Метод на резолюцията

Използва се най-често, за да:

* Да докажем, че м-во от затворени ф-ли е неизпълнимо. Т.е. допускаме, че е изпълнимо и искаме да стигнем до противоречие.
* Да докажем вярността на ф-ли от вида $\varphi_1 \& \varphi_2 \& \dots \& \varphi_n \Rightarrow \psi_1 \vee \psi_2 \vee \dots \vee \psi_m$, като взимаме отрицанието и използваме метода, за да докажем неизпълнимост на м-вото $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_m\}$

Следствие// Чрез този метод можем да познаем валидни тавтологии.

Ако φ е неизпълнимо $\Leftrightarrow \models \neg\varphi$.

Тв/ Методът е полуразрешима процедура за проверка дали крайно м-во от затворени ф-ли е неудовлетворимо.

Приложение:

Def① // Литерал

Литерал ще наричаме атомарна ф-ла $L \in Atp$ или $\neg L$

Atp = PVAR азбука на съжд. променливи

* $\neg L$ не винаги е литерал, но съществува еквивалентен на него литерал деф. като:

$$L^{\complement} := \begin{cases} \neg p, & L = p \\ p, & L = \neg p \end{cases}$$

Def② / Елементарна дизюнкция

Дизюнкция от литерали $L_1 \vee \dots \vee L_n$

* $I_0 \models^{g} L_1 \vee \dots \vee L_n \Leftrightarrow \exists i : 1 \le i \le n : I_0(L_i) = И$

★ $L_1 \vee \dots \vee L_n$ е дизj. тавтология <=> ∃ двойка двойни литерали в него

Def ③ Дизюнкт

Крайно м-во от литерали

Взимаме $L_1 \vee \dots \vee L_n$ и се отказваме от наредбата и от кратността на литералите.

$L_1 \vee \dots \vee L_n \longmapsto D = \{L_{i_1}, \dots, L_{i_k}\}$

губим инфо. за наредба и кратност, но $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$

логическата ст-т и ~~нар~~ изпълнимостта се запазват.

$\{\}$ → Празен дизюнкт: Тривиално неизпълним!

Def ④ Резолвента

Нека D_1 и D_2 са дизюнкти и $I_0 \not\models \{D_1, D_2\}$.

Нека $L \in D_1$, $L^c \in D_2$. Тогава

$D_3 = (D_1 \setminus \{L\}) \cup (D_2 \setminus \{L^c\})$ наричаме резолвента на D_1 и D_2 и $I_0 \not\models D_3$

★ На едно стъпка елиминираме САМО една двойка двойни литерали, не

~~$\{p, \neg q, t\}$ $\{\neg p, q, v\}$~~

Def ⑤ Резолютивен извод

Това е крайна редица от дизюнкти всеки член, на която е:

$D_1, D_2 \in S$ стартово м-во от дизюнкти извл. от ф-ли

$$D_i \begin{cases} \in S \\ \exists j, k : 1 \le j \ne k < i : D_i = Res(D_j, D_k) \end{cases}$$

Метод на резолюцията за предикатното смятане

Игра:

Ако стигнем до неудовл. на и-вото ф-ли => => Game over We win

В противен случай се зацикляне.

Ще илюстрираме метода по пример.

Нека [redacted]

$\varphi \leftrightharpoons \forall x \neg \forall y (p(x,y) \Leftrightarrow \neg \forall z (p(z,y) \& p(y,z)))$

φ е тавтология. Нека семантично го проверим.

1. Нека допуснем, че съществува y, така че $p(x,y) = T$ и $p(y,x) = T$. Тогава за $z = x$

$$\underbrace{\neg\underbrace{(\underbrace{p(x,y)}_{T} \Leftrightarrow \underbrace{\neg(\underbrace{p(x,y) \& p(y,x)}_{T})}_{F})}_{F}}_{T}$$

2. Нека допуснем, че за всяко y $p(x,y) = F$ и $p(y,x) = F$. Тогава и $p(x,x) = F$ и за $y = z = x$

$$\underbrace{\neg\underbrace{(\underbrace{p(x,x)}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{\neg(\underbrace{p(x,x) \& p(x,x)}_{F})}_{T})}_{F}}_{T}$$

Нека $\varphi_1 \leftrightharpoons \neg\varphi$

(Ст. 0) Премахваме всички "$\Rightarrow$" и "$\Leftrightarrow$" заграждайки от най-вътрешно вложените навън. Избутваме "$\neg$" докато не стигнат до атомарни ф-ли.

