

第十五届全国大学生数学竞赛决赛试题
及参考解答
(非数学类, 2024 年 04 月 20 日)

一、填空题(本题满分 30 分, 每小题 6 分)

(1) 设 $f(x) = \begin{cases} 2e^x(x - \cos x), & x > 0 \\ x^2 + 3x + a, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $a =$ _____.【解】 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 的左、右极限分别为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2e^x(x - \cos x)) = a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x(x - \cos x) = -2,$$

所以当且仅当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 因此 $a = -2$.(2) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+2)}{\sin \pi x} =$ _____.

【解】 利用 L'Hospital 法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+2)}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x+1)}{\pi \cos \pi x} = \frac{2}{\pi}.$$

(3) 设函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $f(2x - \frac{z}{y}, 2y - \frac{z}{x}) = 2024$ 确定的隐函数, 其中 $f(u, v)$ 具有连续偏导数, 且 $xf_u + yf_v \neq 0$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.【解】 令 $F(u, v) = f(u, v) - 2024$, 则 $xF_u + yF_v \neq 0$. 根据隐函数的求偏导数公式, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2F_u + \frac{z}{y}F_v}{\frac{1}{y}F_u + \frac{1}{x}F_v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\frac{z}{y^2}F_u + 2F_v}{\frac{1}{y}F_u + \frac{1}{x}F_v}.$$

1

公众号 · 全国大学生数学竞赛

2024 年 04 月决赛试题

所以 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{z}{y}F_u + 2xF_u}{\frac{1}{y}F_u + \frac{1}{x}F_v} + \frac{\frac{z}{y}F_u + 2yF_v}{\frac{1}{y}F_u + \frac{1}{x}F_v} = z + 2xy$.(4) 在平面 $x + y + z = 0$ 上, 与直线 $\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ 都相交的直线的单位方向向量为 _____.

【解】 将所给平面的方程分别与这两直线的方程联立求解方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - 1 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

得平面与这两直线的交点分别为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$ 和 $(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 因此过这两点的直线的方向向量为

$$\left(0 - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - (-1)\right) = -\frac{1}{2}(1, 2, -3).$$

相应的单位方向向量为 $\pm \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, -3)$.【注】 对不带正、负号或“ \pm ”符号的答案, 也给满分.(5) 定积分 $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx$ 的值等于 _____.【解】 因为 $(1-x)^4 = (1+x^2-2x)^2 = (1+x^2)^2 - 4x(1+x^2) + 4x^2$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^4(1+x^2)dx - 4 \int_0^1 x^5dx + 4 \int_0^1 \frac{(x^6+1)-1}{1+x^2}dx \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 4 \int_0^1 (x^4 - x^2 + 1)dx - 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{22}{7} - \pi. \end{aligned}$$

二、(本题满分 12 分) 已知曲线 $L: \begin{cases} x = f(t), \\ y = \cos t, \end{cases} \left(0 \leq t < \frac{\pi}{2}\right)$, 其中 $f(t)$ 具有连续导数, 且 $f(0) = 0$. 设当 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 时, $f'(t) > 0$, 且曲线 L 的切线与 x 轴的交点到

2

公众号 · 全国大学生数学竞赛

2024 年 04 月决赛试题

切点的距离恒等于切点与点 $(-\sin t, 0)$ 之间的距离, 求函数 $f(t)$ 的表达式.【解】 利用参数方程求导法则, 得 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{\sin t}{f'(t)}$, 因此曲线 L 上任意点 $(x, y) = (f(t), \cos t)$ 处的切线方程为

$$Y - \cos t = -\frac{\sin t}{f'(t)}(X - f(t)). \quad \text{----- 4 分}$$

令 $Y = 0$, 可得此切线与 x 轴的交点为 $P(f(t) + f'(t) \cot t, 0)$. 根据题设, 切点与交点 P 的距离恒等于切点与点 $(-\sin t, 0)$ 之间的距离, 故有

