5.5　微分

1 微分的概念

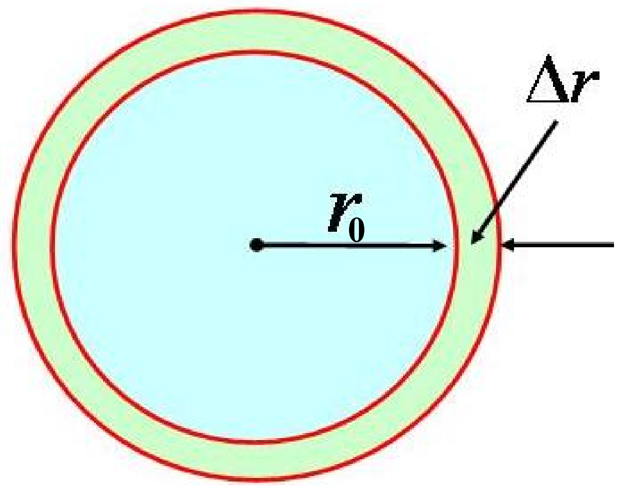
2 微分的运算法则

3 微分的应用

一、微分的概念

引例: 设一半径为 r_0 的金属圆片受热后，其半径增加了 Δr，求金属圆片面积 S 的增量 ΔS.

- $\Delta S = \underbrace{2\pi r_0 \cdot \Delta r}_{\text{关于}\Delta r\text{的线性主部}} + \underbrace{\pi(\Delta r)^2}_{\Delta r \to 0\text{时的高阶无穷小}}$



- $\Delta S \approx \underline{\boxed{2\pi r_0} \cdot \Delta r}$

称为函数在 r_0 的微分

定义：若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的增量可表示为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x),$$

其中 A 是仅依赖于 x_0 而与 Δx 无关的常数，

则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微(differentiable).

称 $A\Delta x$ 为 $y = f(x)$ 在 x_0 的微分(Differentials).

记为 $$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0} = A\Delta x.$$

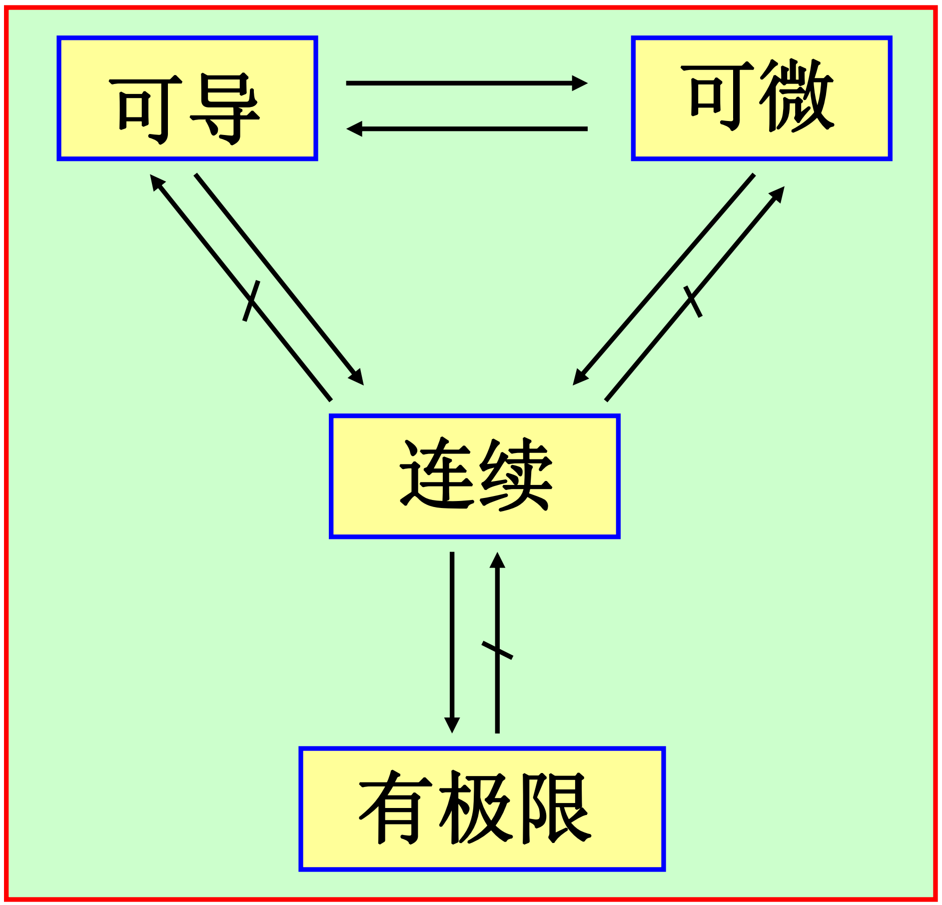
或 $$\mathrm{d}f(x)\Big|_{x=x_0} = A\Delta x.$$

