第十八章　隐函数定理及其应用

§ 18.1　隐函数

1. 隐函数的概念
2. 隐函数定理
3. 隐函数求导举例

一、隐函数的概念

什么是隐函数?

$$\left.\begin{aligned} &y = 1 - \sin x \\ &y = \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}\right\}$$ 显函数（Explicit funtions）

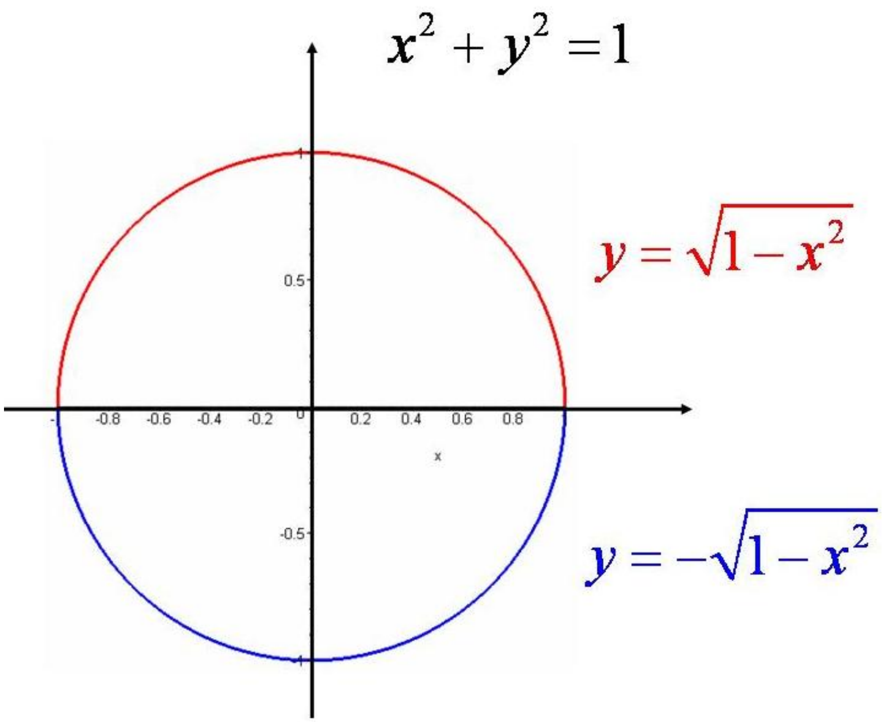
两个函数分别满足方程:

$$\left.\begin{aligned} &\sin x + y - 1 = 0 \\ &x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}\right\} F(x, y) = 0$$

- 圆：$x^2+y^2=1$

$y>0$时，$y=\sqrt{1-x^2}$.

$y<0$时，$y=-\sqrt{1-x^2}$.



- 开普勒方程: $y - x - \varepsilon \sin y = 0\ (0 < \varepsilon < 1)$.

(1) 能确定函数 $y = f(x)$ 吗?

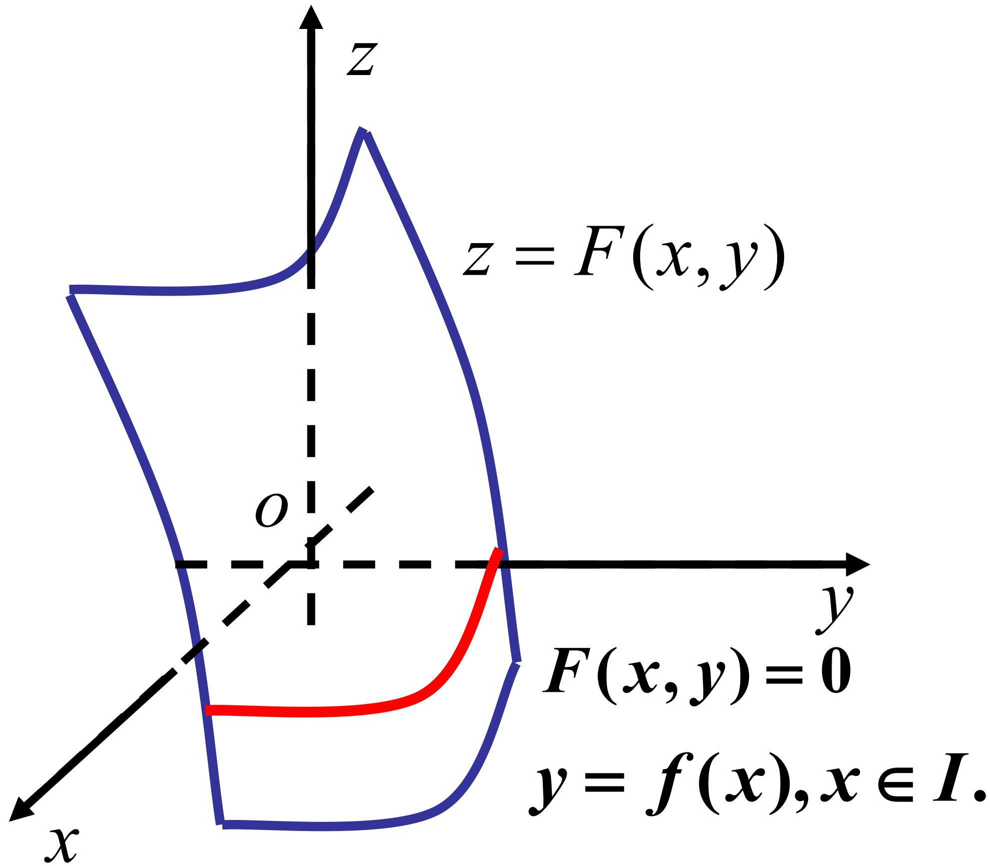
(2) 如何用 $y = f(x)$ 来表示?

