§17.4 泰勒公式与极值问题

1. 高阶偏导数
2. 中值定理与泰勒公式
3. 极值问题

一、高阶偏导数

设 $z=f(x,y)$在区域 D 内存在连续的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$$

若这两个偏导数仍存在偏导数，则称它们是$z=f(x,y)$的二阶偏导数 .

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=z_{xx}=f_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=z_{yy}=f_{yy}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z_{xy} = f_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z_{yx} = f_{yx}(x, y)$$

（混合偏导数）

类似可以定义更高阶的偏导数.

例如，$z=f(x,y)$ 关于 x 的三阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$$

$z=f(x,y)$ 关于 x 的 $n-1$ 阶偏导数，再关于 y 的一阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right)=\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}$$

例1、求$z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1$的二阶偏导数及$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

例2、设 $u = e^{ax}\cos by$，求 z 的二阶混合偏导数。

问题：二阶混合偏导数都相等吗？

例3、设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$,

求 $f_{xy}(0,0)$ 和 $f_{yx}(0,0)$.

- 混合偏导数与求偏导数的次序有关。

定理1: 若 $f_{xy}(x,y)$ 与 $f_{yx}(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续，

则 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

证明思路： 令

$$F(\Delta x,\Delta y)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)-$$

$$f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0).$$

(1) 作 $\varphi(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)$,

(2) 作 $\psi(y)=f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)$.

注： 上述结论对 n 元函数的高阶混合导数也成立.

如对三元函数 $u=f(x,y,z)$， 当三阶混合偏导数在点 (x,y,z) 连续时, 有

$$f_{xyz}(x,y,z)=f_{yzx}(x,y,z)=f_{zxy}(x,y,z)$$
$$=f_{xzy}(x,y,z)=f_{yxz}(x,y,z)=f_{zyx}(x,y,z)$$

说明: 因为初等函数的偏导数仍为初等函数, 而初等函数在其定义区域内是连续的，故求初等函数的高阶导数可以选择方便的求导顺序.

*复合函数的高阶偏导数

设函数 $x=\varphi(s,t)$ 与 $y=\psi(s,t)$ 定义在 st 平面的区域 D 上，函数 $z=f(x,y)$ 定义在 xy 平面的区域 $\overline{D}$ 上. 且 $\left\{(x,y)\mid x=\varphi(s,t),\ y=\psi(s,t),(s,t)\in D\right\}\subset\overline{D}$

若函数 f 在 $\overline{D}$,函数 φ 与 ψ 在 D 上都具有连续的二阶偏导数, 则复合函数 $z=f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 在 D 上对 s,t 也存在二阶连续偏导数 。

例4、证明函数 $u = \dfrac{1}{r}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 满足拉普拉斯

方程 $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

例5、设 $w = f(x + y + z, xyz)$, f 有二阶连续偏导数,

求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$.

