第六章 微分中值定理及其应用

★ 已知$f(x)$，求$f'(x)$.　　　　（工具）

✦ 从导函数的信息得到函数的信息.　　　　（目的）

例：从 $f'(x)\equiv 0$，推出$f(x)=C$.

从$f'(x)>0$，推出$f(x)$单增.

从$f''(x)>0$，推出 $\dfrac{f(x)+f(y)}{2}\geq f(\dfrac{x+y}{2})$.

从 $f^{(n)}(x_0)\,(n\in N)$，推出$f(x)$的表达式.

- 微分学的理论：

费马定理 → 罗尔中值定理

拉格朗日中值定理

柯西中值定理 → 泰勒公式

- 微分学的应用：

函数的单调性和凸性

最值问题

6.1　拉格朗日定理和函数的单调性

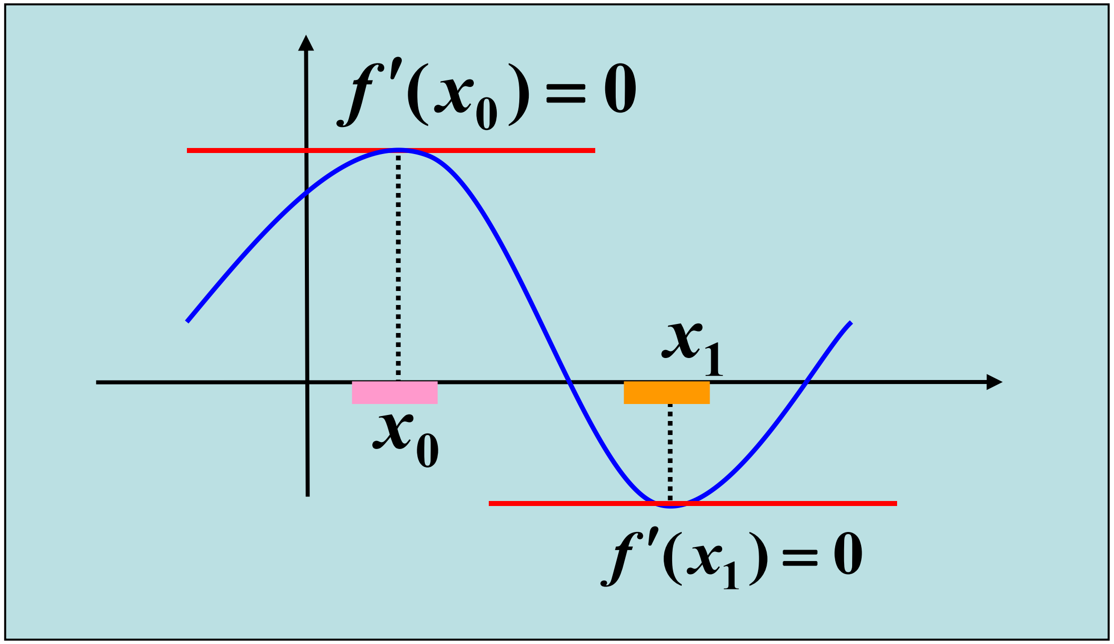
1 罗尔中值定理

2 拉格朗日中值定理

3 单调函数

一、罗尔(Rolle)中值定理

费马定理: 设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, 若 $f(x)$ 在 x_0 可导, 则 $f'(x_0)=0$.

