第十七章　多元函数微分学

§17.1　可微性

1. 可微性与全微分
2. 偏导数
3. 可微性条件
4. 可微性的几何意义与应用

一、可微性与全微分

称 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微，若存在常数 A，使得

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$$

- 函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 的全增量

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0).$$

定义1： 设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域有定义，

若存在常数 A,B，使得

$$\boxed{\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),} \quad \left(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微 .

称 $$\boxed{\mathrm{d}z\big|_{(x_0,y_0)}=\mathrm{d}f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y.}$$

为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全微分 .

注1：若存在常数 A, B, 使得

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

其中 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0,$

则 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微.

注2：当 $|\Delta x|, |\Delta y|$ 充分小时, 全增量 $\Delta z \approx dz$, 即

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

例1、考察函数 $f(x,y)=xy$ 在点 (x_0,y_0) 的可微性 .

二、偏导数

- 对一元函数，若 $f(x)$ 在点 x_0 可微，则

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),\text{ 其中 } A=f'(x_0).$$

- 若二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，即

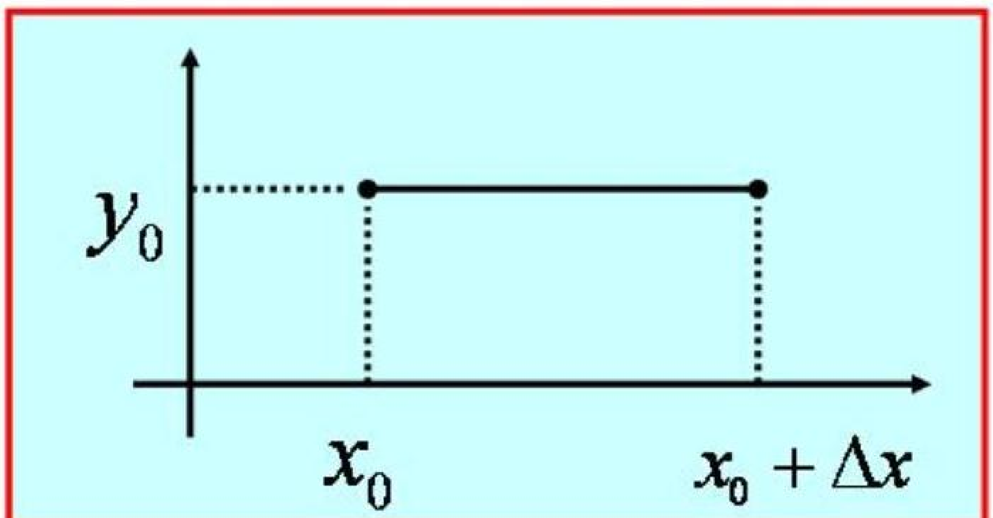
$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

常数 A, B 等于多少？

(1) 令 $\Delta y = 0$，则

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

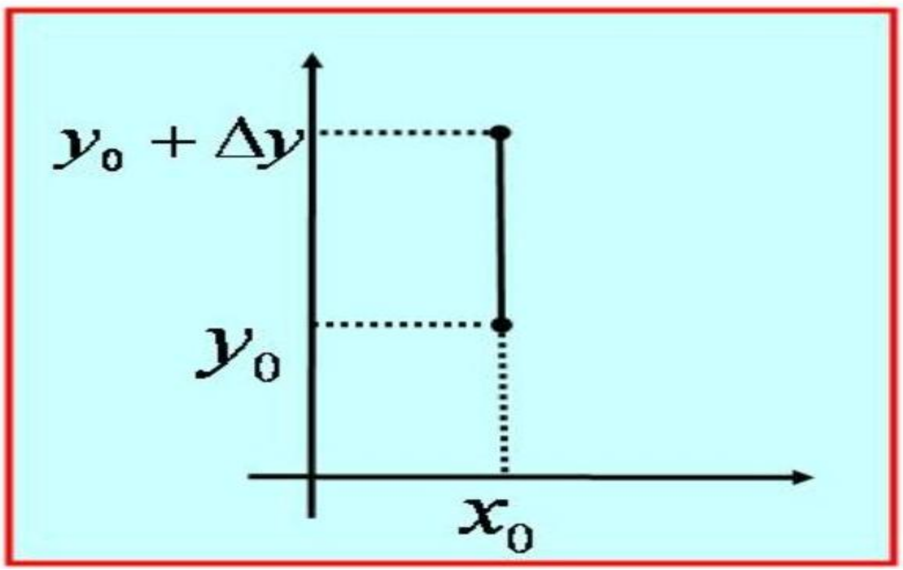
常数 A 是一元函数 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处的导数。



