第三章　函数极限

1. 函数极限的概念
2. 函数极限的性质
3. 函数极限存在的条件
4. 两个重要极限
5. 无穷小量与无穷大量

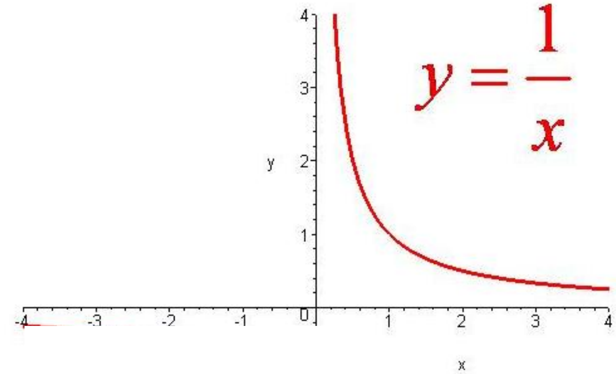
3.1 函数极限的概念

函数在无穷远处的极限

函数在有限点处的极限

一、函数在无穷远处的极限

设 $f(x)=\dfrac{1}{x}\,(x>0)$.



当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$.

定义1： 设 $f(x)$ 定义在 $[a,+\infty)$ 上，A 为常数. 若

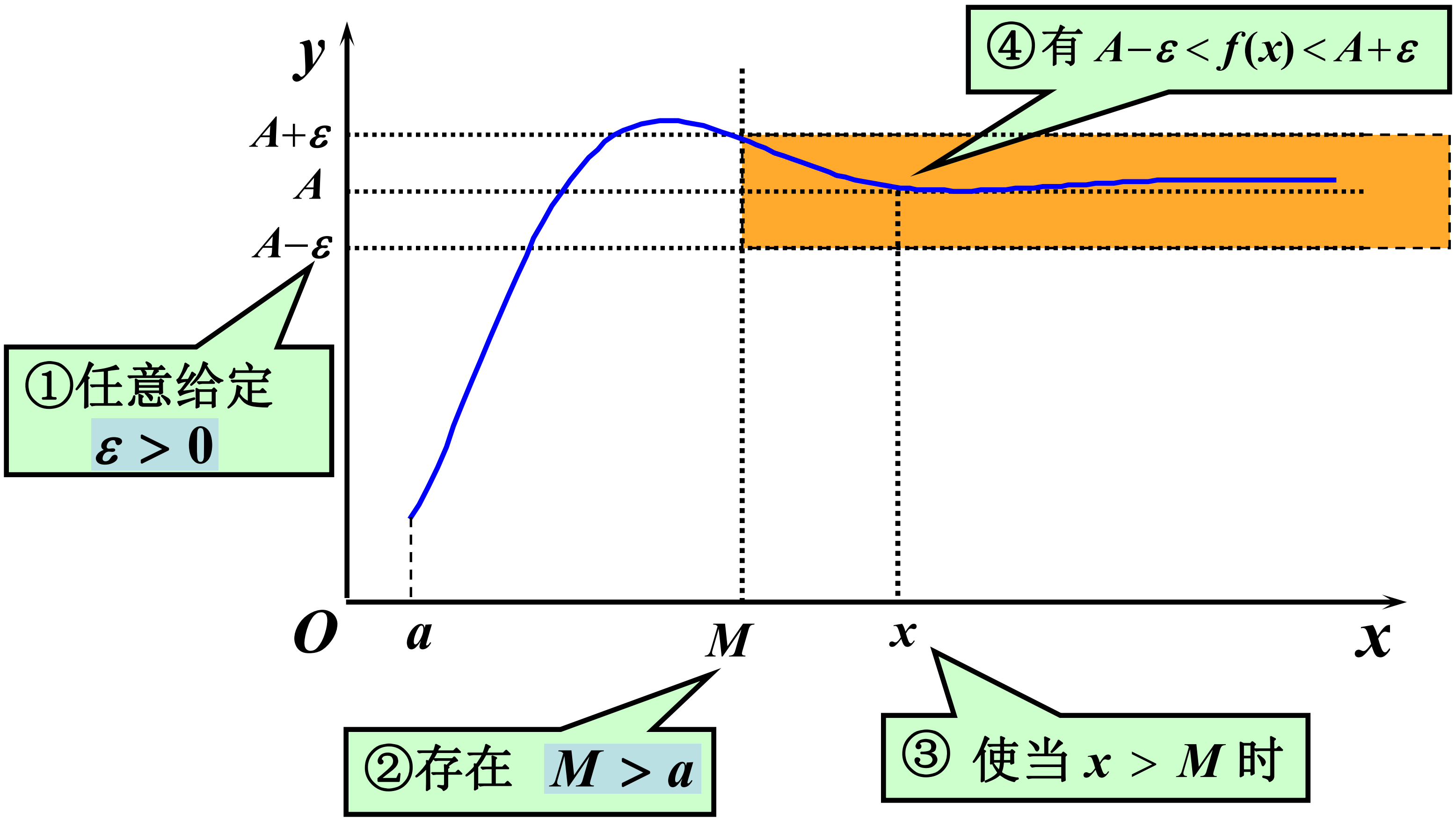
$\forall \varepsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 当 $x > M$ 时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时以 A 为极限，

