Indukcja

1. Dana jest liczba naturalna n. Wyznaczyć największą liczbę całkowitą k taką, że $2^k|(n+1)\cdot(n+2)\cdot ...\cdot 2n$.
2. Niech $f(k)$ oznacza największą liczbę nieparzystą, będącą dzielnikiem k. Pokazać, że
$$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2^n)=\frac{1}{3}(4^n+2)$$
dla dowolnej liczby naturalnej $n>0$.
3. Czy każdą liczbę naturalną dodatnią i mniejszą od $n!$, gdzie $n>0$ jest naturalna, można przedstawić w postaci sumy nie więcej niż n dzielników liczby $n!$?
4. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n>0$ wielomian
$$(x^4-1)(x^3-x^2+x-1)^n+(x+1)x^{4n-1}$$
jest podzielny przez x^5+1.
5. Dla każdej liczby naturalnej $n>0$ wyznaczyć najmniejszą wartość wielomianu
$$W_n(x)=x^{2n}+2x^{2n-1}+3x^{2n-2}+...+(2n-1)x^2+2nx.$$
6. Dowieść, że dla liczby naturalnej n istnieje liczba całkowita m taka, że $(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$.
7. Niech P będzie rodziną niepustych podzbiorów zbioru $\{1,2,...,n\}$. Dla $A\in P$ definiujemy $f(A)$ jako iloczyn wszystkich elementów zbioru A. Udowodnić, że $\sum\limits_{A\in P}\dfrac{1}{f(A)}=n.$
8. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{5}{3}$.
9. Jeśli $A=\{a_1,a_2,...,a_k\}$, przy czym $a_1>a_2>...>a_k$, to definiujemy $f(a)=a_1-a_2+a_3-...+(-1)^{k+1}a_k$. Niech $A_1,A_2,...,A_m$ będą wszystkimi niepustymi podzbiorami zbioru $\{1,2,...,n\}$. Obliczyć wartość sumy $f(A_1)+f(A_2)+...+f(A_m)$.
10. Dany jest zbiór A taki, że $2\in A$ oraz dla $x\in A$ prawdziwe są implikacje $x\in A\Rightarrow 1+\frac{1}{x}\in A$, $x\in A\Rightarrow 2+\frac{1}{1-x}\in A$. Dowieść, że zbiór A zawiera wszystkie liczby wymierne większe od 1.
11. Dany jest zbiór 3^n+1 liczb rzeczywistych. Czy można wybrać n+1-elementowy podzbiór S tego zbioru taki, że dla dowolnych różnych podzbiorów $A\subset S, B\subset S$ tego zbioru zachodzi $f(A)\neq f(B)$, gdzie $f(P)$ oznacza sumę wszystkich elementów zbioru P? Uwaga: Przyjmujemy $f(\emptyset)=0$.
12. Czy dla pewnego naturalnego $n>0$ liczba $\sqrt[n]{\sqrt{2}+1}+\sqrt[n]{\sqrt{2}-1}$ jest wymierna?
13. Liczba naturalna A jest większa od 1. Niech $a_1=A^A,\ a_{n+1}=A^{a_n},\ b_1=A^{A+1},\ b_{n+1}=2^{b_n}$. Dowieść, że dla $n\geqslant 1$ zachodzi $a_n<b_n$.
14. Niech $m,n>0$ będą takimi liczbami naturalnymi, że $2^{n+2}|3^m-1$. Pokazać, że $2^n|m$.
15. Niech $c_0=0,\ c_{k+1}=c_k+\frac{1}{2k+1}$ dla $k>0$. Uzasadnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n>0$ zachodzi równość $\frac{1}{2}c_n^2+(c_n-c_1)^2+(c_n-c_2)^2+...+(c_n-c_{n-1})^2=\frac{1}{2}n$.
16. Ciągi liczb całkowitych x,y są dane
$x_0=0,\ x_1=1,\ x_{n+2}=4x_{n+1}-x_n,$
$y_0=1,\ y_0=2,\ y_{n+2}=4y_{n+1}-y_n.$
Udowodnij, że $y_n^2=3x_n^2+1$ dla dowolnego $n>0$.