(2) 令 $\Delta x = 0$，则

$$B = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

常数 B 是一元函数 $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数。



定义2： 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 关于 x 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\quad z_x(x_0,y_0),\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\quad f_x(x_0,y_0).$$

函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 关于 x 的偏导数：

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 关于 y 的偏导数：

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

四个注记：

(1) 当函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 同时存在关于 x 和 y 的偏导数时，称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可偏导。

(2) 上述偏导数的定义可推广到二元以上的函数。

如：试写出函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的三个偏导数。

(3) 若函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 上每一点 (x, y) 都存在对 x（或对 y）的偏导数，则这些偏导数仍是 x, y 的函数，称之为 $f(x, y)$ 在区域 D 上对 x（或对 y）的偏导函数(偏导数)，记为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = z_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = z_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

$$f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

(4) 计算 $f_x(x,y)$ 时，将 y 看作常数，即令：

$$\varphi(x)=f(x,y),\ 则\ f_x(x,y)=\varphi'(x).$$

例2、求 $f(x,y)=x^3+2x^2y-y^3$ 在点 (1,3) 的偏导数.

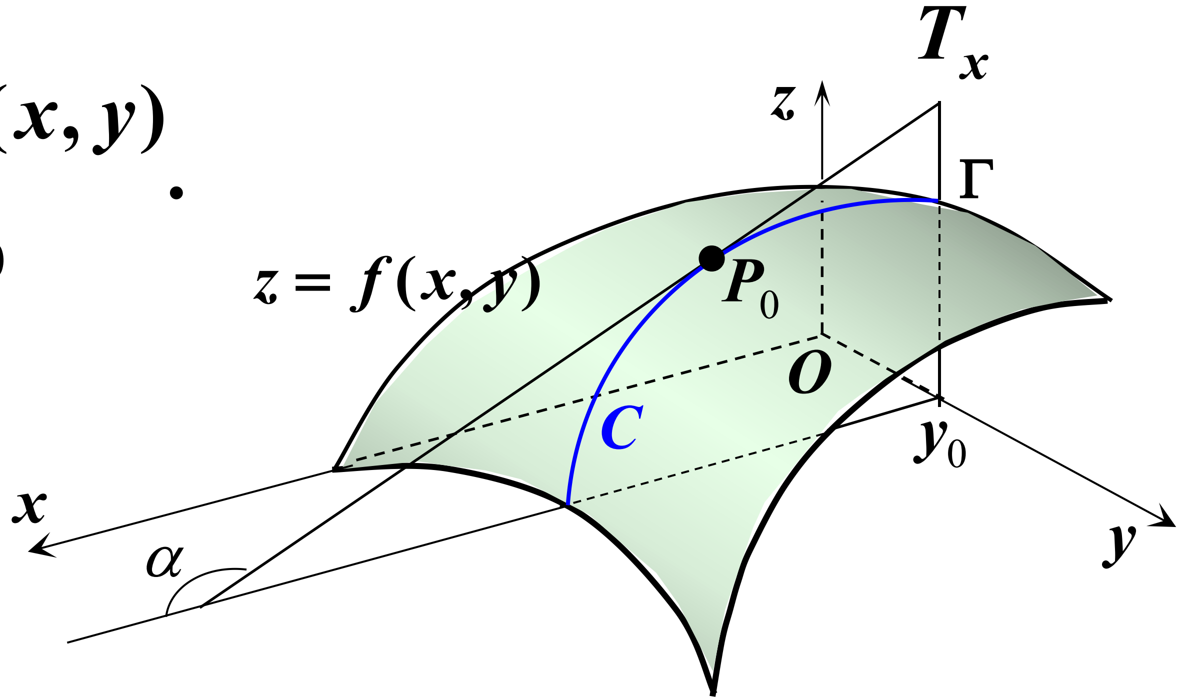
例3、设 $z=x^{y}\ (x>0, x\neq 1)$, 求 z 的偏导数。

