12.3 一般项级数

1. 交错级数
2. 绝对收敛级数及其性质
3. 阿贝尔判别法和狄利克雷判别法

一、交错级数

交错级数: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$， 或 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} u_n$，

其中对任意 n, 有 $u_n > 0$.

交错级数判别法（莱布尼茨判别法）：

若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \quad (u_n > 0)$的一般项满足：

(i) 数列$\{u_n\}$单调递减；

(ii) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

则 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛.

(2) 级数的余项 $R_n = S - S_n$ 满足 $|R_n| \le u_{n+1}$.

例1、判别下列级数的敛散性。

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{p}}\quad (p>0);$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n});$$

$$(3)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\sqrt{n}}{n-1}.$$

例2、设 各项为正的 数列$\{u_n\}$单调递减且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$$

发散，判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+u_n}\right)^n$$

的敛散性。

二、绝对收敛级数及其性质

定义1: 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛 .

定理1: 绝对收敛的级数必收敛。

定义2: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散, 称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

定理2： 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意的数项级数，若

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho$$

则 (i) 当 $\rho < 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；

(ii) 当 $1 < \rho \le +\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 .

例3、判别下列级数是否收敛，绝对收敛还是条件收敛？

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{\sin(na)}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}]$； （发散）

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\ln n}$ ； （条件收敛）

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\quad(\alpha\in R)$； （绝对收敛）

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\quad(r\in R)$.

级数的重排

若$\{n_k\}$是正整数列的一个重排，称$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_k}$为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$的一个**重排级数**。

问题： 收敛级数的重排级数是否收敛？

若重排级数收敛，是否收敛到原级数的和？

例：设$\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=A.$

则$\frac{1}{2}\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\cdots$

$$=0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+\cdots=\frac{A}{2}.$$

两级数相加得：

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}A.$$

注：收敛级数的重排级数不一定收敛；

若重排级数收敛, 不一定收敛到原级数的和。

性质1：绝对收敛级数的任一重排级数仍然绝对收敛，且其和不变。

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的乘积：正方形顺序

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \cdots \\ \hline
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
v_1 & \leftarrow u_1v_1 & u_2v_1 & u_3v_1 & u_4v_1 & \cdots \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
v_2 & \leftarrow u_1v_2 \leftarrow & u_2v_2 & u_3v_2 & u_4v_2 & \cdots \\
 & & & \downarrow & \downarrow & \\
v_3 & \leftarrow u_1v_3 \leftarrow & u_2v_3 \leftarrow & u_3v_3 & u_4v_3 & \cdots \\
 & & & & \downarrow & \\
v_4 & \leftarrow u_1v_4 \leftarrow & u_2v_4 \leftarrow & u_3v_4 \leftarrow & u_4v_4 & \cdots \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$$u_1v_1+(u_2v_1+u_2v_2+u_1v_2)+\cdots=\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{1\le i,j\le n}^{n-1} u_iv_j\Big).$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 的乘积：对角线顺序

	u_1	u_2	u_3	u_4	$\cdots$
v_1	u_1v_1	u_2v_1	u_3v_1	u_4v_1	$\cdots$
v_2	u_1v_2	u_2v_2	u_3v_2	u_4v_2	$\cdots$
v_3	u_1v_3	u_2v_3	u_3v_3	u_4v_3	$\cdots$
v_4	u_1v_4	u_2v_4	u_3v_4	u_4v_4	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

$$u_1v_1+(u_2v_1+u_1v_2)+(u_3v_1+u_2v_2+u_1v_3)+\cdots=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}u_{n-k}v_k\right).$$

性质2（柯西定理）：

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都绝对收敛，其和分别为 A 与 B，则所有乘积 $u_i v_j$ 按任意顺序排列所得级 数也绝对收敛，且其和为 $A \cdot B$.

三、阿贝尔判别法和狄利克雷判别法

引理（分部求和公式，也称阿贝尔变换）

设 $\varepsilon_i, v_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 为两组实数，令

$$\sigma_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_k (k = 1,2,\cdots,n),$$

则有如下分部求和公式成立：

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sigma_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\sigma_2 + \cdots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)\sigma_{n-1} + \varepsilon_n \sigma_n.$$

推论（阿贝尔引理）若

(i) $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$单调，记 $\varepsilon=\max\limits_{1\le k\le n}\{|\varepsilon_k|\}$;

(ii) $|\sigma_k|\le A(1\le k\le n)$, 其中$\sigma_k=v_1+\cdots+v_k$,

则
$$\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k v_k\right|\le 3\varepsilon A.$$

定理3：（阿贝尔判别法）若

(i) $\{a_n\}$为单调有界数列；

(ii) 级数 $\sum b_n$ 收敛，

则级数 $\sum a_n b_n$ 收敛.

定理4：（狄利克雷判别法） 若

(i) $\{a_n\}$为单调数列且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

(ii) 级数 $\sum b_n$ 的部分和数列有界，

则级数 $\sum a_n b_n$ 收敛.

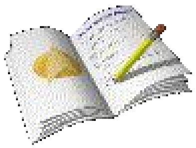
例4、若数列$\{a_n\}$具有性质:

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots, \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

则对任意 $x \neq 2k\pi (k \in Z)$, 级数

$$\sum a_n \sin nx \quad 与 \quad \sum a_n \cos nx$$

均收敛。



作业

习题12-3：1(1)(4)(6)；2(1)

内容小结

1. 利用部分和数列的极限判别级数的敛散性

2. 利用正项级数判别法

必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \xrightarrow{\text{不满足}}$ 发 散

满足

比值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

根值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\xrightarrow{\rho = 1}$ 不定 $\begin{cases} \text{比较判别法} \\ \text{部分和极限} \end{cases}$

用它法判别

$\rho < 1$ 收 敛

$\rho > 1$ 发 散

3. 任意项级数判别法

(1) 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$

Leibniz判别法:

$$\left.\begin{array}{l} u_n \geq u_{n+1} > 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{则交错级数} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \text{收敛}$$

(2) 一般项级数：绝对收敛级数

(3) 一般项级数 $\sum u_n$, 其中 $u_n = a_n b_n$.

若 $\begin{cases} \{a_n\} \text{单调有界} \\ \sum b_n \text{ 收敛} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \{a_n\} \text{单调且 } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \sum b_n \text{ 的部分和数列有界} \end{cases}$

则级数 $\sum a_n b_n$ 收敛 .