Zadania

1. Na mapie zaznaczono 2020 obozów. Aby móc poruszać się między nimi należy wybudować tunel, który połączy je bezpośrednio lub pośrednio. Rozstrzygnij, jaka jest najmniejsza liczba tuneli jakie należy wybudować, aby niezależnie od tego jakie połączenia zostaną zaznaczone do wybudowania przez projektanta, mieć pewność, że będzie można się poruszać pomiędzy każdą parą obozów.

2. Jaka jest największa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania szachownicy 8×8, tak aby każde pole stykało się (w poziomie, pionie lub po przekątnej) z co najmniej dwoma innymi polami w tym samym kolorze.

3. Wyznacz jaka jest największa liczba koników szachowych jakie można ustawić na szachownicy 8×8, tak aby żadne dwa się nie atakowały.

4. Na planszy 50×50 środki niektórych pól zaznaczono na czarno. Wyznacz maksymalną liczbę zaznaczonych środków, tak aby żadne trzy z nich nie tworzyły trójkąta prostokątnego.

5. Danych jest zbiór $\mathcal{S}$ 997 punktów w przestrzeni. Środek każdego odcinka łączącego parę różnych punktów z $\mathcal{S}$ kolorujemy na czerowno. Rozstrzygnij, jaka jest najmniejsza liczba czerwonych punktów, jeśli:

   - punkty z $\mathcal{S}$ leżą na prostej.
   - punkty z $\mathcal{S}$ leżą na płaszczyźnie.

6. W pewnym regionie tablice rejestracyjne składają się z sześciu cyfr (od 0 do 9). Zarząd regionu wymaga, aby każde dwie tablice różniły się na co najmniej dwóch pozycjach. Wyznacz jaka jest największa liczba tablic rejestracyjnych, jakie mogą być używane w tym regionie.

7. Niech $\mathcal{A}$ będzie największym podzbiorem $\{1, 2, \ldots, n\}$, takim że dla każdego $x \in \mathcal{A}$, x dzieli co najwyżej jeden inny element z $\mathcal{A}$. Udowodnij, że
$$\frac{2n}{3} \leqslant |\mathcal{A}| \leqslant \left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil .$$

8. Niech $\mathcal{B}$ będzie największym podzbiorem $\{1, 2, \ldots, n\}$, takim że nie zawiera dwóch elementów, z których jeden dzieli drugi, jak również nie zawiera dwóch względnie pierwszych elementów. Wyznacz $|\mathcal{B}|$.

9. Powiemy, że dwa pola planszy 8×8 *sąsiadują* jeżeli mają wspólny bok. Wyznacz najmniejszą liczbę pól planszy 8×8, które muszą zostać oznaczone, aby każde pole (oznaczone lub nie) sąsiadowało z zaznaczonym polem.

10. W zawodach matematycznych n zawodników rozwiązuje pięć zadań. Za każdy problem zawodnik otrzymuje pewną całkowitą liczbę punktów z przedziału $[0, 6]$. Po zawodach okazało się, że żadnych dwóch zawodników nie otrzymało takiej samej liczby punktów na dwóch lub więcej zadaniach. Wyznacz ilu co najwyżej zawodników brało udział w zawodach.

11. Dana jest kwadratowa kartka papieru o wymiarach 102×102 podzielona na kwadraty jednostkowe oraz pewna nieznana spójna figura złożona ze 101 kwadratów jednostkowych. Jaka jest najmniejsza liczba kopii danej figury, które mogą zostać wycięte z danego kartki papieru (zakładając, że wycinanie odbywa się optymalnie)?

12. Rozważmy szachownicę $n \times n$ ($n \geqslant 2$) podzieloną na n^2 kwadratów jednostkowych. Powiemy, że ustawienie n wież na szachownicy jest *singlowe* jeśli w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się dokładnie jedna wieża. Wyznacz największą taką liczbę całkowitą k, że dla każdego singlowego ustawienia wież istnieje na szachownicy kwadrat $k \times k$ pól bez wież.