Решения на задачи от писмен изпит по Логическо програмиране

31 август 2018

Съдържание

1 Първа задача на пролог

Да се дефинира на пролог предикат q(X), който при преудовлетворяване генерира в X всички списъци, които представляват крайни:
I.1 аритметични прогресии от съставни естесвени числа.
I.2 геометрични прогресии, нито един член на които не е квадрат на естесвени число.

1.1 Общи предикати

```
nat(0).
nat(N):- nat(M), N is M + 1.

between(A, B, A):- A =< B.
between(A, B, C):- A < B, A1 is A + 1, between(A1, B, C).

genKS(1, S, [S]).
genKS(K, S, [XI|R]):- K > 1, K1 is K - 1,
        between(0, S, XI), S1 is S - XI, genKS(K1, S1, R).
```

1.2 Примерно решение на I.1

```
genArithProg(_, 0, _, []).
genArithProg(Current, N, Diff, [Current|Result]):-
        N > 0, N1 is N - 1, Next is Current + Diff,
        genArithProg(Next, N1, Diff, Result).

isPrime(X):- X > 1 , N is X // 2,
        not(( between(2, N, Y), X mod Y =:= 0)).

main([]).
main(L):- nat(N), genKS(3, N, [Start, NumOfElem, Diff]),
        Diff > 0, NumOfElem > 0,
        genArithProg(Start, NumOfElem, Diff, L),
        not((member(X, L), isPrime(X))).
```

1.3 Примерно решение на I.2

```
genGeomProg(_, 0, _, []).
genGeomProg(Current, N, Diff, [Current|Result]):-
        N > 0, N1 is N - 1, Next is Current * Diff,
        genGeomProg(Next, N1, Diff, Result).

isSquare(X):- N is X // 2, between(0, N, Y), Y * Y =:= X.
```

```
main([]).
main(L):- nat(N), genKS(3, N, [Start, NumOfElem, Diff]),
          Start > 0, Diff > 0, NumOfElem > 0,
          genGeomProg(Start, NumOfElem, Diff, L),
     not((member(X, L), not(isSquare(X)))).
```

2 Втора задача на пролог

I.1 Да се дефинират на пролог едноместни предикати p_1, p_2, p_3 и p_4. такива че даден списък X:
(1) p_1 разпознава дали празният списък е елемент на X,
(2) p_2 разпознава дали X съдържа елементи Y и Z, такива че не всички елементи на Y са елементи на Z,
(3) p_3 разпознава дали X съдържа елемент Y, който съдържа всички елементи на всички елементи на X,
(4) p_4 разпознава дали за всеки елемент Y на X съществува такъв елемент Z на X, че не всички елементи на Z са елементи на Y.

I.2 Да се дефинират на пролог едноместни предикати q_1, q_2, q_3 и q_4. такива че даден списък X:
(1) q_1 разпознава дали празният списък е елемент на X,
(2) q_2 разпознава дали X съдържа елементи Y и Z, които нямат общи елементи,
(3) q_3 разпознава дали X съдържа елемент Y, чиито елементи са еленти на всички елементи на X,
(4) q_4 разпознава дали за всеки елемент Y на X съществува такъв елемент Z на X, че Y и Z нямат общи елементи.

*** Бонус задача:** да се дефинира предикат, които разпознава дали списък L е списък от списъци.

2.1 Общи предикати

```
append([], L2, L2).
append([H|T], L2, [H|R]):- append(T, L2, R).

isSubsetOf(A, B):- not((member(X, A), not(member(X, B)))).

member(X, L):- append(_, [X|_], L).

is_list([]).
is_list([_|_]).

isListOfLists(L):- not((member(X, L), not(is_list(X)))).
```

2.2 Примерно решение на I.1

```
p1(L):- member([], L).
```

```
p2(L):- member(Y, L), member(Z, L),
                      not(isSubsetOf(Y, Z)).

p3(L):- member(Y, L), not((member(Z, L),
                      not(isSubsetOf(Z, Y)))).

p4(L):- not((member(Y, L), not((member(Z, L),
                            not(isSubsetOf(Z, Y)))))).
% p4(X) :- not(p3(X)).
```

