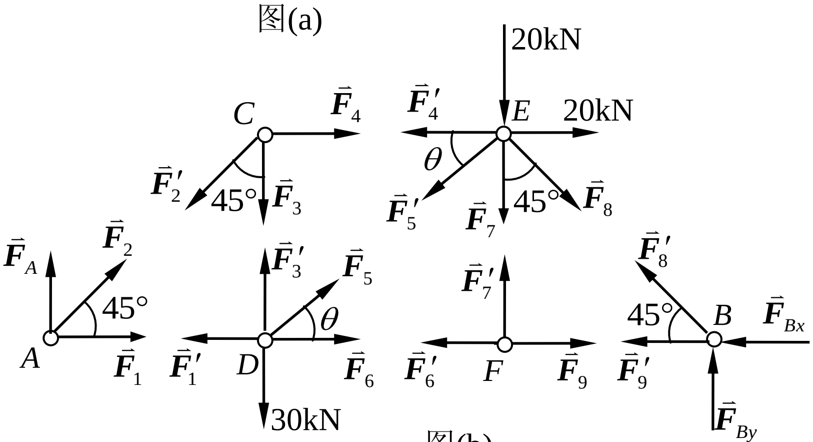
$\sum F_y = 0, \quad F_2 + F_3 \sin\theta - P = 0$，式中 $\sin\theta = \dfrac{CD}{BC} = \dfrac{1.5}{\sqrt{2^2 + 1.5^2}}$

解得　$F_3 = -1.667P$（压）

2.15 用节点法求图示桁架各杆件的内力。



图(a)



图(b)

[**解**] (1)整体研究，受力如图(a)。

$$\sum M_B(\vec{F})=0,\ -F_A\cdot 10+30\times 7+20\times 3-20\times 3=0$$
$$\sum F_y=0,\quad F_A-30-20+F_{By}=0$$

，解得 $\begin{cases}F_A=21\,(\text{kN})\\F_{By}=29\,(\text{kN})\end{cases}$

(2)分别研究各节点，受力如图(b)。

A 节点：

$$\begin{cases}\sum F_x=0,\ F_1+F_2\cos 45^\circ=0\\ \sum F_y=0,\ F_A+F_2\sin 45^\circ=0\end{cases}$$

，解得 $\begin{cases}F_1=21\,(\text{kN})\\F_2=-29.7\,(\text{kN})\end{cases}$

C 节点：

$$\begin{cases}\sum F_x=0,\ F_4-F_2'\sin 45^\circ=0\\ \sum F_y=0,\ -F_3-F_2'\cos 45^\circ=0\end{cases}$$

，解得 $\begin{cases}F_3=21\,(\text{kN})\\F_4=-21\,(\text{kN})\end{cases}$

D 节点：

$$\begin{cases}\sum F_x=0,\ F_5\cos\theta+F_6-F_1'=0\\ \sum F_y=0,\ F_5\sin\theta+F_3'-30=0\end{cases}$$

$\sin\theta=0.6,\ \cos\theta=0.8$ ，解得 $F_5=15\,(\text{kN}), F_4=9\,(\text{kN})$

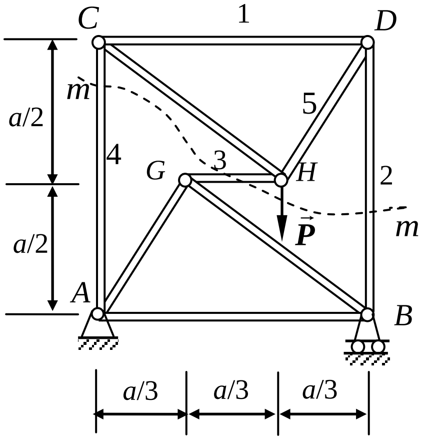
F 节点：

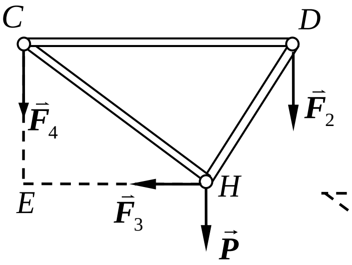
$$\begin{cases}\sum F_x = 0\text{，}F_9 - F_6' = 0\\ \sum F_y = 0\text{，}F_7 = 0\end{cases}$$ 解得 $F_7 = 0\,(\text{kN}),\ F_9 = 9\,(\text{kN})$

B 节点：

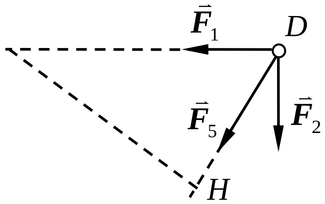
$\sum F_y = 0\text{，}F_8 \sin 45° + F_{By} = 0$，解得 $F_8 = -41\,(\text{kN})$

2.16 已知载荷 ***P*** 及尺寸，求图示平面桁架 1、2、3 杆的内力。





图(b)



图(c)

解：(1)作 mm 截面，取上部研究，受力如图(b)。

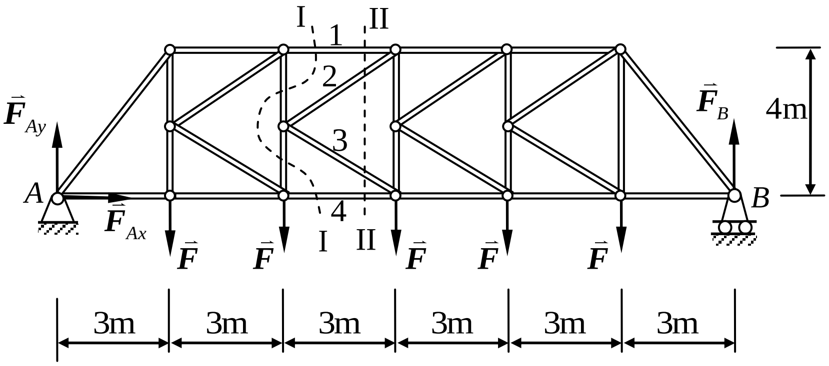
$$\begin{cases}\sum F_x = 0\text{，}-F_3 = 0\\ \sum M_E(\vec{F}) = 0\text{，}-P\left(\dfrac{2a}{3}\right) - F_2(a) = 0\end{cases}$$ ，解得 $F_3 = 0$，$\underline{F_2 = -\dfrac{2}{3}P}$

(2)研究节点 D，受力如图(c)。

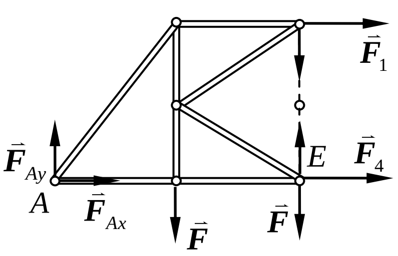
$\sum M_H(\vec{F}) = 0$，$F_1\left(\dfrac{a}{2}\right) - F_2\left(\dfrac{a}{3}\right) = 0$ ，解得 $\underline{F_1 = -\dfrac{4}{9}P}$

即：杆 1、2 均为压杆，受压力分别为 $\underline{\dfrac{4}{9}P}$ 和 $\underline{\dfrac{2}{3}P}$，杆 3 不受力。

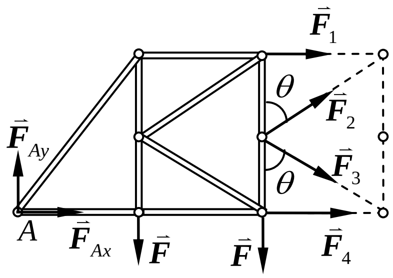
2.17 试计算图示桁架中指定杆件的内力。图中 $F = 8\text{kN}$。



(a)



(b)



(c)

解：(1) 研究系统，受力如图(a)。

$$\sum F_x = 0,\ F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_A(\vec{F}) = 0,\ 18F_B - 15F - 12F - 9F - 6F - 3F = 0$$

$$\sum M_B(\vec{F}) = 0,\ 15F + 12F + 9F + 6F + 3F - 18F_{Ay} = 0$$

解得 $F_{Ax} = 0$，$F_{Ay} = 20\ (\mathrm{kN})$，$F_B = 20\ (\mathrm{kN})$

研究截面 I-I 左半部，受力如图(b)。

$$\sum M_E(\vec{F}) = 0,\ -6F_{Ay} - 4F_1 + 3F = 0$$

$$\sum F_x = 0,\ F_1 + F_4 + F_{Ax} = 0$$

解得 $\underline{F_1 = -24\ (\mathrm{kN})}$，$\underline{F_4 = 24\ (\mathrm{kN})}$

研究截面 II-II 左半部，受力如图(c)。

$$\sum M_G(\vec{F}) = 0,\ -9F_{Ay} - 4F_1 + 6F + 3F - 2F_1 \sin\theta - 3F_2 \cos\theta = 0$$

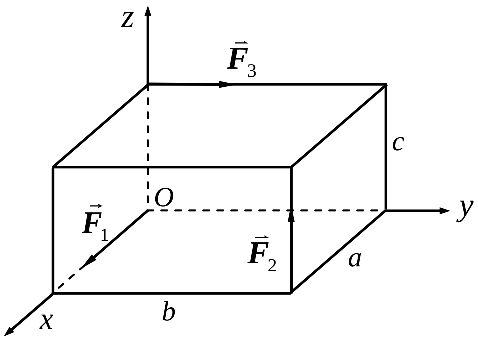
$$\sum F_x = 0,\ F_1 + F_4 + F_{Ax} + F_2 \sin\theta + F_3 \sin\theta = 0$$

式中 $\sin\theta = \dfrac{3}{\sqrt{13}}, \cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{13}},$

解得 $\underline{F_2 = -3.6\ (\mathrm{kN})}$，$\underline{F_3 = 3.6\ (\mathrm{kN})}$

三、空间力系

3.1 边长为$a \times b \times c$的长方体受力如图，$F_1 = F_2 = F_3 = F$，①试求力系向 O 点简化的结果。② 求该力系简化为一个合力需要满足的条件。



解：①矢量表示各力：$\vec{\boldsymbol{F}}_1 = F\,\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{F}}_2 = F\,\vec{\boldsymbol{k}}, \vec{\boldsymbol{F}}_3 = F\,\vec{\boldsymbol{j}},$

力系向 O 点简化的主矢$\vec{\boldsymbol{F}}_R = \sum \vec{\boldsymbol{F}}_i = F_1\vec{\boldsymbol{i}} + F_3\vec{\boldsymbol{j}} + F_2\vec{\boldsymbol{k}} = F(\vec{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{j}} + \vec{\boldsymbol{k}})$，

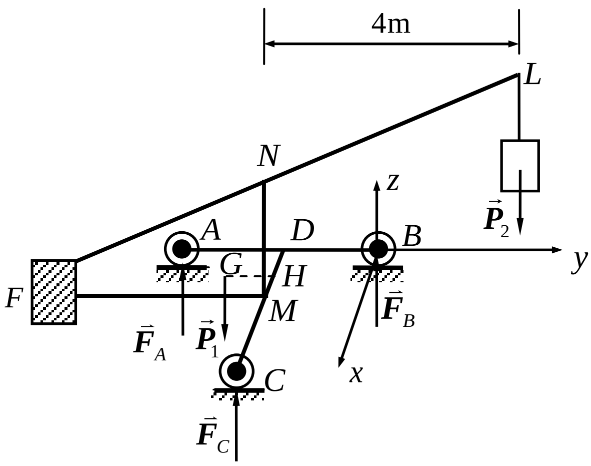
主矩 $\vec{\boldsymbol{M}}_O = (F_2 b - F_3 c)\vec{\boldsymbol{i}} - F_2 a\,\vec{\boldsymbol{j}} + 0\vec{\boldsymbol{k}} = F(b-c)\vec{\boldsymbol{i}} - Fa\,\vec{\boldsymbol{j}}$

②力系简化为一个合力需要满足的条件是$\vec{\boldsymbol{F}}_R \perp \vec{\boldsymbol{M}}_O$，

$\vec{\boldsymbol{F}}_R \cdot \vec{\boldsymbol{M}}_O = 0$， $F \cdot F(b-c) + F \cdot (-Fa) = 0$，

得该力系简化为一个合力需要满足的条件是 $\underline{a = b - c}$

3.2 已知 起重机装在三轮小车ABC上，尺寸为：AD=DB=1m，CD=1.5m，CM=1m，KL=4m。机身连同平衡锤F共重P_1=100kN，作用在G点，G点在平面$LMNF$之内，GH=0.5m。所举重物 P_2=30kN。求 当起重机的平面 LMN 平行于 AB 时车轮对轨道的压力。



[**解**] 研究起重机，受力如图，由

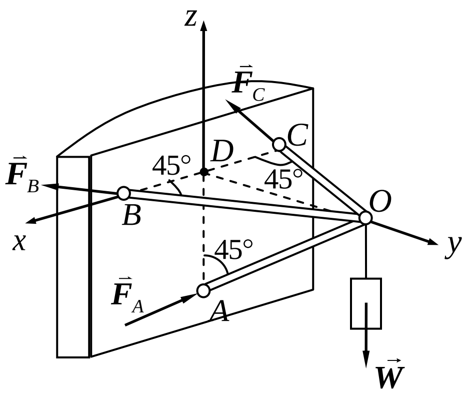
$$\sum M_y(\vec{\boldsymbol{F}}) = 0, -F_C \cdot \mathrm{CD} + (P_1 + P_2) \cdot \mathrm{DM} = 0$$

$$\sum M_x(\vec{F})=0,\quad -F_A\cdot \mathrm{AB}-F_C\cdot \mathrm{DB}-3P_2+1.5P_1=0$$

$$\sum F_z=0,\quad F_A+F_B+F_C-P_1-P_2=0$$

代入数据，解得：$\underline{F_A=8\frac{1}{3}\,\mathrm{kN}}$；$\underline{F_B=78\frac{1}{3}\,\mathrm{kN}}$；$\underline{F_C=43\frac{1}{3}\,\mathrm{kN}}$。

3.3 如图所示支架，三根不计自重的直杆用球铰链连结于点 *O*，平面 *BOC* 为水平面，*OB*=*OC*，*AD* 垂直于 *BC*，*BD*=*DC*，角度如图。铰链 *O* 处挂一重物 *W*=1kN。求三杆所受的力。



[**解**] 三杆均为二力杆，该系统受力如图所示，由

$$\sum F_x=0,\quad F_B\cos 45^\circ - F_C\cos 45^\circ =$$

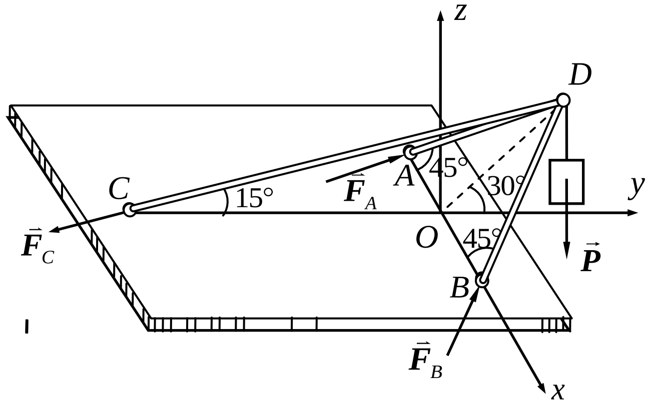
$$\sum F_y=0,\quad -F_B\sin 45^\circ - F_C\sin 45^\circ + F_A\sin$$

$$\sum F_z=0,\quad F_A\cos 45^\circ - W =$$

代入数据$W=1000\mathrm{N}$，解得：$\underline{F_A=1414\mathrm{N}}$（压），$\underline{F_B=F_C=707\mathrm{N}}$（拉）。

3.4 如图所示支架，三根不计自重的直杆在 *D* 端用球铰链连接。空间构架由三根无重直杆组成， *A*、*B* 和 *C* 端则用球铰链固定在水平地板上。*D* 端所挂物重 *P*=10 kN。

求： 铰链 *A*、*B* 和 *C* 的反力。



[**解**] 三杆均为二力杆，球铰 *A*、*B* 和 *C* 的约束力分别沿各杆轴线方向。系统受力如图。

列平衡方程：

$$\sum F_x = 0,\quad F_A \cos 45^\circ - F_B \cos 45^\circ = 0$$

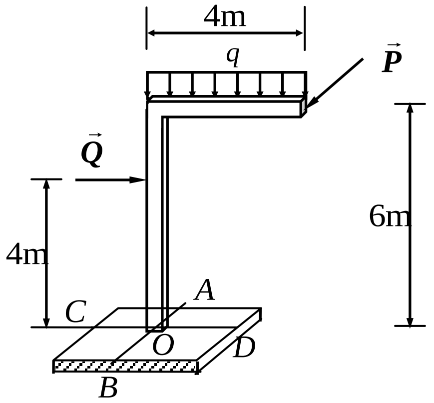
$$\sum F_y = 0,\quad F_A \sin 45^\circ \cos 30^\circ + F_B \sin 45^\circ \cos 30^\circ - F_C \cos 15^\circ = 0$$

$$\sum F_z = 0,\quad F_A \sin 45^\circ \sin 30^\circ + F_B \sin 45^\circ \sin 30^\circ - F_C \sin 15^\circ - P = 0$$

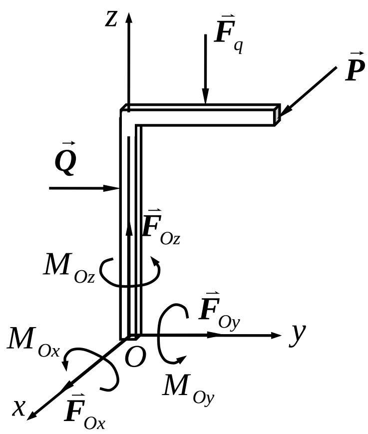
解得： $F_A = F_B = 26.39\ (\mathrm{kN})$（压）

$F_C = 33.46$ (k（拉）

3.5 已知 q=2kN/m；P=5kN，Q=4kN，作用线分别平行于 AB、CD。求固定端 O 处的约束反力。



(a)



(b)

[**解**] 研究悬臂钢架，其受力如图(b)，其中均布载荷用合力$\boldsymbol{F}_q$代替，且$F_q = 4q = 8\text{kN}$ 。

由$\sum F_x = 0, \quad F_{Ox} + P = 0$

$\sum F_y = 0, \quad F_{Oy} + Q = 0$

$\sum F_z = 0, \quad F_{Oz} - F_q = 0$

$\sum M_x(\vec{\boldsymbol{F}}) = 0, \quad M_{Ox} - Q \cdot 4 - F_q \cdot 2 = 0$

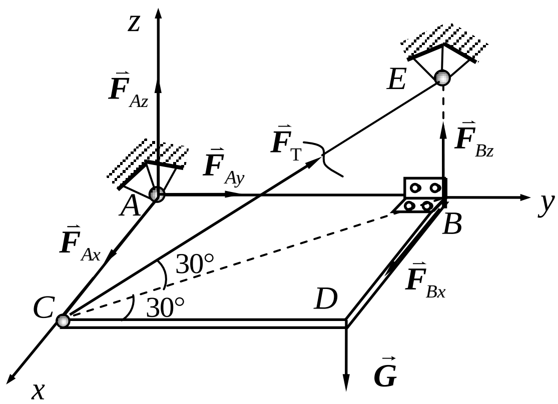
$\sum M_y(\vec{\boldsymbol{F}}) = 0, \quad M_{Oy} - P \cdot 6 = 0$

$\sum M_z(\vec{\boldsymbol{F}}) = 0, \quad M_{Oz} - P \cdot 4 = 0$

解得： $\underline{F_{Ox} = -5\text{kN}}$；$\underline{F_{Oy} = -4\text{kN}}$；$\underline{F_{Oz} = 8\text{kN}}$；

$\underline{M_{Ox} = 32\text{kN} \cdot \text{m}}$；$\underline{M_{Oy} = -30\text{kN} \cdot \text{m}}$；$\underline{M_{Oz} = 20\text{kN} \cdot \text{m}}$

3.6 板 $ABCD$ 重量不计，用球铰链 A 和蝶铰链 B 固定在墙上，细绳 CE 维持于水平位置，BE 铅直。D 点受到一个平行于铅直轴 z 的力 G = 500N。$\angle BCD = 30^{\circ}$，$\angle BCE = 30^{\circ}$。设蝶铰链不产生 y 方向的约束反力。求细绳拉力和铰链反力。



[**解**]　　研究矩形薄板 *ABDC*，受力如图所示，由

$$\sum F_x = 0,\quad F_{Ax} + F_{Bx} - F_{\mathrm{T}}\cos 30^{\circ}\sin 30^{\circ} = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_{Ay} + F_{\mathrm{T}}\cos 30^{\circ}\cos 30^{\circ} = 0$$

$$\sum F_z = 0,\quad F_{Az} + F_{Bz} + F_{\mathrm{T}}\sin 30^{\circ} - G = 0$$

$$\sum M_x(\vec{F}) = 0,\quad F_{Bz}\cdot \mathrm{AB} - G\cdot \mathrm{CD} = 0$$

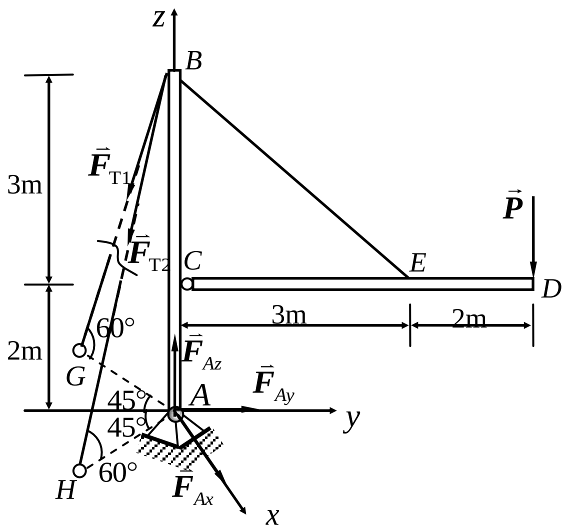
$$\sum M_y(\vec{F}) = 0,\quad G\cdot \mathrm{BD} - F_{\mathrm{T}}\sin 30^{\circ}\cdot \mathrm{AC} = 0$$

$$\sum M_z(\vec{F}) = 0,\quad F_{\mathrm{T}}\cos 30^{\circ}\cos 30^{\circ}\cdot \mathrm{AC} - F_{Bx}\cdot \mathrm{AB} = 0$$

代入数据 G = 500N，联立解得：

$$\underline{F_{Ax} = 0, F_{Ay} = -750\mathrm{N}, F_{Az} = -500\mathrm{N}, F_{Bx} = 433\mathrm{N}, F_{Bz} = 500\mathrm{N}, F_{\mathrm{T}} = 1000\mathrm{N}}$$

3.7 已知扒杆如图所示，竖杆 *AB* 用两绳拉住，并在 *A* 点用球铰约束，*P*=20kN。求两绳中的拉力和 *A* 处的约束力。



[**解**]取 *ABCDE* 研究，受力如图。由平衡方程

$$\sum F_x = 0,\quad F_{Ax} - F_{T1}\cos 60^\circ \cos 45^\circ + F_{T2}\cos 60^\circ \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_{Ay} - F_{T1}\cos 60^\circ \sin 45^\circ - F_{T2}\cos 60^\circ \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum F_z = 0,\quad F_{Az} - F_{T1}\sin 60^\circ - F_{T2}\sin 60^\circ - P = 0$$

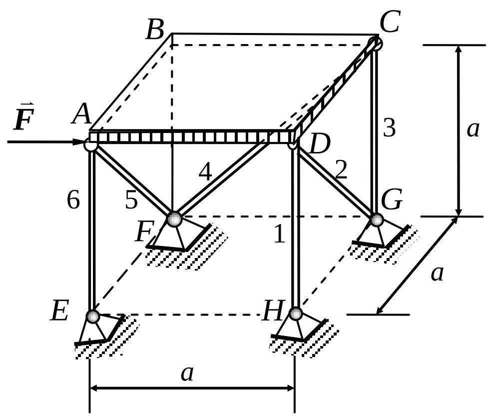
$$\sum M_x(\vec{F}) = 0,\quad 5F_{T1}\cos 60^\circ \sin 45^\circ + 5F_{T2}\cos 60^\circ \sin 45^\circ - 5P = 0$$

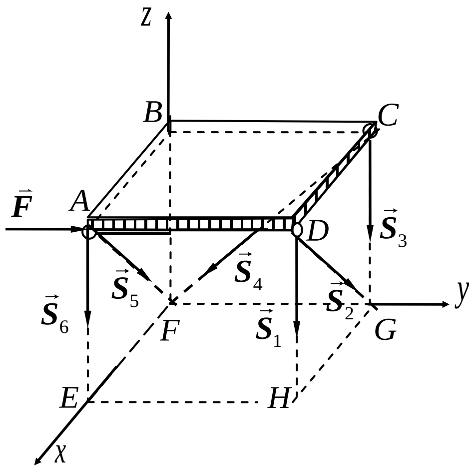
$$\sum M_y(\vec{F}) = 0,\quad -5F_{T1}\cos 60^\circ \cos 45^\circ + 5F_{T2}\cos 60^\circ \cos 45^\circ = 0$$

代入数据：*P*=20kN，联立解得：

$$\underline{F_{T1} = F_{T2} = 28.3\,\text{kN},\ F_{Ax} = 0\,\text{kN},\ F_{Ay} = 20\,\text{kN},\ F_{Az} = 69\,\text{kN}}$$

3.8 如图所示，六杆支撑一正方形板 *ABCD*，在板角 *A* 处作用水平力 *F*。设板和各杆自重均不计，求各杆内力。





[**解**]

取板 *ABCD* 研究，受力如图。

由平衡方程

$\sum F_y = 0$， $-S_4 \cos 45^\circ + F =$ ，

$\sum M_{AD}(\vec{F}) = 0,\ -S_4 \cos 45^\circ a - S_3 a = 0$ ，

$\sum M_{AE}(\vec{F}) = 0,\ S_2 \cos 45^\circ a + S_4 \cos 45^\circ a = 0$ ，

$\sum F_x = 0,\quad -S_5 \cos 45^\circ - S_2 \cos 45^\circ = 0$ ，

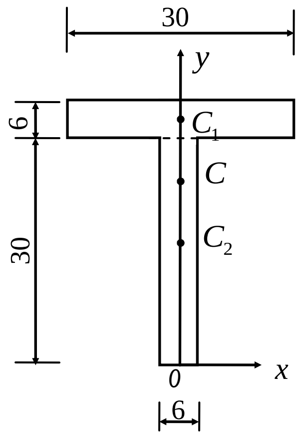
$\sum M_{DC}(\vec{F}) = 0,\quad S_6 a + S_5 \cos 45^\circ a = 0$ ，

$\sum M_{GF}(\vec{F}) = 0,\quad S_1 a + S_6 a = 0$ ，

解得：$\underline{S_1 = F,\ S_2 = -\sqrt{2}F,\ S_3 = -F,\ S_4 = \sqrt{2}F,\ S_5 = \sqrt{2}F,\ S_6 = -F}$ 。

（负值说明该杆为压杆）

3.9　　平面图形及尺寸如图，单位为 cm。求形心 *C* 的位置。



（1）

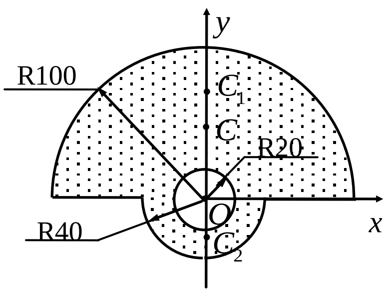
[**解**] (1)　取坐标系如图，将该图形分为上下两个矩形，

矩形 1 形心 C_1 点坐标：$x_1 = 0\,(\text{cm}), y_1 = 33\,(\text{cm})$，面积：$S_1 = 30 \times 6 = 180\,(\text{cm}^2)$

矩形 2 形心 C_2 点坐标：$x_2 = 0\,(\text{cm}), y_2 = 15\,(\text{cm})$，面积：$S_2 = 30 \times 6 = 180\,(\text{cm}^2)$

系统形心：　$x_C = \dfrac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = 0\,(\text{cm})$

$$y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{33 \times 180 + 15 \times 180}{180 + 180} = 24\,(\text{cm})$$



（2）

(2)　取坐标系如图，将该图形分为成三部分：

上半圆 R100，形心 C_1 坐标：$x_1 = 0, y_1 = \dfrac{4 \times 100}{3\pi} = 42.5\,(\text{cm})$，

$$\text{面积：}S_1 = \frac{\pi \times 100^2}{2} = 15700\,(\text{cm}^2)$$

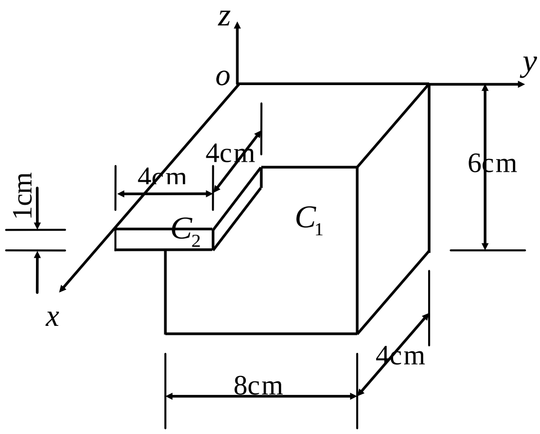
下半圆 R40，形心 C_2 坐标：$x_2 = 0, y_2 = -\dfrac{4 \times 40}{3\pi} = -17\,(\text{cm})$，

面积： $S_2=\dfrac{\pi\times 40^2}{2}=2512\,(\mathrm{cm}^2)$

空心圆 R20，形心 O 坐标： $x_3=0, y_3=0$，面积： $S_3=-\pi\times 20^2=-1256\,(\mathrm{cm}^2)$，

因此：$\underline{x_C=\dfrac{x_1S_1+x_2S_2+x_3S_3}{S_1+S_2+S_3}=0\,(\mathrm{cm})}$，$\underline{y_C=\dfrac{y_1S_1+y_2S_2+y_3S_3}{S_1+S_2-S_3}=36.78\,(\mathrm{cm})}$

3.10 已知机器基础由均质物体组成，均质块尺寸如图所示。求均质块重心的位置。



[解] 取坐标系如图，将均质块分为两个长方体，

长方体 1 体积：$V_1=8\times4\times6=192\,(\mathrm{cm}^3)$

重心（形心）C_1 坐标： $x_1=2\,(\mathrm{cm}), y_1=4\,(\mathrm{cm}), z_1=-3\,(\mathrm{cm})$

长方体 2 体积：$V_2=4\times4\times1=16\,(\mathrm{cm}^3)$，

重心（形心）C_2 坐标： $x_2=6\,(\mathrm{cm}), y_2=2\,(\mathrm{cm}), z_2=-0.5\,(\mathrm{cm})$

所以， $x_C=\dfrac{\sum V_ix_i}{\sum V_i}=\dfrac{192\times2+16\times6}{192+16}=2.31\,(\mathrm{cm})$

$$y_C=\frac{\sum V_iy_i}{\sum V_i}=\frac{192\times4+16\times2}{192+16}=3.85\,(\mathrm{cm})$$

$$z_C=\frac{\sum V_iz_i}{\sum V_i}=\frac{192\times(-3)+16\times(-0.5)}{192+16}=-2.81\,(\mathrm{cm})$$

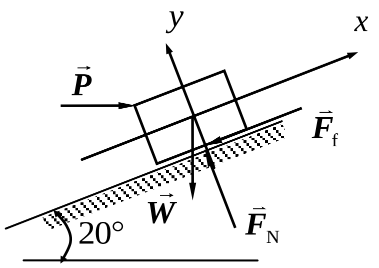
即物块重心坐标为 $\underline{(2.31, 3.85, -2.81)\mathrm{cm}}$。

四、摩擦

4.1 物块重 $W = 980\text{N}$，放在粗糙的斜面上，与斜面间的静摩擦系数 $f_{\text{s}} = 0.20$，动摩擦系数 $f_{\text{d}} = 0.17$。当水平主动力分别为 $P = 500\ \text{N}$ 和 $P = 100\ \text{N}$ 两种情况时，

（1） 物块是否滑动；

（2） 求实际的摩擦力的大小和方向。



[**解**] 设物块处于平衡状态，且有向上的运动趋势，摩擦力 $\vec{F}_{\text{s}}$ 方向沿斜面向下，取直角坐标系如图，有

$$\sum F_x = 0,\quad P\cos 20^{\circ} - W\sin 20^{\circ} - F_{\text{s}} = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_{\text{N}} - W\cos 20^{\circ} - P\sin 20^{\circ} = 0$$

（1）当 $P = 500\ \text{N}$ 时，解得 $F_{\text{N}} = 1091.91\ (\text{N})$， $F_{\text{s}} = 134.67\ (\text{N})$

此时最大静摩擦力为 $F_{\max} = f_{\text{s}} F_{\text{N}} = 1091.91 \times 0.20 = 218.38\text{N}$，

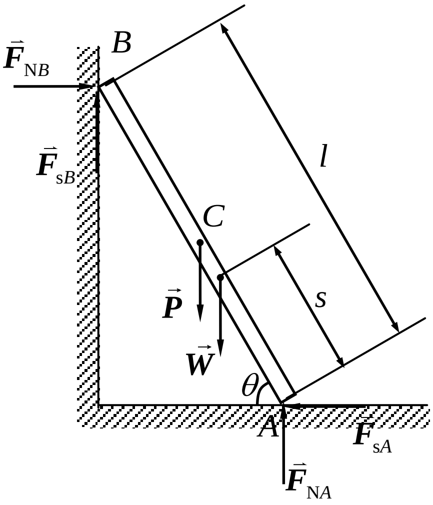
满足 $F_{\text{s}} \le F_{\max}$，所以物块静止，所受摩擦力为静摩擦力，大小为 $F_{\text{s}} = 134.67\ (\text{N})$，方向沿斜面向下。

（2）当 $P = 100\ \text{N}$ 时，解得 $F_{\text{N}} = 955.10\ (\text{N})$， $F_{\text{s}} = -241.21\ (\text{N})$，摩擦力为负值，说明其真实方向与假设相反，且此时最大静摩擦力为

$$F_{\max} = f_{\text{s}} F_{\text{N}} = 0.20 \times 955.10 = 191.$$

$|F_{\text{s}}| \ge F_{\max}$，这是不可能出现的，所以物块沿斜面向下滑动，所受摩擦力为滑动摩擦力，大小为 $\underline{F_{\text{d}} = f_{\text{d}} F_{\text{N}} = 0.17 \times 955.10 = 162.37\ (\text{N})}$ 方向沿斜面向向上。

