7.1　关于实数完备性的基本定理

1. 区间套定理
2. 聚点定理与有限覆盖定理
3. 实数完备性基本定理的等价性

第一章与第二章实数完备性定理的回顾：

确界原理： 设 S 为非空数集．若 S 有上界，则 S 必有上确界．若 S 有下界，则 S 必有下确界．

单调有界定理： 单调有界数列必有极限.

致密性定理： 任何有界数列必有收敛子列.

柯西收敛准则: 数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是对任意$\varepsilon > 0$,存在$N \in Z_+$,当$m, n > N$时,

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

✦ 确界原理 $\Rightarrow$ 单调有界定理

$\Downarrow$

致密性定理 $\Rightarrow$ 柯西收敛准则

一、区间套定理

定义1：若闭区间列$\{[a_n,b_n]|n=1,2,\cdots\}$满足条件

1. $[a_n,\ b_n]\supset[a_{n+1},\ b_{n+1}]$，$n=1,\ 2,\ \cdots,$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，

则称$\{[a_n,b_n]|n=1,2,\cdots\}$为闭区间套，简称区间套．

- $\{[a_n,b_n]|n=1,2,\cdots\}$简记为$\{[a_n,b_n]\}$.
- 定义1中的条件1实际上等价于下列条件：

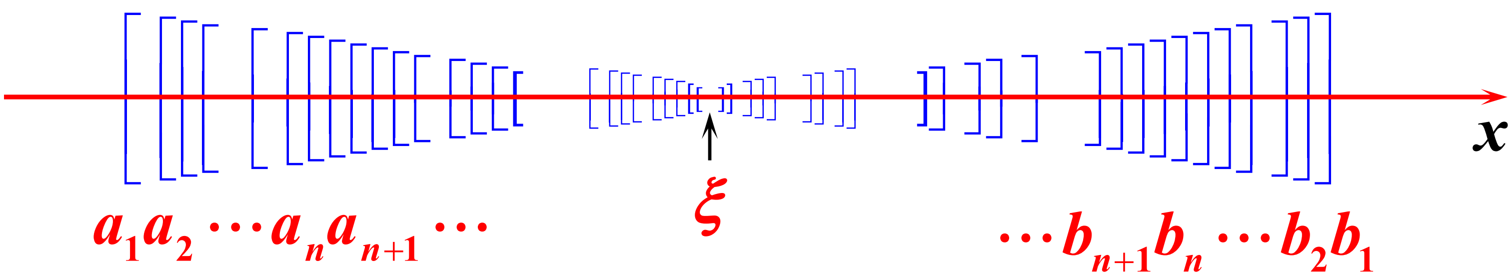
$$a_1\le a_2\le\cdots\le a_n\le\cdots\le b_n\le\cdots\le b_2\le b_1.$$

定理1(区间套定理)：若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个区间套，

则存在唯一实数 ξ，使得

$$\xi \in [a_n, b_n],\ \ n = 1, 2, \cdots,$$

或者
$$\{\xi\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$



推论： 设 $\xi \in [a_n, b_n]\,(n = 1,2,\cdots)$ 是区间套 $\{[a_n, b_n]\}$ 所确定的点，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in Z_+$，当 $n > N$ 时，有

$$[a_n, b_n] \subset U(\xi; \varepsilon).$$

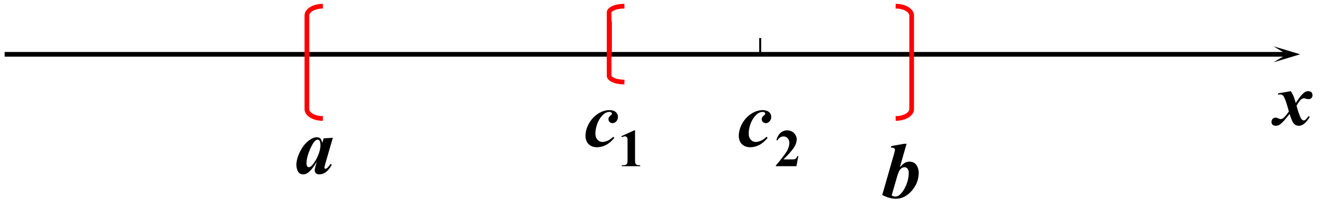
注： 若区间套定理中的闭区间改为开区间，则结论不一定成立.

如：$\{(a_n, b_n)\} = \left\{(0, \frac{1}{n})\right\}.$

例1、用区间套定理证明根的存在性定理。

即：设 $f \in C[a,b]$，且 $f(a)f(b) < 0$，

则存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = 0$.



二、聚点定理与有限覆盖定理

定义2：设 S 为数轴上的非空点集, ξ 为定点. 若对任意正数 ε, 在 $U(\xi,\varepsilon)$ 中含有 S 的无限个点, 则称 ξ 是 S 的一个聚点.

例2、求下列集合的聚点。

(1) $S=\{1/n \mid n\in Z_+\}$.

(2) $S=\{(-1)^n+1/n \mid n\in Z_+\}$.

(3) $S=[0,1]\cap Q$.

(4) $S=N$.

聚点的等价定义

定义2′：设集合 $S\subset R$，若对任意 $\varepsilon>0$，都有

$$U^{o}(\xi,\varepsilon)\cap S\neq\phi,$$

则称 ξ 为 S 的一个聚点 .

定义2″：若存在各项互异的收敛数列 $\{x_n\}\subset S$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$ 称为 S 的一个聚点 .

定理2（聚点定理）： 实数轴上的任意有界无限点集至少有一个聚点.

推论（致密性定理）： 有界数列必有收敛子列.

