1.4　具有某些特性的函数

有界函数

单调函数

奇函数和偶函数

周期函数

初等函数

一、有界函数

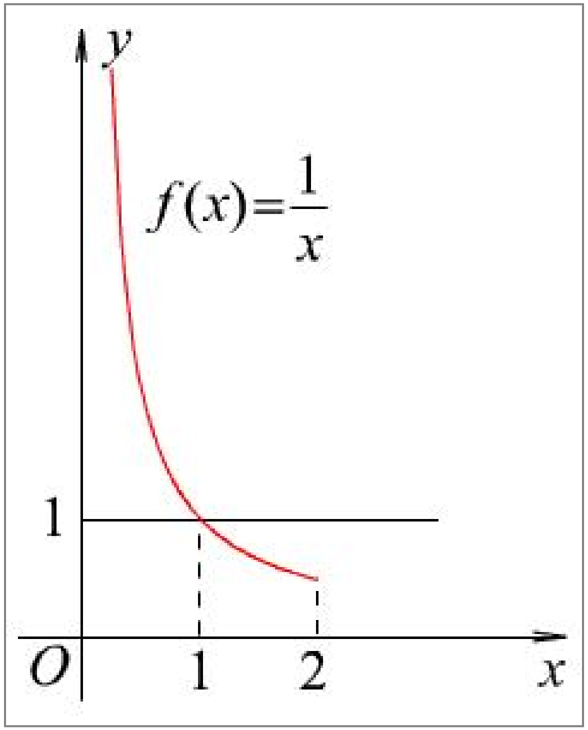
定义1：设 f 为定义在D上的函数,若存在数 $M>0$, 使得对任意 $x\in D$, 有

$$|f(x)|\le M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界。

如： $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界；

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.



例1. 设 $f(x), g(x)$ 在 D 上有界, 证明:

$$\inf_{x\in D} f(x)+\inf_{x\in D} g(x)\le \inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le$$

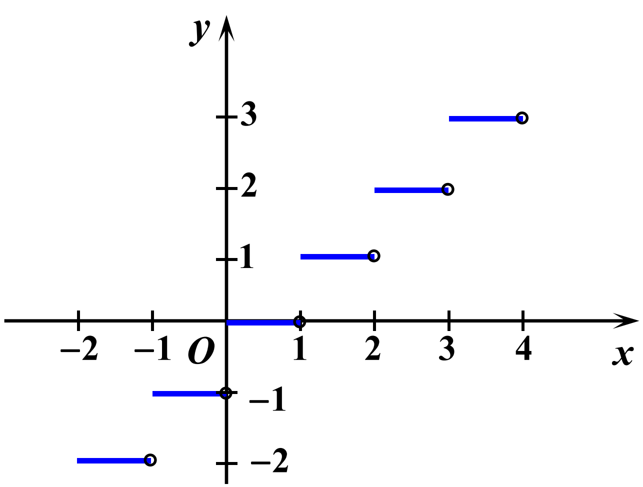
$$\inf_{x\in D} f(x)+\sup_{x\in D} g(x)$$

二、单调函数

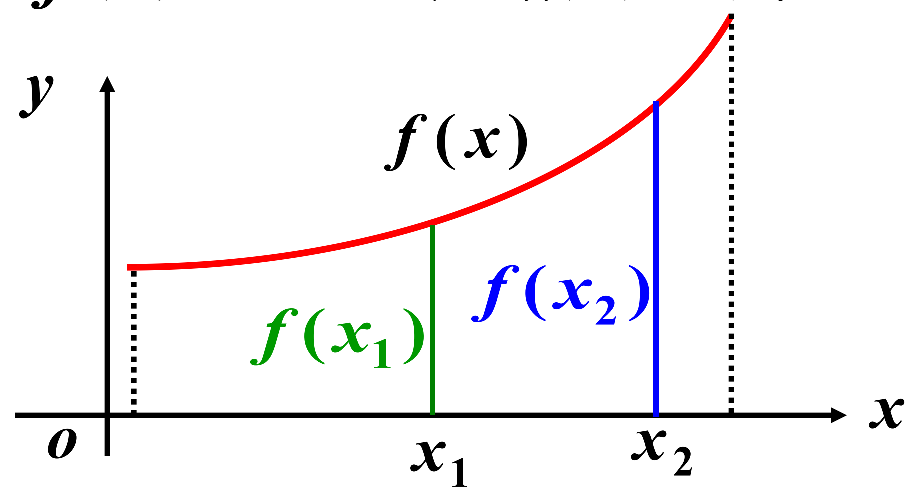
定义2： 设 f 为 D 上的函数，若任意 $x_1, x_2 \in D$，当 $x_1 < x_2$ 时，总有