注：固定 $x = x_0$，微分 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$ 是关于 Δx 的函数，

即 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0} = \mathrm{d}y\big|_{x=x_0}(\Delta x) = A\Delta x$.

例1、设 $y = x^3$，求在点 $x_0 = 2$ 处当 Δx 分别为 0.1 与 0.01 时的 Δy 及 $\mathrm{d}y$ 的值 .

定理: 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微 $\Leftrightarrow$ $y=f(x)$ 在点 x_0 可导且 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x$.



Δy 与 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$ 的关系：

$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$

若 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微，则

$$\Delta y = \mathrm{d}y\big|_{x=x_0} + o(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

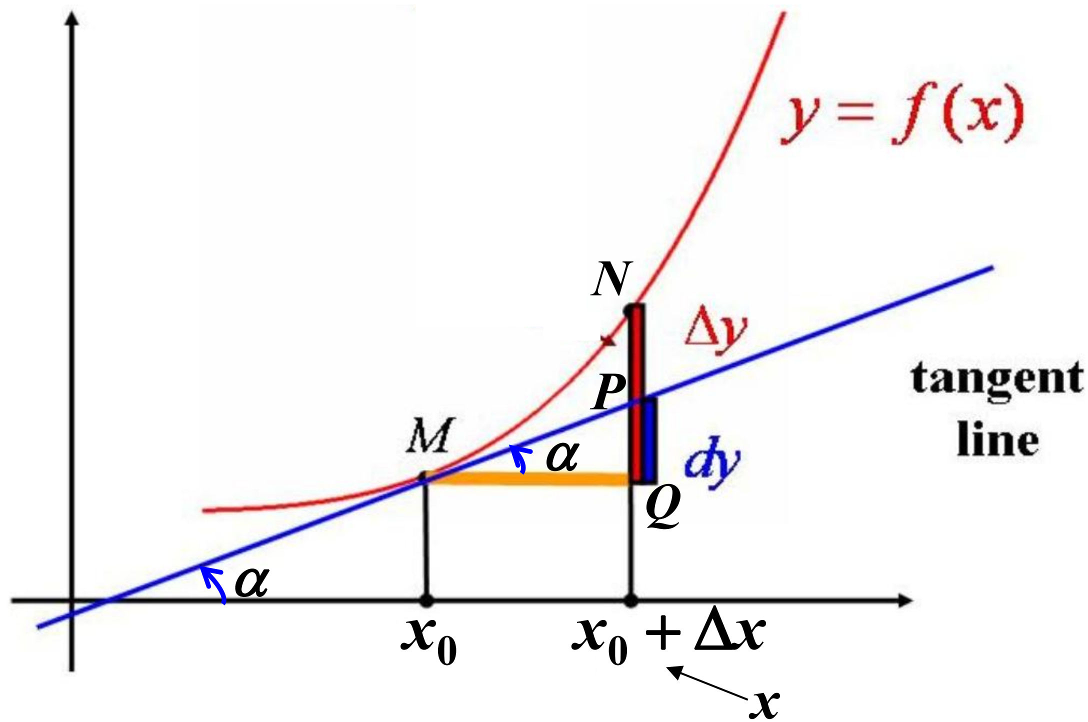
当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}} = 1.$$

$\boxed{\Delta y \sim \mathrm{d}y\big|_{x=x_0}\ (\Delta x \to 0)}$

微分的几何意义:

$$\Delta y \sim \mathrm{d}y\Big|_{x=x_0}$$
$$(\Delta x \to 0).$$



$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{曲线在 } M(x_0, y_0) \text{ 的切线}}, \quad \text{当 } x \to x_0.$$

- 当 x 接近 x_0 时, 用 (x_0, y_0) 处的切线近似代替曲线, 即“以直代曲”.

