Teoria

Definicja. Graf G nazywamy k-wolnym ($k \in \mathbb{N}_{\geqslant 3}$) jeśli nie zawiera k elementowej kliki, czyli podgrafu pełnego o k wierzchołkach.

Twierdzenie Turána. Maksymalna liczba krawędzi k-wolnego grafu G o n wierzchołkach wynosi:

$$\frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2 - r^2}{2} + \binom{r}{2},$$

gdzie r jest resztą z dzielenia n przez $k-1$.

Zadania

1. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Pokaż, że:

$$\#\{(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2 : i < j \quad \text{oraz} \quad 1 < |x_i - x_j| < 2\} \leqslant \frac{n^2}{4}.$$

2. Pokaż, że wśród n punktów leżących na okręgu jednostkowym, istnieje co najwyżej $\frac{n^2}{3}$ odcinków o wierzchołkach w wybranych punktach i długości większej niż $\sqrt{2}$.
3. Danych jest $2n$ punktów na płaszczyźnie oraz n^2+1 odcinków łączących je. Pokaż, że pewne trzy odcinki tworzą trójkąt.
4. Wśród dowolnych trzech osób z grupy $2n$ ludzi, co najmniej dwie osoby się znają. Pokaż, że w tej grupie istnieje co najmniej $n^2 - n$ par znajomych.
5. Pokaż, że wśród 21 punktów na okręgu o środku O, istnieje co najmniej 100 par punktów (A, B) takich, że $\angle AOB \leqslant 120°$.
6. Każdy z 30 członków klubu miał początkowo kapelusz. Pewnego dnia każdy z nich wysłał swój kapelusz innemu członkowi klubu (można było otrzymać więcej niż jeden kapelusz). Udowodnij, że istnieje grupa 10 członków, z których żaden nie otrzymał kapelusza od innej osoby z tej grupy.
7. Danych jest $5n$ punktów na płaszczyźnie oraz $10n^2+1$ odcinków łączących je. Kolorujemy każdy z odcinków na niebiesko lub czerwono. Pokaż, że pewne trzy odcinki tworzą trójkąt jednokolorowy.
8. Pilot do telewizora do pracy potrzebuje dwóch naładownych baterii. Mamy n baterii, przy czym k z nich jest sprawnych ($2 \leqslant k \leqslant n$). Jedyny sposób na rozpoznanie czy wybraliśmy dobre baterie to włożyć je do pilota i sprawdzić czy działa. Chcemy mieć działający pilot, ile minimalnie prób musimy wykonać w najgorszym przypadku?
9. Dla dwóch punktów $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ na płaszczyźnie, zdefiniujmy wielkość:

$$d(A,B) := |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

Para punktów (A, B) jest *dobra* jeśli:

$$1 < d(A,B) < 2.$$

Wyznacz maksymalną liczbę *dobrych* par wśród 2020 punktów na płaszczyźnie.