(i) $f(x_1) \le f(x_2)$，则称 f 为 D 上的增函数；

$f(x_1) < f(x_2)$，则称 f 为 D 上的严格增函数.



$f(x) = [x]$ 为增函数.

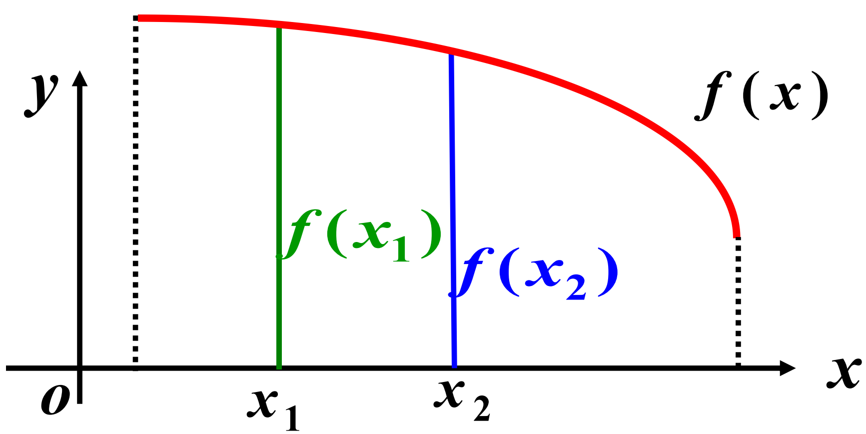


严格增函数

定义2：设 f 为 D 上的函数，若任意 $x_1, x_2 \in D$，当 $x_1 < x_2$ 时，总有

(ii) $f(x_1) \geq f(x_2)$，则称 f 为 D 上的减函数；

$f(x_1) > f(x_2)$，则称 f 为 D 上的严格减函数.



严格减函数

定理：(i) 设 $y=f(x)$ 为 D 上的严格增函数，则 f 必有反函数 f^{-1}，且 f^{-1} 在其定义域 $f(D)$ 上也是严格增函数。

(ii) 设 $y=f(x)$ 为 D 上的严格减函数，则 f 必有反函数 f^{-1}，且 f^{-1} 在其定义域 $f(D)$ 上也是严格减函数。

指数函数的单调性（见补充材料）

- 设 $a>0$ 且 $a\neq 1$, $y=a^{r}\,(r\in Q)$已定义好,

  且 $a>1$时, $y=a^{r}$ 关于 $r\in Q$ 严格单调增,

  $0<a<1$时, $y=a^{r}$ 关于 $r\in Q$ 严格单调减.

- 对任意 $x\in R$, 定义函数

$$a^{x}=\begin{cases}\sup\limits_{r\le x}\{a^{r}\mid r\in Q\}, & \text{当 } a>1,\\[2ex] \inf\limits_{r\ge x}\{a^{r}\mid r\in Q\}, & \text{当 } 0<a<1.\end{cases}$$

$$a^x = \begin{cases} \sup\limits_{r \le x}\{a^r \mid r \in Q\}, 当 a > 1, \\ \inf\limits_{r \ge x}\{a^r \mid r \in Q\}, 当 0 < a < 1. \end{cases}$$