2.3 Примерно решение на I.2

```
haveInCommon(X, Y):- member(A, X), member(A, Y).

q1(L):- member([], L).

q2(L):- member(Y, L), member(Z, L),
                      not((haveInCommon(Y, Z))).

q3(L):- member(Y, L), not((member(Z, L),
                      not(isSubsetOf(Y, Z)))).

q4(L):- not((member(Y, L), not((member(Z, L),
                            not(haveInCommon(Y, Z)))))).
```

3 Задача за определимост

Структурата S е с носител множеството от всички дъвета, чиито върхове са естесвени числа, и е с език с формално равенство и двумествен предикатен символ sub, който се интерпретира така:
ако $T_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $T_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ са дървета от универсиума на S, то:
$sub(T_1, T_2) \leftrightarrow V_1 \subseteq V_2$ и $E_1 \subseteq E_2$.

Да се определят:
- множеството от тривиалните дървета
$\{\langle \{n\}, \emptyset \rangle : n \in \mathbb{N}\}$;
- множеството от дърветата с два върха
$\{\langle \{n, m\}, \{\langle n, m \rangle\} \rangle : n, m \in \mathbb{N}, n \neq m\}$;
- предикатът $leaf(T_1, T_2)$, който е верен точно тогава, когато T_1 е дърво с единствен връх и този връх е листо на T_2;
- множеството от онези дървета, в който никой връх не е от степен, по-голяма от 2;

3.1 Общи формули и за двата подхода на разглеждане на задачата

Първо определяме празното дърво:
$\varphi_\emptyset(t_1) \rightleftharpoons \forall t_2 sub(t_1, t_2)$.
След това тривиалното:
$\varphi_{trivial\_tree}(t_1) \rightleftharpoons \neg\varphi_\emptyset(t_1) \& \forall t_2 \big(sub(t_2, t_1) \Longrightarrow (\varphi_\emptyset(t_2) \vee (t_1 \doteq t_2)\big)$.
След това и дървото с два върха:
$\varphi_{edge}(t_1) \rightleftharpoons \neg\varphi_\emptyset(t_1) \& \neg\varphi_{trivial\_tree}(t_1) \&$
$\quad \forall t_2 \big(sub(t_2, t_1) \Longrightarrow (\varphi_\emptyset(t_2) \vee \varphi_{trivial\_tree}(t_2) \vee (t_1 \doteq t_2)\big)$.
Дърво с двоичен връх е такова дърво, за което съществуват две листа (не непременно различни) и чието премахване предизвиква появата на ново листо:
$\varphi_{binary\_node}(t_1) \rightleftharpoons \exists t_2 \exists t_3 \Big(\varphi_{leaf}(t_2, t_1) \& \varphi_{leaf}(t_3, t_1) \&$
$\quad \forall t_4 \big((sub(t_4, t_1) \& \neg sub(t_2, t_4) \& \neg sub(t_3, t_4)) \Longrightarrow \exists t_5 (\neg\varphi_{leaf}(t_5, t_1) \& \varphi_{leaf}(t_5, t_4))\big)\Big)$.
Двоичното дърво е такова дърво, че всяко негово поддърво е от предния тип:
$\varphi_{binary}(t_1) \rightleftharpoons \forall t_2 \big((sub(t_2, t_1) \& \neg\varphi_\emptyset(t_2) \& \neg\varphi_{trivial}(t_2)) \Longrightarrow \varphi_{binary\_node}(t_2)\big)$.