Използваме:

$\varphi \Rightarrow \psi \dashv\models \neg\varphi \vee \psi$

$\varphi \Leftrightarrow \dashv\models \begin{cases} (\varphi \& \psi) \vee (\neg\varphi \& \neg\psi) \\ (\varphi \Rightarrow \psi) \& (\psi \Rightarrow \varphi) \dashv\models (\neg\varphi \vee \psi) \& (\neg\psi \vee \varphi) \end{cases}$

$\neg(\varphi \vee \psi) \dashv\models (\neg\varphi \& \neg\psi)$

$\neg(\varphi \& \psi) \dashv\models (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

$\neg\neg\varphi \dashv\models \varphi$

$\neg\forall x \varphi \dashv\models \exists x \neg\varphi$

$\neg\exists x \varphi \dashv\models \forall x \neg\varphi$

$$\varphi_2 \leftrightharpoons \neg\forall x \neg\forall y ((\neg p(x,y) \vee \neg\exists z (p(z,y) \& p(y,z))) \& (p(x,y) \vee \neg\neg\exists z (p(z,y) \& p(y,z))))$$

$$\dashv\models \exists x \forall y ((\neg p(x,y) \vee \forall z (\neg p(z,y) \vee \neg p(y,z))) \& \& (p(x,y) \vee \exists z/t (p(z/t,y) \& p(y,z/t))))$$

различни са

(Ст. 1) Привеждане ф-лите/ата в ПНФ

def/ ПНФ (Пренексна нормална форма)

Казваме, че φ е в ПНФ, ако

$\varphi = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \theta$ и $Q_i \in \{\exists, \forall\}$:

1. θ е безкв. ф-ла
2. $x_i \neq x_j$, $1 \leq i \neq j \leq n$

/* Преименуване */

$$\varphi_3 \leftrightharpoons \exists x \forall y ((\neg p(x,y) \vee \forall z (\neg p(z,y) \vee \neg p(y,z))) \& \& (p(x,y) \vee \exists t (p(t,y) \& p(y,t)))) \dashv\models$$

Правило за изнасяне на квантор пред скоби: if $x \notin Var_{free}[\psi]$ then:

- $\forall x \varphi \vee \psi \dashv\models \forall x (\varphi \vee \psi)$
- $\exists x \varphi \vee \psi \dashv\models \exists x (\varphi \vee \psi)$
- $\forall x \varphi \& \psi \dashv\models \forall x (\varphi \& \psi)$
- $\exists x \varphi \& \psi \dashv\models \exists x (\varphi \& \psi)$

$\vdash \exists x \forall y \exists t \forall z$

искаме винаги първо дойзвваще квантори за $\exists$, защото за СНФ иска да замесване с функционални символи с по-голяма арности

$(\neg p(x,y) \vee \neg p(z,y) \vee \neg p(y,z))$ &
$(p(x,y) \vee (p(t,y)$ & $p(y,t)))$

(Ст. 2) Привеждане ф-лите в СНФ (Скулемувa нормална форма) т.е. всяка променлива по екзистенциален квантор се замества с функ. символ зависещ от променливите по универсални квантори преди това конкретна пром. по екзист. квантор.

- $\varphi \leftrightharpoons \exists x \psi$, то едностъпковата скулемизация ни дава $\varphi_S \leftrightharpoons \psi[x / c_x]$ константа

Отляво надясно ги прем. екзист. квантори.

$\# c_x = 0$

- $\varphi \leftrightharpoons \forall y_1 .. \forall y_n \exists x \psi$, то -||- ни дава

$\varphi_S \leftrightharpoons \underset{\forall y_1 .. \forall y_n}{\wedge} \psi[x / f_x(y_1, .., y_n)]$

като $\# f_x(y_1, .., y_n) = n$

Ние имаме нужда от 2 едностъпкови скулем.

