Zadania

1. Udowodnij, że dla dowolnego n-kąta wypukłego można wybrać $n-2$ punkty w jego wnętrzu tak, że każdy trójkąt wyznaczony na trzech wierzchołkach n-kąta zawiera dokładnie jeden z wybranych punktów w swoim wnętrzu.

2. Danych jest $2n + 3$ punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie są współliniowe, a żadne cztery nie leżą na jednym okręgu. Udowodnij, że istnieje okrąg wyznaczony na trzech z danych punktów, taki że w jego wnętrzu leży dokładnie n punktów.

3. Niech $n \in \mathbb{N}_{>1}$. Na płaszczyźnie danych jest $2n$ punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. n z tych punktów pomalowano na czerwono, a pozostałe na niebiesko. Prostą na płaszczyźnie nazwiemy *równoważącą* jeżeli przechodzi przez jeden punkt czerwony i jeden punkt niebieski oraz dla każdej strony tej prostej liczba punktów niebieskich po tej stronie jest taka sama jak liczba punktów czerownych po tej stronie. Udowodnij, że istnieją co najmniej dwie proste równoważące.

4. We wnętrzu prostokąta R znajduje się n punktów, z których żadne dwa nie leżą na prostej równoległej do boków prostokąta R. Prostokąt R został podzielony na mniejsze prostokąty o bokach równoległych do boków prostokąta R w taki sposób, że żaden z tych prostokątów nie zawiera we wnętrzu żadnego z danych n punktów. Udowodnij, że prostokąt R został podzielony na co najmniej $n + 1$ prostokątów.

5. Nogi cyrkla zostały wbite w dwa punkty kratowe nieskończonej kraty o całkowitych współrzędnych. Odległość pomiędzy nogami cyrkla nie może być zmieniona. W ramach pojedynczej operacji można przenieść jedną z nóg cyrkla na inny punkt kratowy, nie ruszając przy tym drugiej nogi. Rozstrzygnij, czy w skończonej liczbie ruchów można zamienić miejscami początkowe pozycje nóg cyrkla.

6. Znajdź wszystkie takie zbiory $\mathcal{S}$ zawierające skończenie wiele punktów płaszczyzny, że żadne trzy nie są współliniowe oraz dla dowolnych trzech punktów $A, B, C \in \mathcal{S}$, istnieje inny punkt $D \in \mathcal{S}$ taki, że punkty A, B, C, D w pewnej kolejności tworzą równoległobok.

7. *Paskiem* o szerokości w nazwiemy zbiór wszystkich tych punktów, które leżą na lub pomiędzy dwiema równoległymi prostymi odległymi o w. Niech $\mathcal{S}$ będzie zbiorem n ($n \geqslant 3$) punktów na płaszczyźnie, takim że dowolne trzy punkty z $\mathcal{S}$ można pokryć paskiem o szerokości 1. Udowodnij, że $\mathcal{S}$ może być pokryty paskiem o szerokości 2.

8. Dane sa dwa okręgi, każdy o obwodzie długości 1000. Na pierwszym okręgu zaznaczono 1000 punktów, zaś na drugim pewną liczbę łuków, o łącznej długości mniejszej niż 1. Udowodnij, że można tak przyłożyć do siebie te okręgi, aby żaden z punktów nie leżał na zaznaczonym łuku

9. Skończony zbiór kwadratów ma sumaryczne pole 4. Udowodnij, że można je tak ustawić, aby pokrywały kwadrat o boku 1.

10. Dana jest kwadratowa kartka papieru o wymiarach 102×102 podzielona na kwadraty jednostkowe oraz pewna nieznana spójna figura złożona ze 101 kwadratów jednostkowych. Jaka jest najmniejsza liczba kopii danej figury, które mogą zostać wycięte z danej kartki papieru (zakładając, że wycinanie odbywa się optymalnie)?