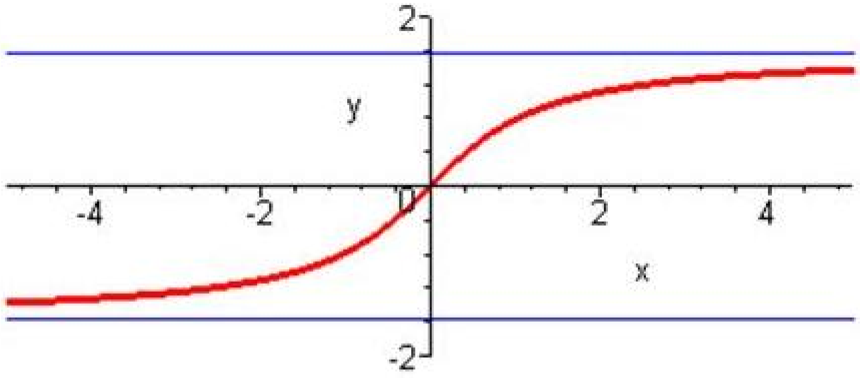
记作 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A\ (x \to +\infty)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的几何意义：$\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，当 $x>M$ 时，$y=f(x)$ 图形落在 $y=A\pm\varepsilon$ 之间.



例1、证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

例2、证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}.$



定义2：$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists M>0,$当$x<-M$时，

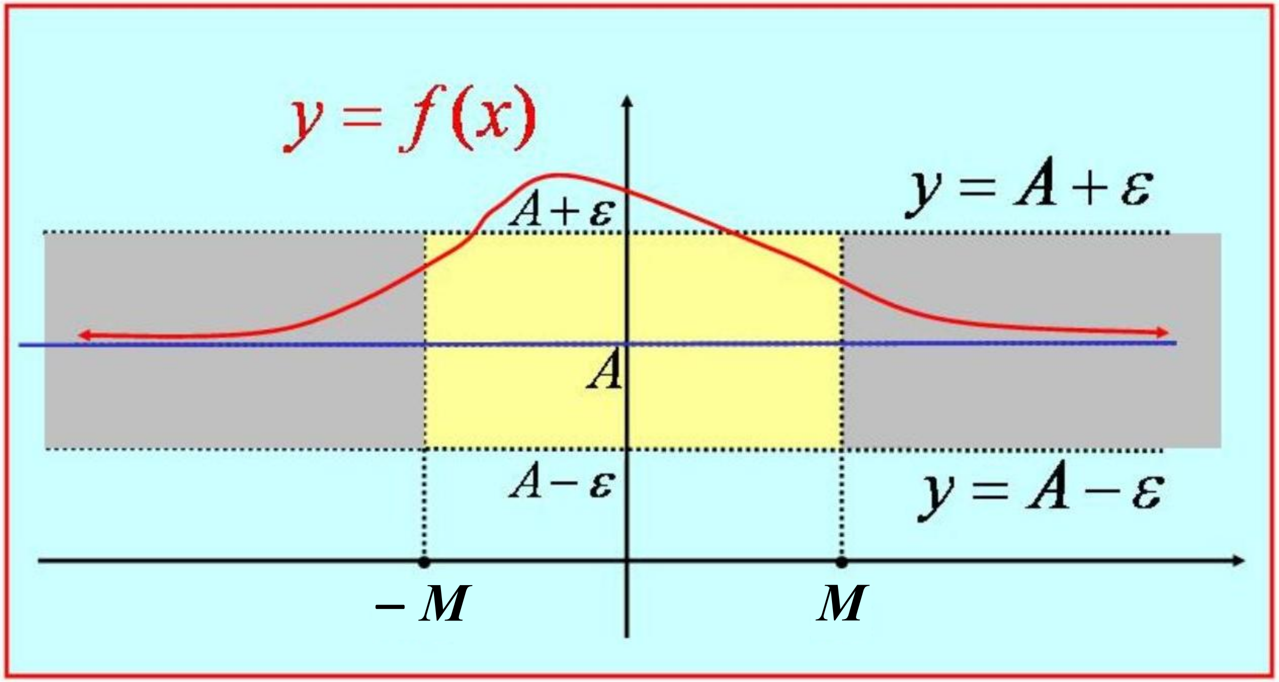
有$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon.$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists M>0,$当$|x|>M$时，