例3、 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\{x_n\}\subset[a,b]$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$，则存在 $x_0\in[a,b]$，使得

$$f(x_0)=A.$$

定义3：设 S 为数轴上的一个点集, H 为一些开区间的集合，若对任意 $x \in S$，都存在 $(\alpha, \beta) \in H$，使得 $x \in (\alpha, \beta)$，则称 H 是 S 的一个开覆盖.

特别地, 若 H 中的开区间的个数是有限（无限）的, 则称 H 是 S 的一个有限（无限）开覆盖.

例4、$H=\{(\frac{1}{n+1},1)\,|\,n=1,2,\cdots\}$是区间$(0,1)$的一个无限开覆盖。

问题：H中是否存在有限个开区 间覆盖来覆盖 区间$(0,1)$？

例5、设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，对任意 $\varepsilon > 0$, 对 $\forall x \in (a,b)$, 存在 $0 < \delta_x < \min\{x-a, b-x\}$, 当 $x' \in U(x,\delta_x)$ 时, 有

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

则 $$H = \{(x-\delta_x, x+\delta_x) \mid x \in (a,b)\}$$

是区间 (a,b) 的一个开覆盖.

定理3（ Heine－Borel 有限覆盖定理 ）:

设 H 是闭区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 则从 H 中可选出有限个开区间来覆盖闭区间 $[a, b]$.

(Borel,E.1871-1956, 法国)

(Heine,H.E.
1821-1881,德国)

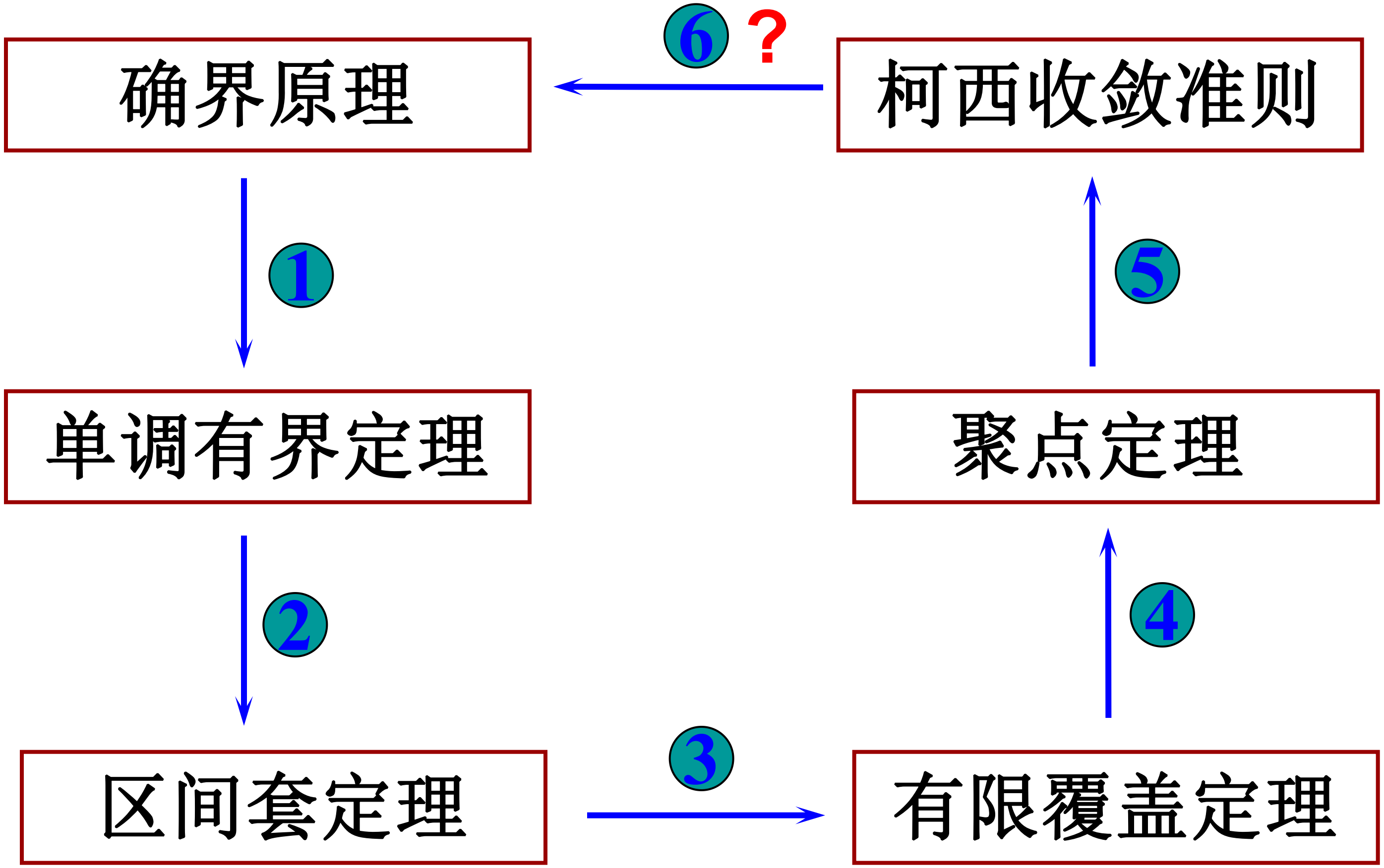
例6、用有限覆盖定理证明闭区间上连续函数的有界性定理.

例7、用有限覆盖定理证明聚点定理.

三、实数完备性定理的等价性

实数完备性的六个定理等价：

确界原理	单调有界定理	区间套定理
聚点定理	有限覆盖定理	柯西收敛准则


确界原理
单调有界定理
区间套定理
有限覆盖定理
聚点定理
柯西收敛准则
1
2
3
4
5
6
?