思考：求 $z=x^{y}\cdot y^{x}$ 的偏导数。

例4、已知一定量理想气体的状态方程为 $PV=RT$（其中R 为常数），证明 $\dfrac{\partial P}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial P}=-1.$

* 偏导数的几何意义

设曲线 $\Gamma: \begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$.



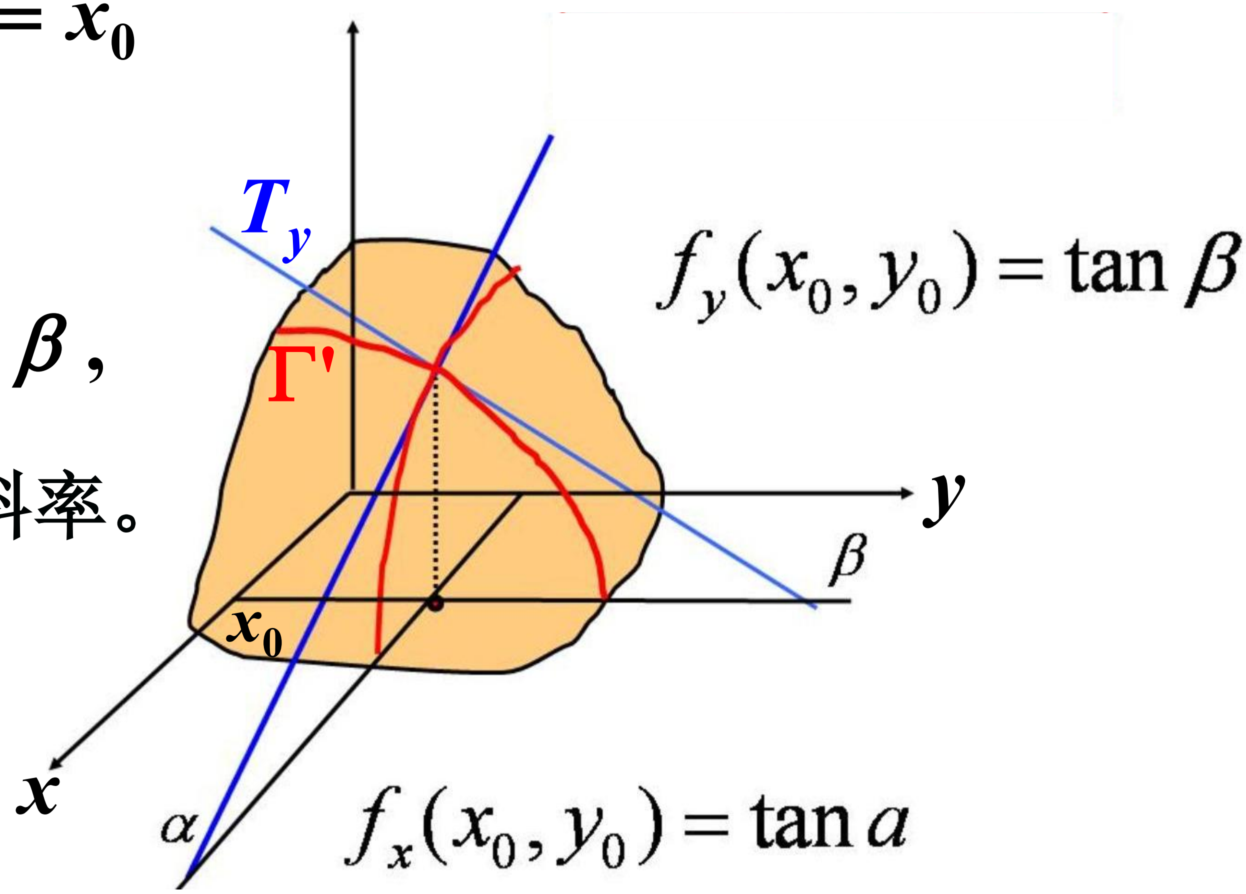
$f_x(x_0, y_0) = \tan\alpha$,

即 T_x 对 x 轴的斜率。

设曲线 Γ': $\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x_0 \end{cases}$.

