§ 16.3　二元函数的连续性

1 二元函数的连续性概念

2 有界闭域上连续函数的性质

一、二元函数的连续性概念

定义： 设函数 $f(x,y)$ 定义在 D 上，点 $P_0 \in D$. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 只要 $P \in U(P_0;\delta) \cap D$, 就有

$$|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon ,$$

则称 $f(x,y)$ 关于集合 D 在点 P_0 连续.

注：(1) 若 P_0 是 D 的孤立点，则 P_0 是 $f(x,y)$ 的连续点。

(2) 若 P_0 是 D 的聚点，则 $f(x,y)$ 关于集合 D 在点 P_0 连续等价于

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P)=f(P_0).$$

否则称 P_0 是 $f(x,y)$ 的不连续点（或间断点）.

注：若 $f(x,y)$ 在 D 上任何点都关于集合 D 连续，则称 $f(x,y)$ 为 D 上的连续函数.

例1、设 $f(x,y)=\begin{cases}1, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$，讨论 $f(x,y)$

在 $(0,0)$ 处的连续性。

例2、讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha}}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}\quad(\alpha>0)$$

在 (0,0) 处的连续性。

※ 全增量与偏增量

设 $P_0(x_0, y_0)$、$P(x, y) \in D, \Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$,

称
$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$
$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

为函数 $f(x, y)$ 在点 P_0 的全增量.

- 函数 $f(x, y)$ 在点 P_0 连续 $\Leftrightarrow$

$$\lim_{\substack{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0) \\ (x, y) \in D}} \Delta z = 0$$

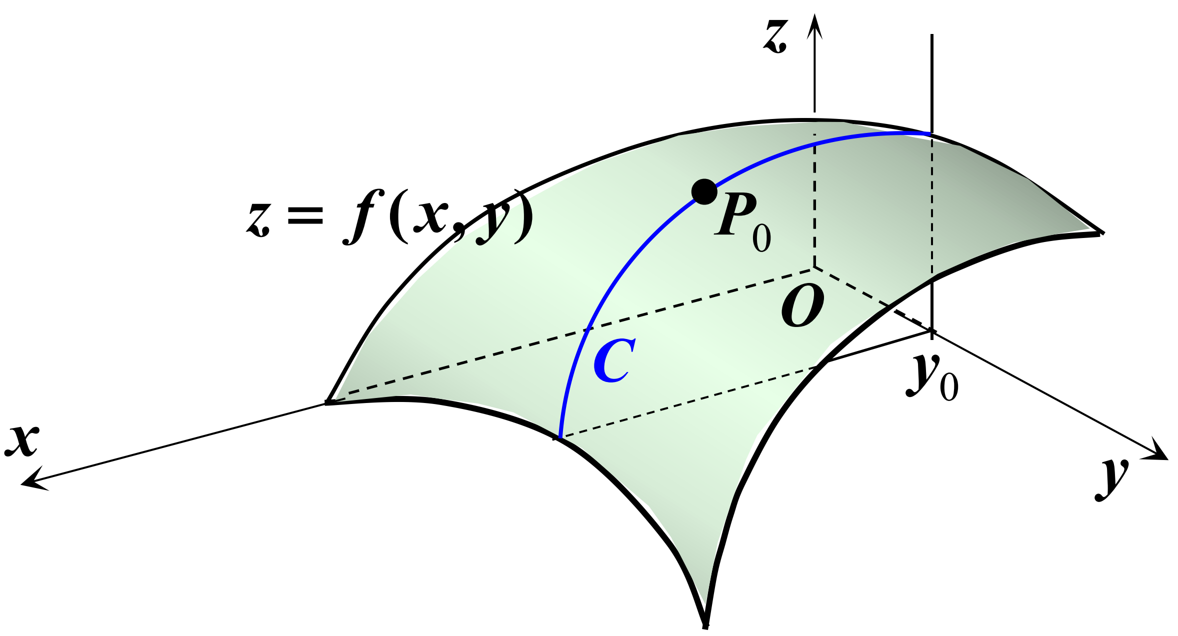
如果在全增量中取 $\Delta x = 0$ 或 $\Delta y = 0$, 则相应得到的增量称为偏增量，分别记作

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

$$\Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

注：函数的全增量不等于相应的两个偏增量之和。

- $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta_x f(x_0,y_0)=0 \Leftrightarrow$ 固定 $y=y_0$，$f(x,y_0)$ 作为 x 的函数在点 x_0 连续,称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 对 x 连续.



