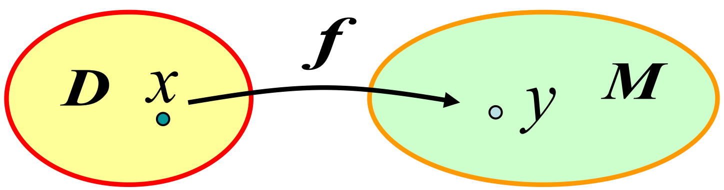
1.3 函数概念

- 函数的概念
- 几个特殊的函数
- 函数的四则运算
- 复合函数
- 反函数

一、函数的概念

定义：设 $D, M \subset R$，若存在对应法则 f，使得对任意 $x \in D$，都存在唯一 $y \in M$ 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的函数，记作

$$f: D \to M,$$
$$x \mapsto y.$$



D 称为 f 的定义域；

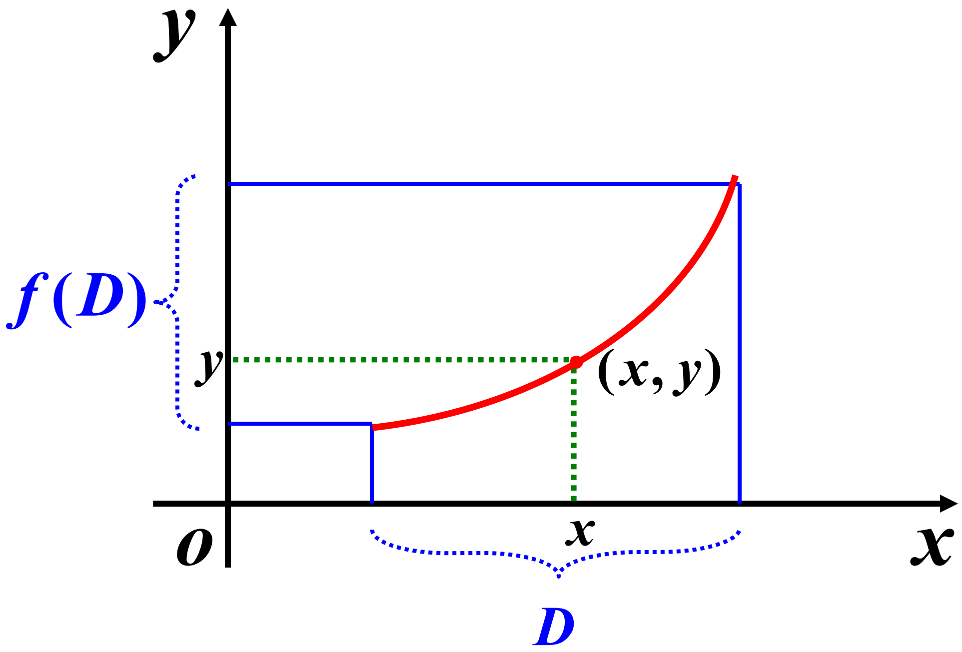
$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为 f 的值域。

函数的两要素：定义域与对应法则.

约定：定义域是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值。

如： $y=\sqrt{1-x^2}$， $D:[-1,1]$；

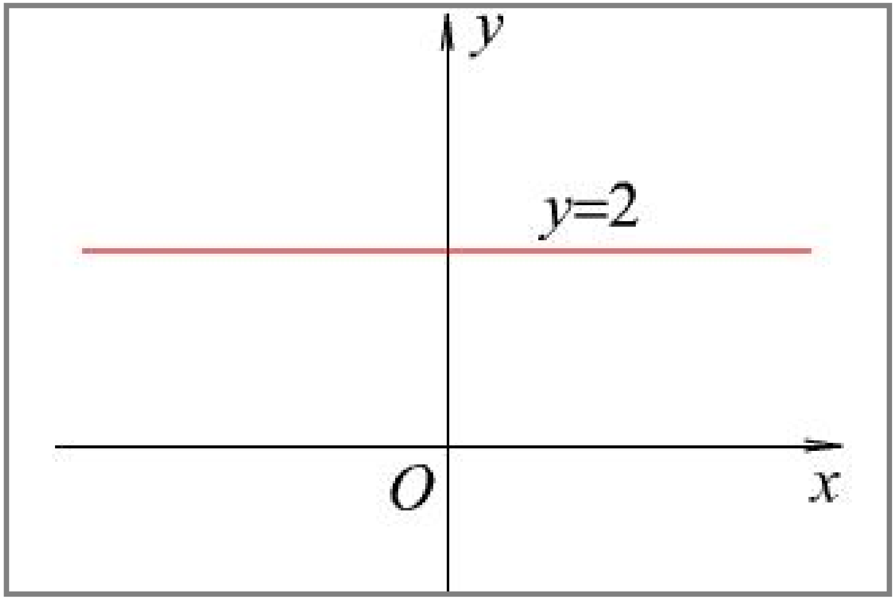
$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$， $D:(-1,1)$.