$f_y(x_0, y_0) = \tan\beta$,

即 T_y 对 y 轴的斜率。



例5、求曲面 $z=\sqrt{1+x^2+y^2}$ 与平面 $x=1$ 的交线

在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线与 y 轴正向之间的夹角。

可偏导与连续之间的关系：

(1) 连续 $\not\Rightarrow$ 可偏导.

例6、设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续但偏导数不存在 .

(2) 可偏导 $\nRightarrow$ 连续.

例7、设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,

证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可偏导但不连续。

三、可微性条件

定理1(可微的必要条件):

若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微,则

(1) $f(x, y)$在点 (x_0, y_0) 处连续;

(2) $f(x, y)$在点 (x_0, y_0) 处可偏导,且 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的全微分为:

$$\boxed{\mathrm{d}z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.}$$

或

$$\boxed{dz = f_x(x_0, y_0)\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\mathrm{d}y.}$$

注:可微 $\Rightarrow$ 连续且可偏导，但反之不真。

例8、证明函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$

在 $(0,0)$ 处连续且可偏导,但不可微.

定理2(可微的充分条件)：

若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数在 (x_0,y_0) 的某邻域内存在，且 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 在点 $(x_0 y_0)$ 处连续，则该函数在点 (x_0,y_0) 可微.

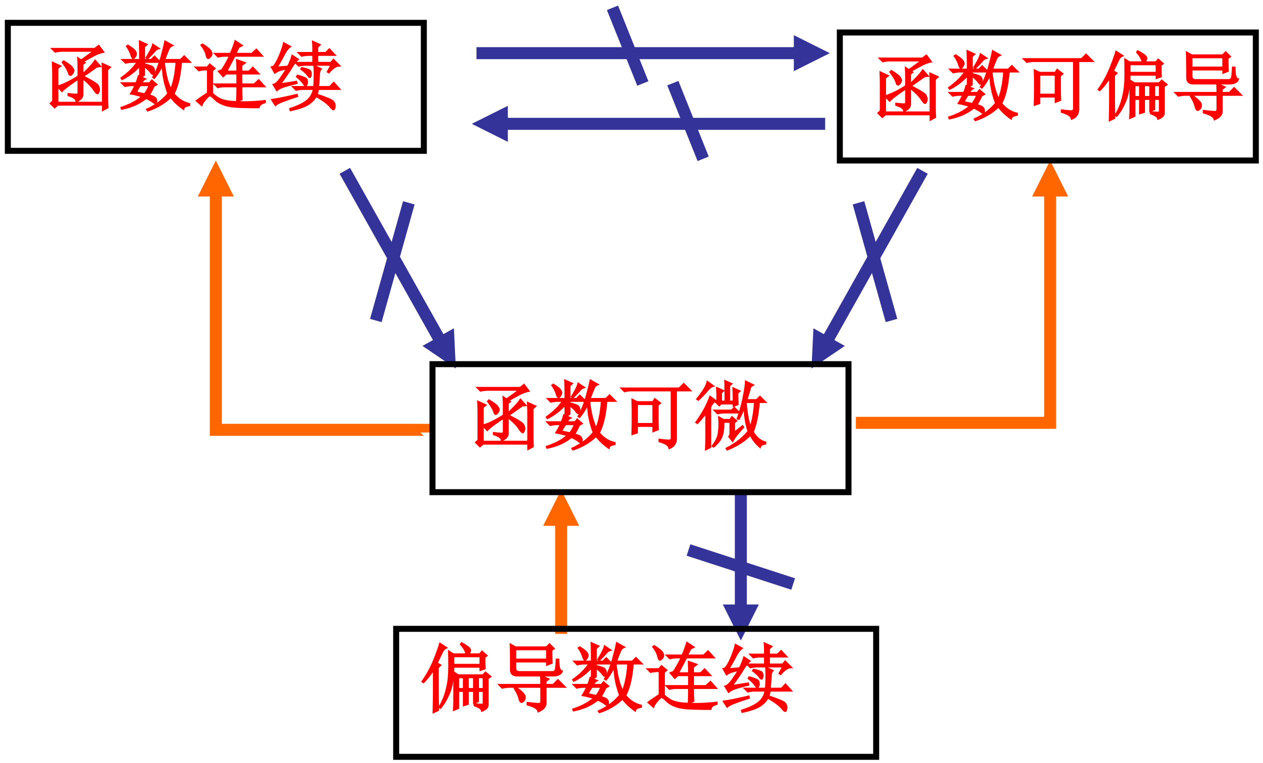
- 若 $f(x,y)\in C^{(1)}(D)$, 则 $f(x,y)$ 是 D 内的可微函数，即在 D 内处处可微。