二、中值定理与泰勒公式

- 设 $f(x) \in C[a,b], f(x) \in D(a,b)$,则对任意

$x_0, x_0 + h \in [a,b]$, 存在 $0 < \theta < 1$, 使得

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta h)h.$$

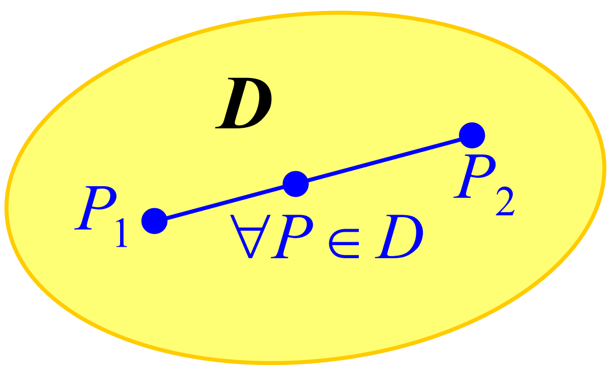
推广

多元函数中值定理

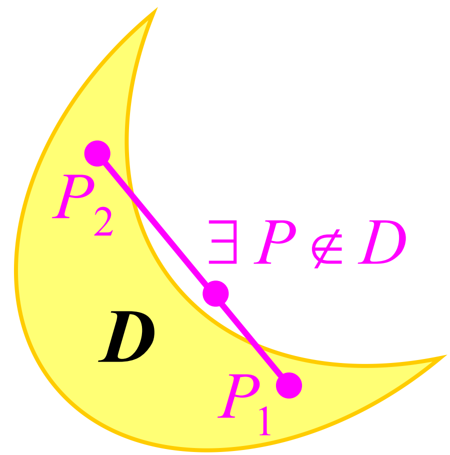
凸区域: 区域 D 上任意两点的连线都含于 D.

即对任意两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) \in D$, 对任意 $0 < \lambda < 1$, 恒有

$$P(x_1 + \lambda(x_2 - x_1),\ y_1 + \lambda(y_2 - y_1)) \in D.$$



凸



非凸

定理2:（中值定理）设 $f(x,y)$ 在凸开域 $D \subset R^2$ 上可微, 则对任意 $P(a,b), Q(a+h, b+k) \in D$, 存在 $0<\theta<1$, 使得

$$\boxed{\begin{aligned} & f(a+h,b+k)-f(a,b) \\ = {} & f_x(a+\theta h, b+\theta k)h + f_y(a+\theta h, b+\theta k)k. \end{aligned}}$$

注: 设 D 为闭凸域, 且对 D 上任意两点 $P(x_1, y_1)$,

$Q(x_2, y_2)$ 及任意 $\lambda \in (0,1)$, 都有

$$P(\, x_1 + \lambda(x_2 - x_1),\ y_1 + \lambda(y_2 - y_1)\,) \in \operatorname{int} D,$$

若 (1) f 在 D 上连续; (2) f 在 $\operatorname{int} D$ 内可微, 则

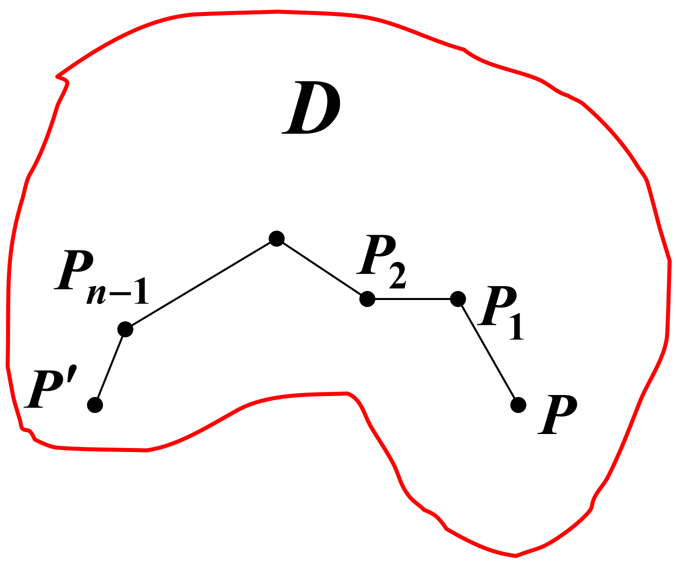
对任意 $P, Q \in D$, 存在 $\theta \in (0,1)$, 使得中值公式

成立。

推论: 若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上可微,且

$$f_x = f_y \equiv 0,$$

则 $f(x,y)$ 在区域 D 上为常函数。



例6、对 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2xy+1}}$ ，应用微分中值定理,

证明存在 $0<\theta<1$，使得:

$$1-\sqrt{2}=\sqrt{2}\,(1-3\theta)\,(1-2\theta+3\theta^2)^{-3/2}.$$

- 设 $f^{(n)}(x)\in C[a,b], f(x)\in D^{(n+1)}(a,b)$,则对

任意 $x_0, x_0+h\in[a,b]$, 存在 $0<\theta<1$, 使得

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

$$\Big\downarrow \text{推广}$$

多元函数泰勒公式

记号

- $$(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)h+f_y(x_0,y_0)k.$$

- $$(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0)=$$

$$f_{xx}(x_0,y_0)h^2+2f_{xy}(x_0,y_0)hk+f_{yy}(x_0,y_0)k^2.$$

- $$(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^m f(x_0,y_0)=$$

$$\sum_{i=0}^{m}\mathrm{C}_m^i\left.\frac{\partial^m f}{\partial x^i\partial y^{m-i}}\right|_{(x_0,y_0)}h^i k^{m-i}.$$