有$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon.$

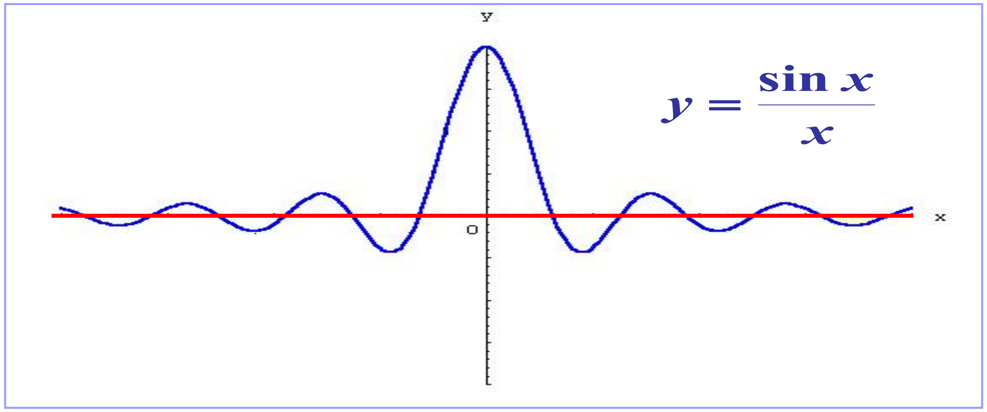
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$的几何意义：$\forall\varepsilon > 0$，$\exists M > 0$,当

$|x| > M$时, $y = f(x)$图形落在 $y = A \pm \varepsilon$ 之间.



$y = A$称为$y = f(x)$的 水平渐近线。

例3、证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

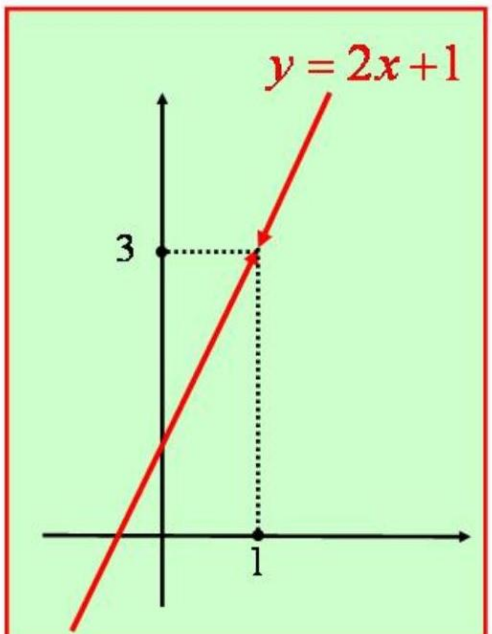


定理1： $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A.$

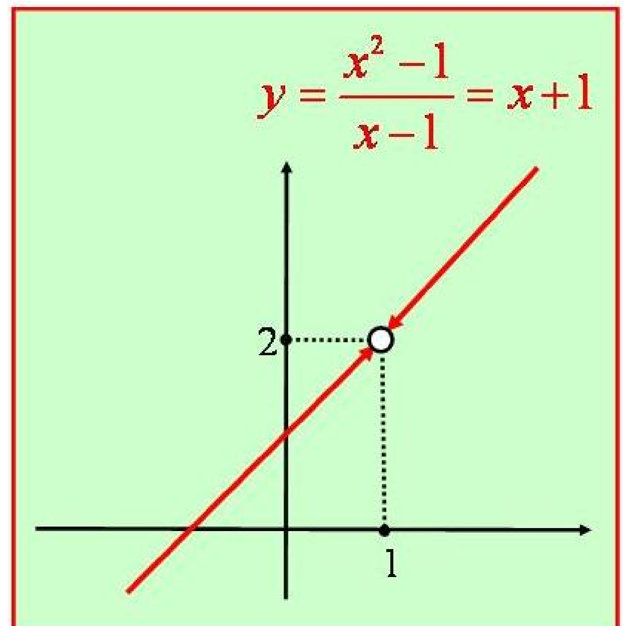
二、函数在有限点处的极限

引例：讨论当 $x \to 1$ 时，$f(x)$ 的极限．

(1) $f(x) = 2x + 1$；　　(2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$．



（1）



（2）

共同点： x 趋于 x_0 时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近某一确定的常数 A.

