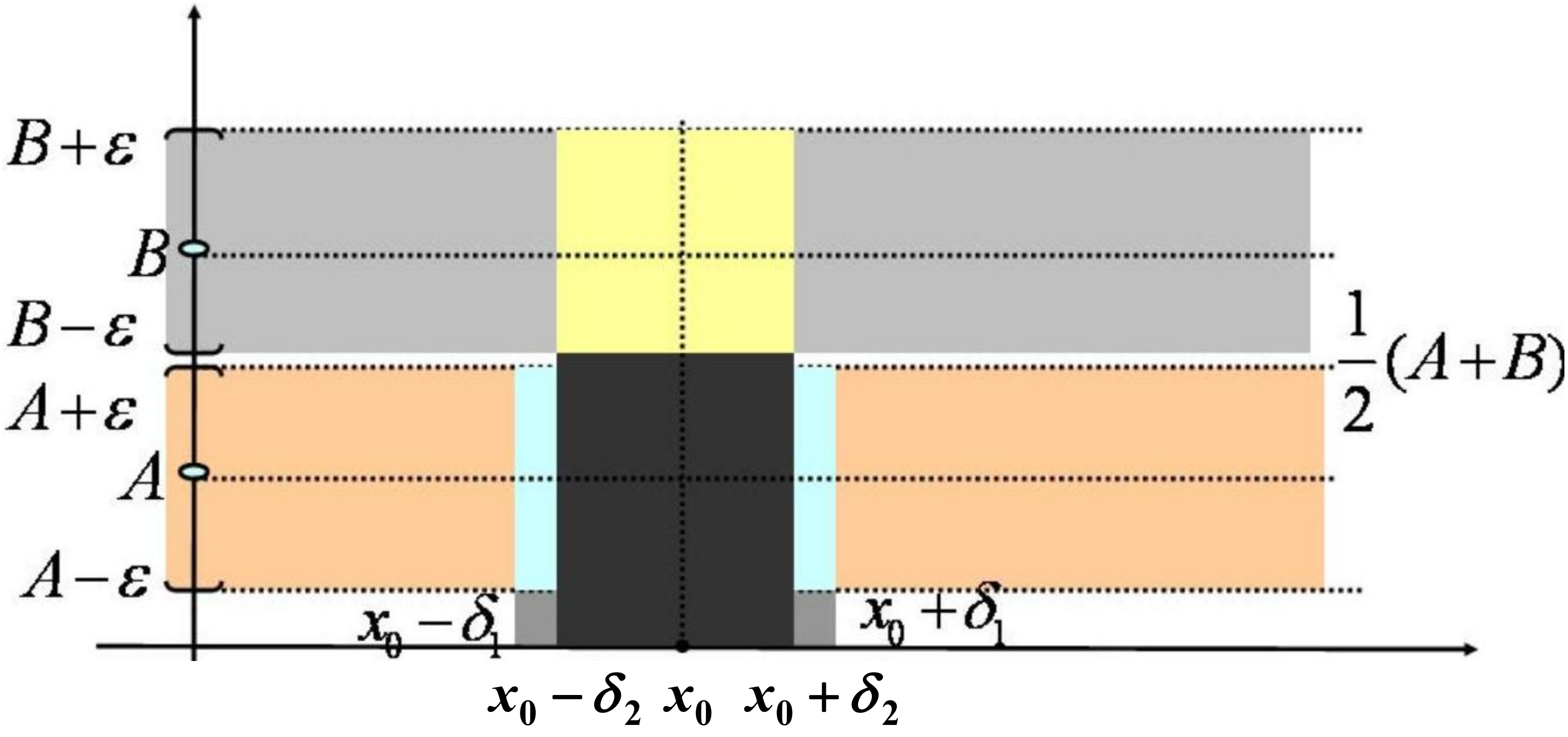
3.2 函数极限的性质

1. 唯一性
2. 局部有界性
3. 局部保号性
4. 保不等式性
5. 迫敛性
6. 四则运算

一、唯一性

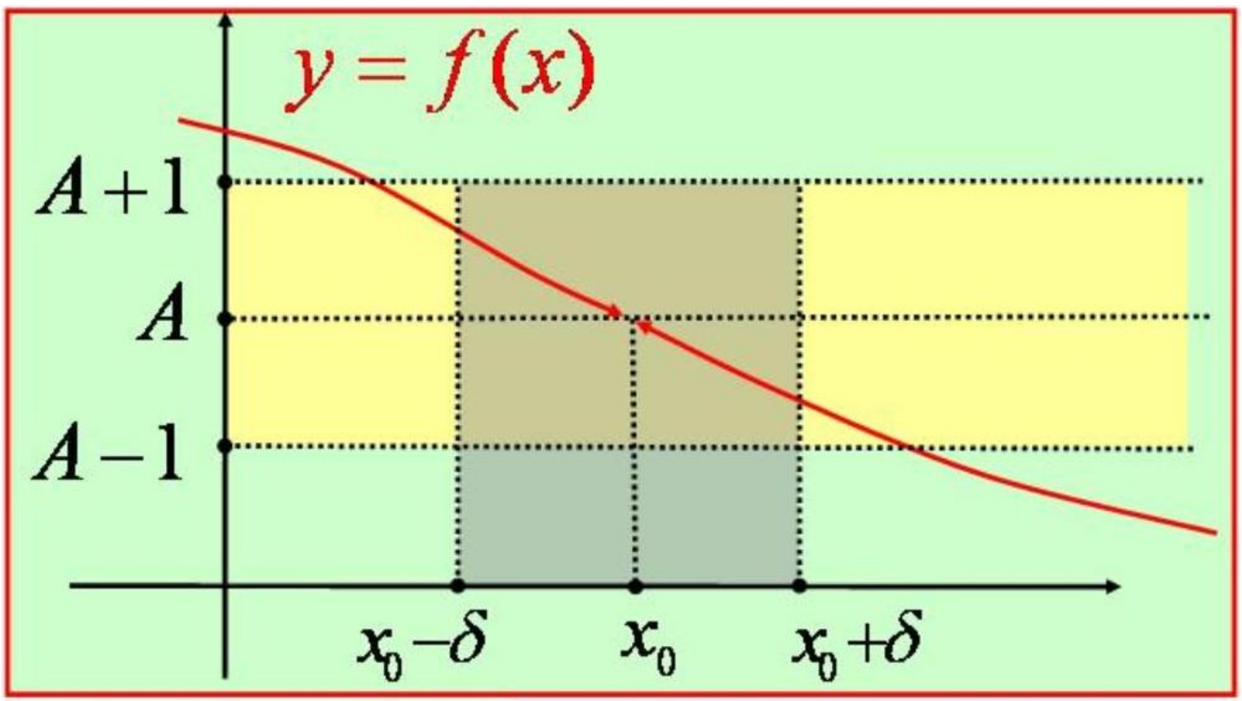
性质1： 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则它是唯一的．