4.2 已知 梯子 AB 重为 $P = 200\ \text{N}$，梯长 l，与水平夹角 $\theta = 60^{\circ}$。接触面间的摩擦系数均为 0.25。人重 $W = 650\ \text{N}$。求人所能达到的最高点 C 到 A 点的距离 s 应为多少？



[**解**] 研究梯子 *AB*，受力如图所示，刚要滑动时，*A*、*B* 两处都达到最大静摩擦力。列平衡方程：$\sum F_x = 0,\quad F_{NB} - F_{sA} = 0$ (a)

$$\sum F_y = 0,\quad F_{NA} + F_{sB} - P - W = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\sum M_A(\vec{F}) = 0,\quad P\frac{l}{2}\cos\theta + Ws\cos\theta - F_{NB}l\sin\theta - F_{sB}l\cos\theta = 0 \qquad \text{(c)}$$

考虑临界平衡条件（即梯子将动而尚未动时）摩擦力均达最大值，有

$$F_{sA} = f_s F_{NA} \qquad \text{(d)}$$

$$F_{sB} = f_s F_{NB} \qquad \text{(e)}$$

代入数据：$P = 200\ \text{N}, W = 650\ \text{N},\ f_s = 0.25, \theta = 60°$，联立以上 5 式，解得:

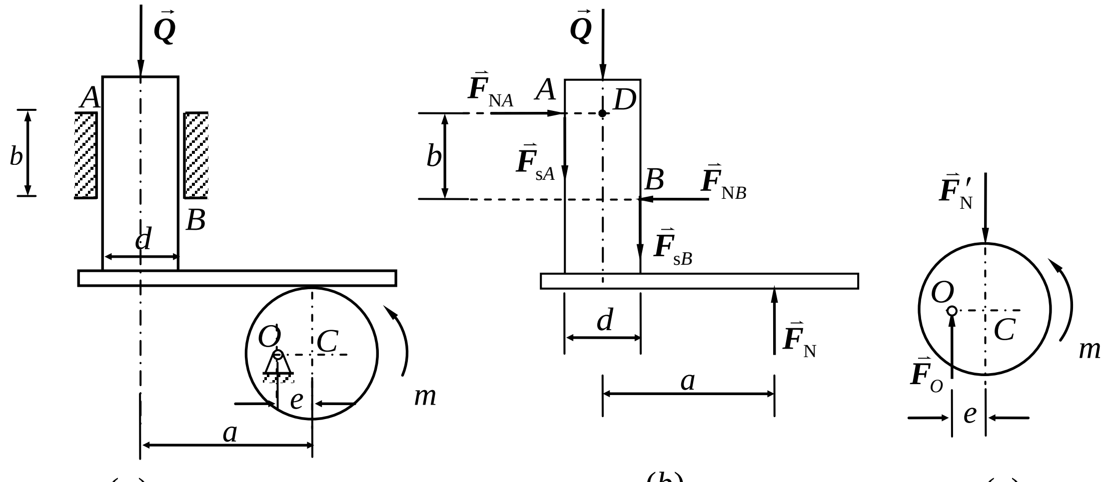
$$F_{NA} = \frac{P+W}{1+f_s^2} = 800\ (\text{N}),\quad F_{sA} = 200(\text{N}),$$

$$F_{NB} = \frac{f_s}{1+f_s^2}(P+W) = 200\ (\text{N}),\quad F_{sB} = 50(\text{N})$$

$$s = \frac{l}{W}\left[\left(\sqrt{3} + f_s\right)F_{NB} + \frac{1}{2}P\right] = 0.456l$$

即：人所能达到的最高点 *C* 到 *A* 点的距离为 $\underline{s = 0.456l}$

4.3 如图凸轮推杆机构中，推杆 AB 与滑道间的摩擦系数为 f，滑道宽为 b；偏心轮上作用一力偶 m；推杆轴受铅直力 Q。偏心轮与推杆间的摩擦忽略不计。求 b 的尺寸为多少时，推杆才不致被卡住。



(a) (b) (c)

[**解**] 研究推杆 AB，受力分析如图(b)。设系统处于临界平衡状态，推杆有向上运动的趋势，则 A、B 处的摩擦力方向向下。列平衡方程：

$$\sum F_x = 0, \quad F_{NA} - F_{NB} = 0 \tag{a}$$

$$\sum F_y = 0, \quad -Q - F_{sA} - F_{sB} + F_N = 0 \tag{b}$$

$$\sum M_D(\vec{F}) = 0,\ F_N a + F_{sA}\frac{d}{2} - F_{sB}\frac{d}{2} - F_{NB} b = 0 \tag{c}$$

考虑临界平衡条件（即推杆将动而尚未动时）A、B 处的摩擦力均达最大值，有

$$F_{sA} = fF_{NA} \tag{d}$$

$$F_{sB} = fF_{NB} \tag{e}$$

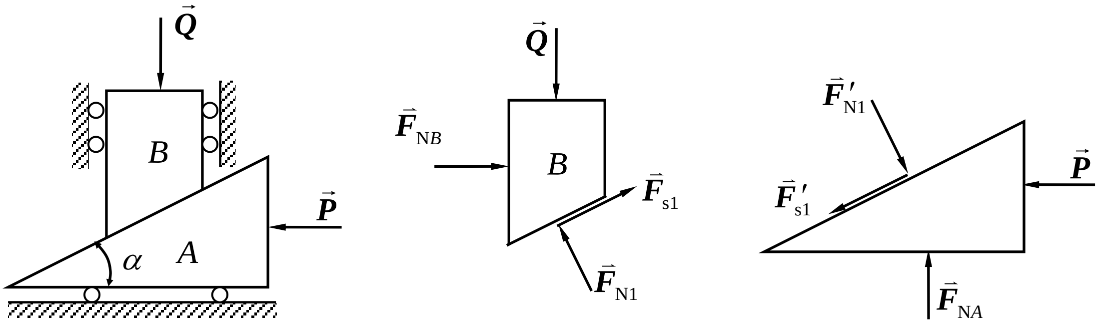
再研究凸轮，受力如图(c)。图中 $F'_N = F_N$。列平衡方程：

$$\sum M_O(\vec{F}) = 0, \quad m - F'_N e = 0 \tag{f}$$

联立以上 6 式，解得：$b = \dfrac{2afm}{m - Qe}$

推杆不致被卡住的条件为：$\underline{b > \dfrac{2afm}{m - Qe}}$

4.4 已知尖劈 A 的顶角为θ, 在 B 块上受力 $\boldsymbol{Q}$ 的作用。A 与 B 块间的静摩擦系数为 f_s（其他有滚珠处表示光滑）。不计 A 和 B 块的重量，求（1）顶住物块所需的力 $\boldsymbol{P}$ 的值；（2）使物块不向上移动所需的力 $\boldsymbol{P}$ 的值。



(*a*) (*b*) (*c*)

解法 1 (1) 求顶住物块所需的力 $\boldsymbol{P}$ 的值，即求最小值$P_{\min}$，此时物块 B 有下滑的趋势，受力如图(b)所示，列平衡方程

$$\sum F_y = 0,\quad F_{\mathrm{N1}}\cos\theta + F_{\mathrm{s1}}\sin\theta - Q = 0$$

再研究物块 A，受力如图(c)所示，列平衡方程

$$\sum F_x = 0,\quad -F'_{\mathrm{s1}}\cos\theta + F'_{\mathrm{N1}}\sin\theta - P_{\min} = 0$$

临界平衡时，有 $F_{\mathrm{s1}} = f_s F_{\mathrm{N1}}$

解得 $P_{\min} = \dfrac{\sin\theta - f_s\cos\theta}{\cos\theta + f_s\sin\theta}Q$

(2) 使物块不向上移动所需的力 $\boldsymbol{P}$ 的值，即求最大值$P_{\max}$，此时物块 B 有上滑的趋势，受力图是将图(b)中的$\boldsymbol{F}_{\mathrm{s1}}$ 画成反向，列平衡方程

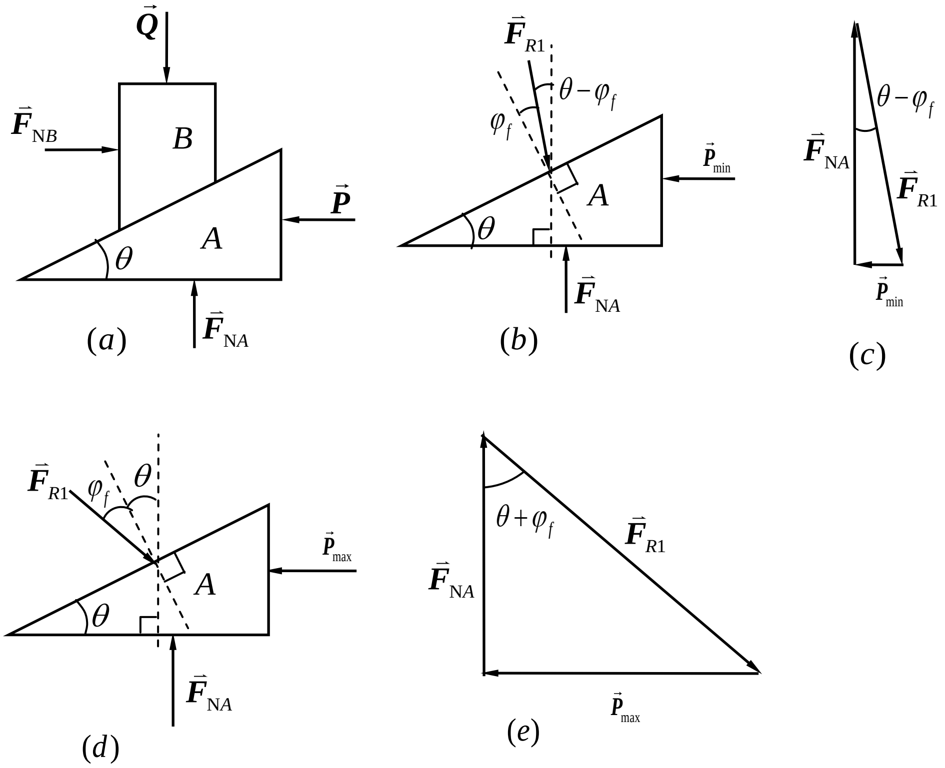
$$\sum F_y = 0,\quad F_{\mathrm{N1}}\cos\theta - F_{\mathrm{s1}}\sin\theta - Q = 0$$

再研究物块 A，受力图是将图(c)中的$\boldsymbol{F}'_{\mathrm{s1}}$ 画成反向，列平衡方程

$$\sum F_x = 0,\quad F'_{\mathrm{s1}}\cos\theta + F'_{\mathrm{N1}}\sin\theta - P_{\max} = 0$$

临界平衡时，有 $F_{\mathrm{s1}} = f_s F_{\mathrm{N1}}$

解得 $P_{\max} = \dfrac{\sin\theta + f_s\cos\theta}{\cos\theta - f_s\sin\theta}Q$



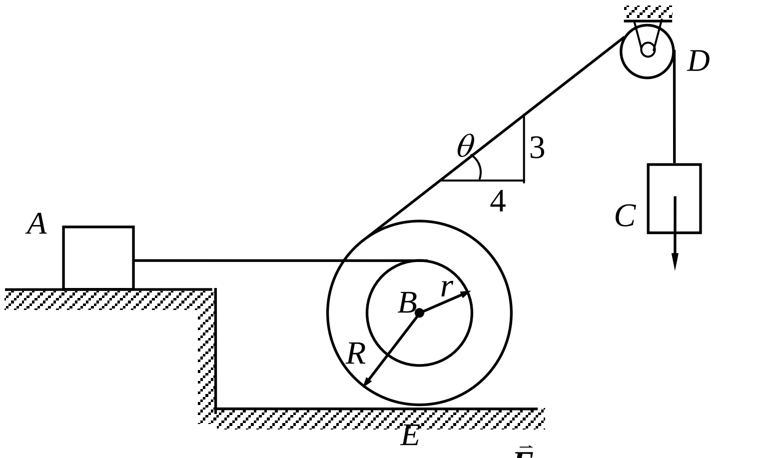
解法 2 研究系统，受力如图(a)，平衡时，由 $\sum F_y=0,\quad F_{NA}-Q=0$ 得：$F_{NA}=Q$

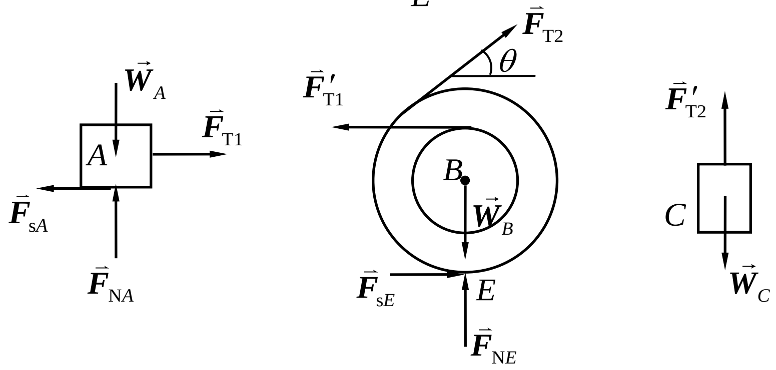
(1) 求顶住物块所需的力 $\boldsymbol{P}$ 的值，即求最小值 $P_{\min}$，此时物块 A 有向右运动的趋势，受力如图(b)，$\boldsymbol{F}_{R1}$ 为物块 B 对物块 A 的全反力，φ_f 为斜面间的摩擦角，且 $\tan\varphi_f=f_s$，物块 A 力三角形如图(c)，解得 $P_{\min}=Q\tan(\theta-\varphi_f)$ 即 $P_{\min}=\dfrac{\sin\theta-f_s\cos\theta}{\cos\theta+f_s\sin\theta}Q$

(2) 使物块不向上移动所需的力 $\boldsymbol{P}$ 的值，即求最大值 $P_{\max}$，此时物块 A 有向左运动的趋势，受力如图(d)，物块 A 力三角形如图(e)，同理可解得 $P_{\max}=Q\tan(\theta+\varphi_f)$

即 $P_{\max}=\dfrac{\sin\theta+f_s\cos\theta}{\cos\theta-f_s\sin\theta}Q$

4.5 物块 A 重 500N，轮轴 B 重 1000N，物 A 与轮轴以水平绳连接。轮轴半径 r＝5cm，R＝10cm，在轮轴上绕以细绳，此绳跨过光滑的滑轮 D，在端点系一重物 C。已知物块 A 与水平面间的静摩擦因数为 0.5，轮轴与水平面间的静摩擦因数为 0.2。求使物体系平衡时物体 C 重量的最大值。





(a)　　(b)　　(c)

[**解**]　物块 A、轮轴 B 及物块 C 受力分别如图(a)、(b)、(c)所示。

设系统处于平衡，有 $F_{T2} = F'_{T2} = W_C$

对物块 A，有，$\sum F_x = 0,\ F_{T1} - F_{sA} = 0,$　　(1)

$\sum F_y = 0,\ F_{NA} - W_A = 0,$　　(2)

对轮轴 B，有，

$\sum F_x = 0,\ F_{T2}\cos\theta - F'_{T1} + F_{sE} = 0$，　　(3)

$\sum F_y = 0,\ F_{T2}\sin\theta - W_B + F_{NE} = 0$，　　(4)

$\sum M_E(\vec{F}) = 0,\ F_{T1}\cdot(R+r) - F_{T2}\cdot(R + R\cos\theta) = 0$，　　(5)

式中 $\cos\theta = \dfrac{4}{5}, \sin\theta = \dfrac{3}{5}$

(1) 先设轮轴即将滚动但不打滑，使物块 A 即将滑动，则

摩擦力 $F_{sA} = f_{sA}F_{NA}$，　　(6)

解得 $W_C = 208\,(\mathrm{N})$

验证：轮轴 B 在 E 处的摩擦力 $F_{sE}=F_{sA}-W_C\cos\theta=250-208\times\dfrac{4}{5}=83.6\,(\mathrm{N})$

$$F_{sE\max}=f_{sE}F_{NE}=f_{sE}(W_B-W_C\sin\theta)=0.2\times\left(1000-208\times\frac{3}{5}\right)=175(\mathrm{N})\ ,$$

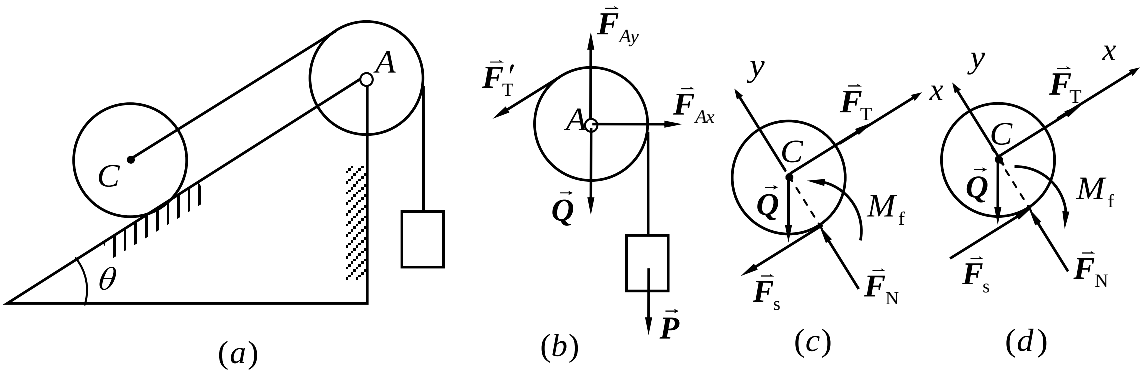
$\therefore F_{sE}=83.6\,(\mathrm{N})<F_{sE\max}=175(\mathrm{N})$ 即轮轴在即将滚动时确实不打滑。

(2) 再设轮轴 B 即将滑动而物块 A 不动，E 处的摩擦力达临界值

$$F_{sE}=f_{sE}F_{NE} \qquad (7)$$

联立(1)、(2)、(3)、(4)、(7)，可解得 $W_C=384.6\,(\mathrm{N})$ $F_{sA}>f_{sA}F_{NA}$(假设不成立)即此时物块 A 已不能平衡。所以，整个系统平衡时物块 C 重量的最大值 $\underline{W_C=208\,(\mathrm{N})}$

4.6 重为 Q 、半径为 R 的均质圆柱 C 放在倾角为 θ 的斜面上，圆柱 C 与斜面间的滚动摩阻系数为δ 。吊有重物的柔绳跨过半径为 R 的滑轮系于圆柱中心 C 上。物块重 P，求(1) 保证圆柱滚动而不滑动，圆柱与斜面的滑动摩擦系数为多少？(2）维持圆柱在斜面上平衡时，物块 P 的重量范围。



[**解**] 取轮 A 及重物研究，受力如图(b)。

$$\sum M_A(\vec{F})=0,\ F'_TR-PR=0\ ,\ \therefore\ F'_T=P$$

(1) 研究圆柱 C，受力如图(c)

$$\sum M_C(\vec{F})=0, M_f-F_sR=0\ ,\ 得\ F_s=\frac{M_f}{R}$$

轮 C 只滚不滑的条件为：$F_s\le f_sF_N$

滚动摩擦定律：$M_f=\delta F_N$，

$F_s=\dfrac{M_f}{R}=\dfrac{\delta F_N}{R}\le f_sF_N$，得保证圆柱纯滚动，圆柱与斜面的滑动摩擦系数为 $\underline{f_s\ge\dfrac{\delta}{R}}$

(2) 取圆柱 C 研究，当 $P=P_{\max}$ 时，圆柱 C 受力如图(c)，此时 $F_T=F'_T=P_{\max}$

$$\sum F_x = 0,\quad F_T - F_s - Q\sin\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0\,,\quad F_N - Q\cos\theta = 0\,,$$

$$\sum M_C(\vec{F}) = 0\,,\quad M_f - F_s R = 0$$

$$\therefore\ P_{\max} = Q\left(\sin\theta + \frac{\delta}{R}\cos\theta\right)$$

当 $P = P_{\min}$ 时，圆柱 C 受力如图(d)，此时 $F_T = F_T' = P_{\min}$

$$\sum F_x = 0,\quad F_T + F_s - Q\sin\theta = 0\,,$$

$$\sum F_y = 0\,,\quad F_N - Q\cos\theta = 0\,,$$

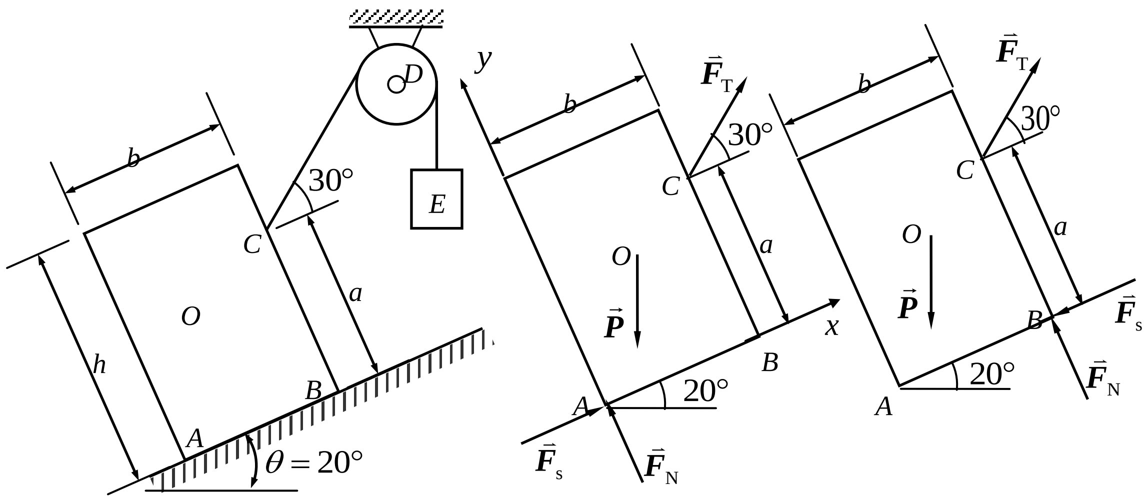
$$\sum M_C(\vec{F}) = 0\,,\quad M_f - F_s R = 0$$

$$\therefore\ P_{\min} = Q\left(\sin\theta - \frac{\delta}{R}\cos\theta\right)$$

圆柱欲保持在斜面上平衡时，物块 P 的重量范围为：

$$Q\left(\sin\theta - \frac{\delta}{R}\cos\theta\right) \le P \le Q\left(\sin\theta + \frac{\delta}{R}\cos\theta\right)$$

4.7　均质箱体 A 的宽度 $b = 1\text{m}$，高 $h = 2\text{m}$，重 $P = 200\text{kN}$，放在倾角为 $\theta = 20°$ 的斜面上。箱体与斜面之间的静摩擦因数 $f_s = 0.2$。今在箱体的 C 点系一无重软绳，方向如图所示，绳的另一端绕过滑轮 D 挂一重物 E。已知 $BC = a = 1.8\text{m}$。求箱体处于平衡状态的重物 E 的重量。



(a)　　(b)　　(c)

解：（1）物 E 重量较小时，临界受力如图(b)所示。

①临界下滑

$$\sum F_x = 0,\quad F_{\mathrm{T}}\cos 30° + F_s - P\sin 20° = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_{\mathrm{N}} - P\cos 20° + F_{\mathrm{T}}\sin 30° = 0$$

且 $F_s = f_s F_{\mathrm{N}}$

解得 $$F_{\mathrm{T}} = \frac{P(\sin 20° - f_s\cos 20°)}{\cos 30° - f_s\sin 30°} = 40.2\ (\mathrm{kN})$$

②临界逆时针绕点 A 翻倒判别：

$$M_A(\vec{\boldsymbol{P}}) = P\sin 20°\cdot\frac{h}{2} - P\cos 20°\cdot\frac{b}{2} < 0$$

又 $F_{\mathrm{T}} \geq 0,\quad M_A(\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{T}}) = F_{\mathrm{T}}\sin 30°\cdot b - F\cos 30°\cdot a < 0$

所以(b)图所示状态不会出现翻倒。

（2）物 E 重量较大时，$\boldsymbol{F}_{\mathbf{T}}$较大，上滑与顺时针倾倒的临界受力如图(c)所示

①临界上滑

$$\sum F_x = 0,\quad F_{\mathrm{T}}\cos 30° - F_s - P\sin 20° = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_{\mathrm{N}} - P\cos 20° + F_{\mathrm{T}}\sin 30° = 0$$

且 $F_s = f_s F_{\mathrm{N}}$

解得

$$F_{\mathrm{T}} = \frac{P(\sin 20° + f_s\cos 20°)}{\cos 30° + f_s\sin 30°} = \frac{200(\sin 20° + 0.2\cos 20°)}{\cos 30° + 0.2\sin 30°} = 109.7\ (\mathrm{kN})$$

②临界顺时针绕点 B 翻倒：

$$\sum M_B(\vec{\boldsymbol{F}}) = 0,\quad F_{\mathrm{T}}\cos 30°\cdot a + P\cos 20°\cdot\frac{b}{2} + P\sin 20°\cdot\frac{h}{2} = 0$$

解得

$$F_{\mathrm{T}} = \frac{P(h\sin 20° + b\cos 20°)}{2a\cos 30°} = \frac{200(2\sin 20° + \cos 20°)}{1.8\cos 30°} = 104\ (\mathrm{kN})$$

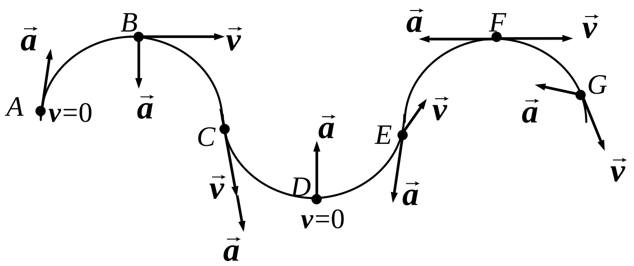
综上所述，箱体处于平衡状态的重物 E 的重量范围是

$$\underline{40.2\ (\mathrm{kN}) \leq F_{\mathrm{T}} \leq 104\ (\mathrm{kN})}$$

第二篇　运动学

五、点的运动学

5.1 已知　　动点各瞬时的速度 v 和加速度 a 的方向如图所示，C、E 为拐点。求哪些情况是可能的，哪些是不可能的，并说明理由。



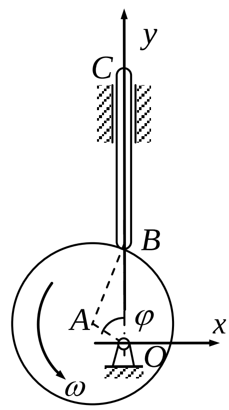
[**答**]　　可能的有 A、B、C、G，不可能 D、E、F。

对 D，$\because v=0 \therefore a_n=\dfrac{v^2}{\rho}=0$

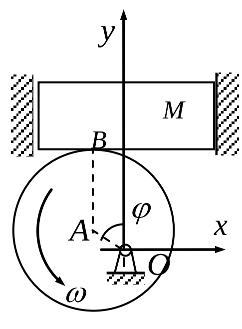
对 E，v 应在轨迹切线方向上

对 F，$\because v\neq 0, \rho\neq\infty \therefore a_n=\dfrac{v^2}{\rho}\neq 0$

5.2 已知（1）圆形凸轮半径为 R，绕 O 轴转动，带动顶杆 BC 作铅直直线平动。凸轮圆心在 A 点，$OA=e$，$\varphi=\omega t$（ω为常量）。求（1）顶杆 BC 端点 B 的运动方程、速度。（2）如把顶杆换成平底物块 M。求物块 M 上 B 点的运动方程、速度和加速度。



(1)



(2)

[**解**]（1）建立坐标系如图，则顶杆 BC 端点 B 的运动方程

$$y=\mathrm{O}A\cdot\cos\varphi+AB\cdot\cos\theta=e\cos\varphi+\sqrt{R^2-e^2\sin^2\varphi}$$

即　$\underline{y=e\cos\omega t+\sqrt{R^2-e^2\sin^2\omega t}}$

点 B 的速度为 $\underline{\dot{y}=-e\omega(\sin\omega t+\dfrac{e\sin 2\omega t}{2\sqrt{R^2-e^2\sin^2\omega t}})}$

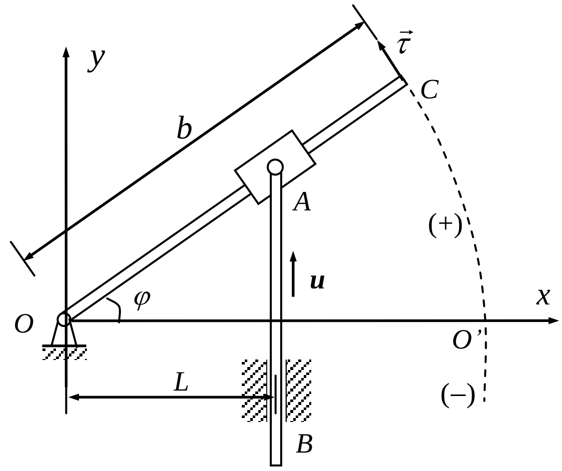
（2）建立坐标系如图，则物块 M 上 B 点的运动方程为

$$y=R+e\cos\varphi=R+e\cos\omega t$$

B 点的速度和加速度分别为

$\underline{\dot{y}=-e\omega\sin\omega t}$　　　$\underline{\ddot{y}=-e\omega^2\cos\omega t}$

5.3 已知摇杆机构的滑杆 *AB* 以匀速 $\boldsymbol{u}$ 向上运动，初瞬时 $\varphi = 0$，摇杆长 *OC*=*b*。（1）用直角坐标法建立摇杆上 *C* 点的运动方程和在 $\varphi = \pi/4$ 时该点的速度。



[**解**]（1）建立如图所示直角坐标系，*C* 点坐标为：

$$x_C = OC \cdot \cos\varphi,\quad y_C = OC \cdot \sin\varphi$$

由 $0 \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$， $\tan\varphi = \dfrac{ut}{L}$

得 *C* 点的运动方程：

$$\underline{x_C = \frac{bL}{\sqrt{L^2 + u^2t^2}}},\quad \underline{y_C = \frac{but}{\sqrt{L^2 + u^2t^2}}}$$

$$v_{Cx} = \dot{x}_C = \frac{-bLu^2t}{\sqrt{(L^2 + u^2t^2)^3}};\quad v_{Cy} = \dot{y}_C = \frac{buL^2}{\sqrt{(L^2 + u^2t^2)^3}}$$

当 $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ 时，$ut = L$，得 $\dot{x}_C = \dfrac{-\sqrt{2}bu}{4L}$；$\dot{y}_C = \dfrac{\sqrt{2}bu}{4L}$

即 $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ 时 *C* 点的速度为 $\underline{v_C = \dfrac{ub}{2L}}$，$\cos(\boldsymbol{v}_C, x) = \dfrac{\dot{x}_C}{v_C} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\boldsymbol{v}_C$ 与 *x* 轴正向夹角为 135°。

（2）建立如图所示弧坐标系，则 *C* 点的弧坐标 $s = b\varphi$，

又 $\tan\varphi = \dfrac{ut}{L}$，$\varphi = \arctan\dfrac{ut}{L}$

$$C \text{ 点的速度为 } v_C = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = b\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = b\frac{\mathrm{d}(\arctan\frac{ut}{L})}{\mathrm{d}t} = b\frac{\frac{u}{L}}{1 + \left(\frac{ut}{L}\right)^2}$$

当 $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ 时，$ut = L$，此时 $\underline{v_C = \dfrac{bu}{2L}}$，方向在图示 $\boldsymbol{\tau}$ 方向上。

5.4 已知点的运动方程：$x=50t$，$y=500-5t^2$，单位为米，秒。求 $t=0$ 时，点的切向加速度、法向加速度及轨迹的曲率半径。

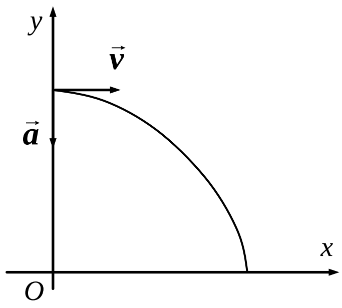
[**解**] 由运动方程可知点的轨迹为抛物线，如图所示；点的速度与加速度为

$$\dot{x}=50,\dot{y}=-10t;\quad \ddot{x}=0,\ddot{y}=-10$$

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{2500+100t^2}\ \ (\mathrm{m/s})$$

$$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=10\quad (\mathrm{m/s^2})$$

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{100t}{\sqrt{2500+100t^2}}$$



当 $t=0$ 时，$v=50\mathrm{m/s}, a=10\mathrm{m/s^2}$，

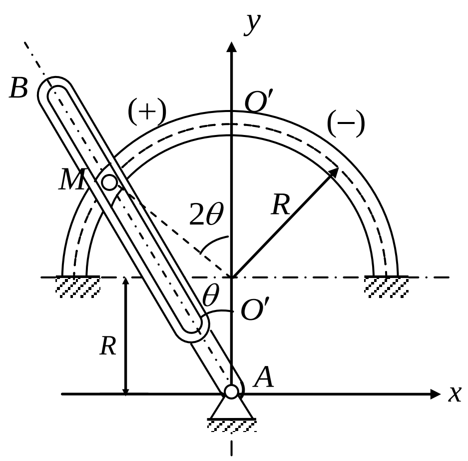
$\boldsymbol{v},\boldsymbol{a}$ 方向如图所示。

点的切向加速度 $a_\tau=0$，

法向加速度 $a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=10\ \mathrm{m/s^2}$，

轨迹的曲率半径 $\rho=\dfrac{v^2}{a_n}=250\,(\mathrm{m})$。

5.5 已知摇杆 AB 在一定范围内以匀角速度绕 A 轴转动，摇杆的角速度 $\omega=\dfrac{\pi}{10}\mathrm{rad/s}$，$\theta=\omega t$，$OA=R$ =10cm。试分别用直角坐标系法和自然法给出动点 M 的运动方程，并求其速度和加速度。



［**解**］（1）直角坐标法。

建立直角坐标系如图，则 M 的坐标为

$$\begin{cases}x_M=-R\sin 2\theta\\ y_M=R(1-\cos 2\theta)=2R\cos^2\theta\end{cases} \text{即} \begin{cases}x_M=-R\sin 2\omega t\\ y_M=2R\cos^2\omega t\end{cases}$$

∴ M 的速度为

$$\dot{x}_M = -2\omega R\cos 2\omega t\text{，}\quad \dot{y}_M = -2\omega R\sin 2\omega t$$