$$\boxed{\text{称当 } x \to x_0 \text{ 时，函数 } f(x) \text{ 的极限为 } A.}$$

设 $\varepsilon, \delta > 0$,

$x \to x_0$: $\boxed{0 < |x - x_0| < \delta;}$

$f(x)$ 接近 A : $\boxed{|f(x) - A| < \varepsilon.}$

当$x \to x_0$时，$f(x)$无限接近A：

* 不论你要求$|f(x)-A|$多么小，

$\forall \varepsilon > 0$，要使$|f(x)-A| < \varepsilon$；

* 只要$|x-x_0|$足够小$(x \neq x_0)$，

$\exists \delta > 0$，当$0 < |x-x_0| < \delta$；

* $|f(x)-A|$就能那么小，

所对应的$f(x)$就满足$|f(x)-A| < \varepsilon$.

定义1：若存在常数 A，使得 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 x 满足

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时,}$$

对应的函数值 $f(x)$ 就满足

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记为：

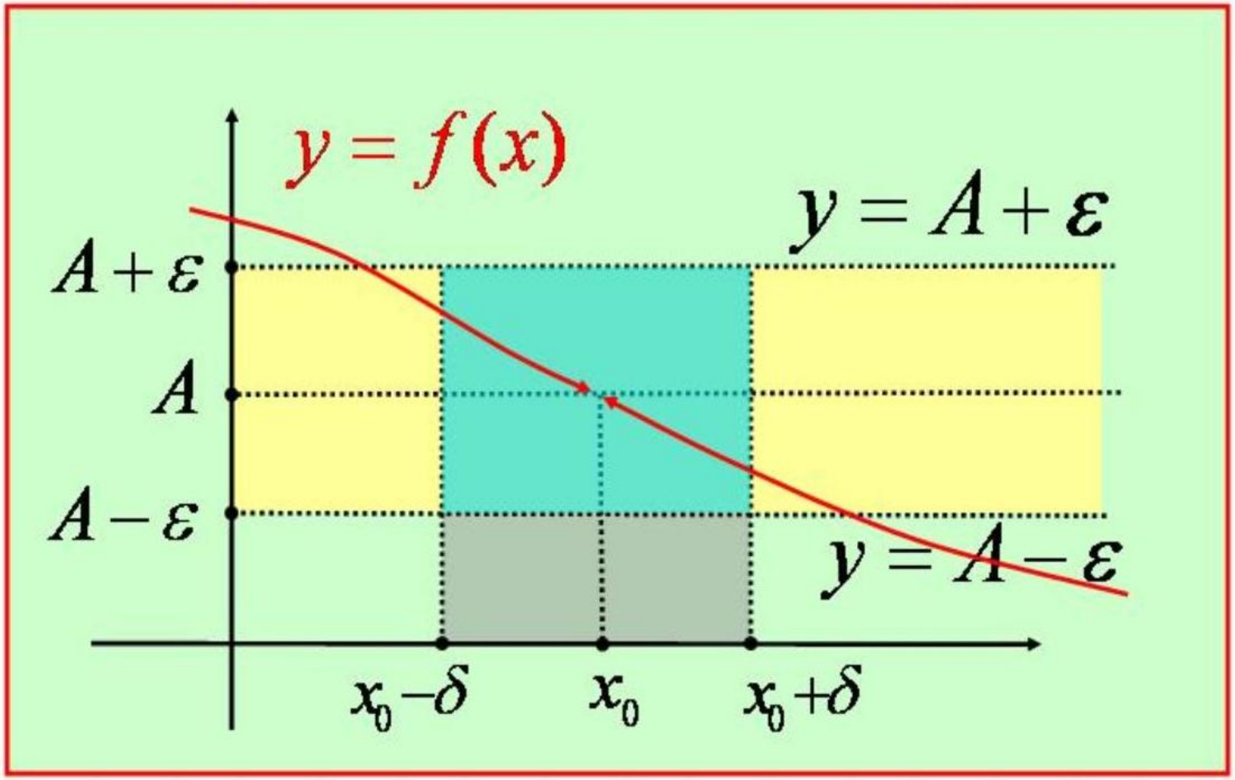
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad (f(x) \to A\,(\text{当 } x \to x_0)).$$

