Zadania

1. W przedziale $(1, 2^n)$ wybrano $2n+1$ liczb. Pokaż, że pewne trzy z nich są długościami boków trójkąta.

2. Wewnątrz kwadratu o boku 1 znajduje się kilka okręgów, których suma obwodów jest równa 10. Pokaż, że istnieje prosta, która przecina co najmniej 4 okręgi.

3. Dany jest zbiór rozłącznych łuków na okrąg o obwodzie równym 1, których suma długości jest większa niż $1 - \frac{1}{n}$. Pokaż, że istnieje n-kąt regularny wpisany w ten okrąg, którego wierzchołki są pokryte danymi łukami.

4. Pokaż, że dowolny ciąg $mn+1$ liczb rzeczywistych zawiera $(m+1)$-elementowy podciąg nierosnący lub $(n+1)$-elementowy podciąg niemalejący.

5. Danych jest 20 dzielników naturalnych liczby 70!. Wykaż, że wśród tych dzielników istnieją takie, których iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej.

6. Niech $\{0,1\}^n$ oznacza zbiór ciągów n-wyrazowych o wyrazach w zbiorze $\{0,1\}$. Niech S będzie podzbiorem $\{0,1\}^n$ takim, że dowolne dwa elementy zbioru S różnią się na co najmniej trzech pozycjach. Pokaż, że
$$\#S \leqslant \frac{2^n}{n+1}.$$

7. Dane są liczby całkowite dodatnie a, b oraz liczby całkowite u, v, w. Pokaż, że kongruencja
$$ux + vy + wz \equiv 0 \pmod{ab}$$
posiada niezerowe rozwiązanie (x, y, z) takie, że
$$|x| \leqslant \sqrt{b},\ |y| \leqslant \sqrt{a},\ |z| \leqslant \sqrt{ab}.$$

8. Na płaszczyźnie dany jest wielokąt W o polu większym od n. Udowodnij, że można tak przesunąć wielokąt W o pewien wektor, że we wnętrzu W znajdzie się co najmniej $n+1$ punktów kratowych.

9. Punkt kratowy na płaszczyźnie jest to punkt o obu współrzędnych całkowitych. Niech n będzie największą liczbą naturalną o następującej własności: istnieje n takich różnych punktów kratowych na płaszczyźnie, że środek ciężkości każdych czterech z nich (parami różnych) nie jest punktem kratowym. Wyznacz największe możliwe n.

10. Udowodnij, że dla dowolnego zbioru $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ zawierającego liczby rzeczywiste, istnieje niepusty podzbiór $\mathcal{S}$ zbioru $\mathcal{X}$ oraz liczba całkowita m, że
$$\left| m + \sum_{s \in \mathcal{S}} s \right| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$