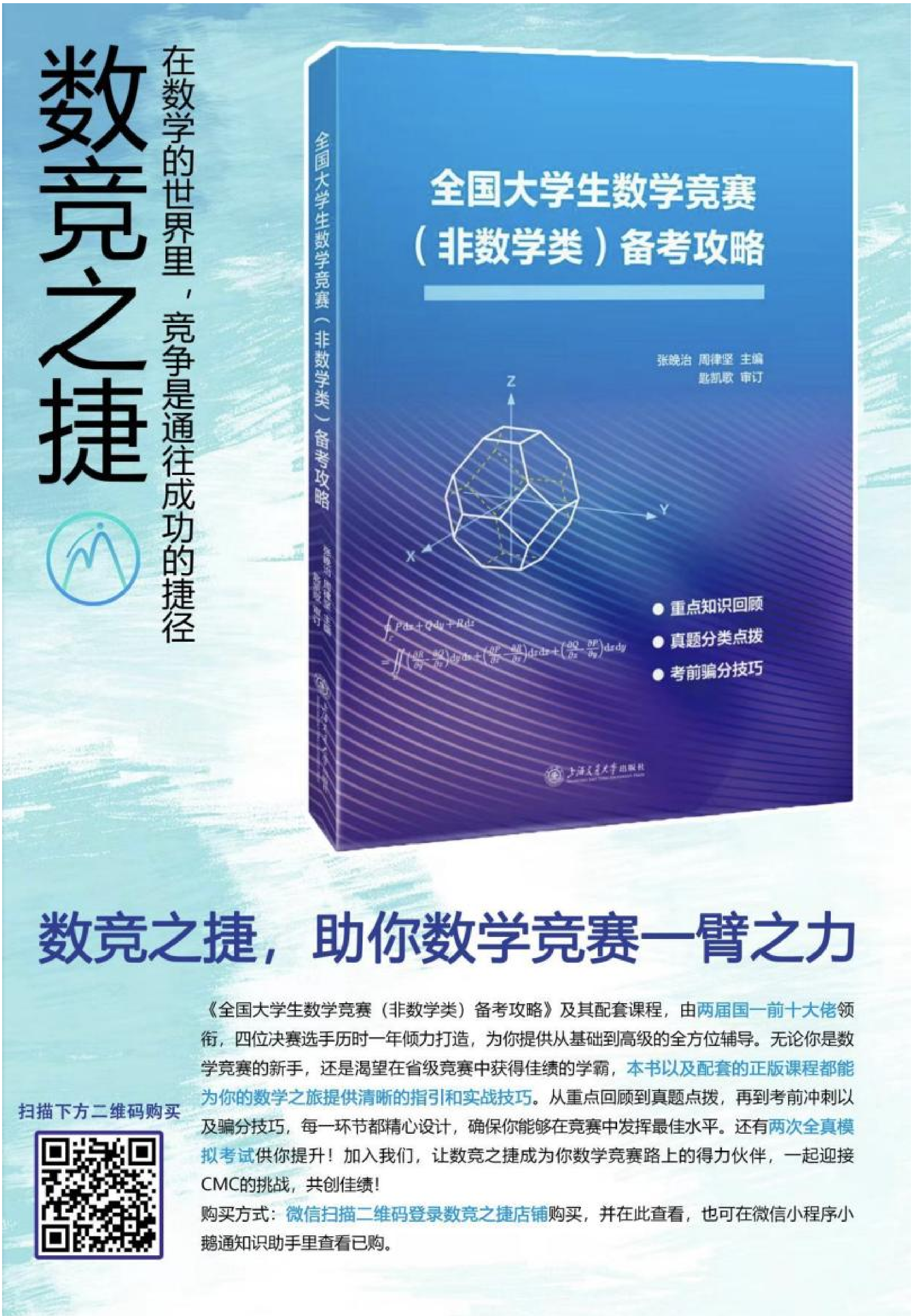
全国大学生数学竞赛初赛试卷（非数学类）

数竞之捷团队整理

数竞之捷团队，诞生于2023年11月，是一支深耕大学数学领域的精英队伍。**我们由两届全国大学生数学竞赛决赛前十的佼佼者领衔，汇聚众多国一获得者，共同怀揣着对数学的热爱与追求。**为了更好地服务广大数学爱好者，我们精心运营微信公众号“数竞之捷”，这里解答各高校最新期末考试难题，也详细解答CMC非数学类历届试题。

在团队不懈努力下，**我们已于2024年6月成功出版正版图书《全国大学生数学竞赛（非数学类）备考攻略》，并配套有在小鹅通平台热销的详尽课程，旨在全方位助力考生备考。**而今第二本聚焦于大学生数学竞赛的权威书籍正在紧锣密鼓地筹备中，预计将于2025年面世，继续为学生的数学竞赛之路添砖加瓦。