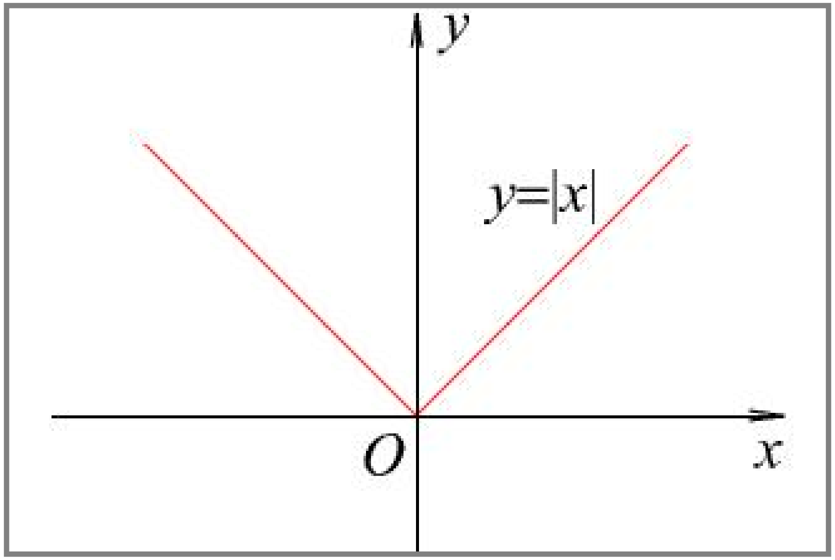
$G = \{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为 f 的图象.

二、几个特殊的函数

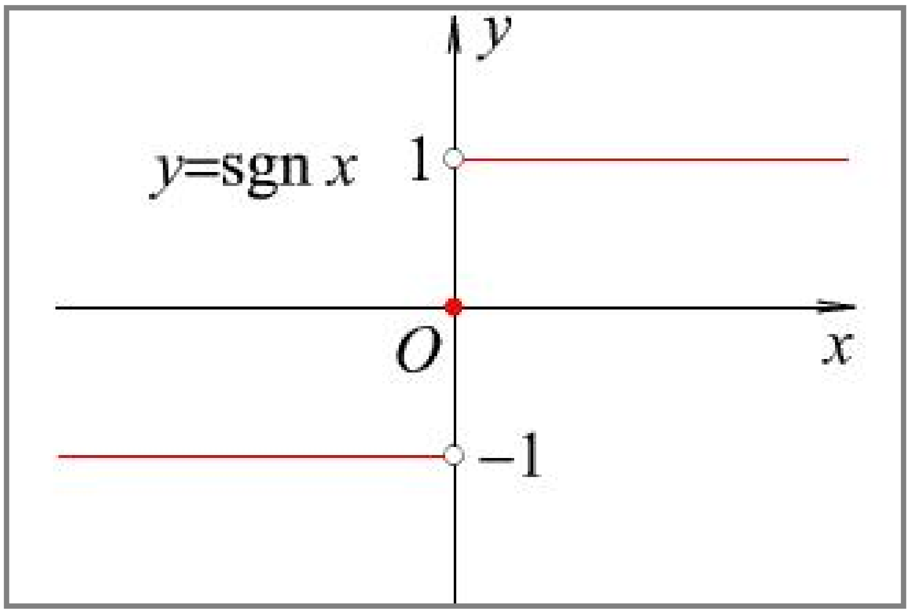
1、常值函数 $y=c$.



2、绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$.



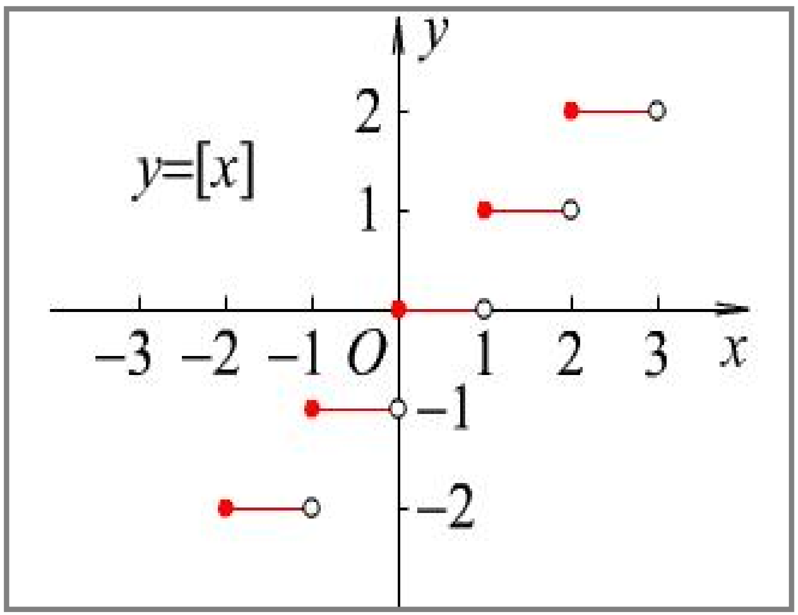
3、符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & 当 x > 0 \\ 0, & 当 x = 0 \\ -1, & 当 x < 0 \end{cases}$.



