2023 全国大学生数学竞赛非数 A 类卷子点评

得分	
评阅人	

一、(本题 30 分, 每小题 6 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^3+9}-6}{2-\sqrt{x^3-23}}=$ ________.

(2) 设 $z=f(x^2-y^2,xy)$, 且 $f(u,v)$ 有连续的二阶偏导数, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y}=$ ________.

(3) 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$, 则 $f^{(n)}(0)=$ ________.

(4) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$ 的收敛域为 ________.

(5) 设曲面 Σ 是平面 $y+z=5$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 所截得的部分, 则 $\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=$ ________.

第一题，洛必达法则即可，没啥好说的。

第二题，多元函数求微分，与讲义上第 9 页例一变式三方法完全一样。

变式3: 设 $f(u,v)$ 有一阶连续偏导数, $z=f(x^2-y^2,\cos xy)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,

求证: $\cos\theta\dfrac{\partial z}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\sin\theta\dfrac{\partial z}{\partial \theta}=2x\dfrac{\partial z}{\partial u}-y\dfrac{\partial z}{\partial v}\sin xy$

变式3: $f_x'(x,y)\neq 0$ 分母 0

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$ $x<\frac{z}{y}$

求 $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial z\partial y}\right)^2=0$

$dz=f_1'dx+f_2'dy$

$\frac{dx}{dy}=-\frac{f_2'}{f_1'}$ $\frac{dx}{dz}=\frac{1}{f_1'}$

$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=\frac{\partial\left(-\frac{f_2'}{f_1'}\right)}{\partial y}$

$=-\frac{(f_{22}''+f_{21}''\frac{\partial x}{\partial y})f_1'-f_2'(f_{11}''\frac{\partial x}{\partial y}+f_{12}'')}{(f_1')^2}$

$=-\frac{2f_{12}''f_1'f_2'-f_{11}''(f_2')^2-f_{22}''(f_1')^2}{(f_1')^3}$

同理 $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}=\frac{-f_{11}''}{(f_1')^3}$ $\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}=\frac{f_{11}''f_2'-f_{12}''f_1'}{(f_1')^3}$

$z\sim\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 f_1' f_2' f_{12}'' f_{22}'' f_{11}'' 关系

$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'$ $\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'$

∴ 原式 $=\frac{2f_{12}''f_1'f_2'-f_{11}''(f_2')^2-f_{22}''(f_1')^2}{(f_1')^3}\cdot\frac{-f_{11}''}{(f_1')^3}-\left(\frac{f_{11}''f_2'-f_{12}''f_1'}{(f_1')^3}\right)^2$

$=\frac{-1}{(f_1')^6}\left(2f_{12}''f_{11}''f_1'f_2'-f_{11}''^2f_2'^2-f_{11}''f_{22}''(f_1')^2+f_{11}''^2f_2'^2+f_{12}''^2f_1'^2-2f_{11}''f_{12}''f_1'f_2'\right)$

$=\frac{f_{11}''f_{22}''-(f_{12}'')^2}{(f_1')^4}=0$

变式3: 解法一 $y=\arctan x$

$y'=\frac{1}{1+x^2}$ $x=0$代入

$(1+x^2)\cdot y'=1$

u v

u是二次多项式 n阶导为0

$u(x)=1+x^2$ $u'(x)=2x$ $u''(x)=2$

$\sum_{k=0}u^{n-k}v^kC_n^k=0$

$y^{(n)}(0)=$

$u(x)\cdot y^{(n)}+u'(x)\cdot(n-1)y^{(n-1)}+u''(x)\frac{(n-1)(n-2)}{2}y^{(n-2)}=0$

$(1+x^2)y^{(n)}+2\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2}y^{(n-2)}=0$ 递推

∵ $y'(0)=1$ $y''(0)=0$ 初值

$y^{(n)}=-(n-1)(n-2)\cdot y^{(n-2)}$

∴ $y^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n为偶\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)! & n为奇\end{cases}$

法二: $y'=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}$ $|x|<1$

∴ $y^{(n)}(0)=(y'(x))^{(n-1)}\big|_{x=0}=\begin{cases}0 & n为偶\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)! & n为奇\end{cases}$