本系列试卷的整理工作均由数竞之捷团队核心成员倾力完成，作为一份纯粹的公益贡献，我们诚挚邀请每一位热爱数学的朋友共同分享这份资源。**请注意，本试卷及其解答严禁任何形式的有偿转发或售卖，以维护其公益性质。**若需获取详尽答案，敬请访问微信公众号“数竞之捷”中的“CMC大纲与试题”专栏，那里不仅答案详尽，更提供多种解题思路，相较于官方答案，我们的解答更加条理清晰、简洁明了，易于理解掌握。


数竞之捷
在数学的世界里，竞争是通往成功的捷径
全国大学生数学竞赛（非数学类）备考攻略
张晓治 周律坚 主编
匙凯歌 审订
重点知识回顾
真题分类点拨
考前骗分技巧
数竞之捷，助你数学竞赛一臂之力
扫描下方二维码购买
《全国大学生数学竞赛（非数学类）备考攻略》及其配套课程，由两届国一前十大佬领衔，四位决赛选手历时一年倾力打造，为你提供从基础到高级的全方位辅导。无论你是数学竞赛的新手，还是渴望在省级竞赛中获得佳绩的学霸，本书以及配套的正版课程都能为你的数学之旅提供清晰的指引和实战技巧。从重点回顾到真题点拨，再到考前冲刺以及骗分技巧，每一环节都精心设计，确保你能够在竞赛中发挥最佳水平。还有两次全真模拟考试供你提升！加入我们，让数竞之捷成为你数学竞赛路上的得力伙伴，一起迎接CMC的挑战，共创佳绩！
购买方式：微信扫描二维码登录数竞之捷店铺购买，并在此查看，也可在微信小程序小鹅通知识助手里查看已购。

目 录

2009年第一届全国大学生数学竞赛初赛试卷(非数学类

一、填空题(本大题有4个小题,每小题5分,共20分)

1. 计算 $\iint\limits_{D}\dfrac{(x+y)\ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________,其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

2. 设 $f(x)$ 是连续函数,满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-2$,则 $f(x)=$________.

3. 曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是________.

4. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x\mathrm{e}^{f(y)}=\mathrm{e}^y\ln 29$ 确定,其中 f 具有二阶导数,且 $f'\neq 1$,则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$________.

二、解答题(本大题有7小题,共80分)

1. (5分)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{\mathrm{e}}{x}}$,其中 n 是给定的正整数.

2. (15分)设函数 $f(x)$ 连续,$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$,$A$ 为常数,求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

3. (15分)已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant \pi, 0\leqslant y\leqslant\pi\}$,$L$ 为 D 的正向边界,试证:

(1) $\oint\limits_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint\limits_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$;

(2) $\oint\limits_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant\dfrac{5}{2}\pi^2$.

4. (10分)已知 $y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}$,$y_2=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$,$y_3=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解,试求此微分方程.

5. (10分)设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点,当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$y\geqslant 0$,又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\dfrac{1}{3}$.试确定 a,b,c 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

6. (15分)已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x$ (n 为正整数),且 $u_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$,求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和.

7. (10分)求当 $x\to 1^-$ 时,与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

2010年第二届全国大学生数学竞赛初赛试卷(非数学类)

一、计算题(本大题有5小题,每小题5分,共25分)

1. 设$x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$,其中$|a|<1$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}(1+\dfrac{1}{x})^{x^2}$.

3. 设$s>0$,求$I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx}x^n\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$.

4. 设$f(t)$有二阶连续导数,$r=\sqrt{x^2+y^2}$,$g(x,y)=f(\dfrac{1}{r})$,求$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

5. 求直线$l_1:\begin{cases}x-y=0\\z=0\end{cases}$与直线$l_2:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$的距离.

二、解答题(本大题有5小题,每小题15分,共75分)

1. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶导数,并且$f''(x)>0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$,$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$,且存在一点$x_0$,使得$f(x_0)<0$.证明:方程$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$恰有两个实根.

2. 设$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=2t+t^2\\y=\psi(t)\end{cases}(t>-1)$所确定,且$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$,其中$\psi(t)$具有二阶导数,曲线$y=\psi(t)$与$y=\displaystyle\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u+\dfrac{3}{2\mathrm{e}}$在$t=1$处相切.求函数$\psi(t)$.

3. 设$a_n>0$,$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k$,证明:(1)当$\alpha>1$时,级数$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{a_n}{S_n^\alpha}$收敛;(2)当$\alpha\leqslant1$,且$S_n\to+\infty(n\to\infty)$时,$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{a_n}{S_n^\alpha}$发散.

4. 设l是过原点,方向为(α,β,γ)(其中$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$)的直线,均匀椭球$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant1$(其中$0<c<b<a$,密度为1)绕$l$旋转.(1)求其转动惯量;(2)求其转动惯量关于方向(α,β,γ)的最大值和最小值.

5. 设函数$\varphi(x)$具有连续的导数,在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线C上,积分$\displaystyle\oint_C\frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$的值为常数.

(1)设L为正向闭曲线$(x-2)^2+y^2=1$,证明:$\displaystyle\oint_L\frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$;

(2)求函数$\varphi(x)$;

(3)设C是围绕原点的光滑简单正向闭曲线,求$\displaystyle\oint_C\frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

2011 年第三届全国大学生数学竞赛初赛试卷(非数学类)

一、计算题(本大题有 4 小题,每小题 6 分,共 24 分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2[1-\ln(1+x)]}{x}$.

