

КАТЕДРА: КОМПЮТЪРНИ СИСТЕМИ И ТЕХНОЛОГИИ  
ДИСЦИПЛИНА: СИНТЕЗ И АНАЛИЗ НА АЛГОРИТМИ

**ЛАБОРАТОРНО УПРАЖНЕНИЕ № 10**

***ТЕМА: Минимално покриващо дърво***

**ЦЕЛ:**

Целта на упражнението е студентите да се запознаят какво представляват минималните покриващи дървета и с алгоритмите за намирането им. След упражнението студентите би следвало да могат да прилагат тези алгоритми.

**I. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТ**

**1. Дефиниция за минимално покриващо дърво**

Нека е даден граф  $G(V, E)$  с претеглени ребра(дъги), т.е. с всяко ребро (дъга) е свързано число (тегло, дължина, цена, стойност – показан е такъв граф в предходното упражнение). Тегло на покриващо дърво  $T(V, E')$  се нарича сумата от теглата на отделните ребра.

Покриващо дърво  $T'(V, E')$ , което има най – малкото възможно тегло измежду всички възможни покриващи дървета на граф  $G(V, E)$  с претеглени ребра (дъги), се нарича минимално покриващо дърво (МПД). По аналогичен начин се дефинира и максимално покриващо дърво.

Ясно е, че всеки граф притежава минимално покриващо дърво, тъй като той притежава краен брой покриващи дървета, а всяко крайно множество от реални числа има най – малък елемент.

В упражнението ще разглеждат два от най използваните алгоритми за намиране на минимално покриващо дърво на граф:

- Алгоритъм на Прим;
- Алгоритъм на Краскал.

**2. Алгоритъм на Прим**

Основната идея на алгоритъма е, че се избира произволен връх от графа и се добавя ребро с минимално тегло измежду ребрата, които са инцидентни с дадения връх. На всяка стъпка се прави разширение на покриващото дърво на графа, построено до момента, като се добавя реброто с минимално тегло от всички възможни потенциални такива, които не са включени до момента и са инцидентни с някое от листата на дървото. Прави се проверка дали включването на ребро не поражда наличието на цикъл. Ако то формира цикъл не се включва към него. Алгоритъма на Прим строи кореново дърво със зададен корен. На всяка стъпка се избира най доброто ребро и е сигурно, че в крайна сметка ще се получи МПД.

**3. Алгоритъм на Краскал**

Основната идея на алгоритъма е да се построява на всяка стъпка подграф  $T$  на графа  $G$ , като се добавят дъгите на  $G$  към  $T$  в нарастващ ред на техните тегла. Ребрата от  $G$ , които биха довели до образуването на цикъл в подграфа  $T$ , не се включват в  $T$ .

Подграфът  $T$  обикновено представлява първоначално гора, която в края на алгоритъма се слива в дърво.

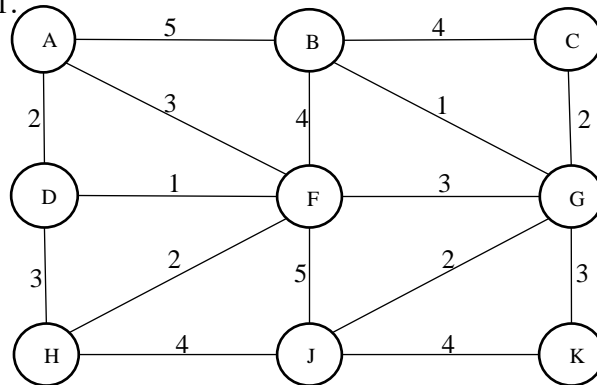
Подробно описание на стъпките на алгоритъма:

0. Нека  $G(V, E)$  е граф с претеглени ребра.  $|V|=n$ ,  $|E|=m$ . Сортираме ребрата на  $G$  в нарастващ ред на теглата им:  $R=\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m\}$ . Полагаме  $V'=V$ ,  $E'=\{\}$  за  $T(V', E')$ .
1. Добавяме реброто  $e_1$  към  $T$ , т.е.  $E'=E' \cup \{e_1\}$ ,  $R=R \setminus \{e_1\}$ ;
2. Ако  $|E'|=n-1$ , край на алгоритъма, в противен случай продължава със стъпка 3.
3. Намира следващото ребро  $e_k \in R$  такова, че  $e_k$  е с най – малкото тегло от елементите в  $R$  и добавянето на реброто  $e_k$  към дървото не води до образуването на цикъл в  $T$ . Полагаме  $E' \cup \{e_k\}$ ,  $R=R \setminus \{e_k\}$ . Обратно към стъпка 2.