- $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta_y f(x_0,y_0)=0 \Leftrightarrow$ 固定 $x=x_0$，$f(x_0,y)$ 作为 y 的函数在点y_0连续，称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 对 y 连续.

命题: 若 $f(x,y)$ 在其定义域的内点 (x_0,y_0) 连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 对 x 和 y 都连续。

反之不真。

如：函数 $f(x,y)=\begin{cases}1, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续。

但 $f(0,y)=f(x,0)=0$，它在 $(0,0)$ 处对 x 和对 y 分别都连续.

定理1:(复合函数的连续性) 设函数 $u=\varphi(x,y)$ 和 $v=\psi(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，并在点 P_0 连续; $f(u,v)$ 在点 $Q_0(u_0,v_0)$ 的某邻域内有定义，并在点 Q_0 连续，其中

$$u_0=\varphi(x_0,y_0),\ v_0=\psi(x_0,y_0).$$

则复合函数 $g(x,y)=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在点 P_0 也连续.

二元初等函数： 由常量及具有不同自变量 x, y 的一元基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算生成的函数。

如： $x^2 y + \frac{1}{y}$, $\frac{\sin(xy)}{x^2 + y^3}$, e^{x+y^2} 等。

注： 二元初等函数在其定义域内连续。

例3、求下列函数的极限。

$$(1)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy};$$

$$(2)\quad \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin x}{\ln(1+xy)}.$$

二、有界闭域上连续函数的性质

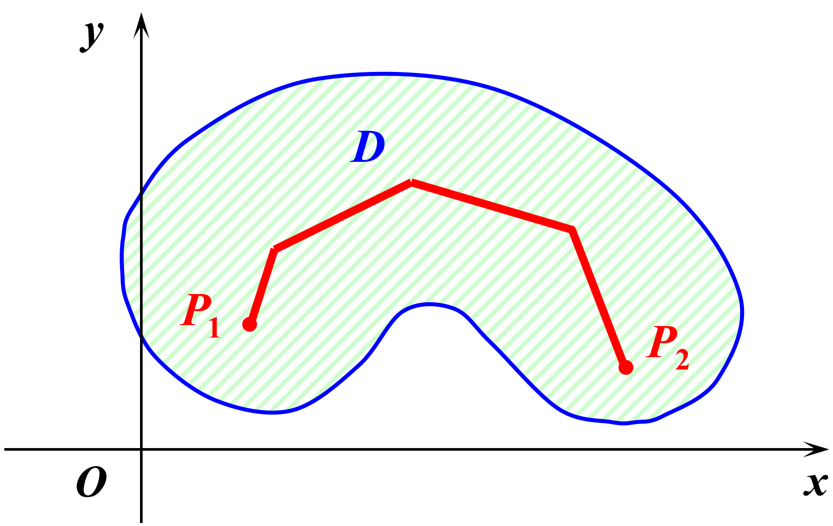
定理2(有界性与最值性)： 若二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭域 $D \subset R^2$ 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上有界，且能取得最大值与最小值.

定理3（一致连续性）：若函数 $f(x,y)$ 在有界闭域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上连续，则 f 在 D 上一致连续. 即 $\forall\varepsilon>0$，存在只依赖于 ε 的 $\delta>0$，使得对一切满足 $\rho(P,Q)<\delta$ 的点 $P,Q\in D$，必有 $|f(P)-f(Q)|<\varepsilon$.

定理3（介值性）： 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D\subset \mathrm{R}^2$ 上连续, 若P_1, P_2为 D 中任意两点, 且 $f(P_1)<f(P_2)$, 则对任何满足不等式

$$f(P_1)<\mu<f(P_2)$$

的实数 μ, 必存在点 $P_0\in D$, 使得 $f(P_0)=\mu$.



作业

习题16-3：1(2)(3)、7