2017 年合肥工业大学第九届高等数学竞赛试题及解答

一、（15 分）设 $x_1=1$，$x_n=1+\dfrac{1}{1+x_{n-1}}(n=2,3,\ldots)$.证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其极限.

解：方法一：$x_1=1,\ x_2=\dfrac{3}{2},\ x_3=\dfrac{7}{5},\ x_4=\dfrac{17}{12},\cdots$，显然数列$\{x_n\}$不具有单调性，而考虑子列$\{x_{2n-1}\}$，$\{x_{2n}\}$，证$\{x_{2n-1}\}$单增，$\{x_{2n}\}$单减，事实上$x_1<x_3$，$x_4<x_2$，设$x_{2k-1}<x_{2k+1}$，$x_{2k+2}<x_{2k}$，则$x_{2k+3}=1+\dfrac{1}{x_{2k+2}}>1+\dfrac{1}{x_{2k}}=x_{2k+1}$，$x_{2k+4}=1+\dfrac{1}{x_{2k+3}}<1+\dfrac{1}{x_{2k+1}}=x_{2k+2}$，由归纳法知$\{x_{2n-1}\}$单增，$\{x_{2n}\}$单减，且$0<x_n<2\ (n=1,2,\cdots n)$，根据准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}$均存在，且分别为$a,b$，由$x_n=1+\dfrac{1}{1+x_{n-1}}$，当$n\to\infty$，得$a=1+\dfrac{1}{1+b}$，同理$b=1+\dfrac{1}{1+a}$，解得$a=b=\pm\sqrt{2}$（负号舍去），所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在且等于$\sqrt{2}$.

方法二：设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对$x_n=1+\dfrac{1}{1+x_{n-1}}$，当$n\to\infty$，得$a=1+\dfrac{1}{1+a}$，解得$a=\pm\sqrt{2}$，下证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.事实上，

$$0<\left|x_n-\sqrt{2}\right|=\left|1+\frac{1}{1+x_{n-1}}-\sqrt{2}\right|=\frac{\left|(1-\sqrt{2})(x_{n-1}-\sqrt{2})\right|}{1+x_{n-1}}<(\sqrt{2}-1)\left|x_{n-1}-\sqrt{2}\right|$$

$<(\sqrt{2}-1)^2\left|x_{n-2}-\sqrt{2}\right|<\cdots<(\sqrt{2}-1)^{n-1}\left|x_1-\sqrt{2}\right|=(\sqrt{2}-1)^n\to0$（$n\to\infty$）.所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在且等于$\sqrt{2}$.

二、（15 分）设 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 $f^{(2017)}(0)$.

解：$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，$f'(0)=1$，得到$(1+x^2)(f'(x))^2=1$，等式两边关于$x$求导得

$2x(f'(x))^2+(1+x^2)2f'(x)f''(x)=0$，即$xf'(x)+(1+x^2)f''(x)=0$，$f''(0)=0$，对上式利用 Leibniz 公式，求$n-2$阶导数得

$$C_{n-2}^0(f'(x))^{n-2}x+C_{n-2}^1(f'(x))^{n-3}\cdot1+C_{n-2}^0(f''(x))^{(n-2)}(1+x^2)$$

$+C_{n-2}^1(f''(x))^{(n-3)}\cdot2x+C_{n-2}^2(f''(x))^{(n-4)}\cdot2=0$，在上式中令$x=0$并整理得

$f^{(n)}(0)=-(n-2)^2 f^{(n-2)}(0)$，所以 $f^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^k((2k-1)!!)^2 & n=2k+1\\ 0 & n=2k\end{cases}$，从而

$f^{(2017)}(0)=(2016!!)^2$.