2. 设$a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^n}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

3. 求$\iint\limits_D \operatorname{sgn}(xy-1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,其中$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

4. 求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$的和函数,并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^{2n-1}}$的和.

二、解答题(本大题有 5 小题,共 76 分)

1. (本题两问,每问 8 分,共 16 分)设$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$为数列,λ为有限数,求证:

(1)如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;

(2)如果存在正整数 p,使得$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$.

2. (15 分)设函数$f(x)$在闭区间$[-1,1]$上具有连续的三阶导数,且$f(-1)=0$,$f(1)=1$,$f'(0)=0$,求证:在开区间$(-1,1)$内至少存在一点x_0,使得$f'''(x_0)=3$.

3. (15 分)在平面上,有一条从点$(a,0)$向右的射线,线密度为 ,在点$(0,h)$处(其中$h>0$)有一质量为 m 的质点.求射线对该质点的引力.

4. (15 分)设$z=z(x,y)$是由方程$F(z+\dfrac{1}{x},z-\dfrac{1}{y})=0$确定的隐函数,且具有连续的二阶偏导数,求证:

(1)$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$;(2)$x^3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0$.

5. (15 分)设函数$f(x)$连续,a,b,c 为常数,Σ是单位球面$x^2+y^2+z^2=1$.记第一型曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}f(ax+by+cz)\mathrm{d}S$$.求证:$I=2\pi\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)\mathrm{d}u$.

2012 年第四届全国大学生数学竞赛初赛试卷(非数学类)

一、简答题(本大题有 5 小题,每小题 6 分,共 30 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

2. 求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1 和 π_2,使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$.

3. 已知函数 $z=u(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$,且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$,确定常数 a,b,使函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0.$$

4. 设 $u=u(x)$ 连续可微,$u(2)=1$,且 $\int_L(x+2y)u\,\mathrm{d}x+(x+u^3)u\,\mathrm{d}y$ 在右半平面上与路径无关,求 $u(x)$.

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t$.

二、解答题(本大题有 6 小题,共 70 分)

1. (10 分)计算 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x$.

2. (10 分)求方程 $x^2\sin\dfrac{1}{x}=2x-501$ 的近似解,精确到 0.001.

3. (12 分)设函数 $y=f(x)$ 二阶可导,且 $f''(x)>0,f(0)=0,f'(0)=0$,求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3u}$,其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处切线在 x 轴上的截距.

4. (12 分)求最小实数 C,使得满足 $\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x=1$ 的连续的函数 $f(x)$ 都有 $\int_0^1 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x\leqslant C$.

5. (12 分)设 $f(x)$ 为连续函数,$t>0$.Ω是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=t^2(t>0)$ 所围成起来的部分.定义 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$,求 $F'(t)$.

6. (14 分)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数,证明:

(1)若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)>0$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(2)若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

2013 年第五届全国大学生数学竞赛初赛试卷(非数学类)

一、简答题(本大题有 4 小题,每小题 6 分,共 24 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2})^n$.

2. 证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 不是绝对收敛的.

3. 设 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定,求 $y(x)$ 的极值.

4. 过曲线 $y=\sqrt[3]{x}\,(x\geqslant 0)$ 上的点 A 作切线,使得该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{3}{4}$,求点 A 的坐标.

二、解答题(本大题有 6 小题,共 76 分)

1. (12 分)计算定积分 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

2. (12 分)设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$,证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛.

3. (10 分)设 $|f(x)|\leqslant\pi, f'(x)\geqslant m>0\,(a\leqslant x\leqslant b)$,证明: $\left|\int_a^b \sin f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{m}$.

4. (14 分)已设 是一个光滑封闭曲面,方向朝外,给定第二型的曲面积分

$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3-x)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(2y^3-y)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(3z^3-z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,试确定曲面 ,使积分 I 的值最小,并求该最小值.

5. (14 分)设 $I_a(r)=\int_C\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a}$,其中 a 为常数,曲线 C 为椭圆 $x^2+xy+y^2=r^2$,取正向.求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)$.

6. (14 分)判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性.若收敛,求其和.

2014年第六届全国大学生数学竞赛初赛试卷(非数学类)

一、填空题(本大题有5小题,每小题6分,共30分)

1. 已知$y_1=\mathrm{e}^x$和$y_2=x\mathrm{e}^x$是齐次二阶常系数线性微分方程的解,则该微分方程是________.

2. 设有曲面$S:z=x^2+2y^2$和平面$\pi:2x+2y+z=0$,则与π平行的S的切平面方程是________.

3. 设$y=y(x)$由$x=\int_1^{y-x}\sin^2(\frac{\pi t}{4})\mathrm{d}t$所确定,则$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$________.

4. 设$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$,则$\lim_{n\to\infty}x_n=$________.

5. 已知$\lim_{x\to 0}[1+x+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$,则$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=$________.

二、解答题(本大题有5小题,共70分)

1. (12分)设n为正整数,计算$I=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(\ln\frac{1}{x})\right|\mathrm{d}x$.

