ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ

ТЕМА 7

ПРЕДСТАВЯНЕ НА ГРАФИ

При разглеждане на тема 6 използвахме два начина за представяне на граф:

- **графично** - чрез множество от точки (кръгчета) и връзки (ребра) между тях.
- **директно** - чрез множества V(на върховете) и E (на ребрата), както е по дефиниция.

Графичното представяне е нагледно и удобно за построяване, но е неприложимо за директна компютърна обработка. Директното представяне не е най-удобното за цифрова обработка. Съществуват и други начини за представяне на графи в оперативната памет на компютъра – матрично, списъчно. Те са предмет на настоящата тема.

7.1. Матрично представяне на графи

Представяне чрез матрица на съседство

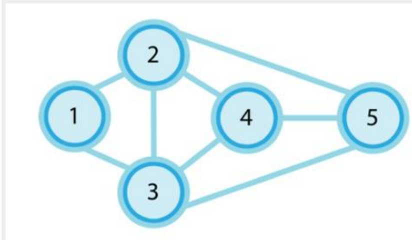
Матрицата на съседство е един от най-често използваните начини за представяне на граф в паметта. При него на ориентиран граф с n върха се съпоставя квадратна матрица $R_{[nxn]}$. Стойността на r_{ij} е равна на 1, когато съществува реброто (i,j), и $r_{ij} = 0$ съществува реброто (i, j).

Ако графът е неориентиран, то $r_{ij} = 1$, когато съществува реброто (i, j) или (j, i), и $r_{ij} = 0$ в противен случай. При непретеглен мултиграф, в полето r_{ij} записва не 1, а броят на ребрата между върховете i и j. Когато графът е претеглен, на позиция r_{ij} се записва теглото $f(i, j)$, матрицата R се нарича **матрица на теглата**.

В някои задачи се дефинират и тегла за върховете на графа. Те могат да бъдат записани на позициите r_{ii} за всеки връх i от графа. Тези полета от матрицата няма да бъдат заети, единствено в случай, когато графът не съдържа примки (ребра от вида (i,i)).

При неориентиран граф матрицата на съседство е симетрична относно главния си диагонал.

Пример за граф и съответстващата му матрица на съседство е даден на *фигура 7.1*.



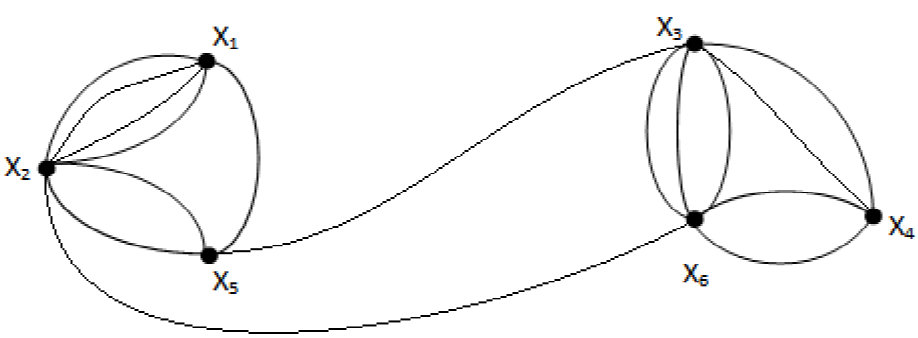
	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	0
2	1	0	1	1	1
3	1	1	0	1	1
4	0	1	1	0	1
5	0	1	1	1	0

Фиг.7.1.Представяне на граф чрез матрица на съседство

Предимството на представянето на граф чрез матрица на съседство е, че се изисква постоянно време (само еднократен достъп до паметта) за определянето свързаността между два от върховете му.

В случаите, когато в графа има поне два върха свързани с повече от едно ребро т.е. когато имаме мултиграф матрицата на съседство може да съдържа информация за теглата на съответните върхове.

Ако графът е неориентиран, то $r_{ij} = p$, p е броя ребра, свързващи връх i с връх j. Ако върховете i и j не са свързани (не са съседни), то $r_{ij} = 0$. Матрицата R, построена по тези правила също е симетрична. Това е отразено на фигура 7.2 за графа G(X,E), където $X=\{x_1,x_2,\ldots x_G\}$ е множеството на върховете, а $E=\{E_1,E_2\ldots E_K\}$ – множество на ребрата.



$$\underset{6x6}{[R]} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 4 & & & 1 & \\ \hline 4 & & & & 2 & 1 \\ \hline & & & 2 & 1 & 3 \\ \hline & & 2 & & & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 & & & \\ \hline & 1 & 3 & 2 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|l} \alpha & \\ 5 & \\ 7 & \leftarrow \text{max} \\ 6 & \\ 4 & \rightarrow \text{min} \\ 4 & \rightarrow \text{min} \\ 6 & \end{array}$$

