1 Wstęp

Napisz tu coś mądrego.

2 Zadania

Pokazać, że...

1. Dowieść, że wielomian stopnia n nad $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ lub $\mathbb{Z}$ ma co najwyżej n miejsc zerowych.
   - Udowodnij, że jeśli dwa wielomiany stopnia n zgadzają się w $n+1$ punktach, to są sobie równe.
2. (Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych) Niech $W(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że jeśli W ma pierwiastek wymierny $\frac{p}{q}$ (gdzie p, q całkowite, niezerowe, względnie pierwsze), to $p \mid a_0$ i $q \mid a_n$.
3. (Kryterium Eisensteina) Niech $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_1 + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Niech p będzie liczbą pierwszą taką, że $p \nmid a_n$, $p \mid a_i$ dla każdego $i < n$, ale $p^2 \nmid a_0$. Udowodnij, że wielomian jest nierozkładalny (w liczbach całkowitych).
   - Udowodnij, że wielomian $x^4 + 2$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}$
   - Udowodnij, że wielomian $2x^3 + 19x^2 - 54x + 3$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}$.
4. (Bardzo trudne. Czasami nazywane lematem Gaussa) Udowodnij, że jeśli wielomian (stopnia co najmniej 1) o współczynnikach całkowitych jest nierozkładalny w liczbach całkowitych, to jest nierozkładalny w liczbach wymiernych.
5. (Baltic Way) Niech F, G, H będą takimi wielomianami stopnia co najwyżej $2n+1$ o współczynnikach rzeczywistych, że:

   Dla wszystkich liczb rzeczywistych x mamy
   $$F(x) \leqslant G(x) \leqslant H(x)$$
   Istnieją takie różne liczby rzeczywiste x_1, x_2, …, x_n, że
   $$F(x_i) = H(x_i) \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$
   Istnieje liczba rzeczywista x_0 różna od x_1, x_2, …, x_n, dla której
   $$F(x_0) + H(x_0) = 2G(x_0).$$
   Dowieść, że
   $$F(x) + H(x) = 2G(x)$$
   dla wszystkich liczb rzeczywistych x.
6. (IMO) Niech $a, b \in \mathbb{Z}_+$ będą takie, że $ab + 1 \mid a^2 + b^2$. Udowodnij, że $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ jest kwadratem liczby całkowitej.
7. (Trudne) Niech $a, b \in \mathbb{Z}_+$ będą takie, że $ab \mid a^2 + b^2 + 1$. Udowodnij, że $3ab = a^2 + b^2 + 1$.