定理3(二元函数带拉格朗日余项的泰勒公式)：

设 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有直到 $n+1$ 阶连续偏导数，则对 $U(P_0)$ 内任一点 (x_0+h,y_0+k)，存在 $0<\theta<1$，使得

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0,y_0)+R_n$$

其中 $R_n=\frac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$.

(1) 余项估计式：因 f 的各 n+1 阶偏导数连续，在某闭域其绝对值必有上界 M ，令 $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$，则有

$$|R_n| \le \frac{M}{(n+1)!}(|h| + |k|)^{n+1}$$

$$\le \frac{M}{(n+1)!} 2^{n+1} \rho^{n+1} = o(\rho^n)(\rho \to 0).$$

注：事实上，若 f 在 $U(P_0)$ 内存在直到 n 阶连续偏导数，即有 $R_n = o(\rho^n)\,(\rho \to 0)$. (佩亚诺余项)

(2)当$n=0$时，即为二元函数的拉格朗日中值公式：

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)$$

$$=f_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k)h + f_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k)k$$

$$(0<\theta<1).$$

例7、求 $f(x,y)=x^{y}$ 在点 $(1,4)$ 的二阶带佩亚诺余项的泰勒公式，并计算 $1.08^{3.96}$ 的近似值.

例8、求函数 $f(x,y)=\ln(1+x+y)$ 在点$(0,0)$

的三阶带拉格朗日余项的泰勒公式.

- $\ln(1+x+y)=x+y-\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{3}(x+y)^3+R_3,$

其中

$$R_3=(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^4 f(\theta x,\theta y)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{(x+y)^4}{(1+\theta x+\theta y)^4}$$

$$(0<\theta<1).$$

三、多元函数的极值

定义1：设 $P_0(x_0, y_0)$ 是 $z = f(x, y)$ 的定义域的内点，

若存在 $U(P_0)$，使得对任意 $P(x, y) \in U(P_0)$，

都有

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0)，（或 f(x, y) \ge f(x_0, y_0)）$$

则称 $f(x_0, y_0)$ 为函数的 极大值（或极小值）.

P_0 称为 f 的极大值点（或极小值点）.

例9、

(1) $z = 3x^2 + 4y^2$,

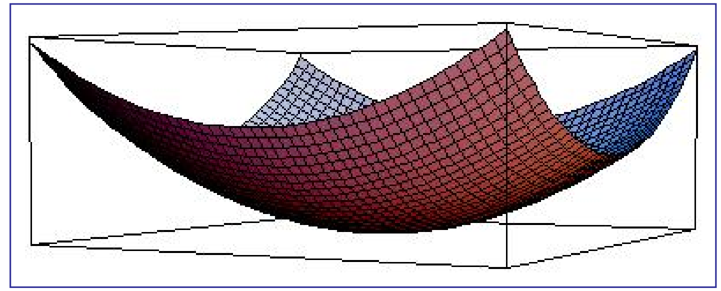
(0,0)极小值点 .

(2) $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

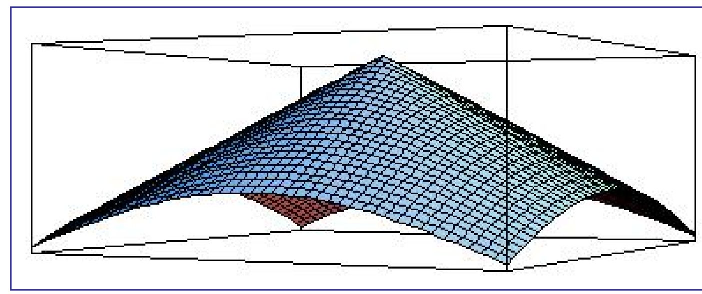
(0,0)极大值点 .