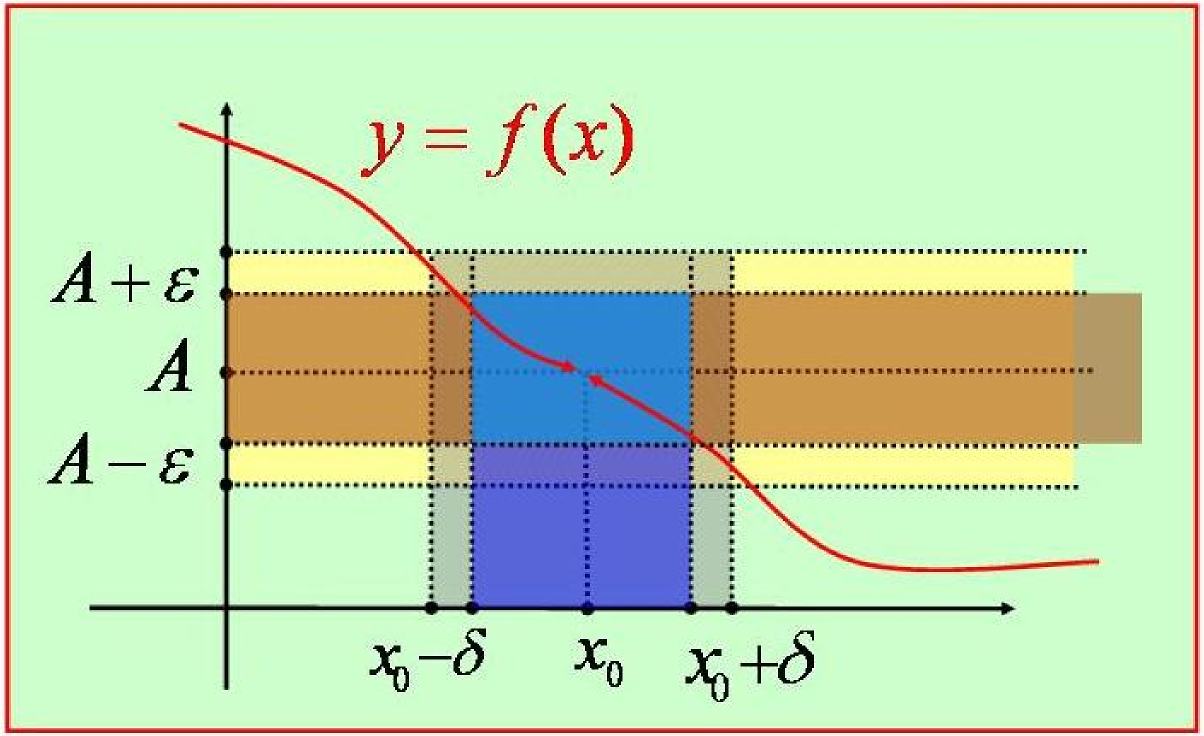
注：定义1称为函数极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义 .

几何意义：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } x \in \overset{o}{U}(x_0, \delta) \text{时},$$

$$f(x) \in U(A, \varepsilon).$$





ε 越小，

δ 越小．

注：(1) $f(x)$ 在 x_0 可以无定义；

(2) A 与 $f(x_0)$ 可以不相等．

例4、证明： (1) $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ (c 为常数)；

(2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2$；

(3) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 6x + 10) = 2$.

证明的关键：

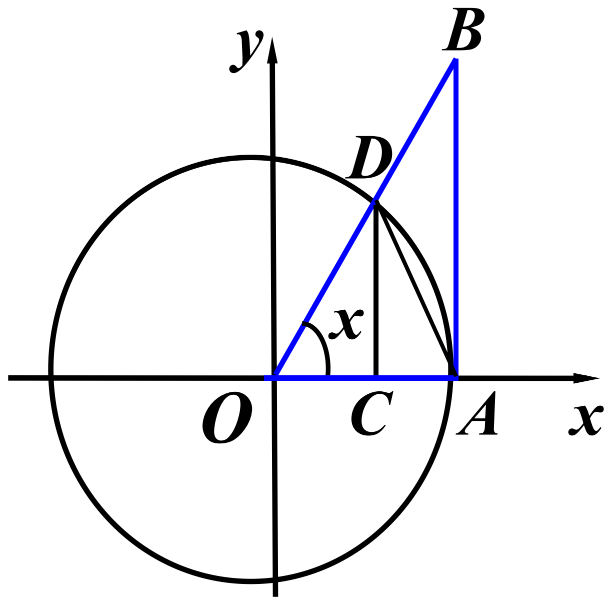
由 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 解出 $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$.

