Zadania

1. Na ile sposobów można ustawić liczby $1, 2, \ldots, n$ w ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tak aby zachodziło $a_1 = 1$ i $a_{i+1} \leqslant a_i + 2$, dla $i = 1, \ldots, n-1$?

2. Udowodnij, że liczba trzyelementowych podzbiorów $\{a, b, c\} \subset \{1, 2, \ldots, 63\}$, dla których zachodzi $a+b+c < 96$ jest mniejsza niż liczba tych podzbiorów, dla których $a+b+c \geqslant 96$.

3. Liczby od 1 do 64 wpisano w pola tablicy 8×8, tak że w pierwszym rzędzie od lewej do prawej wpisano wartości od 1 do 8, w drugim rzędzie od 9 do 16 itd. Następnie wybrano pewne pola i przed liczbami w tych polach wstawiono znak minus. Okazało się że w każdym rzędzie i kolumnie postawiono dokładnie cztery znaki minus. Rozstrzygnij, jak jest najmniejsza suma liczb w całej tablicy jaką można uzyskać.

4. Niech n-suma oznacza sumę n kolejnych elementów ciągu. W pewnym skończonym ciągu liczb rzeczywistych każda 7-suma jest ujemna, zaś każda 11-suma jest dodatnia. Z ilu najwięcej elementów może składać się ten ciąg?

5. Ile jest podzbiorów $\mathcal{S} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, takich że nie zawierają dwóch kolejnych liczb?

6. Ciąg podziałów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tworzymy następująco: startujemy od podziału zawierającego tylko zbiór $\{1, \ldots, n\}$. Podział $(i+1)$-wszy otrzymujemy z podziału i-tego poprzez wybranie jednego, co najmniej 2-elementowego zbioru z podziału i-tego i podzielenie go na dwa niepuste podzbiory. Procedura kończy swoje działanie jeżeli wszystkie zbiory podziału są jednoelementowe. Na ile sposobów można wykonać powyższą procedurę? Na ile sposobów możemy wykonać powyższą procedurę zakładając, że po każdym kroku zbiory podziałów zawierają kolejne liczby naturalne?

7. Niech $S(m, n) = \{(i, j) \mid 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Powiemy, że podzbiór $T \subseteq S(m, n)$ jest *pełny* jeśli zachodzi: $i \leqslant i_0$, $j \leqslant j_0$ i $(i_0, j_0) \in T$, wtedy również $(i, j) \in T$. Ile pełnych podzbiorów jest w $S(m, n)$.

8. Niech $n \in \mathbb{Z}_+$. Dana jest waga szalkowa i zestaw odważników o masach $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. W każdym z kolejnych n ruchów będziemy dokładali jeden odważnik na jedną z szalek (prawą lub lewą). Wyznacz liczbę sposobów na jakie można odkładać ciężarki na wagę, tak aby lewa szalka zawsze znajdowała się co najwyżej tak wysoko jak prawa.

9. Powiemy, że podzbiór $\emptyset \neq \mathcal{S} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ jest *średni*, jeśli średnia arytmetyczna jego elementów jest liczbą całkowitą. Udowodnij, że liczba średnich podzbiorów ma tę samą parzystość co n.

10. Rozważmy słowa nad alfabetem $\{0, 1\}$. Niech a_n oznacza liczbę słów długości n, które nie zawierają podsłowa 010. Niech b_n oznacza liczbę słów długości n, które nie zawierają podsłowa 0011 ani 1100. Udowodnij, że $b_{n+1} = 2a_n$, dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n.

11. Dla dodatnich liczb całkowitych m, n niech $f(m, n)$ oznacza liczbę n-tupli liczb całkowitych $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, takich że $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \leqslant m$. Udowodnij, że $f(m, n) = f(n, m)$.