6.4 函数的极值与最大（小）值

1 函数的极值

2 函数的最值

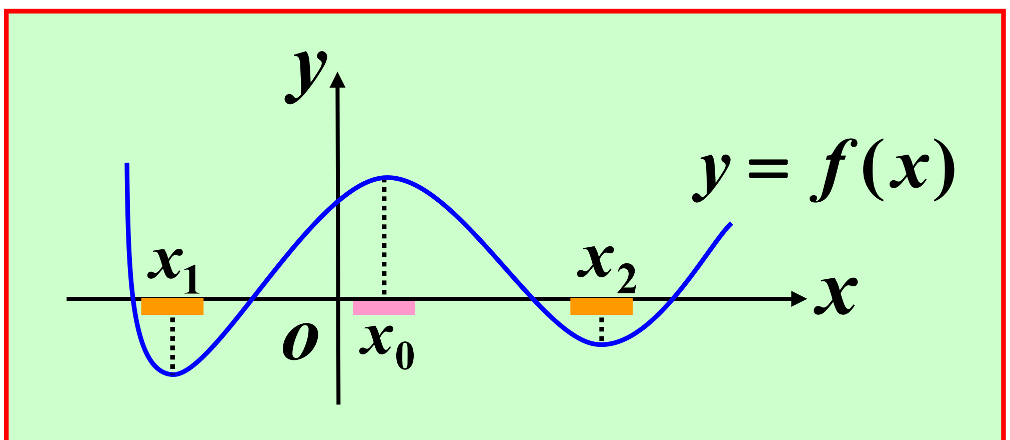
一、函数的极值

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 有定义，若 $\forall x \in U(x_0)$，有

$$f(x) \le f(x_0), \quad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点．(极小值点.)

※ 极大值点和极小值点统称为极值点.



(局部最值点)

极值的必要条件：

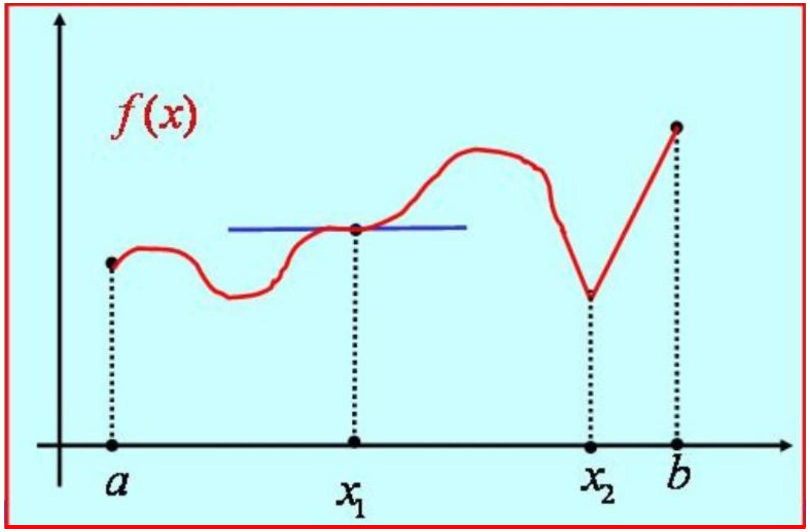
定理(费马)： 设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，若 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $f'(x_0)=0$.

即：可导的极值点必为稳定点。

注1： 稳定点不一定是极值点.（如点 x_1）

注2： 极值点不一定是稳定点.