Дървото  $T(V', E')$  построено от алгоритъма е МПД на  $G(V, E)$ .

## II. ПРАКТИЧЕСКА ЧАСТ

В тази част е демонстрирано откриването на МПД чрез разглежданите алгоритми върху следния граф на фиг.1.



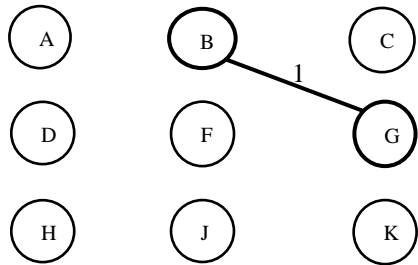
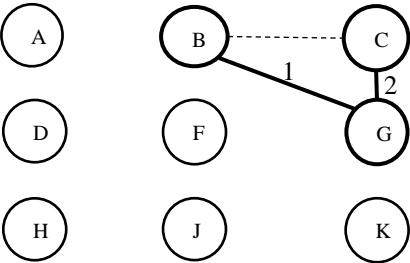
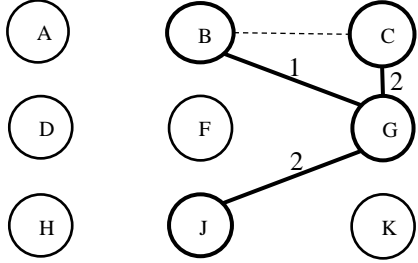
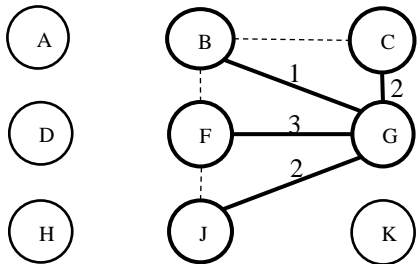
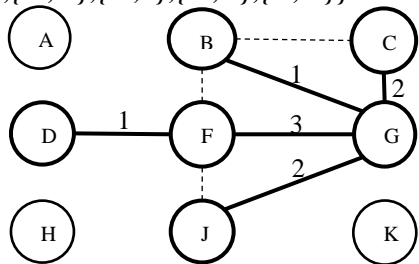
Фиг.1. Граф за обхождане

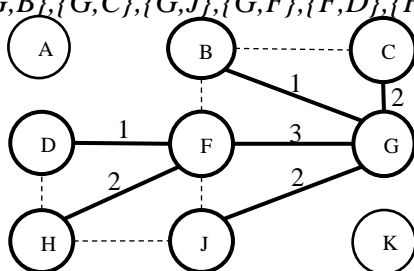
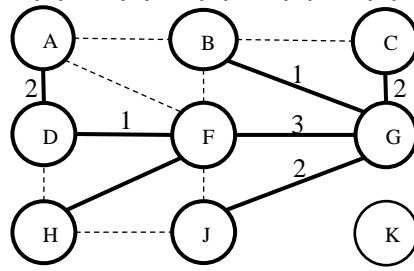
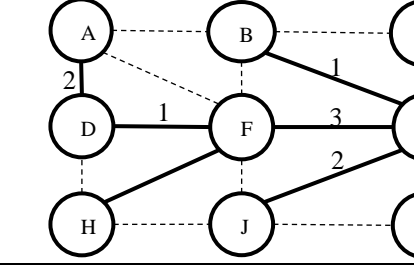
**ЗАДАЧА1:** За графа на фиг.1. да се построи МПД като се използва алгоритъма на Прим

**РЕШЕНИЕ:**

Табл.1.Построяване на МПД по метода на Прим

$T(V, E)$			Потенциални дъги
$V=\{G\}, E=\{\}$			$W(\{G, B\})=1;$ $W(\{G, C\})=2;$ $W(\{G, J\})=2;$ $W(\{G, F\})=3;$ $W(\{G, K\})=3;$ Избира се реброто $\{G, B\}$

