习题 16.3

P99. T1. 讨论下列函数的连续性.

$$(3)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}.$$

$$(5)\ f(x,y)=\begin{cases}0, & x\notin Q\\ y, & x\in Q\end{cases}.$$

P99. T4.

设 $f(x,y)$ 定义在矩形区域 $S=[a,b]\times[c,d]$ 上. 若 f 对 y 在 $[c,d]$ 上处处连续，对 x 在 $[a,b]$ 上 (且关于 y) 一致连续，证明 f 在 S 上连续.

习题 17.1

P111. T15. 证明：

若二元函数 f 在点 $P(x_0, y_0)$ 的某邻域 $U(P)$ 上的偏导数 f_x 与 f_y 有界，则 f 在 $U(P)$ 上连续.

P111. T17.

试证在原点 $(0,0)$ 的充分小邻域内，有

$$\arctan\frac{x+y}{1+xy}\approx x+y.$$

P111. T18.

求曲面 $z=\frac{x^2+y^2}{4}$ 与平面 $y=4$ 的交线在 $x=2$ 处

处的切线与 Ox 轴的夹角.

习题 17.2

P117. T6. 设 $f(u)$ 是可微函数，

$$F(x,t)=f(x+2t)+f(3x-2t).$$

试求 $F_x(0,0)$ 与 $F_t(0,0)$.

P117. T8. 设 $f(x,y,z)$ 具有性质

$$f(tx,,t^k y,t^m z)=t^n f(x,y,z)(t>0),$$

证明：(1) $f(x,y,z)=x^n f(1,\frac{y}{x^k},\frac{z}{x^m});$

(2) $xf_x(x,y,z)+kyf_y(x,y,z)+mzf_z(x,y,z)=$

$nf(x,y,z).$

习题 17.3

P120. T4. 设函数 $u=\ln(\frac{1}{r})$,其中

$$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

求 u 的梯度,并指出在空间哪些点上 成立等式

$$|\operatorname{grad} u|=1.$$

习题 17.4

P132. T1. 求下列函数的高阶偏导数.

(4) $u = xyze^{x+y+z}$, $\dfrac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$;

(5) $z = f(xy^2, x^2y)$, 所有二阶偏导数.

P132. T2. 设 $u = f(x, y), x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,

证明：$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

P133. T6. 通过对$F(x,y)=\sin x\cos y$施用中值定理，

证明对某$\theta\in(0,1)$，有

$$\frac{3}{4}=\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi\theta}{3}\cos\frac{\pi\theta}{6}-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi\theta}{3}\sin\frac{\pi\theta}{6}.$$