2023 年全国大学生数学竞赛非数 B 类卷子点评

得分	
评阅人	

一、(本题 30 分，每小题 6 分)

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^{2x-1}=$ ______.

(2) 设 $z=f(x^2-y^2,xy)$, 且 $f(u,v)$ 有连续的二阶偏导数，则 $\dfrac{\partial z^2}{\partial x\partial y}=$ ______.

(3) 设曲线 $y=\ln(1+ax)+1$ 与曲线 $y=2xy^3+b$ 在 $(0,1)$ 处相切，则 $a+b=$ ______.

(4) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1+\arctan(xy)$ 所决定，则 $y'(0)=$ ______.

(5) 计算 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}\dfrac{\cos y}{y}\mathrm{d}y=$ ______.

第一题，e 指数的定义，讲过好多次了没啥好说的

6. 先对后指：$\lim\limits_{x\to0} f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to0} e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to0} g(x)\ln f(x)}$ $\left(\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e\right)$

第二题，多元函数求微分，与讲义上第 9 页例一变式三方法完全一样。

变式3:设$f(u,v)$有一阶连续偏导数，$z=f(x^2-y^2,\cos xy),x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,

求证：$\cos\theta\dfrac{\partial z}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\sin\theta\dfrac{\partial z}{\partial\theta}=2x\dfrac{\partial z}{\partial u}-y\dfrac{\partial z}{\partial v}\sin xy$

变式3: $f_x'(x,y)\neq 0$ 分母 0

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$ $x<^{z}_{y}$

求 $\dfrac{\partial^2 x}{\partial y^2}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2}-\left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial z\partial y}\right)^2=0$

$dz=f_1'dx+f_2'dy$

$\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{f_2'}{f_1'}$ $\dfrac{dx}{dz}=\dfrac{1}{f_1'}$

$\dfrac{\partial^2 x}{\partial y^2}=\dfrac{\partial\left(-\frac{f_2'}{f_1'}\right)}{\partial y}$

$\dfrac{x^2+y^2}{r^5}$ $=-\dfrac{\left(f_{22}''+f_{21}''\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\right)f_1'-f_2'\left(f_{11}''\frac{\partial x}{\partial y}+f_{12}''\right)}{(f_1')^2}$

$=-\dfrac{2f_{12}''f_1'f_2'-f_{11}''(f_2')^2-f_{22}''(f_1')^2}{(f_1')^3}$

同理 $\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2}=\dfrac{-f_{11}''}{(f_1')^3}$ $\dfrac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}=\dfrac{f_{11}''f_2'-f_{12}''f_1'}{(f_1')^3}$

$\sim\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 与 f_1' f_2' f_{12}'' f_{22}'' f_{11}'' 关系

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_2'$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{2f_{12}''f_1'f_2'-f_{11}''(f_2')^2-f_{22}''(f_1')^2}{(f_1')^3}\cdot\dfrac{-f_{11}''}{(f_1')^3}$

$x-cy$ $v=x+cy$ $-\left(\dfrac{f_{11}''f_2'-f_{12}''f_1'}{f_1'^3}\right)^2$

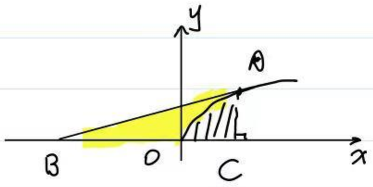
$+\dfrac{\partial w}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$ $=\dfrac{-1}{(f_1')^6}\left(\cancel{2f_{12}''f_{11}''f_1'f_2'}-\cancel{f_{11}''^2f_2'^2}-f_{11}''f_{22}''(f_1')^2\right.$

$\left.+\cancel{f_{11}''^2f_2'^2}+f_{12}''^2f_1'^2-\cancel{2f_{11}''f_{12}''f_1'f_2'}\right)$

$+\dfrac{\partial w}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}$ $=\dfrac{f_{11}''f_{22}''-(f_{12}'')^2}{(f_1')^4}=0$

第三题，相切问题，与讲义上第 20 页例二变式二方法一样

变式2：过曲线$y=\sqrt[3]{x}\,(x>0)$上的点A作切线，使该切线与曲线及x轴所围成的平面图形的面积为$\dfrac{3}{4}$，求点A的坐标



变式2：

解：$A(t,\sqrt[3]{t})$

$y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$\therefore\ y-\sqrt[3]{t}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}(x-t)$