$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

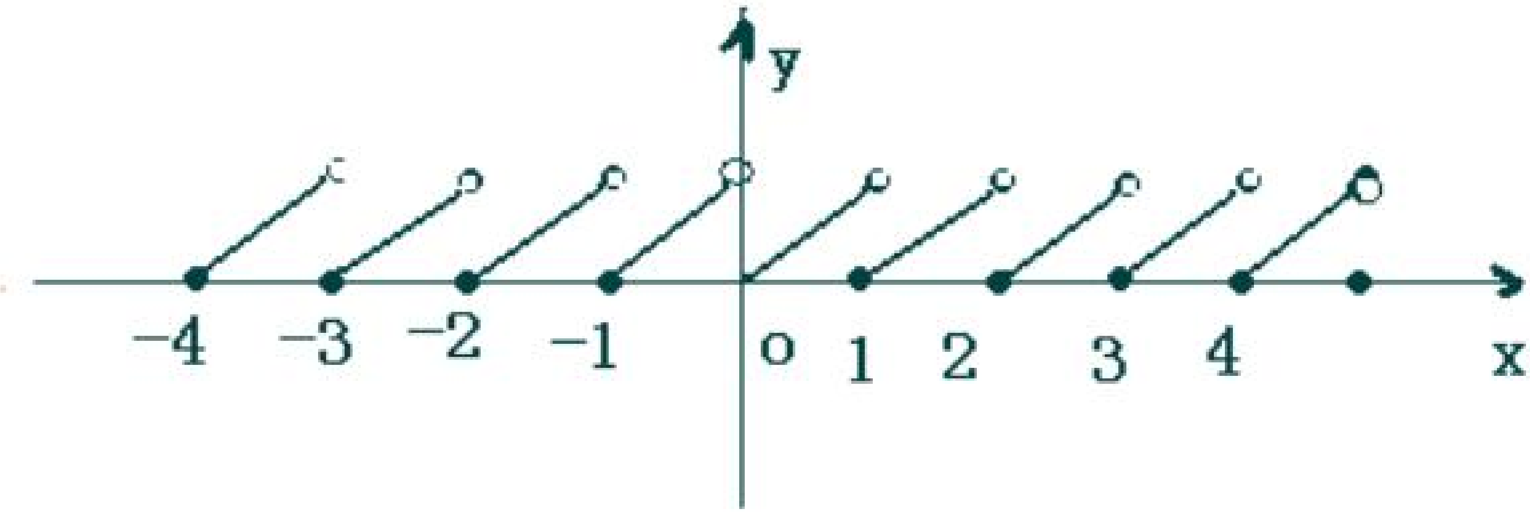
4、取整函数 $y = [x]$,

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数。

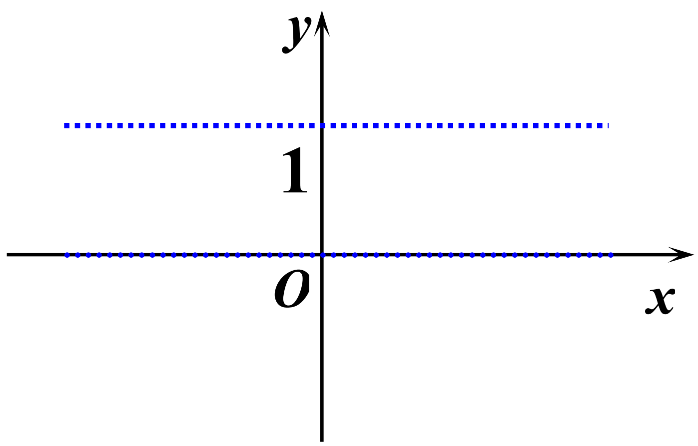


阶梯曲线

5、非负小数部分函数 $y=x-[x]$.



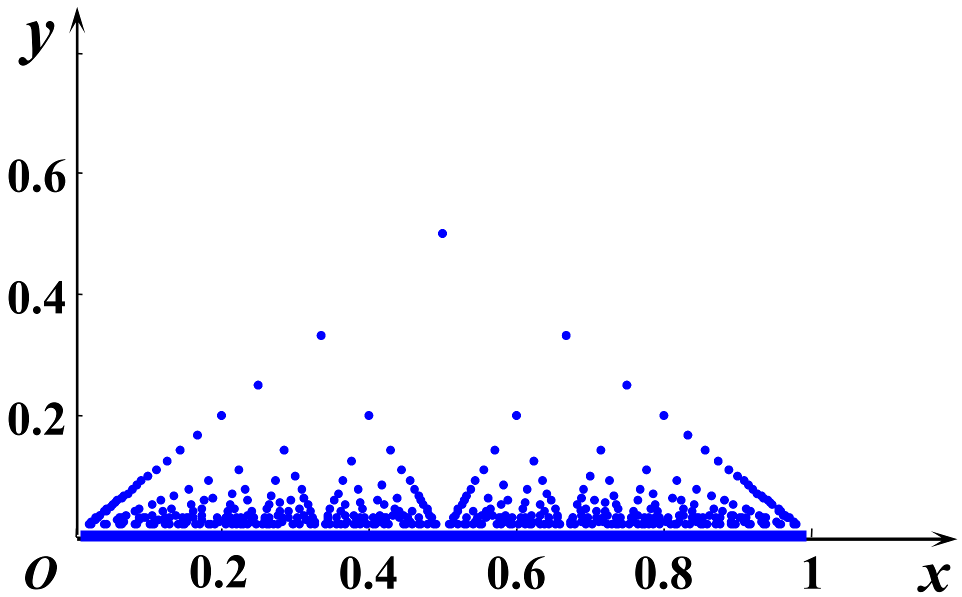
6、狄利克雷函数 $y=D(x)=\begin{cases}1, x\in Q\\0, x\notin Q\end{cases}$.