3.2 Примерно решение за случая, когато го разглеждаме като некореново дърво (нямат посоки ребрата)

Листото е такъв връх, за който съществува поддърво на изходното (цялото без листото), такова че каквото и негово разширение да вземем, което не съвпада с изходното, вече няма да е поддърво на изходното.
$\varphi_{leaf}(t_1, t_2) \rightleftharpoons sub(t_1, t_2) \& \varphi_{trivial\_tree}(t_1) \&$
$\quad \exists t_3 \forall t_4 \big((sub(t_3, t_2) \& \neg sub(t_1, t_3) \& \neg(t_3 \doteq t_4) \& sub(t_3, t_4) \& \neg(t_4 \doteq t_2))$

$\Longrightarrow \neg sub(t_4, t_2)\big)$.

Друг подход, чрез определяне на това какво е вътрешен връх. Това е такъв връх, чието отстраняване предизвиква появата на поне две нови различни дървета, които са максимални поддървета на изходнотто:

$\varphi_{inner}(t_1, t_2) \rightleftharpoons sub(t_1, t_2) \& \varphi_{trivial\_tree}(t_1) \& \neg\varphi_{trivial\_tree}(t_2) \&$
$\exists t_3 \exists t_4 \big(\neg(t_3 \doteq t_4) \& \varphi_{mswi}(t_3, t_2, t_1) \& \varphi_{mswi}(t_4, t_2, t_1)\big)$.

MSWI = Maximum subtree without inner node.

$\varphi_{mswi}(t_1, t_2, t_3) \rightleftharpoons sub(t_1, t_2) \& \neg sub(t_3, t_1) \&$
$\forall t_4 \big((sub(t_4, t_2) \& \neg sub(t_3, t_4)) \Longrightarrow sub(t_4, t_1)\big)$.

3.3 Примерно решение за случая, когато го разглеждаме като кореново дърво (имат посоки ребрата)

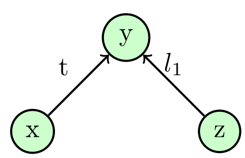
$\varphi_{three\_nodes}(t_1) \rightleftharpoons \neg\varphi_{\emptyset}(t_1) \& \neg\varphi_{trivial\_tree}(t_1) \& \neg\varphi_{edge}(t_1) \&$
$\forall t_2 (sub(t_2, t_1) \Longrightarrow (\varphi_{\emptyset}(t_2) \vee \varphi_{trivial\_tree}(t_2) \vee \varphi_{edge}(t_2) \vee (t_1 \doteq t_2))$.

Определяме обръщане на посоката на дадено ребро:

$\varphi_{change\_direction}(t_1, t_2) \rightleftharpoons \varphi_{edge}(t_1) \& \varphi_{edge}(t_2) \& \neg(t_1 \doteq t_2) \& \forall t_3 (\neg\varphi_{edge}(t_3) \& (sub(t_3, t_1) \iff sub(t_3, t_2)))$.

Определяме посоката на дадено ребро с върхове x и y т.е.
$edge = x \longrightarrow y$:

$\varphi_{direction}(x, y) \rightleftharpoons \exists z \exists t \exists l \exists l_1 \big(\varphi_{trivial}(x) \& \varphi_{trivial}(y) \& \varphi_{trivial}(z) \& \varphi_{edge}(t) \& \varphi_{edge}(l)$
$\& \varphi_{change\_direction}(l, l_1) \& sub(x, t) \& sub(y, t) \& sub(y, l) \& sub(z, l) \&$
$\neg \exists k (sub(t, k) \& sub(l_1, k) \& \varphi_{three\_nodes}(k))\big)$.



Последната формула казва, че не съществува такова дърво в нашия универсиум и така определяма посоката от x към y.

Определяме кога един връх е листо. Също и кога е корен:

$\varphi_{root}(t_1, t_2) \rightleftharpoons sub(t_1, t_2) \& \varphi_{trivial}(t_1) \& \neg \exists t_3 \varphi_{direction}(t_3, t_1)$.
$\varphi_{leaf}(t_1, t_2) \rightleftharpoons sub(t_1, t_2) \& \varphi_{trivial}(t_1) \& \neg \exists t_3 \varphi_{direction}(t_1, t_3)$.