第三题，级数求导，与讲义上第 8 页例三变式三方法一样。

第四题，收敛域，课上讲知识时专门强调收敛区间与收敛域的区别与求解方法。

无穷级数

2023年10月20日 星期五 10:12

1.收敛证明：1）单调有界 2）柯西准则 3）比较（比值）判别法 4）莱布尼兹判别法

2.区分：1）收敛区间与收敛敛 2）绝对收敛与条件收敛

3.求和函数：1）裂项 2）积分求导灵活运用 $1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1}{1-x}$

4.傅里叶级数理论

第五题，曲面积分，课程上强调了对称性的应用

得分	
评阅人	

二、(本题 14 分) 解方程

$$(x^2+y^2+3)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x(2y-\frac{x^2}{y}).$$

解答. 原方程变形为 $\dfrac{y\mathrm{d}y}{x\mathrm{d}x}=\dfrac{2(2y^2-x^2)}{x^2+y^2+3}$.

第二大题，先凑微分，然后准齐次方程求解，与讲义上第 24 页例四变式二完全一样

变式2:求方程$(x-2\sin y+3)dx-(2x-4\sin y+3)dy=0$的通解

变式2：求方程 $(x-2\sin y+3)dx-(2x-4\sin y+3)\cos y\,dy=0$

$\cos y\,dy=d\sin y$

令 $z=\sin y$，则：

$\frac{dz}{dx}=\frac{x-2z+3}{2x-4z-3}$

令 $x-2z=u$ $\quad 1-\frac{2dz}{dx}=\frac{du}{dx}$

$\therefore \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{du}{dx}=\frac{u+3}{2u-3}$

$\therefore \frac{du}{dx}=\frac{9}{3-2u}$

$\therefore (3-2u)du=9dx$

$\therefore 3u-u^2=9x+C$ $\quad$ 代入 z,u

$\therefore 3(x-2\sin y)-(x-2\sin y)^2=9x+C$

得分	
评阅人	

三、(本题 14 分) 设 Σ_1 是以 $(0,4,0)$ 为顶点且与曲面 $\Sigma_2: \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1(y>0)$ 相切的圆锥面，求曲面 Σ_1 与 Σ_2 所围成的空间区域的体积.

第三大题，求体积问题，先算平面再算体积，与讲义上第 20 页例五变式一求解方法类似。

变式1:曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面
与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为

变式1: 切平面 ______

曲面 法向量 $\vec{n}=(2x_0,2y_0,-1)$

$(2,-2,-1)$

$\therefore$ 切平面

$2\cdot1\cdot(x-1)+2\cdot(-1)\cdot(y-1)-1\cdot(z-3)=0$

$\therefore \begin{cases} 2x-2y-z-1=0 \\ x^2+y^2=z \end{cases}$ $z=2x-2y-1$

投影在 xoy 面上 z相消

$\therefore x^2+y^2=2x-2y-1$

$\therefore (x-1)^2+(y+1)^2=1$ D

$\therefore V=\iiint_\Omega 1\,dV$

$=\iint_D (2x-2y-1-(x^2+y^2))\,dxdy$

$=\iint_D (1-(x-1)^2+(y+1)^2)\,dxdy$

$\therefore$ 令 $\begin{cases} \rho\cos\theta=x-1 \\ \rho\sin\theta=y+1 \end{cases}$ $D': x^2+y^2\leq1$

$\therefore V=\iint_{D'}(1-u^2-v^2)\,dudv$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho\cdot(1-\rho^2)\,d\rho$

$=\frac{\pi}{2}$

$\therefore V=\frac{\pi}{2}$

得分	
评阅人	

四、(本题 14 分)

设 $I_n=n\int_1^a\frac{dx}{1+x^n}$, 其中 $a>1$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

第四大题，反常积分，把分式拆成无穷级数的表达形式再求积分，与讲义上第 13 页例四变式三方法一样。

变式3：求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3\left(e^{\frac{\pi}{x}}-1\right)}dx=$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3(e^{\pi/x}-1)}dx \quad 令\ \frac{1}{x}=t \qquad dx=-\frac{1}{t^2}dt$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{t}{(e^{\pi t}-1)}dt=\int_0^{+\infty}\frac{t\cdot e^{-\pi t}}{1-e^{-\pi t}}dx \qquad \left(\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots\right)\to|x|<1$$

$$e^{\pi t}>1\ ;\ e^{-\pi t}<1$$

$$\frac{1}{1-e^{-\pi t}}=1+e^{-\pi t}+e^{-2\pi t}+\cdots+e^{-n\pi t}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\pi t}$$

$$=\int_0^{+\infty}t\cdot e^{-\pi t}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\pi t}dt=\int_0^{+\infty}t\cdot\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+1)\pi t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}t\cdot e^{-(n+1)\pi t}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-t}{e^{(n+1)\pi t}}\cdot\frac{1}{(n+1)\pi}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)\pi t}\cdot\frac{dt}{(n+1)\pi}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{\pi^2}=\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{1}{\pi^2}=\frac{1}{6}$$