（极值点不一定可导，如 x_2）



可疑极值点： 稳定点，

不可导点。

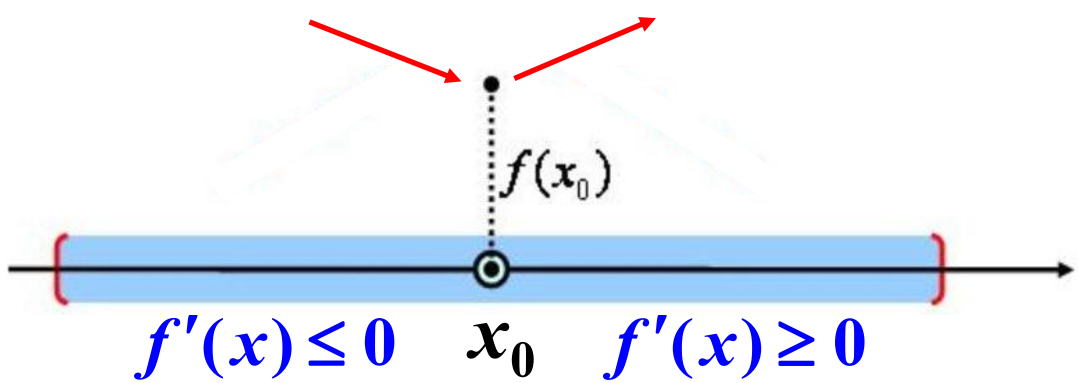
定理1（极值的第一充分条件）：

设 $f(x)$ 在点 x_0 连续，在 $U^o(x_0,\delta)$ 内可导，

(1) 若当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)\le 0$；

当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)\ge 0$，

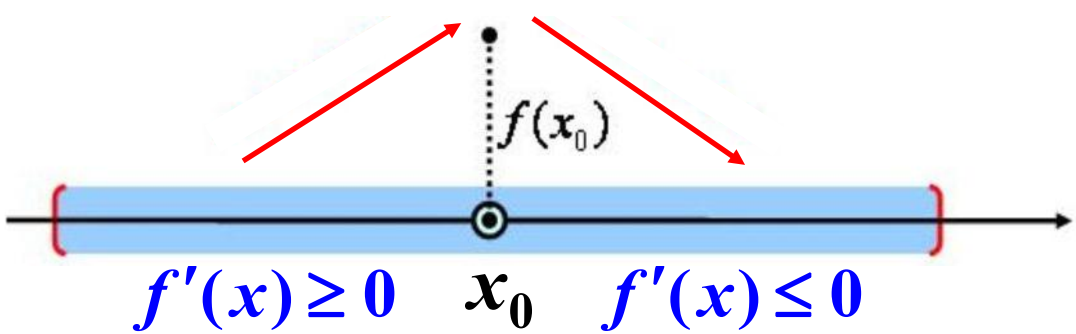
则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值。



(2) 若当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) \geq 0$;

当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) \leq 0$,

则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值 .



求极值一般步骤：

1、求 $f'(x)$，找出 $f(x)$ 的不可导点和稳定点（可疑极值点）$x_1, x_2, \cdots, x_n$.

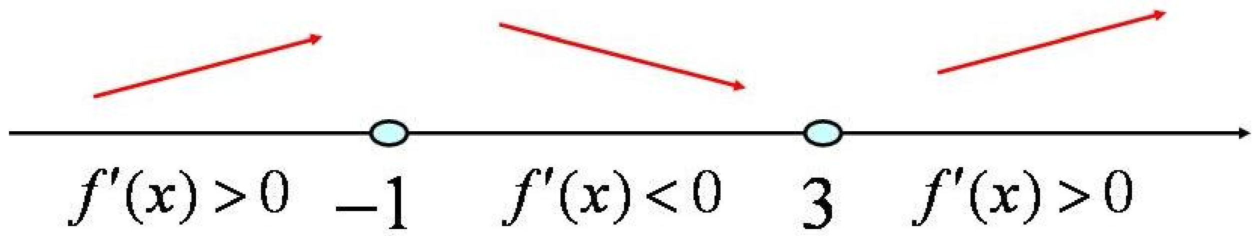
这些点将定义域分成若干个小区间.

