Daniel Murawski

Elementy Algebry Liniowej

1 Przestrzenie liniowe

1. **Przestrzenią liniową** nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy zbiór V, którego elementy nazywamy **wektorami**. Na zbiorze tym określamy działania:

   - dodawania ($V \times V \to V$): $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$
   - oraz mnożenia przez skalar ($\mathbb{K} \times V \to V$): $\mathbf{u} = a\mathbf{v}$.

   Działania te spełniają następujące warunki:

   - przemienność dodawania: $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$,
   - łączność dodawania: $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u})$ (czyli jest sens pisać $\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{u}$),
   - element neutralny dodawania: istnieje taki $\mathbf{0} \in V$, że dla każdego $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v}+\mathbf{0} = \mathbf{v}$,
   - elementy przeciwne dodawania: dla każdego $\mathbf{v} \in V$ istnieje taki $\mathbf{w} \in V$, że $\mathbf{v}+\mathbf{w} = \mathbf{0}$ (wektor $\mathbf{w}$ oznaczamy $-\mathbf{v}$),
   - rozdzielność mnożenia przez skalar względem dodawania wektorów: $a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$,
   - rozdzielność mnożenia przez skalar względem dodawania skalarów: $(a+b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$,
   - zgodność mnożenia przez skalar z mnożeniem skalarów: $(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$ (można więc pisać $ab\mathbf{v}$),
   - mnożenie przez $1 \in \mathbb{K}$ jest identycznością: $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

   (Intuicyjnie: możemy wektory dodawać i mnożyć przez skalary i działania te zachowują się tak jak byśmy chcieli)

2. **Pzykłady przestrzeni liniowych:**

   - $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ogólnie $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$,
   - K^n nad K,
   - $K[x]$ - wielomiany nad K,
   - zbiór funkcji o wartościach rzeczywistych określonych na dowolnym zbiorze nad $\mathbb{R}$,
   - funkcje ciągłe,
   - $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$.

3. Warto tu rozważyć parę prostych ćwiczeń, pokazać że istnieje dokładnie jeden element zerowy, że jeśli $0 \in \mathbb{K}$ jest elementem zerowym ciała, to $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, podobnie $-1\mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

2 Liniowa niezależność, rozpinanie, wymiar

1. **Kombinacją liniową** wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ nazywamy wektor $\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n$.

2. **Przestrzenią rozpiętą (generowaną)** przez zbiór wektorów X nazywam zbiór kombinacji liniowych wektorów z X. (Ćwiczenie: sprawdzić że jest to przestrzeń liniowa). Oznaczamy ten zbiór $lin(X), span(X)$. Jeśli $span(X) = V$, to mówimy że zbiór X **rozpina** przestrzeń V.

3. Zbiór wektorów nazywamy **liniowo niezależnym** jeśli dla każdego jego skończonego podzbioru $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ zachodzi wynikanie:

   Jeśli $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, to $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

4. Jeśli liniowo niezależny zbiór X rozpina przestrzeń V, to nazywamy ten zbiór **bazą** przestrzeni V.

Twierdzenie. Niech $B = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$. Następujące warunki są równoważne:

1. B jest bazą,
2. Każdy wektor z V ma **jednoznaczne** przedstawienie jako kombinacja liniowa wektorów z B,
3. B jest minimalnym układem rozpinającym V,
4. B jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V.