$v_M = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = 2\omega R$，代入数据得 $\underline{v_M = 2\pi}$ (cm/s)

M 的加速度为

$$\ddot{x}_M = 4\omega^2 R\sin 2\omega t\text{，}\quad \ddot{y}_M = -4\omega^2 R\cos 2\omega t\text{，}$$

$\underline{a_M = \sqrt{\ddot{x}_M^2 + \ddot{y}_M^2} = 4\omega^2 R}$ 代入数据得 $\underline{a_M = 0.4\pi^2}$ (cm/s²)

（2）自然法

建立如图所示弧坐标，则 M 的弧坐标为 $s = R(2\theta) = 2R\omega t$

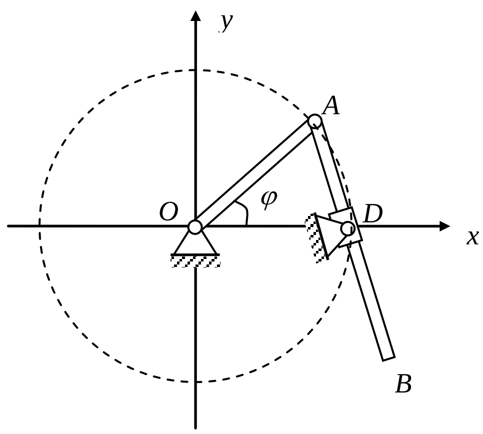
∴ M 的速度为 $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 2R\omega$，代入数据得 $\underline{v_M = 2\pi}$ (cm/s)

M 的加速度为

$$a_\tau = \ddot{s} = 0\text{，}\quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = 4R\omega^2\text{，}$$

$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 4R\omega^2$，代入数据得 $\underline{a_M = 0.4\pi^2}$ (cm/s²)

5.6 曲柄 OA 长 r，在平面内绕 O 轴转动，如图所示，杆 AB 通过固定于点 D 的套筒与曲柄 OA 铰接于 A 点。设 $\varphi = \omega t$，杆 AB 长 $l = 2r$，求点 B 的运动方程、速度和加速度。



[**解**]建立坐标系如图，

$$\because\quad OA = OD = r\text{，}\quad \therefore\quad AD = 2r\sin\frac{\varphi}{2}\text{，}$$

$$BD = AB - AD = 2r\left(1 - \sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\angle ODA = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\text{，}\quad \varphi = \omega t$$

$$\therefore B\text{ 点的坐标为}\begin{cases} x_B = r\cos\varphi + 2r\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varphi}{2}\right) = r\cos\varphi + 2r\sin\dfrac{\varphi}{2} \\ y_B = -2r\left(1 - \sin\dfrac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varphi}{2}\right) = r\sin\varphi - 2r\cos\dfrac{\varphi}{2} \end{cases}$$

或：B 点的运动方程为 $\begin{cases} x_B = r\cos\omega t + 2r\sin\dfrac{\omega t}{2} \\ y_B = r\sin\omega t - 2r\cos\dfrac{\omega t}{2} \end{cases}$

点 B 的速度 $\begin{cases} v_{Bx} = \dot{x}_B = \omega r\left(\cos\dfrac{\omega t}{2} - \sin\omega t\right) \\ v_{By} = \dot{y}_B = \omega r\left(\sin\dfrac{\omega t}{2} + \cos\omega t\right) \end{cases}$，$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = \omega r\sqrt{2 - 2\sin\dfrac{\omega t}{2}}$

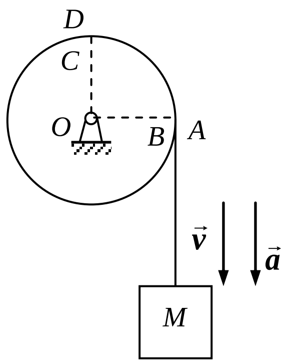
点 B 的加速度 $\begin{cases} a_{Bx} = \ddot{x}_B = \omega^2 r\left(-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\omega t}{2} - \cos\omega t\right) \\ a_{By} = \ddot{y}_B = \omega^2 r\left(\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\omega t}{2} - \sin\omega t\right) \end{cases}$，

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \omega^2 r\sqrt{\frac{5}{4} - \sin\frac{\omega t}{2}}$$

第二篇　运动学

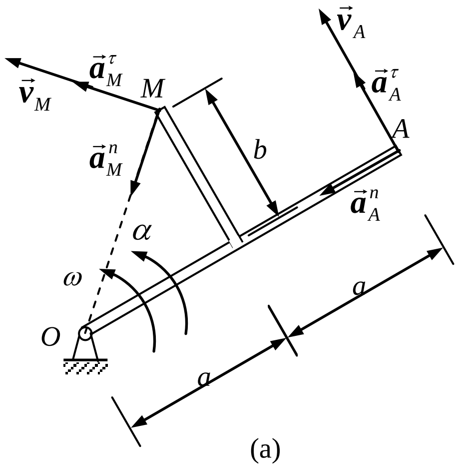
六、刚体的简单运动

6.1　一细绳绕在鼓轮上，绳端系一重物 M，M 以速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 向下运动。绳与鼓轮间无相对滑动。问绳上两点 A、D 和轮缘上两点 B、C 的加速度是否相同？

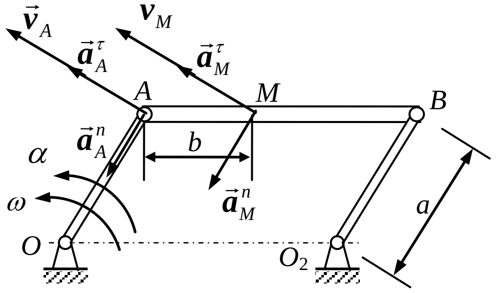


[**答**] 绳上 D 点与轮缘上 C 点的加速度相同；
绳上 A 点与轮缘上 B 点的加速度不相同；
绳上 A 点的加速度等于轮缘上 B 点的切向加速度。

6.2　已知刚体的角速度为ω，角加速度为α，求 A、M 两点的速度、切向和法向加速度的大小，并画出方向。



(a)



(b)

[**解**] (1) A 点：

$$\underline{v_A = 2a\omega}\ ,\quad \begin{cases} a_A^n = 2a\omega^2 \\ a_A^\tau = 2a\alpha \end{cases}$$

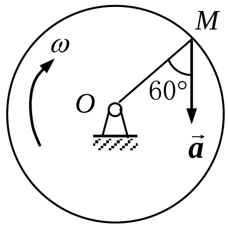
M 点：$\underline{v_M = \omega\sqrt{a^2+b^2}}$ ，

$$\begin{cases} a_M^n = \omega^2\sqrt{a^2+b^2} \\ a_M^\tau = \alpha\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

(2) A 点： $v_A = a\omega$ ， $\begin{cases} a_A^n = a\omega^2 \\ a_A^\tau = a\alpha \end{cases}$

M 点：∵AB 杆作曲线平动，∴ $\underline{v_M = v_A = a\omega}$， $\underline{a_M^n = a_A^n = a\omega^2\ ,\quad a_M^\tau = a_A^\tau = a\alpha}$

6.3　　如图所示，一飞轮绕固定轴 O 转动，其轮缘上任一点 M 的全加速度在某运动过程中与轮半径的交角恒为 60°。当运动开始时，其转角 $\varphi_0 = 0$，角速度为 ω_0。求飞轮的转动方程以及角速度与转角的关系。



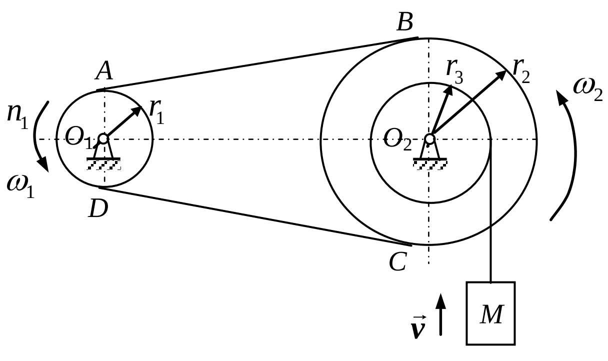
[**解**] 由题知：$\dfrac{a_M^\tau}{a_M^n} = \tan 60°$ ，即 $\dfrac{\alpha}{\omega^2} = \sqrt{3}$ 或 $\dfrac{1}{\omega^2}\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sqrt{3}$

又 $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}$，代入上式并分离变量

得 $\dfrac{1}{\omega}\mathrm{d}\omega = \sqrt{3}\mathrm{d}\varphi$ 　∴ $\underline{\omega = \omega_0 e^{\sqrt{3}\varphi} = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}}$

两边取定积分，t=0 时，$\varphi_0 = 0$ 。得 $\underline{\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\ln\dfrac{1}{1-\sqrt{3}\omega_0 t}}$

6.4 已知轮 I、II、III 的半径分别为 r_1＝30cm，r_2＝75cm，r_3＝40cm，轮 I 的转速 n_1＝100rpm。求物块 M 的上升速度，胶带 AB、BC、CD、DA 各段上点的加速度的大小。



解： $\omega_1 = \dfrac{\pi n_1}{30}$， $\omega_2 = \dfrac{\omega_1 r_1}{r_2}$

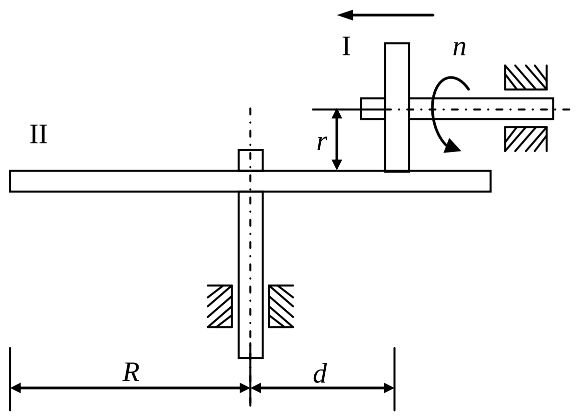
AB 和 *CD* 之间各点作匀速直线运动，
AD 和 *BC* 之间各点作匀速圆周运动，所以

$$a_{AD} = r_1\omega_1^2 = 32.9\,(\text{cm/s}^2)$$

$$a_{BC} = r_2\omega_2^2 = 13.16\,(\text{cm/s}^2)$$

$a_{AB} = a_{CD} = 0$， 物块 *M* 的上升速度 $v_M = r_3\omega_2 = 1.676\,(\text{cm/s})$

6.5 摩擦传动机构的主动轮 I 的转速为 *n*＝600rpm，它与轮 II 的接触点按箭头所示方向移动，距离 *d* 按规律 $d = 10 - 0.5t$ 变化，单位为厘米、秒。 摩擦轮的半径 *r*＝5cm，*R*＝15cm。求（1）以距离 *d* 表示的轮 II 的角加速度，（2）当 *d*＝*r* 时，轮 II 边缘上的一点的全加速度的大小。



[**解**] 两轴角速度为

$$\omega_{\mathrm{I}} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi \cdot 600}{30} = 20\pi\,,$$

$$\omega_{\mathrm{II}} = \frac{r\omega_{\mathrm{I}}}{d} = \frac{5}{d}(20\pi) = \frac{100\pi}{d}\,,$$

则轮 II 的角加速度 $\alpha_{\mathrm{II}} = \dfrac{\mathrm{d}\omega_{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{100\pi}{d^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(10 - 0.5t) = \dfrac{50\pi}{d^2}\ \text{rad/s}^2$

当 *d*＝*r*=5cm 时，

$$\alpha_{\mathrm{II}} = \frac{50\pi}{r^2} = \frac{50\pi}{5^2} = 2\pi\ (\text{rad/s}^2)$$

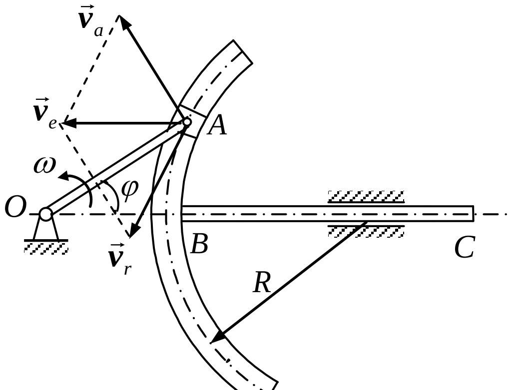
$$\omega_{\mathrm{I}} = \omega_{\mathrm{II}} = \frac{2\pi n}{60} = 20\pi\quad(\text{rad/s})$$

所以，当 *d*＝*r* 时，轮 II 边缘上的一点的全加速度的大小

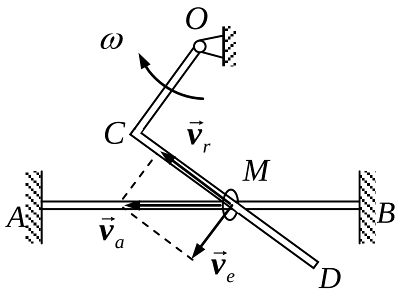
$$a = R\sqrt{\alpha_{\mathrm{II}}^2 + \omega_{\mathrm{II}}^4} = 15\sqrt{(2\pi)^2 + (20\pi)^4} = 59218\,(\text{cm/s}^2)$$

七、点的合成运动

7.1 图中的速度平行四边形有无错误？错在哪里？

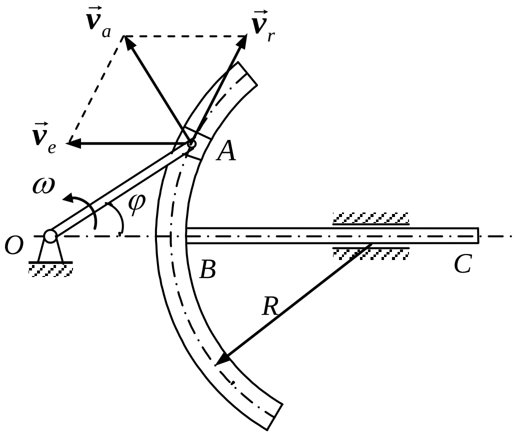


(*a*)

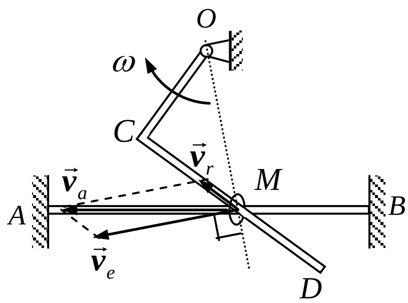


(*b*)

解：两图均有错误。正确的速度平行四边形如下图。



(*a*) 选 *A* 销为动点，弧形滑杆 *BC* 为动系。



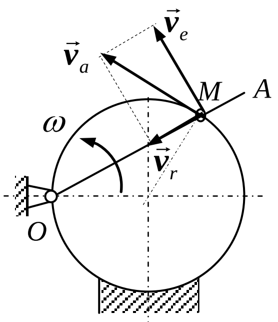
(*b*) 选小环 *M* 为动点，直角曲杆 *OCD* 为动系。

7.2 在下列各题中，试根据所给的条件选动点、动系，判别绝对运动、相对运动和牵连运动的形式，并画出速度矢量图。

(a)图示 *M* 为一小圆环，套在杆 *OA* 和固定的大圆环上，已知杆 *OA* 的角速度为 ω。求环 *M* 沿大环滑动的速度。

(b)图示偏心轮以角速度 ω 绕 *O* 轴转动，求从动杆 O_1M 的角速度。

(c) 图示机构中，*AB*＝*CD*，*AD*＝*BC*，杆 *AB* 以角速度 ω 转动，求杆 *ME* 的速度。



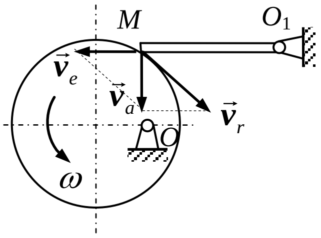
(*a*)

[解] (a) 选动点：小环 *M*，动系：固结于 *OA* 杆，

绝对运动：小环 *M* 沿大圆环的圆周运动；

相对运动：小环 *M* 沿 *OA* 的直线运动；

牵连运动：动系随 *OA* 杆的定轴转动。



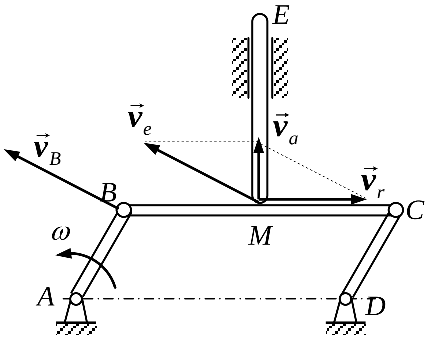
(*b*)

(b) 选动点：杆 O_1M 上的 M 点，动系：固结于偏心轮，

绝对运动：动点以 O_1 为圆心 O_1M 为半径的圆周运动；

相对运动：动点 M 沿偏心轮轮廓的曲线运动；

牵连运动：动系随偏心轮的定轴转动。



(*c*)

(c) 选动点：杆 EM 上的 M 点，动系：固结于 BC 杆，

绝对运动：动点 M 沿铅垂方向做直线运动；

相对运动：动点 M 沿 BC 杆做直线运动；

牵连运动：动系随 BC 杆做曲线平动。

7.3 物体对地面的速度为 $\boldsymbol{u}$，沿下列轨道运动至图示位置时，试求出科氏加速度的大小和方向，设地球的自转角速度为ω。

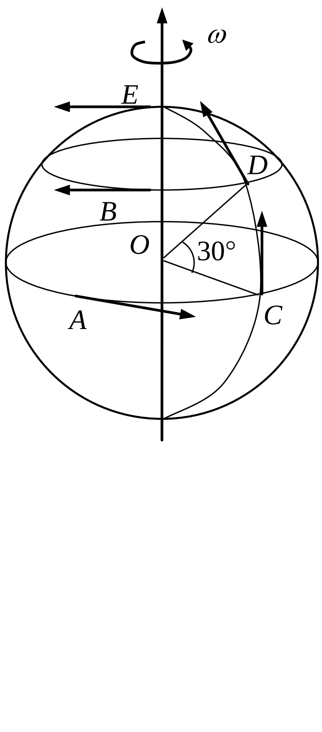
（1）赤道 A 点；

（2）北纬 30° B 点；

（3）沿经线 C 点；

（4）沿经线 D 点；

（5）沿经线 E 点。



解：

(1) 赤道 A 点； $a_C = 2\omega u$，方向指向地心

(2) 北纬 30^0 B 点； $a_C = 2\omega u$ ，方向沿轨迹圆半径指向外。

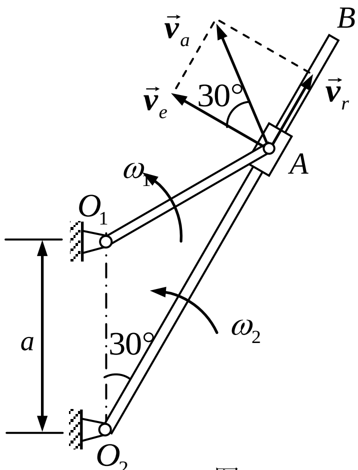
(3) 沿经线 C 点； $a_C = 0$。

(4) 沿经线 D 点； $a_C = \omega u$，方向过 D 点沿纬线切向。

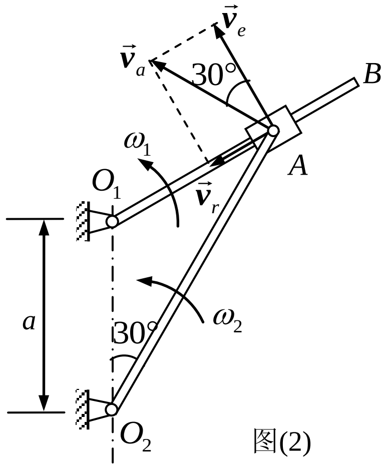
(5) 沿经线 E 点。$a_C = 2\omega u$ ，方向过 E 指向纸面外。

7.4 图(1)所示机构中，$O_1O_2 = O_1A = a = 20\text{cm}$，$\omega_1 = 3\text{rad/s}$。求图示瞬时杆 O_2B 的角速度。图(2)所示机构中，$O_1O_2 = a = 20\text{cm}$，$O_2A = \sqrt{3}a$，$\omega_1 = 3\text{rad/s}$。求图

示瞬时杆 O_2A 的角速度。



图(1)



图(2)

[**解**]　图(1)机构中，

以套筒 A 为动点，动系为 O_2B 杆，则 $v_a = \omega_1 \cdot O_1A = a\omega_1, v_e = \omega_2 \cdot O_2A = \sqrt{3}a\omega_2$

由 $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$　　$v_e = v_a \cos 30°$，$\sqrt{3}a\omega_2 = a\omega_1 \cos 30°$，$\therefore$　$\omega_2 = \dfrac{1}{2}\omega_1$

即 O_2B 的角速度　：$\omega_2 = 1.5\,(\text{rad/s})$

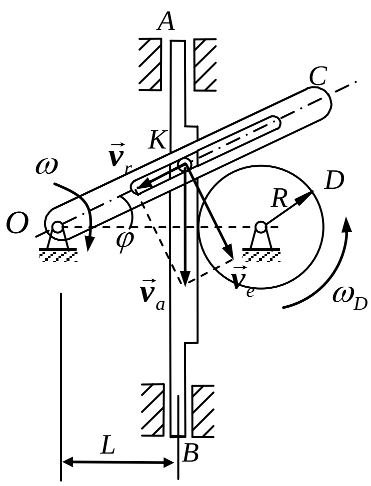
图(2)机构中，

以套筒 A 为动点，动系为 O_1B 杆，则 $v_e = \omega_1 \cdot O_1A = a\omega_1, v_a = \omega_2 \cdot O_2A = \sqrt{3}\,a\omega_2$　。

由 $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$　得 $v_e = v_a \cos 30°$，　$a\omega_1 = \sqrt{3}a\omega_2 \cos 30°$，$\therefore$　$\omega_2 = \dfrac{2}{3}\omega_1$

即杆 O_2A 的角速度：$\omega_2 = 2\,(\text{rad/s})$

7.5　已知 L＝40cm，摇杆 OC 的角速度 ω＝0.5rad/s，齿轮 D 的节圆半径 R＝10cm。试求 φ ＝30°时，齿轮 D 的角速度。



[解]　　取销钉 K 为动点，动系为 OC 杆。速度矢量如图。

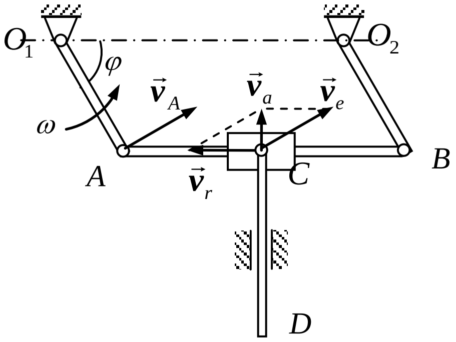
$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r，\quad \therefore v_a = \frac{v_e}{\cos\varphi} = \frac{\omega \cdot OK}{\cos 30°}$$

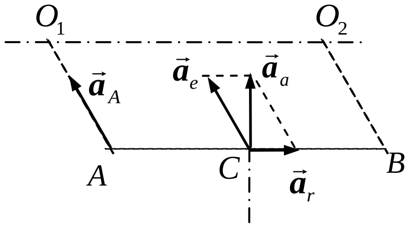
式中，$OK = \dfrac{L}{\cos\varphi} = \dfrac{40}{\cos 30°}\,(\text{cm})$，

$\omega = 0.5\,(\text{rad/s})$

$\therefore \quad \omega_D = \dfrac{v_a}{R} = \dfrac{8}{3}$ (rad/s)　　即齿轮 D 的角速度为 $\omega_D = \dfrac{8}{3}$ (rad/s)

7.6 已知 $O_1A=O_2B=10$cm，$O_1O_2=AB$，OA 以匀角速度 $\omega=2$rad/s 绕 O_1 轴转动。求 $\varphi=60^o$，CD 杆的速度及加速度。





[**解**] 取 CD 杆上的 C 点为动点，AB 为动系。AB 杆作平动，其上各点速度、加速度均相等，则动点的速度和加速度分析如图。

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r\,,\quad \boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_A$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r\,,\quad \boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_A$$

式中 $v_A = \omega \cdot O_1A = 20$ cm/s，$a_A = \omega^2 \cdot O_1A = 40$ cm/s ^{2}

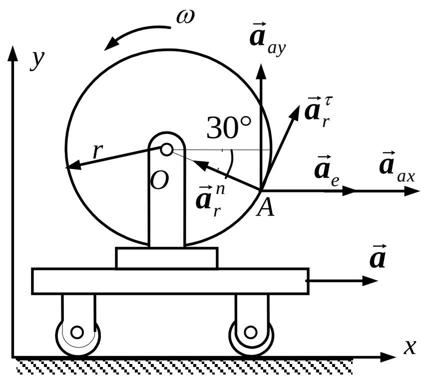
得杆 CD 的速度和加速度为：

$$v_a = v_e \cos\varphi = 20\cos 60° = 10 \text{ (cm/s)}\,,$$

$$a_a = a_e \sin\varphi = 40 \sin 60° = 34.64 \text{ (cm/s}^2)$$

即：CD 杆的速度为 10cm/s；CD 杆的加速度为 34.64cm/s^2。

7.7 已知小车以匀加速度 $a=49.2$cm/s^2 水平向右运动，圆轮半径 $r=20$cm，绕 O 轴按 $\varphi=t^2$ 规律转动。求在 $t=1$s 时，此时 A 点的绝对加速度。



[**解**] 以 A 点为动点，小车为动系，则 A 点的加速度为：　$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n$

大小	?	a	$r\alpha$	$r\omega^2$
方向	?	其余方向如图示		

$$\because \quad \omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 2t,\quad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 2$$

$$\therefore \quad \omega_{|t=1\text{s}} = 2 \text{ (rad/s)},\quad \alpha_{|t=1\text{s}} = 2 \text{ (rad/s}^2)$$

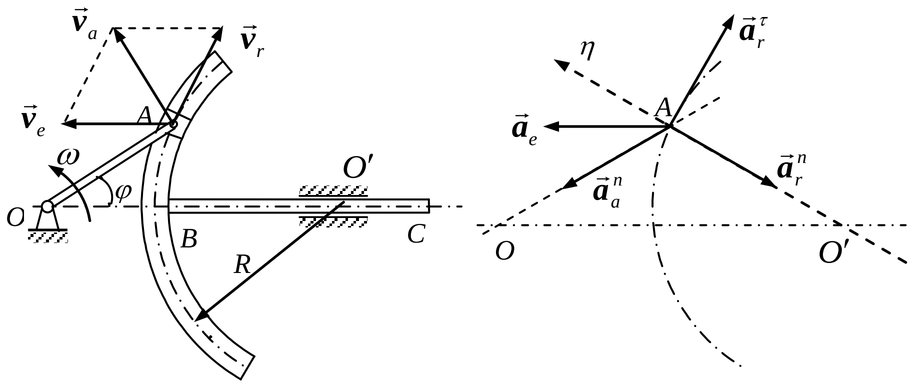
将上式分别向 x 和 y 投影得：

$$a_{ax} = a_e + a_r^\tau \sin 30^o - a_r^n \cos 30^o = 0.1 \text{ cm/s}^2;$$

$$a_{ay} = a_r^\tau \cos 30^o + a_r^n \sin 30^o = 74.64\,\text{cm/s}^2$$

∴ $a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} \approx 74.64\text{cm/s}^2$ ——即 A 点的绝对加速度。

7.8 已知圆弧形滑槽半径 R＝10cm，圆心在导杆上。曲柄长 OA＝10cm，ω＝4π rad/s 求当φ ＝ 30^o时，导杆 CB 的速度及加速度。



[**解**] 选取滑块 A 块为动点，滑槽为动系。

(1) 求速度

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

∴ $v_e = v_r = v_a = \omega \cdot OA = 40\pi$ (cm/s)

即导杆 BC 的速度为 40π cm/s。

(2) 求加速度

$$\vec{a}_a^\tau + \vec{a}_a^n = \vec{a}_e + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau，\ a_a^\tau = 0$$

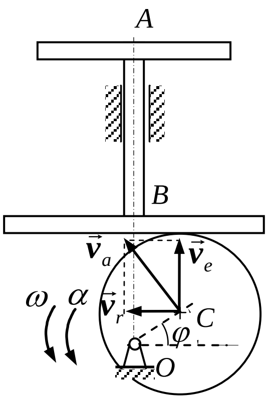
上式向η轴上投影，得 $a_a^n \cos 60^\circ = a_e \cos 30^\circ - a_r^n$

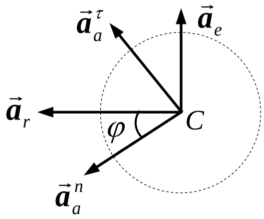
式中，$a_a^n = \omega^2 \cdot OA = (4\pi)^2 \cdot 10 = 160\pi^2$， $a_r^n = \dfrac{v_r^2}{R} = \dfrac{(40\pi)^2}{10} = 160\pi^2$

解得 $a_e = 160\sqrt{3}\pi^2$ (cm/s^2) (←)

即导杆 BC 的加速度为$160\sqrt{3}\pi^2$(cm/s^2) (←)

7.9 凸轮半径为 R，偏心距 OC＝e，图示瞬时 OC 与水平线成夹角 φ，凸轮绕轴 O 转动的角速度为ω，角加速度为α，顶杆的平底始终接触凸轮表面。求顶杆的速度及加速度。





[**解**]　　取轮心 C 为动点，顶杆 AB 为动系。相对运动轨迹为水平直线。
画速度图和加速度图。

(1)　$\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r$，式中 $v_a=\omega\cdot OC=\omega e$

$v_e=v_a\cos\varphi$，即顶杆的速度为 $\underline{v_e=\omega e\cos\varphi}$ 。

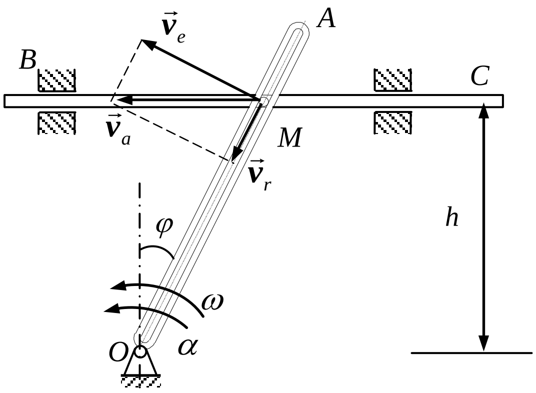
(2)　$\vec{a}_a^\tau+\vec{a}_a^n=\vec{a}_e+\vec{a}_r$

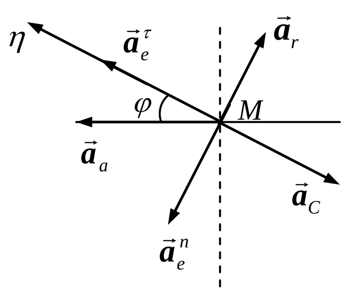
式中 $a_a^n=\omega^2\cdot OC=\omega^2 e$，$a_a^\tau=\alpha\cdot OC=\alpha e$

向垂直方向投影得：

$a_a^\tau\cos\varphi-a_a^n\sin\varphi=a_e$，$\underline{a_e=e\alpha\cos\varphi-e\omega^2\sin\varphi}$，即顶杆的加速度。

7.10　　摇杆 OA 绕 O 轴摆动，通过固定在滑枕 BC 上的销子带动滑枕运动。已知 h＝2m，当 φ＝30° 时，摇杆的角速度和角加速度分别为 $\omega=1\text{rad/s}$, $\alpha=1\text{rad/s}^2$，求此时滑枕 BC 的速度和加速度。





[**解**]　　以销钉 M 点为动点，OA 杆为动系，则 $v_e=\omega\cdot\dfrac{h}{\cos\varphi}$

分别画出动点的速度和加速度合成图。

(1) $\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r$

$$v_a=\frac{v_e}{\cos\varphi}=\frac{\omega h}{\cos^2\varphi}$$ 得滑枕 BC 的速度 $v_a=\frac{8}{3}\,(\mathrm{m/s})$

$$v_r=v_a\sin\varphi=\frac{8}{3}\sin 30°=\frac{4}{3}\,(\mathrm{m/s})$$

(2) 由于动系作转动，所以有科氏加速度 $\boldsymbol{a}_C$，且 $a_C=2\omega v_r$

$$\vec{a}_a=\vec{a}_e^n+\vec{a}_e^\tau+\vec{a}_r+\vec{a}_C$$ 式中 $a_e^\tau=\alpha\cdot\frac{h}{\cos\varphi}$，$a_e^n=\omega^2\cdot\frac{h}{\cos\varphi}$

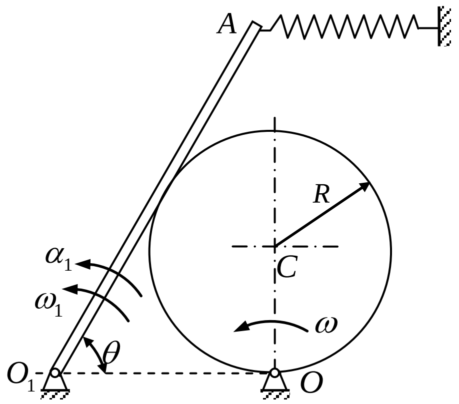
将上式向 η 轴投影，得

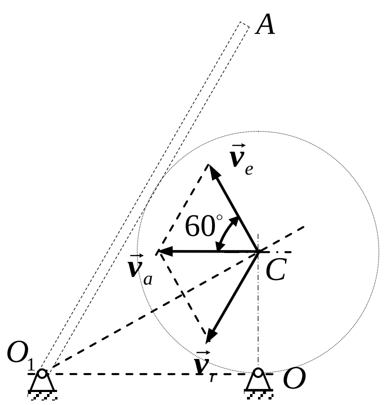
$$a_a\cos 30^o=a_e^\tau-a_C,\quad a_a\cos\varphi=\alpha\cdot\frac{h}{\cos\varphi}-2\omega v_r,$$

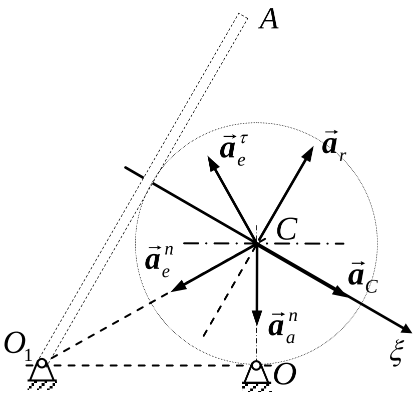
$$a_a\cos 30°=1\times\frac{2}{\cos 30°}-2\times 1\times\frac{4}{3}$$，得 $a_a=0.413\quad(\mathrm{m/s}^2)$