定义2：若 $y=f(x)$ 在区间 I 内每一点可微，则称 $f(x)$ 为 I 上的可微函数．

函数 $y=f(x)$ 在 I 上任一点 x 处的微分记作

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x\,.$$

（即 $\mathrm{d}y(\Delta x)=f'(x)\Delta x$.）

$$\mathrm{d}y(\Delta x) = f'(x)\Delta x .$$

- 令 $f(x) = x$，则 $dx(\Delta x) = \Delta x$.

故 $\boxed{dy = f'(x)dx.}$ ⇒ 两个微分之间的关系。

$$\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx}.}$$ ⇒ 导数，也称微商。

二、微分的运算法则

1、基本初等函数的微分公式（ 由 P95-96 ）

16个导数公式对应于16个微分公式，如：

$(\sin x)' = \cos x$ 对应于 $\mathrm{d}\sin x = \cos x\mathrm{d}x$.

2、四则运算法则：设 $u(x), v(x)$ 可微，则

(1) $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$ (2) $\mathrm{d}(\lambda u) = \lambda \mathrm{d}u$

(3) $\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$ (4) $\mathrm{d}(\frac{u}{v}) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2} (v \neq 0)$

3、复合函数微分法则（微分的形式不变性）

设 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$ 均可微,则

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u, \qquad \mathrm{d}u=\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的微分为:

$$\mathrm{d}y=f'(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

例2、求函数 $y=\sin(2x^2+1)+\ln(1+e^{x^2})$的微分 .

三、微分的应用1：近似计算

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).}$$

特别地，$x_0 = 0$ 时，

$$\boxed{f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x.} \qquad (\,|x|\text{ 很小}\,)$$

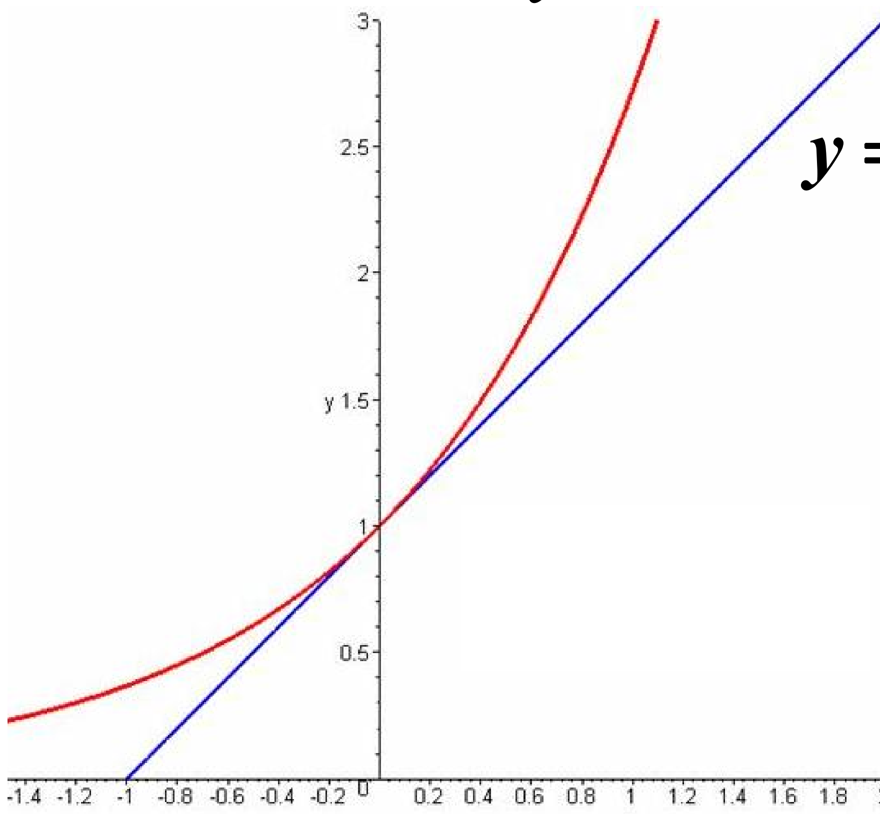
$y = f(0) + f'(0)\,x$：

为 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线.