Фиг.7.2.Представяне на граф чрез матрица на съседство

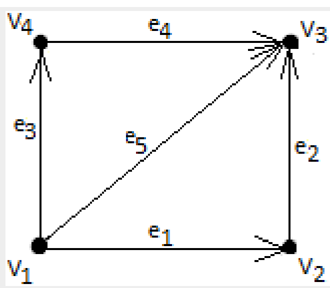
Представяне чрез матрица на инцидентност

Друг начин на матрично представяне на граф е чрез **матрицата на инцидентност**. Тази матрица представя структурата на графа. Тя отразява връзките между елементите на множеството на върховете и множеството на дъгите (ребрата).

Нека $G(V,E)$ е граф без примки с n върха и m дъги. Матрицата $A=(a_{ij})_{n\,x\,m}$ се определя по следните правила:

- $a_{ij}=1$, ако v_i е начален връх за дъгата e_j;
- $a_{ij}=-1$, ако v_i е краен връх за дъгата e_j;
- $a_{ij}=0$, ако v_i не е инцидентен с дъгата e_j;

Редовете на матрицата на инцидентност се наричат вектори на инцидентност за графа G. Представянето чрез матрица на инцидентност за ориентирания граф е показано на фиг.7.3.



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
v_1	1	0	1	0	1
v_2	-1	1	0	0	0
v_3	0	-1	0	-1	-1
v_4	0	0	-1	1	0

Фиг.7.3. Представяне на граф чрез матрица на инцидентност

Ако графа е неориентиран матрицата на инцидентност се дефинира аналогично както за ориентирани, с тази разлика, че всички елементи (-1) се заменят с (+1).

Представяне чрез матрица на достижимост и контра-достижимост

Матрицата на достижимост $R=(r_{ij})_{nxm}$ се определя по следния начин:

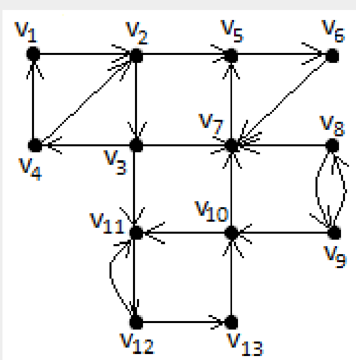
- $r_{ij}=1$, ако върха v_j е достижим от v_i;
- $r_{ij}=0$, в противен случай.

R(v_i) е множеството на върховете в графа *G* достижими от дадения връх v_i. Ако намерим за всеки връх v_i съответното множество *R(v_i)*, матрицата *R* лесно ще се построи $r_{ij} = 1$, когато $v_j \in R(v_i)$ и 0 в противен случай.

Може да се съобрази че : $R(v_i) = \{v_i\} \cup \Gamma(v_i) \cup \Gamma^2(v_i) \cup \ldots \cup \Gamma^s(v_i)$, където *Γ(v_i)* е множеството от върховете v_j, за които в графа съществува дъга (v_i,v_j), т.е. върховете, достижими от v_i чрез път с дължина *1*.

$\Gamma(\Gamma(v_i))=\Gamma^2(v_i)$ ще бъде множеството от върхове, достижими от v_i чрез път с дължина 2 и т.н., $\Gamma^s(v_i)$ ще бъде множеството върхове, достижими от v_i с използването на път, чиято дължина е *s*.

По представена по горе формулата, изпълнявайки от ляво на дясно операцията обединение, ще намерим всички достижими от v_i върхове, като ще извършване тази операция докато намереното множество не престане да нараства. На фиг.7.4 е показано представянето чрез матрица на достижимост.



$$R = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&1&1 \end{bmatrix}$$

Фиг.7.4. Представяне на граф чрез матрица н достижимост.

Матрицата на контра-достижимост *Q* е транспонирана матрица за достижимост. $Q = (q_{ij})_{n \times n}$, се определя по следния начин:

- $q_{ij}=1$, ако от върха v_j е достижим върха v_i
- $q_{ij}=0$, в противен случай.

Аналогично се определя множеството $Q(v_i)$ като множество върхове на графа G, такива че от всеки връх на това множество може да се достигне v_i.
$Q(v_i) = \{v_i\} \cup \Gamma^{-1}(v_i) \cup \Gamma^{-2}(v_i) \cup \ldots \cup \Gamma^{-s}(v_i)$,

$$където\ \Gamma^{-2}(v_i) = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}(v_i))\ и\ т.н.$$

И в този случай операцията обединение се изпълнява от ляво на дясно докато не спре да се актуализира текущото множество $Q(v_i)$.