即滑枕 BC 的加速度为 0.413m/s^2。

7.11 图示偏心轮摇杆机构中，摇杆 O_1A 借助弹簧压在半径为 R 的偏心轮 C 上。偏心轮 C 绕轴 O 往复摆动，从而带动摇杆绕轴 O_1 摆动。图示瞬时，轮 C 的角速度为 ω，角加速度为零，$OC\perp OO_1$，$\theta=60°$，求该瞬时摇杆 O_1A 的角速度 ω_1 和角加速度 α_1。







解：选轮心 C 为动点，动系固结于 O_1A 杆上，则 $v_a = R\omega$

由 $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$，画 C 点的速度平行四边形，得 $v_e = v_r = v_a = R\omega$

杆 O_1C 的角速度 $\underline{\omega_1 = \dfrac{v_e}{O_1C} = \dfrac{R\omega}{2R} = \dfrac{\omega}{2}}$

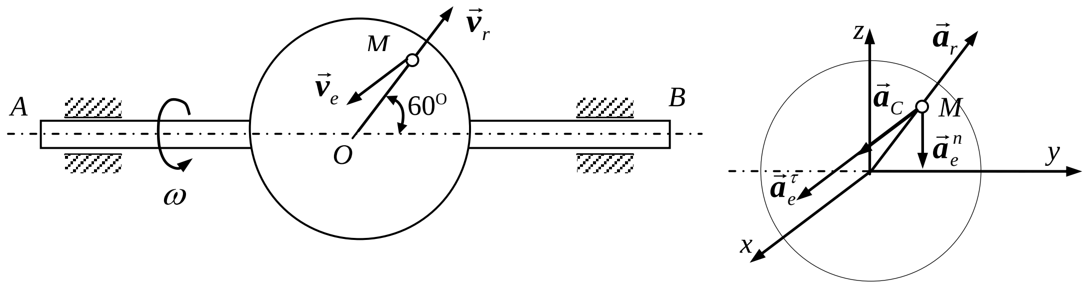
由 $\vec{a}_a = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r + \vec{a}_C$，式中 $a_a = \omega^2 \cdot OC = R\omega^2$，$a_e^n = \omega_1^2 \cdot O_1C = \dfrac{1}{2}R\omega^2$，

$a_e^\tau = \alpha_1 \cdot O_1C = 2R\alpha_1$，$a_C = 2\omega_1 v_r = R\omega^2$

将矢量方程投影至ξ轴上，得 $a_a\cos 60° = -a_e^n \cos 60° - a_e^\tau \cos 30° + a_C$，

$a_e^\tau = \dfrac{\sqrt{3}}{6}R\omega^2$，杆 O_1C 的角加速度 $\underline{\alpha_1 = \dfrac{a_e^\tau}{O_1C} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}\omega^2}$

7.12 图示圆盘绕 AB 轴转动，角速度ω＝$2t$ rad/s，点 M 沿圆盘直径离开中心向外移动的方程：r＝OM＝$4t^2$ cm。半径 OM 与 AB 轴成 60° 角。求当 t＝1s 时，点 M 的绝对加速度的大小。



[**解**] 取 M 点为动点，圆盘为动系，

$$\because r = 4t^2\ (\text{cm}),\ \therefore v_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(4t^2\right) = 8t(\text{cm/s}),\ a_r = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t}\left(4t^2\right) = 8\ (\text{cm/s}^2)$$

则当 t＝1s 时，点 M 的位置、相对速度和相对加速度分别为

r＝4cm，v_r＝8cm/s，a_r＝8cm/s^2

圆盘在该位置的角速度和角加速度

$$\omega_{|t=1\text{s}} = 2t_{|t=1\text{s}} = 2\ (\text{rad/s}),\ \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 2\ (\text{rad/s}^2)$$

取 Ox⊥盘面，对动点 M 作加速度分析，

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

式中除 $\vec{a}_a$ 外，其余各量的大小和方向均已知，方向如图，大小如下，

$$a_e^\tau=\frac{\sqrt{3}}{2}r\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4\times2=4\sqrt{3}\,(\mathrm{cm/s^2}),$$

$$a_e^n=\frac{\sqrt{3}}{2}r\omega^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4\times2^2=8\sqrt{3}\quad(\mathrm{cm/s^2})\ ,\quad a_r=8\mathrm{cm/s^2},$$

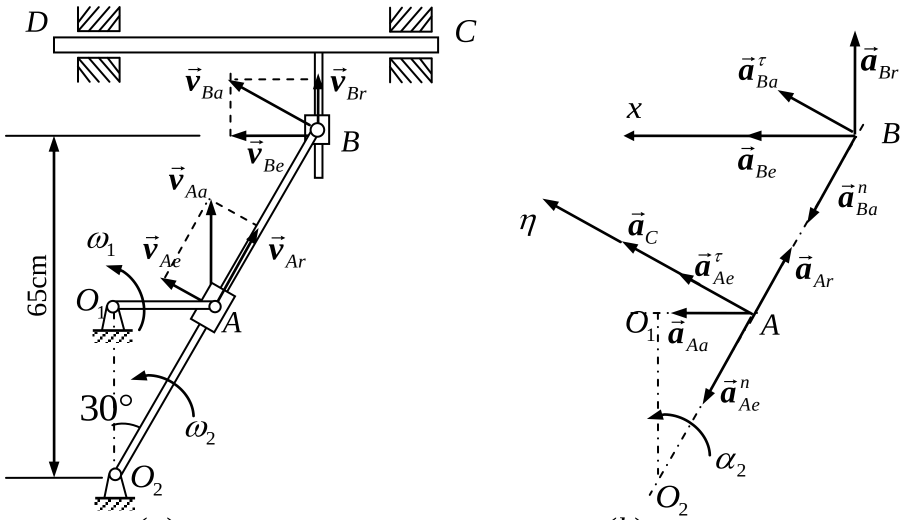
$$a_C=2\omega v_r\sin60°=2\times2\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}\ (\mathrm{cm/s^2})$$

$$a_a=\sqrt{a_{ax}^2+a_{ay}^2+a_{az}^2}\quad=\sqrt{(a_e^\tau+a_C)^2+(\frac{1}{2}a_r)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}a_r-a_e^n)^2}$$

$$=\sqrt{\left(4\sqrt{3}+16\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\times8\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times8-8\sqrt{3}\right)^2}=35.55\ \ (\mathrm{cm/s^2})$$

即当 t＝1s 时，点 M 的绝对加速度为 35.55cm/s^2

7.13　牛头刨床机构如图所示。已知 O_1A＝20cm，角速度 ω_1＝2rad/s。求图示位置滑枕 CD 的速度和加速度。



(a)　　　　　(b)

[**解**]

(1)　先研究速度，如图(a)。取 A 销为动点，O_2B 为动系，则

$$\vec{v}_{Aa}=\vec{v}_{Ae}+\vec{v}$$

$$v_{Aa}=O_1A\cdot\omega_1=20\times2=40\ (\mathrm{cm/s})$$

$$v_{Ae}=v_{Aa}\sin 30°=40\times\frac{1}{2}=20\ (\text{cm/s})\ ,$$

$$\omega_2=\frac{v_{Ae}}{O_2A}=\frac{v_{Ae}}{2O_1A}=\frac{20}{2\times 20}=0.5\ \ (\text{rad/s})$$

$$v_{Ar}=v_{Aa}\cos 30°=40\times\frac{\sqrt{3}}{2}=20\sqrt{3}\ (\text{cm/s})$$

再选 B 点为动点，CD 杆为动系。

则 B 点的速度为 $v_{Ba}=O_2B\cdot\omega_2=\dfrac{65}{\cos 30°}\times 0.5=\dfrac{65}{4}\sqrt{3}\ (\text{cm/s})$

$\vec{\boldsymbol{v}}_{Ba}=\vec{\boldsymbol{v}}_{Be}+\vec{\boldsymbol{v}}$ ，解出，得 CD 的速度为

$$v_{Be}=v_{Ba}\cos 30°=\frac{65}{4}\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=32.5\ (\text{cm/s})$$

(2) 研究加速度，如图(b)，动点、动系如前。

A 的加速度为

$$\vec{\boldsymbol{a}}_{Aa}=\vec{\boldsymbol{a}}_{Ae}^{\tau}+\vec{\boldsymbol{a}}_{Ae}^{n}+\vec{\boldsymbol{a}}_{Ar}+\vec{\boldsymbol{a}}_{C}$$

其中 $a_{Aa}=\omega_1^2 r$，$a_{Ae}^{\tau}=O_2A\alpha_2$(待求)

$$a_{Ae}^{n}=O_2A\omega_2^2\ ,\ \ a_C=2\omega_2 v_{Ar}$$

向 η 轴投影，得

$$a_{Aa}\cos 30^{o}=a_{Ae}^{\tau}+a_C$$

得：$a_{Ae}^{\tau}=3\dfrac{\sqrt{3}}{4}\omega_1^2 r$ ，$\alpha_2=\dfrac{a_{Ae}^{\tau}}{O_2A}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}\omega_1^2$

B 点的加速度为

$$\vec{\boldsymbol{a}}_{Ba}^{\tau}+\vec{\boldsymbol{a}}_{Ba}^{n}=\vec{\boldsymbol{a}}_{Be}+\vec{\boldsymbol{a}}_{Br}$$

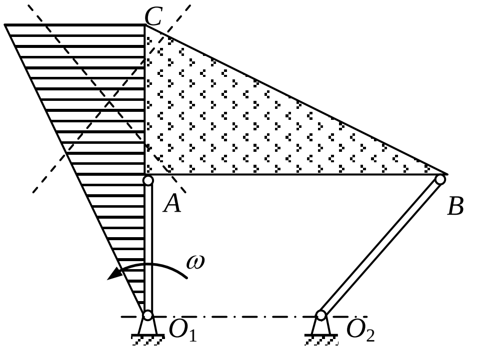
式中各量方向如图所示，大小只有 $\bar{a}_{Be}$、$\bar{a}_{Br}$ 未知。故将上式向 x 轴投影，得：

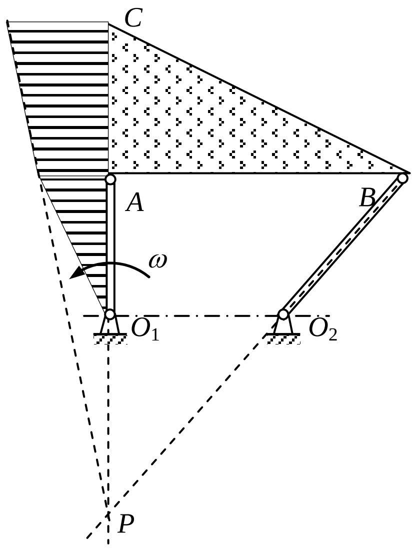
$$a_{Ba}^{\tau}\cos 30^{o}+a_{Ba}^{n}\sin 30^{o}=a_{Be}$$

所以，CD 的加速度为 $\underline{a_{Be}=65.67\ \ (\text{cm/s}^2)}$

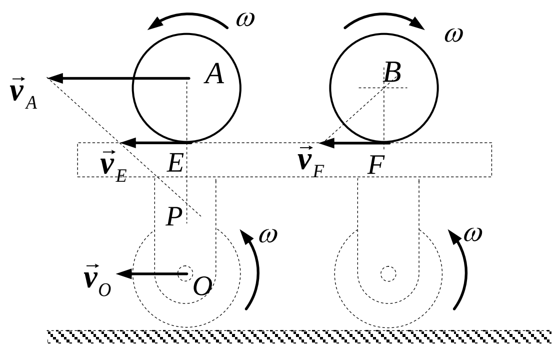
八、刚体的平面运动

8.1 如图所示，O_1A 的角速度为ω_1，板 *ABC* 和杆 O_1A 铰接。问图中 O_1A 和 *AC* 上各点的速度分布规律对不对？





8.2 如图所示，板车车轮半径为 *r*，以角速度ω 沿地面只滚动不滑动，另有半径同为 *r* 的轮 *A* 和 *B* 在板车上只滚动不滑动，其转向如图，角速度的大小均为ω，试分别确定 *A* 轮和 *B* 轮的速度瞬心位置。



[**解**] 板车作平动，轮 *A*、*B* 与板车接触点

E、*F* 的速度相同，且$v_E = v_F = v_O = \omega r$

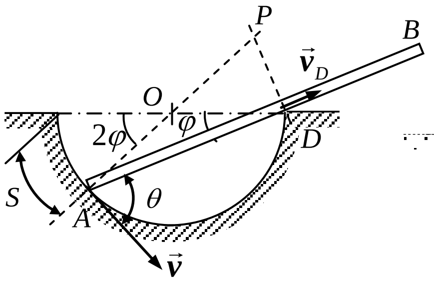
对 *A* 轮由基点法求轮心 *A* 的速度

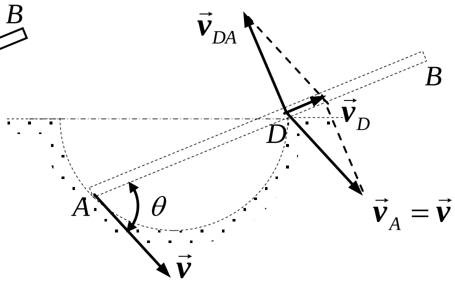
$$\vec{v}_A = \vec{v}_E + \vec{v}_{AE} \quad , \quad v_{AE} = \omega r$$

∴ $v_A = 2\omega r$，且 *A* 轮的速度瞬心在 *E* 点下方 *r* 处。

同理可得 *B* 轮的速度瞬心就在轮心 *B* 处。

8.3 直杆 *AB* 的 *A* 端以匀速度 $\boldsymbol{v}$ 沿半径为 *R* 的半圆弧轨道运动，而杆身保持与轨道右尖角接触。问杆 *AB* 作什么运动？你能用几种方法求出杆 *AB* 的角速度？





[解]　AB 杆作平面运动。

(一)　瞬心法

AB 杆作平面运动，速度瞬心为 P。

$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{AP}=\frac{v}{2R}$$

(二)　基点法

$$\vec{v}_D=\vec{v}_A+\vec{v}_{DA}，\ v_{DA}=v_A\sin\theta=\omega_{AB}DA$$

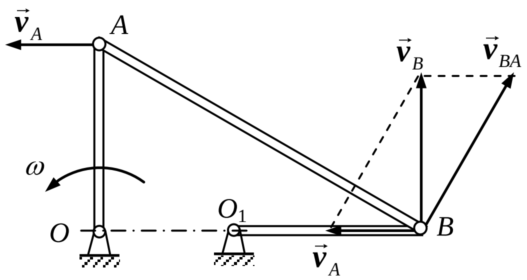
又　$DA=2R\cos(90^{\circ}-\theta)=2R\sin\theta$

$$\therefore\quad \omega_{AB}=\frac{v}{2R}$$

(三)　自然法：　$\omega_{AB}=\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$，而 $S=2\varphi R$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=2R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=v，\quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{v}{2R}\qquad \therefore\quad \omega_{AB}=\frac{v}{2R}$$

8.4　如图所示四连杆机构 $OABO_1$ 中，$OA=O_1B=AB/2$，曲柄 OA 的角速度 ω=3rad/s。当 OA 转到与 OO_1 垂直时，O_1B 正好在 OO_1 的延长线上，求该瞬时 AB 杆的角速度 ω_{AB} 和曲柄 O_1B 的角速度 ω_1。



[**解**]　取 AB 为研究对象，AB 作平面运动。以 A 为基点，画 B 点速度合成图

由 $\vec{v}_B=\vec{v}_A+\vec{v}_{BA}$

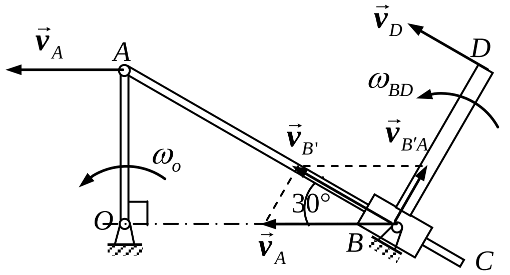
$$v_{BA}=\frac{v_A}{\sin 30^{\circ}}=2OA\cdot\omega=AB\cdot\omega_{AB}$$

$$\therefore \omega_{AB}=\frac{2OA}{AB}\omega=3\quad\text{(rad/s)}$$

$$v_B = v_{BA}\cos 30° = 2OA\cdot\omega\frac{\sqrt{3}}{2} = O_1B\omega_1$$

$$\therefore \omega_1 = 3\sqrt{3} \quad \text{(rad/s)}$$

8.5 图示曲柄摇机构中，曲柄 *OA* 以角速度 ω_o 绕 *O* 轴转动，带动连杆 *AC* 在摇块 *B* 内滑动，摇块及与其固结的 *BD* 杆绕 *B* 铰转动，杆 *BD* 长 *l*；求在图示位置时摇块的角速度及 *D* 点的速度。

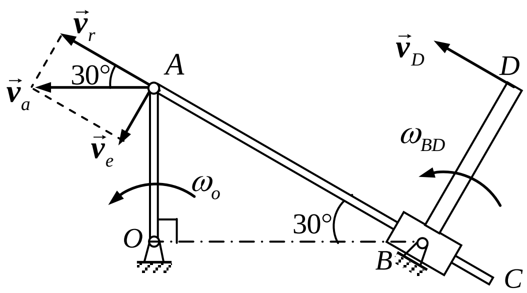


[**解 1**] 取 *AC* 为研究对象（作平面运动），*A* 为基点，画 *AC* 上与 *B* 重合的点 *B'*速度合成图。*B'*的速度沿 *AC* 方向。

$$\vec{v}_{B'} = \vec{v}_A + \vec{v}_{B'A}，\ v_{B'A} = v_A\sin 30°，\ \omega_{AC} = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{AB\sin 30^o\cdot\omega_o\sin 30^o}{AB} = \frac{\omega_o}{4}$$

又 *BD* 与 *AC* 角速度相同，

$$\therefore \omega_{BD} = \omega_{AC} = \frac{1}{4}\omega_O \qquad \therefore \qquad v_D = l\omega_{BD} = \frac{1}{4}l\omega_O$$



[**解 2**] 用点的合成运动方法求解。选 *A* 销为动点，摇块 *BD* 为动系，则 $v_a = \omega_o OA$，

由 $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$，得 $v_e = v_a\sin 30° = \frac{1}{2}\omega_o OA$

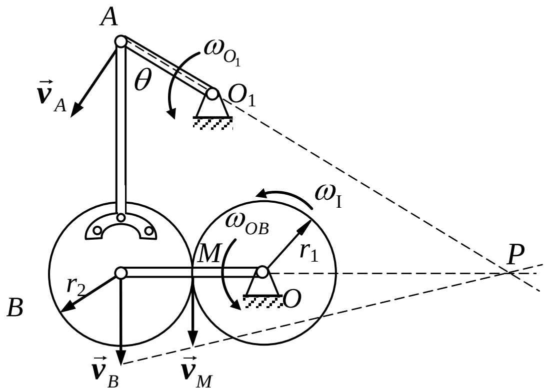
又 $v_e = \omega_{BD}\cdot AB$，所以 $\frac{1}{2}\omega_o OA = \omega_{BD}\cdot AB$

得摇块的角速度 $\omega_{BD} = \frac{1}{4}\omega_O$ ，*D* 点的速度 $v_D = l\omega_{BD} = \frac{1}{4}l\omega_O$

8.6 在瓦特行星传动机构中，平衡杆 O_1A 绕 O_1 轴转动，并藉连杆 *AB* 带动曲柄 *OB*，而曲柄 *OB* 活动地装置在 *O* 轴上。在 *O* 轴上装有齿轮 I，齿轮 II 的轴安装在杆 *AB* 的 *B*

端。已知 $r_1=r_2=30\sqrt{3}\text{cm}$，$O_1A=75\text{cm}$，$AB=150\text{cm}$，又 $\omega=6\text{rad/s}$；求当 θ=60° 及 $AB\perp OB$ 时，曲柄 OB 及齿轮 I 的角速度。

[**解**]　速度分析如图，P 点为杆 AB 和轮 II 的速度瞬心，故



$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{PA}=\frac{O_1A\cdot\omega_{O1}}{2\cdot AB}$$

$$v_B=PB\cdot\omega_{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}O_1A\cdot\omega_{O1}$$

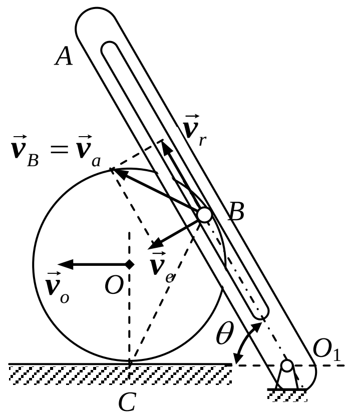
杆 OB 的角速度为

$$\omega_{OB}=\frac{v_B}{r_1+r_2}=3.75\ \text{(rad/s)}$$

两轮啮合点 M 的速度和轮 I 的角速度分别为

$$v_M=PM\cdot\omega_{AB}，\quad \omega_{\mathrm{I}}=\frac{v_M}{r_1}=6\ \text{(rad/s)}$$

8.7　轮 O 在水平面内滚动而不滑动，轮缘上固定销钉 B，此销钉在摇杆 O_1A 的槽内滑动，并带动摇杆绕 O_1 轴转动。已知轮的半径 R=50cm，在图示位置时 AO_1 是轮的切线，轮心的速度 $v_o=20\text{cm/s}$，摇杆与水平面的交角 θ =60°。求摇杆的角速度。



[**解**] 轮 O 作平面运动，C 为瞬心。轮 O 上 B 点的速度

$$v_B=BC\cdot\omega_O=2R\cos30^\circ\cdot\frac{v_o}{R}=20\sqrt{3}\ \ \text{(cm/s)}$$

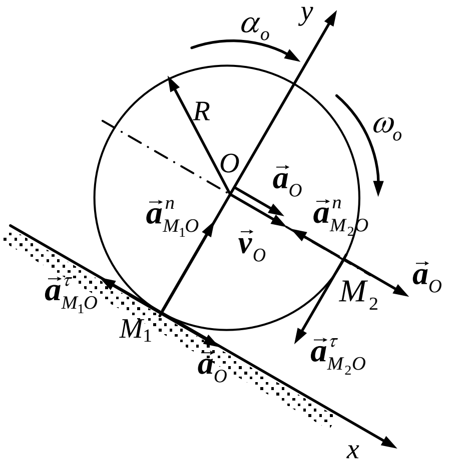
再取 B 销为动点，摇杆 O_1A 为动系，$\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r$

$$v_a=v_B=20\sqrt{3}\ \ \text{(cm/s)}$$

$$v_e=v_a\sin30^\circ=10\sqrt{3}$$

$$\therefore\omega_{O_1A}=\frac{v_e}{O_1B}=\frac{10\sqrt{3}}{R\tan30^\circ}=\frac{10\sqrt{3}}{50\sqrt{3}}=0.2\quad\text{(rad/s)}$$

8.8 车轮在铅垂平面内沿倾斜直线轨道滚动而不滑动。轮的半径 R=0.5m，轮心 O 在某瞬时的速度 v_0=1m/s，加速度 a_0=3m/s^2。试分别求轮缘上的两点 M_1 和 M_2 的加速度。



[**解**] 轮作平面运动，取轮心 O 为基点，先求ω_o 、 α_o

$\because$ M_1 为轮 O 的速度瞬心，$\therefore$ $\omega_o = \dfrac{v_o}{R} = 2\ \text{(rad/s)},\ \alpha_o = \dfrac{a_o}{R} = 6\ \text{(rad/s}^2)$

画 M_1 和 M_2 加速度合成图

（1） 求 M_1 的加速度

由 $\vec{a}_{M_1} = \vec{a}_O + \vec{a}^n_{M_1O} + \vec{a}^\tau_{M_1O}$

分别向 x、y 投影 ：

$$y:\ a_{M_1y} = a^n_{M_1O} = R\omega_o^2 = 2\ (\text{m/s}^2)$$

$$x:\ a_{M_1x} = a^\tau_{M_1O} - a_o = R\alpha_o - a_o = 0$$

$$\therefore\ a_{M_1} = 2\,(\text{m/s}^2)$$

(2) 求 M_2 的加速度 $\vec{a}_{M_2} = \vec{a}_O + \vec{a}^n_{M_2O} + \vec{a}^\tau_{M_2O}$

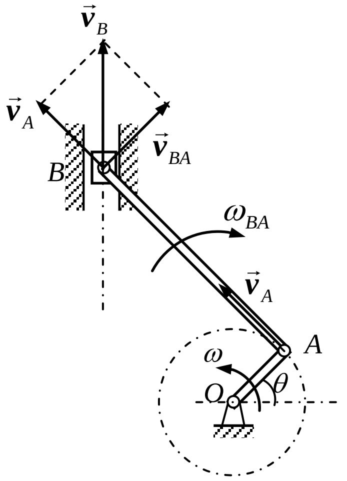
分别向 x、y 投影 ：

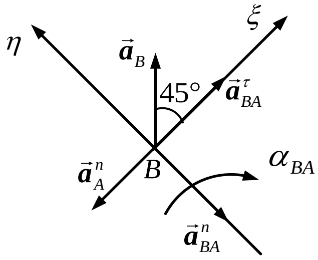
$$x:\ a_{M_2x} = a_o - a^n_{M_2O} = a_o - R\omega_o^2 = -1\,(\text{m/s}^2)$$

$$y:\ a_{M_2y} = -a^\tau_{M_2O} = -R\alpha_o = -3\,(\text{m/s}^2)$$

$$\therefore\ a_{M_2} = \sqrt{a^2_{M_2x} + a^2_{M_2y}} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}\ (\text{m/s}^2)$$

8.9 曲柄长 OA=0.2m，绕 O 轴以匀角速度ω =10rad/s 转动，通过长 AB=1m 的连杆带动滑块 B 沿铅直导槽运动。在图示位置，曲柄与水平线成角θ = 45° 且与连杆 AB 垂直。试求该瞬时连杆 AB 的角速度、角加速度，以及滑块 B 的速度、加速度。





[**解**]　　取平面运动杆 *AB* 为研究对象，*A* 为基点，分别画 *B* 点速度和加速度合成图

（一）求 $\vec{v}_B$、ω_{AB}

由 $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{BA}$，

$$v_{BA} = v_A = OA \cdot \omega_O = 0.2 \times 10 = 2\ (\text{m/s})$$

$$\omega_{BA} = \frac{v_{BA}}{AB} = 2\ (\text{rad/s})$$

$$v_B = \frac{v_A}{\cos 45°} = 2\sqrt{2}\ (\text{m/s})$$

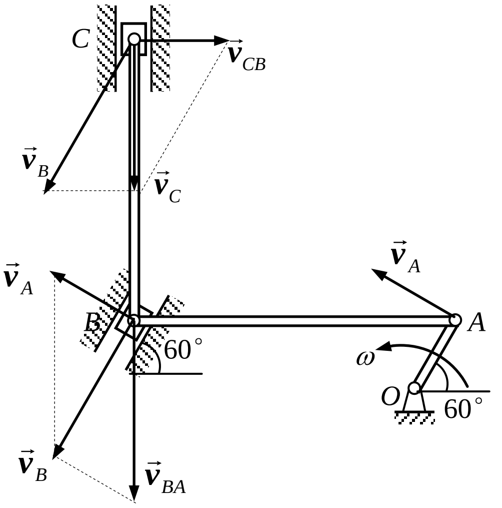
（二）求 $\boldsymbol{a_B}$ 、$\boldsymbol{\alpha}_{BA}$

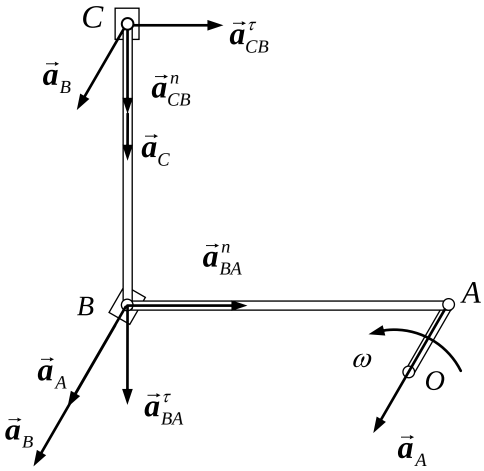
由基点法 $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^{\tau}$ 分别投影至 η、ξ 轴上得 $a_B \sin 45^{\circ} = -a_{BA}^n$,

$$a_B = -4\sqrt{2}\ (\text{m/s}^2)\quad (\downarrow)$$

$$a_B \cos 45^{\circ} = a_{BA}^{\tau} - a_A^n,\quad \therefore\ a_{BA}^{\tau} = 16\ (\text{m/s}^2)\quad \alpha_{BA} = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB} = 16\ (\text{rad/s}^2)$$

8.10　在图示机构中，曲柄 *OA* 长为 *r*，绕 *O* 轴以等角速度 ω 转动，*AB*=6*r*，*BC*= $3\sqrt{3}r$，求图示位置时，滑块 *C* 的速度和加速度。





[**解**]　AB 作平面运动，以 A 为基点，求 B 点的速度、加速度。

$$\vec{v}_A=\vec{v}_B+\vec{v}_{BA}$$

$$v_B=v_A\tan 60^{\circ}=\sqrt{3}r\omega_o\quad v_{BA}=v_A/\cos 60^{\circ}=2r\omega_o$$

$$\omega_{BA}=v_{BA}/AB=2r\omega_o/6r=\frac{\omega_o}{3}$$

由 $\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{a}_{BA}^{n}+\vec{a}_{BA}^{\tau}$ ，式中 $a_{BA}^{n}=\omega_{BA}^{2}\cdot AB=\left(\dfrac{\omega_o}{3}\right)^2 6r=\dfrac{2}{3}\omega_o^2 r$

向 BA 轴投影　$-a_B\cos 60^{\circ}=-a_A\cos 60^{\circ}+a_{BA}^{n}.$

得：$a_B=a_A-2a_{BA}^{n}=r\omega_o^2-2\times\dfrac{2}{3}\omega_o^2 r=-\dfrac{1}{3}r\omega_o^2$

BC 作平面运动，以 B 点为基点求 C 点的速度、加速度。

由 $\vec{v}_C=\vec{v}_B+\vec{v}_{CB}$ ，

$$v_{CB}=v_B\sin 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}r\omega_o\,,\ \omega_{CB}=\frac{v_{CB}}{BC}=\frac{1}{6}\omega_o\ \ v_C=v_B\cos 30^{\circ}=\frac{3}{2}r\omega_o$$

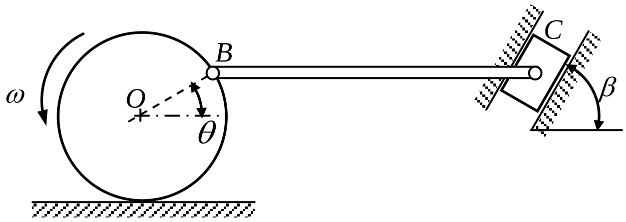
由 $\vec{a}_C=\vec{a}_B+\vec{a}_{CB}^{n}+\vec{a}_{CB}^{\tau}$

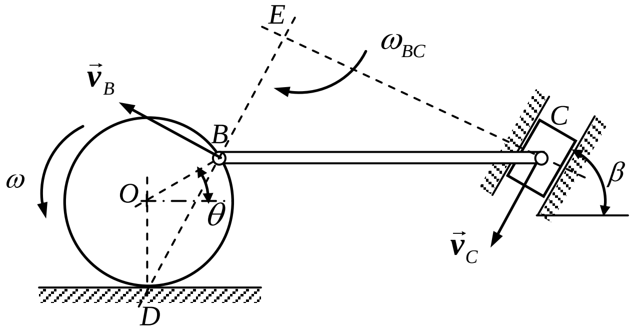
式中 $a_{CB}^{n}=\omega_{CB}^{2}\cdot BC=\left(\dfrac{\omega_o}{6}\right)^2 3\sqrt{3}r=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\omega_o^2 r$

向 CB 轴投影：$a_C=a_B\cos 30^{\circ}+a_{CB}^{n}=-\dfrac{1}{3}r\omega_o^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{12}r\omega_o^2$

$\therefore\ a_C=-\dfrac{\sqrt{3}}{12}r\omega_o^2$　　负号说明 $\boldsymbol{a}_C$ 方向向上。

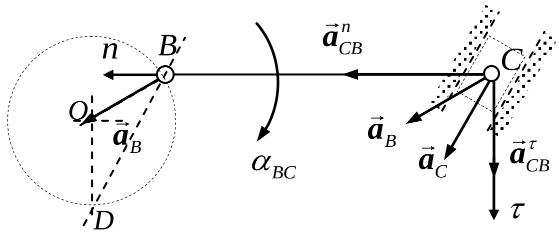
8.11 直径为 $6\sqrt{3}$ cm 的滚子在水平面作匀速滚动而无滑动，并通过连杆 *BC* 带动滑块 *C*。已知滚子的角速度 ω=12rad/s, $\theta=30°, \beta=60°$, *BC*=27cm。求 *BC* 杆与地面平行时的角速度、角加速度和 *C* 点的速度、加速度。





［**解**］ 取滚子为研究对象（作平面运动），轮与地面的接触点 *D* 为瞬心

$$BD = 2\times 3\sqrt{3}\cos 30^o = 9 \quad \text{(cm)}$$
$$v_B = BD\times\omega = 9\times 12 = 108 \ \text{(cm/s)}$$



滚子作匀速纯滚动，ω 及 $v_O = R\omega$ 均为常数，$\therefore a_O = 0$，$a_{BO}^\tau = 0$

由 $\vec{a}_B = \vec{a}_O + \vec{a}_{BO}^n + \vec{a}_{BO}^\tau$ 得

$$a_B = a_{BO}^n = R\omega^2$$
$$= 3\sqrt{3}\times 12^2 = 432\sqrt{3} \ \text{(cm/s}^2)$$

再取 *BC* 为研究对象（作平面运动），瞬心为 *E* 点

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{BE} = \frac{108}{27\times\cos 60^o} = 8 \ \text{(rad/s)}$$

$$v_C = \omega_{BC}\cdot EC = 108\sqrt{3} \quad \text{(cm/s)} \quad (\swarrow)$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau$$

