8.2 换元积分法与分部积分法

1 第一类换元积分法

2 第二类换元积分法

3 分部积分法

一、第一类换元积分法（凑微分法）

定理1： 设 $f(u)$ 在区间 I 上有定义，$u=\varphi(x)$ 在区间 I_x 可导且 $\varphi(I_x)\subset I$. 若 $\int f(u)du=F(u)+C$，则

$$\boxed{\begin{aligned}\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx&=\left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}\\&=F(\varphi(x))+C.\end{aligned}}$$

1、形如 $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x$ 的不定积分

例1、求下列不定积分 $(a>0)$.

$$(1)\int (2x+1)^{100}dx;\qquad (2)\int \frac{1}{a^2+x^2}dx;$$

$$(3)\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx;\qquad (4)\int \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}dx.$$

2、凑中间变量 u.

例2、求下列不定积分.

$$(1)\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}dx;\qquad (2)\int \frac{x\sin\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

$$(3)\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx;\qquad (4)\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx;$$

例3、求下列不定积分.

$$(1)\int \frac{1}{x\ln x\ln\ln x}dx\,;$$

$$(2)\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx\,;$$

$$(3)\int \frac{1}{x^2-a^2}dx\ (a\neq 0)\,.$$

3、三角函数的不定积分

例4、求下列不定积分.（凑中间变量 u ）

(1) $\int \sin^3 x \cos x dx$;　　(2) $\int \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx$;

(3) $\int \tan x dx$;　　(4) $\int \sec x dx$.

例5、求下列不定积分.（降次）

$$(1)\int \sin^2 x dx;\qquad (2)\int \cos^3 x dx;$$

$$(3)\int \cos^4 x dx;\qquad (4)\int \sin^2 x \cos^3 x dx;$$

(5) $\int \sin 3x \sin x dx$;　　(6) $\int \sin 5x \cos x dx$;

积化和差

$$\boxed{\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$$

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}$$

$$(7) \int \tan^3 x \sec x dx; \qquad (8) \int \tan^3 x \sec^4 x dx.$$

$$\sec^2 x = \tan^2 x + 1; \qquad \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

二、第二类换元积分法

定理2： 设 $f(x)$ 定义在 I 上, $x=\varphi(t)$ 在 I_t 内单调、$\varphi'(t)\neq 0$, 且 $\varphi(I_t)=I$. 若

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = G(t)+C \ (t\in I_t),$$

则

$$\boxed{\int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x))+C.}$$

第二类换元积分法的基本步骤：

$$\int f(x)dx$$ 换元：$x=\varphi(t)$

$$=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$ $dx=d\varphi(t)=\varphi'(t)dt$

$$=F(t)+C$$ 关于 t 积分

$$=F(\varphi^{-1}(x))+C$$ 回代 $t=\varphi^{-1}(x)$

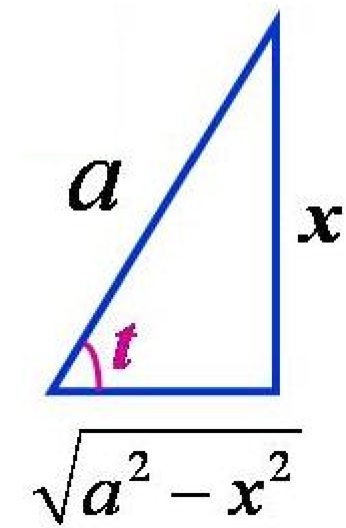
例6、求下列不定积分.

$$(1)\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}; \qquad (2)\int \sqrt{e^{x}-1}\,dx.$$

方法：去根号。

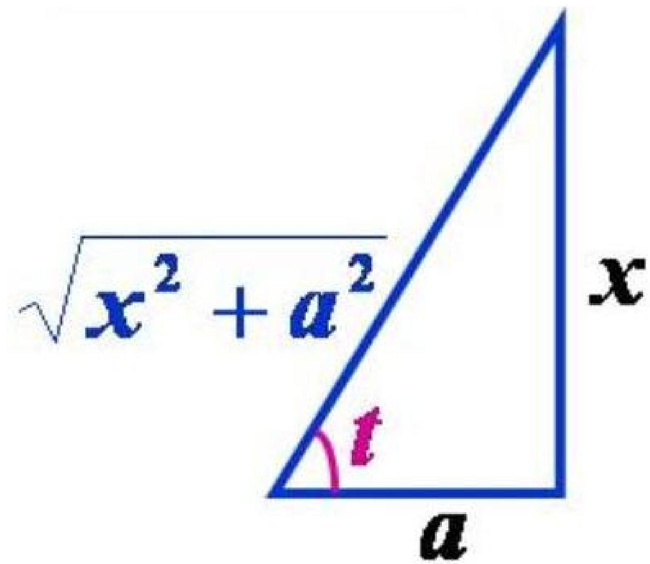
例7、求不定积分$(a>0)$.