狄利克雷(Dirichlet,P.G.L.
1805－1859, 德国)

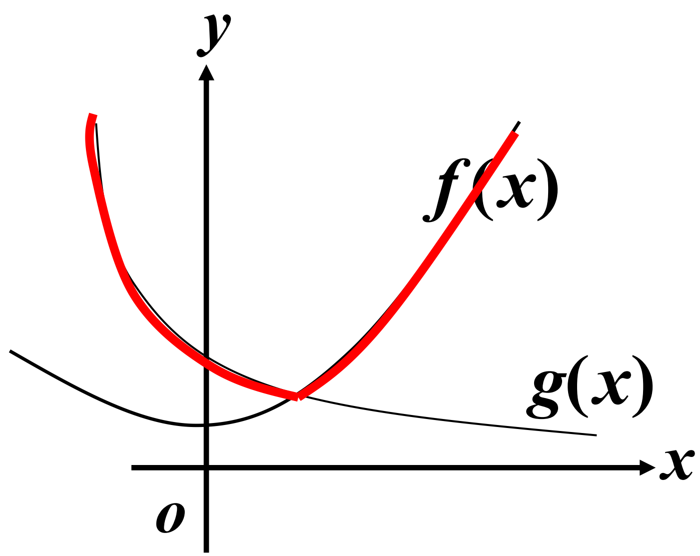
7、黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\left(\dfrac{p}{q}\text{为既约真分数}\right)\\ 0, & x=0,1\text{ 或 }x\in(0,1)\setminus Q\end{cases}.$$

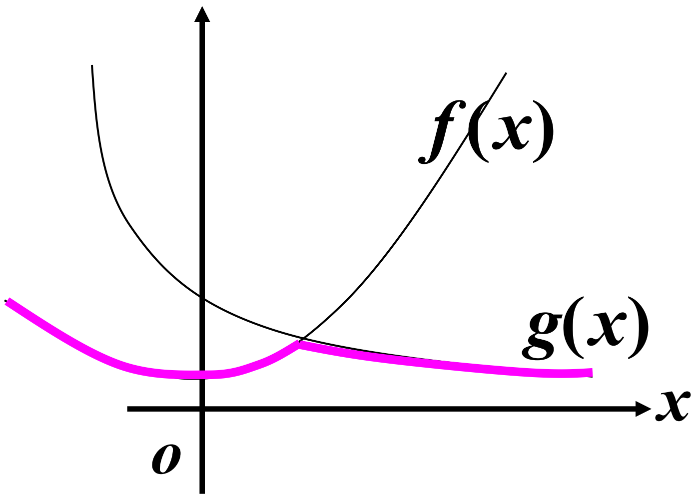


黎曼(Riemann,B.
1826－1866,德国)

8、取最值函数 $y = \max\{ f(x), g(x)\}$

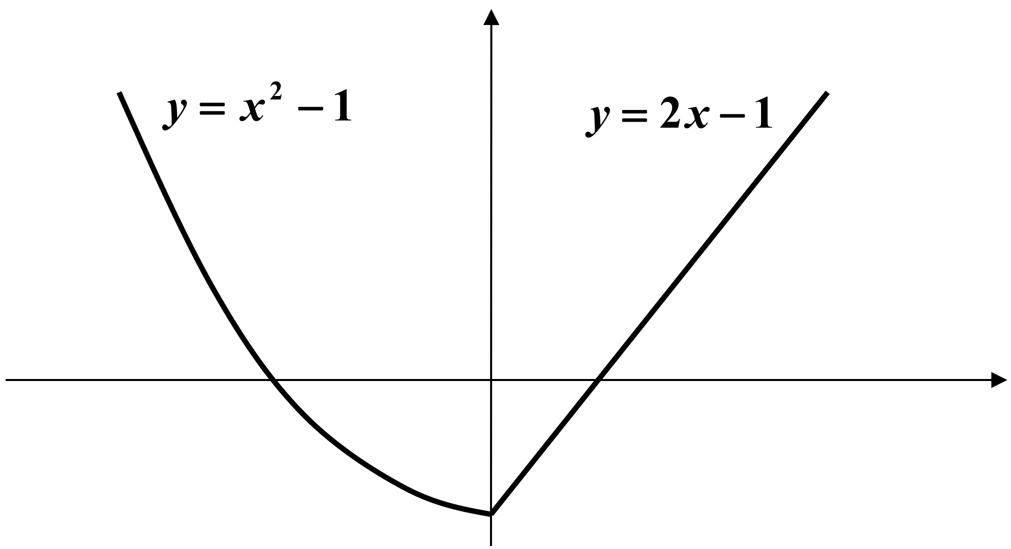


8、取最值函数 $y = \min\{ f(x), g(x)\}$



9、分段函数

如：$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>0\\ x^2-1, & x\le 0\end{cases}$.



三、函数的四则运算

设函数 f 的定义域为 D_f,函数 g 的定义域为 D_g.

1. $f \pm g$ 的定义域为 $D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$.

对任意 $x \in D_{f \pm g}$:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x).$$

2. $f\cdot g$ 的定义域为 $D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g$.

对任意 $x\in D_{f\cdot g}$ ： $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$.