定义： 设 $F(x,y)$ 定义在 $D\subset R^2$ 上，对于方程

$$F(x,y)=0,$$

若存在 R 上的集合 I 与 J，使得对 $\forall x\in I$，存在唯一确定的 $y\in J$ 满足方程 $F(x,y)=0$，则称方程 $F(x,y)=0$ 在 D 上确定了一个定义在 I 上，值域含于 J 的隐函数 $y=f(x)$.

隐函数的几何意义:



注1：隐函数一般需要同时指出自变量与因变量的取值范围．如方程 $x^2+y^2=1$ ：

$$y=f_1(x)\,(=\sqrt{1-x^2}\,),\quad x\in[-1,1],\ y\in[0,1];$$

$$y=f_2(x)\,(=-\sqrt{1-x^2}\,),\ x\in[-1,1],\ y\in[-1,0].$$

注2：并非所有的方程 $F(x,y)=0$ 都能确定隐函数，如 $x^2+y^2+1=0$.

注3:类似地可定义多元隐函数。如由方程

$F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数 $z=f(x,y)$.

注4: 隐函数一般不易化为显函数，我们关心的是

(i)隐函数的存在性与唯一性.

(ii)隐函数的解析性质(连续性、可微性).

二、隐函数定理

定理1：若函数 $F(x,y)$ 满足下列四个条件

(i) 在以 $P_0(x_0,y_0)$ 为内点的某区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上连续；

(ii) $F(x_0,y_0)=0$（初始条件）；

(iii) $F_y(x,y)$ 在 D 内连续；

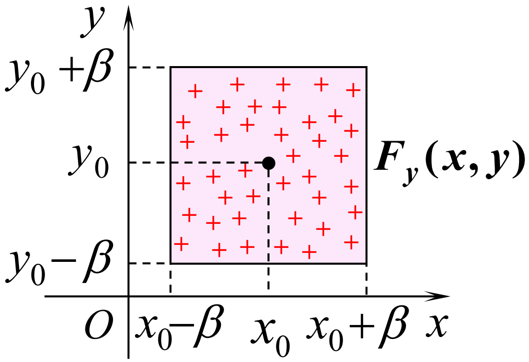
(iv) $F_y(x_0,y_0) \neq 0$.

则:

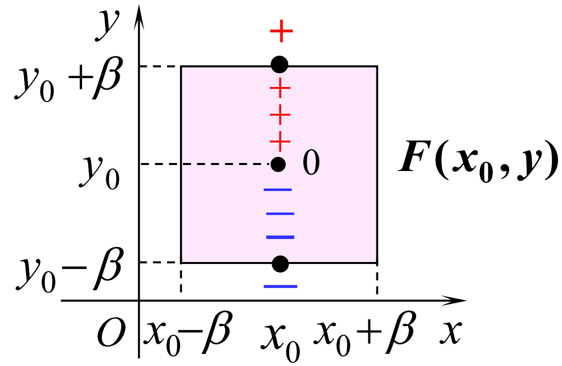
(1) 存在 $U(P_0) \subset D$, 使得 $F(x, y) = 0$ 在 $U(P_0)$ 上唯一确定了一个定义在 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 上的隐函数 $y = f(x)$, 使得当 $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 时, $(x, f(x)) \in U(P_0)$, 且 $F(x, f(x)) \equiv 0$, $y_0 = f(x_0)$.