2. (14分)设函数$f(x)$在[0,1]上有二阶导数,且有正常数A,B使得$|f(x)|\leqslant A$, $|f''(x)|\leqslant B$,证明:对于任意$x\in[0,1]$,都有$|f'(x)|\leqslant 2A+\frac{B}{2}$.

3. (14分)

(1)设一球缺高为h,所在球半径为R.证明该球缺的体积为$\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$,球冠的面积为$2\pi Rh$.

(2)设球体$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\leqslant 12$被平面$P:x+y+z=6$所截的小球缺为$\Omega$.记球缺上的球冠为$\Sigma$,方向指向球外,求第二型曲面积分$I=\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

4. (15分)设f在$[a,b]$上非负连续,严格单增,且存在$x_n\in[a,b]$使得$|f(x_n)|^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n\mathrm{d}x$,求$\lim_{n\to\infty}x_n$.

5. (15分)设$A_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$,求$\lim_{n\to\infty}n(\frac{\pi}{4}-A_n)$.

2015 年第七届全国大学生数学竞赛初赛试卷(非数学类)

一、填空题(本大题有 5 小题,每小题 6 分,共 30 分)

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin 2\frac{\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)=$________.

2. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所决定,其中 $F(u,v)$ 具有连续偏导数,且 $xF_u+yF_v\neq 0$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.(结果要求不显含有 F 及其偏导数)

3. 曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为________.

4. 函数 $f(x)=\begin{cases}3, x\in[-5,0)\\0, x\in[0,5)\end{cases}$ 在 $(-5,5]$ 的傅里叶级数 $x=0$ 收敛的值为________.

5. 设区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为 $u(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt^2}\mathrm{d}t$,则 $u(x)$ 的初等函数表达式为________.

二、解答题(本大题有 5 小题,共 70 分)

1. (12 分)设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面,求其方程.
2. (12 分)设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导,且存在常数 , ,使得对于 $\forall x\in(a,b)$,有 $f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x)$,证明:$f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导.
3. (14 分)求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数.
4. (16 分)设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续,且 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$.试证:

   (1) $\exists x_0\in[0,1]$,使得 $|f(x_0)|>4$;

   (2) $\exists x_1\in[0,1]$,使得 $|f(x_1)|=4$.

5. (16 分)设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上有连续的二阶导数,$f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\leqslant M$.若 $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$,证明:$\left|\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\dfrac{\pi\sqrt{M}}{4}$.

2016 年第八届全国大学生数学竞赛初赛试卷(非数学类)

一、填空题(本大题有 5 小题,每小题 6 分,共 30 分)

1. 若$f(x)$在点$x=a$处可导,且$f(a)\neq 0$,则$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n=$________.

2. 若$f(1)=0,f'(1)$存在,则极限$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)\sin x}=$________.

3. 设$f(x)$有连续导数,且$f(1)=2$.记$z=f(\mathrm{e}^x y^2)$,若$\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$,则$f(x)$在$x>0$的表达式为________.

4. 设$f(x)=\mathrm{e}^x\sin 2x$,则$f^{(4)}(0)=$________.

5. 曲面$z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$平行于平面$2x+2y-z=0$的切平面方程为________.

二、解答题(本大题有 5 小题,每小题 14 分,共 70 分)

1. 设$f(x)$在[0,1]上可导,$f(0)=0$,且当$x\in(0,1)$时,$0<f'(x)<1$.试证:当$a\in(0,1)$时,有

$$\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2>\int_0^a f^3(x)\mathrm{d}x.$$

2. 某物体所在的空间区域为$\Omega: x^2+y^2+2z^2\leqslant x+y+2z$,密度函数为$x^2+y^2+z^2$,求质量

$$M=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. 设函数$f(x)$在闭区间[0,1]上具有连续导数,$f(0)=0,f(1)=1$.证明:

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})\right]=-\frac{1}{2}.$$

4. 设函数$f(x)$在区间[0,1]上连续,且$I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\neq 0$.证明:在(0,1)内存在不同的两点$x_1,x_2$,使得

$$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}=\frac{2}{I}.$$

5. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导,且$f(x)=f(x+2)=f\left(x+\sqrt{3}\right)$,用傅里叶(Fourier)级数理论证明:$f(x)$为常数.

2017 年第九届全国大学生数学竞赛初赛试卷(非数学类)

一、填空题(本大题有 6 小题,每小题 7 分,共 42 分)

1. 已知可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=x+1$.则 $f(x)=$________.

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=$________.

3. 设 $w=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,且 $u=x-cy,v=x+cy$,其中 c 为非零常数,则 $w''_{xx}-\frac{1}{c^2}w''_{yy}=$________.

4. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数,且 $f(0)=f'(0)=0,f''(0)=6$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=$________.

5. 不定积分 $I=\int\frac{\mathrm{e}^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x=$________.

6. 记曲面 $z^2=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成的空间区域为 Ω,则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=$________.