$$[f(t) + f'(t) \cot t - f(t)]^2 + \cos^2 t = (f(t) + \sin t)^2 + \cos^2 t.$$

注意到当 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 时 $f'(t) > 0$, 所以 $f(t) > f(0) = 0$, 故将上式整理可得

$$f'(t) - \tan t f(t) = \sec t - \cos t. \quad \text{----- 4 分}$$

这是关于 $f(t)$ 的一阶线性微分方程, 利用求解公式得

$$f(t) = e^{\int \tan t dt} \left(\int (\sec t - \cos t) e^{-\int \tan t dt} dt + C \right) = \frac{1}{2} (t \sec t - \sin t) + C,$$

由 $f(0) = 0$ 得 $C = 0$, 因此

$$f(t) = \frac{1}{2} (t \sec t - \sin t), \quad 0 \leq t < \frac{\pi}{2}. \quad \text{----- 4 分}$$

三、(本题满分 12 分) 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2n\theta}{\sin \theta} d\theta$.【解】 令 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2n\theta}{\sin \theta} d\theta$, 则 $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, 且 $n > 1$ 时, 有

$$a_n - a_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2n\theta - \sin 2(n-1)\theta}{\sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n-1)\theta d\theta = (-1)^{n-1} \frac{2}{2n-1}.$$

所以

$$a_n = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} \right). \quad \text{----- 4 分}$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} \right) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. ----- 4 分四、(本题满分 12 分) 设 Σ_1 是以 $(0, 4, 0)$ 为顶点且与曲面 $\Sigma_2: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 1$ ($y > 0$) 相切的圆锥面, 求 Σ_1 与 Σ_2 所围成的空间区域的体积.【解】 易知, Σ_1 与 Σ_2 的交线位于平面 $y_0 = 1$ 上. ----- 2 分设该平面与 Σ_1 , Σ_2 围成的空间区域分别记为 Ω_1 与 Ω_2 , 由于 Ω_1 是底面圆的

3

公众号 · 全国大学生数学竞赛

2024 年 04 月决赛试题

半径为 $\frac{3}{2}$ 且高为 3 的圆锥体, 所以它的体积为 $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{3}{2} \right)^2 \cdot 3 = \frac{9\pi}{4}$.

----- 4 分

又 Ω_2 的体积为

$$V_2 = \iiint_{\Omega_2} dv = \int_1^2 dy \iint_{x^2+z^2 \leq \left(1-\frac{y^2}{4}\right)} dx dz = \pi \int_1^2 3 \left(1 - \frac{y^2}{4} \right) dy = \frac{5\pi}{4},$$

----- 4 分

因此, Σ_1 与 Σ_2 所围成的空间区域的体积为 $V = \frac{9\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} = \pi$. ----- 2 分五、(本题满分 12 分) 设 n 阶实矩阵 A , B 满足 $AB = A + B$, 且存在 n 阶可逆实矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵. 证明: $P^{-1}BP$ 也为对角矩阵.【证】 设 $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 且 $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, 则 $Ap_i = \lambda_i p_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. 所以 P 的列向量 $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为 A 的对应于特征值 λ_i 的特征向量.

----- 4 分

因为 $AB = A + B$, 所以 $(A - E)(B - E) = E$, 可知 $|A - E| \neq 0$, 由此说明 $\lambda_i \neq 1$.注意到 $(A - E)p_i = (\lambda_i - 1)p_i$, 所以 $(A - E)^{-1}p_i = \frac{1}{\lambda_i - 1}p_i$. ----- 4 分

又由于

$$ABp_i = Ap_i + Bp_i = \lambda_i p_i + Bp_i,$$

所以 $Bp_i = \lambda_i (A - I)^{-1}p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1}p_i$, 即 p_i 是 B 的属于特征值 $\frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1}$ 的特征向量. 因此

$$P^{-1}BP = \text{diag} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1}, \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1}, \dots, \frac{\lambda_n}{\lambda_n - 1} \right). \quad \text{----- 4 分}$$