例2. 设 $f(x) = a^x (x \in R)$,证明

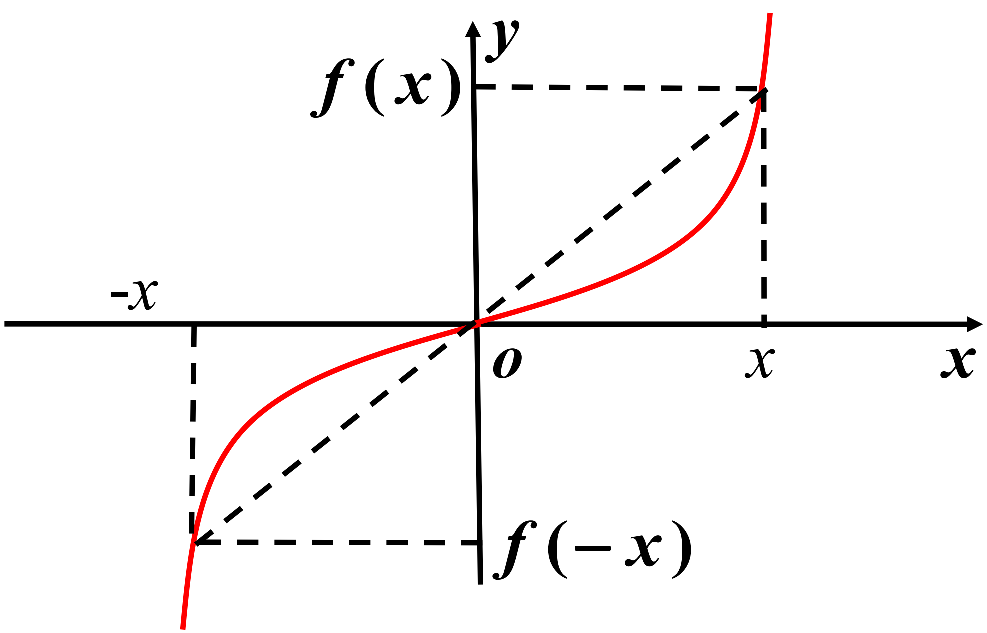
(i) 当$a > 1$时 $f(x)$是 R 上的严格增函数;

(ii) 当$0 < a < 1$时, $f(x)$是 R 上的严格减函数。

三、奇函数和偶函数

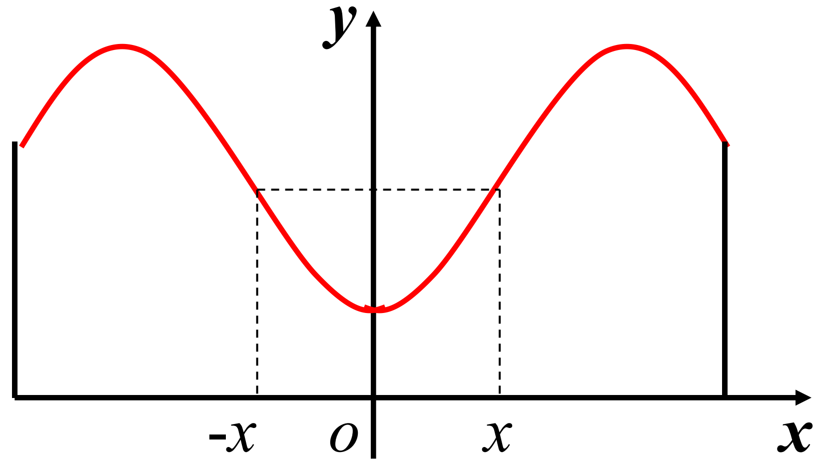
定义3：设 $f(x)$为定义在D上的函数，其中D关于原点对称。若任意 $x\in D$，有