4 Задача за изпълнимост

Да се докаже, че е изпълнимо множеството, съставено от следните формули (a и b са индивидни константи):

II.1
$\forall x(p(a,x)\&p(x,b))$
$\forall x(\forall y(p(x,y)\vee p(y,x))\Longrightarrow(x=a\vee x=b))$
$\forall x\forall y(\forall z(x=z\vee y=z\vee\neg p(x,z)\vee\neg p(z,y))\Longrightarrow\neg p(x,y))$

II.2
$\forall x(r(x,a)\&r(b,x))$
същите като в II.1, но вместо p е r.

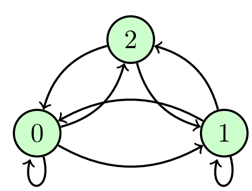
В контрапозиция втората формула казва, че за всеки обект, различен от a и b, съществува друг, с който не е свързан.

$$\forall x((x\neq a\&x\neq b)\Longrightarrow\exists y(\neg p(x,y)\&\neg p(y,x)))$$

В контрапозиция третата казва, че между всеки два елемента в релацията съществува трети различен от първите два, последством който са свързани.

$$\forall x\forall y(p(x,y)\Longrightarrow\exists z(x\neq z\&y\neq z\&p(x,z)\&p(z,y)))$$

4.1 Примерно решение 1



$$S=(\{0,1,2\},p^S,a^S,b^S)$$
$$p^S=\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,1),(1,0),(1,2),(2,1),(2,0)\}$$
$$a^S\rightleftharpoons 0,b^S\rightleftharpoons 1$$

4.2 Примерно решение 2

$$S=(\{\clubsuit,\diamondsuit,1,2,3\},p^S,a^S,b^S)$$
$$\langle x,y\rangle\in p^S\Longleftrightarrow x=\clubsuit\vee x=\diamondsuit\vee y=\clubsuit\vee y=\diamondsuit$$
$$a^S\rightleftharpoons\clubsuit,b^S\rightleftharpoons\diamondsuit$$

4.3 Примерно решение 3

$$S = (\text{множетсвото от всички реални интервали}, p^S, a^S, b^S)$$
$$p^S \rightleftharpoons \subseteq \text{ в смисъла на подинтервал}$$

II.1 $a^S \rightleftharpoons \emptyset, b^S \rightleftharpoons \mathbb{R}$

II.2 $a^S \rightleftharpoons \mathbb{R}, b^S \rightleftharpoons \emptyset$

5 Задача за резолюция

Нека φ_1, φ_2 и φ_3 са следните три формули:

II.1
$\forall x \neg \forall y(q(y,x) \Longrightarrow \exists z(q(y,z) \& \neg r(z,x)))$,
$\forall x(\forall y(q(x,y) \Longrightarrow \exists z(q(y,z) \& q(x,z))) \Longrightarrow \neg \exists z q(x,z))$,
$\forall z \forall y(r(z,y) \Longrightarrow \neg \exists x(q(y,x) \& \neg q(z,x)))$.

II.2
$\forall x \neg \forall y(\forall z(p(z,y) \Longrightarrow r(x,z)) \Longrightarrow \neg p(x,y))$,
$\forall x(\exists y p(y,x) \Longrightarrow \exists y(p(y,x) \& \neg \exists z(p(z,y) \& p(z,x))))$,
$\forall x \neg \exists y(p(x,y) \& \neg \forall z(r(y,z) \Longrightarrow p(x,z)))$.

С метода на резолюцията да се докаже, че
$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \forall x \exists y(p(x,x) \Longrightarrow \exists z(r(z,y) \& \neg r(z,y)))$.
* Тъй като $(r(z,y) \& \neg r(z,y))$ е винаги лъжа, то ψ дефинираме като:
$\neg \forall x \exists y(\neg p(x,x)) \equiv \exists x p(x,x)$.
Респективно q за вариант II.1.

