1.2 数集·确界原理

区间与邻域

有界集

确界

确界原理

一、区间与邻域

1、集合与元素

- **集合：** 具有某种特定性质的事物的总体.
- **元素：** 组成这个集合的事物称为该集合的元素.

$$a \in M, \qquad a \notin M.$$

- **有限集：** $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.
- **无限集：** $M = \{x \mid x \text{ 具有某特征}\}$.
- $A \subset B$: $x \in A \Rightarrow x \in B$.

几个常用的集合：

- **R----实数集**
  - **R^+----正实数集；　R^-----负实数集.**
- **Q----有理数集**
- **Z----整数集**
- **N----自然数集（包含 0）**

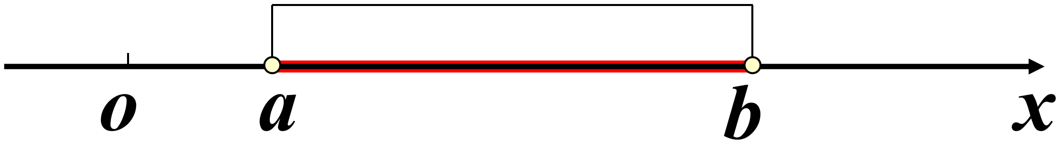
$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

- 空集：不含任何元素的集合.（记作 $\varnothing$）

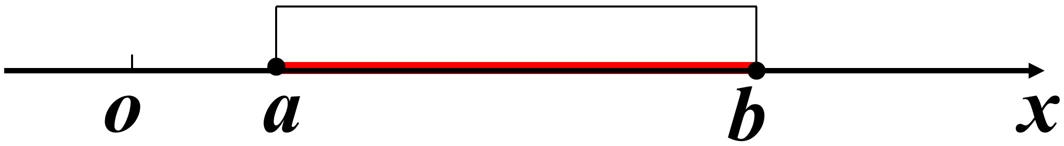
2、 区间

- 区间：介于某两个实数之间的全体实数.
  这两个实数叫做区间的端点.

开区间(a,b):



闭区间$[a,b]$:

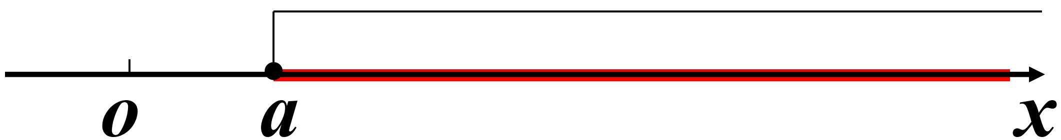


半开半闭区间$[a,b),(a,b]$.

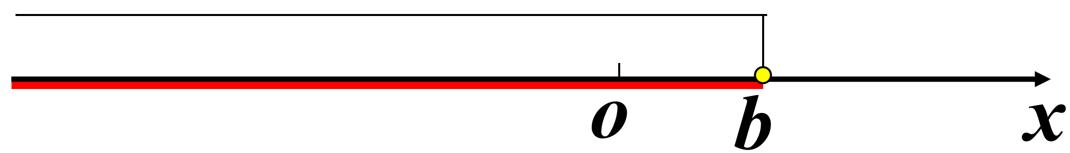
无限区间：$[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$,

$(-\infty,+\infty)$.

$[a,+\infty)$:



$(-\infty,b)$:

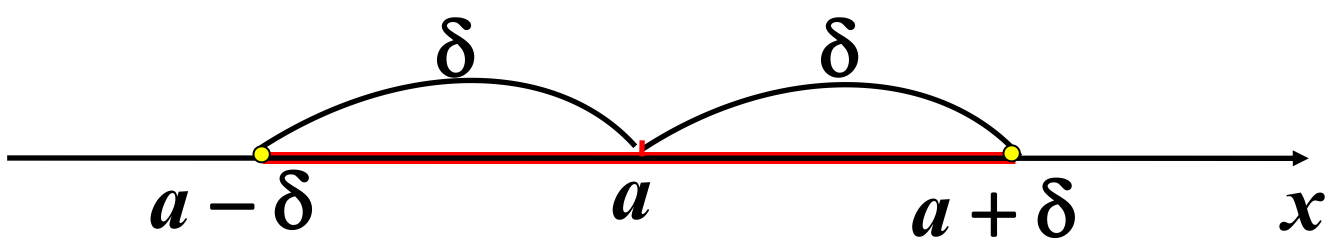


3、 邻域

- 点 a 的 δ 邻域：

$$U(a;\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta).$$

a：邻域中心； δ：邻域半径.