例5、证明：$\forall x_0 \in R$，有 $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0} \; (a > 0, a \neq 1).$

例6、证明

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$;

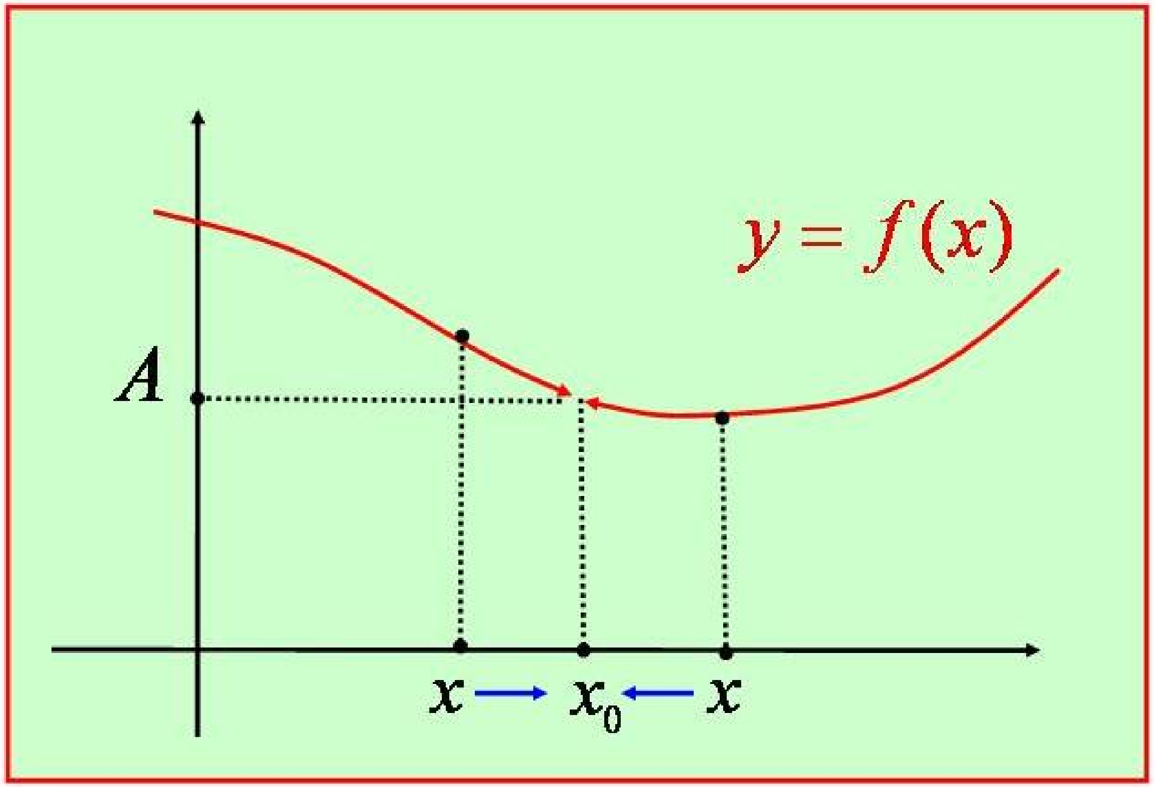
(2) $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.