常用近似公式:（$|x|$ 很小）

(1) $e^x \approx 1 + x$;

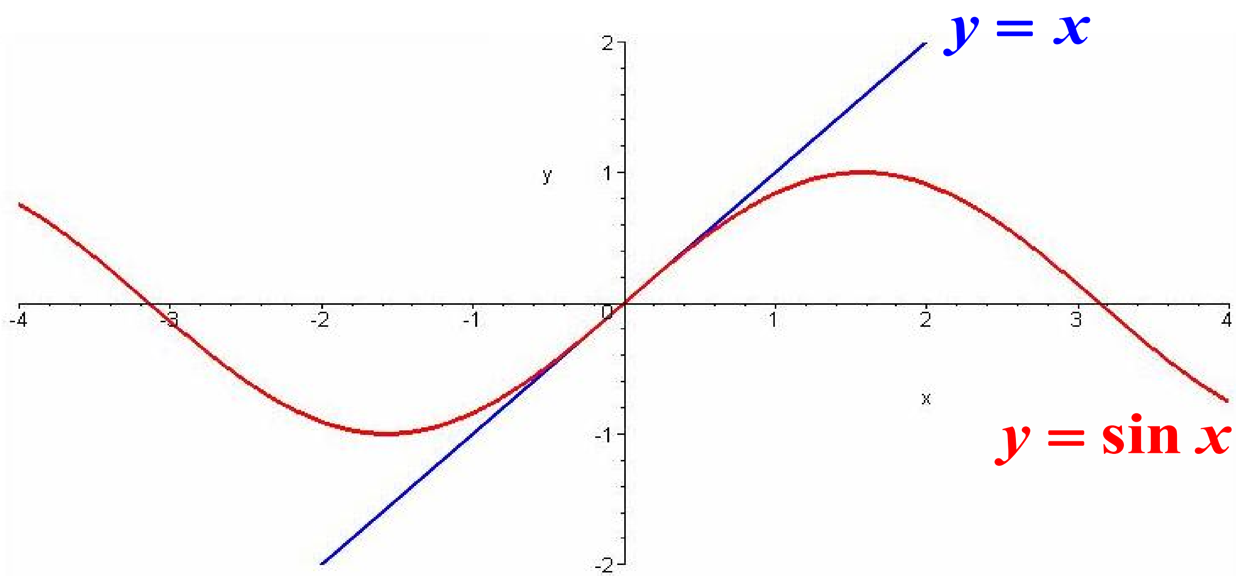
$y = e^x$



$y = 1 + x$

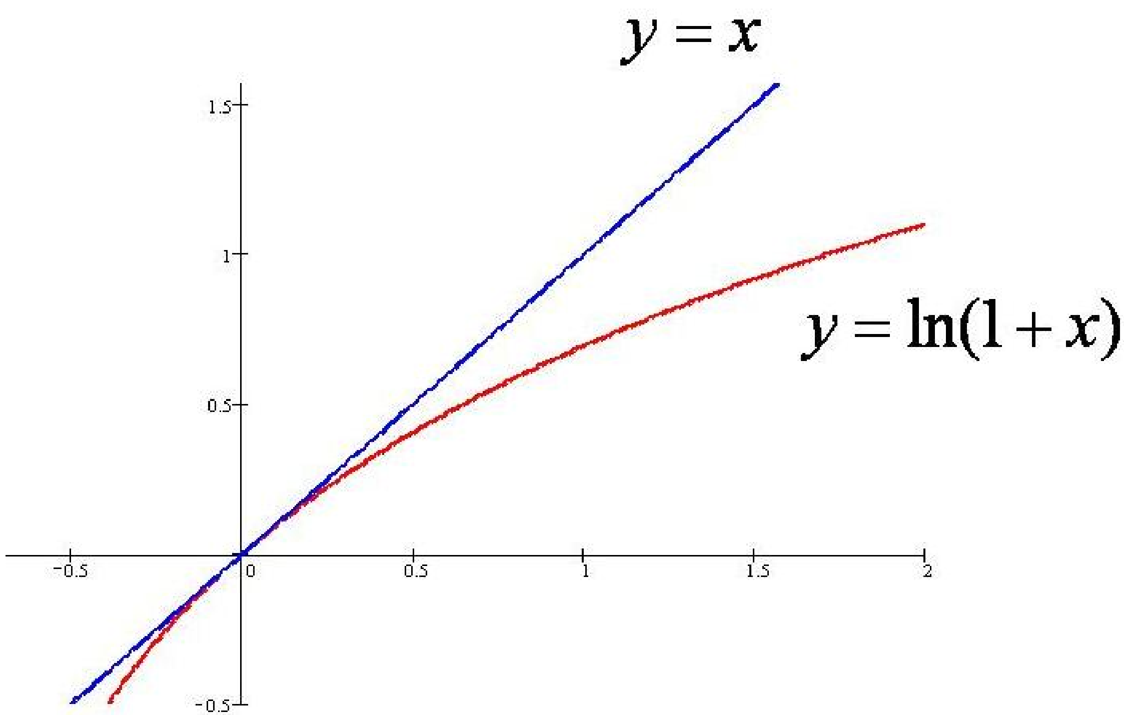
常用近似公式：（$|x|$ 很小）

(2) $\sin x \approx x$;



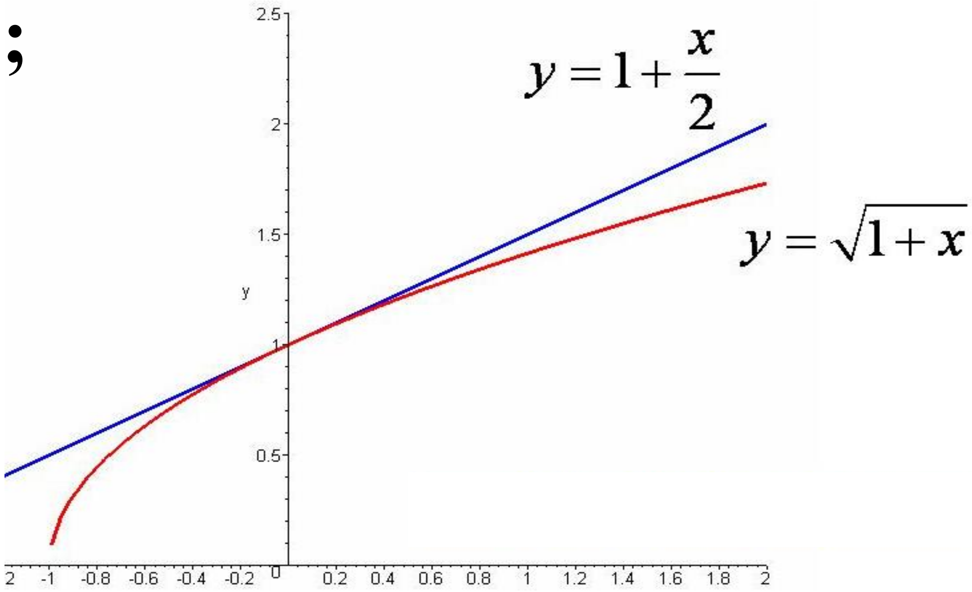
常用近似公式：($|x|$ 很小)

(3) $\ln(1+x) \approx x$.



常用近似公式：（$|x|$ 很小）

(4) $(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x$;



例3、求 $\sqrt{1.002}$ 的近似值 .

三、微分的应用2：误差估计

某量的精确值为 x，测量的近似值为 x_0.

- $|x-x_0|$: x_0 的绝对误差.
- $\dfrac{|x-x_0|}{|x_0|}$: x_0 的相对误差.

若 $|x-x_0| \le \delta_x$，

- δ_x : x_0 的绝对误差限

设 $y=f(x)$,测得 x 的近似值为 x_0,且 x_0 的绝对误差限为δ_x,计算 y 的误差。

$$|\Delta y| \approx |f'(x_0)| \cdot |\Delta x| \le |f'(x_0)|\delta_x .$$

则 y_0 的绝对误差限 $\delta_y \approx |f'(x_0)|\delta_x$.

y_0 的相对误差限 $\dfrac{\delta_y}{|y_0|} \approx \left|\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right|\delta_x$.

例4、计算球体体积时，要求精确度在 1% 以内．问此时测量直径 D 的相对误差不能超过多少？

作　业

习题5-5： 2（4）（6）、4（4）