得分	
评阅人	

五、(本题 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数且 $f(0)=0$. 求证：

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant 4\int_0^1(1-x)^2|f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

并求使上式成为等式的 $f(x)$.

第五大题，分部积分法加柯西积分不等式，与讲义上第 16 页例三的柯西积分不等式方法一样，而分部积分法与讲义上第 28 页例六方法一样。

3.$F(x)$为连续函数，$t>0$，区域Ω是由椭圆抛物面$z=x^2+y^2$和球面$x^2+y^2+z^2=t^2$所围起来的部分。

定义三重积分$F(t)=\iiint_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)dxdydz=$,求$F(t)$的导数$F'(t)$

变式1：设$f(x)$连续且恒大于0，记$F(t)=\dfrac{\iiint_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)dV}{\iint_{D}f(x^2+y^2)d\sigma}$,$G(t)=\dfrac{\iint_{D}f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-t}^{t}f(x^2)dx}$

其中$\Omega(t)=\{(x,y,z)\,|x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$,$D(t)=\{(x,y)\,|x^2+y^2\leqslant t^2\}$

(1)讨论$F(t)$在$(0,+\infty)$上的单调性

(2)求证:$t>0$时,$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$

$\therefore$ 证 $F(t) > \frac{2}{\pi} G(t) \Longleftrightarrow$

$$\frac{\int_0^t r^2 f(r^2)\,dr}{\int_0^t r f(r^2)\,dr} > \frac{\int_0^t r f(r^2)\,dr}{\int_0^t f(r^2)\,dr}$$

$$\Longleftrightarrow \int_0^t r^2 f(r^2)\,dr \int_0^t f(r^2)\,dr > \left(\int_0^t r f(r^2)\,dr\right)^2$$

积分型柯西 $\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx \geq \left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2$

$f(x) = r\sqrt{f(r^2)}$ $g(x) = \sqrt{f(r^2)}$

若取等,则 $r\sqrt{f(r^2)} = k\sqrt{f(r^2)}$ k 比例系数

$\therefore$ $r = k$ X

$\therefore$ 等号无法取到

$\therefore$ $F(t) > \frac{2}{\pi} G(t)$

6.设 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$, $I=\iint_D f(x,y)\,dxdy$,其中函数 $f(x,y)$ 在 D 上有连续的二阶偏导数,若对任何 x,y 有 $f(0,y)=f(x,0)=0$,且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\leqslant A$,求证:$I\leqslant \frac{A}{4}$

6. $g(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1-x)\cdot(1-y)$ $x\cdot y$

$$\iint_D \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1-x)(1-y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot(1-x)\cdot(1-y)\Big|_{y=0}^{y=1} + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(1-x)\,dy\right)dx$$

$u(x)$

$$f(0,y) = f(x,0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f(0,y)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial f(x,0)}{\partial x}$$

$$= \iint_D \frac{\partial f}{\partial x}(1-x)\,dxdy = \int_0^1 \left(f\cdot(1-x)\Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy$$

$$= \iint_D f(x,y)\,dxdy = I$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \leq A$ $I \leq A\cdot\iint_D (1-x)(1-y)\,dxdy = A\cdot\left(\int_0^1(1-x)\,dx\right)^2 = \frac{A}{4}$

得分	
评阅人	

六、(本题 14 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_0=\frac{1}{3}$, $x_{n+1}=\frac{x_n^2}{1-x_n+x_n^2}, n\geqslant 0$. 证明:无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ 收敛并求其和.