二、局部有界性

性质2： 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则 $\exists \delta > 0$ 及 $M > 0$，使得

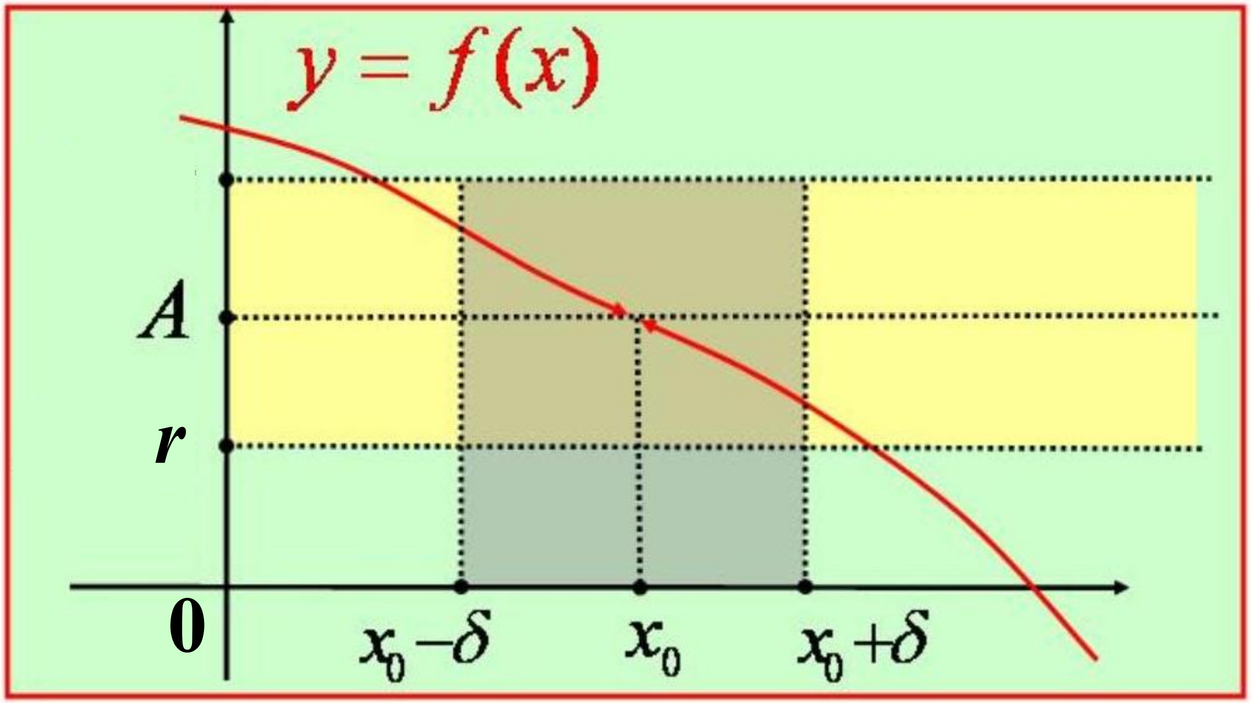
$\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$，有 $|f(x)| \le M$.