$\therefore\ 0 \qquad x_0=-2t$

$\therefore\ B(-2t,0)$

$\therefore\ S=S_{\triangle ABC}-S_{曲OAC}$

$=\frac{1}{2}\sqrt[3]{t}\cdot 3t-\int_0^t\sqrt[3]{x}\,dx$

$=\frac{3}{4}t\sqrt[3]{t}=\frac{3}{4}$

$\therefore\ t^{\frac{4}{3}}=1 \qquad t=1$

$\therefore\ A(1,1)$ ✓

第四题，隐函数求导，与讲义上第 8 页例一方法一样

1.设$y=y(x)$由$x=\displaystyle\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)$所确定，则$\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}=$

解：对x求导 $1=\underline{\sin^2(\frac{\pi}{4}(y-x))}(\frac{dy}{dx}-1)$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{(1+\sin^2(\frac{\pi}{4}(y-x))}$

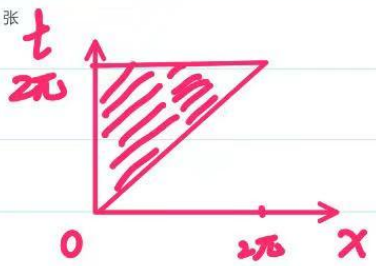
$x=0$ 代入原方程 $y=1$ $(0,1)$

$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}}+1=3$

第五题，二重积分交换次序，与讲义上第 16 页例一方法完全一样

1.计算积分$\displaystyle\int_0^{2\pi}x\int_x^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{t^2}dtdx$

例1：$I=\int_0^{2\pi} x\,dx \int_x^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$



解：$\begin{cases} 0\le x\le 2\pi \\ x\le t\le 2\pi \end{cases}$

$\begin{cases} 0\le t\le 2\pi \\ 0\le x\le t \end{cases}$

$\therefore I=\int_0^{2\pi} dt\int_0^t x\cdot\frac{\sin^2 t}{t^2}\,dx$

$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin^2 t\,dt$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

得分	
评阅人	

二、(本题 14 分) 设曲线 $y=3ax^2+2bx+\ln c$ 经过 $(0,0)$ 点，且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时 $y\geqslant 0$. 设该曲线与直线 $x=1$, x 轴所围图形的平面图形 D 的面积为 1. 试求常数 a,b,c 的值，使得 D 绕 x 轴一周后，所得旋转体的体积最小.

第二大题，空间解析几何，完全押中题目，仅仅是改了一个常数，与讲义上第 20 页例五完全一样！

5.设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $y\geqslant 0$,

又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$,

试确定 a,b,c，使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积最小

例5：

解：绕 x 轴旋转一周的图形体积

$V=\pi\int_a^b f(x)^2dx$

（绕 y 轴 体积 $V=2\pi\int_a^b x\cdot f(x)\,dx$）

$\because$ 过原点 $\therefore 2\ln C=0 \quad C=1$

又 $\because$ 围成面积为 $\frac{1}{3}$

$\therefore \int_0^1(ax^2+bx)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}$

$\therefore b=\frac{2}{3}(1-a)$

$V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2dx$

$=\pi(\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2)$

$=\underline{\pi(\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}(a-1)^2)}$

求 $V_{min}\Rightarrow\frac{dV}{da}=0 \quad a=-\frac{5}{4} \quad b=\frac{3}{2}$

验 $\frac{dV}{da}$ 单调性 $\left.\frac{d^2V}{da^2}\right|_{a=-\frac{5}{4}}=\pi(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+\frac{8}{27})$

$=\frac{4}{135}\pi>0$

$\therefore a=-\frac{5}{4}.\ b=\frac{3}{2} \quad c=1 \quad V_{min}$

得分	
评阅人	

三、(本题 14 分) 解方程

$$(x^2+y^2+3)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x(2y-\frac{x^2}{y}).$$

第三大题，先凑微分，然后准齐次方程求解，与讲义上第 24 页例四变式二完全一样

变式2:求方程$(x-2\sin y+3)dx-(2x-4\sin y+3)dy=0$的通解

变式2：求方程 $(x-2\sin y+3)dx-(2x-4\sin y+3)\cos y\,dy=0$

$\cos y\,dy=d\sin y$

令 $z=\sin y$，则：

$\frac{dz}{dx}=\frac{x-2z+3}{2x-4z-3}$

令 $x-2z=u$ $\quad 1-\frac{2dz}{dx}=\frac{du}{dx}$

$\therefore \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{du}{dx}=\frac{u+3}{2u-3}$

$\therefore \frac{du}{dx}=\frac{9}{3-2u}$

$\therefore (3-2u)du=9dx$

$\therefore 3u-u^2=9x+C$ $\quad$ 代入z,u

$\therefore 3(x-2\sin y)-(x-2\sin y)^2=9x+C$

得分	
评阅人	

四、(本题 14 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数.