注：偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微，但反之不真。

例9、设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，

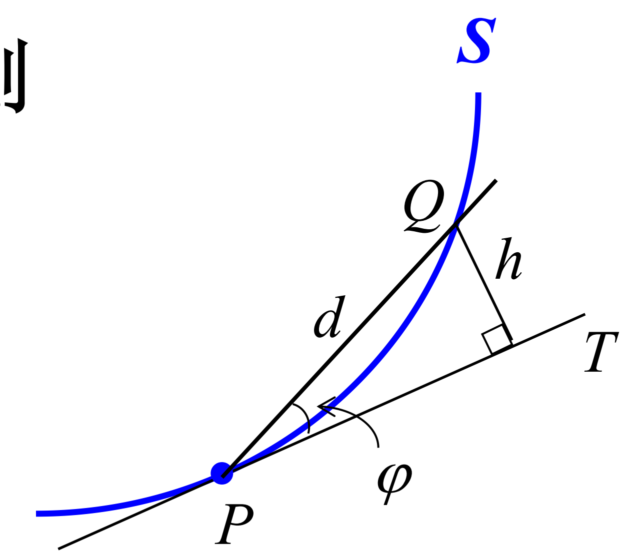
证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

多元函数连续、可偏导、可微的关系：



四、可微性的几何意义及应用

若 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微，则

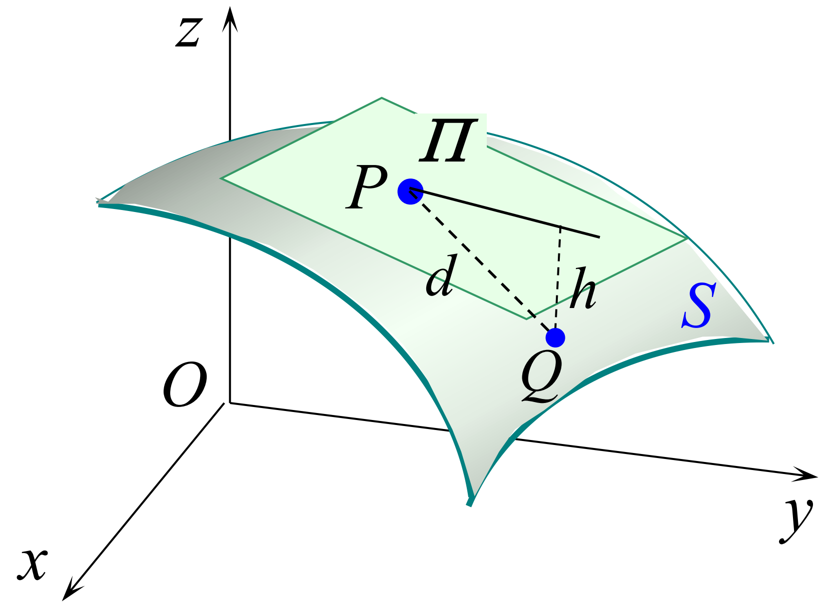


$$\sin\varphi = \frac{h}{d}, \quad \text{从而} \lim_{Q \to P} \frac{h}{d} = 0.$$

切线：$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$

$$y \approx y_0 + f'(x_0)(x - x_0), \ x \to x_0.$$

定义3：设曲面 S 上一点 P, Π 为通过点 P 的一个平面, S 上的动点



Q 到定点 P 和到平面 Π 的距离分别记为 d 和 h.