三、局部保号性

性质3：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 且 $A>0$，则 $\forall r\in(0,A)$，

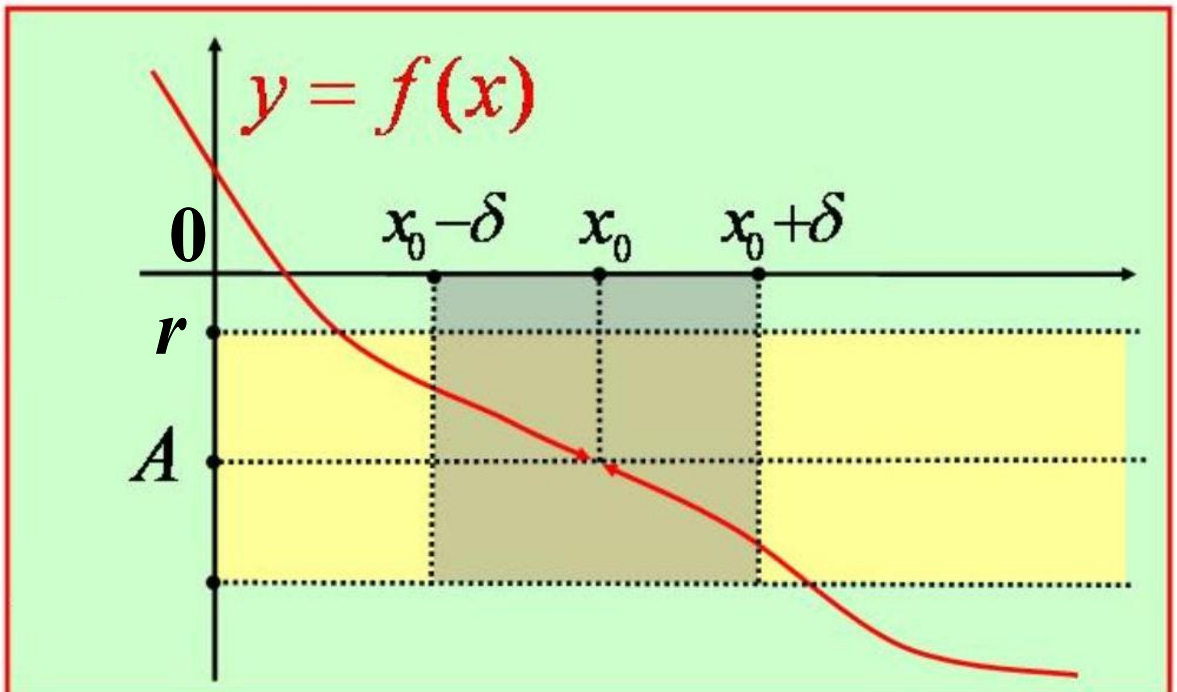
$\exists\delta>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)>r>0$.



三、局部保号性

性质3： 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 且 $A<0$，则 $\forall r\in(A,0)$，

$\exists\delta>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)<r<0$.



四、保不等式性

性质4： 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且 $\exists \mathring{U}(x_0)$,

当 $x\in \mathring{U}(x_0)$, 有 $f(x)\geq g(x)$，则

$$\mathrm{A}\geq B.$$

推论： 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且 $\exists \mathring{U}(x_0)$, 当 $x\in \mathring{U}(x_0)$ 时,

$f(x)\geq 0$，则 $A\geq 0$.

五、迫敛性

性质5: 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$，且当

$x \in \mathring{U}(x_0)$时，有

$$f(x) \le h(x) \le g(x),$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$.

六、四则运算

性质6：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,则

⑴ $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$.

⑵ $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$.

⑶ 若 $B\neq 0$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

例1、求 $\lim\limits_{x \to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$.

例2、求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\arctan x}{x}$.

例3、求 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^3 - 3x + 7}{3x^3 + 2x^2 + 5}$.

一般地：当$a_m b_n \neq 0, m$ 和 n 为非负整数时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0} = \begin{cases} \dfrac{a_m}{b_m}, & \text{当} n = m \\ 0, & \text{当} n > m \\ \infty, & \text{当} n < m \end{cases}$$

例4、求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x+\cdots+x^n-n-1}{x-1}$.

作　　业

习题3-2： 1(3)(5)(6)、2(1)、8(3)