- 点 a 的空心 δ 邻域：

$$U^{\circ}(a;\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

另外几个常用的邻域:

- 点 a 的 δ 右邻域 : $U_+(a;\delta)=[a,a+\delta)$. $(U_+(a))$
- 点 a 的 δ 左邻域 : $U\_(a;\delta)=(a-\delta,a]$. $(U\_(a))$
- ∞ 的M邻域: $U(\infty)=\{x \,\|\, x| > M\}$.
- $+\infty$ 的M邻域: $U(+\infty)=\{x|x>M\}$.
- $-\infty$ 的M邻域: $U(-\infty)=\{x|x<-M\}$.
- 数集 S 的最大值: $\max S$.
- 数集 S 的最小值: $\min S$.

二、有界集

设 S 是 R 的一个数集 .

- S 有上界 : 存在数 M, 使得任意 $x \in S$, 有 $x \le M$.
- S 有下界 : 存在数 L, 使得任意 $x \in S$, 有 $x \ge L$.
- S 有界 : S 既有上界又有下界 .
    - S有界 $\Leftrightarrow$ 存在数 $M > 0$, 使得任意 $x \in S$, 有 $|x| \le M$.
- S 无界 : 若 S 不是有界集 .

例1、证明：

(1) 集合 $S=\{\frac{1}{n} \mid n\text{为正整数}\}$ 为有界集．

(2) 集合 $S=\{\frac{1}{x} \mid x\in(0,1)\}$ 有下界但无上界．

三、确界

定义1: 设 $S \subset \mathbf{R}$ 且 $S \neq \varnothing$. 若 $\eta \in \mathbf{R}$ 满足:

(i) 对任意 $x \in S$, 有 $x \le \eta$;

(ii) 对任意 $\alpha < \eta$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \alpha$.

则称数 η 为数集 S 的上确界。记为

$$\eta = \sup S.$$

注: $(ii) \Leftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_0 \in S$, 使得

$$x_0 > \eta - \varepsilon.$$

定义2: 设 $S \subset \mathbf{R}$ 且 $S \neq \varnothing$. 若 $\xi \in \mathbf{R}$ 满足:

(i) 对任意 $x \in S$, 有 $x \geq \xi$;

(ii) 对任意 $\beta > \xi$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 < \beta$.

则称数 ξ 为数集 S 的 下确界。记为

$$\xi = \inf S.$$

注: $(ii) \Leftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_0 \in S$, 使得

$$x_0 < \xi + \varepsilon.$$

例2、 设 $S=\{x \mid x=1-\frac{1}{n}, n\in Z_+\}$. 证明

$$\sup S=1,\quad \inf S=0.$$

练习： 设 $S=\{\sin x \mid x\in(0,\pi)\}$, 求 $\sup S$ 与 $\inf S$.

注： $\sup S$ 与 $\inf S$ 可能在 S 中, 也可能不在 S 中.

结论： $\eta=\sup S\in S \Leftrightarrow \eta=\max S$.

$$\xi=\inf S\in S \Leftrightarrow \xi=\min S.$$

四、确界原理

定理3：设 $S \subset \mathbf{R}$ 且 $S \neq \varnothing$.

(i) 若 S 有上界，则 S 有上确界.

(ii) 若 S 有下界，则 S 有下确界.

定理3： 设 $S \subset \mathbf{R}$ 且 $S \neq \varnothing$.

(i) 若 S 有上界，则 S 有上确界.

- 构造闭区间列：

$$\{[n.n_1n_2\cdots n_k, n.n_1n_2\cdots n_k + \frac{1}{10^k}] : k = 0,1,2,\cdots\}.$$

① 任意 $x \in S$，有 $x < n.n_1n_2\cdots n_k + \frac{1}{10^k}$.

② 存在 $\beta_k \in S$，使得 $\beta_k \geq n.n_1n_2\cdots n_k$.

- 令 $\eta = n.n_1n_2\cdots n_k\cdots$，则 $\eta = \sup S$.

例3、设非空数集 A, B 满足：对任意 $x \in A$ 及 $y \in B$，有 $x \le y$。证明：$\sup A$ 与 $\inf B$ 存在且

$$\sup A \le \inf B.$$

例4、设 A,B为非空有界数集，$S=A\cup B$. 证明：

(i) $\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$.

(ii) $\inf S=\min\{\inf A,\inf B\}$.

作　业

习题1-2： 1(4)、4 (4)、6(1)