9.3　可积条件

1 可积的必要条件

2 可积的充要条件

3 可积函数类

一、可积的必要条件

定理1： 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

注： $[a,b]$ 上的有界函数不一定可积.

例1、 证明狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\notin Q\end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上有界但不可积.

二、可积的充要条件

定义：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，对 $[a,b]$ 的任一分割

$$T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\},$$

记 $M_i=\sup\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$, $m_i=\inf\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$,

称 $S(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$ 与 $s(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$

分别为 $f(x)$ 关于分割 T 的上和与下和。

称 $\omega_i=M_i-m_i$ 为 $f(x)$ 在 Δ_i 上的振幅。

注：上和与下和只与分割 T 有关，对 $\forall \xi_i \in \Delta_i$，有

$$s(T) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq S(T).$$

例2、证明：若 T' 是 T 增加若干个分点后所得 的分割，则

(1) $S(T') \leq S(T);\ s(T') \geq s(T)$.

(2) $\sum_{T'} \omega_i' \Delta x_i' \leq \sum_{T} \omega_i \Delta x_i$.

定理2：（可积准则）函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T, \text{使得 } S(T) - s(T) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

注：充分性的证明需要对上和与下和的性质作更详细的讨论（见9.6节）。

三、可积函数类

定理3： 若函数 $f(x) \in C[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

$\omega_i \le \dfrac{\varepsilon}{b-a} \ (1 \le i \le n)$，则

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \le \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon.$$

定理4： 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 单调, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

$\sum_{i=1}^{n}\omega_i \le M(\forall T)$, 则 $\|T\|<\varepsilon/M$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i \le \|T\|\sum_{i=1}^{n}\omega_i < \frac{\varepsilon}{M}M=\varepsilon.$$

定理5： 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i+\omega_n\Delta x_n$$

$$<\varepsilon/2+\varepsilon/2.$$

$$(\omega_i<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(1\le i\le n-1),$$

$$\Delta x_n<\frac{\varepsilon}{2(M-m)})$$

例3、设 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n}\end{cases}(n\in Z_{+}).$

证明：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积 .

法一：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调 .

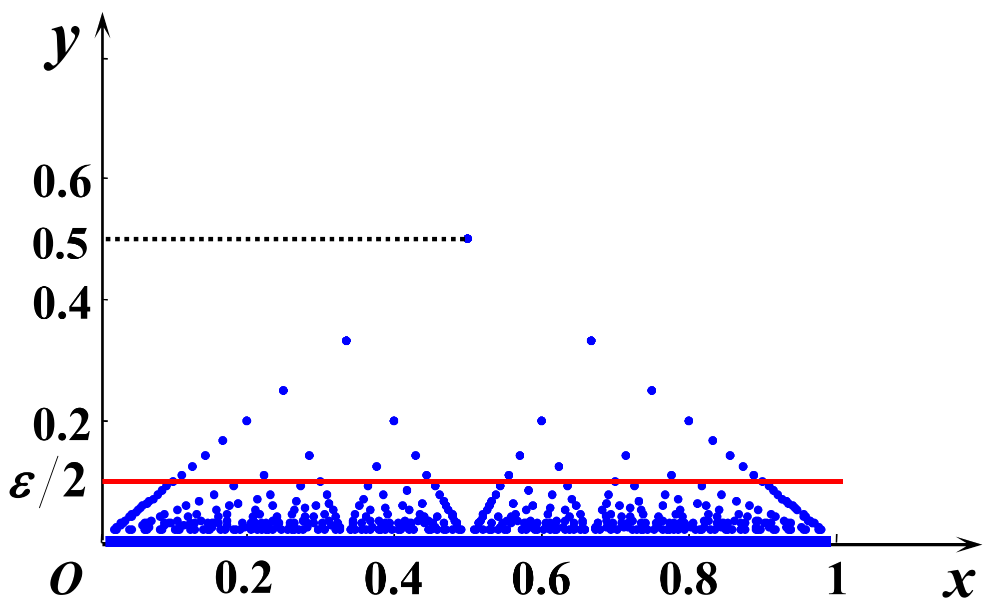
法二：$f(x)$ 的间断点为 $\{\frac{1}{n}\,|\,n\ge 2\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ 存在.

- 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，间断点为 $a_n(n\ge 1)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

例4、证明黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\ (\dfrac{p}{q}\text{既约真分数}) \\ 0, & x\text{为}(0,1)\text{上无理数或}0,1 \end{cases}$$

在区间 $[0,1]$ 上可积且 $\int_0^1 f(x)dx=0$.



作　业

习题9-3：4、7