第六大题,单调有界原理加裂项,与讲义上第 30 页第二大题以及第六大题方法一样

二、(14分) 设 $x_1=2021, x_n^2-2(x_n+1)x_{n+1}+2021=0(n\geqslant 1)$

证明数列 $\{x_n\}$ 收敛,并求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n=$

六、（14分）设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为正实数列，满足：$a_1=b_1=1$且$b_n=a_nb_{n-1}=2$，

$n=2,3,\ldots$。又设$\{b_n\}$为有界数列，证明级数$\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{a_1\ldots a_n}$收敛，并求该级数的和

二、$x_1=2021$ $x_n^2-2(x_n+1)x_{n+1}+2021=0\ (n\geq1)$

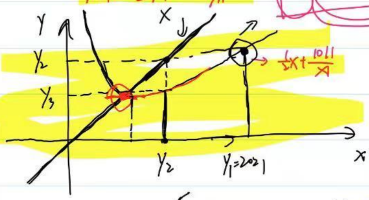
数列单调有界性

$$x_{n+1}=\frac{x_n^2+2021}{2(x_n+1)}=\frac{(x_n^2+2x_n+1)-2x_n-2+2022}{2(x_n+1)}$$

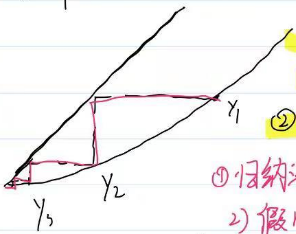
$\Rightarrow x_{n+1}=\frac{(x_n+1)}{2}-1+\frac{1011}{x_n+1}$

$\Rightarrow x_{n+1}+1=\frac{(x_n+1)}{2}+\frac{1011}{x_n+1}$ 令 $x_n+1=y_n$

$\Rightarrow y_{n+1}=\frac12 y_n+\frac{1011}{y_n}\Rightarrow x=\frac12 x+\frac{1011}{x}$



$x_1=2021\Rightarrow y_1=2022$



① $y_{n+1}=\frac12 y_n+\frac{1011}{y_n}\geq2\sqrt{\frac12 y_n\cdot\frac{1011}{y_n}}=\sqrt{2022}$

$\{y_n\}$有下界

② $y_{n+1}-y_n=\frac{1011}{y_n}-\frac{y_n}{2}=\frac{2022-y_n^2}{2y_n}<0$

①归纳法证 $y_n>\sqrt{2022}\Rightarrow y_1=2022>\sqrt{2022}$ 1)

2)假$n=k$ $y_k>\sqrt{2022}\Rightarrow y_{k+1}=\frac12 y_k+\frac{1011}{y_k}>\sqrt{2022}$

∴ $\{y_n\}$单减有界 ∴ $\{y_n\}$收敛

设 $\lim_{n\to\infty}y_n=a\Rightarrow\lim_{n\to\infty}y_{n+1}=a=\lim_{n\to\infty}\frac12 y_n+\frac{1011}{y_n}=\frac12 a+\frac{1011}{a}$

$\Rightarrow a=\sqrt{2022}\Rightarrow x_n=\sqrt{2022}-1$

六、$\{a_n\}$ $\{b_n\}$ 正 $a_1=b_1=1$, $a_nb_{n-1}-2=b_n$, $n=2,3,\cdots$ $\{b_n\}$有界

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$ 收敛. 和

分：特殊值、 $a_n=\frac{b_n+2}{b_{n-1}}\Rightarrow$ 令$\{b_n\}=1\Rightarrow a_n=3\ (n\geq2)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}=1+\frac13+\frac{1}{3\cdot3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots$

$=\frac{1}{1-\frac13}=\boxed{\frac32}$ (2)

$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}=\frac{f(n-1)}{a_1a_2\cdots a_{n-1}}-\frac{f(n)}{a_1a_2\cdots a_n}$ ☆ 裂项☆

$=\frac{f(n-1)\cdot a_n-f(n)}{a_1\cdots a_n}\Rightarrow a_n\cdot b_{n-1}-2=b_n\ (n\geq2)$ a_2

$=\left(\frac{b_{n-1}}{a_1\cdots a_{n-1}}-\frac{b_n}{a_1a_2\cdots a_n}\right)\cdot\frac12$

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}=\frac{1}{a_1}+\frac12\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{b_{k-1}}{a_1\cdots a_{k-1}}-\frac{b_k}{a_1\cdots a_k}\right)$

$=\frac{1}{a_1}+\frac12\cdot\frac{b_1}{a_1}-\frac12\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_1\cdots a_n}$

$=\frac32-\frac12\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_1\cdots a_n}\leq\frac32$ ↑