第四大题，求收敛域与和函数，非常经典的问题，与讲义上第 22 页例四完全一样。

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\cdot x^{2n-2}$，求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和

① 求收敛区间 $\to(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ $\quad \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2}$

$S(\frac{x}{\sqrt{2}})=\sum_{n=1}^{\infty}2n-1\cdot(\frac{x}{\sqrt{2}})^{2n-2}\cdot\frac{1}{2}$ $\qquad S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\cdot x^{2n-2}\cdot\frac{1}{2}$

$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}\right)'\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\frac{x}{1-x^2}\right)'$

$=\frac{1+x^2}{2(1-x^2)^2}\Rightarrow S(\frac{x}{\sqrt{2}})=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$，$\forall x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})=S_1(x)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}=S_1(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{10}{9}$

得分	
评阅人	

五、(本题 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导且 $f(0)>0$, $f(1)>0$, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明:

(1) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上至少有两个零点;

(2) 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi)+3f^3(\xi)=0$.

第五大题，零点定理与罗尔定理的构造，反解微分方程可以拿到一半的分数

得分	
评阅人	

六、(本题 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数且 $f(0)=0$. 求证:

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 (1-x)^2|f'(x)|^2\mathrm{d}x,$$

并求使上式成为等式的 $f(x)$.

第六大题，分部积分法加柯西积分不等式，与讲义上第 16 页例三的柯西积分不等式方法一样，而分部积分法与讲义上第 28 页例六方法一样。

3. $F(x)$ 为连续函数，$t>0$，区域 Ω 是由椭圆抛物面 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=t^2$ 所围起来的部分。

定义三重积分 $F(t)=\iiint_\Omega f(x^2+y^2+z^2)dxdydz=$, 求 $F(t)$ 的导数 $F'(t)$

变式1:设 $f(x)$ 连续且恒大于0，记 $F(t)=\dfrac{\iiint_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)dV}{\iint_D f(x^2+y^2)d\sigma}$, $G(t)=\dfrac{\iint_D f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)dx}$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\,|x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$, $D(t)=\{(x,y)\,|x^2+y^2\leqslant t^2\}$

(1)讨论 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性

(2)求证: $t>0$ 时, $F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$

$\because$ 证 $F(t)>\frac{2}{\pi}G(t) \Longleftrightarrow$

$\therefore \dfrac{\int_0^t r^2 f(r^2)\,dr}{\int_0^t r f(r^2)\,dr} > \dfrac{\int_0^t r f(r^2)\,dr}{\int_0^t f(r^2)\,dr}$

$\Longleftrightarrow \int_0^t r^2 f(r^2)dr \int_0^t f(r^2)dr > \left(\int_0^t r f(r^2)\,dr\right)^2$

积分型柯西 $\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx \geq \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$

$f(x)=r\sqrt{f(r^2)}$ $g(x)=\sqrt{f(r^2)}$

若取等,则 $r\sqrt{f(r^2)}=k\sqrt{f(r^2)}$ k 比例系数

$\therefore r=k$ X

等号无法取到

$\therefore F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$

6.设$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，$I=\iint_D f(x,y)dxdy$,其中函数$f(x,y)$在$D$上有连续的二阶偏导数,若对任何$x,y$有$f(0,y)=f(x,0)=0$，且$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\leqslant A$，求证:$I\leqslant\frac{A}{4}$

6. $g(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1-x)\cdot(1-y)$ $\quad x\cdot y$

$\iint_D \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}}_{u(x)}(1-x)\overbrace{(1-y)}^{v(x)}\,dxdy=\int_0^1\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot(1-x)\cdot(1-y)\Big|_{y=0}^{y=1}+\frac{\partial f}{\partial x}(1-x)dy\right)dx$

$f(0,y)=f(x,0)=0\Rightarrow\frac{\partial f(0,y)}{\partial y}=0=\frac{\partial f(x,0)}{\partial x}$

$=\iint_D\frac{\partial f}{\partial x}(1-x)\,dxdy=\int_0^1\left(f\cdot(1-x)\Big|_{x=0}^{x=1}+\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy$

$=\iint_D f(x,y)\,dxdy=I$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\leq A$ $\quad I\leq A\cdot\iint_D(1-x)(1-y)\,dxdy=A\cdot\left(\int_0^1(1-x)dx\right)^2=\frac{A}{4}$