(i) $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 为D 上的奇函数；



定义3：设 $f(x)$为定义在D上的函数，其中D关于原点对称。若任意 $x\in D$，有

(ii) $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$ 为D 上的偶函数。



偶函数

例3. 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-l,l)$，证明存在 $(-l,l)$ 上的偶函数 $g(x)$ 及奇函数 $h(x)$，使得

$$f(x)=g(x)+h(x).$$

四、周期函数

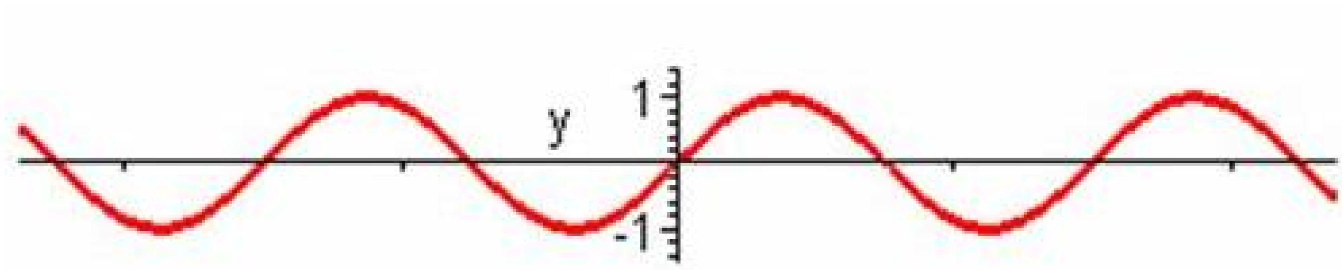
定义4： 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在 $T>0$，使得对于任意 $x\in D$，$(x\pm T)\in D$ 时，有

