

# Różnice, nie różniczki

Grzegorz Dłużewski

16 lipca 2020

**Definicja 1.** Dla funkcji  $f(x)$  wprowadźmy następujące definicje:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= f(x+1) - f(x) \\ f_{m+1}(x) &= f_m(x+1) - f_m(x)\end{aligned}$$

**Zadanie 1.** Czy jeśli  $f_k(x) \equiv 0$  dla pewnego  $k$ , to czy z tego wynika, że  $f$  jest wielomianem?

**Zadanie 2.** Jak wygląda wzór na  $f_l(x)$  (zapisany wyłącznie przy użyciu funkcji  $f$ )?

**Zadanie 3.** Jak wyglądają różnice ciągów  $2^n$  i  $\lambda^n$ ?

**Zadanie 4.** Ile wynosi

$$\sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} F_{n+j}$$

gdzie  $F_n$  to  $n$ -ty wyraz ciągu Fibonacciego?

**Zadanie 5.** Dany jest wielomian  $f(x)$  o współczynnikach całkowitych. Udowodnić, że  $p \mid f_m(x)$  dla  $m \geq p$ ,  $x \in \mathbb{Z}_+$ .

**Zadanie 6.** Dana jest nieparzysta liczba pierwsza  $p$ . Udowodnić, że  $p \mid F_{n+p} - F_n - F_p$ .

**Bonus:**

**Zadanie 1.** Udowodnij, że wielomian przyjmuje na wartościach całkowitych wartości całkowite wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci  $a_k \binom{x}{k} + a_{k-1} \binom{x}{k-1} + \dots + a_0$ .

**Zadanie 2.** Wprowadźmy oznaczenie  $\Delta_h f(x) := f(x+h) - f(x)$ . Udowodnić, że

$$\Delta_{2^{k-1}} \Delta_{2^{k-2}} \dots \Delta_1 f(x) = \sum_{j=0}^{2^k-1} (-1)^{s_2(j)} f(x + (2^k - j))$$

gdzie  $s_2(x)$  oznacza liczbę jedynek w zapisie binarnym  $x$ .

**Zadanie 3.** Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $k$  istnieje liczba całkowita dodatnia  $N$  taka, że liczby  $1^k, 2^k, \dots, N^k$  da się podzielić na dwie grupy o równych sumach.