2009 年第一届全国大学生数学竞赛初赛

（非数学类）试卷

一、填空题(本题共 4 个小题，每题 5 分，共 20 分)：

(1) 计算 $\iint_D \dfrac{(x+y)\ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ =__________，其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数，满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)dx-2$，则 $f(x)$ =______.

(3) 曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是__________.

(4) 设 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ =__________.

第二题：(5 分)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$，其中 n 是给定的正整数.

第三题：(15 分)设函数 $f(x)$ 连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，$A$ 为常数，求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

第四题：(15 分)已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le \pi, 0\le y\le \pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界，试证：(1) $\oint\limits_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x=\oint\limits_L xe^{-\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\oint\limits_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x\ge \dfrac{5}{2}\pi^2$.

第五题：(10 分)已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

第六题：(10 分)设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点，当 $0\le x\le 1$ 时，$y\ge 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\dfrac{1}{3}$. 试确定 a,b,c 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

第七题：(15 分)已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$（$n$ 为正整数），且 $u_n(1)=\dfrac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和.

第八题：(10 分)求 $x\to 1-$ 时，与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

2010 年第二届全国大学生数学竞赛初赛

（非数学类）试卷

一、计算下列各题(本题共 5 个小题，每题 5 分，共 25 分，要求写出重要步骤)

(1) 设$x_n=(1+a)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中$|a|<1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

(3) 设$s>0$，求$I_n=\int_0^{+\infty}e^{-sx}x^n\,\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$.

(4) 设$f\left(t\right)$有二阶连续导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$g(x,y)=f\left(\dfrac{1}{r}\right)$，求$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(5) 求直线$l_1:\begin{cases}x-y=0\\z=0\end{cases}$ 与直线$l_2:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$的距离.

第二题：(15 分)设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶导数，并且

$$f''(x)>0,\ \lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,\ \lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0,$$

且存在一点x_0，使得$f(x_0)<0$. 证明：方程$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$恰有两个实根.

第三题: (15 分)设$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=2t+t^2\\y=\psi(t)\end{cases}$ $(t>-1)$所确定. 且$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，其中$\psi(t)$具有二阶导数，曲线$y=\psi(t)$与$y=\int_1^{t^2}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u+\dfrac{3}{2e}$在$t=1$处相切. 求函数$\psi(t)$.

第四题: (15 分)设 $a_n>0,\ S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，证明: (1) 当$\alpha>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$收敛; (2) 当$\alpha\le 1$，且$S_n\to\infty\left(n\to\infty\right)$时，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$发散.

第五题：(15 分)设l 是过原点、方向为(α,β,γ)（其中$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$）的直线，均匀椭球$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$（其中$0<c<b<a$，密度为 1）绕$l$旋转.

(1) 求其转动惯量；　(2) 求其转动惯量关于方向(α,β,γ)的最大值和最小值.

第六题：(15 分)设函数$\varphi(x)$具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线C上，曲线积分$\oint\limits_C\dfrac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$的值为常数.

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$. 证明: $\oint_L \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$；

(2) 求函数 $\varphi(x)$； (3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求 $\oint_C \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

2011 年第三届全国大学生数学竞赛初赛

（非数学类）试卷

一、计算下列各题(本题共 4 个小题，每题 6 分，共 24 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2\left(1-\ln(1+x)\right)}{x}$.

(2) 设 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(3) 求 $\iint\limits_D \operatorname{sgn}(xy-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\right\}$.

(4) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和。

第二题：(本题两问，每问 8 分，共 16 分)设 $\left\{a_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列，a,λ 为有限数，求证：

1．如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;

2．如果存在正整数 p，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$.

第三题：(15 分)设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数，且 $f(-1)=0$, $f(1)=1, f'(0)=0$，求证：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 x_0，使得 $f'''(x_0)=3$.