3. $\dfrac{f}{g}$ 的定义域为 $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D^*$,其中

$$D^*=\{x\mid x\in D_g \text{ 且 } g(x)\neq 0\}.$$

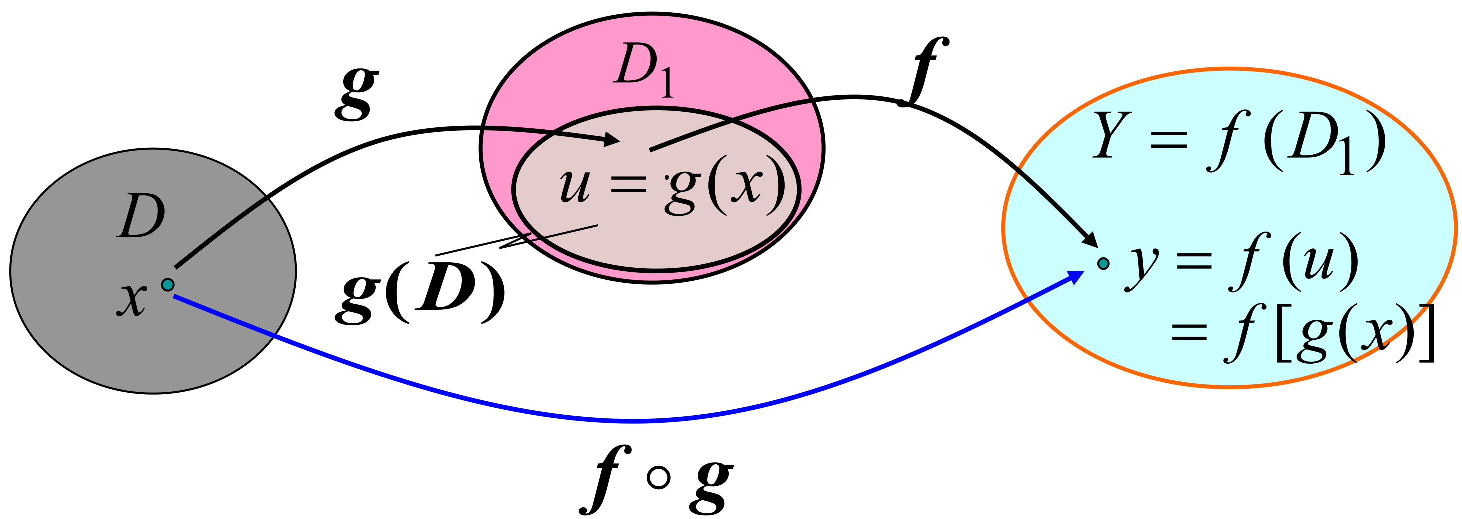
对任意 $x\in D_{\frac{f}{g}}$ ： $\dfrac{f}{g}(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

四、复合函数

定义: 设 $\forall x \in D \xmapsto{g} u = g(x) \in g(D)$

$\forall u \in D_1 \xmapsto{f} y = f(u) \in Y = f(D_1)$

则当 $g(D) \subset D_1$ 时, 由上述映射链可定义由 D 到 Y 的复合映射，记作 $y = f[g(x)]$, 或 $f \circ g(x)$, $x \in D$.