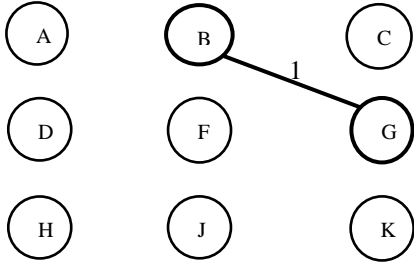
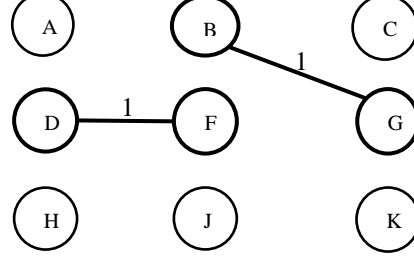
$V=\{G, B\}, E=\{ \{G,B\} \}$ 	$W(\{G,F\})=3;$ $W(\{G,K\})=3;$ $W(\{G,C\})=2;$ $W(\{G,J\})=2;$ $W(\{B,A\})=5;$ $W(\{B,F\})=4;$ $W(\{B,C\})=4;$ Избира се реброто $\{G, C\}$ . Изключваме $\{B, C\}$ от по-нататъшни разглеждания понеже ще образува цикъл
$V=\{G, B, C\}, E=\{ \{G,B\}, \{G,C\} \}$ 	$W(\{G,F\})=3;$ $W(\{G,K\})=3;$ $W(\{G,J\})=2;$ $W(\{B,A\})=5;$ $W(\{B,F\})=4;$ Избира се реброто $\{G,J\}$ .
$V=\{G, B, C, J\}, E=\{ \{G,B\}, \{G,C\}, \{G,J\} \}$ 	$W(\{G,F\})=3;$ $W(\{G,K\})=3;$ $W(\{B,A\})=5;$ $W(\{B,F\})=4;$ $W(\{J,F\})=5;$ $W(\{J,K\})=4;$ $W(\{J,H\})=4;$ Избира се реброто $\{G,F\}$ . Изключваме $\{B,F\}$ и $\{J,F\}$ от по-нататъшни разглеждания понеже ще образуват цикъл
$V=\{G, B, C, J, F\}, E=\{ \{G,B\}, \{G,C\}, \{G,J\}, \{G,F\} \}$ 	$W(\{G,K\})=3;$ $W(\{B,A\})=5;$ $W(\{J,K\})=4;$ $W(\{J,H\})=4;$ $W(\{F,A\})=3;$ $W(\{F,D\})=1;$ $W(\{F,H\})=2;$ Избира се реброто $\{F,D\}$ .
$V=\{G, B, C, J, F, D\}, E=\{ \{G,B\}, \{G,C\}, \{G,J\}, \{G,F\}, \{F,D\} \}$ 	$W(\{G,K\})=3;$ $W(\{B,A\})=5;$ $W(\{J,K\})=4;$ $W(\{J,H\})=4;$ $W(\{F,A\})=3;$ $W(\{F,H\})=2;$ $W(\{A,D\})=2;$ $W(\{H,D\})=3;$ Избира се реброто $\{F,H\}$ . Изключваме $\{D,H\}$ и $\{J,H\}$ от по-нататъшни разглеждания понеже ще образуват цикъл