第四题：(15 分)在平面上，有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线，线密度为 ρ。在点 $(0,h)$ 处（其中 $h>0$）有一质量为 m 的质点。求射线对该质点的引力。

第五题：(15 分)设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F\left(z+\dfrac{1}{x}, z-\dfrac{1}{y}\right)=0$ 确定的隐函数，且具有连续的二阶偏导数，求证：

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=1 \text{ 和 } x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0.$$

第六题：(15 分)设函数 $f(x)$ 连续，a,b,c 为常数，Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$。记第一型曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S.$$

求证：$I=2\pi\int_{-1}^{1}f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u\right)\mathrm{d}u.$

2012 年第四届全国大学生数学竞赛初赛
(非数学类）试卷

一、简答下列各题(本题共 5 个小题，每题 6 分，共 30 分)

1．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n!\right)^{\frac{1}{n^2}}$．

2．求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0,\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1,π_2，使其中一个平面过点 $\left(4,-3,1\right)$．

3．已知函数 $z=u(x,y)e^{ax+by}$，且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，确定常数 a,b，使函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0.$

4．设 $u=u(x)$ 连续可微，$u(2)=1$，且 $\int\limits_L\left(x+2y\right)u\,\mathrm{d}\,x+\left(x+u^3\right)u\,\mathrm{d}\,y$ 在右半平面上与路径无关，求 $u(x)$．

5．求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}\,t.$

第二题：(10 分)计算 $\int_0^{+\infty}e^{-2x}\,|\sin x\,|\,\mathrm{d}\,x.$

第三题：(10 分)求方程 $x^2\sin\dfrac{1}{x}=2x-501$ 的近似解，精确到 0.001．

第四题：(12 分)设函数 $y=f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)>0,f(0)=0,f'(0)=0$．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3 u}$，其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处切线在 x 轴上的截距.

第五题：(12 分)求最小实数 C，使得满足 $\int_0^1|\,f(x)\,|\,\mathrm{d}\,x=1$ 的连续的函数 $f(x)$ 都有

$$\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}\,x\le C.$$

第六题：(12 分)设 $f(x)$ 为连续函数，$t>0.$ Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=t^2(t>0)$ 所围成起来的部分。定义 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}f\left(x^2+y^2+z^2\right)dV$，求 $F'(t)$．

第七题：(14 分)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数，

(1)若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)>0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

(2)若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

2013 年第五届全国大学生数学竞赛初赛
（非数学类）试卷

一、解答下列各题(共 4 小题,每小题 6 分,共 24 分)．

1．求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$．

2．证明广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x$不是绝对收敛的。

3．设$y=y(x)$由$x^3+3x^2y-2y^3=2$所确定，求$y(x)$的极值。

4．过曲线$y=\sqrt[3]{x}\left(x\geq 0\right)$上的点$A$作切线，使得该切线与曲线及$x$轴所围成的平面图形的面积为$\frac{3}{4}$。求点$A$的坐标。

第二题：(12 分)计算定积分$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x.$

第三题：(12 分)设$f(x)$在$x=0$处存在二阶导数$f''(0)$，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0.$证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$收敛。

第四题：(10 分)设$\left|f(x)\right|\leq\pi, f'(x)\geq m>0\left(a\leq x\leq b\right)$，证明：$\left|\int_a^b\sin f(x)\,\mathrm{d}\,x\right|\leq\frac{2}{m}.$

第五题：(14 分)设Σ是一个光滑封闭曲面，方向朝外，给定第二型的曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^3-x\right)\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z+\left(2y^3-y\right)\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,x+\left(3z^3-z\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

试确定曲面Σ，使得积分I的值最小，并求该最小值。

第 六 题 ： (14 分) 设 $I_a(r)=\int\limits_C\frac{y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y}{\left(x^2+y^2\right)^a}$, 其 中 a 为 常 数 ， 曲 线 C 为 椭 圆 $x^2+xy+y^2=r^2$，取正向。求极限$\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r).$

第七题：(14 分)判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$的敛散性，若收敛，求其和。

2014 年第六届全国大学生数学竞赛初赛
(非数学类）试卷

一 、填空题(共有 5 小题，每小题 6 分，共 30 分)

(1) 已知$y_1=e^x$和$y_2=xe^x$是齐次二阶常系数线性微分方程的解，则该微分方程是_____.

(2) 设有曲面$S: z=x^2+2y^2$和平面$\pi: 2x+2y+z=0$，则与π平行的S的切平面方程是____________________.

(3) 设$y=y(x)$由$x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)\mathrm{d}t$所确定，则$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$________.

