Daniel Murawski

Zadania z Algebry Liniowej

Te zadania to propozycja samodzielnego uzupełnienia kilku faktów z wykładu i zrobienia paru zadań pozwalających lepiej zrozumieć niektóre idee algebry liniowej. Zadania podane są w takiej kolejności, że często teza wcześniejszego zadania jest użyteczna w rozwiązaniu późniejszego.

1. Udowodnij, że układ wektorów $(v_1, ..., v_n)$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy gdy żaden wektor układu nie jest kombinacją liniową wektorów o mniejszych numerach.

2. (Twierdzenie o istnieniu bazy w przypadku skończenie wymiarowym) Udowodnij, że jeśli z układu rozpinającego $w_1, ..., w_n$ wybierzemy wszystkie wektory, które nie są kombinacją liniową poprzednich, to otrzymamy bazę. (Uwaga: Na tym etapie nie pokazaliśmy jeszcze że wymiar jest dobrze zdefiniowany, więc przestrzeń skończenie wymiarowa jest definiowana jako taka, która posiada skończony układ rozpinający.)

3. (Twierdzenie o istnieniu bazy w przypadku ogólnym) Dla osób umiejących posługiwać się lematem Kuratowskiego-Zorna: Pokazać, że każda przestrzeń liniowa ma bazę. (Podpowiedź: rozpatrzeć układy liniowo niezależne z porządkiem zadanym przez zawieranie).

4. (Twierdzenie o rozszerzaniu układu liniowo niezależnego do bazy) Niech układ $(v_1, ..., v_k)$ w przestrzeni V będzie liniowo niezależny, a układ $(w_1, ..., w_l)$ niech rozpina tę przestrzeń. Udowodnij, że istnieją takie indeksy $i_1, ..., i_r$, że układ $(v_1, ..., v_n, w_{i_1}, ..., w_{i_r})$ jest bazą. (Inaczej: Układ liniowo niezależny można rozszerzyć do bazy dowolnym układem rozpinającym.)

5. (Twierdzenie Steinitza o wymianie) Niech układ $(v_1, ..., v_k)$ w przestrzeni V będzie liniowo niezależny, a układ $(w_1, ..., w_l)$ niech rozpina tę przestrzeń. Udowodnij, że istnieją takie indeksy $1 \leqslant i_1, ..., i_k \leqslant m$, że po usunięciu z układu $(v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_l)$ wektorów w_{i_j} dla $j = 1, ..., k$ dostajemy układ rozpinający. Wywnioskuj, że $k \leqslant m$ i że w przypadku skończenie wymiarowym wymiar jest dobrze określony.

6. Niech $\dim V = n, \dim W = m$. Ile wynosi $\dim Hom(V, W)$?

7. Danych jest n różnych liczb rzeczywistych $x_1, ..., x_n$, Udowodnij, że wielomiany $P_i = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ są bazą przestrzeni wielomianów stopnia mniejszego niż n nad $\mathbb{R}$. Wywnioskuj, że dla dowolnych liczb $y_1, ..., y_n$ istnieje dokładnie jeden wielomian W stopnia mniejszego niż n taki, że $W(x_i) = y_i$ dla $i = 1, ..., n$.

Macierzą nazywamy prostokątną tabelkę $n \times m$ elementów ciała $\mathbb{K}$ (n - liczba wierszy, m - liczba kolumn). Rzędem wierszowym macierzy nazywamy wymiar przestrzeni rozpiętej przez wiersze, kolumnowym - przez kolumny.

Macierze mają naturalną interpretację jako skrócony zapis układu równań. Rozważmy układ na liczby $x_1, ..., x_m$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2} + ... + a_{1,m}x_m = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2} + ... + a_{2,m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2} + ... + a_{n,m}x_m = b_n \end{cases}$$

Zapisujemy go jako:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Zapisujemy w skrócie $AX = B$. Przekształcenie wektora X zdane takim wzorem $(B = AX)$ jest liniowe i mówimy że to pomnożenie wektora X przez macierz A albo działanie macierzą A na wektor X (dociekliwi mogą poszukać ogólnej definicji mnożenia macierzy). Szczególnie interesujące są układy postaci $AX = \mathbf{0}$. Taki układ nazwiemy jednorodnym. Zauważmy, że wszystkie rozwiązania układu równań liniowych możemy otrzymać mając dowolne rozwiązanie $AX_0 = B$ i zbiór rozwiązań układu $AY = 0$, ponieważ $A(X_0 + Y) = B$. Następnych parę ćwiczeń skupia się na rozwiązywaniu układów jednorodnych.