$$f(x\pm T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为 f 的一个周期．

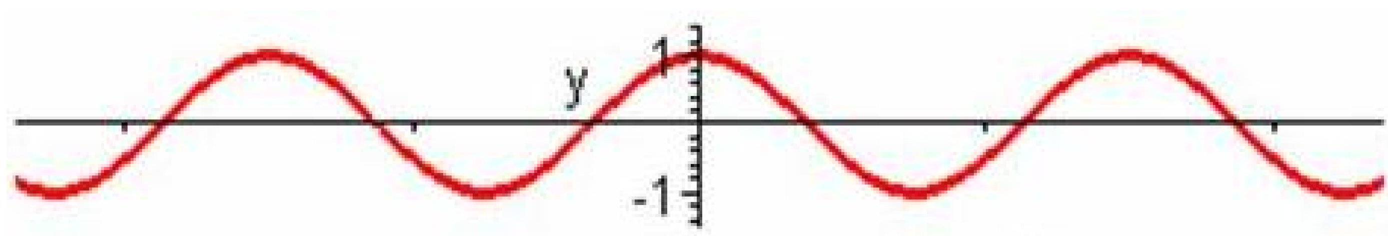
最常用的周期函数：三角函数

(1) $y = \sin x$

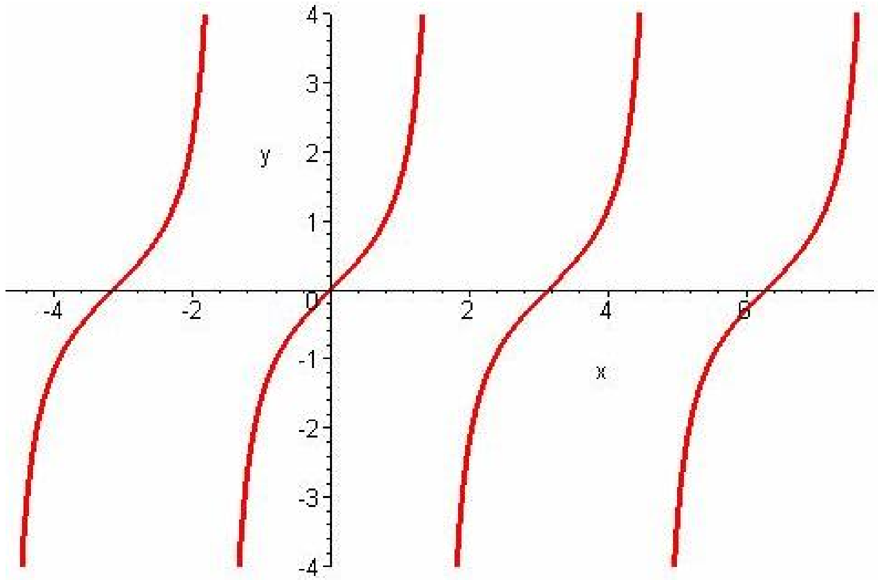


(2) $y = \cos x$

$T = 2\pi$

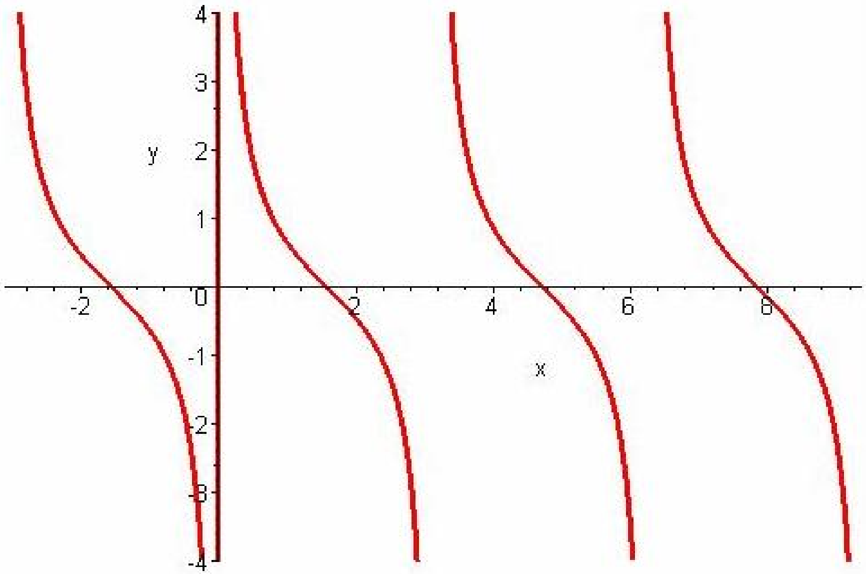


(3) $y = \tan x$

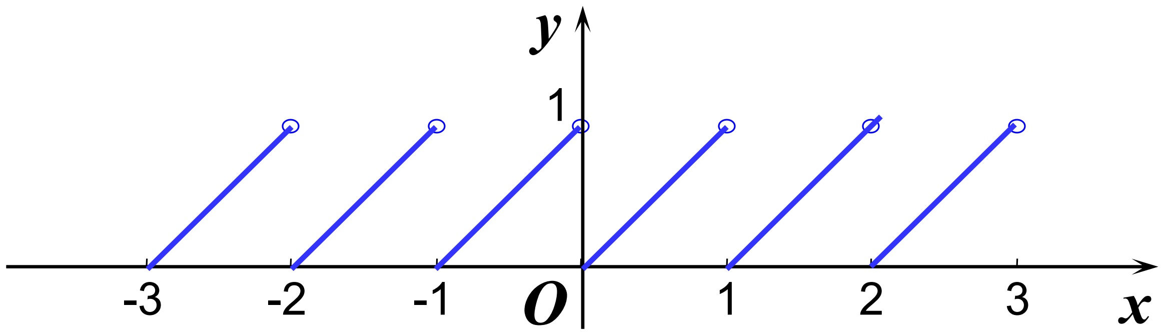


$T = \pi$

(4) $y = \cot x$



例4. 设 $f(x)=x-[x]$,



则 $f(x)$ 的最小正周期为 1.

注1：周期函数的定义域不一定是$\boldsymbol{R}$. 如

$$f(x)=\sqrt{\sin x}.$$

注2：周期函数不一定有最小正周期.

