ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ

ТЕМА 8

ДЪРВЕТА. ОБХОЖДАНЕ НА ДЪРВЕТА

8.1. Дървета. Основни понятия и определения.

Дървото представлява свързан граф без цикли. Като понятие то е въведено още през 19 век от немския физик Густав Кирхгов. Той го използва за описание на електрическите вериги.

Дървото може да се разглежда и като абстрактна информационна структура, използвана в бази данни, операционните системи, алгоритмите, компилаторите и други. Може да се прилага за представяне на модели на реални и абстрактни обекти с йерархична структура, като дървета на решенията, математически формули, родословни дървета, класификации, интерфейси и др.

Терминологията, използвана за описание на дървета е взаимствана от ботаниката (дърво, клон, корен, лист) и от генеалогията (предшественик, наследник, родител).

Дърво се нарича всеки граф *T(V,E)*, който е свързан и не съдържа цикли.

Ako $|V| = 0$, то дървото $T(V,E)$ се означава с T_0 и се нарича **празно**.

Ако съдържа само един връх се нарича **изродено** и се означава с T_1.

Несвързан граф без цикли *D(V,E)* се нарича гора (фиг.8.1)**.**

Кореново дърво се нарича дърво $T(V,E,)$ за което е изпълнено:

1. Съществува точно един връх v_0 (корен) , който няма предшественици (родител), но може да има върхове наследници (деца). Връзката на корена с неговите наследници се задава (представя) чрез ребро.

2. Всички останали върхове имат точно един връх – предшественик и могат да имат върхове наследници.

По дефиниция **кореновите дървета** са **неориентирани графи**. Ориентацията на ребрата може да се пропусне, защото изборът на връх за корен неявно ги задава т.е. имаме неявна ориентация.

Всяко кореново дърво на даден граф е дърво на графа.

Ребрата на дървото се наричат **клони**. Върховете, които нямат наследници, се наричат **листа** на дървото.

Ако в едно дърво даден връх има много наследници, то този, които се намира най-вляво се приема за **първи** и се нарича **най-ляв** наследник, а онзи – най-вдясно (**последен**) – **най –десен** наследник (фиг.8.2).

В произволно дърво с повече от един връх има поне един връх без наследници. Нарича се още **висящ** връх (фиг.8.2) .

Кореновото дърво се характеризира с разклоненост и височина (дълбочина).

Броят на наследниците на върха v_i се нарича **разклоненост на върха** и се означава с $\rho(v_i)$. Максималната разклоненост на върховете на кореновото дърво се нарича **разклоненост на дървото**.

Кореново дърво с разклоненост 2 се нарича **двоично дърво**, с разклоненост 3 – **троично дърво** и т.н. с разклоненост m - **m-ично дърво** (фиг.8.2?).

Височина (дълбочина) на върха се нарича дължината на единствения път между върха v_i и корена v_0 в кореновото дърво. Означава се с $d(v_i)$.

Максималната височина на върховете в едно кореново дърво определя **височина (дълбочина) на дървото.**

Върховете на едно дърво с еднаква височина се наричат **ниво**. Коренът на дървото има височина 0 и се намира на нулево ниво.

Всяко дърво с височина h и разклоненост m има неповече от m^h листа.

Ако всеки връх има еднакъв брой наследници m, с изключение на листата, дървото се нарича **пълно m-ично дърво** (фиг.8.3**).** Пълно m-ично дърво, на което всички листа са с еднаква височина се нарича **перфектно m-ично дърво** (фиг.8.4**).**

Поддърво на $T(V,E)$ с корен v_i се нарича индуцираният подграф на T, които съдържа v_i и всички негови наследници (преки и непреки). Нарича се **индуцирано поддърво от върха v_i** (фиг.8.5).

Ако дървото е двоично, то поддървото индуцирано от левия наследник се нарича **ляво поддърво**, а от десния – **дясно поддърво** (фиг.8.6).

8.2. Представяне на дървета.

По своята същност дърветата са графи и те могат да бъдат представени по методите за представяне на графи чрез матрици и списъци.

Тук обект на разглеждане е представяне на дървета чрез списъци от предшественици (родители,бащи) и чрез списъци от наследници (деца, синове).

- **представяне на дървета чрез списъци от предшественици**

Представянето на дървета чрез списъци от предшественици може да се реализира по различни начини.

Един начин на представяне е чрез списък на предшествениците. Всяко кореново дърво $T(V,E)$ може да бъде предствено чрез списък родителите (предшествениците, бащите). Той представлява едномерен масив p с $/V/ = n$ елемента, като $p[v]$ е върхът, към които е присъединен върхът v

(предшественика на v) . По определение $p[v_0]=0$. Най-често преименуваме върховете с числата от 1 до n.