8. Udowodnij, że zbiór rozwiązań układu $AX = 0$ jest niepusty i jest przestrzenią liniową.

9. Rozważmy na macierzach A, B (B to wektor traktowany jako macierz $n \times 1$) trzy operacje:

   (a) Pomnożenie wiersza macierzy przez stałą różną od 0.

   (b) Dodanie do i-tego wiersza j-ego wiersza.

   (c) Zamiana dwóch wierszy miejscami.

   Po wykonaniu tego samego ciągu operacji na A i B otrzymujemy macierze A', B'. Udowodnij, że zbiory rozwiązań układów $AX = B$, $A'X = B'$ są równe.

10. Na podstawie poprzedniego zadania pokaż, że jeśli wymiar przestrzeni rozpiętej przez wiersze macierzy $n \times m$ wynosi k, to wymiar przestrzeni rozwiązań układu $AX = \mathbf{0}$ wynosi $m - k$. (Wskazówka: Trzeba wymyślić algorytm rozwiązywania układów równań, tzw "schodkowanie macierzy"). Wniosek: Jeśli $V \subset W$, gdzie V, W to przestrzenie liniowe, to $\dim V^{\perp} + \dim V = \dim W$

11. Udowodnić, że jeśli macierz A zadaje przekształcenie ϕ między przestrzeniami V i W to obraz ϕ (oznaczamy $im(\phi)$) jest przestrzenią liniową. Jądrem przekształcenia nazywamy zbiór $\ker \phi = \{v \in V : \phi(v) = 0\}$. Udowodnij, że jądro przekształcenia jest przestrzenią liniową.

12. Rzędem macierzy A nazywamy wymiar obrazu zadanego przez nią przekształcenia. Rzędem kolumnowym nazywamy wymiar przestrzeni rozpiętej przez wektory kolumn macierzy, analogicznie definiujemy rząd wierszowy. Pokaż, że te trzy wielkości są sobie równe.

13. Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Pokaż, że $\dim(ker(\phi)) + \dim(im(\phi)) = \dim(V)$

Na koniec kilka zadań związanych z iloczynem skalarnym:

14. Pokaż, że iloczyn skalarny na $\mathbb{R}$ jest niezdegenerowaną formą dwuliniową.

15. Pokaż, że jeśli $v_1, ..., v_n$ ortogonalne w pewnym iloczynie skalarnym, to liniowo niezależne.

16. Dane są wektory $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$. Udowodnij, że wektor $\alpha = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$ jest rzutem prostopadłym v_1 na prostą zawierającą wektor v_2 oraz $v_1 - \alpha \perp v_2$.

17. Udowodnij, że w normie zadanej przez dowolny iloczyn skalarny zachodzi nierówność trójkąta $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

Oraz kilka zadań z którymi spotkałem się w liceum i wykorzystują metody algebry liniowej lub przynajmniej "wektorowy sposób myślenia":

18. Na płaszczyźnie dane są punkty $A_1, ..., A_n$ oraz wektory $v_1, ..., v_n$. Wykazać, że istnieje taka permutacja $w_i, ..., w_n$ wektorów $v_i, ..., v_n$, że jeśli $i \neq j$, to odległość między punktami $A_i + w_i, A_j + w_j$ jest nie mniejsza niż między punktami A_i, A_j.

19. Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej N istnieje liczba całkowita M o następującej własności: jeśli na tablicy napiszemy prawdziwą równość iloczynów [postaci:

$$a_1 a_2 ... a_k = b_1 b_2 ... b_l,$$

gdzie $a_1, ..., a_k, b_1, ...b_l \in \{1, ..., N\}$ oraz $a_1 a_2 ... a_k > M$, to z tablicy można zetrzeć niektóre, ale nie wszystkie czynniki tak, by równość pozostała prawdziwa.

20. Dany jest n-elementowy zbiór $S = \{x_1, ..., x_n\}$. Niech k oznacza liczbę takich podzbiorów S, że suma będących w nich liczb jest równa 2020. Niech l oznacza liczbę różnych sum liczb w podzbiorach S. Udowodnij, że $kl \leqslant 3^n$.