例5. 证明狄利克雷函数

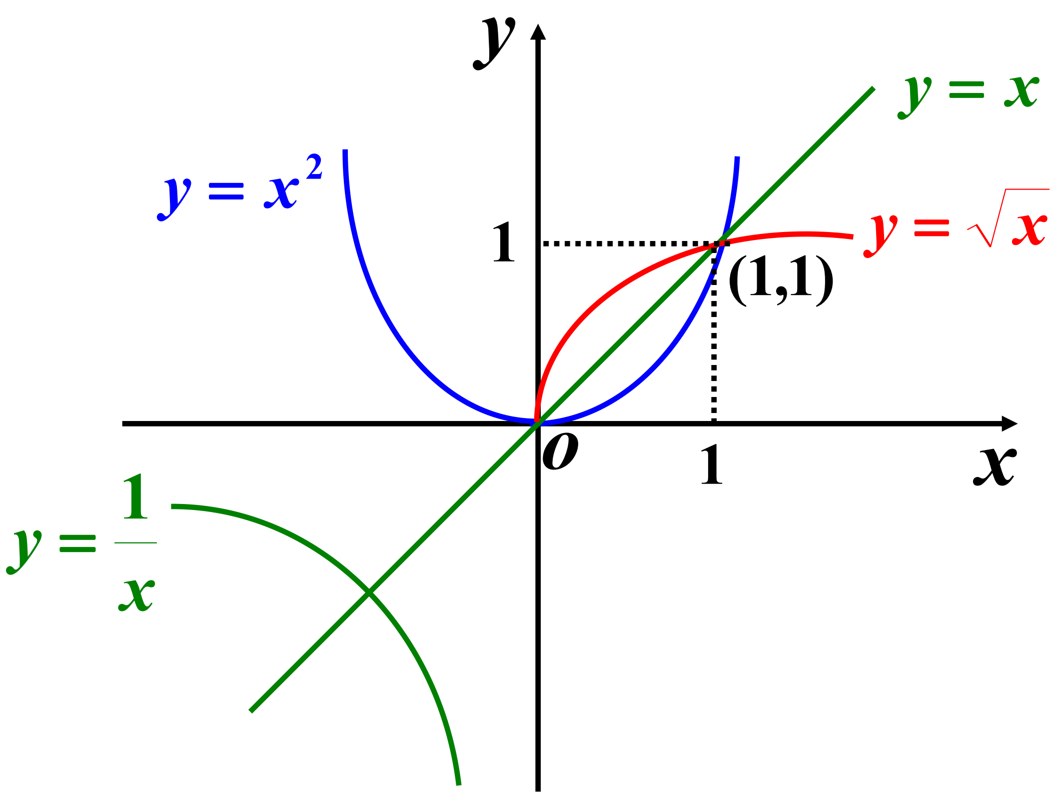
$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\notin Q\end{cases}$$

以任意正有理数为周期 .