分别投影至 **n**、**τ** 轴上且 $a_{CB}^{n} = BC \cdot \omega_{BC}^{2} = 27 \times 8^{2} = 1728 \ (\text{cm/s}^{2})$

$$n: \quad a_C \cos 60° = a_B \cos 30° + a_{CB}^{n} ....(1)$$

$$\tau: \quad a_C \sin 60° = a_B \sin 30° + a_{CB}^{\tau} ....(2)$$

由（1）得：

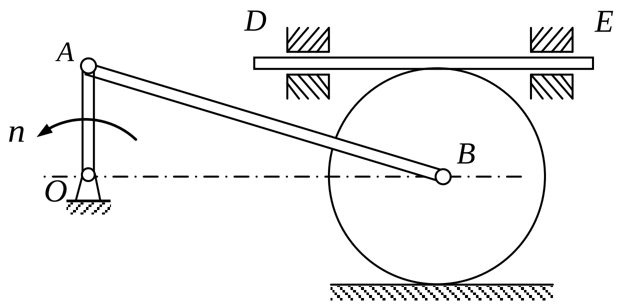
$$a_C = \sqrt{3} a_B + 2a_{CB}^{n} = 4752 (\text{cm/s}) \quad (\swarrow)$$

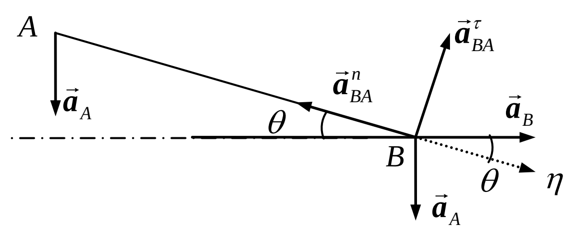
由（2）得：

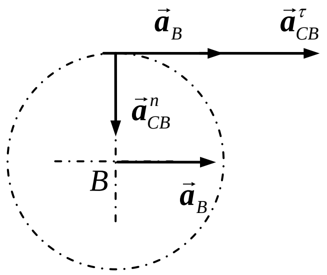
$$a_{CB}^{\tau} = a_C \sin 60^{\circ} - a_B \sin 30^{\circ} = 2160\sqrt{3} \quad (\text{cm/s}^{2})$$

$$\alpha_{CB} = \frac{a_{CB}^{\tau}}{BC} = \frac{2160\sqrt{3}}{27} = 80\sqrt{3} \quad (\text{rad/s}^{2})$$ （顺时针转向）

8.12 曲柄 *OA* 以匀转速 n＝60rpm 绕 *O* 轴转动，通过连杆带动圆柱沿水平地面作无滑动的滚动，圆柱借摩擦带动物体 *DE* 沿水平方向平行移动，设圆柱与 *DE* 间也没有滑动。已知 *OA*＝100mm，*AB*＝300mm，圆柱半径 *R*＝100mm。求该曲柄 *OA* 处于铅直位置瞬时，物体 *DE* 的速度 v_{DE} 和加速度 a_{DE}。







[**解**] $\omega_o = \dfrac{2\pi n}{60} = 2\pi$ rad/s， $v_A = OA\omega_o = 20\pi \ (\text{cm/s})$，

$$a_A = OA\omega_o^{2} = 40\pi^{2} \ (\text{cm/s}^{2})$$

连杆 *AB* 作瞬时平动，所以 $\omega_{AB} = 0$， $v_A = v_B = 20\pi \ (\text{cm/s})$

以 *A* 为基点研究 *B*，则

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$， 式中 $a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0$

将上式向η 投影，得$a_B \cos\theta = a_A \sin\theta - a_{BA}^n$

$$\therefore \quad a_B = a_A \tan\theta - \frac{a_{BA}^n}{\sin\theta} = 139 \ (\text{cm/s}^2)$$

取 B 轮研究，则$\omega_B = \dfrac{v_B}{R} = 2\pi$ （rad/s，）

$\alpha_B = \dfrac{a_B}{R} = 13.9$ （rad/s^2），$v_C = 2R\omega_B = 40\pi$

以 B 为基点研究 C，则 $\vec{a}_{Cx} + \vec{a}_{Cy} = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau$

投影到 x 轴，得：$a_{Cx} = a_B + a_{CB}^\tau = 278 \ (\text{cm/s}^2)$

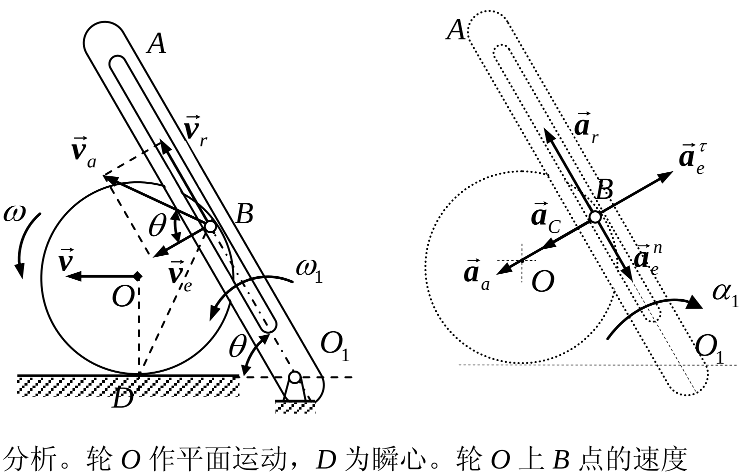
DE 平动，所以 DE 的速度为$v_{DE} = v_C = 40\pi \ (\text{cm/s})$，

加速度为$a_{DE} = a_{Cx} = 278 \ (\text{cm/s}^2)$

8.13 * 轮 O 在水平面内匀速纯滚动而不滑动，轮心的速度为 $\boldsymbol{v}$，轮缘上固定销钉 B， 此销钉在摇杆 O_1A 的槽内滑动，并带动摇杆绕 O_1 轴转动。已知轮的半径为 R，在图示位置时 O_1A 是轮的切线， 摇杆与水平线的夹角θ=60°。求

① 销钉 B 点的速度和摇杆 O_1A 的角速度；

② 销钉 B 点的加速度和摇杆 O_1A 的角加速度。



[**解**] (1)速度分析。轮 O 作平面运动，D 为瞬心。轮 O 上 B 点的速度

$$v_B = BD \cdot \omega = 2R\cos 30^\circ \cdot \frac{v}{R} = \sqrt{3}v$$

再取 B 销为动点，摇杆 O_1A 为动系，$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

$v_a = v_B = \sqrt{3}\,v$， $v_e = v_a \sin 30^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}v$，$v_r = v_a \cos 30^o = \dfrac{3}{2}v$ ，

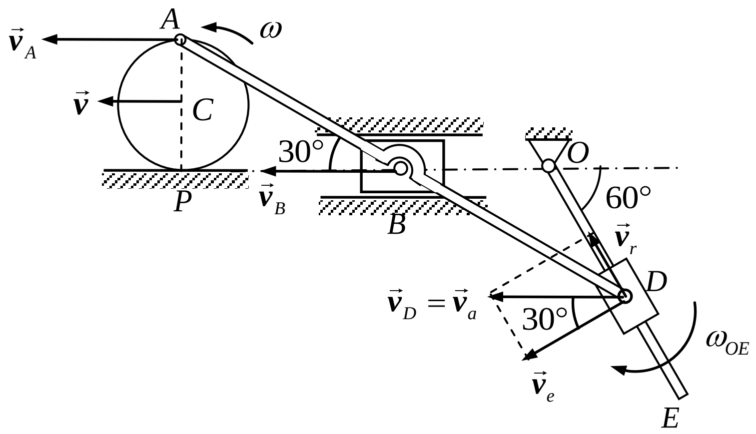
$\omega_1 = \dfrac{v_e}{O_1B} = \dfrac{\sqrt{3}/2v}{R\tan 30^o} = \dfrac{3v}{2R}$ （逆时针转向）

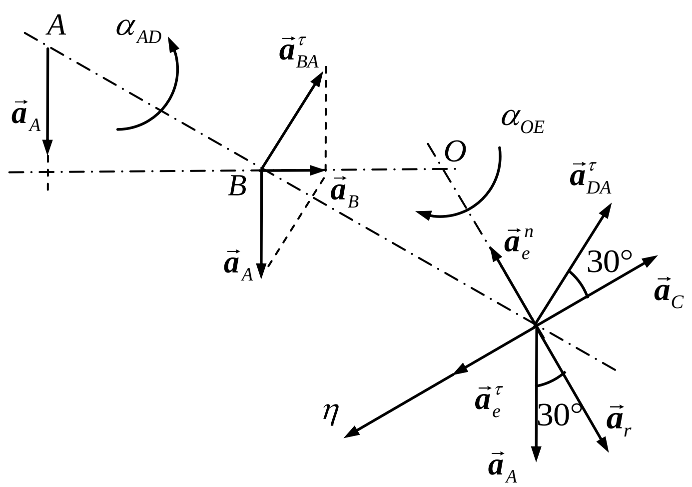
(2)加速度分析。$\vec{a}_a = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r + \vec{a}_C$ ，式中 $a_a = a_B = \dfrac{v^2}{R}$，$a_C = 2\omega_{O_1A}v_r = \dfrac{9v^2}{2R}$，

投影到 BO 轴上，得 $a_a = a_C - a_e^\tau$， $a_e^\tau = \dfrac{7v^2}{2R}$，

$\therefore \alpha_1 = \dfrac{a_e^\tau}{O_1B} = \dfrac{7\sqrt{3}}{2}\dfrac{v^2}{R^2}$ （顺时针转向）

8.14 * 图示圆轮半径为 r，在水平面上作纯滚动，轮心 C 以匀速度 $\vec{v}$ 向左运动。图示瞬时，摇杆 OE 与水平线夹角为 60°，连杆 ABD 与水平线夹角为 30°， $AB = BD = 4r$，试求该瞬时，(1)滑块 D 销的速度；(2)摇杆 OE 的角速度；(3) 摇杆 OE 的角加速度。





解：轮 A 作平面运动，速度瞬心为与水平面的接触点 P，角速度 $\omega = \dfrac{v}{r}$， $v_A = 2r\omega$

杆 AD 作瞬时平动，$v_A = v_B = v_D = 2r\omega$，$\omega_{AD} = 0$，即滑块 D 销的速度 $\underline{v_D = 2r\omega}$

由 $\vec{\boldsymbol{a}}_B = \vec{\boldsymbol{a}}_A + \vec{\boldsymbol{a}}_{BA}^n + \vec{\boldsymbol{a}}_{BA}^\tau$，式中 $a_{BA}^n = \omega_{AD}^2 \cdot AB = 0$，$a_A = \omega^2 r$，$a_{BA}^\tau = \dfrac{a_A}{\cos 30°} = \dfrac{2r\omega^2}{\sqrt{3}}$，

杆 AD 的角加速度 $\alpha_{AD} = \dfrac{a_{BA}^\tau}{AB} = \dfrac{2r\omega^2}{4r\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\omega^2$

由 $\vec{\boldsymbol{a}}_D = \vec{\boldsymbol{a}}_A + \vec{\boldsymbol{a}}_{DA}^n + \vec{\boldsymbol{a}}_{DA}^\tau$，式中 $a_{DA}^n = \omega_{AD}^2 \cdot AD = 0$，$a_A = \omega^2 r$，

$a_{DA}^\tau = \alpha_{AD} \cdot AD = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\omega^2(8r) = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}r\omega^2$

选动点销 D，动系 OE 杆，由 $\vec{\boldsymbol{v}}_a = \vec{\boldsymbol{v}}_e + \vec{\boldsymbol{v}}_r$，则 $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_D = 2r\omega$，$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_a \cos 30° = \sqrt{3}r\omega$，

$\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{v}_a \sin 30° = r\omega$，$\omega_{OE} = \dfrac{\boldsymbol{v}_e}{OD} = \dfrac{\sqrt{3}r\omega}{\dfrac{4r}{\sqrt{3}}}$，即摇杆 OE 的角速度 $\underline{\omega_{OE} = \dfrac{3}{4}\omega}$

由 $\vec{\boldsymbol{a}}_a = \vec{\boldsymbol{a}}_e^n + \vec{\boldsymbol{a}}_e^\tau + \vec{\boldsymbol{a}}_r + \vec{\boldsymbol{a}}_C$，式中 $\vec{\boldsymbol{a}}_a = \vec{\boldsymbol{a}}_D = \vec{\boldsymbol{a}}_A + \vec{\boldsymbol{a}}_{DA}^\tau$，

即 $\vec{\boldsymbol{a}}_A + \vec{\boldsymbol{a}}_{DA}^\tau = \vec{\boldsymbol{a}}_e^n + \vec{\boldsymbol{a}}_e^\tau + \vec{\boldsymbol{a}}_r + \vec{\boldsymbol{a}}_C \quad \cdots\cdots\cdots(*)$，

且 $\boldsymbol{a}_e^n = \omega_{OE}^2 \cdot OD = \left(\dfrac{3}{4}\omega\right)^2 \dfrac{4r}{\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}r\omega^2$，$a_{DA}^\tau = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}r\omega^2$

$\boldsymbol{a}_C = 2\omega_{OE} \cdot v_r = 2\left(\dfrac{3}{4}\omega\right)(r\omega) = \dfrac{3}{2}r\omega^2$，

将(*)式投影至 η 轴上，得 $a_A \sin 30° - a_{DA}^\tau \cos 30° = a_e^\tau - a_C$，

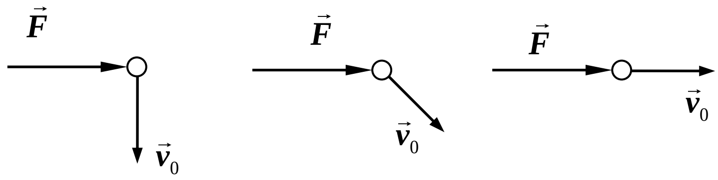
$r\omega^2\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{4\sqrt{3}}{3}r\omega^2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = a_e^\tau - \dfrac{3}{2}r\omega^2$，解得 $a_e^\tau = 0$，所以，该瞬时摇杆 OE 的角加速度

$\underline{\alpha_{OE} = \dfrac{a_e^\tau}{OD} = 0}$

第三篇　动力学

九、质点的运动微分方程

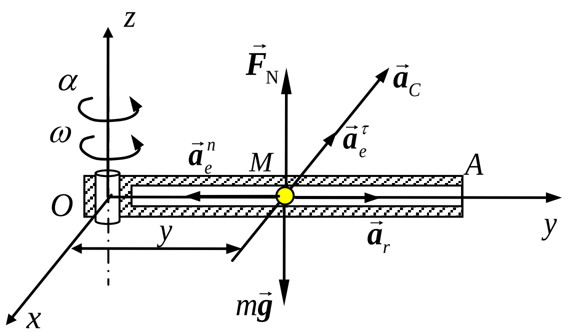
9.1 三个质量相同的质点，在某瞬时的速度分别如图所示，若对它们作用了大小、方向相同的力 F，问质点的运动情况是否相同?



(a)　　(b)　　(c)

［**解**］三个质点质量相同，受力相同，其运动微分方程相同，但初始条件不相同，故运动情况不相同。

9.2 如图所示，管 OA 内有一小球 M，管壁光滑。当管 OA 在水平面内绕铅直轴 O 转动时，小球为什么向管口运动?



[**解**] 研究小球，受力如图，小球在 y 轴方向不受力。取小球 M 为动点，套管为动系，有

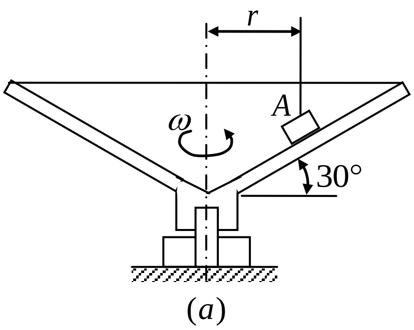
$\vec{a}_a = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r + \vec{a}_C$ 且 $a_e^n = \omega^2 y$， $a_e^\tau = \alpha y$，

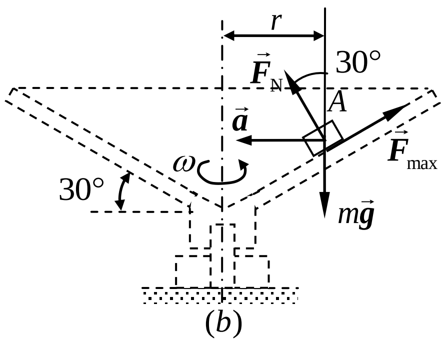
由 $m\vec{a}_a = \sum \vec{F}_i$， 投影至 y 轴上得 $ma_{ay} = 0, m(a_r - a_e^n) = 0,$

$a_r = a_e^n = \omega^2 y$　显然　$a_r = \dfrac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t} = \omega^2 y > 0$

积分 $v_r = \int_0^t \omega^2 y \mathrm{d}t > 0$　$\therefore$ 小球向管口运动。

9.3 如图所示物块 A 置于锥形圆盘上，离转动轴的距离为 r = 20cm，如物块与锥面间的摩擦系数为 f = 0.3，问圆盘的每分钟转速应在什么范围内，方能使物块在锥面上保持平衡，假定角速度改变很慢，角加速度可忽略不计。





[**解**] 取物块 A 为研究对象，考虑 A 下滑的临界状态，最大静摩擦力方向沿斜面向上，受力如图(b)。由 $m\vec{a}=\sum\vec{F}_i$，分别向 x、y 方向投影

$$\begin{cases} mr\omega^2 = F_{\mathrm{N}}\sin 30^\circ - F_{\max}\cos 30^\circ \\ 0 = F_{\mathrm{N}}\cos 30^\circ + F_{\max}\sin 30^\circ - mg \end{cases}$$

$$F_{\max} = fF_{\mathrm{N}}$$

解得：$r\omega^2 = \dfrac{(\sin 30^\circ - f\cos 30^\circ)}{(\cos 30^\circ + f\sin 30^\circ)}g$

$\omega = 3.4\ (\mathrm{rad/s})$ ，$n = \dfrac{30\omega}{\pi} = 32.52\ (\mathrm{r/min})$

考虑 A 上滑的临界状态，最大静摩擦力方向沿斜面向下（将图(b)中的 $\boldsymbol{F}_{\max}$ 反向即可）

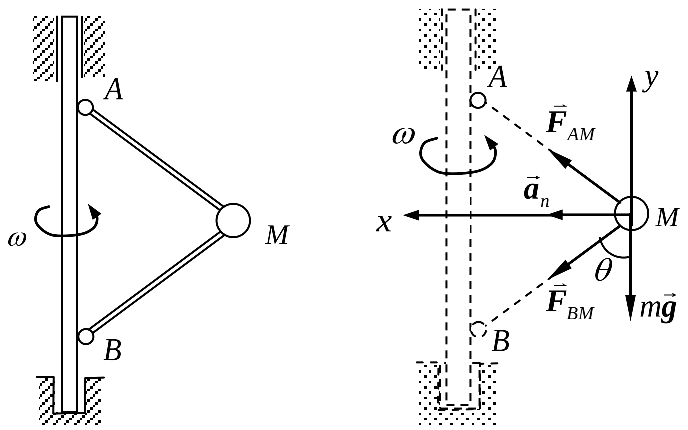
$$\begin{cases} mr\omega^2 = F_{\mathrm{N}}\sin 30^\circ + F_{\max}\cos 30^\circ \\ 0 = F_{\mathrm{N}}\cos 30^\circ - F_{\max}\sin 30^\circ - mg \end{cases}$$ 解得：$r\omega^2 = \dfrac{(\sin 30^\circ + f\cos 30^\circ)}{(\cos 30^\circ - f\sin 30^\circ)}g$，

$$F_{\max} = fF_{\mathrm{N}}$$

$\omega = 7.2\ (\mathrm{rad/s})$ ，$n = \dfrac{30\omega}{\pi} = 68.89\ (\mathrm{r/min})$

所以转速的范围为 $32.52(\mathrm{r/min}) \le n \le 68.89\ (\mathrm{r/min})$

9.4 图示质量为 m 的球 M，为两根各长 l 的杆所支持，此机构以不变的角速度ω绕铅直轴 AB 转动。如 AB=2a，两杆的各端均为铰接，且杆重忽略不计，求杆 AM、BM 的内力。

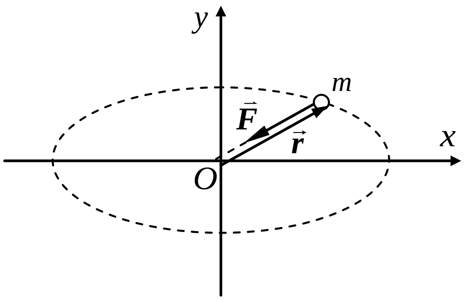


[**解**]　　取小球为研究对象，小球作匀速圆周运动，加速度$a_n = \omega^2\sqrt{l^2 - a^2}$

由　$m\vec{\boldsymbol{a}} = \sum \vec{\boldsymbol{F}}_i$，分别投影

$$\begin{aligned} x:&\quad ma_n = (F_{AM} + F_{BM})\cos\theta \\ y:&\quad 0 = (F_{AM} - F_{BM})\sin\theta - mg \end{aligned} \qquad \text{解得：} \begin{cases} F_{AM} = \dfrac{ml}{2a}(a\omega^2 + g) \\ F_{BM} = \dfrac{ml}{2a}(a\omega^2 - g) \end{cases}$$

9.5 图示质点的质量为 m，受指向原点 O 的力 $F=kr$ 作用，力与质点到点 O 的距离成正比。如初瞬时质点的坐标为 $x=x_0$，$y=0$，而速度的分量为 $v_x=0, v_y=v_o$。试求质点的轨迹。



o

[**解**] 取球 M 为研究对象，受力如图，坐标为 (x, y) 即 $\vec{F}=-k\vec{r}$ 而 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$ 投影得

$$F_x=-kx, F_y=-ky$$

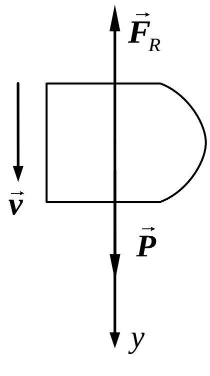
由 $m\vec{a}=\sum\vec{F}_i$ 得 $\begin{cases} m\ddot{x}=F_x=-kx \\ m\ddot{y}=F_y=-ky \end{cases}$ $\begin{cases} \ddot{x}+\omega_n^2 x=0 \\ \ddot{y}+\omega_n^2 y=0 \end{cases}$ 式中 $\omega_n^2=\dfrac{k}{m}$

通解 $\begin{cases} x=C_1\cos\omega_n t+C_2\sin\omega_n t \\ y=C_3\cos\omega_n t+C_4\sin\omega_n t \end{cases}$ 由初始条件 $t=0, x=x_o, y=0, \dot{x}=0, \dot{y}=v_o$ $\Rightarrow C_1=x_o, C_2=0, C_3=0, C_4=\dfrac{v_o}{\omega_n}$，

$$x=x_o\cos\omega_n t, y=\frac{v_o}{\omega_n}\sin\omega_n t$$

消去时间 t: $\dfrac{x^2}{x_0^2}+\dfrac{k}{m}\dfrac{y^2}{v_0^2}=1$ 即质点的轨迹为椭圆。

9.6 不前进的潜水艇重 Q，受到较小的沉力 P (重力与浮力的合力)向水底下沉。在沉力不大时，水的阻力 $\vec{F}_R=-kA\vec{v}$，其中 k 为比例常数，A 为潜水艇的水平投影面积，v 为下沉速度。如当 t=0 时，v=0。求下沉速度和在时间 T 内潜水艇下潜路程 s。



[**解**] 视潜艇为一质点，受力如图，有

$$ma=P-F_R=P-kAv \quad , \quad a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$\dfrac{Q}{g}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=P-kAv,$ 分离变量，积分 $\displaystyle\int_0^v\frac{Q\mathrm{d}v}{P-kAv}=\int_0^t g\mathrm{d}t$

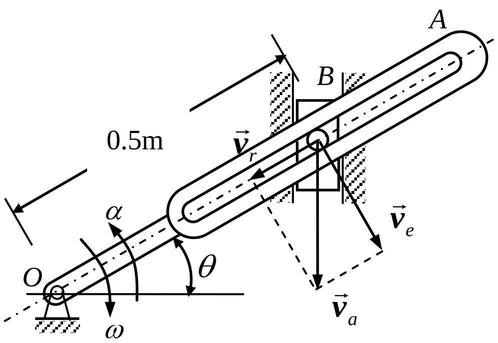
$\ln(P-kAv)\big|_0^v=-\dfrac{kAg}{Q}t\big|_0^t$ 得 $v=\dfrac{P}{kA}(1-e^{-\frac{kAg}{Q}t})$

再积分一次$\int_0^s \mathrm{d}y=\int_0^T \frac{P}{kA}(1-e^{-\frac{kAg}{Q}t})\mathrm{d}t$，

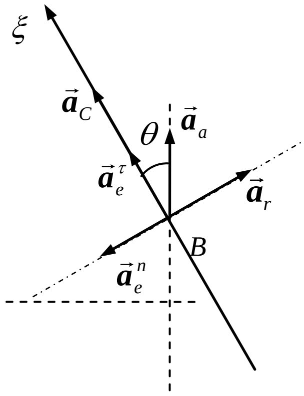
得：$y=\frac{P}{kA}[T-\frac{Q}{kAg}(1-e^{-\frac{KAg}{Q}T})]$

即在时间 T 内潜水艇下沉的路程 $s=\frac{P}{kA}[T-\frac{Q}{kAg}(1-e^{-\frac{KAg}{Q}T})]$

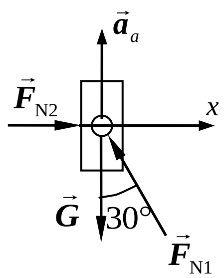
9.7 图示机构处于铅直平面内，滑块 B 重 G =9.8N， 在摇杆与水平线成$\theta=30^{\circ}$时，$\omega=2\mathrm{rad/s}$ ，$\alpha=2\mathrm{rad/s}^2$，转向如图。求导槽的约束反力及销钉与摇杆间的压力。摇杆质量不计。所有摩擦忽略不计。



(a)



(b)



(c)

[**解**] 1. 以 B 销为动点，OA 杆为动系，由$\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r$，速度图如图(a)，

$$v_r=v_e\tan30^{\circ}=\mathrm{O}B\cdot\omega\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=0.5\times2\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ (\mathrm{m/s})$$

由$\vec{a}_a=\vec{a}_e^\tau+\vec{a}_e^n+\vec{a}_r+\vec{a}_C$,加速度图如图(b)

投影至ξ轴上得 $a_a\cos30^{\circ}=a_e^\tau+a_C$

$$a_e^\tau=OB\cdot\alpha==0.5\times2=1\,(\mathrm{rad/s}^2)\ a_C=2\omega v_r=2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4}{3}\sqrt{3}\ \ (\mathrm{m/s}^2)$$

$$\therefore\quad a_a=\frac{a_e^\tau+a_C}{\cos30^{\circ}}=3.82\,(\mathrm{m/s}^2)\,(\uparrow)$$

2. 对滑块 B 受力分析如图(c)，有

$$ma_x=\sum F_x,\quad 0=F_{\mathrm{N1}}-F_{\mathrm{N2}}\sin30^{\circ}$$

$$ma_y = \sum F_x, \quad \frac{G}{g} a_a = F_{\mathrm{N2}} \cos 30^\circ - G$$

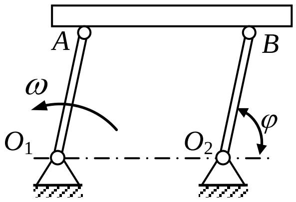
解得 $F_{\mathrm{N1}} = 7.86\mathrm{N}$，$F_{\mathrm{N2}} = 15.73\mathrm{N}$

即导槽的约束反力为 15.73N；摇杆间的压力为 7.86N。

十、动量定理

10.1 计算下列各图中系统的动量。

(a) 均质摆杆 $O_1A = O_2B = l$，质量均为 m，角速度为 ω，$O_1O_2 = AB$，均质矩形板 AB 质量为 M。求图示瞬时系统的动量。



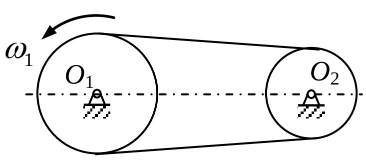
(a)

[解] (a) AB 作平动，由 $\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{v}}_C$ 计算动量

$$p_x = 2\cdot m\frac{l}{2}\omega\sin\varphi + Ml\omega\sin\varphi = (m+M)l\omega\sin\varphi$$

$$p_y = -(m+M)l\omega\cos\varphi$$

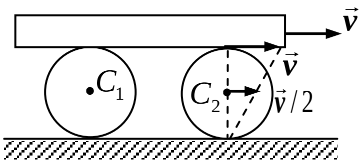
(b) 带传动机构中，带轮 O_1 和 O_2 以及胶带都是均质的，重量分别为 P_1，P_2 和 P_3，带轮 O_1 的角速度为ω_1。求系统的动量。



(b)

(b) $\because$ 系统质心不动，由 $\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{v}}_C$，$\therefore$ 系统动量 $p = 0$

(c) 重 P_1 的平板放在重量均为 P_2 且半径相等的两个轮子上，平板速度为 v，各接触处没有相对滑动。求系统的动量。

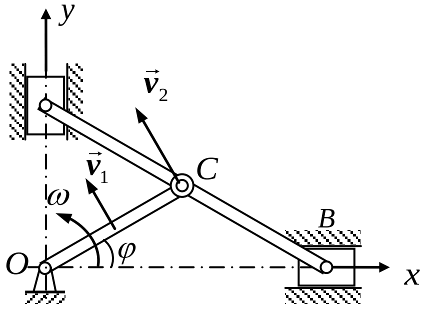


(c)

(c) 两轮心 C_1，C_2 速度为 $v_{C_1} = v_{C_2} = v/2$，

$\therefore$ 系统动量 $p = 2\cdot\frac{P_1}{g}\cdot\frac{1}{2}v + \frac{P_2}{g}v = \frac{P_1+P_2}{g}v$

(d)椭圆规尺 AB 重 $2P_1$，曲柄 OC 重 P_1，滑块 A、B 重量均为 P_2，$OC=AC=CB=l$；曲柄绕 O 轴转动的角速度ω 为常量；当开始时，曲柄水平向右。求图示瞬时系统的动量。



(d)

[解]如图所示，OC 质心速度为 $v_1 = \frac{l}{2}\omega$

规尺 AB 与滑块 A、B 系统质心 C 点的速度为

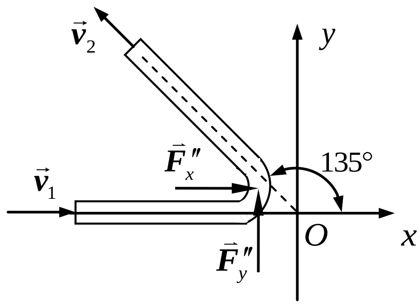
$v_2 = l\omega$

质系动量为

$$p = \frac{P_1}{g}v_1 + (\frac{2P_1}{g} + \frac{2P_2}{g})v_2 = \frac{\omega l}{2g}(5P_1 + 4P_2)$$

方向与曲柄垂直，沿其转动方向。

10.2　直径 d=200mm 的管道有一个 135°的弯头，流经管道的水的密度 ρ=1000kg/m^3，若流量 Q=0.6m^3/s。求弯头处因水流的动量变化所引起的附加动压力。

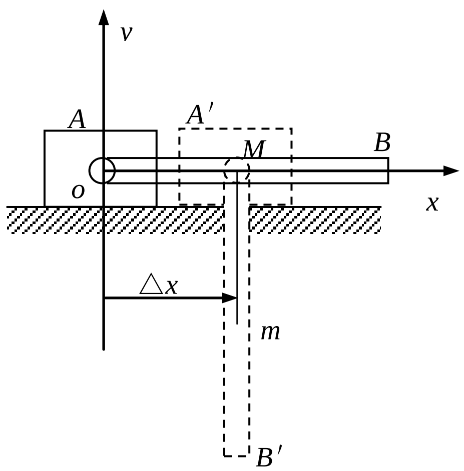


[**解**]　设附加动反力如图所示，由流体附加动反力公式 $\vec{F}'' = \rho Q(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$

对于等截面管流速 $v_1 = v_2 = \dfrac{Q}{S} = \dfrac{4Q}{\pi d^2} = \dfrac{4\times 0.6}{\pi\times 0.2^2} = 19.10$ (m/s)

$$\therefore \begin{cases} F''_x = \rho Q(-v_2\cos 45° - v_1) = -1000\times 0.6\times 19.1(\cos 45° + 1) = -19562 \text{ (N)} \\ F''_y = \rho Q(v_2\sin 45° - 0) = 1000\times 0.6\times 19.1\sin 45° = 8102 \text{ (N)} \end{cases}$$

10.3 图示物块 A 质量为 M，放在光滑水平面上；其上铰接的 AB 杆质量为 m、长为 l。求当杆 AB 从水平静止释放后至铅直时，A 块的水平位移。



[**解**] 研究物块与杆组成的系统，设物块 A 的水平位移为Δx，

∵　系统初始静止，且$\sum F_x = 0$，

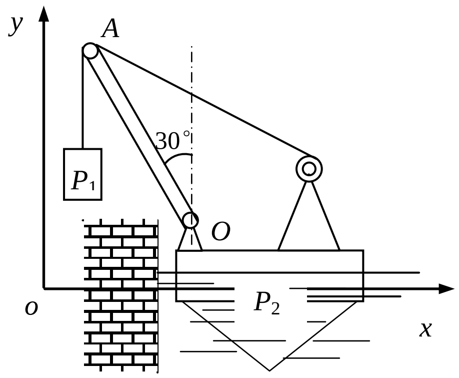
∴　x 方向该系统质心位置守恒。

在初始位置和图示位置，质心的坐标分别为

$$x_{C1} = \frac{M\cdot 0 + m\cdot \dfrac{l}{2}}{M+m} = \frac{ml}{2(M+m)}, \quad x_{C2} = \frac{M\cdot\Delta x + m\cdot\Delta x}{M+m} = \Delta x$$

由 $x_{C1} = x_{C2}$，解得 $\Delta x = \dfrac{ml}{2(M+m)}$

10.4 已知重物 $P_1 = 20$kN，起重机 $P_2 = 200$kN，起重杆 $0A = 8$m。开始时，系统静止，杆与铅直位置成 60°角；水的阻力和杆重不计。求 OA 转到与铅直位置成 30°角时起重机的位移。