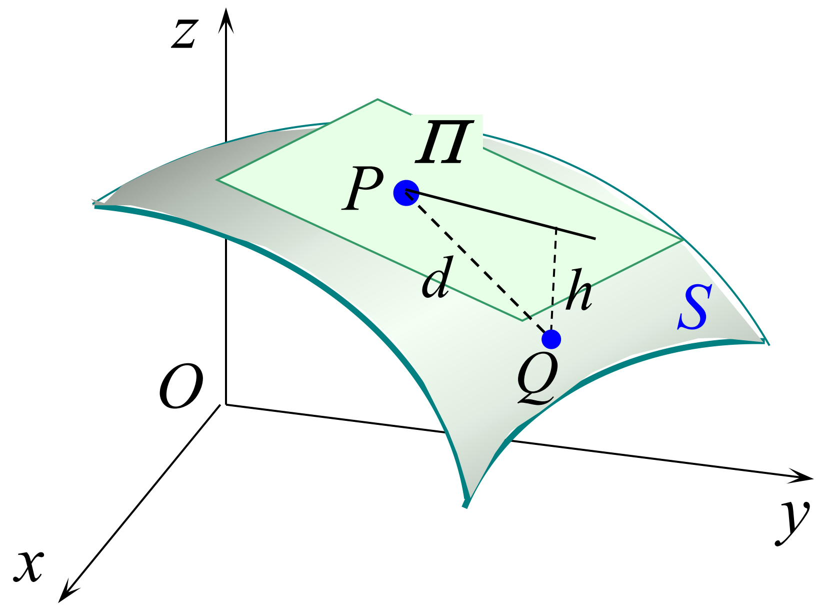
若
$$\lim_{\substack{Q\to P\\ Q\in S}} \frac{h}{d} = 0,$$

则称 Π 为曲面 S 在点 P 的切平面, 称 P 为切点.

定理3： 若函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)可微，则曲面在点(x_0,y_0,z_0)处存在不平于 z 轴的切平面：

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

注： 反之也真。



- 函数在点 $P_0(x_0, y_0)$ 可微，则曲面 $z = f(x, y)$

在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面：

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

法向量为: $\vec{n} = \pm(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$,

- 过点 (x_0, y_0, z_0) 处的法线：

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微,则

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

记 $S: z=f(x,y)$ $\Longrightarrow$ 曲面

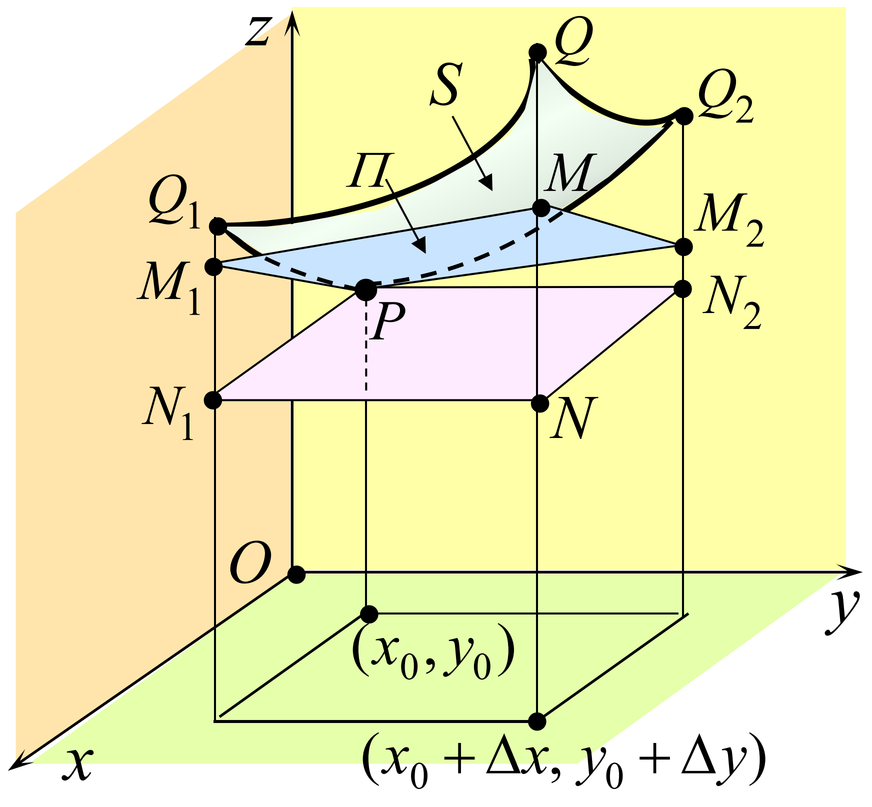
$$\Pi: z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+$$
$$f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$\Downarrow$