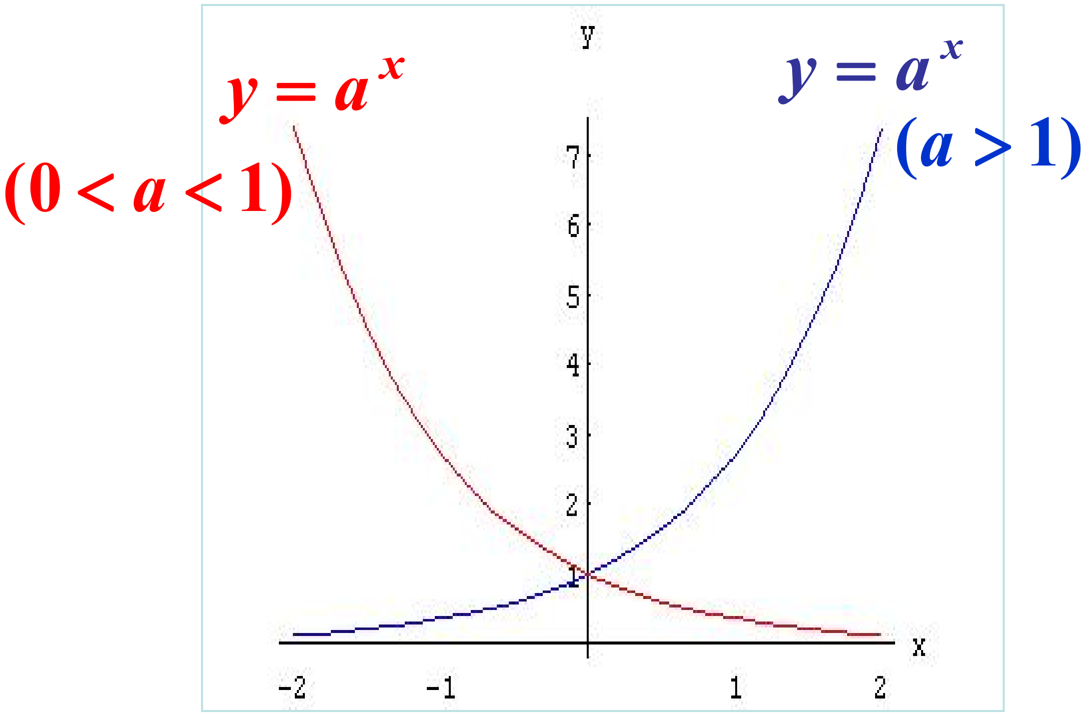
五、初等函数

1、基本初等函数

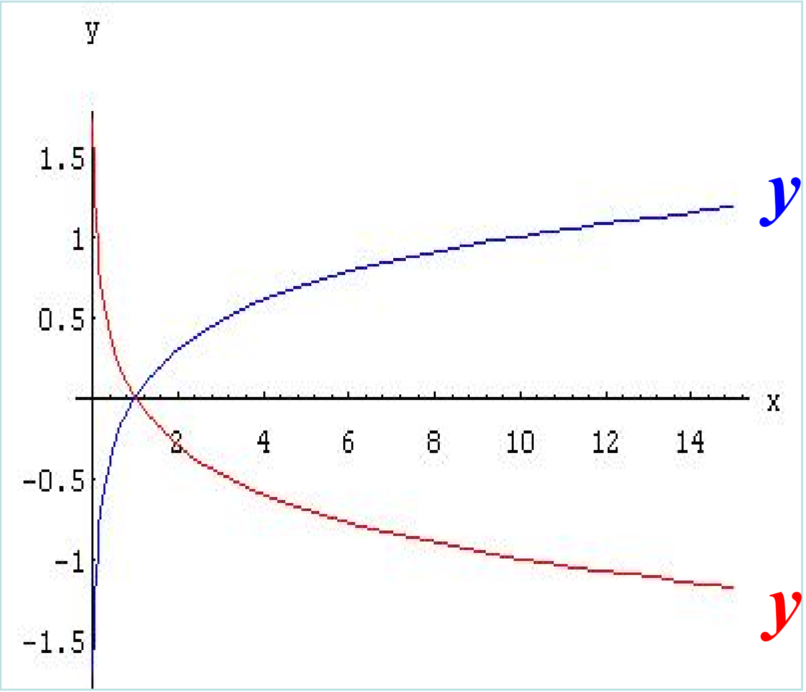
（1）幂函数　$y = x^{\alpha}$　(α 为常数)



（2）指数函数 $y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$



（3）对数函数 $y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$



$y = \log_a x$
$(a > 1)$

$y = \log_a x$
$(0 < a < 1)$

（4）三角函数

正弦函数：$y = \sin x$

余弦函数：$y = \cos x$

正切函数：$y = \tan x$

余切函数：$y = \cot x$

(5) 反三角函数:

三角函数包含 $(0,\pi/2)$ 的最大单调区间的反函数.

反正弦函数：$y=\arcsin x$

反余弦函数：$y=\arccos x$

反正切函数：$y=\arctan x$

反余切函数：$y=\operatorname{arccot} x$

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数, 称为初等函数.

例6. 设 $f(x)=\arcsin x, g(x)=\ln x$,求 $g(f(x))$

并确定其定义域 .

问题: $y=|x|$ 是初等函数吗?

作　　业

习题1-4： 1、2(1)(2)、8(2)、12