二、解答题(本大题有 4 小题,共 58 分)

1. (14 分)设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数,对任意角度 ,定义一元函数 $g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)$,若对任何 都有 $\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$ 且 $\frac{\mathrm{d}^2 g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$,证明:$f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值.

2. (14 分)设曲线 Γ 为曲线 $x^2+y^2+z^2=1,x+z=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$ 上从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B(0,0,1)$ 的一段.

   求曲线积分 $I=\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$.

3. (15 分)设函数 $f(x)>0$ 且在实轴上连续,若对任意实数 t,有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 1$.证明:$\forall a,b,a<b$,有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a+2}{2}$.

4. (15 分)设 $\{a_n\}$ 为一个数列,p 为固定的正整数,若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$.证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$.

2018 年第十届全国大学生数学竞赛初赛试卷(非数学类)

一、填空题(本大题有 4 小题,每小题 6 分,共 24 分)

1. 设$\alpha\in(0,1)$,则$\lim\limits_{n\to+\infty}[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}]=$________.

2. 若曲线$y=y(x)$由$\begin{cases}x=t+\cos t\\ \mathrm{e}^{y}+ty+\sin t=1\end{cases}$确定,则此曲线在$t=0$对应点处的切线方程为________.

3. $\displaystyle\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})}{(1+x^{2})^{3/2}}\mathrm{d}x=$________.

4. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^{2}}=$________.

二、解答题(本大题有 6 小题,共 76 分)

1. (8 分)设函数$f(t)$在$t\neq0$时一阶连续可导,且$f(1)=0$,求函数$f(x^{2}-y^{2})$,使得曲线积分$\displaystyle\int_{L}y[2-f(x^{2}-y^{2})]\mathrm{d}x+xf(x^{2}-y^{2})\mathrm{d}y$与路径无关,其中$L$为任一不与直线$y=\pm x$相交的分段光滑曲线.

2. (14 分)设$f(x)$在区间[0,1]上连续,且$1\leqslant f(x)\leqslant3$,证明:$1\leqslant\displaystyle\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x\int_{0}^{1}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{4}{3}$.

3. (12 分)计算三重积分$\displaystyle\iiint_{\Omega}(x^{2}+y^{2})\mathrm{d}V$,其中 是由$x^{2}+y^{2}+(z-2)^{2}\geqslant4$,$x^{2}+y^{2}+(z-1)^{2}\leqslant9$,及$z\geqslant0$所围成的空间图形.

4. (14 分)设$f(x,y)$在区域D内可微,且$\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^{2}+(\frac{\partial f}{\partial y})^{2}}\leqslant M$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$是$D$内两点,线段$AB$包含在$D$内,证明:$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M|AB|$.

5. (14 分)证明:对于连续函数$f(x)>0$,有$\ln\displaystyle\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{0}^{1}\ln f(x)\mathrm{d}x$.

6. (14 分)已知$\{a_n\}$,$\{b_n\}$是正数数列,且$b_{k+1}-b_{k}\geqslant\delta>0$,$k=1,2,\cdots$, 为一常数.证明:若级数$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$收敛,则级数$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_h)(b_1b_2\cdots b_h)}}{b_{k+1}b_k}$收敛.

2019 年第十一届全国大学生数学竞赛初赛试卷(非数学类)

一、填空题(本大题有 5 小题,每小题 6 分,共 30 分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}=$________.

2. 设隐函数$y=y(x)$由方程$y^2(x-y)=x^2$所确定,则$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2}=$________.

3. 定积分$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x=$________.

4. 已知$\mathrm{d}u(x,y)=\dfrac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{3x^2-2xy+3y^2}$,则$u(x,y)=$________.

5. 设$a,b,c,\mu>0$,曲面$xyz=\mu$与曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$相切,则$\mu=$________.

二、解答题(本大题有 5 小题,每小题 14 分,共 70 分)

1. 计算三重积分$\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}\frac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,其中$\Omega$是由曲面$(x^2+y^2+z^2)^2=2xy$围成的区域在第一卦限部分.

2. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上可微,$f(0)=0$,且存在常数$A>0$,使得$|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$在$[0,+\infty)$上成立,试证明:在$(0,+\infty)$上有$f(x)\equiv 0$.

3. 计算积分$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\sin\theta(\cos\varphi-\sin\varphi)}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$.

4. 设$f(x)$是仅有正实根的多项式函数,满足$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$,证明:$c_n>0\,(n\geqslant 0)$,极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$存在,且等于$f(x)$的最小根.

5. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上具有连续导数,满足$3[3+f^2(x)]f'(x)=2[1+f^2(x)]^2\mathrm{e}^{-x^2}$,且$f(0)\leqslant 1$.证明:存在常数$M>0$,使得$x\in[0,+\infty)$时,恒有$|f(x)|\leqslant M$.

2020 年第十二届全国大学生数学竞赛初赛试卷(非数学类)

一、填空题(本大题有 5 小题,每小题 6 分,共 30 分)

1. 极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=$________.

2. 设$f(x)=(x+1)^n\mathrm{e}^{-x^2}$,则$f^{(n)}(-1)=$________.