Twierdzenie (bez dowodu): Wszystkie bazy danej przestrzeni są równoliczne.
Definicja: Moc bazy przestrzeni V nazywamy **wymiarem** przestrzeni V, ozn. $dim(V)$
Twierdzenie (bez dowodu): Każda przestrzeń liniowa ma bazę. Dowód jest dość łatwy ale techniczny dla skończonego wymiaru, wymaga aksjomatu wyboru dla wymiaru nieskończonego. W tym wypadku twierdzenie ma też ciekawe konsekwencje jak istnienie bazy $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$.
Przykłady, fakciki:

- W $\mathbb{K}^n$ układ $e_1, ..., e_n$, gdzie $e_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (1 na i-tej współrzędnej) jest bazą. Bazę tę nazywamy bazą kanoniczną lub standardową.
- Układ $1, x, x^2, ...$ jest bazą $\mathbb{K}[x]$. Układ $x, x^2, x^3, ...$ mimo równoliczności z bazą i liniowej niezależności nie jest bazą.
- Dla przestrzeni skończenie wymiarowej każdy układ liniowo niezależny równoliczny z bazą jest bazą.
- Liniowa zależność układu $v_1, ..., v_n$ jest równoważna temu, że dla pewnego i wektor v_i jest kombinacją liniową pozostałych wektorów.
- Każdy układ co najmniej $n + 1$ wektorów w $\mathbb{R}^n$ jest liniowo zależny.

3 Iloczyny skalarne, ortogonalność

Funkcja $f : V \to W$ jest **liniowa**, jeśli $f(c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{v})$ oraz $f(\mathbf{v}+\mathbf{W}) = f(\mathbf{v}+\mathbf{w})$. Obserwacja: funkcja liniowa jest wyznaczona jednoznacznie wyznaczona przez zadanie jej wartości na bazie przestrzeni. Szczególnym rodzajem funkcji liniowych są funkcjonały. Jeśli V jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{K}$, to **funkcjonałem liniowym** jest funkcja $f : V \to K$. **Formą dwuliniową** nazwiemy funkcję B, która jest funkcjonałem liniowym względem obu zmiennych, tzn. przy ustalonym $y \in V$, $B(x, y)$ jest funkcjonałem liniowym zmiennej x i podobnie przy ustalonym $x, \in V$ $B(x, y)$ jest funkcjonałem liniowym zmiennej y. Powiemy, że forma dwuliniowa jest symetryczna jeśli $B(x, y) = B(y, x)$. Dalej rozpatrujemy przestrzenie nad $\mathbb{R}$. Powiemy o formie, że jest dodatnio określona, jeśli dla $V \ni x \neq 0$, $B(x, x) > 0$. Dodatnio określoną i symetryczną formę dwuliniową nazwiemy **iloczynem skalarnym**. Najczęściej oznaczamy iloczyn skalarny x, y przez $\langle x, y\rangle$, definiujemy **normę** jako $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
Przykłady:

- **Standardowy iloczyn skalarny**: Jeśli $V = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, to $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$. Wtedy norma jest normą euklidesową, jeśli kąt między wektorami wynosi α, to $\langle x, y\rangle = ||x|| \cdot ||y|| \cos(\alpha)$. Jeśli nie jest powiedziane inaczej, to przez iloczyn skalarany rozumiemy standardowy iloczyn skalarny.

- W przestrzeni funkcji ciągłych na przedziale $[0, 1]$ iloczyn skalarny zadany przez całkę: $\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg$.

Jeśli $\langle x, y\rangle = 0$, to wektory x, y nazwiemy ortogonalnymi (ozn. $x \perp y$). Ogólnie, układ $x_1, ..., x_n$ nazwiemy ortogonalnym jeśli wektory w nim są ortogonalne.

Twierdzenie: Wektory ortogonalne są liniowo niezależne.

Nierówność Cauchy'ego-Schwartza: Jeśli $\langle\cdot, \cdot\rangle$ jest iloczynem skalarnym, a $||\cdot||$ zadaną przez niego normą, to:

$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant ||x|| \cdot ||y||,$$

przy czym równość zachodzi tylko jeśli x, y liniowo zależne. Zauważmy, że dobrze znana forma nierówności C-S to przypadek dla standardowego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^n$.

