级　数

级数
- 数项级数
- 函数项级数
  - 幂级数
  - 傅里叶级数

级数是研究函数的工具
- 表示函数
- 研究性质
- 数值计算

第十二章　　数项级数

正项级数

1

2

3

一般项级数

级数的收敛性

12.1　级数的收敛性

1 数项级数的概念

2 级数的基本性质

一、数项级数的概念

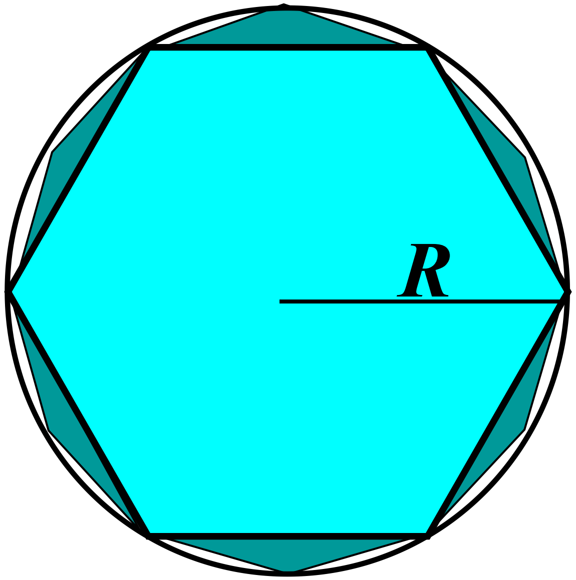
引例1、实数的十进制表示

$$\frac{1}{3} \approx 0.33\cdots 3 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots \frac{3}{10^n}.$$

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots \frac{3}{10^n} + \cdots.$$

$$\frac{1}{3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n}\right).$$

引例2、圆的面积



正六边形的面积 a_1

正十二边形的面积 $a_1 + a_2$

正3×2^n边形的面积 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \approx A$

则 $A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$

令 $A = \lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$

定义1、给定一个数列$\{u_n\}$，对它的各项依次用“+”号连接起来的表达式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \qquad (1)$$

称为常数项无穷级数，简称级数，记为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

u_n：级数的一般项；

$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n$：级数的前$n$项部分和；

$\{S_n\}$：部分和数列。

定义2、若级数 (1) 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛到 S，即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

则称级数 (1) 收敛，且称 S 为级数 (1) 的和，记为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

若部分和数列 $\{S_n\}$ 发散，则称级数 (1) 发散。

注1、研究级数的收敛性就是研究其部分和数列是否存在极限.

注2、若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$,则其部分和 S_n 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的近似值,其差 $r_n = S - S_n$ 称为级数的余项,则

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

例1、讨论几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \quad (a \neq 0)$ 的收敛性。

例2、讨论下列级数的敛散性，若收敛则求其和。

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+n^2}, \qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!},$$

$$(3)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}.$$

二、级数的基本性质

定理1（级数收敛的柯西准则）级数(1)收敛的充要条件是:对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N,当$m > N$时, 对任意的正整数 p 都有

$$\left| u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p} \right| < \varepsilon.$$

例3、证明调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的.

例4、证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的.

推论: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

若 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例5、 判别下列级数的敛散性，若收敛则求其和。

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi}{3}, \qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \qquad (3)\sum_{n=2}^{\infty} \ln\frac{n^2-1}{n^2}.$$

性质1： 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 S，T，则对任意实数 c，d，有 $\sum_{n=1}^{\infty}(cu_n + dv_n)$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(cu_n + dv_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} u_n + d\sum_{n=1}^{\infty} v_n = cS + dT.$$

定义3、在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中去掉前 n 项后得到的级数

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的第 n 个余项.

性质2：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与它的任一余项有相同的敛散性。

注：去掉、增加或改变级数的有限多项不改变级数的敛散性。

性质3： 对收敛级数的项任意加括号后所得的级数仍然收敛，且其和不变。

注1、 级数加括号后收敛，不能推断原级数收敛；

注2、 若级数加括号后发散，则原级数发散。

例6、判别级数

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots$$

的敛散性。

定义4、 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛。

定理2： 绝对收敛的级数一定收敛。

作业

习题12-1：1(1)(2)(4)、7(1)