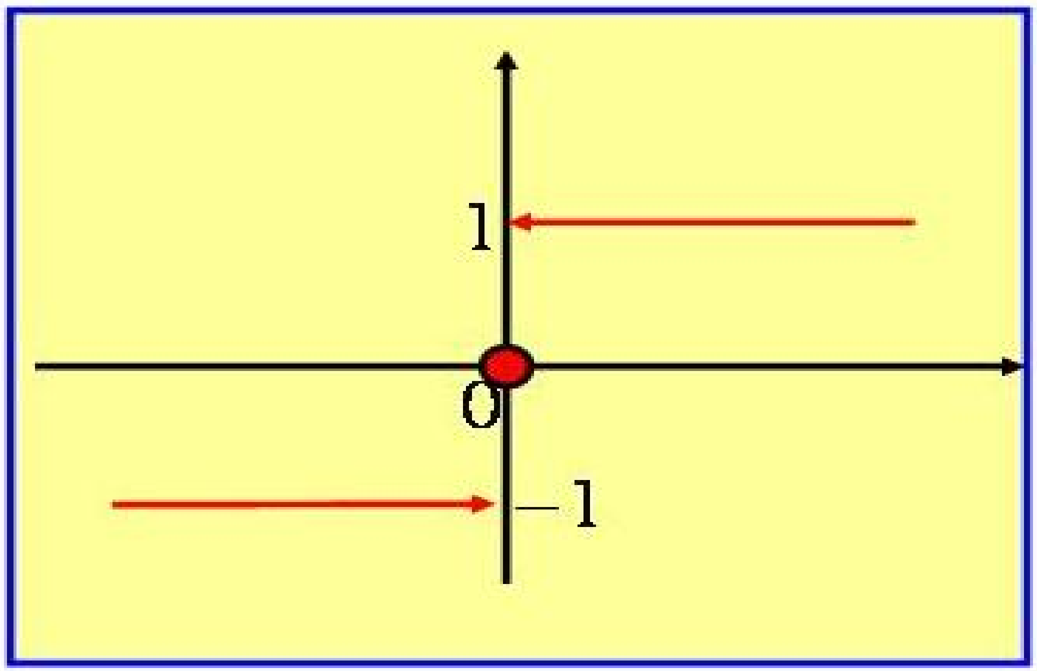
$|\sin x| \leq |x|$

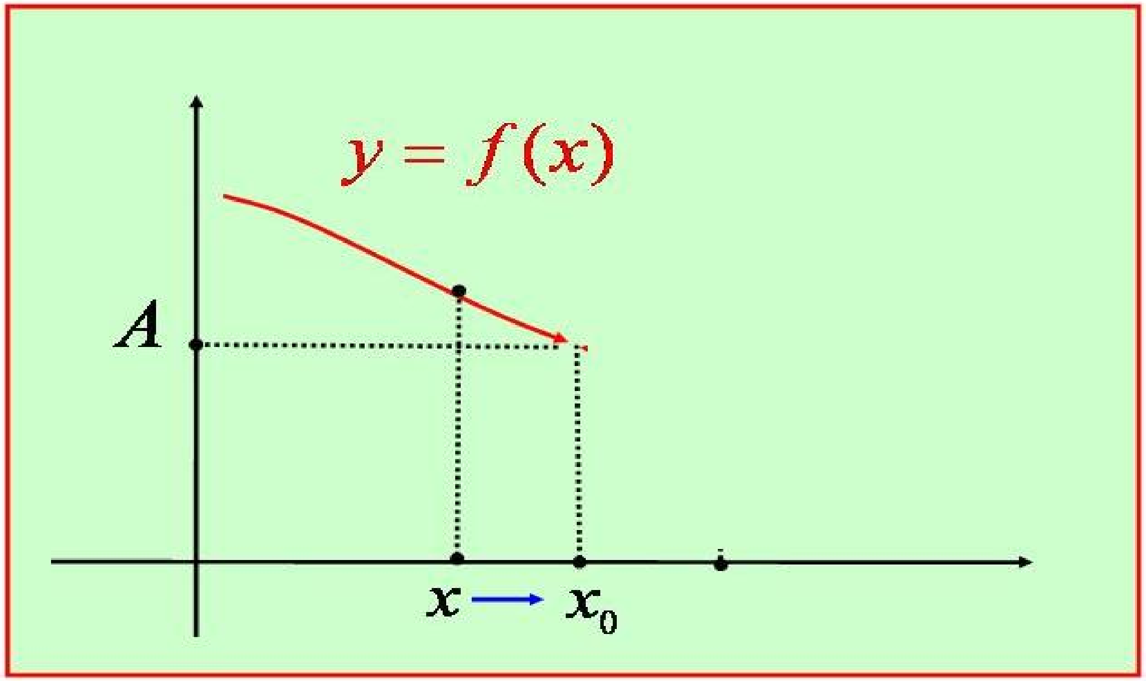
单侧极限

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 是双侧极限。



$$\text{考虑}\ \operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}\ \text{当}\ x\to 0\ \text{时的极限}.$$