3. 设$y=f(x)$是由方程$\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{4}$确定的隐函数,且满足$f(1)=1$,则曲线$y=f(x)$在点(1,1)处的切线方程为____________________.

4. 已知$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$,则$\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin(x+y)}{x(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

5. 设$f(x),g(x)$在$x=0$的某一邻域 U 内有定义,对任意$x\in U$,$f(x)\neq g(x)$,且$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=a>0$,

   则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=$________.

二、解答题(本大题有 5 小题,每小题 14 分,共 70 分)

1. (10 分)设数列$\{a_n\}$满足:$a_1=1$,$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(n+1)(a_n+1)}$,$n\geqslant 1$. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n!\,a_n$.

2. (12 分)设$f(x)$在[0,1]上连续,$f(x)$在(0,1)内可导,且$f(0)=0$,$f(1)=1$.证明:
   (1)存在$x_0\in(0,1)$使得$f(x_0)=2-3x_0$;(2)存在$\xi,\eta\in(0,1)$,且$\xi\neq\eta$,使得$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

3. (12 分)已知$z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+2y\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$,其中 f,φ均为二阶可微函数.

   (1)求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;(2)当$f=\varphi$,且$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-by^2$时,求$f(y)$.

4. (12 分)计算曲线积分$I=\displaystyle\oint_\Gamma\left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}x-5z\,\mathrm{d}z$,其中$\Gamma$:$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8\\x^2+y^2=2z\end{cases}$ 从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向.

5. (12 分)证明$f(n)=\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\int_0^m\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x$等于 n 的所有因子(包括 1 和 n 本身)之和,其中$[x+1]$表示不超过$x+1$的最大整数,并计算$f(2021)$.

6. (14 分)设$u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}(n\geqslant 1)$.

   (1)证明数列$\{u_n\}$收敛,并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$;

(2)证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$条件收敛;

(3)证明当$p\geqslant 1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$收敛,并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$的和.

2021 年第十三届全国大学生数学竞赛初赛试卷(非数学类)

一、填空题(本大题有 5 小题,每小题 6 分,共 30 分)

1. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}\dfrac{x-\ln(\mathrm{e}^x+x)}{x}=$________.

2. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ 所确定的二元隐函数,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

3. 设函数 $f(x)$ 连续,且 $f(0)\neq 0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\displaystyle\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\displaystyle\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=$________.

4. 过三条直线 $L_1:\begin{cases}x=0\\ y-z=2\end{cases}$, $L_2:\begin{cases}x=0\\ x+y-z+2=0\end{cases}$ 与 $L_3:\begin{cases}x=\sqrt{2}\\ y-z=0\end{cases}$ 的圆柱面方程为________.

5. 记 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant\pi\}$,则 $\displaystyle\iint_D\left(\sin x^2\cos y^2+x\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$________.

二、解答题(本大题有 5 小题,每小题 14 分,共 70 分)

1. 设 $x_1=2021$, $x_n^2-2(x_n+1)x_{n+1}+2021=0\,(n\geqslant 1)$,求证:数列 $\{x_n\}$ 收敛,并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是有界连续函数,求证:方程 $y''+14y'+13y=f(x)$ 的每一个解在 $[0,+\infty)$ 上都是有界函数.

3. 对于 4 次齐次函数 $f(x,y,z)=a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+3a_4x^2y^2+3a_5y^2z^2+3a_6x^2z^2$,计算曲面积分 $\displaystyle\oiint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S$,其中 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=1$.

4. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数,求证:
$$\lim_{n\to\infty}n^2\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\right)\right]=\frac{(b-a)^2}{24}[f'(b)-f'(a)].$$

5. 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为正实数列,满足: $a_1=b_1=1$ 且 $b_n=a_nb_{n-1}-2$, $n=2,3,\cdots$.又设 $\{b_n\}$ 为有界数列,求证:级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$ 收敛,并求该级数的和.

2021 年第十三届全国大学生数学竞赛初赛试卷(非数学类补赛)

一、填空题(本大题有 5 小题,每小题 6 分,共 30 分)

1. 设 $x_0=1, x_n=\ln(1+x_{n-1})(n\geqslant 1)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n=$________.

2. 积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\tan x}\mathrm{d}x=$________.

3. 已知直线 $L:\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z=9\end{cases}$ 和平面 $\pi: 4x-y+z=1$,则直线 L 在平面 π 上的投影直线方程为________.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{4n^2+4n+1}=$________.

5. 微分方程 $\begin{cases}(x+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1=2\mathrm{e}^{-y}\\y(0)=0\end{cases}$ 的解为________.

二、解答题(本大题有 5 小题,每小题 14 分,共 70 分)

1. 设 $f(x)=-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\mathrm{e}})+\int_{-1}^{1}|x-t|\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$,证明:在区间 $(-1,1)$ 内 $f(x)$ 有且仅有两个实根.

2. 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上具有二阶连续偏导数,且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2+y^2$,求

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(\tan r-\sin r)^2}.$$

3. 若对于 $\mathbf{R}^3$ 中半空间 $\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3|x>0\}$ 内任意有向光滑封闭曲面 S,都有

$\oiint\limits_S xf'(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y[xf(x)-f'(x)]\mathrm{d}z\mathrm{d}x-xz[\sin x+f'(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,其中 f 在 $(0,+\infty)$ 上二阶导数连续且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$,求 $f(x)$.