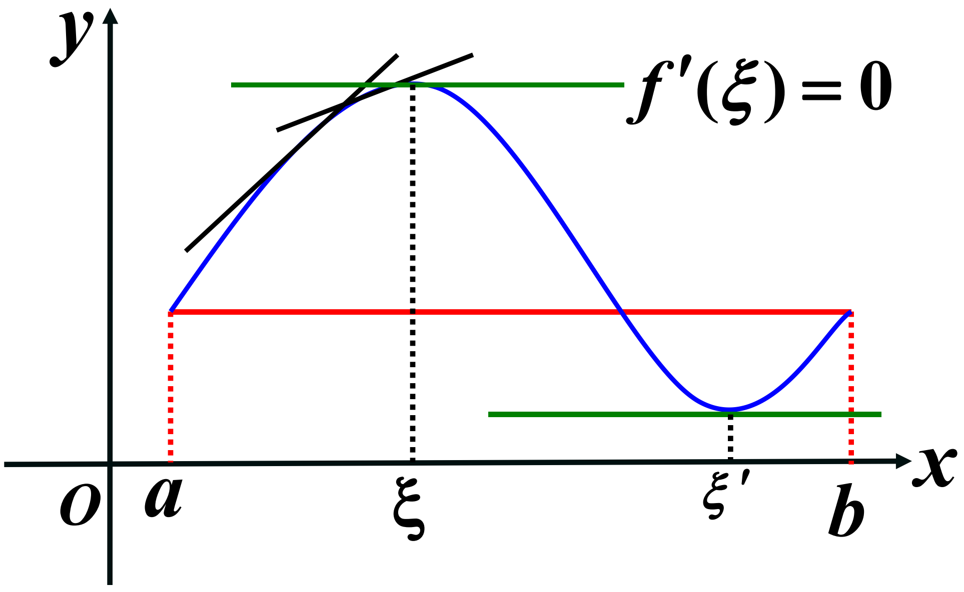


定理1(罗尔): 设函数 $y = f(x)$ 满足

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续;

(2) $f(x)$ 在 (a,b) 可导;

