

Решения на задачите от контролно 1 по Логическо програмиране

17 ноември 2018

1 Определелимост

Нека $\mathcal{L} = \langle p \rangle$ е език с за предикатно смятане с формално равенство, имащ само един нелогически символ - двуместният предикатен символ p . $\mathcal{A} = \langle ChessBoard; p^A \rangle$ е структура за \mathcal{L} , където под *ChessBoard* разбираме множеството от всички наредени полета от стандартната шахматна дъска (от **a1** до **h8**).

Вариант 1

За всеки два елемента a и b на *ChessBoard*:

$p^A(a, b) \iff$ от полето a с кон може за един ход да се отиде в полето b .

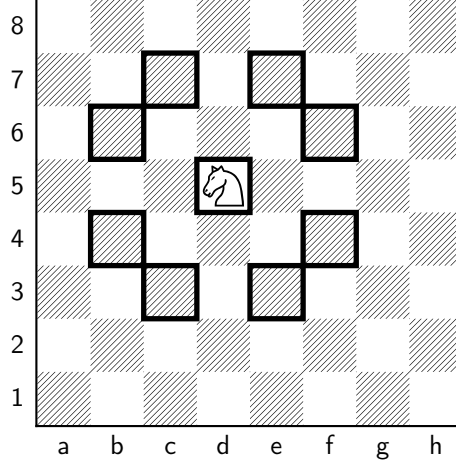
- (i) Определете множеството от всички ъглови полета.
- (ii) Определете множеството от всички периферни полета.
- (iii) Докажете, че в тази структура множеството **{a2}** е неопределимо.

Вариант 2

За всеки три елемента a , b и c на *ChessBoard*:

$p^A(a, b, c) \iff$ от полето a с кон може за един ход да се отиде в полето b
или в полето c .

- (i) Определете множеството от всички ъглови полета.
- (ii) Определете множеството от всички периферни полета.
- (iii) Докажете, че в тази структура множеството **{a1}** е неопределимо.



Примерно решение:

За вариант 2 лесно можем да минем към вариант 1:

$$\varphi_{\text{neighbour}}(a, b) \Rightarrow p(a, b, b)$$

$$\varphi_{\text{has_two_neighbours}}(a) \Rightarrow \exists b \exists c (\neg(b \doteq c) \& p(a, b) \& p(a, c) \& \forall d (p(a, d) \Rightarrow (d \doteq b \vee d \doteq c)))$$

$$\varphi_{\text{has_three_neighbours}}(a) \Rightarrow \exists b \exists c \exists d (\neg(b \doteq c) \& \neg(c \doteq d) \& \neg(b \doteq d) \& p(a, b) \& p(a, c) \& p(a, d) \& \forall e (p(a, e) \Rightarrow (e \doteq b \vee e \doteq c \vee e \doteq d)))$$

$$\varphi_{\text{has_four_neighbours}}(a) \Rightarrow \exists b \exists c \exists d \exists e (\neg(b \doteq c) \& \neg(c \doteq d) \& \neg(b \doteq d) \& \neg(e \doteq b) \& \neg(e \doteq c) \& \neg(e \doteq d) \& p(a, b) \& p(a, c) \& p(a, d) \& p(a, e) \& \forall f (p(a, f) \Rightarrow (f \doteq b \vee f \doteq c \vee f \doteq d \vee f \doteq e)))$$

$$\varphi_{\text{edge_fields}}(a) \Rightarrow \varphi_{\text{has_two_neighbours}}(a)$$

$$\varphi_{\text{peripheral_fields}}(a) \Rightarrow (\varphi_{\text{has_two_neighbours}}(a) \vee \varphi_{\text{has_three_neighbours}}(a) \vee (\varphi_{\text{has_four_neighbours}}(a) \& \neg \exists b \exists c (\neg(b \doteq c) \& p(a, b) \& p(a, c) \& \varphi_{\text{has_four_neighbours}}(b) \& \varphi_{\text{has_four_neighbours}}(c))))$$

Можем да разгледаме *ChessBoard* като множество от наредени двойки $\{ \langle \text{letter}, \text{number} \rangle \mid \text{letter} \in \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \& \text{number} \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \}$.

Автоморфизмът може да бъде ротация на 180°.

Нека k е автоморфизъм от *ChessBoard* в *ChessBoard* като:

$$k(< letter, number >) = \begin{cases} <h, 9\text{-number}>, & \text{if letter} == a \\ <g, 9\text{-number}>, & \text{if letter} == b \\ <f, 9\text{-number}>, & \text{if letter} == c \\ <e, 9\text{-number}>, & \text{if letter} == d \\ <d, 9\text{-number}>, & \text{if letter} == e \\ <c, 9\text{-number}>, & \text{if letter} == f \\ <b, 9\text{-number}>, & \text{if letter} == g \\ <a, 9\text{-number}>, & \text{if letter} == h \end{cases}$$

Имаме, че $k = k^{-1}$ и не променяме дали едно поле е достижимо от друго с един ход на коня т.е. е в сила, че за всеки a и b от *ChessBoard* $p^A(a, b) \iff p^A(k(a), k(b))$. Взимаме огледалния образ на дъската. Така, ако $a1 \in \{a1\}$, то $k(a1) = h8 \notin \{a1\}$ и следователно $\{a1\}$ не е определимо. Аналогично за вариант 1.

2 Изпълнимост

Да се докаже, че е изпълнимо множеството, съставено от следните формули:

Вариант 1

$$\exists x \forall y \exists z (p(x, y) \implies (p(x, x) \vee (p(y, z) \vee \neg p(x, z))))$$

$$\forall x \forall y (p(x, y) \implies q(x, y))$$

$$\exists x (\exists y q(x, y) \& \exists y \neg q(x, y))$$

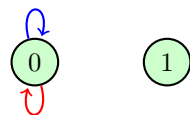
Вариант 2

$$\exists x \forall y (\neg p(x, y) \vee p(x, x) \vee \exists z (p(y, z) \vee \neg p(x, z)))$$

$$\neg \exists y \exists x (p(y, x) \& \neg q(y, x))$$

$$\exists y \exists z \exists x (q(x, y) \& \neg q(x, z))$$

Примерно решение:



$$S = (\{0, 1\}, p^S, q^S)$$

$$p^S = \{(0, 0)\}$$

$$q^S = \{(0, 0)\}$$