(3) $z = xy$

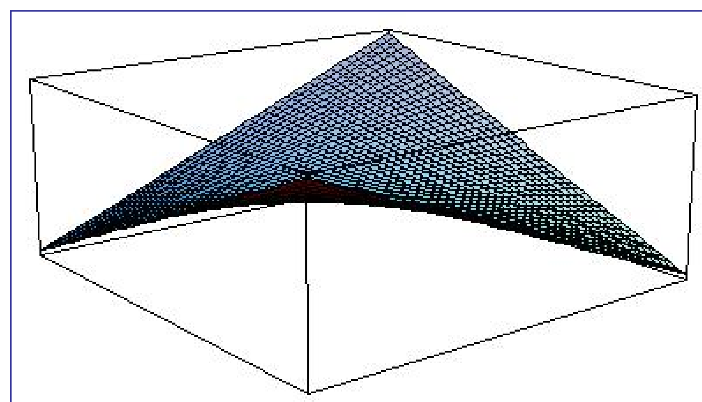
(0,0)非极值点 .



(1)



(2)



(3)

定理4（极值的必要条件）：

若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极值，且在点 (x_0, y_0) 可偏导，则必有：

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

稳定点：使所有一阶偏导数同时为零的点。

注1：若偏导数存在，则极值点必是稳定点.

但稳定点并不一定是极值点.

如 $f(x,y)=xy$，点 $(0,0)$ 为稳定点，但非极值点.

注2：偏导数不存在的点也可能是极值点。

如 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 的偏导数不存在，

但 $(0,0)$ 为极小值点。

$z = f(x, y)$ 的可疑极值点:

- (1) $f(x, y)$ 的稳定点;
- (2) $f_x(x, y)$ 与 $f_y(x, y)$ 中至少有一个不存在的点.

问题：满足什么条件的稳定点是极值点？

设函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 有二阶偏导数，记

$$H_f(P_0)=\begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}_{P_0},$$

称为 f 在点 P_0 的 Hesse 矩阵.

定理5(极值的充分条件): 设 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 具有二阶连续偏导数，且 P_0 是 $f(x,y)$的稳定点.则

(1) 当 $H_f(P_0)$ 是正定矩阵时, $f(P_0)$ 为极小值.

(2) 当 $H_f(P_0)$ 是负定矩阵时, $f(P_0)$ 为极大值.

(3) 当 $H_f(P_0)$ 是不定矩阵时, $f(P_0)$ 不为极值.

- $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$

$$=\frac{1}{2}\left(\Delta x, \Delta y\right) H_f(P_0)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}+o(\rho^2)$$

（其中$\rho^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$）.

注： 定理5的另一表述, 记

$$A = f_{xx}(P_0), B = f_{xy}(P_0), C = f_{yy}(P_0).$$

则 (1) $AC - B^2 > 0$ 时, $f(P_0)$ 是极值 .

当 $A < 0$ 时, $f(P_0)$ 是极大值;

当 $A > 0$ 时, $f(P_0)$ 是极小值.

(2) $AC - B^2 < 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 不是极值 ;

(3) $AC - B^2 = 0$ 时不能确定, 另作讨论 .