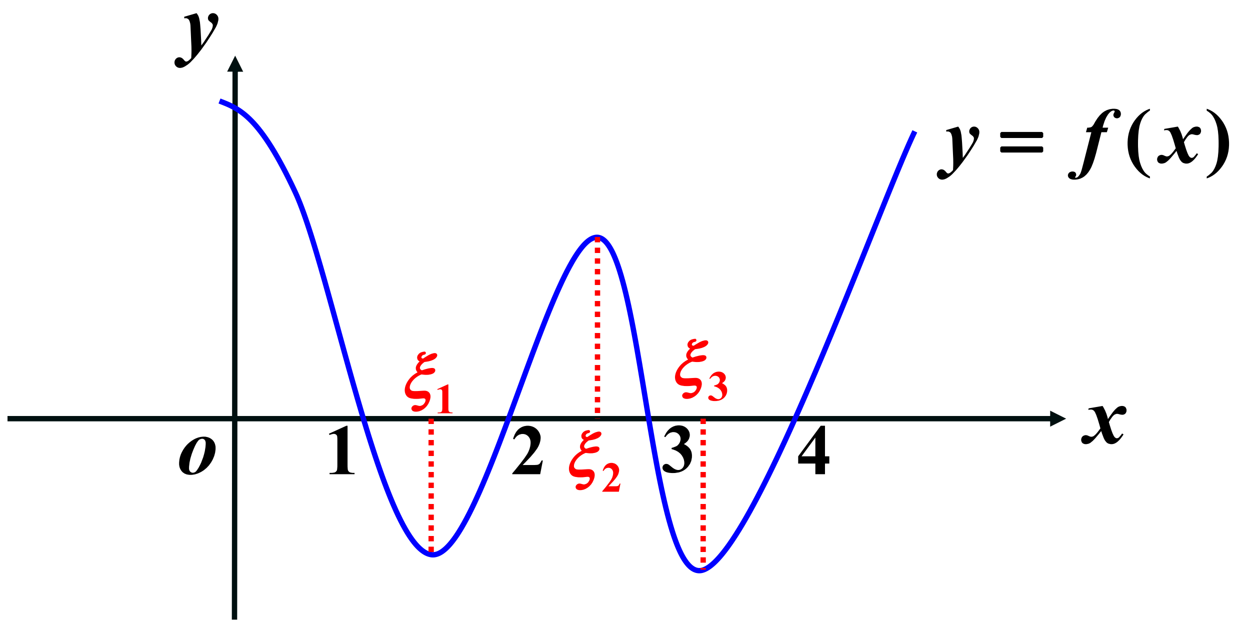
(3) $f(a) = f(b)$,



则 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

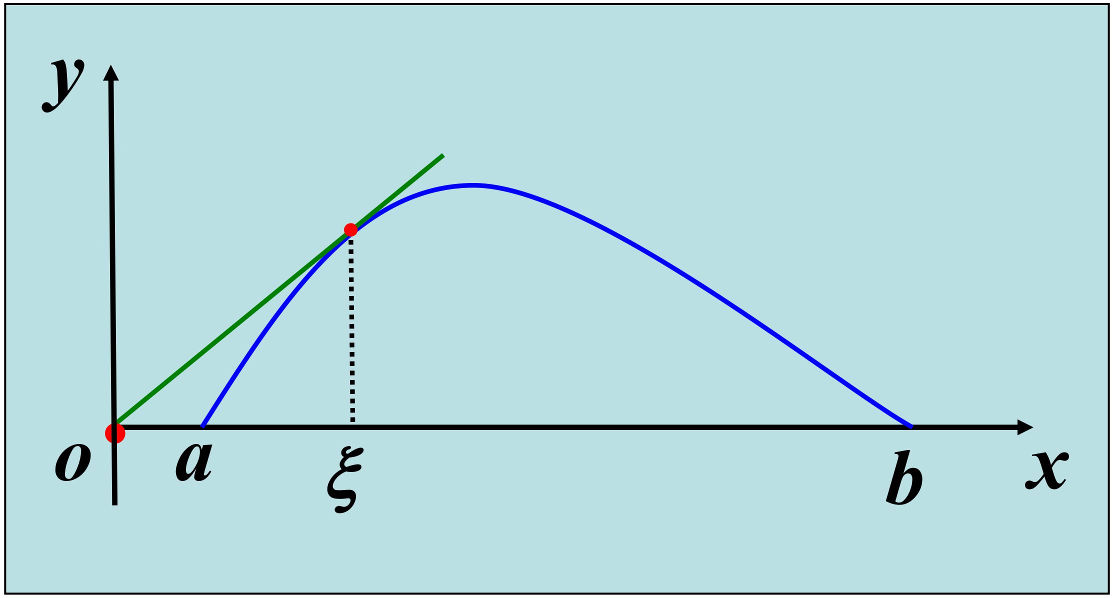
例1、设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，问：

$f'(x)=0$ 有几个实根？



思考：$f''(x)=0$有几个实根？

例2、设 $f(x)$ 在 $[a,b](a>0)$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.



二、拉格朗日(Lagrange)中值定理

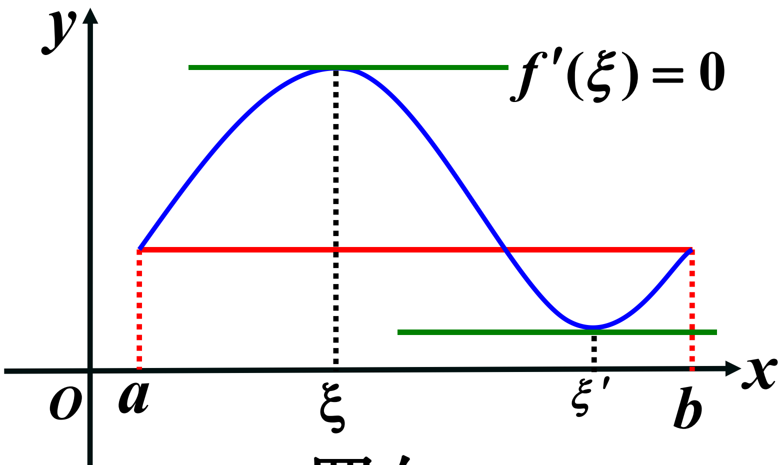
(法，1736-1813)