Матрицата на контра-достижимост за графа на фиг.7.4 представлява транспонираната матрица на достижимост т.е. $Q=R^T$.

Представяне чрез матрица (вектор) на степените

Нека $G(V,E)$ е прост граф. Неговата матрица на степените D се определя по следния начин:

$D=(d(v_i))_{1 \times n}=(d(v_1), d(v_2),\ldots, d(v_n))$.

Елементите на вектора D са неотрицателни цели числа. За пример на вектора на степените е използван графа от фиг.7.1. Неговия вектор е следния D=(2,4,4,3,3).

7.2. Списъчно представяне на графи

Алтернативно представяне на граф $G(V,E)$ е посредством **списъци на съседство**. Казваме, че връх j е съседен на връх i, когато има дъга от i до j.

За представянето на графа използваме масив от n елемента, в който i-тия елемент указва списъка от съседи (в произволен ред) на върха i. Следователно необходимата памет за представяне на граф с n върха и m ребра е от порядъка на $n+m$. Така се избягва недостатъка от използването на повече памет, отколкото е необходима.

Недостатък на представянето чрез списъци на съседство е, че определянето дали има ребро от i до j може да изисква до n стъпки, защото е свързано с последователно обхождане на списъка от съседи на връх i.

Списъчното представяне на графите може да бъде статично (с два масива), полудинамично (масив + списъци) и динамично (списъчни структури).

- **Статично представяне**

Използват се два масива: масив “съседи”, където последователно се изреждат номерата на съседите на всеки един връх в графа. Масив ”начало” - във всеки елемент се записва индекса, от който в масив “съседи” започва изреждането на съседите на възела, който има номер, равен на индекса на елемента в масив ”начало”. За примера на фиг.7.5 е използван графа от фиг.7.1.

“начало”

i	
1	1
2	3
3	7
4	11
5	14
6	0

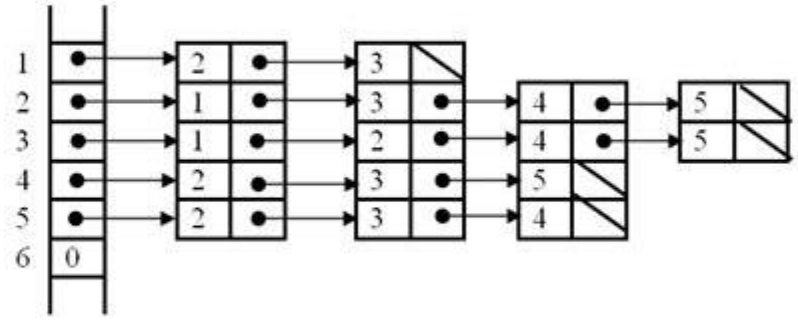
“съседи”

		j
възел 1	2	1
	3	2
възел 2	1	3
	3	4
	4	5
	5	6
възел 3	1	7
	2	8
	4	9
	5	10
възел 4	2	11
	3	12
	5	13
възел 5	2	14
	3	15
	4	16
	0	17

Фиг.7.5.Статично представяне на съседите от графа на фиг.7.1.

- **Полудинамично представяне**

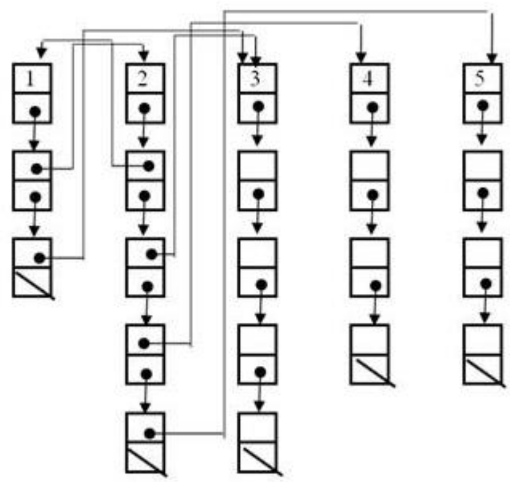
В масива “начало” се записва адресът на записа на първия съсед. Всеки запис на съсед притежава по две полета: номер на възела и указател към следващия съсед. Указателят за следващ съсед на последния от списъка е нула. За пример на фиг.7.6 отново е използван графа на фиг.7.1.



Фиг.7.6. Полудинамично представяне на съседите от графа на фиг.7.1.

- **Динамично представяне**

За всеки възел се създава запис с две полета: номер на възела и указател към двойка указатели. Първият указател от двойката съдържа адреса на съсед, а втория- адреса на следващата двойка указатели. На фиг.7.7. е даден пример за динамично представяне, като е използван графа на фиг.7.1.



Фиг.7.7. Динамично представяне на съседите от графа на фиг.7.1.