第十六届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案
(非数学 B 类, 2025 年 4 月 12 日)

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满分	30	10	12	12	12	12	12	100
得分								

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 30 分，每小题 6 分)

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1-\frac{x^2+y^2}{2}}{(x^2+y^2)^2} = -\dfrac{1}{8}$.

(2) 设$a\neq 0$, 函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{3x}}{ax}, & x>0,\\ b+2\tan^5 x, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在点$x=0$处连续，则$ab=\dfrac{3}{2}$.

(3) 设数列 $\{a_n\}$满足 $a_1=2$, 且点 $(\sqrt{a_{n+1}}, \sqrt{a_n})$ $(n\geqslant 1)$ 都在直线 $x-y-\sqrt{2}=0$ 上, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{(n+1)^2} = 2$.

(4) 设函数$z=xe^x(1+ye^y)$, 则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)} = 4e^2$.

(5) 函数$f(x,y,z)=x-2y+3z$满足条件$x^2+y^2+z^2=1$的最大值为$\sqrt{14}$.

得分	
评阅人	

二、(本题 10 分) 假设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$ 且对于 $x \geqslant 0$, 有 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)+1}$.

证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 且不大于 $\dfrac{\pi}{2}$.

解答. 对于 $x \geqslant 0$, 因为 $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 是单调递增的函数. .... (3 分)

当 $x>0$ 时, $f(x)>f(0)=0$,

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\,dt=\int_0^x \frac{1}{t^2+f^2(t)+1}\,dt \leqslant \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt=\arctan x.$$

.... (8 分)

所以 $f(x) \leqslant \arctan x$. 由于 $f(x)$ 单调递增且有上界, 所以极限存在, 且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

.... (10 分)

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、(本题 12 分) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{1+\tan^3 x}dx$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{1+\cot^3 x}dx$. 证明: $I=J$, 并求该积分的值.

解答. 作变换 $x=\frac{\pi}{2}-t$ 得

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{1+\tan^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t\cos^2 t}{1+\cot^3 t}dt = J. \end{aligned}$$

.... (5 分)

注意到

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^3 x\sin^2 x\cos^2 x}{1+\tan^3 x}dx.$$

可得

$$\begin{aligned} 2I = I+J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{1+\tan^3 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^3 x\sin^2 x\cos^2 x}{1+\tan^3 x}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\,dx \\ &= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4x)\,dx \\ &= \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

故, $I=\frac{\pi}{32}$. .... (12 分)

得分	
评阅人	

四、(本题 12 分) 求微分方程 $\dfrac{yy''-y'^2}{y^2}=\ln y$ 的通解.

解答. 方法1. 原方程变形为 $(\dfrac{y'}{y})'=\ln y$. 从而, $(\ln y)''=\ln y$. 令$z=\ln y$, 则

$$z''=z.$$

…………………………………………………………… (4 分)

令$z'=u$, 则$z''=u\frac{du}{dz}$. 代入方程, 得

$$u\frac{du}{dz}=z.$$

积分得

$$u^2=z^2+C_1.$$

于是,

$$z'=\pm\sqrt{z^2+C_1},$$

即

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2+C_1}}=\pm dx.$$

…………………………………………………………… (8 分)

积分得

$$\ln|z+\sqrt{z^2+C_1}|=\pm x+C_2.$$

所以, 通解为

$$\ln|\ln y+\sqrt{\ln^2 y+C_1}|=\pm x+C_2,$$

其中C_1,C_2是任意常数. …………………………………… (12 分)

方法2. 原方程变形为 $(\dfrac{y'}{y})'=\ln y$. 从而, $(\ln y)''=\ln y$. 令$z=\ln y$, 则

$$z''=z.$$

…………………………………………………………… (4 分)

上述方程为二阶常系数齐次线性方程, 其通解为

$$z=C_1e^x+C_2e^{-x},$$

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

其中C_1, C_2是任意常数. .... (10 分)

将$z = \ln y$带入上式可得原方程的通解为

$$\ln y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

.... (12 分)

得分	
评阅人	

五、(本题 12 分) 讨论级数

$$1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^p}+\cdots$$

当$p\geqslant 1$时的敛散性.