4. 设 $f(x)=\int_0^x(1-\frac{[u]}{u})\mathrm{d}u$,其中 $[x]$ 表示小于等于 x 的最大整数,试讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{f(x)}}{x^p}\cos(x^2-\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x$ 的敛散性,其中 $p>0$.

5. 设正数列 $\{a_n\}$ 单调减少趋于零,$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^n x^n$,证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,则积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln f(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ 也发散.

2022年第十四届全国大学生数学竞赛初赛试卷(非数学类)

一、填空题(本大题有5小题,每小题6分,共30分)

1. 极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{1+x^2-\cos^2 x}=$________.

2. 设$f(x)=\begin{cases}1,x>0\\0,x\leqslant 0\end{cases}$,$g(x)=\begin{cases}x-1,x\geqslant 1\\1-x,x<1\end{cases}$,则复合函数$f[g(x)]$的间断点为$x=$________.

3. 极限$\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^3\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n=$________.

4. 方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}x\ln x\sin y+\cos y(1-x\cos y)=0$的通解为________.

5. 记$D=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x+y\leqslant\dfrac{\pi}{2},0\leqslant x-y\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$,则$I=\iint\limits_D y\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

二、解答题(本大题有5小题,每小题14分,共70分)

1. 记向量$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的夹角为α,$\left|\overrightarrow{OA}\right|=1$,$\left|\overrightarrow{OB}\right|=2$,$\overrightarrow{OP}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OB}$,$0\leqslant\lambda\leqslant 1$.

(1)问当λ为何值时,$\left|\overrightarrow{PQ}\right|$取得最小值;

(2)设(1)中的λ满足$0<\lambda<\dfrac{1}{5}$,求夹角α的取值范围.

2. 设函数$f(x)$在$(-1,1)$上二阶可导,$f(0)=1$,且当$x\geqslant 0$时,$f(x)\geqslant 0$,$f'(x)\leqslant 0$,$f''(x)\leqslant f(x)$,证明:$f'(0)\geqslant-\sqrt{2}$.

3. 证明:对任意正整数n,恒有:$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{n^2}{4}-\frac{1}{8}\right)\pi^2$.

4. 设$z=f(x,y)$是区域$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$上的可微函数,$f(0,0)=0$,且$\mathrm{d}z|_{(0,0)}=3\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$,

求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\displaystyle\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u}{1-\sqrt[4]{1-x^4}}$.

5. 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,求证:存在收敛的正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$.

2022年第十四届全国大学生数学竞赛初赛试卷(非数学类补赛一)

一、填空题(本大题有5小题,每小题6分,共30分)

1. 函数$f(x)=2x^3-6x+1$在区间$[\frac{1}{2},2]$上的值域为________.

2. 设$x\in(-\infty,+\infty)$,则极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{(n\mathrm{e}^x+i)(n\mathrm{e}^x+i+1)}=$________.

3. 设函数$y=y(x)$由方程$x^2+4xy+\mathrm{e}^y=1$确定,则$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$________.

4. 设$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$,则$\iint\limits_D(x+y-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

5. 设可微函数$f(x,y)$对任意u,v,t满足$f(tu,tv)=t^2f(u,v)$,点$P(1,-1,2)$位于曲面$z=f(x,y)$上,又设$f'_x(1,-1)=3$,则该曲面在点P处的切平面方程为________.

二、解答题(本大题有5小题,每小题14分,共70分)

1. 设函数$z=f(u)$在区间$(0,+\infty)$上具有二阶连续导数,$u=\sqrt{x^2+y^2}$,且满足$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2+y^2$,求函数$f(u)$的表达式.

2. 设曲线C:$x^3+y^3-\frac{3}{2}xy=0$.

   (1)已知曲线C存在斜渐近线,求其斜渐近线的方程;

   (2)求由曲线C所围成的平面图形的面积.

3. 证明:当$\alpha>0$时,$(\frac{2\alpha+2}{2\alpha+1})^{\sqrt{\alpha+1}}>(\frac{2\alpha+1}{2\alpha})^{\sqrt{\alpha}}$.

4. 计算曲线积分$I=\oint_\Gamma(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$,其中$\Gamma$:$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2Rx\\x^2+y^2=2rx\end{cases}$

   $(0<r<R,z\geqslant 0)$,方向与z轴正向符合右手螺旋定则.

5. 证明:方程$x=\tan\sqrt{x}$有无穷多个正根,且所有正根$\{r_n\}$可以按递增顺序排列为$0<r_1<r_2<\cdots<r_n<\cdots$,

   并讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\cot\sqrt{r_n})^\lambda$的收敛性,其中$\lambda$是正常数.

2022年第十四届全国大学生数学竞赛初赛试卷(非数学类补赛二)

一、填空题(本大题有5小题,每小题6分,共30分)

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}[1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2]=$________.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某一邻域内可微,且满足 $f(1+x)-3f(1-x)=4+2x+o(x)$,其中 $o(x)$ 是当 $x\to 0$ 时 x 的高阶无穷小,则曲线 $y=f(x)$ 在点处的切线方程为________.