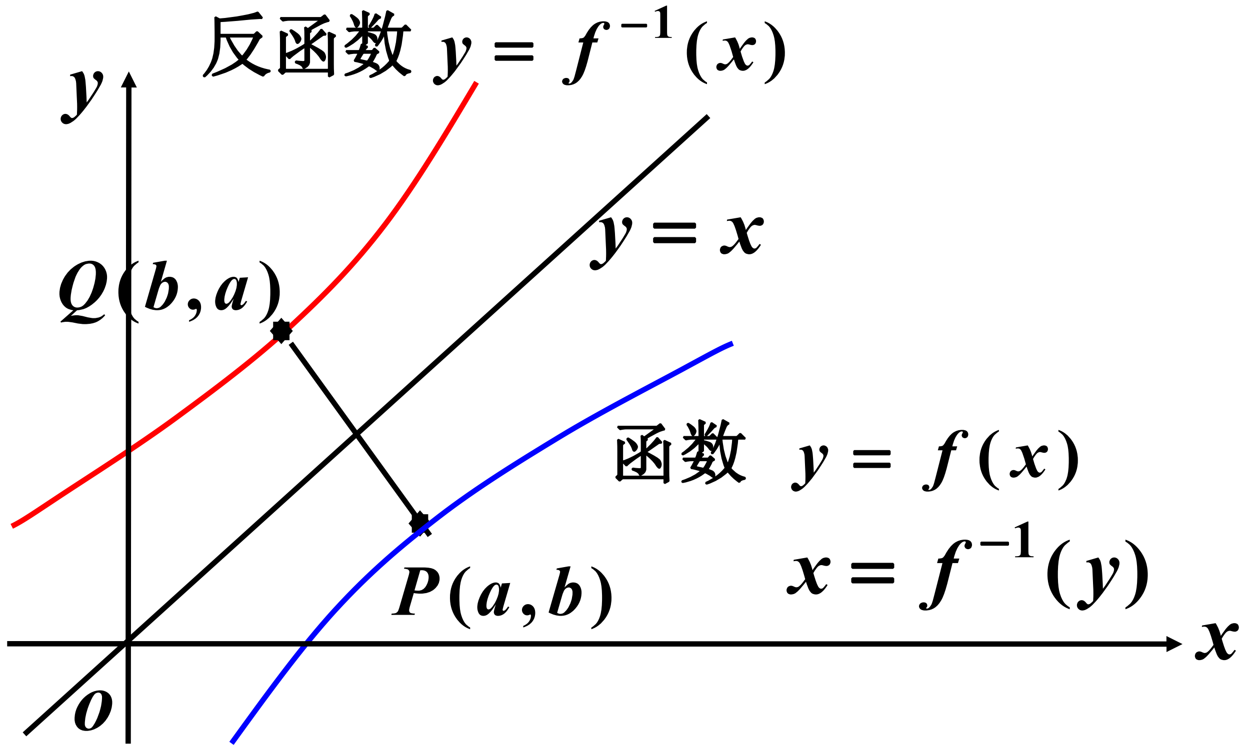
五、反函数

定义: 设函数 $y=f(x), x\in D$ 满足：对任意 $y\in f(D)$，存在唯一 $x\in D$，使得 $f(x)=y$，记此对应法则为 f^{-1}，即

$$f^{-1}: f(D)\to D,$$
$$y\mapsto x$$

称 f^{-1} 为函数 f 的反函数.

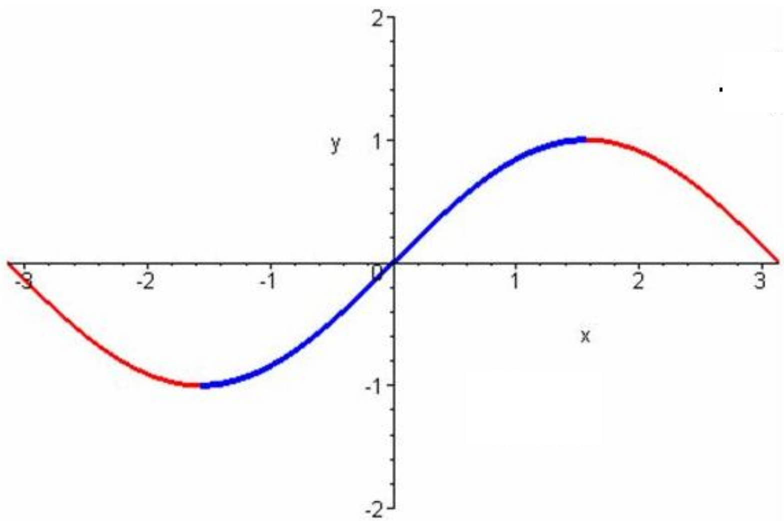
注: 若 f 有反函数，则 f 为 D 到 $f(D)$ 的单满射。



注：习惯上，记 f 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$.

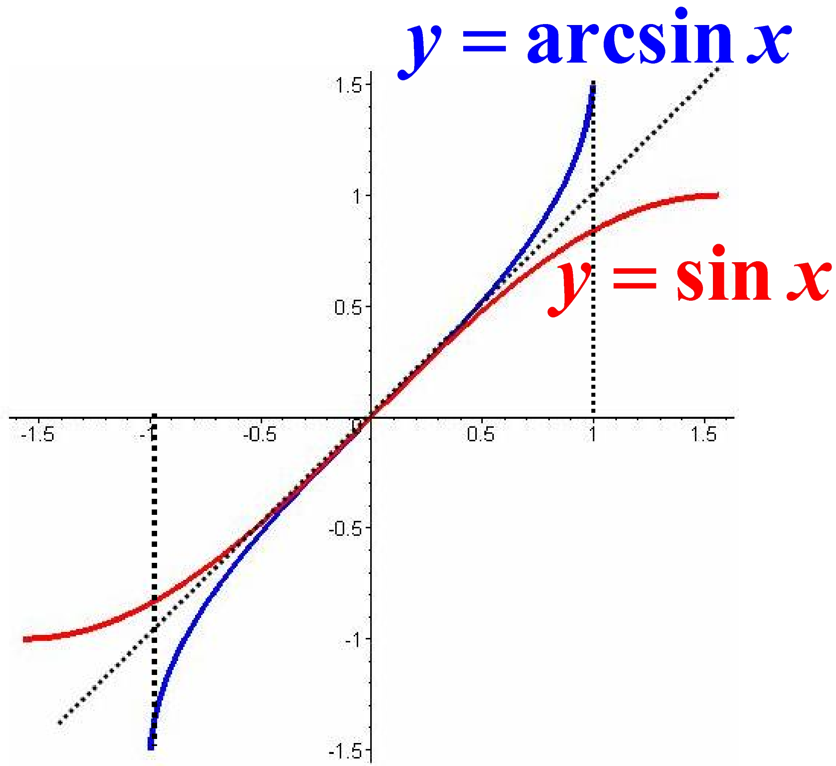
反三角函数

三角函数包含 $(0,\pi/2)$ 的最大单调区间的反函 数.