曲面 S 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面.

二元函数全微分的几何意义:

自变量由(x_0, y_0)变为$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$时,



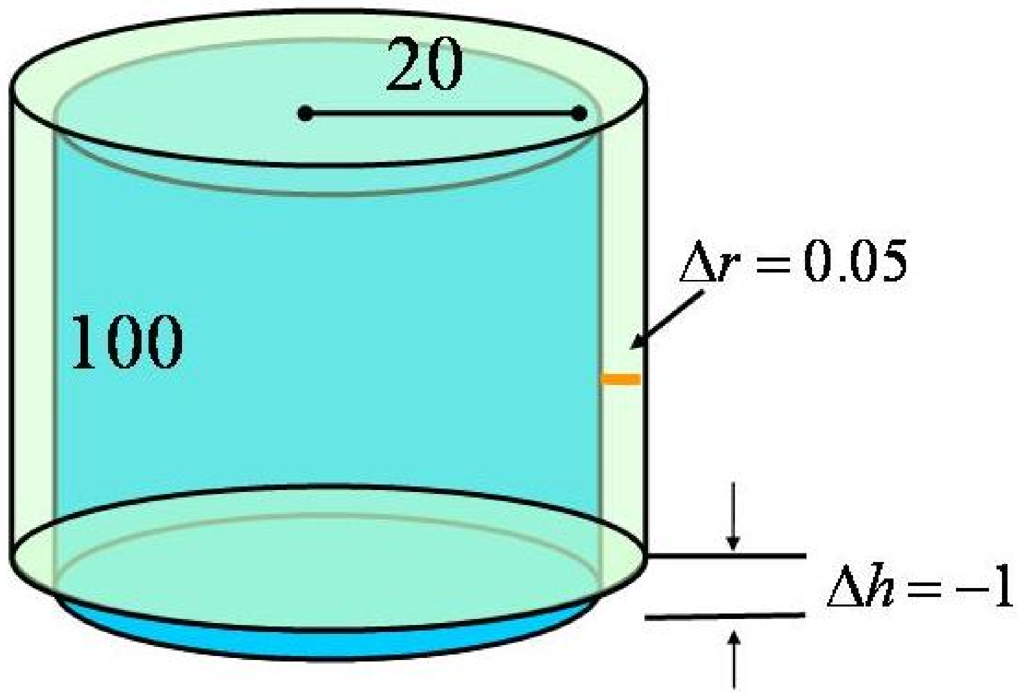
$\Delta z = NQ,$

$dz = NM.$

例10、试求抛物面 $z = ax^2 + by^2$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面方程与法线方程，其中 $z_0 = ax_0^2 + by_0^2$.

例11、求 $\sqrt{3.02^2 + 1.97^2 + 5.99^2}$ 的近似值 .

例12、一圆柱体半径为 $20cm$，高度为 $100cm$，受压后半径增加了 $0.05cm$，高度 减少了 $1cm$，求圆柱体体积的近似改变量．



作业

习题17-1：1(2)(6)(7)(8)、5、

8(2)、9(2)

11、13(1)