定理2（拉格朗日）：设函数 $f(x)$ 满足

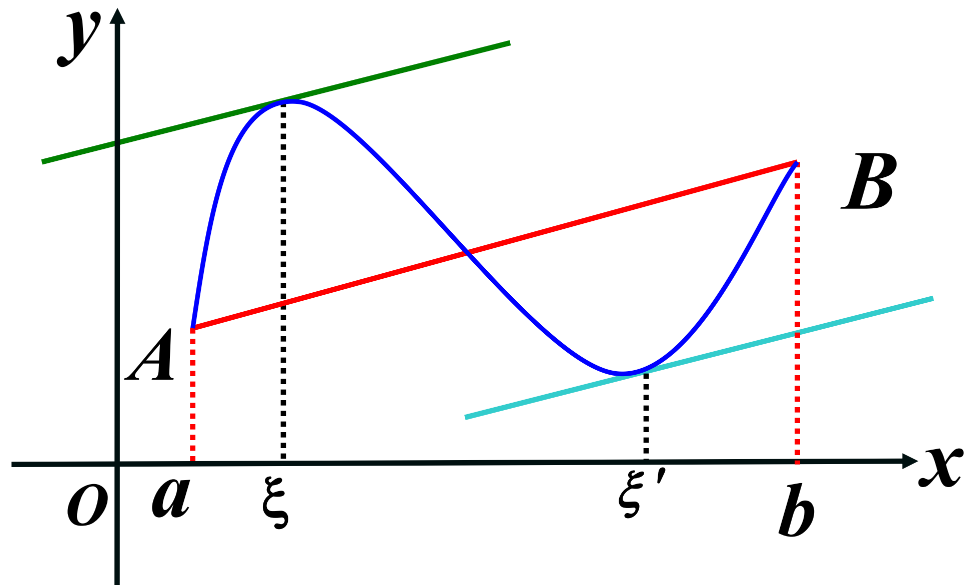
(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续；

(2) $f(x)$ 在 (a,b) 可导，

则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



罗尔



拉格朗日

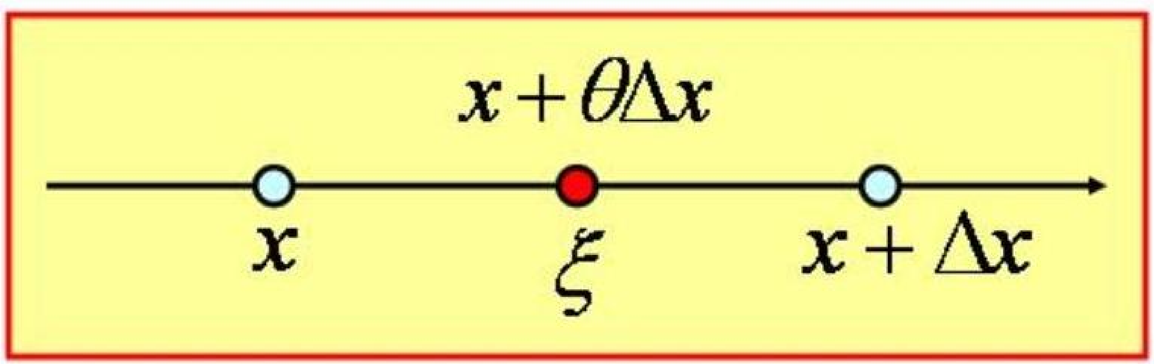
拉格朗日(Lagrange)中值定理的变形：

(1) $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ \ \xi\in(a,b);$

(2) $f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),\ \theta\in(0,1);$

(3) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$

$$=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\ \ \theta\in(0,1).$$ 有限增量形式



应用一　得到不等式

- $|f'(x)| \le M \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \le M|x_1 - x_2|$.

