北 京 交 通 大 学 期 中 考 试 试 题

课程名称：数学分析　　学年学期：2020 — 2021 学年第一学期

课程编号：70L167Q　　开课学院：理学院

学生姓名：________　　学生学号：________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
阅卷人										

一. (10分) 判断题, 在( )内划$\surd$或 $\times$.

(1) 任意两个不相等的无理数之间必有一个有理数. (　)

(2) 任意数列都有收敛的子列. (　)

(3) 闭区间上的单调函数在区间内部任意一点左右极限均存在. (　)

(4) 有理数点为狄利克雷函数的第二类间断点. (　)

(5) 初等函数在其定义区间上是一致连续的. (　)

二. (15分) 判断以下数列极限是否存在并说明理由, 若存在求其极限.

(1) $a_1=\sqrt{2},\cdots,a_n=\sqrt{2a_{n-1}}$; (2) $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$; (3) $a_n=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$.

三. (15分) 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$; (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x+1}$;

四. (10分) f, g 为 D 上的有界函数, 证明

$$\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\} \le \inf_{x\in D} f(x) + \sup_{x\in D} g(x).$$

五. (10分) 设 $a_1, \cdots, a_m$ 为 m 个正数, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n+\cdots+a_m^n} = \max\{a_1, \cdots, a_m\}.$$

六. (10分) 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$有界.

七. (10分) 设 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, 证明: 存在 $\delta > 0$, 当 $x_0 - \delta < x_1 < x_0$, $x_0 < x_2 < x_0 + \delta$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$.

八. (10分) 证明 $\sqrt[3]{x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

九. (10分) f 为 $[0,1]$ 上的连续函数, $f(0)=0$, $f(1)=1$ 且 $f(f(x))=x$,
证明: (1) f 为单射; (2) $f(x)=x$.