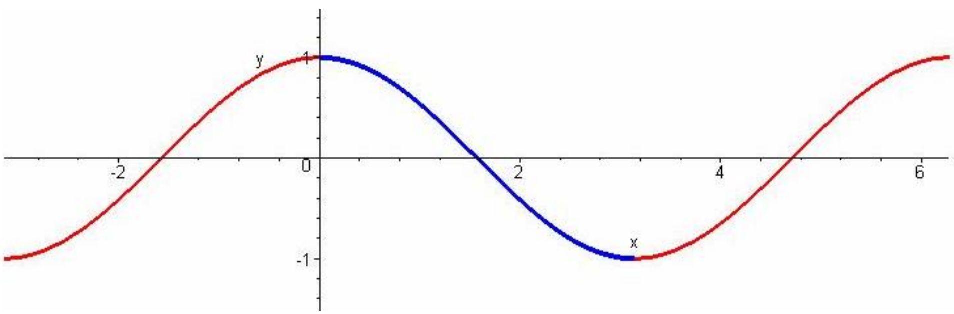
$y=\sin x$

单调区间: $[-\pi/2,\pi/2]$



$y=\arcsin x$ 定义域 $[-1,1]$,

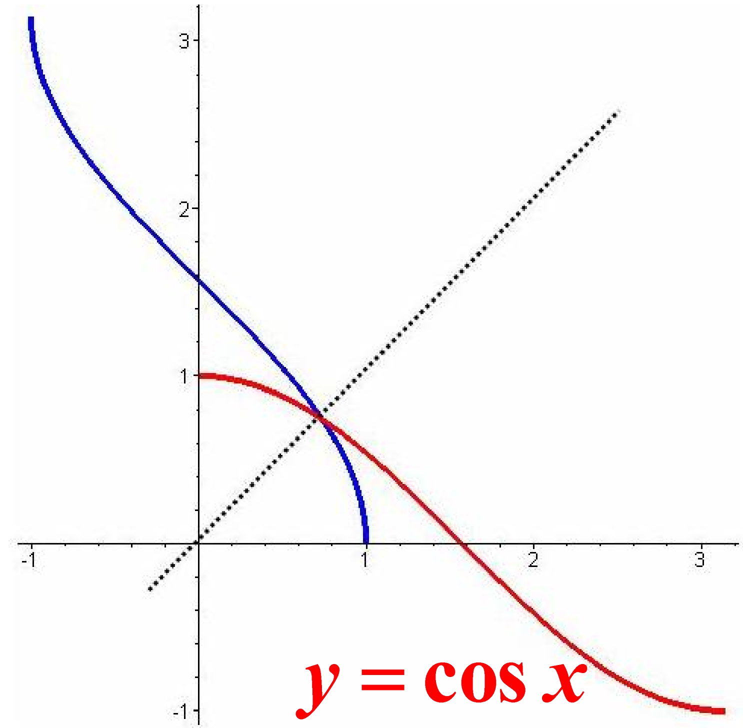
值域 $[-\pi/2,\pi/2]$.