解答. 当$p=1$时,级数是交错级数:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots,$$

根据 Leibniz判别法, 可知该级数收敛.

又级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$发散, 所以$p=1$时级数条件收敛.

.... (6 分)

当$p>1$时, 对级数加括号,

$$\left(1-\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4^p}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^p}\right)+\cdots,$$

这是由发散级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$与收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^p}$逐项相减得到的级数, 因而发散, 所以原级数发散.

综上所述, 所给级数当$p=1$时条件收敛,当$p>1$时发散. .... (12 分)

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

六、(本题 12 分) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 为 $n\times n$ 阶实正定矩阵, $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^n a_{ii}$ 为矩阵 A 的迹. 证明:

(1) $\mathrm{tr}\left((A+B)^2\right)\geqslant \mathrm{tr}(A^2)+\mathrm{tr}(B^2)$;

(2) $\mathrm{tr}\left((A+B)^3\right)\geqslant \mathrm{tr}(A^3)+\mathrm{tr}(B^3)$.

证明. (1) 由 $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$ 可得

$$\mathrm{tr}(A+B)^2=\mathrm{tr}(A^2)+\mathrm{tr}(B^2)+\mathrm{tr}(AB+BA).$$

而 $\mathrm{tr}(AB+BA)=2\mathrm{tr}(AB)$, 所以只需证明 $\mathrm{tr}(AB)\geqslant 0$ 即可. ...... (3 分)

因为 A,B 为正定矩阵, 所以存在可逆矩阵 P,Q,使得 $A=P^TP$, $B=Q^TQ$.

于是, $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(P^TPQ^TQ)=\mathrm{tr}(PQ^TQP^T)=\mathrm{tr}((QP^T)^T(QP^T))\geqslant 0$.

所以 $\mathrm{tr}(A+B)^2\geqslant \mathrm{tr}(A^2)+\mathrm{tr}(B^2)$. .... (6 分)

(2) 由$(A+B)^3=A^3+ABA+BA^2+B^2A+A^2B+AB^2+BAB+B^3$, 类似 (1) 的证明, 只需证

$$3\mathrm{tr}(A^2B)+3\mathrm{tr}(AB^2)\geqslant 0.$$

.... (9 分)

而 A^2 为正定阵, 所以由 (1) 的证明过程可知,

$$\mathrm{tr}(A^2B)\geqslant 0.$$

类似地, 亦有

$$\mathrm{tr}(AB^2)\geqslant 0.$$

所以

$$\mathrm{tr}(A+B)^3\geqslant \mathrm{tr}(A^3)+\mathrm{tr}(B^3).$$

.... (12 分)

得分	
评阅人	

七、(本题 12 分) 设$f(x)$是$[-1,1]$上的二阶可导的奇函数，证明：存在$\xi\in(-1,1)$, 使得

$$f''(\xi)-f'(\xi)+f(1)=0.$$

解答. 因为$f(x)$为奇函数, 所以$f(0)=0$，且$f'(x)$为偶函数. .... (4 分)

记$a=f(1)$, 考虑$F(x)=f(x)-ax$, 则$F(x)$在$[-1,1]$上可导, $F'(x)=f'(x)-a$, 且$F(0)=F(1)=0$. 对$F(x)$在$[0,1]$上利用Rolle定理, 存在$x_0\in(0,1)$, 使得$F'(x_0)=0$, 即$f'(x_0)=a$.

注意到$f'(x)$为偶函数, 所以$f'(-x_0)=f'(x_0)=a$. .... (8 分)

设$G(x)=\mathrm{e}^{-x}[f'(x)-a]$, 则$G'(x)=\mathrm{e}^{-x}[f''(x)-f'(x)+a]$, 且

$$G(-x_0)=\mathrm{e}^{x_0}[f'(-x_0)-a]=0,$$
$$G(x_0)=\mathrm{e}^{-x_0}[f'(x_0)-a]=0.$$

对$G(x)$在$[-x_0,x_0]$上利用Rolle定理, 存在$\xi\in(-x_0,x_0)$, 使得$G'(\xi)=0$, 即

$$f''(\xi)-f'(\xi)+f(1)=0.$$

.... (12 分)