$$(1)\int\sqrt{a^2-x^2}dx.$$

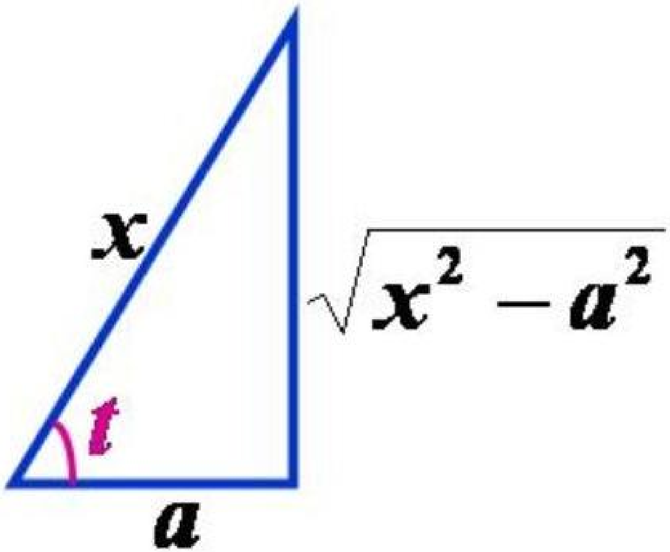


$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$$

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$.



$$(3)\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$



七个常用的积分公式：

$$1.\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C;$$

$$2.\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C;$$

$$3.\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C;$$

$$4.\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C;$$

$$5.\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C;$$

$$6.\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C;$$

$$7.\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C.$$

例8、求下列不定积分.

$$(1)\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+6}}dx;\qquad (2)\int \frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}dx;$$

$$(3)\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx\ (a>0);\qquad (4)\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx.$$

三、分部积分法

定理3： 设 $u(x)$ 与 $v(x)$ 可导，$\int u'(x)v(x)dx$ 存在，则

$$\boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.}$$

简写为：

$$\boxed{\int uv'dx = uv - \int u'vdx}$$

或

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

分部积分步骤：

$$\int f(x)dx$$

$$= \int uv'dx \qquad \text{观察}$$

$$= \int udv \qquad \text{凑微分}$$

$$= uv - \int vdu \qquad \text{分部积分}$$

$$= uv - \int vu'dx \qquad \text{积分}$$

原则：

1. dv 容易凑出；

2. $\int vu'dx$ 比 $\int uv'dx$ 容易.

1、恰当选取 u 与 v' (或 dv)

例9、求 (1) $\int x\sin x dx$;　　(2) $\int x\ln x dx$.

注：被积函数是两个基本初等函数 u 与 v' 的乘积，

v' 按照下列顺序选取：

指数函数 $\succ$ 三角函数 $\succ$ 幂函数 $\succ$ 对数函数 $\succ$ 反三角函数

例10、求 $\int x^2 e^{-x} dx$.

两次分部积分

2、综合使用分部积分与换元积分法

例11、求 $\int \arcsin x\,dx$.

$$\boxed{\int \arcsin x dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C}$$

练习：求 $\int \arccos x\,dx$.

$$\boxed{\int \arccos x dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C}$$

3、使用分部积分通过方程求解

例12、求 $\int \sec^3 x\, dx$.

方法：一次分部积分，解一个方程

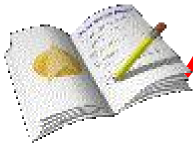
例13、求 $\int e^x \sin x dx$ 与 $\int e^x \cos x dx$.

方法：两次分部积分，解一个方程

4、用分部积分法建立递推式

例14、求 (1) $I_n = \int \tan^n x dx$ 的递推式.

$$(2) I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$$ 的递推式。



作　　业

习题8-2：1（(7)-(35)中的奇数题）

2(2)(3)(6)、6(3)