$y = \cos x$

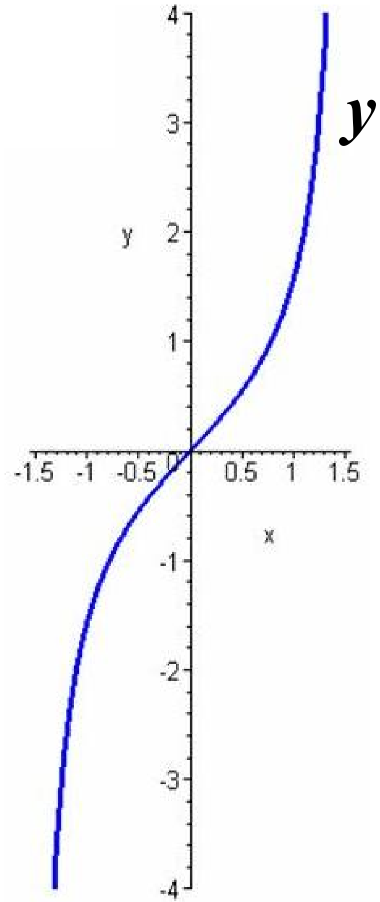
单调区间: $[0,\pi]$

$y = \arccos x$

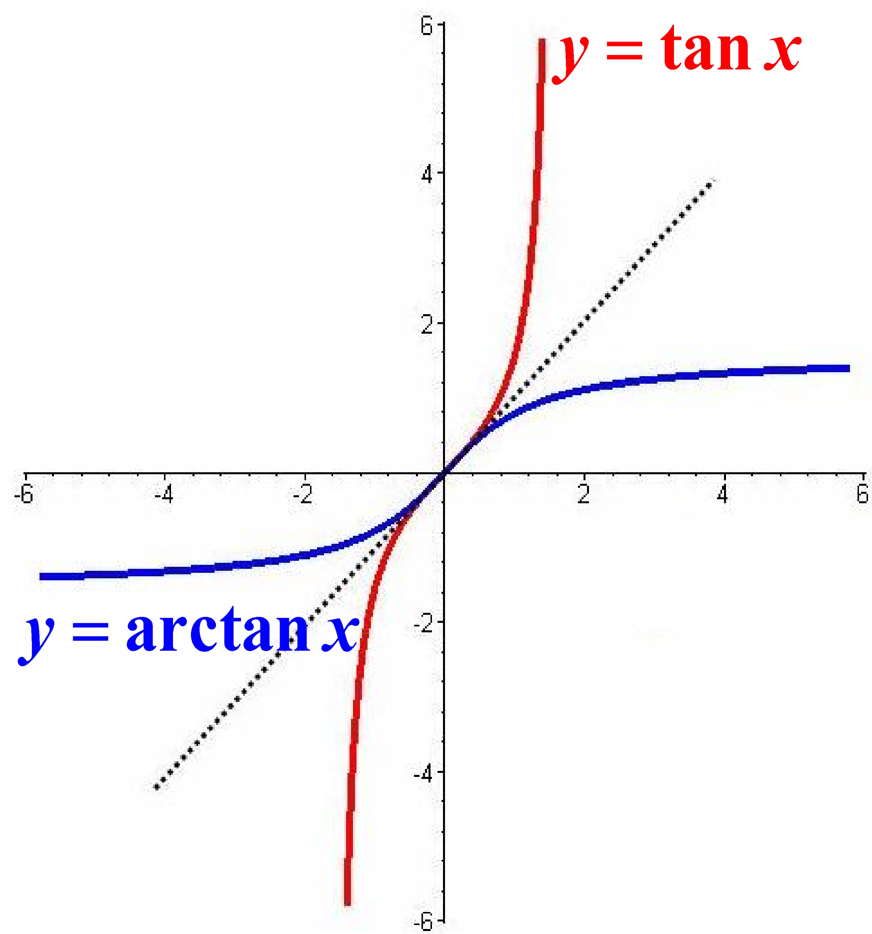


$y = \arccos x$ 定义域 $[-1,1]$,

值域 $[0,\pi]$.

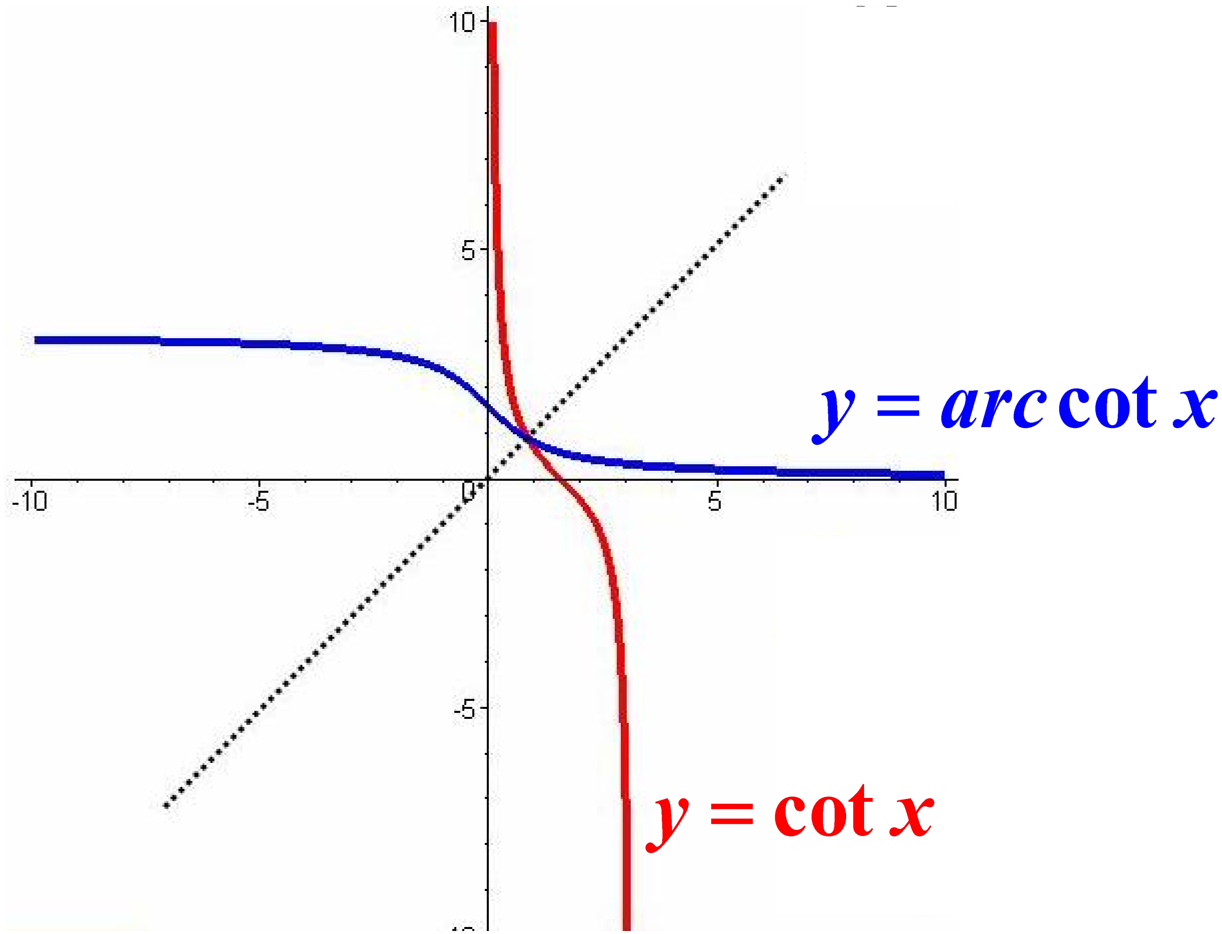


单调区间: $(-\pi/2, \pi/2)$



$y = \arctan x$ 定义域 $(-\infty, +\infty)$,

值域 $(-\pi/2, \pi/2)$.



$y = \cot x$

单调区间: $(0, \pi)$

$y = arc\cot x$ 定义域 $(-\infty, +\infty)$,

值域 $(0, \pi)$.

思考：下列等式是否成立？

$$(1)\ \tan(\arctan x)=x, x\in R;$$

$$(2)\ \arctan(\tan x)=x, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z).$$

作　业

习题1-3： 4(3)(4)、6、12