例3、证明 $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$ (其中$x > 0$).

例4、设 $f(x)$ 在区间 I 上可微, 且$|f'(x)| \le M$,

则函数$f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

练习：证明 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$上一致连续.

应用二　得到等式

推论1: 若 $f(x)$ 在区间 I 上满足 $f'(x)\equiv 0$, 则 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常函数 .

推论2: 若 $f(x), g(x)$在区间 I 上满足 $f'(x)\equiv g'(x)$, 则存在常数 C, 使得

$$f(x)=g(x)+C\ (x\in I).$$

例5、设 $|x|<1$，证明：

$$\arctan x - \arctan\frac{1+x}{1-x} = -\frac{\pi}{4}.$$

推论3：设 $f(x)$ 在某 $U(x_0)$ 上连续，在 $U^o(x_0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在，则 f 在 x_0 可导且

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x).$$

注：可能 $f'(x_0)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 不存在.

如：设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

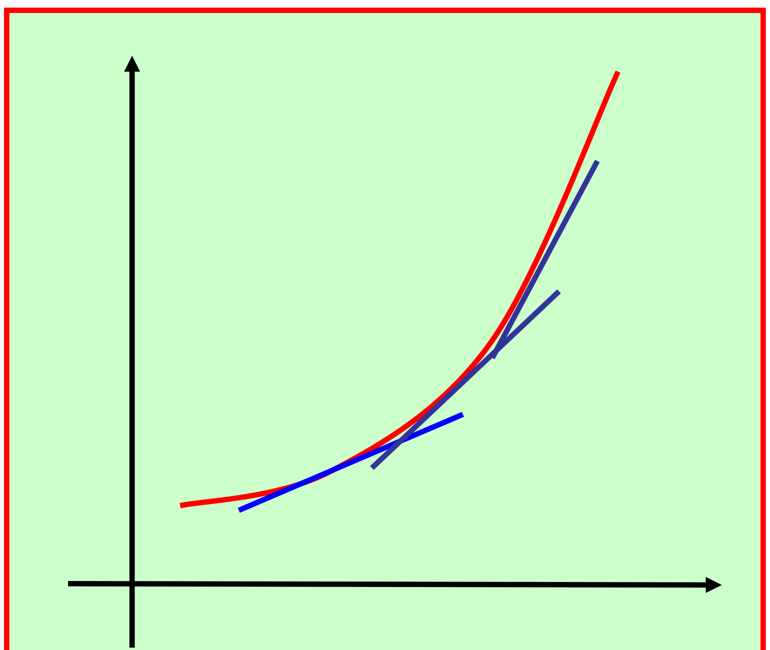
则 $f'(0)=0$，但 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$不存在.

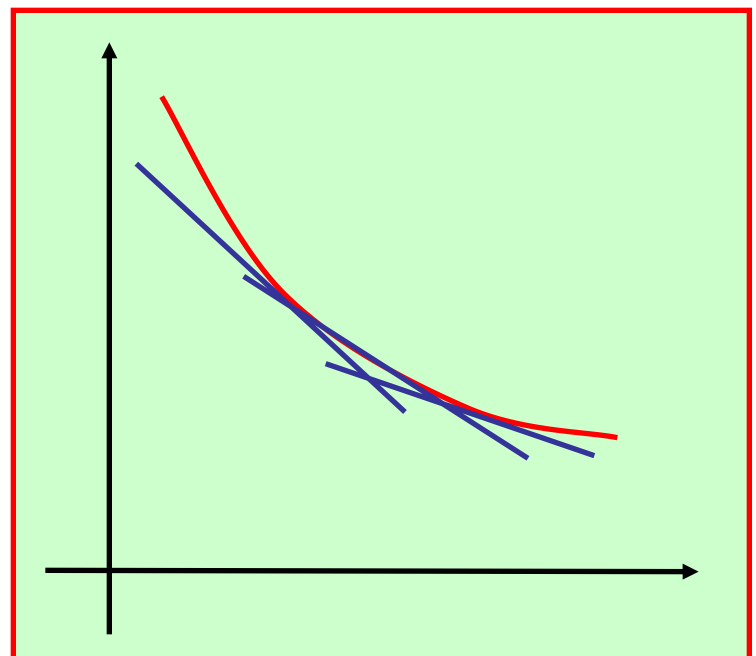
例6、求 $f(x)=\begin{cases} x+\sin x^2, & x\le 0 \\ \ln(1+x), & x>0 \end{cases}$ 的导数。