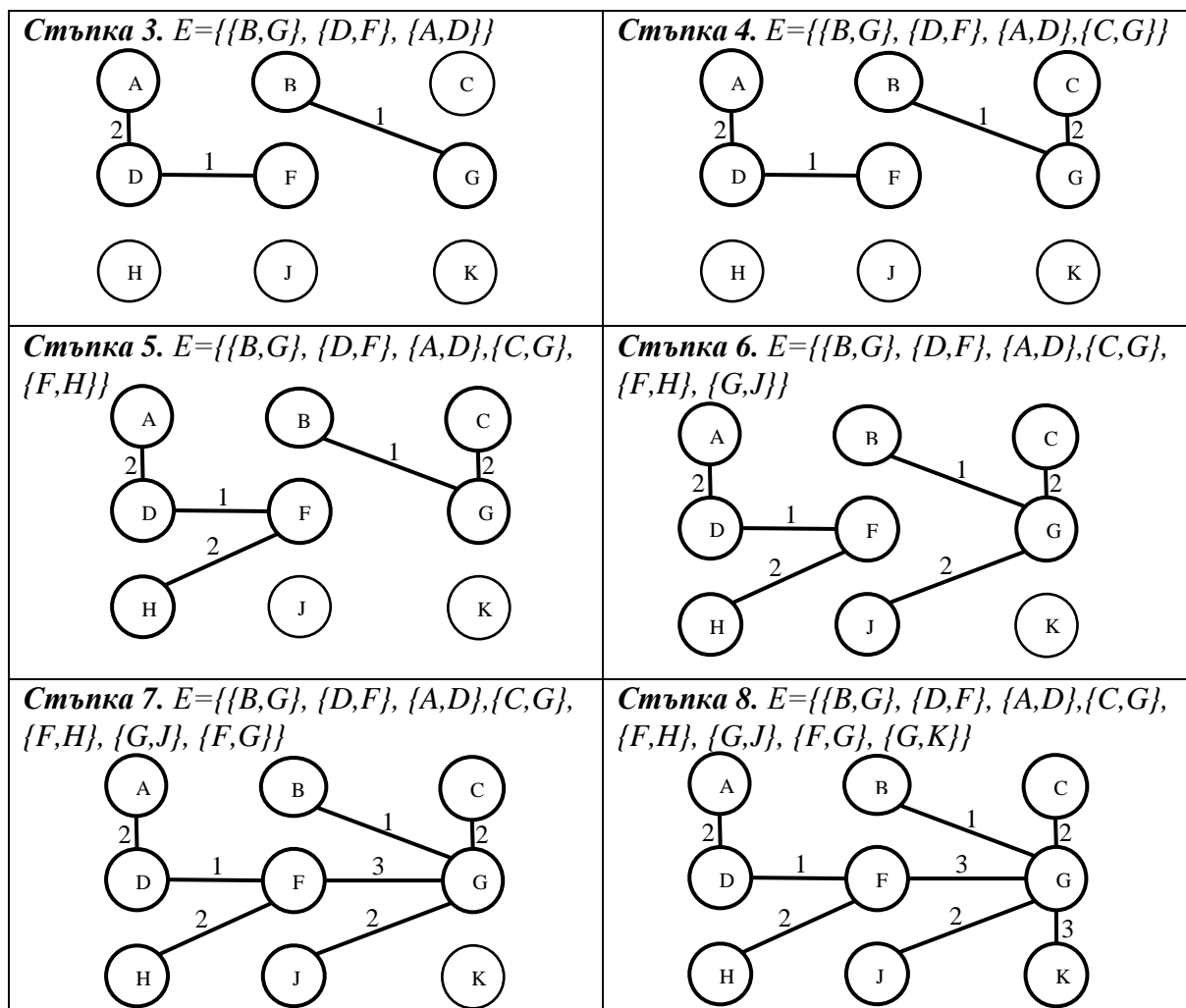
$V = \{G, B, C, J, F, D, H\}$ , $E = \{\{G, B\}, \{G, C\}, \{G, J\}, \{G, F\}, \{F, D\}, \{F, H\}\}$ 	$W(\{G, K\}) = 3$ ; $W(\{B, A\}) = 5$ ; $W(\{J, K\}) = 4$ ; $W(\{F, A\}) = 3$ ; $W(\{A, D\}) = 2$ ; Избира се реброто $\{A, D\}$ . Изключваме $\{A, F\}$ и $\{A, B\}$ от по нататъшни разглеждания понеже ще образуват цикъл
$V = \{G, B, C, J, F, D, H, A\}$ , $E = \{\{G, B\}, \{G, C\}, \{G, J\}, \{G, F\}, \{F, D\}, \{F, H\}, \{A, D\}\}$ 	$W(\{G, K\}) = 3$ ; $W(\{J, K\}) = 4$ ; Избира се реброто $\{G, K\}$ . Изключваме $\{J, K\}$ от по нататъшни разглеждания понеже ще образува цикъл
$V = \{G, B, C, J, F, D, H, A, K\}$ , $E = \{\{G, B\}, \{G, C\}, \{G, J\}, \{G, F\}, \{F, D\}, \{F, H\}, \{A, D\}, \{G, K\}\}$ 	КРАЙ

**ЗАДАЧА2:** За графа на фиг.1. да се построи МПД като се използва алгоритъма на Краскал.

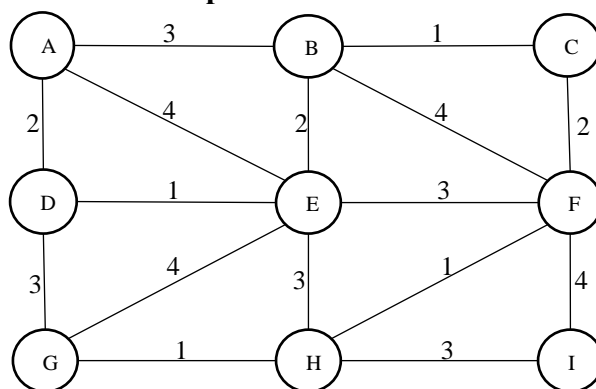
**РЕШЕНИЕ:**

Табл.2. Построяване на МПД по метода на Краскал

<b>Стъпка 1.</b> $E = \{\{B, G\}\}$ 	<b>Стъпка 2.</b> $E = \{\{B, G\}, \{D, F\}\}$ 
---	--



### III. Задача за самостоятелна работа.



Фиг.2. Граф за обхождане

1. Да се намери МПД като се използва алгоритъма на Прим с корен върха А за графа на фиг.2.
2. Да се намери МПД като се използва алгоритъма на Краскал за графа на фиг.2.
3. Създайте програма която да намери МПД от задача 1.
4. Създайте програма която да намери МПД от задача 2.
5. (Да се обмисли за компютърна мрежа задача – Пример от стр.259 зад.7.5.)