Zadania

1. Udowodnij, że dla $a, b, c \in \mathbb{R}$ zachodzi:
$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} \geqslant (a+b+c)\sqrt{2}.$$

2. Udowodnij, że dla $a, b, c \in \mathbb{R}$ zachodzi:
$$\sqrt{a^2+2b^2}+\sqrt{b^2+2c^2}+\sqrt{c^2+2a^2} \geqslant (a+b+c)\sqrt{3}.$$

3. Liczby $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ spełniają poniższy układ równań:
$$\begin{cases} a^2+b^2+ab=9 \\ b^2+c^2+bc=16 \\ c^2+a^2+ca=25 \end{cases}$$
Znajdź najmniejszą wartość wyrażenia $ab+bc+ca$.

4. Udowodnij, że dla $a, b \in \mathbb{R}_+$ oraz $x \in \mathbb{R}$ zachodzi:
$$\sqrt{a^2+x^2-ax\sqrt{2}}+\sqrt{b^2+x^2-bx\sqrt{2}} \geqslant \sqrt{a^2+b^2}.$$
Dla jakich x nierówność staje się równością?

5. Rozwiąż równianie dla $x \in \mathbb{R}$:
$$\sqrt{x^2+4-2x}+\sqrt{x^2+1-x}=\sqrt{7}.$$

6. Udowodnij, że dla $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ zachodzi:
$$\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{b^2-c^2} \leqslant \frac{ab}{c}.$$

7. Rozwiąż układ równań dla $x, y \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2}=\sqrt{2} \\ \sqrt{x^2+y^2-2x+1}+\sqrt{x^2+y^2-2y+1}=\sqrt{2} \end{cases}$$

8. Rozwiąż układ równań dla $x, y, z \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} 2x+3y+6z=7 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

9. Dane są liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ spełniające zależność $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$. Udowodnij, że:
$$a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+\ldots+(-1)^{n+1}a_n^2 \geqslant (a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n+1}a_n)^2.$$

10. Wyznacz wszystkie możliwe wartości wyrażenia $5ab+4ac+3bc$, dla $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ spełniających następujący układ równań:
$$\begin{cases} a^2+b^2=9 \\ 5a^2+5c^2+6ac=80 \\ 5b^2+5c^2+8bc=125 \end{cases}$$

11. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + (2i-1)^2}$$

dla $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ takich, że

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n^2.$$

12. Dane są liczby rzeczywiste $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n-1}$, których średnia arytmetyczna jest równa A. Udowodnij, że:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - A)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - x_n)^2.$$