三、单调函数

定理3: 设 $f(x)$ 在区间 I 上可导，则 $f(x)$ 在 I 上递增(减)的充要条件是

$$f'(x) \geq 0 \ \ (f'(x) \leq 0).$$





定理4: 设 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 则 $f(x)$ 在 I 上严格递增(减)的充要条件是

(i) 对任意 $x \in I$, 有 $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$;

(ii) 在 I 的任何子区间上 $f'(x)$ 不恒为 0.

推论4: 设 $f(x)$ 在区间 I 上可导.

(1) 若 $f'(x)>0$,则 $f(x)$ 在 I 上严格递增.

(2) 若 $f'(x)<0$,则 $f(x)$ 在 I 上严格递减.

推论5: 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续.

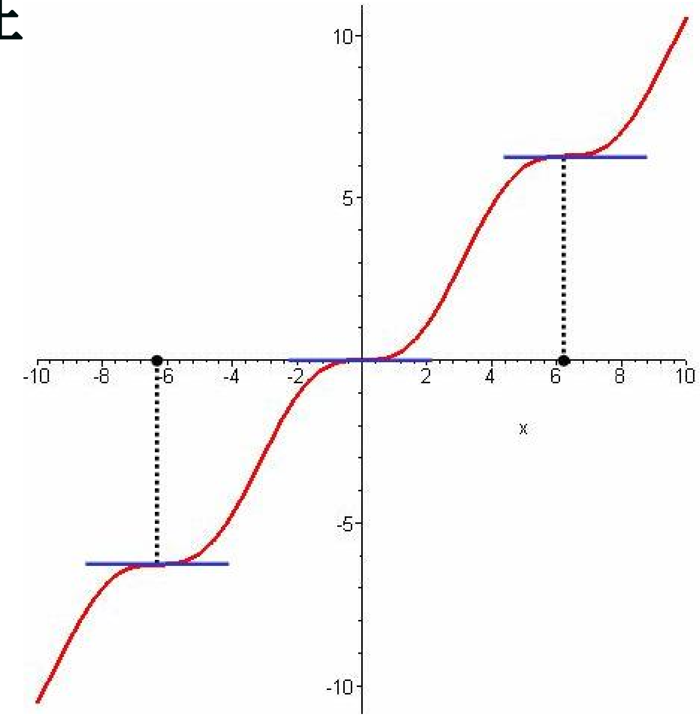
(1) 若在 (a,b) 上, $f'(x)>0$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递增.

(2) 若在 (a,b) 上, $f'(x)<0$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递减.

例7、讨论下列函数的单调性

(1) $y=\sqrt[3]{x^2}$;

(2) $y=x-\sin x$.



注：单调区间的分点可能是函数的稳定点，也有可能是不可导点。

例8、证明下列不等式。

(1) 当$x>0$时, $\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$;

(2) 当$b>a>e$时, $a^{b}>b^{a}$.

定理5（达布定理）：若函数 f 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a) \neq f'_-(b)$，则对介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任一实数 k，存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi) = k.$$

作　　业

习题6-1：5(2)、 6(2)、7(3)

练 习 题

1、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $f(a)=f(b)=0$. 证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)+f'(\xi)=0.$$

2、设 $0<x<\pi$，证明：$\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$.