[**解**]　设起重机沿 x 轴正向运动了 Δx，

因该系统初始静止，且 $\sum F_x = 0$，

故 x 方向该系统质心位置守恒。

在初始位置和图示位置，质心的坐标分别为

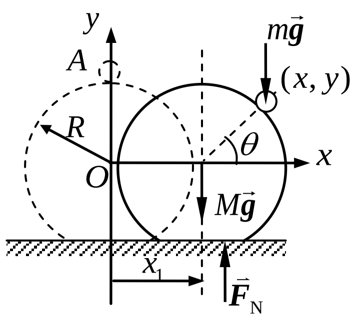
$$x_{C1} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2}$$

$$x_{C2} = \frac{P_1[x_1 + \Delta x + OA(\sin 60° - \sin 30°)] + P_2(x_2 + \Delta x)}{P_1 + P_2}$$

由 $x_{C1} = x_{C2}$，解得 $\Delta x = -0.266$ m　(←)

即：起重机将向左位移 26.6 厘米。

10.5 如图所示，质量为 M、半径为 R 的大半圆柱体放在光滑的水平面上，质量为 m 的小球放在圆柱体上 A 点，不计摩擦，初始时系统静止，小球受微扰动后沿圆柱表面滑下。求小球在离开圆柱体之前的运动轨迹。



[**解**]取坐标系如图，初始时圆柱中心为坐标原点，系统质心坐标：$x_C^0 = 0$

设小球落至 θ 角处，圆柱中心的坐标为 x_1，则小球的坐标为 $\begin{cases} x = x_1 + R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$

系统质心坐标 $x_C=\dfrac{Mx_1+m(x_1+R\cos\theta)}{M+m}=x_1+\dfrac{m}{M+m}R\cos\theta$

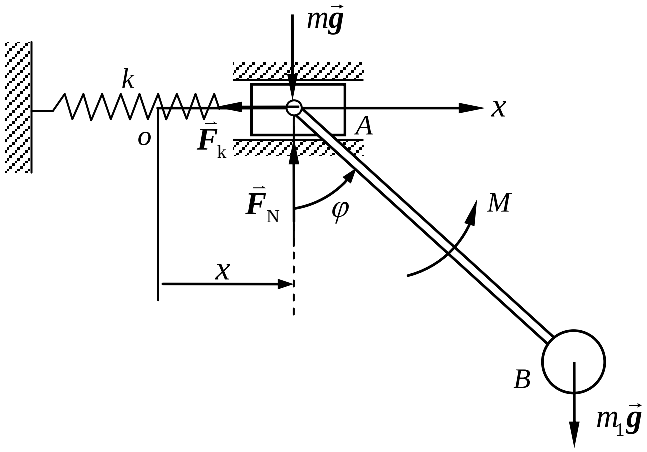
系统受力如图，$\because\sum F_x^{(e)}=0$ 且初始时系统静止，$\therefore x_C=x_C^0=\text{const.}=0$

$\therefore x_1+\dfrac{m}{M+m}R\cos\theta=0$， $x_1=-\dfrac{m}{M+m}R\cos\theta$

小球的坐标为 $\begin{cases}x=x_1+R\cos\theta=\dfrac{M}{M+m}R\cos\theta\\ y=a\sin\theta\end{cases}$

消去参数 θ，得 $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{MR}{M+m}\right)^2}+\dfrac{y^2}{R^2}=1$ 即小球在离开圆柱体之前的轨迹是椭圆。

10.6 如图所示，质量为 m 的滑块 A，可以在水平光滑槽内运动，具有刚度系数为 k 自重不计的弹簧一端与滑块相连接，另一端固定。杆 $AB=l$，质量不计，A 端与滑块铰接，B 端固结质量为 m_1 的质点，在铅锤面内可绕水平轴 A。设杆在力偶 M 作用下转角 $\varphi=\omega t$，ω为常数。初瞬时 $\varphi=0$，弹簧为原长，滑块静止，求滑块 A 的运动微分方程。



[**解**] 以弹簧原长处和铅垂位置为 x 和φ 的起始位置，系统受力如图。

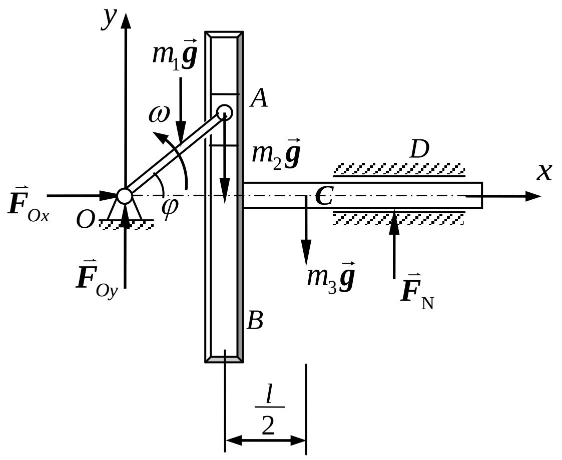
由 $\dfrac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}=\sum F_x$，即 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sum m_ix_i=-F_k$,

有 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(mx+m_1(x+l\sin\varphi)\right)=-kx$

得 $\ddot{x}+\dfrac{k}{m+m_1}x=\dfrac{m_1l\omega^2}{m+m_1}\sin\varphi$

方程的解为 $x=\dfrac{m_1l\omega^2}{k-(m+m_1)\omega^2}\sin\omega t$

10.7 如图机构，已知曲柄 OA 质量为 m_1，$OA=l$，角速度ω为常数，$\varphi=\omega t$；滑块 A 质量为 m_2，滑杆质量为 m_3，质心在 C 点，不计各处摩擦；求(1)机构质量中心的运动方程；(2)作用在轴 O 处的最大水平力。



[**解**]　　在图示坐标系下，由质心坐标公式

$$x_C=\frac{\sum m_i x_i}{m}=\frac{\sum P_i x_i}{P},$$

$$y_C=\frac{\sum m_i y_i}{m}=\frac{\sum P_i y_i}{P}$$

得机构质心的运动方程为

$$x_C=\frac{m_3 l}{2(m_1+m_2+m_3)}+\frac{m_1+2m_2+2m_3}{2(m_1+m_2+m_3)}l\cos\omega t$$

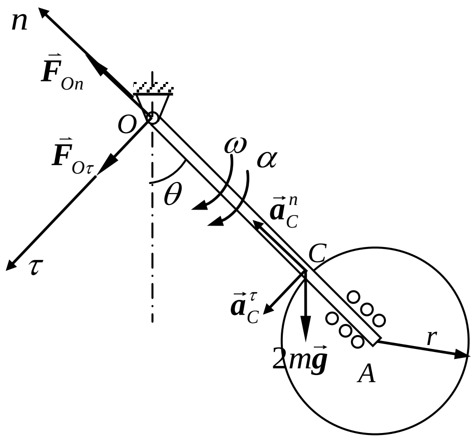
$$y_C=\frac{m_1+2m_2}{2(m_1+m_2+m_3)}l\sin\omega t$$

该机构系统受力如图，由 $ma_{Cx}=\sum F_x$，有 $(m_1+m_2+m_3)\dfrac{\mathrm{d}^2 x_C}{\mathrm{d}t^2}=F_{Ox}$

解得 $F_{Ox}=-\dfrac{1}{2}(m_1+2m_2+2m_3)l\omega^2\cos\omega t$

$$F_{Ox\max}=\frac{1}{2}(m_1+2m_2+2m_3)l\omega^2$$

10.8 质量为 m，长为 l 的均质杆杆端与质量为 m、半径为 r 的均质圆盘中心固结，绕水平轴 O 的作定轴转动，图示瞬时杆与铅垂线夹角为θ，角速度为ω，角加速度为α，试求该瞬时轴承 O 处的约束力。



解：刚体的质心位置 $r_C = OC = \dfrac{m\dfrac{l}{2} + ml}{2m} = \dfrac{3}{4}l$ ，

质心的加速度为 $a_C^n = \dfrac{3}{4}l\omega^2, a_C^\tau = \dfrac{3}{4}l\alpha$

系统受力如图，由质心运动定理得

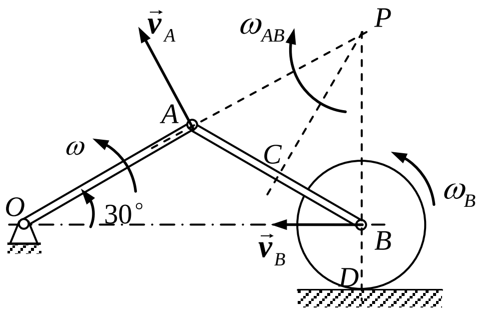
$$\begin{cases} \sum F_n = ma_C^n，F_{On} - 2mg\cos\theta = 2m\left(\dfrac{3}{4}l\omega^2\right) \\ \sum F_\tau = ma_C^\tau，F_{O\tau} + 2mg\sin\theta = 2m\left(\dfrac{3}{4}l\alpha\right) \end{cases}$$

解得图示瞬时轴承 O 处的约束力：$\begin{cases} F_{On} = \dfrac{3}{2}ml\omega^2 + 2mg\cos\theta \\ F_{O\tau} = \dfrac{3}{2}ml\alpha - 2mg\sin\theta \end{cases}$

十二、动能定理

12.1 计算下列各系统的动能：

⑴ 图示平面机构中，均质杆 $OA = AB = l$，均质轮 B 半径为 r，杆与轮质量均为 m，OA 杆以角速度 ω 绕水平轴 O 作定轴转动，通过杆 AB 带动轮 B 在水平面纯滚动，试求图示瞬时系统的动能。



解：AB 杆、B 轮的速度瞬心分别为 P 和 D。

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \omega\text{，}\ v_B = \omega_{AB} BP = \omega l\text{，}\ \omega_B = \frac{v_B}{r} = \frac{\omega l}{r}\text{，}$$

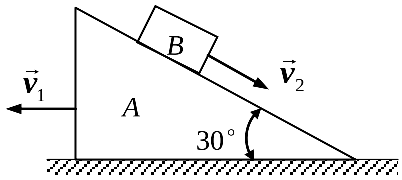
$$T_{OA} = \frac{1}{2} J_O \omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3} m l^2 \omega^2 = \frac{1}{6} m\omega^2 l^2$$

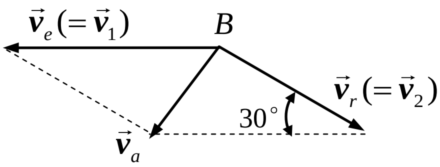
$$T_{AB} = \frac{1}{2} J_P \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m l^2 + m\left(\frac{\sqrt{3}}{2} l\right)^2\right)\omega^2 = \frac{5}{12} m\omega^2 l^2$$

$$T_B = \frac{1}{2} J_D \omega_B^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m r^2 + m r^2\right)^2 \left(\frac{\omega l}{r}\right)^2 = \frac{3}{4} m\omega^2 l^2$$

系统动能为：$\underline{T = T_{OA} + T_{AB} + T_B = \frac{4}{3} m\omega^2 l^2}$

⑵ 滑块 A 沿水平面以速度 v_1 移动，重物块 B 沿滑块以相对速度 v_2 滑下，已知滑块 A 的质量为 m_1，物块 B 的质量为 m_2。





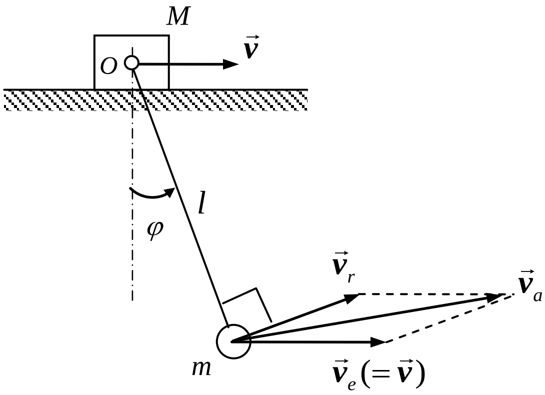
解：物块 B 的绝对速度为 $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

$$v_a^2 = v_e^2 + v_r^2 - 2 v_e v_r \cos 30° = v_1^2 + v_2^2 - \sqrt{3} v_1 v_2$$

系统的动能为 $T=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_a^2$

即 $T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2-\frac{\sqrt{3}}{2}m_2v_1v_2$

12.2 已知滑块质量为 M，以匀速 v 沿水平直线运动，O 点悬挂一单摆，摆长为 l，摆锤质量为 m，转动方程为 $\varphi=\varphi(t)$。求滑块与单摆所组成的系统的动能表达式。



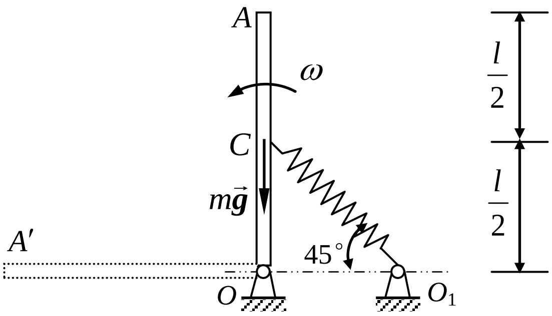
[**解**] 先求摆锤的绝对速度。由 $\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r$，式中 $v_r=l\dot{\varphi}$， $v_e=v$，

得 $v_a^2=v_e^2+v_r^2-2v_ev_r\cos(\pi-\varphi)=v^2+(l\dot{\varphi})^2+2vl\dot{\varphi}\cos\varphi$

所以，系统的动能为 $T=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}mv_a^2$

即 $T=\frac{1}{2}(M+m)v^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2+mvl\dot{\varphi}\cos\varphi$

12.3 均质杆 OA 长 l = 2.4m，质量 m = 30kg，铅直时弹簧为自然状态，弹簧刚度 k = 3kN/m；求杆在铅直时的角速度至少为多大，才能使杆由铅直转到水平位置 OA'。



[**解**]研究杆， 设杆在铅直位置时角速度为ω，则$T_1=\frac{1}{2}J_O\omega^2=\frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\omega^2=\frac{1}{6}ml^2\omega^2$

杆转到OA' 位置时，角速度恰为零，即$T_2=0$

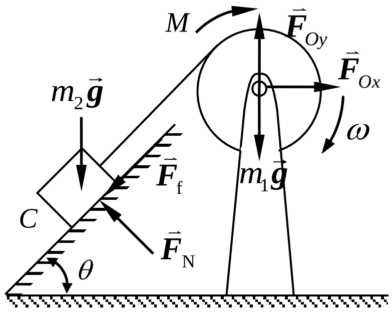
该过程中，所有主动力做功为

$$\sum W_{12}=mg\frac{l}{2}+\frac{1}{2}k\left[0^2-\left(l-\frac{l}{2}\sqrt{2}\right)^2\right]=\frac{1}{2}mgl-\frac{1}{8}kl^2(2-\sqrt{2})^2$$

由动能定理$T_2-T_1=W_{12}$得$0-\frac{1}{6}ml^2\omega^2=\frac{1}{2}mgl-\frac{1}{8}kl^2(2-\sqrt{2})^2$

代入数据，得 $\omega=3.67\quad(\mathrm{rad/s})$

12.4 已知均质圆轮半径为r，质量为m_1，重物质量为m_2，力偶M的矩为常量。斜面倾角为θ。重物对斜面的滑动摩擦系数为f'。初始时，系统静止。求圆轮转过φ角时的角速度和角加速度。



[**解**] 该系统的初动能为零，即$T_1=0$；

设鼓轮转过 φ 角时的角速度为ω，

系统动能为$T_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_1r^2\omega^2+\frac{1}{2}m_2v^2$, $v=r\omega$

该过程中，所有的力做功为$\sum W_{12}=M\varphi-m_2gr\varphi\sin\theta-f'm_2g\cdot r\varphi\cos\theta$

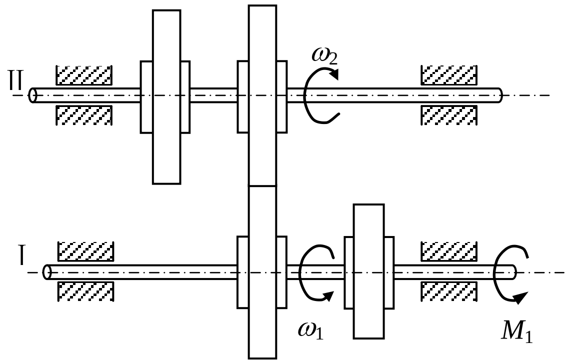
由动能定理$T_2-T_1=W_{12}$得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_1r^2\omega^2+\frac{1}{2}m_2(r\omega)^2-0=M\varphi-m_2gr\varphi\sin\theta-f'm_2gr\varphi\cos\theta\quad(*)$$

所以 $$\omega=\frac{2}{r}\sqrt{\frac{M-m_2gr(\sin\theta+f'\cos\theta)}{m_1+2m_2}\varphi}$$

将(*)式对时间求导，注意到 $\dfrac{d\varphi}{dt}=\omega$，解得 $\alpha=\dfrac{2[M-m_2gr(\sin\theta+f'\cos\theta)]}{r^2(m_1+2m_2)}$

12.5 图示轴Ⅰ和轴Ⅱ（连同安装在轴上的齿轮和带轮等）的转动惯量分别为 J_1 = 5kg · m^2 和 J_2 = 4kg · m^2，且 $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}=\dfrac{3}{2}$，作用于轴Ⅰ上的力偶矩 M_1= 50N · m，系统由静止而运动。求⑴轴Ⅱ转速达到 n_2 = 120r/min 时，轴Ⅱ转过的圈数。⑵ 在这过程中轴Ⅱ的角加速度。



[**解**]⑴ 研究系统，由动能定理 $T_2-T_1=W_{12}$，有

$$\left(\frac{1}{2}J_1\omega_1^2+\frac{1}{2}J_2\omega_2^2\right)-0=M_1\varphi_1 \quad \cdots\cdots(a)$$

式中 $\omega_2=\dfrac{120\pi}{30}=4\pi$， $\omega_1=\dfrac{2}{3}\omega_2=\dfrac{8}{3}\pi$

代入数据，解得 $\varphi_1=9.826\,(\text{rad})$

轴Ⅱ的转角 $\varphi_2=\dfrac{3}{2}\varphi_1$

轴Ⅱ的转数 $n=\dfrac{\varphi_2}{2\pi}=\dfrac{3\varphi_1}{4\pi}=2.346\,r$

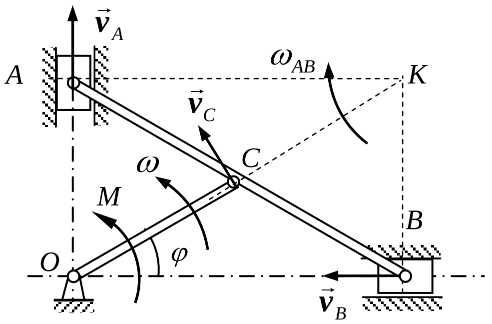
⑵ 在任意瞬时，系统的动能为

、 $$T=\frac{1}{2}J_1\omega_1^2+\frac{1}{2}J_2\omega_2^2=\frac{1}{2}J_1\left(\frac{2}{3}\omega_2\right)^2+\frac{1}{2}J_2\omega_2^2=\left(\frac{4}{18}J_1+\frac{1}{2}J_2\right)\omega_2^2$$

由功率方程 $\dfrac{dT}{dt}=\sum P$， $\therefore\dfrac{dT}{dt}=\left(\dfrac{4}{9}J_1+J_2\right)\omega_2\alpha_2=M_1\omega_1=M_1\dfrac{2}{3}\omega_2$，

$$\alpha_2=\frac{6M_1}{4J_1+9J_2}=5.357\quad(\text{rad/s}^2)$$

12.6 椭圆规位于水平面内，均质杆 OC 和 AB 重量分别为 P 和 $2P$，且 $OC=AC=BC=l$。滑块 A、B 的重量均为 Q。曲柄上的力偶矩 M 为常数，系统于 $\varphi=0$ 由静止开始运动，忽略各处摩擦。求曲柄的角速度（以转角 φ 的函数表示）和角加速度。



[解]
运动分析如图，K 为 AB 杆的速度瞬心，有

$$v_C = l\omega\ ,\omega_{AB} = \frac{v_C}{PC} = \omega, v_A = 2l\cos\varphi\omega_{AB} = 2l\omega\cos\varphi,$$
$$v_B = 2l\sin\varphi\omega_{AB} = 2l\omega\sin\varphi$$

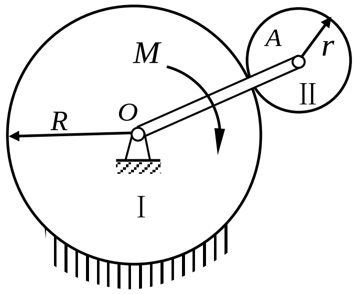
该系统的初动能$T_1 = 0$；曲柄转过φ角时，该系统的动能为

$$T_2 = T_{OC} + T_A + T_B + T_{ACB}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\frac{P}{g}l^2\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{Q}{g}v_A^2 + \frac{1}{2}\frac{Q}{g}v_B^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{g}v_C^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{2P}{g}(2l)^2\omega_{AB}^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{3P+4Q}{g}l^2\omega^2$$

功为 $W_{12} = M\varphi$，

由动能定理 $T_2 - T_1 = W_{12}$，解得 $\omega = \sqrt{\dfrac{2gM\varphi}{(3P+4Q)l^2}}$ $\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{gM}{(3P+4Q)l^2}$

12.7 周转齿轮传动机构放在水平面内，动齿轮半径 r，重 P，可看成为均质圆盘；曲柄 OA 重 Q，可看成均质杆；定齿轮半径为 R。曲柄上作用一矩为 M 的不变力偶，使此机构由静止开始运动。求曲柄转过φ角后的角速度和角加速度。



[解] 设曲柄转过φ角时的角速度为ω，由动能定理$T_2 - T_1 = W_{12}$，有

$$[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{Q}{g}(R+r)^2\omega^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{P}{g}r^2\omega_A^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g}v_A^2] - 0 = M\varphi$$

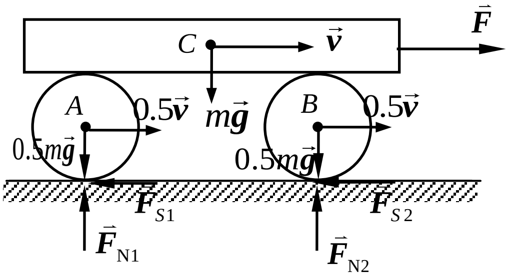
式中 $v_A = r\omega_A \qquad \omega_A = \dfrac{R+r}{r}\omega$

解得曲柄转过φ角后的角速度$\omega = \dfrac{2}{R+r}\sqrt{\dfrac{3Mg}{9P+2Q}\varphi}$

求导并注意到$\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega$，$\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\alpha$ 得曲柄转过φ角后的角加速度为

$$\alpha = \frac{6Mg}{(R+r)^2(9P+2Q)}$$

12.8 图示均质板质量为 m，搁在两个均质圆柱滚子上，滚子质量均为$\dfrac{m}{2}$，半径均为 r。如在板上作用水平力 $\boldsymbol{F}$，滚子与水平面和平板间都没有滑动，求板的加速度。



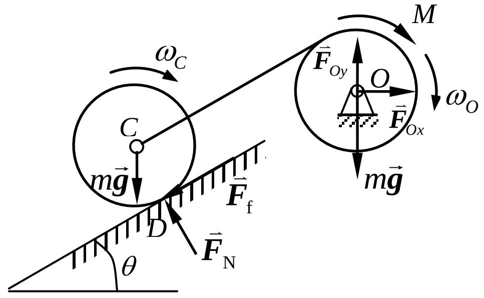
[**解**] 研究系统，设板的速度为 v，则滚子中心速度为 $v/2$，系统的动能为:

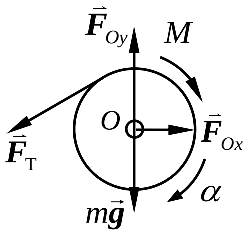
$$T=\frac{1}{2}mv^2+2\cdot\frac{3}{4}\frac{m}{2}(\frac{v}{2})^2=\frac{11}{16}mv^2,\quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\frac{11}{8}mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{11}{8}mva$$

$$\sum P=\vec{F}\cdot\vec{v}=Fv$$

由功率方程$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\sum P$ 得$\dfrac{11}{8}mva=Fv$ ，解得板的加速度为$a=\dfrac{8}{11}\dfrac{F}{m}$

12.9 图示机构中，圆柱体 C 和鼓轮 O 为均质物体，质量均为 m，半径均为 R。圆柱体 O'沿倾角为θ 的斜面纯滚动，在鼓轮上作用一常力矩为 M，绳子平行于斜面，不计绳子的质量及弹性。求 (1) 鼓轮 O 的角加速度；(2) 轴承 O 的约束反力；(3)绳子的张力。





[**解**] 研究系统，圆柱 C 作纯滚动，瞬心为 D 点，由运动学知 $\omega_C = \omega_O = \omega$，

系统动能为 $T = \frac{1}{2}\frac{3}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega^2 = mR^2\omega^2$，$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 2mR^2\omega\alpha$

系统受力如图，所有力的功率为 $\sum P = M\omega - mgv_C\sin\theta = M\omega - mgR\omega\sin\theta$

由 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \sum P$ 得：$2mR^2\omega\alpha = M\omega - mgR\omega\sin\theta$

得鼓轮 O 的角加速度 $\alpha = \frac{M - mgR\sin\theta}{2mR^2}$

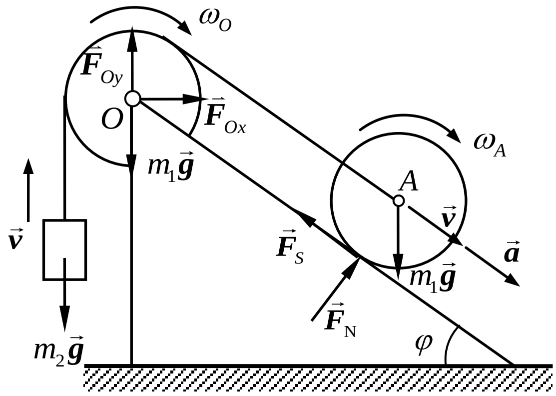
以 O 轮为研究对象，应用刚体平面运动微分方程，得

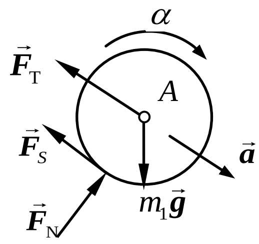
$$\begin{cases} M - F_T R = \frac{1}{2}mR^2\alpha \\ F_{Ox} - F_T\cos\theta = 0 \\ F_{Oy} - F_T\sin\theta - mg = 0 \end{cases}$$

解得 $F_T = \frac{1}{4R}(3M + mgR\sin\theta)$；$F_{Ox} = \frac{1}{4R}(3M + mgR\sin\theta)\cos\theta$；

$F_{Oy} = \frac{1}{4R}(3M + mgR\sin\theta)\sin\theta + mg$

12.10 均质磙子 A 与滑轮 B 质量均为 m_1，半径相等，磙子沿倾角为 φ 的斜面向下作纯滚动，借一不计质量的绳子提升质量为 m_2 的物体 C。若绳子不可伸长，轴承摩擦不计，求（1）磙子质心的加速度；（2）磙子与滑轮间绳子的张力。





[**解**]如图，设碾子半径为 R，系统的动能为 $T=\frac{1}{2}m_2v^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}m_1R^2\omega_O^2+\frac{1}{2}\frac{3}{2}m_1R^2\omega_A^2$

将 $R\omega_A=R\omega_O=v$ 代入后整理，得 $T=\frac{1}{2}(2m_1+m_2)v^2$

而系统所有力的功率 $\sum P=(m_1g\sin\varphi-m_2g)v$

由 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\sum P$ 得碾子中心的加速度为 $a=\frac{m_1\sin\varphi-m_2}{2m_1+m_2}g$

再研究碾子 A，如图有 $\frac{1}{2}m_1R^2\alpha=F_SR$ 及 $m_1a=m_1g\sin\varphi-F_S-F_T$

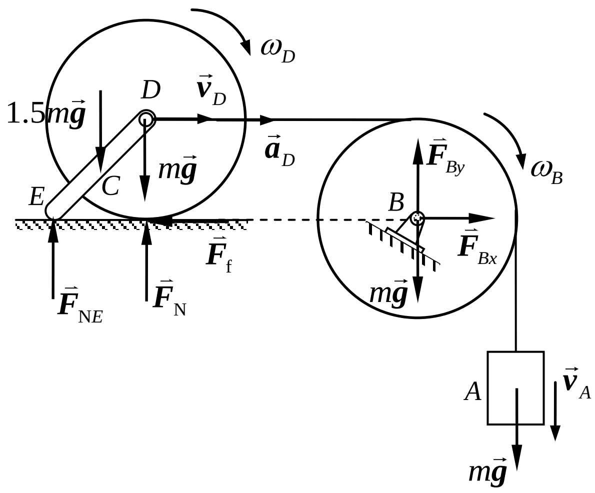
纯滚动时又有 $R\alpha=a$

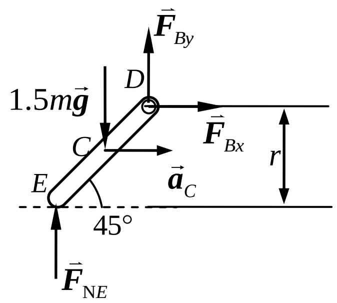
联立可得系在碾子上绳的张力为 $F_T=\frac{3m_1m_2+(2m_1m_2+m_1^2)\sin\varphi}{2(2m_1+m_2)}g$

12.11 质量为 m 的物块 A 借不可伸长的绳子经滑轮 B 拖动碾子 D 在水平面上纯滚，碾子和滑轮均可视为质量为 m、半径为 r 的均质圆盘。质量为 1.5m、长 $l=\sqrt{2}\,r$ 均质细长杆 DE 在端与碾子中心铰接，E 端与地面接触。若绳和滑轮 B 间没有相对运动，E 端与地面的摩擦不计，试求：

(1) 碾子中心 D 的加速度；

(2) 地面对杆端 E 的约束反力。





解：DE 杆作平移，碾子作纯滚动，设碾子中心 D 的速度为 $\boldsymbol{v}_D$，则 $r\omega_D = r\omega_B = v_D = v_A = v_C$ ，

系统的动能为 $T = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\omega_B^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{2}mr^2\omega_D^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{2}mv_C^2$

$$= \frac{1}{2}mv_D^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{v_D}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{2}mr^2\left(\frac{v_D}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{2}mv_D^2 = \frac{9}{4}mv_D^2$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{9}{2}mv_D\frac{\mathrm{d}v_D}{\mathrm{d}t} = \frac{9}{2}mv_D a_D,$$

系统受力如图，所有力的功率为 $\sum P = mgv_A = mgv_D$

由 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \sum P$ 得碾子中心的加速度为 $\underline{a_D = \frac{2}{9}g}$

研究 DE 杆，质心加速度 $a_C = a_D = \frac{2}{9}g$，角加速度 $\alpha = 0$，列平面运动微分方程：

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_{Cx}, & F_{Bx} = 1.5ma_C, \\ \sum F_y = ma_{Cy}, & F_{By} + F_{\mathrm{N}E} - 1.5mg = 0, \\ \sum M_C = J_C\alpha, & F_{By}\frac{r}{2} - F_{Bx}\frac{r}{2} - F_{\mathrm{N}E}\frac{r}{2} = 0, \end{cases}$$

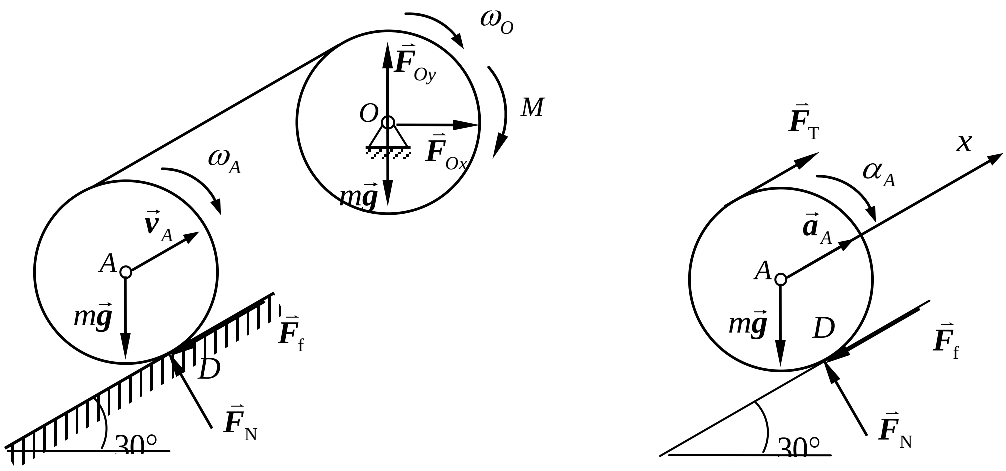
联立解得地面对杆端 E 的约束反力 $\underline{F_{\mathrm{N}E} = \frac{7}{12}mg}$

或：用对动点 D 的动量矩定理 $\frac{\mathrm{d}\vec{L}_D}{\mathrm{d}t} + \vec{v}_D \times m\vec{v}_C = \sum M_D(\vec{F})$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1.5mgv_C\cdot\frac{r}{2}\right)+0=1.5mg\cdot\frac{r}{2}-F_{\mathrm{NE}}\cdot r\text{，且}\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=a_C=a_D=\frac{2}{9}g$$

解得地面对杆端 E 的约束反力 $F_{\mathrm{NE}}=\frac{7}{12}mg$

12.12 均质磙子 A 与滑轮 O 质量均为 m，半径均为 r，轮 O 上作用矩为 $M=mgr$ 的力偶，通过与斜面平行的绳子带动磙子沿倾角为 θ 的斜面作纯滚动。若绳子不计质量且不可伸长，轴承摩擦不计，求（1）磙子 A 质心的加速度；（2）磙子与滑轮间绳子的张力；（3）斜面与磙子之间的摩擦力。



解：磙子作纯滚动，设磙子中心 A 的速度为 $\boldsymbol{v}_A$，则 $r\omega_A=v_A$，$r\omega_O=2v_A$，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\omega_A^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\omega_O^2=\frac{7}{4}mv_A^2,\quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\frac{7}{2}mv_Aa_A,$$

系统受力如图，所有力的功率为

$$\sum P=M\omega_O-mgv_A\sin 30^\circ=mgr\cdot\frac{2v_A}{r}-\frac{1}{2}mgv_A=\frac{3}{2}mgv_A$$

由 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\sum P$ 得磙子中心的加速度为 $a_A=\frac{3}{7}g$

