11.3 瑕积分的性质与收敛判别

1 瑕积分的性质

2 非负函数瑕积分的收敛判别

3 一般函数瑕积分的收敛判别

一、瑕积分的性质

定理1 (瑕积分收敛的柯西准则) 设函数 $f(x)$ 的瑕点为 $x=a$, $f(x)$ 在任一 $[u,b]\subset(a,b]$ 可积，则瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛的充要条件是: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $u_1,u_2\in(a,a+\delta)$ 时,

$$\left|\int_{u_1}^b f(x)dx-\int_{u_2}^b f(x)dx\right|=\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

性质1：设函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的瑕点同为 a，若瑕积分 $\int_a^b f_1(x)dx$ 与 $\int_a^b f_2(x)dx$ 都收敛，则对任意常数 k_1, k_2，有

$$\int_a^b [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]\,dx$$

$$= k_1\int_a^b f_1(x)\,dx + k_2\int_a^b f_2(x)\,dx.$$

性质2： 设函数 $f(x)$ 的瑕点为 $x=a$，则对任意

对 $c\in(a,b)$，瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^c f(x)dx$

同时收敛或同时发散，且

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\,.$$

性质3: 设函数 $f(x)$ 的瑕点为 $x=a$, $f(x)$ 在任一

$[u,b]\subset(a,b]$ 可积，且 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛，

则 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛，并且

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

定义： 若瑕积分 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛，称 $\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛.

若瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，但 $\int_a^b |f(x)|dx$ 发散，

称 $\int_a^b f(x)dx$ 条件收敛.

二、非负函数瑕积分的收敛判别法

定理3（比较判别法）： 设非负函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的瑕点同为 $x=a$，在任何 $[u,b]\subset(a,b]$ 上可积，且

$$f(x)\le g(x),\quad x\in(a,b].$$

则当 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^b f(x)dx$ 也收敛；

当 $\int_a^b f(x)dx$ 发散时，$\int_a^b g(x)dx$ 也发散．

推论1: 设非负函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的瑕点同为 $x=a$，在任何 $[u,b]\subset(a,b]$ 上可积，则

(i) 若 $f(x)\le\dfrac{1}{(x-a)^p}$ 且 $0<p<1$，则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

(ii) 若 $f(x)\ge\dfrac{1}{(x-a)^p}$ 且 $p\ge1$，则 $\int_a^b f(x)dx$ 发散 .

推论2: 设非负函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的瑕点同为 $x=a$,

在任何 $[u,b]\subset(a,b]$ 上可积, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$.

(i) 若 $0<c<+\infty$, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛散;

(ii) 若 $c=0$, 且 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛;

(iii) 若 $c=+\infty$, 且 $\int_a^b g(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

推论3：设非负函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的瑕点同为 $x=a$，在任何 $[u,b]\subset(a,b]$ 上可积，且

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^p f(x)=\lambda\text{，则}$$

(i) 当 $0<p<1$，$0\le\lambda<+\infty$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

(ii) 当 $p\ge 1$，$0<\lambda\le+\infty$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 发散.

例1、判断下列瑕积分的敛散性。

$$(1)\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx;$$

$$(2)\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\ln x}dx.$$

三、一般瑕积分的收敛判别法

定理4 (狄利克雷判别法) 设 $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

若 (i) $F(u)=\int_u^b f(x)dx$ 在 $(a,b]$ 上有界,

(ii) $g(x)$ 在 $(a,b]$ 上当 $x\to a^+$ 时单调趋于 0,

则 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

定理5（阿贝尔判别法） 设 $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点．

若 (i) $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，

(ii) $g(x)$ 在 $(a,b]$ 上单调有界，

则 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛．

例2、讨论瑕积分 $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{\alpha}} dx$ 的敛散性.

例3、讨论反常积分 $\Phi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$ 的敛散性.

作　业

习题11-3：1(1)(4)(5)