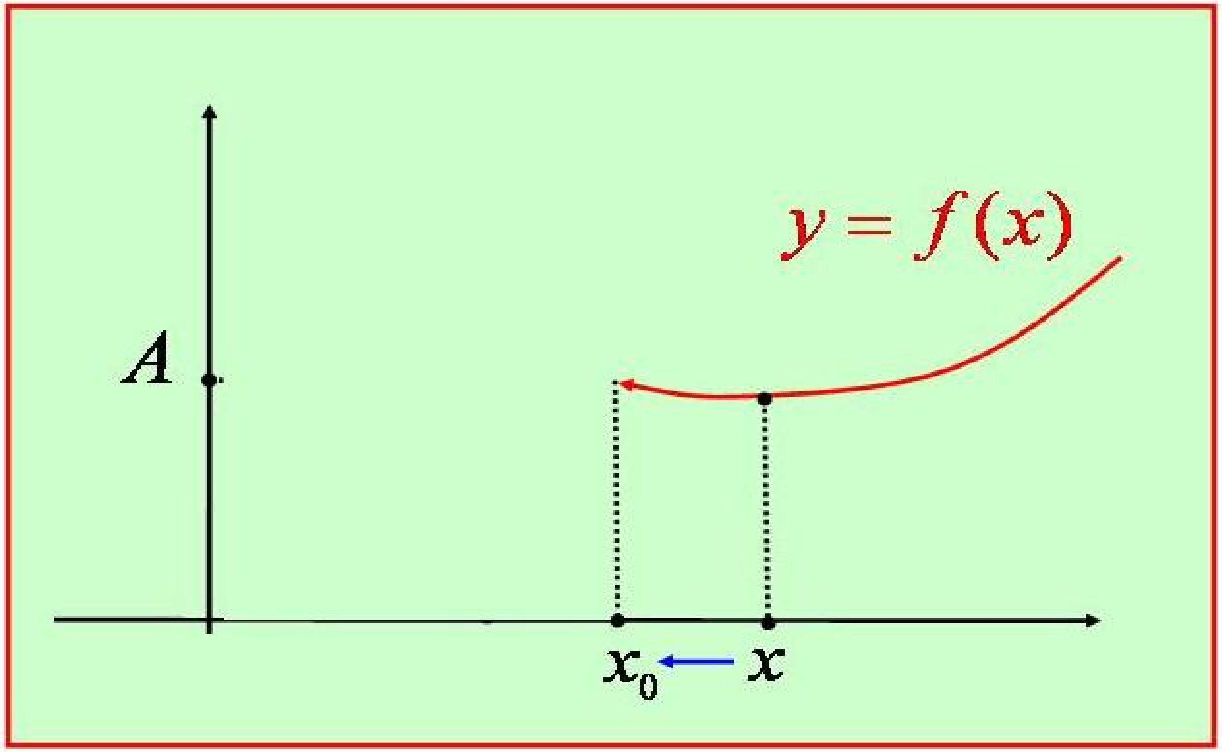


限制 x 从左侧

趋于 x_0

左极限: $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,$

当 $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon;$



限制 x 从右侧趋于 x_0

右极限: $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,$

当 $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

定理2： $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A.$

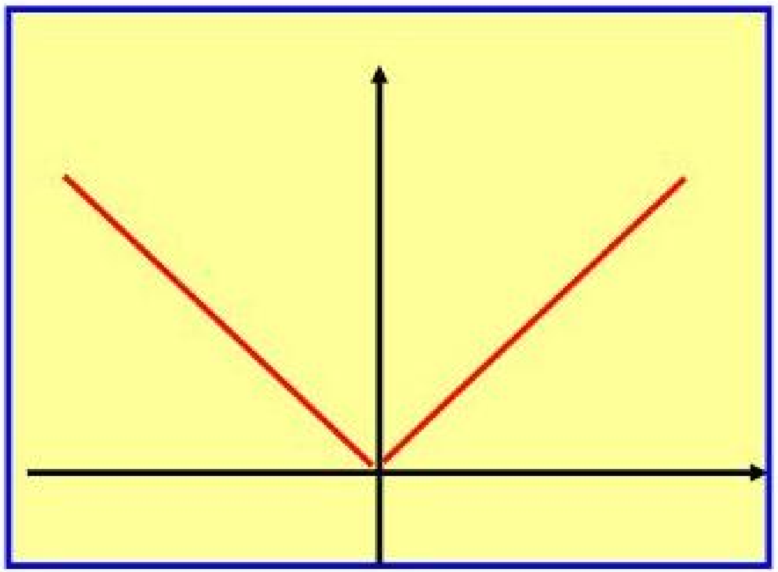
注： 由定理2得，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在的情形：

(1) $f(x_0 - 0)$与$f(x_0 + 0)$都存在但不相等；

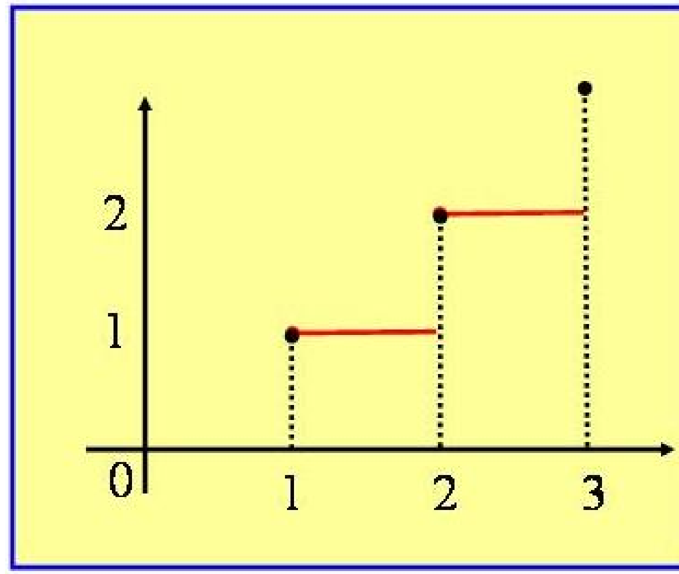
(2) $f(x_0 - 0)$与$f(x_0 + 0)$至少有一个不存在。

例7、(1) 设 $f(x)=|x|$，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$;

(2) 设 $f(x)=[x]$, 求 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.



（1）



（2）

作 业

习 题 3.1：1(3)(5)、6(3)