三、(15 分) 计算 $I=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

解：$I=\int\dfrac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\sqrt{x}+\dfrac{x}{2}-\int\dfrac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，其中 $\int\dfrac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{x+1}\mathrm{d}\sqrt{x}$

$\underline{\underline{t=\sqrt{x}}}\int\sqrt{1+t^2}\mathrm{dt}=t\sqrt{1+t^2}-\int t\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{dt}=t\sqrt{1+t^2}-\int\dfrac{t^2+1-1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{dt}$

$=t\sqrt{1+t^2}+\ln(t+\sqrt{1+t^2})-\int\sqrt{1+t^2}\mathrm{dt}$，故 $\int\sqrt{1+t^2}\mathrm{dt}=\dfrac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}+\dfrac{1}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2})+C$，

所以 $I=\sqrt{x}+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)}+\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}))+C$.

四、(15 分) 计算曲线积分 $I=\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，其中 L 是沿圆周 $(x-1)^2+y^2=a^2$（$a>0$，且 $a\neq 1$）方向为逆时针方向.

解：令 $P=\dfrac{-y}{(4x^2+y^2)^2}$，$Q=\dfrac{x}{(4x^2+y^2)^2}$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，

（1）当 $a<1$ 时，$(0,0)\notin D$，其中 D 是 L 所围 $(x,y)\neq(0,0)$，由格林公式，

$I=\iint\limits_D(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

（2）当 $a>1$ 时，$(0,0)\in D$，其中 D 是 L 所围，在 D 内作一小椭圆 $L_\varepsilon:4x^2+y^2=\varepsilon^2$（$\varepsilon>0$，且充分小），方向为顺时针方向，则 $I=\oint_{L+L_\varepsilon}p\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\oint_{L_\varepsilon}p\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

$=\oiint\limits_{D_1}(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\oint_{L_\varepsilon}\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{\varepsilon^2}=0-(-1)\iint\limits_{D_2}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{2}{\varepsilon^2}\pi\dfrac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon=\pi$，其中 D_1 是 $L+L_\varepsilon$ 所围，D_2 是 L_ε 所围.

五、(20 分)（1）设 $\sum$ 为上半球面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$（$z\geq 0$），点 $p(x,y,z)\in\sum$，π 是 $\sum$ 在点 p 的切平面，$d(x,y,z)$ 为原点到平面 π 的距离.求 $d(x,y,z)$

（2）设 $d(x,y,z)$ 是问题（1）中的函数 $I=\iint\limits_S d^3(x,y,z)(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$，其中曲面 S 为抛物面 $z=2-x^2-y^2(z\geq -2)$，取上侧.

解：（1）曲面 $\sum$ 在点 p 的切平面 π 的法向量 $\vec{n}\{x,y,2z\}$，p 点切平面 π 方程

$x(X-x)+y(Y-y)+2z(Z-z)=0$，即 $xX+yY+2zZ-2=0$.所以原点到平面π的距离

$d(x,y,z)=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}$.

（2）由（1）知 $I=8\iint\limits_{S}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}$， $S:z=2-x^2-y^2,z\ge -2$，补平面:

$S_0:z=-2,x^2+y^2\le 4$取下侧,在S与S_0围成的区域Ω内作椭球面$S_\varepsilon:x^2+y^2+4z^2\le\varepsilon^2$，

取内侧，令$r=\sqrt{x^2+y^2+4z^2}$， $P=\dfrac{x}{r^3},Q=\dfrac{y}{r^3},R=\dfrac{z}{r^3}$， 则$\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r},\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r},\dfrac{\partial r}{\partial z}=\dfrac{4z}{r}$，

$\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{3x^2}{r^5},\dfrac{\partial Q}{\partial y}=\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{3y^2}{r^5},\dfrac{\partial R}{\partial z}=\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{12z^2}{r^5}$， $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$，故:

$\iiint\limits_{S+S_0+S_\varepsilon}\mathrm{P}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega_1}(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}v=0$，其中$\Omega_1$由$S+S_0+S_\varepsilon$所围，

又$\iint\limits_{S_0}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}=-\iint\limits_{D_{xy}}\dfrac{\text{-}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+16)^{\frac{3}{2}}}$ （$D_{xy}:x^2+y^2<4$）