六、(本题满分 12 分) 设数列 $\{a_n\}$ 定义为: $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{2}{3}$, 当 $n \geq 1$ 时, 满足

$$(n+1)a_{n+1} = 2a_n + (n-1)a_{n-1},$$

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n$ 的收敛域.【解】 利用归纳法易证: $0 < a_n < 1 (n \geq 1)$. ----- 4 分

4

公众号 · 全国大学生数学竞赛

2024 年 04 月决赛试题

因为 $0 < na_n < n (n \geq 1)$, 所以当 $|x| < 1$ 时, 由比较判别法及 $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ 绝对收敛,可知 $\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n$ 绝对收敛, 即 $\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n$ 在区间 $(-1, 1)$ 内收敛. ----- 4 分另一方面, 由 $(n+1)a_{n+1} > (n-1)a_{n-1}$ 可知, $\{2na_n\}$ 是严格递增数列, 且 $a_2 = \frac{2}{3} \neq 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n \neq 0$. 故当 $x = \pm 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n$ 发散. 因此 $\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n$ 的收敛域为 $(-1, 1)$. ----- 4 分七、(本题满分 10 分) (1) 证明: 对于任意的实数 $r > 0$, 存在唯一的 $t \in (\pi, 2\pi)$, 使得 $e^{-rt} - \cos t + r \sin t = 0$;(2) 设 (1) 中的方程所确定的隐函数为 $t = t(r)$, 证明: 当 $r > 0$, 且 $\pi < t < t(r)$ 时, 恒有 $r(\sin t - t \cos t) - t \sin t > 0$.【证】 (1) 记 $g(t) = e^{-rt} - \cos t + r \sin t$, 则 $g(t)$ 在区间 $[\pi, 2\pi]$ 上连续. 当 $r > 0$ 时, $g(\pi) = e^{-r\pi} + 1 > 0$, $g(2\pi) = e^{-2r\pi} - 1 < 0$, 根据介值定理, 存在 $\xi \in (\pi, 2\pi)$, 使得 $g(\xi) = 0$. ----- 3 分进一步, 注意到 $(e^{-rt} g(t))' = e^{-rt}(1+r^2)\sin t < 0$, 若存在 $t_1, t_2 \in (\pi, 2\pi)$, $t_1 \neq t_2$, 使得 $g(t_1) = g(t_2) = 0$, 则由 Rolle 定理, 存在 $\xi \in (\pi, 2\pi)$, 使得 $(e^{-rt} g(t))'|_{t=\xi} = 0$, 矛盾.所以, 对任意 $r > 0$, $g(t)$ 在 $(\pi, 2\pi)$ 内仅有惟一实根. ----- 2 分(2) 令 $F(t, r) = r h(t) - t \sin t$, 其中 $h(t) = \sin t - t \cos t$. 因为 $h(\pi) = \pi > 0$, 而 $h(2\pi) = -2\pi < 0$, 所以存在 $t_0 \in (\pi, 2\pi)$, 使得 $h(t_0) = 0$. 又 $h'(t) = t \sin t < 0 (\pi < t < 2\pi)$, 因此 t_0 是 $h(t)$ 在 $(\pi, 2\pi)$ 内惟一的零点.(a) 当 $\pi < t < t(r) \leq t_0$ 或 $\pi < t \leq t_0 < t(r)$ 时, $h(t) \geq 0$, 因而 $F(r, t) \geq -t \sin t > 0$;(b) 当 $t_0 < t < t(r) < 2\pi$ 时, $h(t) < 0$. 因为

$$e^{-rt}(1 - \cos t + r \sin t) > e^{-rt} g(t) \geq e^{-rt} g(t(r)) = 0,$$

所以 $r < \frac{1 - \cos t}{-\sin t}$. 于是 $F(r, t) > \frac{1 - \cos t}{-\sin t} h(t) - t \sin t = \frac{1 - \cos t}{-\sin t} (t + \sin t) > 0$.

----- 5 分

5

公众号 · 全国大学生数学竞赛