(2) $f(x)$ 在 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 上连续.

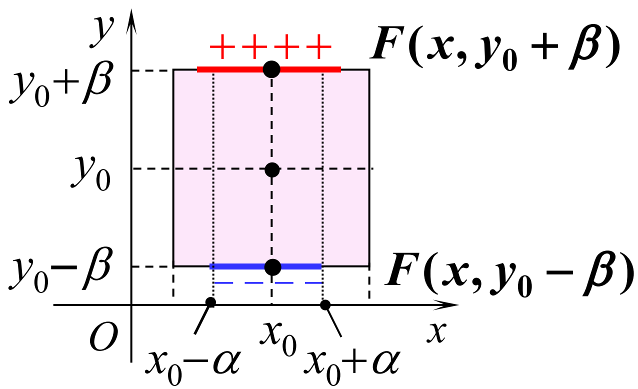
(1)



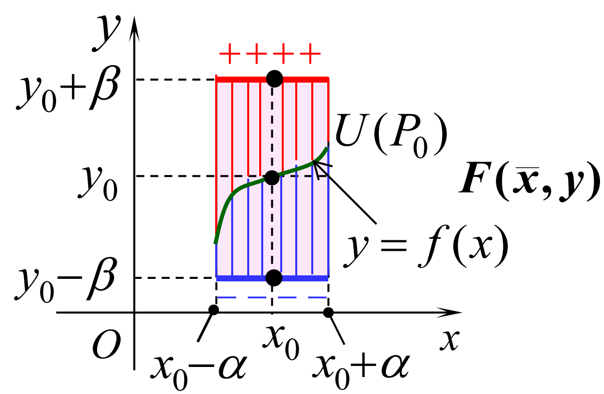
(a) 一点正,一片正



(b) 正、负上下分

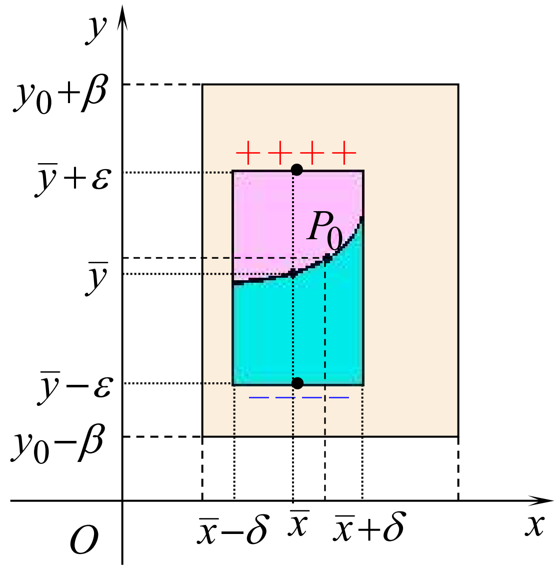


(c) 同号两边伸



(d) 利用介值性

(2)



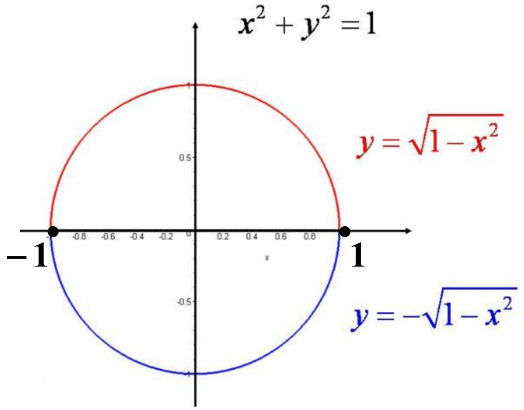
y
$y_0+\beta$
$\overline{y}+\varepsilon$
P_0
$\overline{y}$
$\overline{y}-\varepsilon$
$y_0-\beta$
O
$\overline{x}-\delta$
$\overline{x}$
$\overline{x}+\delta$
x

注1: 条件 (iv) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ 是充分非必要条件。

① $F(x,y) = y^3 - x^3 = 0$, $F_y(0,0) = 0$, 在点 $(0,0)$ 虽不满足条件 (iv)，但仍能确定唯一的隐函数 $y = x$.

② $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, F_y(1,0) = 0,$

在(1,0)的任一邻域内,不能确定唯一的隐函数 。



注2： 条件 (iii) + (iv) 可换为

"$F(x,y)$ 在某 $U(P_0)$ 关于 y 严格单调".

注3： 若条件 (iii) 、(iv) 改为

" $F_x(x,y)$ 连续, 且 $F_x(x_0,y_0)\neq 0$ "

则存在唯一的连续隐函数 $x=g(y)$.