(4) 设$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$，则$\lim_{n\to\infty}x_n=$____________.

(5) 已知$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$，则$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=$______.

第二题：(12 分)设n为正整数，计算$I=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x.$

第三题：(14 分)设函数$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数，且有正常数A,B使得$|f(x)|\le A, |f''(x)|\le B$，证明：对于任意$x\in[0,1]$，有$|f'(x)|\le 2A+\frac{B}{2}.$

第四题：(14 分) (1) 设一球缺高为h，所在球半径为R。证明该球缺的体积为$\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$，球冠的面积为$2\pi Rh.$

(2) 设球体$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\le 12$被平面$P: x+y+z=6$所截的小球缺为$\Omega$。记球缺上的球冠为$\Sigma$，方向指向球外，求第二型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

第五题：(15 分)设f在$[a,b]$上非负连续，严格单增，且存在$x_n\in[a,b]$使得

$$\left[f(x_n)\right]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[f(x)\right]^n\mathrm{d}x,\ \text{求}\ \lim_{n\to\infty}x_n.$$

第六题：(15 分)设$A_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$,求$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right).$

2015 年第七届全国大学生数学竞赛初赛
(非数学类）试卷

一、填空题（共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin 2\frac{\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)=$____________.

(2) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所决定，其中 $F(u,v)$ 具有连续偏导数，且 $xF_u+yF_v\neq 0$，则（结果要求不显含有 F 及其偏导数）$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$____.

(3) 曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为______.

(4) 函数 $f(x)=\begin{cases}3, x\in[-5,0),\\ 0, x\in[0,5)\end{cases}$ 在 $(-5,5]$ 的傅里叶级数 $x=0$ 收敛的值_____.

(5) 设区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为 $u(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$，则 $u(x)$ 的初等函数表达式为_______.

第二题：(12 分)设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程。

第三题：(12 分)设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导，且存在常数 α,β，使得对于 $\forall x\in(a,b)$，有 $f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x)$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导.

第四题：(14 分)求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数.

第五题：(16 分)设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0, \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=1$. 试证：

(1) $\exists x_0\in[0,1]$ 使得 $|f(x_0)|>4$；　　(2) $\exists x_1\in[0,1]$ 使得 $|f(x_1)|=4$.

第六题：(16 分)设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上有连续的二阶导数，$f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\le M$. 若 $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，证明：$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\le\dfrac{\pi\sqrt{M}}{4}$.

2016 年第八届全国大学生数学竞赛初赛
(非数学类）试卷

一、填空题(满分 30 分，每小题 5 分)

1．若$f(x)$在点$x=a$处可导，且$f(a)\neq 0$，则$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f(a+1/n)}{f(a)}\right]^n=$______.

2．若$f(1)=0, f'(1)$存在，则极限$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{\left(e^{x^2}-1\right)\sin x}=$__________.

3．设$f(x)$有连续导数，且$f(1)=2$. 记$z=f\left(e^x y^2\right)$，若$\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$，$f(x)$在$x>0$的表达式为______________.

4．设$f(x)=e^x\sin 2x$，则$f^{(4)}(0)=$______________.

5．曲面$z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$平行于平面$2x+2y-z=0$的切平面方程为______________.

第二题：(14 分)设$f(x)$在$[0,1]$上可导，$f(0)=0$，且当$x\in(0,1)$，$0<f'(x)<1$. 试证：当$a\in(0,1)$时，有$\left(\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2>\int_0^a f^3(x)\,\mathrm{d}x$.

第三题：(14 分)某物体所在的空间区域为$\Omega: x^2+y^2+2z^2\leq x+y+2z$，密度函数为$x^2+y^2+z^2$，求质量$M=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

第四题：(14 分)设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上具有连续导数，$f(0)=0, f(1)=1$.证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}.$$

第五题：(14 分)设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，且$I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\neq 0$. 证明：在$(0,1)$内存在不同的两点$x_1,x_2$，使得$\dfrac{1}{f(x_1)}+\dfrac{1}{f(x_2)}=\dfrac{2}{I}$.

