1 Euklidesowe

Jeśli trójkąt ma wierzchołki A, B, C, boki długości a, b, c i kąty α, β, γ w standardowej kolejności, to

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

oraz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

(i analogicznie).

2 Sferyczne

2.1 Cosinusów

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma$$

Zostawię bez dowodu - ten który znalazłem najprzystępniejszy jest dalej brzydki, albo korzysta z iloczynów wektorowych, a nie chcę tam zaglądać z Wami. Jeśli bardzo chcecie, dowody są chociażby na Wikipedii :).

2.2 Sinusów

Z tw. cosinusów

$$\cos\gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$$

więc

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = \sin^2 c \cdot \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

(ostatnia równość po przekształceniach i korzystając z jedynki tryg.)

Stąd

$$\frac{\sin\gamma}{\sin c} = \left(\frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}\right)^{1/2}$$

Ponieważ zmiana kolejności a, b, c nie zmienia prawej strony (taka jest symetria tego równania - zostawiam do zastanowienia), mamy

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}$$

3 Hiperboliczne

3.1 Cosinusów

$$\cos c = -\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma$$

3.2 Sinusów

$$\frac{\sin\alpha}{\sinh a} = \frac{\sin\beta}{\sinh b} = \frac{\sin\gamma}{\sinh c}$$