Zadania

1. Alicja posiada standardową talię 52 kart. W każdym ruchu Alicja wybierze jeden z czterech kolorów, po czym pociągnie z talii górną kartę. Jeżeli kolor wybrany przez Alicję i kolor na karcie będą się pokrywały, Alicja otrzyma jeden punkt. Alicja powtórzy ten proces 52 razy aż do pociągnięcia wszystkich kart z talii. Alicja postanowiła, że za każdym razem wybierze ten kolor, którego w talii zostało najwięcej (w przypadku równej liczby kilku kolorów wybierze jeden z nich). Rozstrzygnij, ile co najmniej punktów zdobędzie Alicja w najgorszym przypadku.

2. W rzędzie ustawiono n przełączników, z których każdy jest ustawiony w jednej z czterech możliwych pozycji. Jeżeli trzy kolejne przełączniki ustawione są w trzech różnych stanach to możemy je wszystkie przełączyć na czwarty stan. Udowodnij, że niezależnie od początkowego ustawienia przełączników nie można powtarzać tego procesu w nieskończoność.

3. W nieskończonym układzie współrzędnych ustawiono po jednym pionie na pozycjach: $(0,0)$, $(1,0)$ i $(0,1)$. Jeżeli w punkcie (a,b) stoi pion, zaś pozycje $(a,b+1)$ i $(a+1,b)$ nie zawierają pionów, to możemy zastąpić pion w punkcie (a,b) dwoma pionami, jednym na pozycji $(a,b+1)$ i drugim na pozycji $(a+1,b)$. Rozstrzygnij, czy istnieje ciąg n ruchów ($n \in \mathbb{N}$), po których na pozycjach $(0,0)$, $(1,0)$ i $(0,1)$ nie znajdują się piony.

4. Danych jest 2020 kart ułożonych na stole w rzędzie. Każda karta jest z jednej strony złota, a z drugiej czarna. Na początku wszystkie karty leżą złotą stroną do góry. Alicja i Bartek grają w następującą grę, wykonując ruchy na zmianę, zaczyna Alicja. W swoim ruchu należy wybrać ciąg 50 kolejnych kart, przy czym skrajna lewa musi leżeć złotą stroną do góry, i obrócić je wszystkie na drugą stronę. Przegrywa osoba, która nie może wykonać legalnego ruchu. Rozstrzygnij, czy gra na pewno się zakończy, a jeżeli tak to czy istnieje strategia wygrywająca dla pierwszego gracza?

5. Alicja i Bartek grają w grę na nieskończonej planszy podzielonej na jednostkowe kwadraty. W swoim ruchu Alicja wybiera puste pole i koloruje je na czerwono, zaś Bartek na niebiesko. Gra toczy się dopóki któryś z graczy nie pokoloruje pięciu kolejnych pól w rzędzie lub kolumnie na swój kolor. Zaczyna Alicja. Udowodnij, że Bartek może tak grać, aby Alicja nigdy nie wygrała.

6. W narożniku planszy $n \times n$ ułożono pion. Alicja i Bartek na zmianę przesuwają pion po planszy w dowolnym z czterech kierunków do sąsiedniego pola, które nie było jeszcze odwiedzone. Zaczyna Alicja. Przegrywa grę osoba, która nie jest w stanie wykonać ruchu. Rozstrzygnij kto ma strategię wygrywającą w zależności od n.

7. Alicja i Bartek na zmianę wykonują na planszy o wymiarze 2020×2020 ruchy konikiem szachowym. W swoim ruchu Alicja może przesunąć konika poziomo, tj. $(x,y) \to (x \pm 2, y \pm 1)$, zaś Bartek w pionie, tj. $(x,y) \to (x \pm 1, y \pm 2)$. Alicja zaczyna, wybiera początkowe miejsce dla konika i wykonuje pierwszy ruch. Ponowne odwiedzenie pola jest zabronione. Przegrywa osoba, która nie może wykonać ruchu. Udowodnij, że Alicja ma startegię wygrywającą.

8. Alicja i Bartek grają w grę na planszy 6×6. W swoim ruchu każdy z graczy wybiera liczbę wymierną, której nie ma jeszcze na planszy i wpisuje w wolne pole. Alicja zaczyna,

po czym gracze wykonują ruchy na przemian. Kiedy wszystkie pola będą uzupełnione, w każdym rzędzie na czerwono kolorujemy pole z największą wartością. Alicja wygra jeżeli będzie można przejść po czerwonych polach (poruszając się w górę, w dół lub na ukos) z góry na doł planszy. W przeciwnym razie grę wygra Bartek. Znajdź wygrywającą strategię dla jednego z graczy.

9. Pięć identycznych wiader ustawiono w wierzchołkach pięciokąta foremnego. Każdego dnia rano zła macocha rozlewa pomiędzy ustawione wiadra dokładnie litr wody. Po czym Kopciuszek może wybrać dwa sąsiednie wiadra i wylać ich zawartość do rzeki. Wyznacz najmniejszą objętość jaką muszą mieć ustawione wiadra, aby przy optymalnym postępowaniu Kopciuszka macocha nie mogła przepełnić żadnego z wiader.

10. Dana jest plansza o wymiarach $n \times n$. Na środkach niektórych pól znajdują się mrówki. W pewnym momencie wszystkie mrówki zaczynają się poruszać z prędkością 1 na jednostkę czasu równolegle do brzegu planszy. Jeżeli dwie mrówki poruszające się w przeciwnych kierunkach spotkają się, to każda z nich skręca o $90°$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara i porusza się dalej bez zmiany prędkości. Jeżeli spotkają się więcej niż dwie mrówki lub spotkają się dwie mrówki poruszające się prostopadle do siebie, to mrówki te nie zmieniają kierunku w jakim się poruszają. Kiedy mrówka dojdzie do brzegu planszy to spada z planszy i nie pojawia się na niej ponownie. Biorąc pod uwagę wszystkie możliwe ustawienia początkowe, rozstrzygnij, jak długo mogą poruszać się mrówki zanim ostatnia z nich spadnie lub udowodnij, że ten moment niekoniecznie nastąpi.