再研究磙子 A，$\alpha_A=\frac{a_A}{r}=\frac{3}{7}\frac{g}{r}$，对其速度瞬心 D 应用动量矩定理，

$$\sum M_D=J_D\alpha_A,\quad F_{\mathrm{T}}(2r)-mgr\sin 30^\circ=\frac{3}{2}mr^2\alpha_A,$$

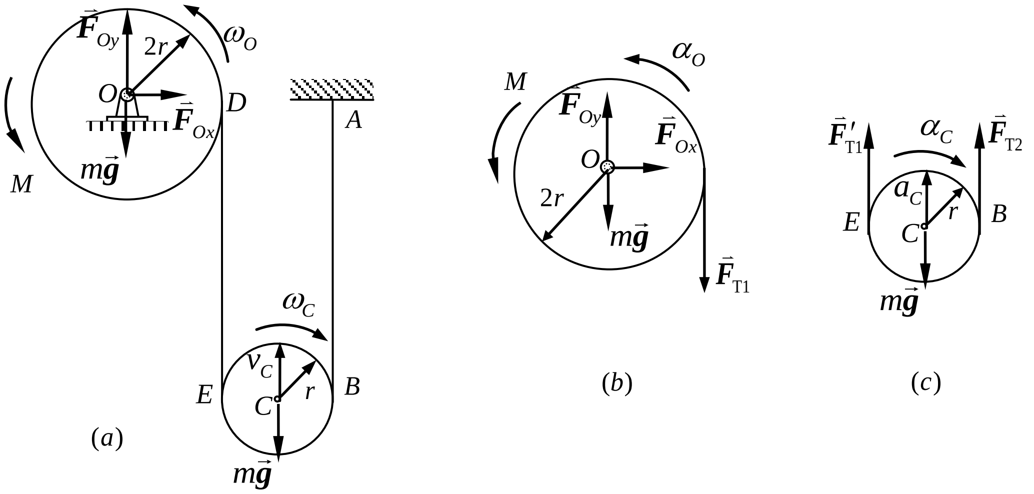
得磙子与滑轮间绳子的张力 $F_{\mathrm{T}}=\frac{4}{7}mg$

由质心运动定理 $\sum F_x=ma_A$， $F_{\mathrm{T}}-mg\sin 30°-F_f=ma_A$

解得 $F_f=-\frac{5}{14}mg$，负号说明摩擦力沿斜面向上。

12.13 滑轮组如图，定滑轮 O 半径为 $2r$，动滑轮 C 半径为 r，两滑轮间及 AB 段绳子方向铅直。两轮均可视为质量为 m 的均质圆盘。绳子与滑轮间无相对滑动，轴承 O 处的摩擦和绳子的质量均忽略不计。若在轮 O 上作用一矩为 $M=2mgr$ 的常值力偶，试求：

(1) 动滑轮轮心 C 的加速度；(2) 轴承 O 处的反力；(3) DE 段绳子的拉力；(4) AB 段绳子的拉力。



解：设动滑轮轮心 C 的速度为 v_C，则 $\omega_C=\frac{v_C}{r}$， $\omega_O=\frac{2v_C}{2r}=\frac{v_C}{r}, \alpha_O=\frac{2a_C}{2r}=\frac{a_C}{r}$，

系统受力如图(a)，动能为: $T=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega_C^2+\frac{1}{2}J_O\omega_O^2$

$$=\frac{1}{2}m{v_C}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{v_C}{r}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}m(2r)^2\left(\frac{v_C}{r}\right)^2=\frac{7}{4}mv_C^2,$$

$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\frac{7}{2}mv_Ca_C$， $\sum P=M\omega_O-mgv_C=2mgr\frac{v_C}{r}-mgv_C=mgv_C$

由功率方程 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\sum P$ 得动滑轮轮心 C 的加速度 $a_C=\frac{2}{7}g$

再研究轮 O，受力如图(b)，由 $\sum M_O(\vec{F}) = J_O\alpha_O$， $M - F_{T1}\cdot 2r = \frac{1}{2}m(2r)^2\frac{a_C}{r}$，

得 DE 段绳子的拉力 $F_{T1} = \frac{5}{7}mg$

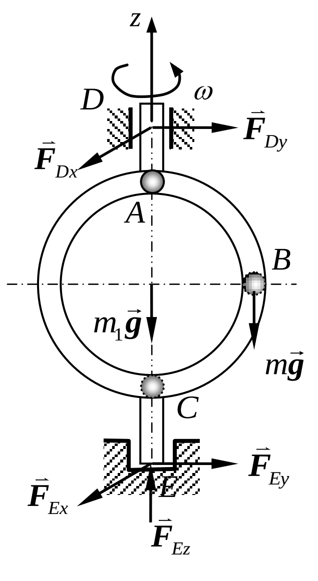
由质心运动定理 $\begin{cases}\sum F_x = ma_{Ox} \\ \sum F_y = ma_{Oy}\end{cases}$，得 $\begin{cases}F_{Ox} = 0 \\ F_{Oy} - mg - F_{T1} = 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}F_{Ox} = 0 \\ F_{Oy} = \frac{12}{7}mg\end{cases}$

再研究轮 C，受力如图(c)，由质心运动定理 $\sum F_y = ma_C$ 有

$F'_{T1} + F_{T2} - mg = ma_C$ 解得 AB 段绳子的拉力 $F_{T2} = \frac{4}{7}mg$

或：由 $\sum M_C(\vec{F}) = J_C\alpha_C$， $F_{T1}\cdot r - F_{T2}\cdot r = \frac{1}{2}mr^2\cdot\frac{a_C}{r}$，解得 $F_{T2} = \frac{4}{7}mg$

12.14 图示圆环半径为 R，对 z 轴的转动惯量为 J，绕 z 轴以角速度 ω 转动。质量为 m 的小球初始位于圆环内的 A 点处静止，由于微小干扰小球离开点 A 下滑，不计摩擦；求当小球分别到达点 B 和点 C 时，圆环的角速度和质点的速度。



[**解**] 研究系统，受力如图，$\because \sum M_z(\vec{F}) = 0$，$\therefore$ 对 z 轴动量矩守恒。在 B 处，有

$J\omega_B + mR^2\omega_B = J\omega$ 得 $\omega_B = \frac{J\omega}{J + mR^2}$

在 C 处，有 $J\omega_C = J\omega$，得 $\omega_C = \omega$

小球滑下时，重力做功，由动能定理 $T_2 - T_1 = W_{12}$，到 B 处时

$$\frac{1}{2}J\omega_B^2+\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}J\omega^2=mgR$$

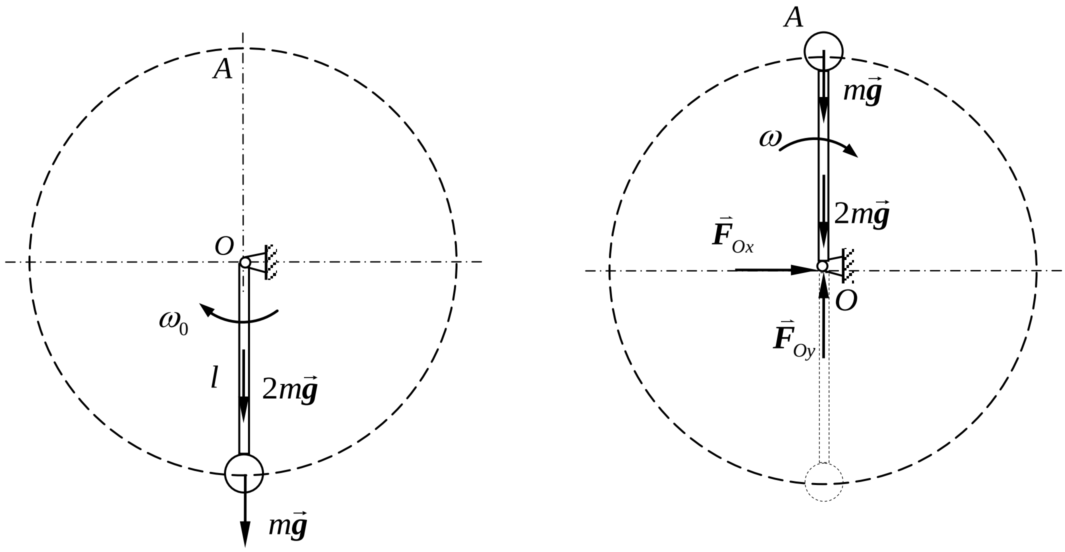
解得 $v_B=\sqrt{2gR+\frac{JR^2\omega^2(2J+mR^2)}{(J+mR^2)^2}}$ （为绝对速度）

到 C 处时， $\frac{1}{2}J\omega_C^2+\frac{1}{2}mv_C^2-\frac{1}{2}J\omega^2=2mgR$ 解得 $v_C=2\sqrt{gR}$

12.15 均质细杆质量为 $2m$，长为 l，其一端固连质量为 m 的小球，此系统可绕水平轴 O 转动。开始时杆与小球位于最低位置，并获得初角速度 ω_0。

试就以下两种情况求初角速度 ω_0 应有的值：

(1) 杆与小球到达铅直最高位置 OA 时，角速度为零；
(2) 杆与小球通过位置 OA 时，支点 O 的反力为零。



[**解**] 刚体对水平轴 O 的转动惯量为 $J_O=\frac{1}{3}(2m)l^2+ml^2=\frac{5}{3}ml^2$

(1) 初瞬时，角速度为 ω_0，动能为 $T_1=\frac{1}{2}J_O\omega_0^2=\frac{5}{6}ml^2\omega_0^2$

到达最高位置时，角速度为零，动能为 $T_2=0$

由动能定理 $T_2-T_1=W_{12}$ 得 $0-\frac{5}{6}ml^2\omega_0^2=-2mg\cdot l-mg\cdot 2l$

解得：$\omega_0=\sqrt{\frac{24g}{5l}}=2.191\sqrt{\frac{g}{l}}$

(2) 初瞬时，角速度为ω_0，动能为$T_1=\dfrac{1}{2}J_O\omega_0^2=\dfrac{5}{6}ml^2\omega_0^2$

设小球达到最高位置时的角速度为ω，支点 O 的反力为零

由质心运动定理 $ma_{Cy}=\sum F_y^{(e)}$，并注意到$F_{Oy}=0$，有

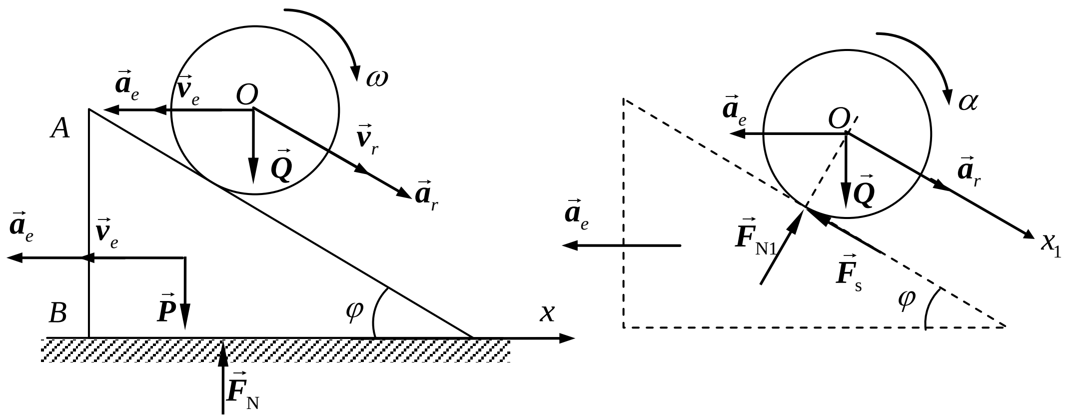
$m\omega^2 l+2m\omega^2\dfrac{l}{2}=mg+2mg$ 即$2ml\omega^2=3mg$ 得：$\omega^2=\dfrac{3g}{2l}$

由动能定理$T_2-T_1=W_{12}$.得$\dfrac{1}{2}J_O\omega^2-\dfrac{1}{2}J_O\omega_0^2=-2mg\cdot l-mg\cdot l$

即 $\dfrac{5}{6}ml^2(\omega^2-\omega_0^2)=-4mgl$

将$\omega^2=\dfrac{3g}{2l}$代入得$\omega_0^2=\dfrac{24}{5}\dfrac{g}{l}+\dfrac{3g}{2l}=\dfrac{63g}{10l}$ 或$\omega_0=\sqrt{\dfrac{63g}{10l}}=2.510\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

12.16 图示均质圆柱体重 Q，半径为 r，沿倾角为φ、重 P 的三棱柱体作无滑动滚动，三棱柱体置于光滑的水平面上。求三棱柱体的加速度。



(a) (b)

[解法 1] 设圆柱沿斜面滚下时三棱柱的速度为$\vec{v}_\Delta$，圆柱中心速度为$\vec{v}_O$，

圆柱角速度为ω；选圆柱中心为动点，三棱柱为动系，则$\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r$，

且$\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{v}_\Delta,\boldsymbol{v}_O=\boldsymbol{v}_a,\boldsymbol{v}_r=r\omega$

研究系统，受力如图(a)，由于$\sum F_x^{(e)}=0$且初始静止，系统水平方向动量守恒，

有 $\dfrac{Q}{g}(v_r\cos\varphi-v_e)-\dfrac{P}{g}v_e=0$，得 $v_r=\dfrac{P+Q}{Q\cos\varphi}v_e$ （1）

设圆柱半径为 r，系统的动能$T=\dfrac{P}{2g}v_e^2+\dfrac{Q}{2g}(v_e^2+v_r^2-2v_e v_r\cos\varphi)+\dfrac{1}{2}\dfrac{Q}{2g}r^2\omega^2$

式中$r\omega=v_r$，将式（1）代入后整理，得 $T=\dfrac{1}{2g}(P+Q)(\dfrac{3}{2}\dfrac{P+Q}{Q\cos^2\varphi}-1)v_e^2$

而系统所有力的功率 $\sum P=Qv_r\sin\varphi$

由$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\sum P$ 得 $\dfrac{P+Q}{g}(\dfrac{3}{2}\dfrac{P+Q}{Q\cos^2\varphi}-1)v_e a_e=Qv_r\sin\varphi$ （2）

将式（1）代入式（2）后整理，解得三棱柱体的加速度为

$$a_\Delta=a_e=\frac{Q\sin 2\varphi}{3P+Q+2Q\sin^2\varphi}g$$

[**解法 2**] 设圆柱沿斜面滚下时三棱柱的加速度为$\vec{\boldsymbol{a}}_\Delta$，圆柱中心加速度为$\vec{\boldsymbol{a}}_O$，圆柱角加速度为 α;

选圆柱中心为动点，三棱柱为动系，则$\vec{\boldsymbol{a}}_a=\vec{\boldsymbol{a}}_e+\vec{\boldsymbol{a}}_r$，且$\boldsymbol{a}_e=\boldsymbol{a}_\Delta,\boldsymbol{a}_O=\boldsymbol{a}_a,\boldsymbol{a}_r=r\alpha$

研究系统，受力如图(a)，由质心运动定理

$$\sum F_x^{(e)}=\sum m_i a_{Cix},\ 0=-\frac{P}{g}\boldsymbol{a}_e+\frac{Q}{g}(\boldsymbol{a}_r\cos\varphi-\boldsymbol{a}_e)\quad a_r=\frac{P+Q}{Q\cos\varphi}a_e\quad \cdots\cdots($$

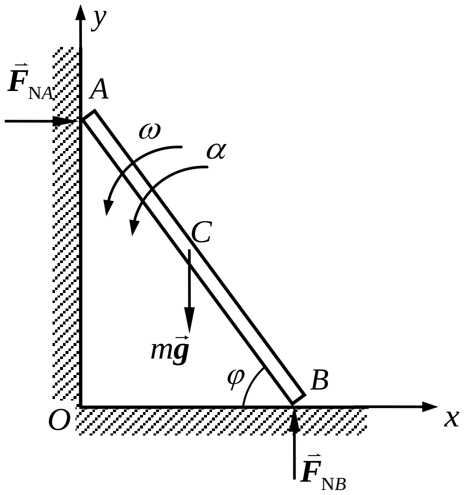
研究圆柱 O，受力如图(b)， 由刚体平面运动微分方程

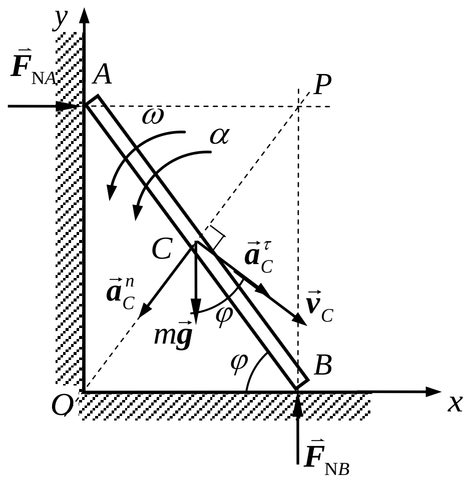
$$\sum F_{x1}=m_2 a_{Ox1},\quad Q\sin\varphi-F_s=\frac{Q}{g}(a_r-a_e\cos\varphi)\ \cdots\cdots(2)$$

$$\sum M_O=J_O\alpha,\quad F_s r=\frac{1}{2}\frac{Q}{g}r^2\cdot\frac{a_r}{r}\qquad\cdots\cdots(3)$$

联立解得三棱柱体的加速度为 $a_\Delta=a_e=\dfrac{Q\sin 2\varphi}{3P+Q+2Q\sin^2\varphi}g$

12.17 如图所示，均质杆 AB 长为 l，质量为 m，沿光滑的铅直墙和水平地板于直立位置静止倒下。求杆在任意位置φ时的角速度ω和角加速度α以及 A、B 处的约束力。





[**解 1**] 取坐标系如图，杆质心 C 坐标为 $x_C = \dfrac{l}{2}\cos\varphi,\ y_C = \dfrac{l}{2}\sin\varphi$ ，

对时间求导，并注意 $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\omega,\ \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \alpha$ 有

$$v_{Cx} = \dot{x}_C = \frac{l}{2}\omega\sin\varphi,\ v_{Cy} = \dot{y}_C = -\frac{l}{2}\omega\cos\varphi,$$

$$a_{Cx} = \ddot{x}_C = \frac{l}{2}(\alpha\sin\varphi - \omega^2\cos\varphi),\ a_{Cy} = \ddot{y}_C = -\frac{l}{2}(\alpha\cos\varphi + \omega^2\sin\varphi)\,,$$

杆的动能为 $T = \dfrac{1}{2}m(v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2) + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{12}ml^2\omega^2 = \dfrac{1}{6}ml^2\omega^2$

杆直立时动能为零，由动能定理 $T_2 - T_1 = W_{12}$，有

$$\frac{1}{6}ml^2\omega^2 - 0 = mg\frac{l}{2}(1-\sin\varphi)\,,\quad \omega^2 = \frac{3g}{l}(1-\sin\varphi)\,,$$

求导得 $2\omega\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{3g}{l}\cos\varphi\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$，又 $\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t},\omega = -\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$

所以杆在任意位置 φ 时的角速度 $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{l}(1-\sin\varphi)}$ ，角加速度 $\alpha = \dfrac{3g}{2l}\cos\varphi$

再由质心运动定理，得

$$\begin{cases}\sum F_x = ma_{Cx}, & F_{\mathrm{NA}} = ma_{Cx}, \\ \sum F_y = ma_{Cy}, & F_{\mathrm{NB}} - mg = ma_{Cy},\end{cases} \qquad \begin{cases}F_{\mathrm{NA}} = m\dfrac{l}{2}(\alpha\sin\varphi - \omega^2\cos\varphi), \\ F_{\mathrm{NB}} - mg = m\left[-\dfrac{l}{2}(\alpha\cos\varphi + \omega^2\sin\varphi)\right]\end{cases}$$

代入ω,α的值，得 A、B 处的约束力

$$F_{\mathrm{NA}} = \frac{9}{4}mg\cos\varphi(\sin\varphi - \frac{2}{3})；\quad F_{\mathrm{NB}} = \frac{1}{4}mg\left[1 + 9\sin\varphi(\sin\varphi - \frac{2}{3})\right]$$

[**解 2**] 杆作平面运动，瞬心为 P，质心 C 速度$v_C = \omega\cdot CP = \frac{l}{2}\omega$， $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\omega, \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \alpha$，

因速度瞬心到质心距离始终不变，有 $\sum M_P(\vec{F}) = J_P\alpha$，

$$\left[\frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\alpha = mg\frac{l}{2}\cos\varphi \quad \text{得角加速度}\ \alpha = \frac{3g}{2l}\cos\varphi$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{3g}{2l}\cos\varphi, \ \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\frac{3g}{2l}\cos\varphi \quad \int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega = \int_0^{\varphi}\frac{3g}{2l}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi,$$

得杆在任意位置φ时的角速度$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1 - \sin\varphi)}$

杆质心 C 的轨迹是以点 O 为圆心、$l/2$ 为半径的圆弧， $a_C^n = \frac{l}{2}\omega^2, a_C^{\tau} = \frac{l}{2}\alpha$

再由质心运动定理，得

$$\begin{cases}\sum F_x = ma_{Cx}, & F_{\mathrm{NA}} = ma_{Cx}, \\ \sum F_y = ma_{Cy}, & F_{\mathrm{NB}} - mg = ma_{Cy},\end{cases} \qquad \begin{cases}F_{\mathrm{NA}} = m\dfrac{l}{2}(\alpha\sin\varphi - \omega^2\cos\varphi), \\ F_{\mathrm{NB}} - mg = m\left[-\dfrac{l}{2}(\alpha\cos\varphi + \omega^2\sin\varphi)\right]\end{cases}$$

代入ω,α的值，得 A、B 处的约束力

$$F_{\mathrm{NA}} = \frac{9}{4}mg\cos\varphi(\sin\varphi - \frac{2}{3})；\quad F_{\mathrm{NB}} = \frac{1}{4}mg\left[1 + 9\sin\varphi(\sin\varphi - \frac{2}{3})\right]$$

[**解 3**] 杆作平面运动，瞬心为 P，质心 C 速度$v_C = \omega\cdot CP = \frac{l}{2}\omega$， $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\omega, \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \alpha$，

φ 角处，动能为 $T = \frac{1}{2}J_P\omega^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\omega^2 = \frac{1}{6}ml^2\omega^2$， $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}ml^2\omega\alpha$

由功率方程$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \sum P$

$$\frac{1}{3}ml^2\omega\alpha = m\vec{\boldsymbol{g}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_C = mgv_C\cos\varphi \qquad \text{即}\ \frac{1}{3}ml^2\omega\alpha = mg\omega\frac{l}{2}\cos\varphi,$$

得杆在任意位置 φ 时的角加速度 $\alpha = \dfrac{3g}{2l}\cos\varphi$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{3g}{2l}\cos\varphi,\ \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{3g}{2l}\cos\varphi,\ \int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega = \int_0^{\varphi}\frac{3g}{2l}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi,$$

得杆在任意位置 φ 时的角速度 $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{l}(1-\sin\varphi)}$

杆质心 C 的轨迹是以点 O 为圆心、$l/2$ 为半径的圆弧，$a_C^n = \dfrac{l}{2}\omega^2, a_C^{\tau} = \dfrac{l}{2}\alpha$

再由质心运动定理，得

$$\begin{cases}\sum F_x = ma_{Cx}, & F_{\mathrm{N}A} = ma_{Cx},\\ \sum F_y = ma_{Cy}, & F_{\mathrm{N}B} - mg = ma_{Cy},\end{cases} \qquad \begin{cases}F_{\mathrm{N}A} = m\dfrac{l}{2}(\alpha\sin\varphi - \omega^2\cos\varphi),\\ F_{\mathrm{N}B} - mg = m\left[-\dfrac{l}{2}(\alpha\cos\varphi + \omega^2\sin\varphi)\right]\end{cases}$$

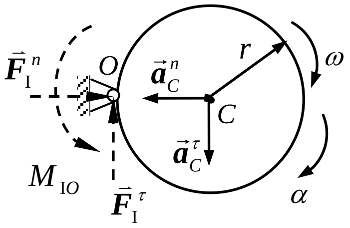
代入 ω,α 的值，得 A、B 处的约束力

$F_{\mathrm{N}A} = \dfrac{9}{4}mg\cos\varphi(\sin\varphi - \dfrac{2}{3})$；$F_{\mathrm{N}B} = \dfrac{1}{4}mg\left[1 + 9\sin\varphi(\sin\varphi - \dfrac{2}{3})\right]$

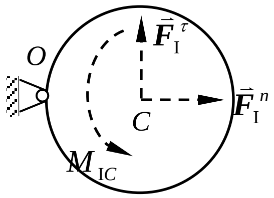
十三、达朗贝尔原理

13.1 求下列刚体惯性力系简化结果。

（*a*）质量为 m，半径为 r 的均质圆盘绕水平轴 O 作定轴转动，角速度为ω，角加速度为α，试求圆盘的惯性力系向转轴 O 简化的结果。（在图中画出主矢主矩的方向）



(a)



(a1)

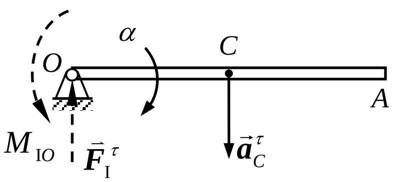
解：1. 惯性力系向转轴 O 简化，主矢 $F_{\mathrm{I}}^{n}=ma_C^n=mr\omega^2$, $F_{\mathrm{I}}^{\tau}=ma_C^\tau=mr\alpha$,

主矩 $M_{\mathrm{IO}}=J_O\alpha=\dfrac{3}{2}mr^2\alpha$，方向如图(a)；

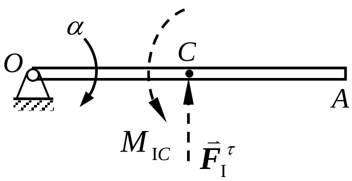
2. 惯性力系向质心 C 简化，主矢 $F_{\mathrm{I}}^{n}=ma_C^n=mr\omega^2$, $F_{\mathrm{I}}^{\tau}=ma_C^\tau=mr\alpha$,

主矩 $M_{\mathrm{IC}}=J_C\alpha=\dfrac{1}{2}mr^2\alpha$，方向如图(a1)。

(*b*)均质杆 OA 质量为 m，长为 l，可绕 O 轴转动。图示瞬时，角速度为零，角加速度为α，试分别求该瞬时杆的惯性力系简化的结果（1）向转轴 O 简化；（2）向质心 C 简化。（在图中画出主矢主矩的方向）



(b)



(b1)

解：1. 惯性力系向转轴 O 简化，主矢 $F_{\mathrm{I}}^{\tau}=ma_C^\tau=\dfrac{1}{2}ml\alpha$,

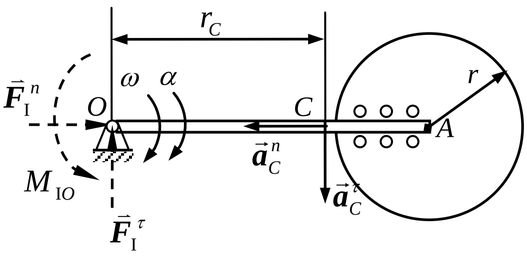
主矩 $M_{\mathrm{IO}}=J_O\alpha=\dfrac{1}{3}ml^2\alpha$，方向如图(b)；

2. 惯性力系向质心 C 简化，主矢 $F_{\mathrm{I}}^{\tau}=ma_C^\tau=\dfrac{1}{2}ml\alpha$,

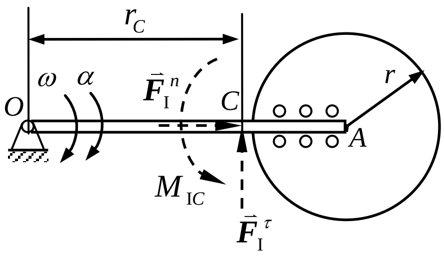
主矩 $M_{\mathrm{IC}}=J_C\alpha=\dfrac{1}{12}ml^2\alpha$，方向如图(b1)；

（*c*）质量为 m，长为 l 的均质杆杆端与质量为 m 、半径为 r 的均质圆盘中心固结，绕水平轴 O 的作定轴转动，角速度为ω ，角加速度为α，试求系统惯性力系简化的结果（在图

中画出主矢主矩的方向）



(c)



(c1)

解：系统质心位置 $r_C=\dfrac{m\dfrac{l}{2}+ml}{2m}=\dfrac{3}{4}l$，加速度为 $a_C^n=\dfrac{3}{4}l\omega^2, a_C^\tau=\dfrac{3}{4}l\alpha,$

1. 惯性力系向转轴 O 简化，主矢 $F_{\mathrm{I}}^{\tau}=ma_C^\tau=\dfrac{3}{4}ml\alpha$，$F_{\mathrm{I}}^{n}=ma_C^n=\dfrac{3}{4}ml\omega^2$，

主矩 $M_{\mathrm{IO}}=J_O\alpha=\left(\dfrac{1}{3}ml^2+\dfrac{1}{2}mr^2+ml^2\right)\alpha=\dfrac{1}{6}(8l^2+3r^2)\alpha$，方向如图(c)；

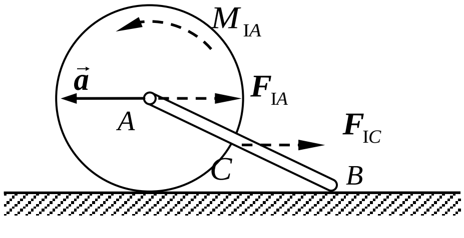
2. 惯性力系向质心 C 简化，主矢 $F_{\mathrm{I}}^{\tau}=ma_C^\tau=\dfrac{3}{4}ml\alpha$，$F_{\mathrm{I}}^{n}=ma_C^n=\dfrac{3}{4}ml\omega^2$，

主矩

$$M_{\mathrm{IC}}=J_C\alpha=\left[\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{1}{4}l\right)^2+\frac{1}{2}mr^2+m\left(\frac{1}{4}l\right)^2\right]\alpha=\frac{1}{24}m(5l^2+12r^2)\alpha,$$

方向如图(c1)。

（*d*）图示均质圆轮质量为 m_1，半径为 r,；均质细长杆长 $l=2r$，质量为 m_2，杆端 A 与轮心光滑铰接，沿水平面作纯滚动，带动杆 AB 作平移。若已知轮心 A 的加速度为 a，试求系统惯性力系简化的结果，并画出惯性力系主矢和主矩的方向。



解：圆轮作平面运动，惯性力系向质心 A 简化，

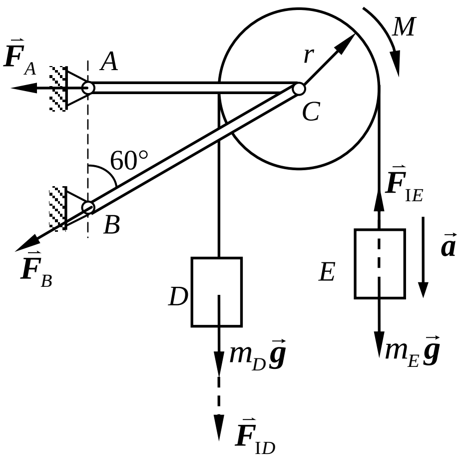
主矢 $F_{\mathrm{I}A}=ma$ ，主矩 $M_{\mathrm{I}A}=J_A\alpha=\dfrac{1}{2}mr^2\left(\dfrac{a}{r}\right)=\dfrac{1}{2}mra$；

杆 AB 作平移，惯性力系向质心 C 简化，主矢 $F_{\mathrm{I}}=ma_C=ma$ 。

方向如图。

13.2 已知重物 D 和 E 质量分别为 $m_D=250\text{kg}$， $m_E=60\text{kg}$；力偶矩 M＝400Nm。滑轮

半径 $r = 20\text{cm}$，不计滑轮、杆 AC、杆 BC 以及钢丝绳的质量且钢丝绳不可伸长；求重物的加速度和支座 A 和 B 的约束反力。



[**解**] 分析可知 AC、BC 杆均为二力杆，所以支座 A 和 B 的约束反力分别沿杆的轴线方向。画系统的受力图，并虚加惯性力，设物块的加速度为 $\boldsymbol{a}$，则 $F_{\mathrm{IE}} = m_E a,\ F_{\mathrm{ID}} = m_D a$，

由达朗贝尔原理，得

$$\sum M_C(\vec{F}) = 0\text{，}\quad F_{\mathrm{ID}} r + m_D g r + F_{\mathrm{IE}} r - m_E g r - M = 0$$

即 $$(m_E + m_D)a + (m_D - m_E)g = \frac{M}{r}\text{，}\quad (250+60)a + (250-60)\times 9.8 = \frac{400}{0.2}$$

得重物的加速度 $a = 0.445(\text{m/s}^2)$

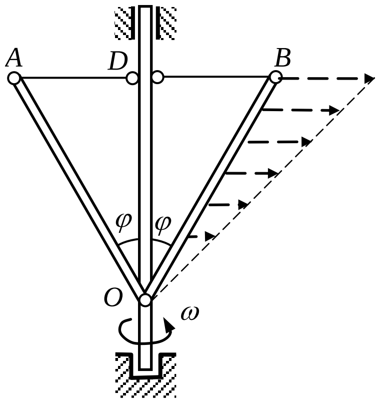
$$\sum F_y = 0\text{，}\quad F_B\cos 60^\circ + F_{\mathrm{ID}} - F_{\mathrm{IE}} + m_D g + m_E g = 0$$

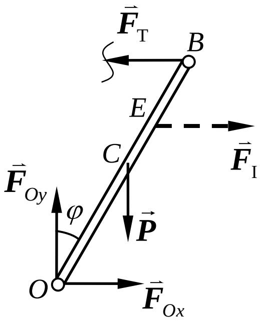
$$F_B = -2(m_D - m_E)a - 2(m_D + m_E)g$$

$$\sum F_x = 0\text{，}\quad F_A - F_B \sin 60^\circ = 0$$

代入数据得 A、B 的约束反力 $F_A = 5412(\text{N})$　$F_B = -6249(\text{N})$

13.3 已知均质杆 OA 与 OB 各长为 l，重均为 P，一端用铰链固定在铅垂轴上的 O 点，另一端用水平绳连在轴上的 D 处，杆与轴的夹角为 φ，令△AOB 随轴 OD 以匀角速度 ω 转动。求绳的拉力及铰链 O 对杆 OB 的约束反力。