求二阶连续可微函数极值的一般步骤：

(1) 解方程组 $f_x(x,y)=0,\ f_y(x,y)=0$ 得稳定点；

(2) 对于每个稳定点 $P_0(x_0,y_0)$，求出 $H_f(P_0)$；

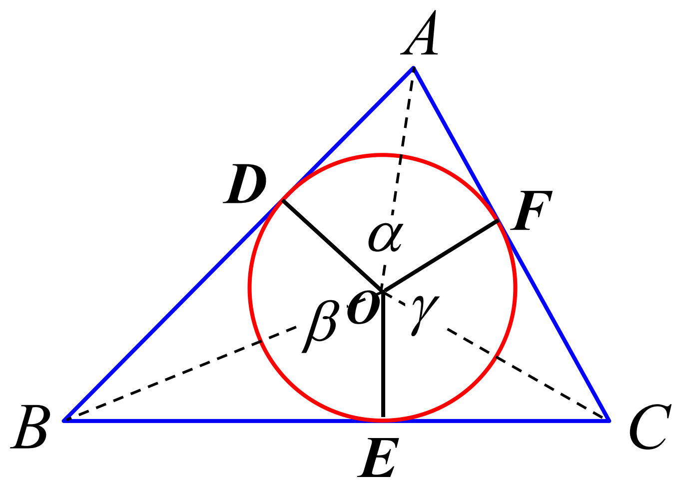
(3) 根据 $H_f(P_0)$ 的类型，判断 $f(P_0)$ 是否为极值 .

例10、求 $f(x,y)=x^2+5y^2-6x+10y+6$ 的极值.

练习：2013年考研数学一

求函数 $f(x,y)=(y+\dfrac{x^3}{3})e^{x+y}$ 的极值.

例11、证明圆的所有外切三角形中，正三角形的面积为最小.



最值应用问题

依据

函数 f 在闭域上连续 $\Downarrow$ 函数 f 在闭域上可达到最值

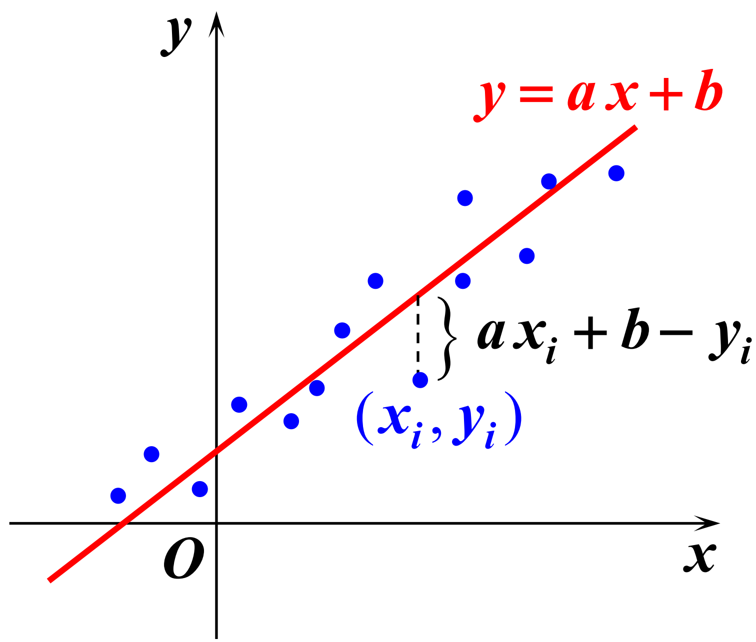
最值可疑点 $\begin{cases} \text{内部：驻点、不可偏导的点} \\ \text{边界点} \end{cases}$

特别, 当区域内部最值存在, 且只有一个极值点 P 时,

$f(P)$ 为极小(大) 值 $\Longrightarrow$ $f(P)$ 为最小(大)值

例12、求函数 $f(x,y)=x^3+2x^2-2xy+y^2$ 在 $D=[-2,2]\times[-2,2]$ 上的最大值和最小值。

例13、（最小二乘法问题）设通过观察或实验得到一列点 (x_i, y_i), $i = 1, 2, \cdots, n$. 它们大体上在一条直线上，即大体上可用直线方程来反映变量 x 与 y 之间的对应关系 (参见右图). 确定一直线，使得其与这 n 个点 的偏差的平方之和为最小.



作业

习题17-4： 1(3)(5)、7(4)、

8(3)、 9(1)、 11