$\varphi_S \leftrightharpoons \forall y \exists t \forall z (\neg p(a,y) \vee \neg p(z,y) \vee \neg p(y,z))$ &
$(p(a,y) \vee (p(t,y)$ & $p(y,t)))$

$\varphi^S \leftrightharpoons \varphi_{SS} \leftrightharpoons \forall y \forall z (\neg p(a,y) \vee \neg p(z,y) \vee \neg p(y,z))$ &
$(p(a,y) \vee (p(f(y),y)$ & $p(y, f(y))))$

(ст 3.) Привеждане ф-лите в КНФ (конюнктивна нормална форма)

$\neg(\varphi \& \psi) \rightleftharpoons (\neg\chi \vee \varphi) \& (\neg\chi \vee \psi)$

Прилагане дистриб. закон

$$\varphi_{final} \leftrightharpoons \forall y \forall z [\underbrace{(\neg p(a,y) \vee \neg p(z,y) \vee \neg p(y,z))}_{D_1} \& \underbrace{(p(a,y) \vee p(f(y),y))}_{D_2} \& \underbrace{(p(a,y) \vee p(y,f(y)))}_{D_3}]$$

$D_1 = \{\neg p(a,y), \neg p(z,y), \neg p(y,z)\}$

$D_2 = \{p(a,y), p(f(y),y)\}$

$D_3 = \{p(a,y), p(y,f(y))\}$

Играта!

Цел: ■ да го изведем

Правило 1:

Намиране най-общата резолвента на два съществуващи дизюнкта.

Ако D_1 и D_2 са диз.

$D_1 = \{L\} \cup D_1'$
$D_2 = \{\tilde{L}\} \cup D_2'$ } без общи променливи преименуване !!!

Намиране субституция σ, такава че $L\sigma = \tilde{L}\sigma$

$L\sigma = \neg L\sigma$ и

$Res_L(D_1, D_2) = D_1'\sigma \cup D_2'\sigma$

☆ Заместваме единствено променливи с нещо, не обратното. Под нещо имам предвид константа, функц. символ с арг, друга променлива....

Правило 2:

Намираме и правим колапс на литерали в съществуващ дизюнкт.

Ако $D_1 = \{L, \bar{L}\} \cup D_1'$ и намираме субституция σ, така че $L\sigma = \bar{L}\sigma$, то

$$Collapse(D_1) = D_1'\sigma \cup \{L\sigma\}$$

Let's play!

/* Започвайте да се занимавате първо със singletons, ако има */

(1) Разгл. D_1

$$\left| \begin{array}{l} y = a \\ z = a \end{array} \right\} \sigma = \{y/a, z/a\}$$

$$Collapse(D_1) = \{\neg p(a,a)\} = D_4$$

(2) Разгл. D_3 и D_4

$$| y = a \} \ \sigma = \{y/a\}$$

$$Res(D_3, D_4) = \{p(a, f(a))\} = D_5$$

(3) Разгл. D_2 и D_4

$$| y = a \} \ \sigma = \{y/a\}$$

$$Res(D_2, D_4) = \{p(f(a), a)\} = D_6$$

④ <u>Разгл. D_1</u>

$$\left| \begin{array}{l} y = f(a) \\ z = a \end{array} \right\} \sigma = \{ y/f(a), z/a \}$$

$$Collapse(D_1) = \{ \neg p(f(a), a), \neg p(a, f(a)) \} = D_7$$

⑤ <u>Разгл. D_5 и D_7</u>

$$Res(D_5, D_7) = \{ \neg p(f(a), a) \} = D_8$$

⑥ <u>Разгл. D_6 и D_8</u>

$$Res(D_6, D_8) = \blacksquare$$

$\Rightarrow$ т.к. $\neg\varphi$ е неизп., то φ

<u>Помислете си следната задача:</u>

Да се док., че метода на резолюцията, че

$$\varphi_1 \& \varphi_2 \& \varphi_3 \Rightarrow \varphi_4 \text{ е вярна, като}$$

$$\varphi_1 \leftrightharpoons \exists z \forall x (\forall y p(f(x), x) \vee q(z, f(x)))$$

$$\varphi_2 \leftrightharpoons \exists z \forall y (q(y, f(f(y))) \Rightarrow \forall x p(x, f(z)))$$

$$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \forall y (p(x, f(y)) \Rightarrow (p(f(y), x) \vee \neg \exists y \exists x p(x, y)))$$

$$\varphi_4 \leftrightharpoons \exists y (\exists x p(f(x), y) \& \exists x p(y, x))$$