[**解**]　OB 杆作定轴转动，其惯性力为沿杆方向线性分布，受力如图。线性分布的惯性力系的合力过 E 点，且 $BE=\dfrac{1}{3}OB=\dfrac{l}{3}$， $F_{\mathrm{I}}=ma_C=\dfrac{P}{g}\dfrac{l}{2}\sin\varphi\cdot\omega^2$ 。

$$\sum M_O(\vec{F})=0\text{，}\ F_{\mathrm{T}}\cdot l\cos\varphi-F_{\mathrm{I}}\cdot\frac{2l}{3}\cos\varphi-P\cdot\frac{l}{2}\sin\varphi=0$$

$$F_{\mathrm{T}}=(\frac{l\omega^2}{3g}\sin\varphi+\frac{1}{2}\tan\varphi)P$$

$$\sum F_x=0\text{，}\ F_{Ox}+F_{\mathrm{I}}-F_{\mathrm{T}}=0$$

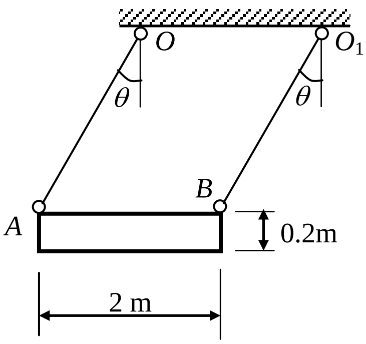
$$F_{Ox}=F_{\mathrm{T}}-F_{\mathrm{I}}=(\frac{1}{2}\tan\varphi-\frac{l\omega^2}{6g}\sin\varphi)P$$

$$\sum F_y=0\text{，}\ F_{Oy}-P=0$$

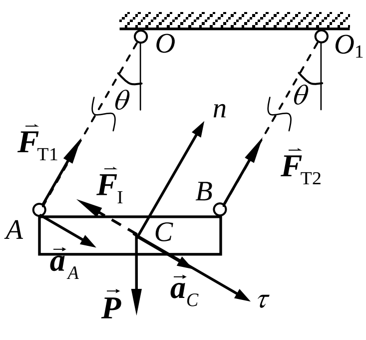
$$F_{Oy}=P$$

13.4　均质长方体浪木重为 P，悬挂在两根等长的软绳上，OO_1＝AB，从θ ＝30°的位置无初速释放开始摆动；求在下面两个瞬时浪木的加速度和两绳的拉力：

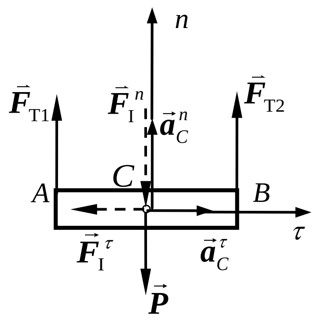
(1)开始运动瞬时；(2)浪木通过最低位置瞬时。



(a)



(b)



(c)

[**解**]（1）初瞬时浪木受力如图(b)，

∵浪木平动且初瞬时各点速度 $v=0$，∴ $\vec{a}_C=\vec{a}_A \perp \overline{AO}$， $F_{\mathrm{I}}=\dfrac{P}{g}a_C$

$$\sum F_\tau=0,\quad P\sin\theta-F_{\mathrm{I}}=0,\quad a_C=\frac{1}{2}g$$

$$\sum F_n=0,\quad F_{\mathrm{T1}}+F_{\mathrm{T2}}-P\cos\theta=0$$

$$\sum M_C(\boldsymbol{F})=0,\quad F_{\mathrm{T1}}(1\cos30^\circ+0.1\sin30^\circ)+F_{\mathrm{T2}}(0.1\sin30^\circ-1\cos30^\circ)=0$$

联立求解得初瞬时浪木的加速度 $a_C=\dfrac{1}{2}g$；

两绳的拉力 $F_{\mathrm{T1}}=0.408P$； $F_{\mathrm{T2}}=0.458P$

（2）浪木于初始位置平移至最低位置过程，由动能定理得

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}v_C^2-0=Pl(1-\cos\theta)，得 \quad v_C^2=2gl(1-\cos\theta)$$

最低位置处，受力如图(c)，

$$\sum F_\tau=0,\quad F_{\mathrm{I}}^\tau=0 \quad 即 \ \frac{P}{g}a_C^\tau=0 \quad 得 \quad a_C=a_C^n=\frac{v_C^2}{l}=2g(1-\cos\theta)$$

或 $a_C=(2-\sqrt{3})g$

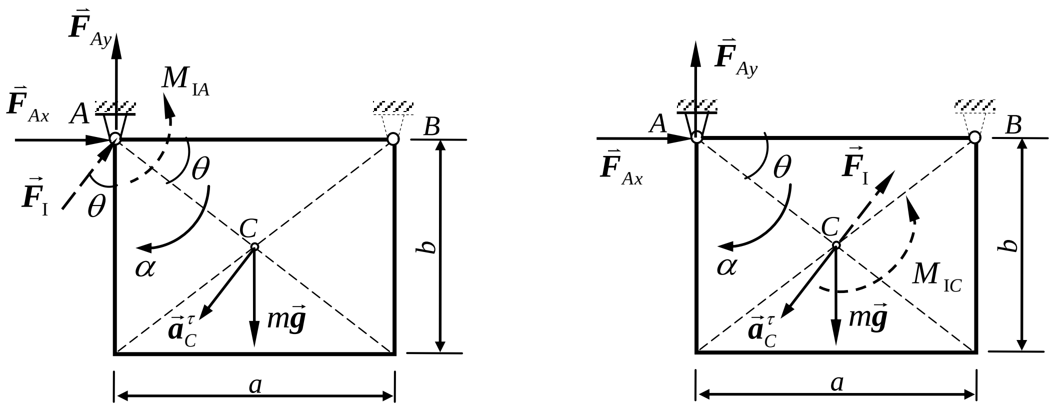
$$\sum M_C(\boldsymbol{F})=0,\quad F_{\mathrm{T1}}\cdot 1-F_{\mathrm{T2}}\cdot 1=0$$

$$\sum F_n=0,\quad F_{\mathrm{T1}}+F_{\mathrm{T2}}-F_{\mathrm{I}}^n-P=0$$

$$F_{\mathrm{T1}}=F_{\mathrm{T2}}=\frac{1}{2}(F_{\mathrm{I}}^n+P)=\frac{1}{2}(\frac{P}{g}a_C^n+P)$$

$$F_{\mathrm{T1}}=F_{\mathrm{T2}}=0.628P$$

13.5 图示长 a =20cm，宽 b =15cm 的均质矩形板质量为 27kg，由销 A、销 B 悬挂，如果突然撤去销 B，求该瞬时矩形板的角加速度和销 A 的约束反力。



(a) (b)

[**解 1**] 撤去销子的瞬时，$\omega=0$，矩形板将作定轴转动，$a_C^\tau=\alpha\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$，惯性力系向转轴 A 简化 $\boldsymbol{F}_\mathrm{I}=\boldsymbol{F}_\mathrm{I}^\tau$ 即 $F_\mathrm{I}=ma_C^\tau=m\alpha\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$；

$$M_{\mathrm{I}A}=J_A\alpha=\left[\frac{1}{12}m(a^2+b^2)+m\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2\right]\alpha=\frac{1}{3}m(a^2+b^2)\alpha$$

矩形板受力如图(a)，图中 $\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

由达朗贝尔原理，得

$$\sum M_A(\vec{\boldsymbol{F}})=0,\quad M_{\mathrm{I}A}-mg\cdot\frac{a}{2}=0,\quad mg\frac{a}{2}-\frac{1}{3}m(a^2+b^2)\alpha=0$$

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F_\mathrm{I}\sin\theta=0,\quad F_{Ax}+m\alpha\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

$$\sum F_y=0,\quad F_{Ay}+F_\mathrm{I}\cos\theta-mg=0,\quad F_{Ay}+m\alpha\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-mg=0$$

解得 $\alpha=\dfrac{3ga}{2(a^2+b^2)}$，$F_{Ax}=-m\alpha\dfrac{b}{2}$，$F_{Ay}=mg-m\alpha\dfrac{a}{2}$

代入数据得矩形板的角加速度 $\alpha=47.07\mathrm{rad/s^2}$

销 A 的约束反力 $F_{Ax}=-95.32\mathrm{N}$ $F_{Ay}=137.67\mathrm{N}$

[**解 2**] 撤去销子的瞬时，$\omega=0$，矩形板将作定轴转动，$a_C^\tau=\alpha\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$，惯性力系向质心简化 $\boldsymbol{F}_\mathrm{I}=\boldsymbol{F}_\mathrm{I}^\tau$ 即 $F_\mathrm{I}=ma_C^\tau=m\alpha\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$； $M_{\mathrm{I}C}=J_C\alpha=\dfrac{1}{12}m(a^2+b^2)\alpha$

矩形板受力如图(b)，图中 $\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

由达朗贝尔原理，得

$$\sum M_A(\vec{\boldsymbol{F}})=0,\quad -mg\frac{a}{2}+M_{\mathrm{I}C}+F_\mathrm{I}\cdot AC=0,$$

$$mg\frac{a}{2}-\frac{1}{12}m(a^2+b^2)\alpha-m\alpha\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}=0$$

$$\sum F_x=0,\quad F_{Ax}+F_\mathrm{I}\sin\theta=0,\quad F_{Ax}+m\alpha\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

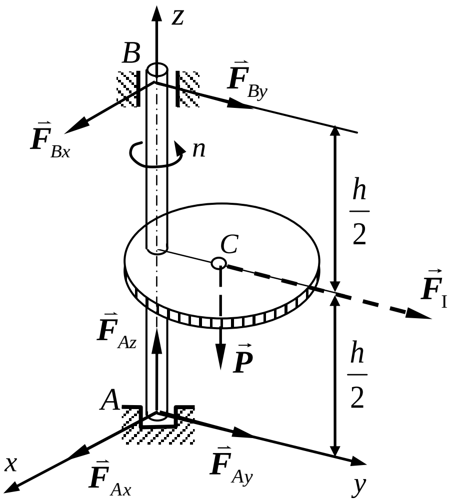
$$\sum F_y = 0 ,\quad F_{Ay} + F_{\mathrm{I}}\cos\theta - mg = 0 ,\quad F_{Ay} + m\alpha\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - mg = 0$$

解得 $\alpha = \dfrac{3ga}{2(a^2+b^2)}$， $F_{Ax} = -m\alpha\dfrac{b}{2}$， $F_{Ay} = mg - m\alpha\dfrac{a}{2}$

代入数据得矩形板的角加速度 $\alpha = 47.07\mathrm{rad/s}^2$

销 A 的约束反力 $F_{Ax} = -95.32\mathrm{N}$ $F_{Ay} = 137.67\mathrm{N}$

13.6 图示涡轮机的转盘重 P＝2kN，重心 C 到转轴 z 的距离 e＝0.5mm（图中已夸大），转轴 z 垂直于转盘的对称面，盘匀速转动，转速 n＝6000 rpm，AB＝h＝1000mm；求当转盘转到重心 C 位于 yz 平面的瞬时，止推轴承 A 和向心轴承 B 的静反力和附加动反力。



[**解**] 转盘作匀速定轴转动，角速度 $\omega = \dfrac{\pi n}{30} = \dfrac{6000\pi}{30} = 628\,(\mathrm{rad/s})$，

惯性力系简化为合力 $F_{\mathrm{I}} = \dfrac{P}{g}e\omega^2 = \dfrac{2}{9.8}\times 0.0005\times 628^2 = 40.2\,(\mathrm{kN})$

转盘受力如图，由达朗贝尔原理，得

$$\sum M_y(\vec{F}) = 0 ,\quad F_{Bx}h = 0 \qquad F_{Bx} = 0$$

$$\sum F_x = 0 ,\quad F_{Ax} + F_{Bx} = 0 \qquad F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_x(\vec{F}) = 0 ,\quad F_{By}h + Pe + F_{\mathrm{I}}\frac{h}{2} = 0 ,$$

$$F_{By} = \frac{-e}{h}P - \frac{1}{2}F_{\mathrm{I}}$$

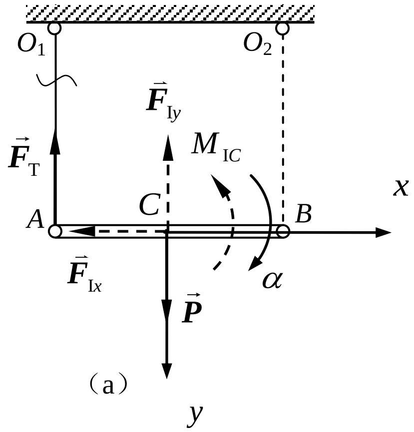
$$\sum F_y = 0 ,\quad F_{Ay} + F_{By} = 0 \qquad F_{Ay} = \frac{e}{h}P + \frac{1}{2}F_{\mathrm{I}}$$

$$\sum F_z = 0 ,\quad F_{Az} - P = 0 \qquad F_{Az} = P$$

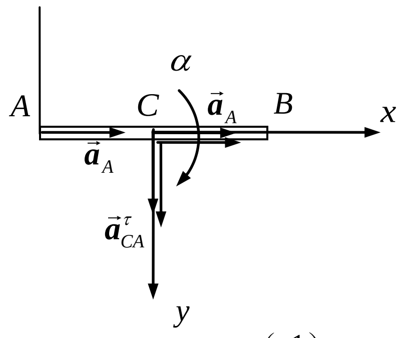
最后得 静反力 $F'_{Ay} = -F'_{By} = \dfrac{e}{g}P = 1\,(\text{kN})$，$F'_{Az} = P = 2\,(\text{kN})$

动反力 $F''_{Ay} = -F''_{By} = \dfrac{h}{2}F_{\text{I}} = 20.1\,(\text{kN})$

13.7 已知均质杆 AB 重为 P，以两根与之等长的绳子悬挂在水平位置；求 B 端绳子突然断开瞬时 A 端绳子的拉力。



（a）



（a1）

[解]（1）在 B 端绳子突然断开瞬时，杆的角速度及杆上各点的速度均为零，A 点轨迹为以 O_1 为圆心、绳长为半径的圆周，则 $\vec{a}_A \perp O_1A$

杆将作平面运动，由基点法 $\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^n + \vec{a}_{CA}^{\tau}$ ，$a_{CA}^n = 0, a_{CA}^{\tau} = \dfrac{1}{2}l\alpha$ ，

$a_{Cx} = a_A$ ，$a_{Cy} = a_{CA}^{\tau} = \dfrac{l}{2}\alpha$

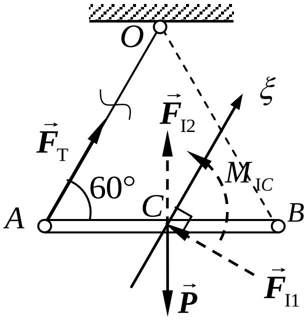
运动分析如图(a1)，受力分析如图(a)，（设杆长为 l，此瞬时杆的角加速度为α，）虚加惯性力系 $M_{IC} = J_C\alpha = \dfrac{Pl^2}{12g}\alpha$ ；$F_{Ix} = ma_{Cx} = \dfrac{P}{g}a_A$，$F_{Iy} = ma_{Cy} = \dfrac{P}{g}\dfrac{l}{2}\alpha$

由达朗贝尔原理，得

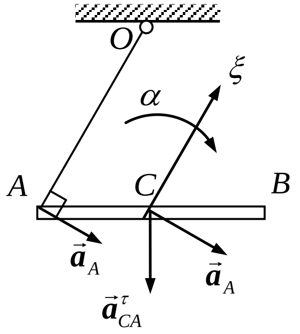
$$\begin{cases} \sum F_x = 0, \quad F_{Ix} = 0 \\ \sum F_y = 0, \quad P - F_T - F_{Iy} = 0 \\ \sum M_C(\vec{F}) = 0, F_T\dfrac{l}{2} - M_{IC} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{P}{g}a_A = 0 \\ P - F_T - \dfrac{Pl}{2g}\alpha = 0 \\ F_T\dfrac{l}{2} - \dfrac{Pl^2}{12g}\alpha = 0 \end{cases} ，解得 \begin{cases} a_A = 0 \\ \alpha = \dfrac{3g}{2l} \\ F_T = \dfrac{1}{4}P \end{cases}$$

即：B 端绳子突然断开瞬时 A 端绳子的拉力 $F_T = \dfrac{P}{4}$

（2）



（b）



（b1）

在 B 端绳子突然断开瞬时，杆的角速度及杆上各点的速度均为零，A 点轨迹为以 O 为圆心、绳长为半径的圆周，则 $\vec{a}_A \perp OA$，杆将作平面运动，

由基点法 $\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^n + \vec{a}_{CA}^\tau$ ， $a_{CA}^n = 0, a_{CA}^\tau = \dfrac{1}{2} l\alpha$ ， $\therefore \vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^\tau$ ，

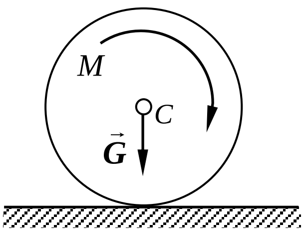
惯性力系主矢分量 $F_{I1} = ma_A = \dfrac{P}{g} a_A, F_{I2} = ma_{CA}^\tau = \dfrac{Pl}{2g}\alpha$ ，主矩 $M_{IC} = \dfrac{Pl^2}{12g}\alpha$ ，

方向如图。由达朗贝尔原理，得

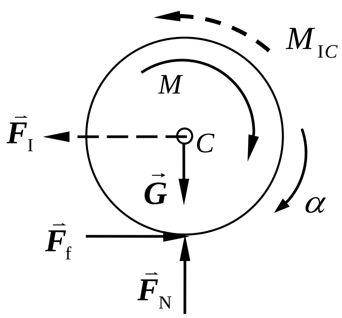
$$\begin{cases} \sum F_\xi = 0, \quad F_T + F_{I2}\sin 60° - P\sin 60° = 0 \\ \sum M_C(\vec{F}) = 0, F_T \dfrac{l}{2}\sin 60° - M_{IC} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} F_T + \dfrac{1}{2} ml\alpha \sin 60° - P\sin 60° = 0 \\ F_T \dfrac{l}{2}\sin 60° - \dfrac{1}{12} ml^2\alpha = 0 \end{cases},$$

解得 $\alpha = \dfrac{18}{13}\dfrac{g}{l}$ ，B 端绳子突然断开瞬时 A 端绳子的拉力为 $F_T = \dfrac{2\sqrt{3}}{13}P$

13.8 已知圆轮重 G、半径为 R，沿水平面纯滚。若不计滚阻：试问在下列两种情况下，轮心的加速度及接触面的摩擦力是否相等：(1)在轮上作用一矩为 M 的顺钟向力偶；(2)在轮心上作用一水平向右、大小为 M / R 的力 P。



(1)



(1)-a

[**解**] （1）轮作纯滚动，设轮心加速度为 a， 角加速度为 α ，则 $a = R\alpha$ ，

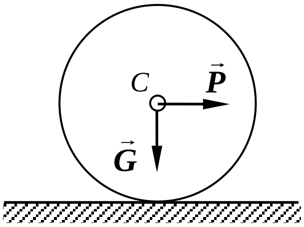
轮受力如图，惯性力系主矢 $F_I = \dfrac{G}{g} a$ ，主矩 $M_{IC} = J_C\alpha = \dfrac{1}{2}\dfrac{G}{g}R^2\alpha = \dfrac{GR}{2g} a$

由达朗贝尔原理，得

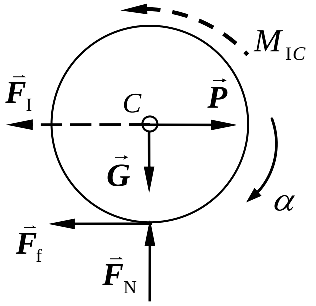
$$\sum M_C(\vec{F})=0，\quad M-M_{IC}-F_f R=0$$

$$\sum F_x=0，\quad F_f-F_I=0$$

联立解得 $$a=\frac{2Mg}{3GR}，\quad F_f=\frac{2M}{3R}$$



(2)



(2)-a

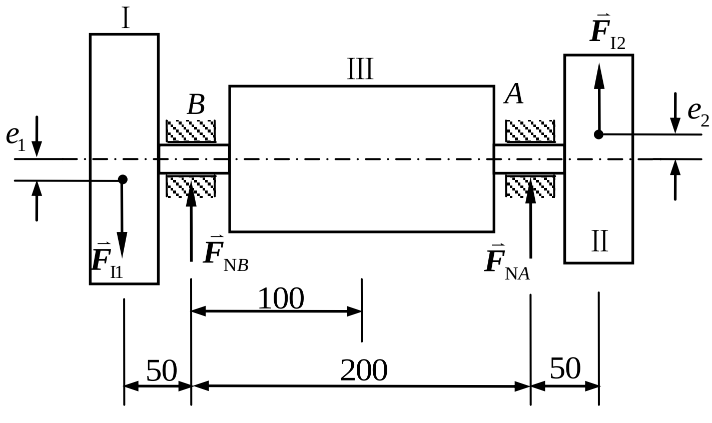
（2）$\sum F_x=0，\quad P-F_I-F_f=0$ 而 $P=M/R$

$$\sum M_C(\vec{F})=0，\quad M_{IC}-F_f R=0$$

联立解得 $$a=\frac{2Mg}{3GR}，\quad F_f=\frac{M}{3R}$$

可见，(1)、(2)两种情况下，轮心加速度相等，而接触面的摩擦力不相等。

13.9 已知砂轮 I 质量 m_1=1kg，偏心距 e_1=0.5mm，砂轮 II 质量 m_2=0.5kg，偏心距 e_2=1mm。电动转子 III 质量 m_3=8kg，转速 n=3000r/min。求转动时轴承 A、B 的附加动反力。



[**解**]砂轮角速度 $\omega=\frac{2\pi n}{60}=\frac{2\pi\times 3000}{60}=100\pi$ (rad/s)

砂轮 I、II 的惯性力分别为

$$F_{I1}=m_1 e_1\omega^2=1\times 0.5\times 10^{-3}\times(100\pi)^2=5\pi^2\ \text{(N)}，$$

$$F_{I2}=m_2 e_2\omega^2=0.5\times 1\times 10^{-3}\times(100\pi)^2=5\pi^2\ \text{(N)}$$

当只求动反力时，受力图中重力可不考虑，由达朗贝尔原理

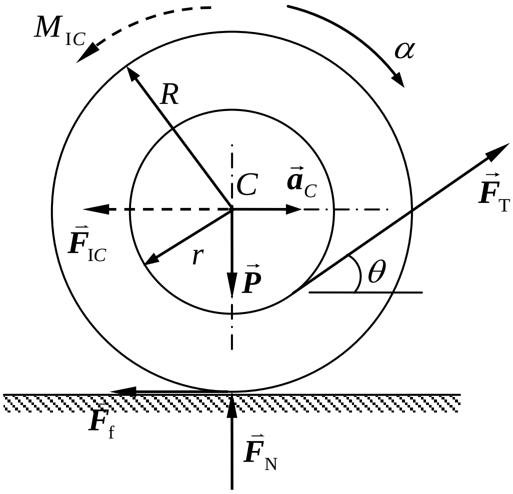
$$\sum M_A\left(\vec{F}\right)=0\,,\quad -200F_{NB}+250F_{I1}+50F_{I2}=0$$

$$\sum M_B\left(\vec{F}\right)=0\,,\quad 200F_{NA}+250F_{I2}+50F_{I1}=0$$

解出附加动反力 $F_{NB}=-F_{NA}=73.5\,(\mathrm{N})$

即：转动时轴承 *A* 处的附加动反力为 73.5N，方向与图示相反；*B* 处的附加动反力为 73.5N，方向与图示相同。

13.10 图示绕线轮重 *P*，半径为 *R* 及 *r*，对水平质心 *C* 的转动惯量为 J_C，在与水平成 θ 角的常力 $\boldsymbol{F}_\mathrm{T}$ 作用下纯滚动。试求（1）轮心加速度；（2）绕线轮作纯滚动的条件。



[解]研究绕线轮，受力如图，惯性力系主矢 $F_{IC}=\dfrac{P}{g}a_C$，主矩 $M_{IC}=J_C\alpha$

绕线轮纯滚动时有 $a_C=R\alpha$ ，由达朗贝尔原理，

$$\sum F_x=0\,,\quad F_T\cos\theta-F_{IC}-F_f=0$$

$$\sum F_y=0\,,\quad F_N+F_T\sin\theta-P=0$$

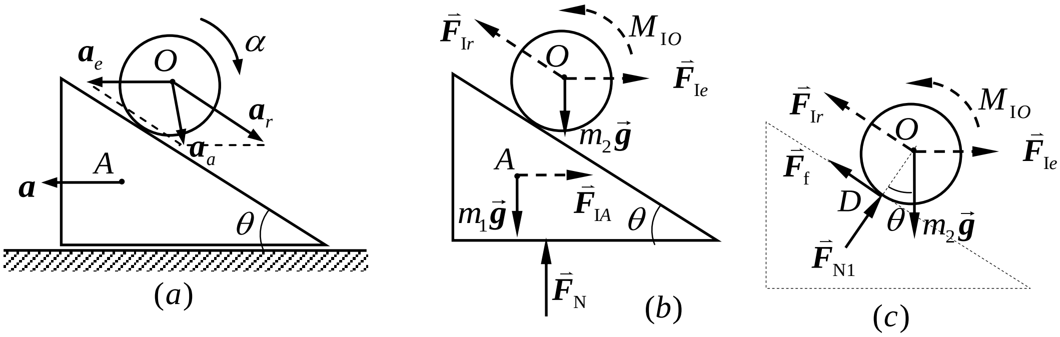
$$\sum M_C\left(\vec{F}\right)=0\,,\quad F_Tr-F_fR+M_{IC}=0$$

联立解得 $a_C=\dfrac{F_TR(R\cos\theta-r)}{J_C+\dfrac{P}{g}R^2}$；$F_f=\dfrac{F_T(\dfrac{P}{g}Rr+J_C\cos\theta)}{J_C+\dfrac{P}{g}R^2}$

及 $F_N=P-F_T\sin\theta$，再将 F_N、F_f 代入 $F_f\le fF_N$

得绕线轮作纯滚动的条件为 $f\ge\dfrac{F_T(\dfrac{P}{g}Rr+J_C\cos\theta)}{(P-F_T\sin\theta)(J_C+\dfrac{P}{g}R^2)}g$ ）

13.11 如图所示，质量为 m_1、倾角为 θ 的三棱柱与水平面的摩擦不计；质量为 m_2、半径为 r 的均质圆柱沿三棱柱斜面向下作纯滚动，求三棱柱的加速度及圆柱中心相对于三棱柱的加速度。



[**解**] 取圆柱中心为动点，三棱柱为动系，由加速度合成定理 $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$

式中 $\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_O$ 为圆柱中心的加速度，$\boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}$ 为三棱柱平动的加速度，$\boldsymbol{a}_r$ 为圆柱中心相对于三棱柱的加速度，圆柱角加速度 $\alpha = \dfrac{a_r}{r}$，加速度如图(a)，系统的受力图及虚加惯性力系如图(b)，圆柱的受力图如图(c)，

其中 $F_{\mathrm{IA}} = m_1 a_e$，$F_{\mathrm{Ie}} = m_2 a_e$，$F_{\mathrm{Ir}} = m_2 a_r$，$M_{\mathrm{I}O} = \dfrac{1}{2} m_2 r^2 \alpha = \dfrac{1}{2} m_2 r a_r$

由达朗贝尔原理，研究系统，$\sum F_x = 0$，$F_{\mathrm{IA}} - F_{\mathrm{Ir}}\cos\theta + F_{\mathrm{Ie}} = 0$

研究圆柱，$\sum M_D = 0,\ M_{\mathrm{I}O} + F_{\mathrm{Ir}} r - F_{\mathrm{Ie}} r\cos\theta - m_2 g r\sin\theta = 0$

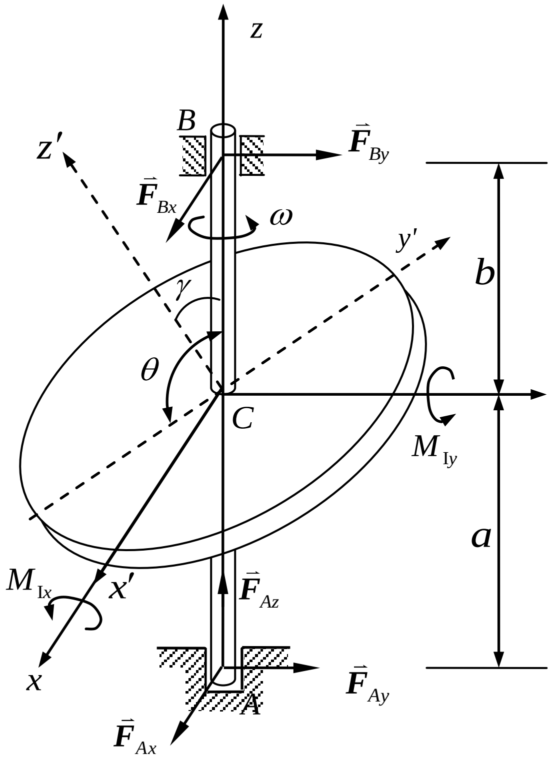
代入惯性力表达式，得

$$\begin{cases} m_1 a_e - m_2 a_r \cos\theta + m_2 a_e = 0 \\ \dfrac{1}{2} m_2 r a_r + m_2 a_r r - m_2 a_e r\cos\theta - m_2 g r\sin\theta = 0 \end{cases}$$

联立解得三棱柱的加速度为 $a_e = \dfrac{m_2 g\sin 2\theta}{3(m_1+m_2) - 2m_2\cos^2\theta}$，

圆柱中心相对于三棱柱的加速度为 $a_r = \dfrac{2(m_1+m_2) g\sin\theta}{3(m_1+m_2) - 2m_2\cos^2\theta}$

13.12 图示均质圆盘以等角速度 ω 绕 z 轴转动，圆盘平面与转轴 z 交成 θ 角，轴承 A 和 B 与圆盘中心相距各为 a 和 b；圆盘半径为 R，质量为 m，厚度可忽略不计。求两轴承 A 和 B 的附加动反力。



[**解**]在图示坐标系中，由于圆盘上各点的 x 坐标对于 z 轴对称，圆盘的惯性积

$$J_{xz}=\sum m_i x_i z_i=0$$

为计算 J_{yz} 作圆盘的中心惯性主轴 $ox'y'z'$ 如图

$$J_{yz}=\sum m_i y_i z_i=\sum m_i(y_i'\cos\gamma-z_i'\sin\gamma)(y_i'\sin\gamma+z_i'\cos\gamma)$$

$$=J_{x'}\cos\gamma\sin\gamma=-\frac{m}{8}R^2\sin 2\theta$$

以圆盘和轴为研究对象，受力图中惯性力向中心点 O 简化结果为

$$F_{\mathrm{I}}=\frac{P}{g}a_C=0\qquad M_{\mathrm{I}x}=-J_{yz}\omega^2=\frac{m}{8}R^2\omega^2\sin 2\theta,\qquad M_{\mathrm{I}y}=J_{xz}\omega^2=0$$

由达朗贝尔原理，得

$$\sum F_x=0\qquad F_{Ax}+F_{Bx}=0$$

$$\sum F_y=0\qquad F_{Ay}+F_{By}=0$$

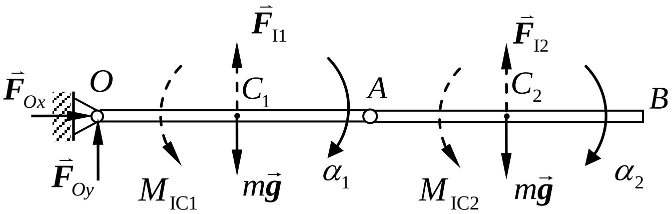
$$\sum F_z=0\qquad F_{Az}=0$$

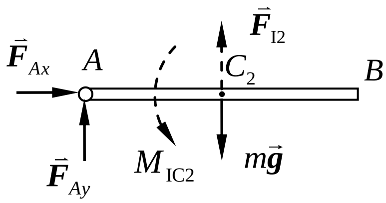
$$\sum M_x\left(\vec{F}\right)=0\qquad M_{\mathrm{I}x}+aF_{Ay}-bF_{By}=0$$

$$\sum M_y\left(\vec{F}\right)=0\qquad M_{\mathrm{I}y}-aF_{Ax}+bF_{Bx}=0$$

联立解得　　$F_{Ax}=F_{Bx}=F_{Az}=0$；　$F_{Ay}=-F_{By}=-\dfrac{mR^2\omega^2}{8(a+b)}\sin 2\theta$

13.13 均质细杆 *OA*、*AB* 的质量均为 *m*、长均为 *l*，用光滑铰链 *O*、*A* 连接如图。初始时两杆均处于水平位置，求系统由静止释放瞬时，两杆的角加速度。





解：系统静止释放瞬时，两杆的角速度均为零，*OA* 杆将作定轴转动，*AB* 杆作平面运动。设角加速度分别为α_1、α_2

由刚体平面运动基点法，$\vec{a}_{C2}=\vec{a}_A+\vec{a}^{\tau}_{C_2A}+\vec{a}^{n}_{C_2A}$，式中

$a^n_{C_2A}=0$，$a^{\tau}_{C_2A}=\dfrac{1}{2}l\alpha_2$ 所以 $a_{C2}=l(\alpha_1+\dfrac{1}{2}\alpha_2)$

对系统虚加惯性力 $F_{I1}=\dfrac{1}{2}ml\alpha_1$，$M_{IC1}=\dfrac{1}{12}ml^2\alpha_1$，

$$F_{I2}=ml(\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2)，\ M_{IC2}=\frac{1}{12}ml^2\alpha_2$$

根据达朗贝尔原理，

对 *AB* 杆 $\sum M_A(\vec{F})=0$，$\dfrac{1}{12}ml^2\alpha_2+ml(\alpha_1+\dfrac{1}{2}\alpha_2)\dfrac{l}{2}-mg\dfrac{l}{2}=0$ ……..….. (a)

对系统 $\sum M_O(\vec{F})=0$，

$$\frac{1}{12}ml^2\alpha_1+\frac{1}{2}ml\alpha_1\cdot\frac{l}{2}-mg\frac{l}{2}+\frac{1}{12}ml^2\alpha_2+ml(\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2)\cdot\frac{3l}{2}-mg\frac{3l}{2}=0 \qquad \text{(b)}$$

联立(a)、(b)，解得 $\underline{\alpha_1=\dfrac{9}{7}\dfrac{g}{l},\alpha_2=-\dfrac{3}{7}\dfrac{g}{l}}$