§ 18.2　隐函数组

1 隐函数组概念

2 隐函数组定理

3 反函数组与坐标变换

一、隐函数组概念

定义：设 $F(x,y,u,v),G(x,y,u,v)$ 定义在 $V\subset R^4$ 上,

对于方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0, \end{cases}$ (1)

若存在区域 $D,E\subset R^2$, 使得对任意 $(x,y)\in D$,

有唯一的 $(u,v)\in E$,满足 $(x,y,u,v)\in V$ 且方程

组 (1) 成立, 则称由 (1) 确定了隐函数组

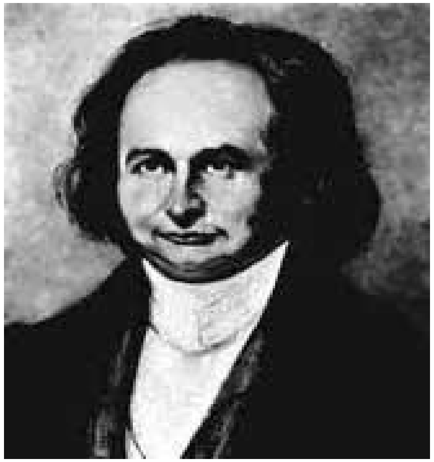
$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases} \quad (x, y) \in D, (u, v) \in E,$$

并有

$$\begin{cases} F(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0, \\ G(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0, \end{cases} \quad (x, y) \in D.$$

- 函数 F, G 关于变量 u, v 的雅可比 (Jacobi) 行列式:

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$



雅可比（ Jacobi, C.G.J.
1804-1851, 德国 ）

二、隐函数组定理

定理1: 设函数 $F(x,y,u,v),G(x,y,u,v)$ 在区域 V 上有定义, $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 为 V 的内点, 且

(i) $F(P_0)=G(P_0)=0$（初始条件）;

(ii) F,G 在 V 内存在连续的一阶偏导数;

(iii) $J\big|_{P_0}=\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}\neq 0$.

则:

1° 存在P_0 的邻域$U(P_0)=U(Q_0)\times U(W_0)\subset V$,其中

$Q_0=(x_0,y_0)$, $W_0=(u_0,v_0)$, 使得方程组 (1) 在

$U(P_0)$上唯一确定了一个隐函 数组

$$\begin{cases} u=u(x,y), \\ v=v(x,y), \end{cases} (x,y)\in U(Q_0),(u,v)\in U(W_0),$$

且 $u_0=u(x_0,y_0),v_0=v(x_0,y_0)$.

2° $u(x,y), v(x,y)$ 在 $U(Q_0)$ 上存在一阶连续偏导数, 且有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}. \end{cases}$$

例1、讨论方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=u^2+v^2-x^2-y=0 \\ G(x,y,u,v)=-u+v-xy+1=0 \end{cases}$$

在点 $P_0(2,1,1,2)$ 的邻域能否确定隐函数 组 $u=u(x,y), v=v(x,y)$. 若能 , 求隐函数组的偏导数。

例2、求方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 50 \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

所确定隐函数 $y = y(x), z = z(x)$ 的导数。

例3、设函数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 具有连续的偏导数,

$u=u(x,y)$ 与 $v=v(x,y)$ 是由方程组

$$u=f(ux,v+y),\quad g(u-x,v^2y)=0$$

所确定的隐函数组. 试求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

三、反函数组与坐标变换

定理2：设函数组 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 在某区域 $D\subset \mathrm{R}^2$ 上具有连续的一阶偏导数, $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点，且

$$u_0=u(x_0,y_0),\ v_0=v(x_0,y_0),\ \left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}\neq 0.$$

(1) 在点 $P_0'(u_0, v_0)$ 的某邻域 $U(P_0')$ 内，存在唯一的一组反函数 $x = x(u,v), y = y(u,v)$, 使得

$$x_0 = x(u_0, v_0),\ y_0 = y(u_0, v_0);$$

且当$(u,v) \in U(P_0')$时，$(x(u,v), y(u,v)) \in U(P_0)$;

$$u \equiv u(x(u,v), y(u,v)),\ v \equiv v(x(u,v), y(u,v)).$$

(2) 反函数组 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ 在 $U(P_0')$ 上存在连续的一阶偏导数，记 $J = \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$，则

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{J}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial u}{\partial y};$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}; \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{J}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}.$$

注： 反函数组的 Jacobi行列式

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}.$$

即互为反函数组的Jacobi行列式互为倒数。

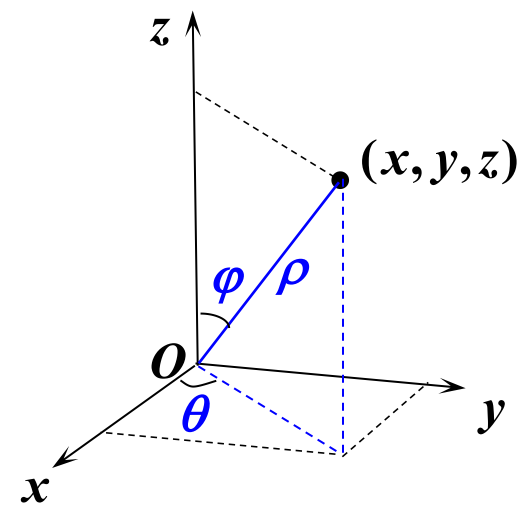
例4、 平面上点的直角坐标(x, y)与极坐标(r, θ)之间的坐标变换为

$$T: \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

求其反函数组.

例5、 空间直角坐标 (x, y, z) 与球坐标 (ρ, φ, θ) 之间的坐标变换为

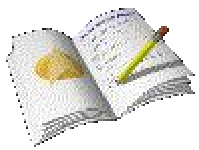
$$T:\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z=\rho\cos\varphi. \end{cases}$$



求其反函数组.

例6、求函数组 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$ 所确定的

反函数组的偏导数 u_x, v_x, u_y, v_y.



作　业

习题18-2：2、4