3. 设 $y=y(x)$ 是初值问题 $\begin{cases} y''-2y'-3y=1 \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$ 的解,则 $y(x)=$________.

4. 设可微函数 $z=z(x,y)$ 满足 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z^2$,又 $u=x, v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}, w=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}$,则对函数 $w=w(u,v)$,偏导数 $\left.\dfrac{\partial w}{\partial u}\right|_{\substack{u=2\\v=1}}=$________.

5. 设 $a>0$,则均匀曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2(x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$ 的重心坐标为________.

二、解答题(本大题有5小题,每小题14分,共70分)

1. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2023}}{1+t^2}\mathrm{d}t$,正整数 $n\leqslant 2023$,求导数 $f^{(n)}(0)$.

2. 设函数 $f(x)$ 在区间(0,1)内有定义,$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$,且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(\frac{x}{3})}{x}=0$.证明:$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

3. 设函数 $f(x)$ 在区间[0,1]上连续,在(0,1)内可导,且 $f(0)=0, f(1)=2$.证明:存在两两互异的点 $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(0,1)$,使得 $f'(\xi_1)f'(\xi_2)\sqrt{1-\xi_3}\geqslant 2$.

4. 设 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的连续的偶函数,计算曲线积分:$I=\displaystyle\oint_L \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$,其中曲线 L 为正向圆周 $x^2+y^2=-2y$.

5. 设函数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+\mathrm{e}^t\sin^3 t}\mathrm{d}t\,(x>0)$,证明:级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 收敛,且 $\dfrac{1}{3}<\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})<\dfrac{5}{6}$.

2023 年第十五届全国大学生数学竞赛初赛试卷(非数学 A 类)

一、填空题(本大题有 5 小题,每小题 6 分,共 30 分)

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^3+9}-6}{2-\sqrt{x^3-23}}=$________.

2. 设$z=f(x^2-y^2,xy)$,且$f(u,v)$有连续的二阶偏导数,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

3. 设$f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$,则$f^{(n)}(0)=$________.

4. 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$的收敛域为________.

5. 设曲面Σ是平面$z+y=5$被柱面$x^2+y^2=25$所截得的部分,则$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=$________.

二、解答题(本大题有 5 小题,每小题 14 分,共 70 分)

1. 解方程$(x^2+y^2+3)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\left(2y-\dfrac{x^2}{y}\right)$.

2. 设Σ_1是以(0,4,0)为顶点且与曲面:Σ_2:$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{3}=1(y>0)$相切的圆锥面,求曲面$\Sigma_1$与$\Sigma_2$所围成的空间区域的体积.

3. 设$I_n=n\int_1^a\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$,其中$a>1$.求极限$\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

4. 设$f(x)$在$[0,1]$上有连续的导数且$f(0)=0$.求证:$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant 4\int_0^1(1-x)^2|f'(x)|^2\mathrm{d}x$,并求使上式成为等式的$f(x)$.

5. 设数列$\{x_n\}$满足$x_0=\dfrac{1}{3}$,$x_{n+1}=\dfrac{{x_n}^2}{1-x_n+{x_n}^2}$,$n\geqslant 0$.证明:无穷级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n$收敛并求其和.

2023年第十五届全国大学生数学竞赛初赛试卷(非数学B类)

一、填空题(本大题有5小题,每小题6分,共30分)

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+3}{x+2})^{2x-1}=$________.

2. 设$z=f(x^2-y^2,xy)$,且$f(u,v)$有连续的二阶偏导数,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

3. 设曲线$y=\ln(1+ax)+1$与曲线$y=2xy^3+b$在$(0,1)$处相切,则$a+b=$________.

4. 设函数$y=y(x)$由方程$y=1+\arctan(xy)$所决定,则$y'(0)=$________.

5. 计算$\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\cos y}{y}\mathrm{d}y=$________.

二、解答题(本大题有5小题,每小题14分,共70分)

1. 设曲线$y=3ax^2+2bx+\ln c$经过点$(0,0)$,且当$0\leqslant x\leqslant 1$时$y\geqslant 0$.设该曲线与直线$x=1$,x轴所围图形的平面图形D的面积为1.试求常数a,b,c的值,使得D绕x轴一周后,所得旋转体的体积最小.

2. 解方程$(x^2+y^2+3)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x(2y-\dfrac{x^2}{y})$.

3. 求幂级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$的收敛域及和函数.

4. 设$f(x)$在上[0,1]可导且$f(0)>0$,$f(1)>0$,$\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$.求证:

(1)在[0,1]上至少有两个零点;

(2)在(0,1)内至少存在一点ξ,使得$f'(\xi)+3f^3(\xi)=0$.

5. 设$f(x)$在[0,1]上有连续的导数且$f(0)=0$.求证:$\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant 4\int_0^1(1-x)^2|f'(x)|^2\mathrm{d}x$,并求使上式成为等式的$f(x)$.