5.1 Примерно решение

II.1
Получаваме следните формули като приведем в ПНФ, СНФ и КНФ:
$\varphi_1^S \rightleftharpoons \forall x \forall z(q(f(x),x) \& (\neg q(f(x),z) \vee r(z,x)))$.
$\varphi_2^S \rightleftharpoons \forall x \forall z \forall t((q(x,g(x)) \vee \neg q(x,t)) \& (\neg q(g(x),z) \vee \neg q(x,z) \vee \neg q(x,t))$.
$\varphi_3^S \rightleftharpoons \forall z \forall y \forall x(\neg r(z,y) \vee \neg q(y,x) \vee q(z,x))$.
$\psi^S \rightleftharpoons q(a,a)$.
Дизюнктите са (нека ги номерираме променливите по принадлежност към дизюнкт):
$D_1 = \{q(f(x_1),x_1)\}$;
$D_2 = \{\neg q(f(x_2),z_2), r(z_2,x_2)\}$;
$D_3 = \{q(x_3,g(x_3)), \neg q(x_3,t_3)\}$;
$D_4 = \{\neg q(g(x_4),z_4), \neg q(x_4,z_4), \neg q(x_4,t_4)\}$;
$D_5 = \{\neg r(z_5,y_5), \neg q(y_5,x_5), q(z_5,x_5)\}$;
$D_6 = \{q(a,a)\}$.

II.2
Получаваме следните формули като приведем в ПНФ, СНФ и КНФ:
$\varphi_1^S \rightleftharpoons \forall x \forall z(p(x,f(x)) \& (\neg p(z,f(x)) \vee r(x,z)))$.
$\varphi_2^S \rightleftharpoons \forall x \forall t \forall z((p(g(x),x) \vee \neg p(t,x)) \& (\neg p(z,g(x)) \vee \neg p(z,x) \vee \neg p(t,x))$.
$\varphi_3^S \rightleftharpoons \forall x \forall y \forall z(\neg r(y,z) \vee \neg p(x,y) \vee p(x,z))$.
$\psi^S \rightleftharpoons p(a,a)$.
Дизюнктите са (нека ги номерираме променливите по принадлежност към дизюнкт):

$D_1 = \{p(x_1, f(x_1))\}$;
$D_2 = \{\neg p(z_2, f(x_2)), r(x_2, z_2)\}$;
$D_3 = \{p(g(x_3), x_3), \neg p(t_3, x_3)\}$;
$D_4 = \{\neg p(z_4, g(x_4)), \neg p(z_4, x_4), \neg p(t_4, x_4)\}$;
$D_5 = \{\neg r(y_5, z_5), \neg p(x_5, y_5), p(x_5, z_5)\}$;
$D_6 = \{p(a, a)\}$.

И за двата варианта един примерен резолютивен извод на ■ е:

$D_7 = Res(D_2\{x_2/y_5, z_2/z_5\}, D_5) =$
$\{\neg q(f(y_5), z_5), \neg q(y_5, x_5), q(z_5, x_5)\}$;
$D_8 = Res(D_3\{x_3/f(y_5)\}, D_7\{z_5/g(f(y_5))\}) =$
$\{\neg q(f(y_5), t_3), \neg q(y_5, x_5), q(g(f(y_5)), x_5)\}$;
$D_9 = Res(D_4\{x_4/f(y_5), z_4/x_5\}, D_8) =$
$\{\neg q(f(y_5), t_4), \neg q(f(y_5), x_5), \neg q(f(y_5), t_3), \neg q(y_5, x_5)\}$;
$D_{10} = Collapse(D_9\{t_3/x_5, t_4/x_5\}) =$
$\{\neg q(f(y_5), x_5), \neg q(y_5, x_5)\}$;
$D_{11} = Res(D_1, D_{10}\{y_5/x_1, x_5/x_1\}) =$
$\{\neg q(x_1, x_1)\}$;
$Res(D_{11}\{x_1/a\}, D_6) = \blacksquare$.

За вариант II.2 заменете q с p.