При този начин първо определяме корена на дървото. Това е върхът с предшественик 0. След това намираме неговите наследници т.е. върховете, на които корена е предшественик. След това върховете, на които те (наследниците) са предшественици и т.н (фиг.8.7).

Друг начин на представяне, използван при конструиране на двоично дърво, е чрез вектор на предшествениците (родителите). При него върхът в позиция x е родител на върхове в позиции $2x+1$ и $2x+2$. Допуска се последният най-десен връх на дървото да има разклоненост 0, 1 или 2. Първият елемент във вектора е корена на дървото v_0 . Това е върхът с индекс 0. След това намираме върховете, на които той е родител т.е. върховете в позиции 2.0+1=1 и 2.0+2=2. И това продължава докато построим вектора на двоичното дърво.

Ако представянето се прави за непълни двоични дървета, то в позициите, на които липсва съсед, се поставя празно поле (фиг.8.8).

- **представяне на дървета чрез списъци от наследници**

При този начин на представяне всеки връх на дървото се $T(V,E)$ се задава с наредена двойка наследници (ляв и десен). Отсъствието на наследник ще означаваме с -1. Имената на върховете се заменят с числата от 1 до $|V|$ (фиг.8.9).

8.3. Покриващо дърво на граф .

Построяването на покриващо дърво е пряко свързано с реални задачи от практиката като разпространение на информация в компютърните мрежи, доставка на суровини и стоки, връзки в социалните мрежи и др.

Покриващо дърво на графа е всеки негов частичен подграф, които обхваща всички върхове и броя на ребрата му е с единица по-малък от броя на върховете. Ако в графа $G(V,E)$ с означим n броя на върховете, а с m броя на ребрата, $|E_1| = n-1$, то частичният подграф $T(V, E_1)$ е дърво на графа G.

Възможно е свързан граф да има повече от едно покриващо дърво. Ребрата на покриващото дърво се наричат **клони**, а ребрата на графа, неучастващи в дървото – **хорди**. Хордите и върховете на графа образуват **ко-дърво.** Всяко покриващото дърво има съответно ко-дърво. Ко-дървото невинаги е свързано (фиг.8.10).

Един граф $G(V,E)$ има покриващо дърво само тогава, когато е свързан. Всеки свързан граф има поне едно покриващо дърво. Всички покриващи дървета на свързан граф имат еднакъв брой върхове (възли) и ребра (клони).

8.4. Обхождане на дърво.

Да обходим едно дърво означава да посетим последователно всичките му върхове. Обикновено обхождането се прави с цел да се ползва информацията, която се съдържа във всеки връх. Съществуват два вида охождания: обхождане в ширина и обхождане в дълбочина. Обхождането може да започне от всеки връх. Върхът, от който започва обхождането, ще наричаме стартов връх.

Обхождането на граф (дърво) е процедура, която по определени правила посещава всички върхове на графа G (дървото T).

Нека $T(V,E)$ е кореново дърво с корен v_0. Ако няма други върхове, то коренът е сам по себе си представлява **префиксно** или **постфиксно обхождане** на дървото.

Ако $|V| > 1$ и означим с поддърветата на T отляво надясно с $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$, то:

При **префиксно обхождане** на T първо се посещава коренът, а след това се обхождат префиксно върховете на T_1, след това на T_2 и т.н. Накрая се обхождат префиксно върховете на T_n.

При **постфиксно обхождане** на T първо се обхождат постфиксно върховете на поддървото T_1, след това на T_2 и т.н. Накрая се обхождат префиксно върховете на поддървото T_n. Най-последен се посещава коренът (фиг.8.11).

При двоичните дървета за корена K има само ляво L и дясно R поддърво. Обхожданията му е прието да се наричат префиксно (KLR), инфиксно (LKR) и посфиксно (LRK) (фиг.8.12). Могат да се реализират и обхождания в следните последователности: KRL, RKL и RLK.

Префиксното обхождане се нарича още **обхождане в дълбочина** (търсене с връщане назад, бектрекинг). При него първо се спускаме до максималната дълбочина на дървото по най-левия клон, а след това започваме да се връщаме нагоре до последния връх (възел), за който сме направили избор и посещаваме отляво надясно в дълбочина неговите наследници (фиг.8.11).

При **обхождането по ширина (обхождане по нива)** първо се посещава коренът v_0. След това се обхождат отляво надясно всички върхове от ниво 1 на дървото, след това се обхождат отляво надясно всички върхове от ниво 2 и т.н. (фиг.8.11). Накрая се обхождат отляво надясно всички върхове от ниво h, където h е височината на дървото $T(V,E)$.