§ 17.3　方向导数与梯度

1 方向导数

2 方向导数与偏导数的关系

3 梯度

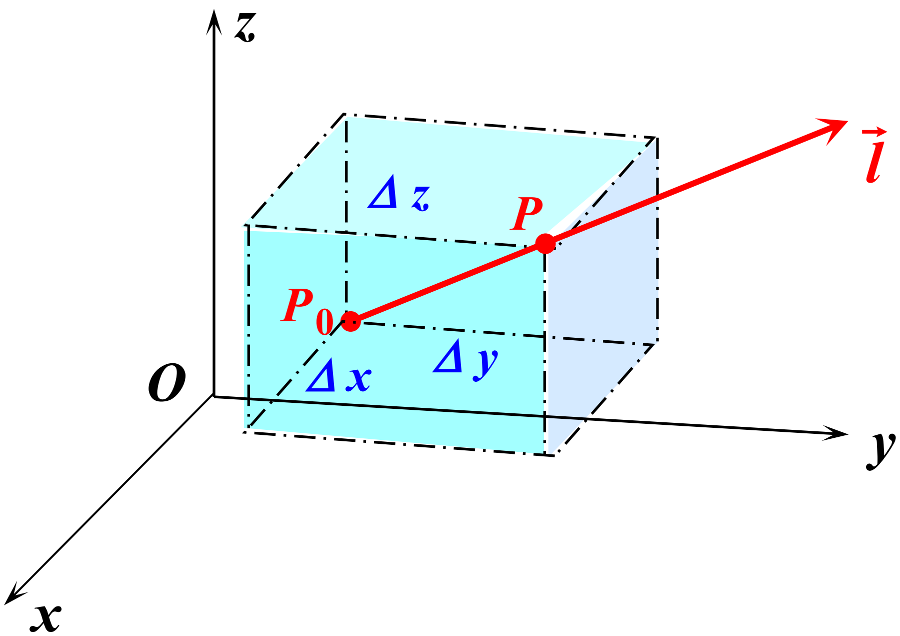
一、方向导数

定义1: 设函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域 $U(P_0)\subset \mathbf{R}^3$ 内有定义, $\vec{l}$ 为从点 P_0 出发的射线. 任给 $P(x,y,z)\in \vec{l}\cap U(P_0)$, 记 $\rho=|P_0P|$, 若极限

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\Delta_{\vec{l}}f}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}$$

存在, 则称此极限为函数 f 在点 P_0 沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数, 记作 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}$, $f_{\vec{l}}(P_0)$ 或 $f_{\vec{l}}(x_0,y_0,z_0)$.

$$f_{\vec{l}}(P_0)=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}.$$



注： 设 f 在点 P_0 存在关于 x 的偏导数，则

(1) 若 $\vec{l}=\overrightarrow{Ox}$，则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}=\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}$.

(2) 若 $\vec{l}=-\overrightarrow{Ox}$，则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}=-\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}$.

二、方向导数与偏导数的关系

定理：若函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 可微，则 f 在点 P_0 沿任一方向 $\vec{l}$ 的方向导数存在，且

$$f_{\vec{l}}(P_0)=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta+f_z(P_0)\cos\gamma,\quad (1)$$

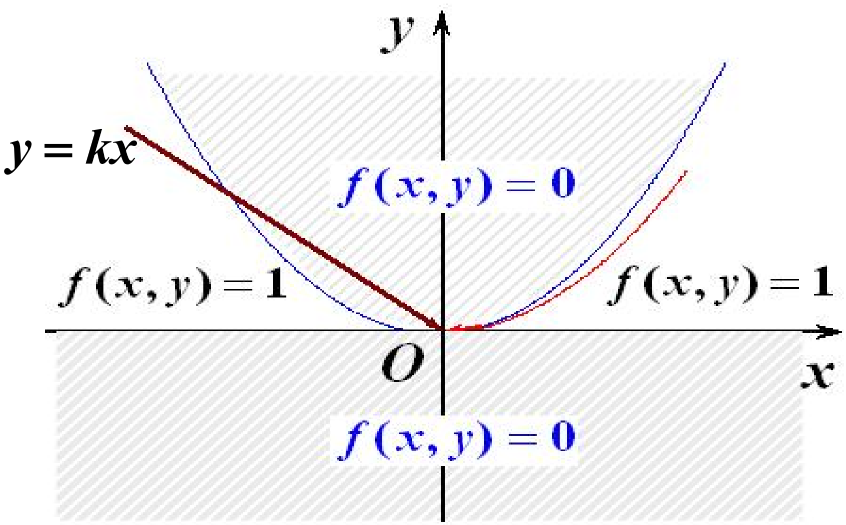
其中方向 $\vec{l}$ 的单位向量 $\vec{l}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

例1、设 $f(x,y,z)=x+y^2+z^3$，求 f 在点 $P_0(1,1,1)$ 处沿着指向点 $P_1(3,-1,2)$ 方向的方向导数 .

例2、设

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<x^2, -\infty<x<+\infty,\\ 0, & \text{其余部分}.\end{cases}$$

求函数 f 在 $(0,0)$ 沿各方向的方向导数。



- 函数 f 在 P_0 任一方向导数存在 $\begin{array}{c}\not\longrightarrow \\ \not\longleftarrow\end{array}$ f 在点 P_0 连续.

- 函数 f 在点 P_0 可微 $\begin{array}{c}\longrightarrow \\ \not\longleftarrow\end{array}$ f 在 P_0 任一方向导数存在 .

三、梯度

定义2：若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 可偏导，则称向量 $(f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0))$ 为 f 在点 P_0 的梯度，记作

$$\mathbf{grad}\, f(P_0)=(f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0)).$$

$\mathbf{grad}\, f(P_0)$ 的长度(或模)为

$$|\mathbf{grad}\, f(P_0)|=\sqrt{f_x(P_0)^2+f_y(P_0)^2+f_z(P_0)^2}.$$

◆ 若方向 $\vec{l}$ 的单位向量为 $\vec{l}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$,则

$$f_{\vec{l}}(P_0)=\operatorname{grad} f(P_0)\cdot\vec{l}_0=|\operatorname{grad} f(P_0)|\cos\theta.$$

其中 θ 为梯度向量 $\operatorname{grad} f(P_0)$ 与 $\vec{l}_0$ 的夹角.

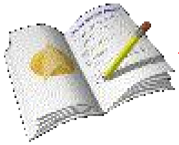
(1) 当 $\theta=0$ 时，$f_{\vec{l}}(P_0)$ 取得最大值 $|\operatorname{grad} f(P_0)|$.

结论: 函数在一点的梯度是这 样一个向量,它的方向与函数在这点的方向导 数取得最大值的方向一致(f 的值增长最快的方向),它的模等于该点处方向导数的最大值 。

(2) 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$，即沿与梯度垂直方向的 方向导数为 0.

(3) 当 $\theta = \pi$ 时，即沿与梯度方向相反时，方向导数取得最小值 $-|grad\ f(P_0)|$.

例 3、设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^3$，试求 f 在点 $P_0(2,-1,1)$ 处的梯度及方向导数的最大值。



作业

习题17-3：2、4