第六题：(14 分) 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，且$f(x)=f(x+2)=f\left(x+\sqrt{3}\right)$，用傅里叶(Fourier)级数理论证明$f(x)$为常数。

2017 年第九届全国大学生数学竞赛初赛
(非数学类）试卷

一、填空题（本题 42 分，共 6 小题，每小题 7 分）

1．已知可导函数$f(x)$满足$f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=x+1$，则$f(x)=$____________。

2．极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=$____________。

3．设$w=f(u,v)$具有二阶连续偏导数，且$u=x-cy,v=x+cy$，其中c为非零常数，则$w_{xx}-\dfrac{1}{c^2}w_{yy}=$__________。

4．设$f(x)$具有二阶连续导数，且$f(0)=f'(0)=0,f''(0)=6$，则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f\left(\sin^2 x\right)}{x^4}=$__________。

5．不定积分$I=\displaystyle\int\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x=$__________。

6．记曲面$z^2=x^2+y^2$和$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$围成的空间区域为V，则三重积分$\displaystyle\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=$____________。

二、（本题 14 分）设二元函数$f(x,y)$在平面上有连续的二阶偏导数，对任意角度α，定义一元函数$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)$，若对任何$\alpha$都有$\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$且$\dfrac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$，证明：$f(0,0)$是$f(x,y)$的极小值。

三、(本题 14 分)设曲线Γ为曲线$x^2+y^2+z^2=1,x+z=1,x\ge0,y\ge0,z\ge0$上从点$A(1,0,0)$到点$B(0,0,1)$的一段。求曲线积分$I=\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$.

四、(本题 15 分)设函数$f(x)>0$且在实轴上连续，若对任意实数t，有$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t-x|}f(x)\,\mathrm{d}x\le1$。证明：$\forall a,b$，$a<b$，有$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\dfrac{b-a+2}{2}$.

五、(本题 15 分)设$\{a_n\}$为一个数列，p为固定的正整数，若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$.

2018 年第十届全国大学生数学竞赛初赛

（非数学类）试卷

一、填空题（本题满分 24 分，共 4 小题，每小题 6 分）

(1) 设$\alpha \in (0,1)$，则$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]=$________.

(2)若曲线$y=y(x)$由$\begin{cases} x=t+\cos t \\ e^{y}+ty+\sin t=1 \end{cases}$确定,则此曲线在$t=0$对应点处的切线方程为________.

(3) $\displaystyle\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}x=$__________.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=$__________.

二（本题满分 8 分）设函数$f(t)$在$t\neq 0$时一阶连续可导，且$f(1)=0$，求函数$f\left(x^2-y^2\right)$，使得曲线积分$\displaystyle\int_L y\left[2-f\left(x^2-y^2\right)\right]\mathrm{d}x+xf\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}y$与路径无关，其中$L$为任一不与直线$y=\pm x$相交的分段光滑曲线.

三（本题满分 14 分）设$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，且$1\le f(x)\le 3$. 证明:

$$1\le \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\le\frac{4}{3}.$$

四（本题满分 12 分）计算三重积分$\displaystyle\iiint\limits_{(V)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V$，其中$(V)$是由

$$x^2+y^2+(z-2)^2\ge 4,x^2+y^2+(z-1)^2\le 9$$

及$z\ge 0$所围成的空间图形.

五（本题满分 14 分）设$f(x,y)$在区域D内可微，且$\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\le M$，$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$是$D$内两点，线段$AB$包含在$D$内. 证明：$\left|f\left(x_1,y_1\right)-f\left(x_2,y_2\right)\right|\le M\,|AB|$，其中$|AB|$表示线段$AB$的长度.

六（本题满分 14 分）证明：对于连续函数$f(x)>0$，有$\ln\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\ge\int_0^1\ln f(x)\,\mathrm{d}x.$

七 (本题满分 14 分) 已知$\left\{a_k\right\},\left\{b_k\right\}$是正数数列，且$b_{k+1}-b_k\ge\delta>0,k=1,2,\cdots$，$\delta$为一常数. 证明：若级数$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$收敛，则级数$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\sqrt[k]{\left(a_1a_2\cdots a_k\right)\left(b_1b_2\cdots b_k\right)}}{b_{k+1}b_k}$收敛.