定理2： 若函数 $F(x,y)$ 满足下列三个条件

(i) $F(x_0,y_0)=0$（初始条件）；

(ii) $F_x(x,y)$ 与 $F_y(x,y)$ 均在 D 内连续；

(iii) $F_y(x_0,y_0)\neq 0$.

则由 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 在

$(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 上有连续的导函数且

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

注1: 当方程 $F(x, y)=0$ 存在连续可微的隐函数

$y=f(x)$ 时, 可对方程两边关于 x 求导:

$$F_x(x, y)+F_y(x, y)\,y'=0,$$

则 $$y'=-\frac{F_x(x, y)}{F_x(x, y)}.$$

注2：当 $F(x,y)$ 存在二阶连续偏导数且 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$，

则所得的隐函数也二阶可导.

$$F_x(x,y)+F_y(x,y)\,y'=0,$$

$$F_{xx}+F_{xy}\,y'+(F_{yx}+F_{yy}\,y')y'+F_y\,y''=0.$$

$$y''=\frac{2F_xF_yF_{xy}-F_y{}^2F_{xx}-F_x{}^2F_{yy}}{F_y{}^3}.$$

据此可求得隐函数的极值。

注3： 若函数 $F(x,y,z)$满足下列三个条件

(i) $F(x_0,y_0,z_0)=0$ (初始条件)；

(ii) $F_x(x,y,z)$, $F_y(x,y,z)$, $F_z(x,y,z)$ 在 D内连续；

(iii) $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

则存在$U(P_0)\subset D$,在$U(P_0)$上由$F(x,y,z)=0$唯一确定了定义在(x_0,y_0)某邻域上连续可偏导的隐函数 $z=f(x,y)$,且

$$f_x(x,y)=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)},\quad f_y(x,y)=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}.$$

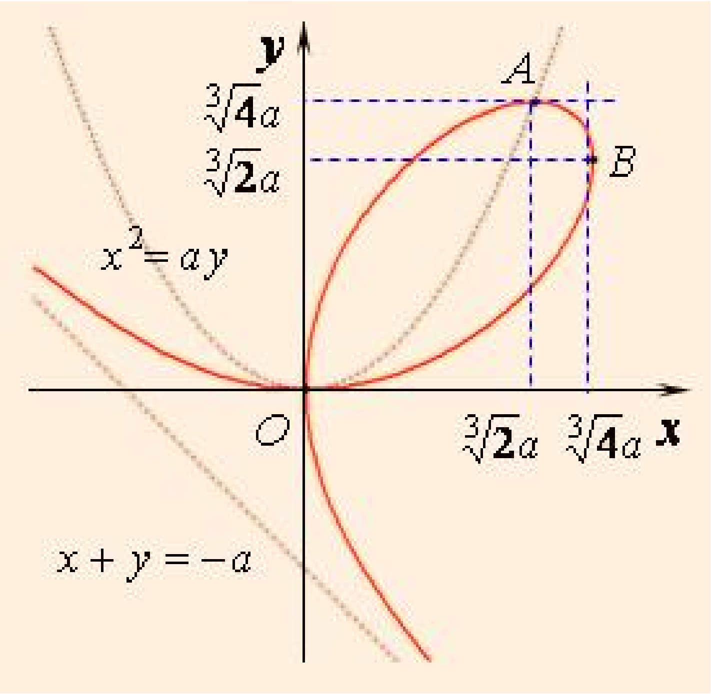
三、隐函数求导举例

例1、求开普勒方程

$$F(x,y)=y-x-\varepsilon\sin y=0\ (0<\varepsilon<1)$$

所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数.

例2、讨论笛卡儿叶形线 $x^3+y^3=3axy\ \ (a>0)$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的存在性, 并求其一阶和二阶导数及隐函数的极值.



例3、试求由方程 $xyz^3 + x^2 + y^3 - z = 0$ 所确定的隐函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(0,1,1)$ 处的全微分.

例4、（反函数的存在性与反函数的导数）

设 $y=f(x)$ 在某 $U(x_0)$ 上有连续的导函数 $f'(x)$ 且 $f'(x_0)\neq 0$, $f(x_0)=y_0$. 则存在 y_0 的某邻域 $U(y_0)$, 使得在 $U(y_0)$ 内有连续可微的隐函数 $x=g(y)$ 且 $g'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$.

例5、设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $F(x - z, y - z) = 0$ 所确定的隐函数, 其中 F 具有连续的二阶偏导数, 试证：$z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 0$.


作　　业

习题18-1：3(1)(5)(6)、4