Twierdzenie Halla

Grzegorz Dłużewski

10 lipca 2020

Twierdzenie 1. *Mamy dany graf G dwudzielny o (skończonych) klasach X i Y. Wtedy istnieje skojarzenie doskonałe z X do Y wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $A \subset X$ zachodzi $|\Gamma(A)| \geqslant |A|$, gdzie $|\Gamma(A)|$ oznacza zbiór wszystkich sąsiadów A (nazywamy to* warunkiem Halla*).*

Dowód. Sposób I:

Załóżmy, że znaleźliśmy jakieś skojarzenie M. Ścieżkę po krawędziach G nazwiemy *zmienną*, jeśli jej krawędzie na zmianę są i nie są w M, a jeśli ponadto jej pierwsza i ostatnia krawędź nie należy do M.

Załóżmy, że dla każdego $A \subset X$ mamy $|\Gamma(A)| \geqslant |A|$, a jednocześnie największe możliwe skojarzenie M nie jest doskonałe. Innymi słowy, istnieje $x \in X$, który nie należy do tego skojarzenia.

No to co? x ma jakiegoś sąsiada $y \in Y$ (bo inaczej biorąc $X = \{x\}$ uzyskalibyśmy sprzeczność z warunkiem Halla). Ta krawędź sama w sobie tworzy ścieżkę zmienną. Weźmy teraz najdłuższą ścieżkę P (jej wierzchołki się nie powtarzają) zmienną zaczynającą się w x.

Jeśli jej koniec $y \in Y$ nie należy do skojarzenia M, to wyrzucamy z M wszystkie krawędzie z $M \cap P$, a dodajemy wszystkie krawędzie z $P \backslash M$. W ten sposób otrzymujemy większe skojarzenie, sprzeczność.

Jeśli z kolei $y \in Y$ należy do skojarzenia, to dodajemy do ścieżki $z \in X$, że $zy \in M$ (z nie ma jeszcze w ścieżce, czemu?), a następnie chcielibyśmy dodać jakiegoś sąsiada z spoza P. Ale takowy nie musi istnieć.

Sposób I – podejście II:

Bierzemy **wszystkich** sąsiadów x, tworząc masę potencjalnych zmiennych ścieżek, następnie "rzutujemy je w dół", tzn. rozszerzamy te ścieżki o ich pary w M (jeśli te pary nie istnieją, to mamy koniec zadania, bo otrzymujemy zmienną ścieżkę o obu końcach poza M). Następnie rozszerzamy te ścieżki o sąsiadów, "rzutujemy w dół" itd. W pewnym momencie ten proces musi się zakończyć. Ale wtedy dojdziemy otrzymujemy ścieżkę P taką, że $|P \cap X| = |P \cap Y| - 1$, a jednocześnie $\Gamma(P \cap X) = P \cap Y$, sprzeczność.

Sposób II:

Indukcja po $|X|$.
Jeśli dla każdego $A \subsetneq X$ zachodzi $|\Gamma(A)| > |A|$, to bierzemy dowolny $x \in X$, jego sąsiada $y \in Y$, wyrzucamy wierzchołki x, y z G i stosujemy założenie indukcyjne.

Jeśli z kolei, istnieje $A \subsetneq X$ taki, że $|\Gamma(A)| = |A|$, to stosując założenie indukcyjne znajdujemy skojarzenie w A i widzimy, że możemy znaleźć skojarzenie z $X \backslash A$ do $Y \backslash \Gamma(A)$. Rzeczywiście, dla każdego $B \subset X \backslash A$, zbiór sąsiadów B w $Y \backslash \Gamma(A)$, który oznaczymy $\tilde{\Gamma}(B)$ spełnia:

$$|\tilde{\Gamma}(B)| + |\Gamma(A)| = |\Gamma(A \cup B)| \geqslant |A \cup B| = |A| + |B|$$

zatem $|\tilde{\Gamma}(B)| \geqslant |B|$ i istnieje również skojarzenie z B do $Y \backslash \Gamma(A)$. $\square$

Zadanie 1. Mamy dwie kwadratowe kartki papieru, każda o polu 2020. Każdą z nich podzielono na 2020 wielokątów o polu 1 (możliwe, że w całkowicie różny sposób). Udowodnić, że gdy nałoży się jedną na drugą, to można je przebić 2020 pinezkami w taki sposób, by każdy wielokąt na każdej kartce został przebity dokładnie raz.

Zadanie 2. Święty Mikołaj ma n prezentów, które chce rozdać n dzieciom, przy czym i-te dziecko lubi x_i prezentów. Udowodnić, że jeśli

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \leqslant 1$$

to święty Mikołaj może rozdać prezenty dzieciom w taki sposób, aby każde było zadowolone.

Zadanie 3. Dominik i Julia wykonują następującą sztuczkę magiczną. Podczas, gdy Julia jest poza pokojem, Dominik zachęca jednego z widzów do podania pewnej liczby N-cyfrowej (może ona mieć wiodą Następnie zakrywa on dwie wybrane przez siebie sąsiednie cyfry. Po powrocie do pokoju, Julia widząc liczbę z zakrytymi dwoma sąsiednimi cyrfami mówi, co się pod nimi kryje. Jaka jest najmniejsza wartość N, dla której ta sztuczka może się udać niezależnie od tego, jaką liczbę poda widz?

Zadanie 4. Tabelę $n \times n$ wypełnioną liczbami od 1 do n nazywamy *kwadratem łacińskim*, jeśli dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ liczba k występuje w każdej kolumnie i każdym wierszu dokładnie raz. Udowodnić, że po wypełnieniu pierwszych k rzędów kwadratu łacińskiego (kolejne są wciąż puste) w taki sposób, że każda wartość występuje w każdym rzędzie i kolumnie co najwyżej raz można uzupełnić tę tabelę do kwadratu łacińskiego.

Zadanie 5. Pewien turniej szachowy, w którym brało udział $2n$ uczestników trwał $2n - 1$ dni i każdego dnia każdy zawodnik rozegrał dokładnie jeden mecz, przy czym w trakcie całego turnieju każdy zagrał z każdym. Czy da się z każdego dnia wybrać po jednym zawodniku, który wygrał danego dnia w taki sposób, by żaden zawodnik nie został wybrany dwa razy?

Zadanie 6. Oznaczmy $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Dwa podzbiory $A, B \subset [n]$ nazywamy nieporównywalnymi, jeśli żaden z nich nie jest podzbiorem drugiego. Udowodnić, że maksymalna liczba nieporównywalnych podzbiorów wynosi $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Zadanie 7. Dany jest graf dwudzielny o klasach $X = \mathbb{N}, Y = \mathbb{N}$. Załóżmy, że dla każdego $A \subset X$ mamy $|\Gamma(A)| \geqslant |A|$. Czy istnieje skojarzenie doskonałe z X do Y? Co jeśli stopień każdego wierzchołka jest skończony?

Zadanie 8. *Linią* w prostokątnej tabeli M wypełnionej zerami i jedynkami będziemy nazywać kolumnę lub rząd. Udowodnić, że najmniejszy zestaw linii przykrywających wszystkie jedynki jest równy maksymalnej liczbie jedynek, z których żadne dwie nie leżą na tej samej linii.

Zadanie 9. Udowodnić, że w grze w kółko i krzyżyk na $[n]^d$ (tzn. $n \times n \times n \times \ldots$ w d wymiarach), nie istnieje strategia wygrywająca.