$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\dfrac{\rho\mathrm{d}\rho}{(\rho^2+16)^{\frac{3}{2}}}=(1-\dfrac{2}{\sqrt{5}})\pi$，

$\iint\limits_{S_\varepsilon}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{S_\varepsilon}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=-\dfrac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{\Omega_0}3\mathrm{d}v=-\dfrac{1}{\varepsilon^3}\cdot 3\cdot\dfrac{4\pi}{3}\varepsilon\cdot\varepsilon\cdot\dfrac{\varepsilon}{2}=-2\pi$， 故

$I=8(\oiint_{S+S_0+S_\varepsilon}\mathrm{P}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{S_0}\mathrm{P}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$-\iint_{S_\varepsilon}\mathrm{P}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=8(-(1-\dfrac{2}{\sqrt{5}})\pi-(-2\pi))=8(1+\dfrac{2}{\sqrt{5}})\pi$.

六、(10 分)求曲线$L_1:y=\dfrac{x^3}{3}+2x(0\le x\le 1)$绕直线$L_2:y=\dfrac{4}{3}x$旋转所生成的旋转曲面的面积.

解：选取x为积分变量， $x\in[0,1]$，对于$x\in[x,x+\mathrm{d}x]$对应曲线L_1上这一段曲线弧绕直线

L_2旋转曲面的表面积的微元$\mathrm{d}A$可表示为: $\mathrm{d}A=2\pi\mathrm{d}\cdot\mathrm{d}s$，其中d是$L_1$上点$(x,y)$到直线$L_2$

的距离 $\mathrm{d}s$ 是曲线 L_1 的弧微分，则 $\mathrm{d}=\frac{1}{5}|4x-3y|$，$\mathrm{d}s=\sqrt{1+(x^2+2)^2}\mathrm{d}x$，所以

$$\mathrm{d}A=\frac{2\pi}{5}|4x-3y|\sqrt{1+(x^2+2)^2}\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{5}(x^3+2x)\sqrt{1+(x^2+2)^2}\mathrm{d}x$$，因此

$$A=\frac{2\pi}{5}\int_0^1(x^3+2x)\sqrt{1+(x^2+2)^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{10}\int_0^1\sqrt{1+(x^2+2)^2}\mathrm{d}(1+(x^2+2)^2)$$

$$=\frac{\sqrt{5}(2\sqrt{2}-1)}{3}\pi.$$

七、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)$，证明：对于任意正整数 n，必存在 $x_n\in[0,1)$ 及 $\xi_n\in(x_n,x_n+\frac{1}{n})$，使得 $f'(\xi_n)=0$.

解：令 $\varphi(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n}),x\in[0,1-\frac{1}{n}]$，由于 $\varphi(x)$ 在 $[0,1-\frac{1}{n}]\subset[0,1]$ 上连续，则存在 M,m 使得 $m\le\varphi(x)\le M,x\in[0,1-\frac{1}{n}]$，因此，$m\le\varphi(\frac{i}{n})\le M(i=0,1,2\cdots,n-1)$，所以 $m\le\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(\frac{i}{n})\le M$，由连续函数的介值定理得：存在 $x_n\in[0,1-\frac{1}{n}]$ 使得

$$\varphi(x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(\frac{i}{n})=\frac{1}{n}(\varphi(0)+\varphi(1)+\cdots+\varphi(\frac{n-1}{n}))$$

$$=\frac{1}{n}(f(0)-f(\frac{1}{n})+f(\frac{1}{n})-f(\frac{2}{n})+\cdots f(\frac{n-1}{n})-f(1))=0$$，所以 $f(x_n)=f(x_n+\frac{1}{n})$

$x_n\in[0,1-\frac{1}{n}]\subset[0,1)$，由罗尔定理在 $(x_n,x_n+\frac{1}{n})$ 内必存在 ξ_n，使得 $f'(\xi_n)=0$.