Zauważmy, że pojęcie ortogonalności ma sens dla dowolnej formy dwuliniowej, tzn $x \perp y$ jeśli $B(x, y)$. Dla przestrzeni liniowej $V \subset W$ niech $V^\perp \subset W$ oznacza zbiór wektorów prostopadłych do wszystkich wektorów z V, nazywamy go przestrzenią prostopadłą (ćwiczenie: sprawdzić że jest to przestrzeń liniowa). Powiemy o fromie B że jest niezdegenerowana, jeśli dla każdego niezerowego wektora x istnieje taki wektor y, że $B(x, y) \neq 0$. Prawdziwe jest następujące ważne twierdzenie (dowód jeśli wystarczy czasu):

Twierdzenie: jeśli $V \subset W$ są skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi, a B niezdegenorawaną formą dwuliniową, to $dim(V) + dim(V^\perp) = dim(W)$.

4 Algebra liniowa a kombinatoryka

Okazuje się, że algebra liniowa jest użytecznym narzędziem w kombinatoryce. Jeśli poruszamy się w zbiorze n-elementowym (bez straty ogólności jest to $\{1, ..., n\}$, to wektorem charakterystycznym jego podzbiou S nazwiemy wektor x_S, który ma 1 na i-tej współrzędnej jeśli $i \in S$ oraz 0 w przeciwnym wypadku. Na szczególną uwagę zasługują dwa proste stwierdzenia:

1. Jeśli potraktujemy wektory charakterystyczne jako wektory nad $\mathbb{R}$, to $\langle x_A, x_B\rangle = |A \cap B|$.

2. Jeśli potraktujemy wektory charakterystyczne jako wektory nad $\mathbb{Z}_p$ i użyjemy formy liniowej zadanej tak samo jak iloczyn standardowy nad $\mathbb{R}$, to $\langle x_A, x_B\rangle = |A \cap B| \mod p$ (najczęściej używane dla $p = 2$).

Najczęściej więc algebra liniowa przydaje nam się w problemach kombinatorycznych dotyczących podzbiorów jakiegoś skończonego zbioru. Częstą strategią będzie używanie powyższych obserwacji by pokazać, że wektory charakterystyczne pewnej rodziny są liniowo niezależne i tym samym ograniczyć jej wielkość.

Zadania:

1. Niech $A_1, ..., A_m$ będą podzbiorami zbioru n-elementowego, takimi że każdy z nich jest nieparzystej mocy, ale przecięcie każdych dwóch różnych jest parzystej mocy. Ile co najwyżej może być równe m?

2. Niech $1 \leqslant k \leqslant n$. Niech $A_1, ..., A_m$ będą podzbiorami pewnego zbioru n-elementowego takimi, że $|A_i \cap A_j| = k$ dla $i \neq j$. Udowodnij, że $m \leqslant n$.

3. Niech X będzie zbiorem n-elementowym. $\mathcal{F}$ jest taką rodziną podzbiorów X, że każdy podzbiór z $\mathcal{F}$ ma parzystą liczbę elementów i przecięcie każdych dwóch podzbiorów z $\mathcal{F}$ ma parzystą liczbę elementów. Udowodnij, że $|\mathcal{F}| = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

4. Niech $A_1, ..., A_m$ będą podzbiorami zbioru n-elementowego, takimi że każdy z nich jest parzystej mocy, ale przecięcie dowolnych dwóch jest nieparzystej mocy. Udowodnij, że $m \leqslant n - 1$.

5. (LXVI OM, Finał, Zadanie 3.) Znaleźć największą liczbę naturalną m o następującej własności: wśród pięciu dowolnie wybranych podzbiorów 500-elementowych zbioru $\{1, 2, ..., 1000\}$ istnieją dwa zbiory, których część wspólna liczy co najmniej m elementów.

6. Niech $f(n)$ będzie równe $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ jeśli n jest parzyste i $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 1$ w przeciwnym wypadku. Niech $A_1, ..., A_m$ będą takimi podzbiorami zbioru n-elementowego, że jeśli $i \neq j$, to $2 \nmid |A_i \cap A_j|$. Udowodnij, że $m \leqslant \max(f(n), n + 1)$.