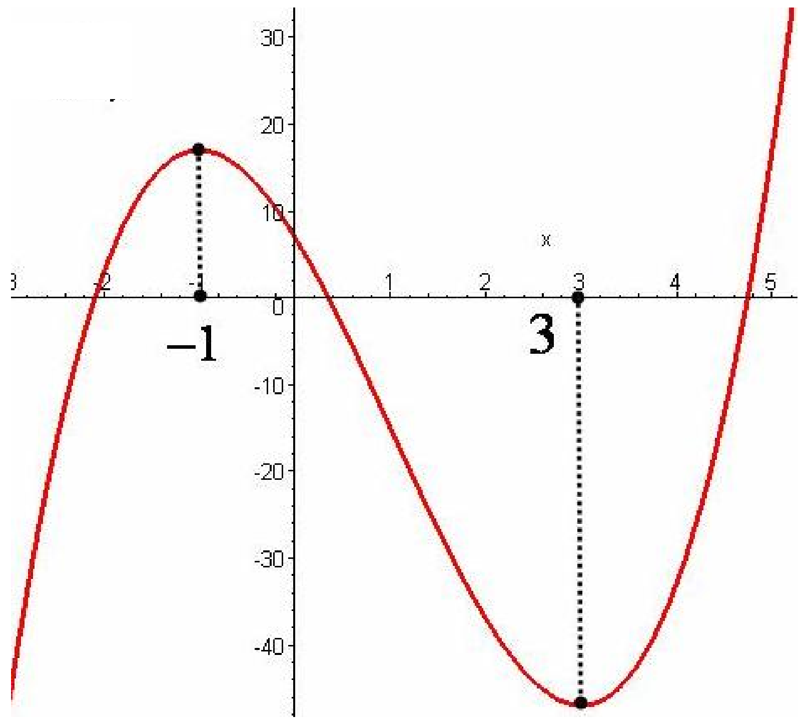
2、判断 $f'(x)$ 在各个小区间上的符号，以确定函数在各个小区间的单调性.

3、根据定理1判断可疑极值点是否为极值点，并求出极值。

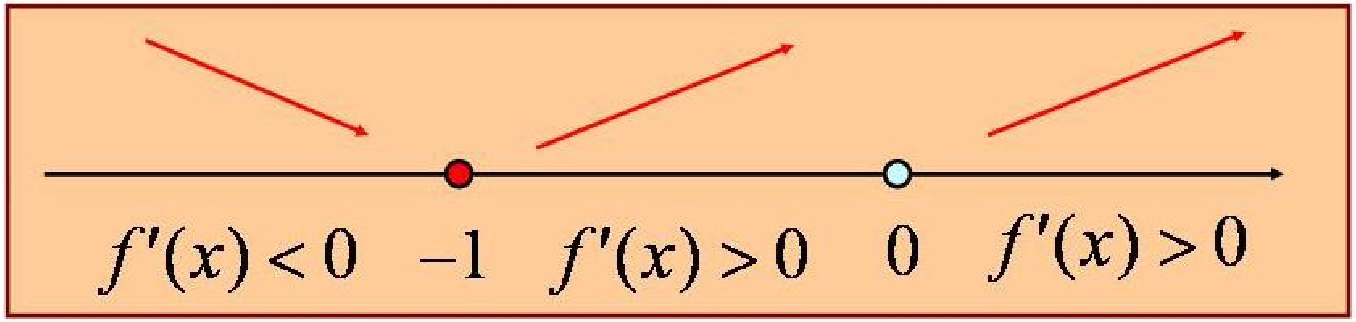
例1、求下列函数的极值。

$$(1)\ f(x)=2x^3-6x^2-18x+7$$





(2) $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$.



定理2（极值的第二充分条件）：

若 $f(x)$ 在点 x_0 二阶可导，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$.

(1) 若 $f''(x_0)>0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点.

(2) 若 $f''(x_0)<0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点.

例2、求 $f(x)=x^2+\dfrac{432}{x}$ 的极值点与极值.

注：若 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$，则 x_0 可能为极大值点，可能为极小值点，也可能不是极值点.

如：$f_1(x)=-x^4$，$f_2(x)=x^4$，$f_3(x)=x^3$，

$x_0=0$.

定理3（极值的第三充分条件）：

设 f 在点 x_0 处 n 阶可导，若

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

(i) 当 n 为偶数时，则 x_0 是 $f(x)$ 的极值点．且

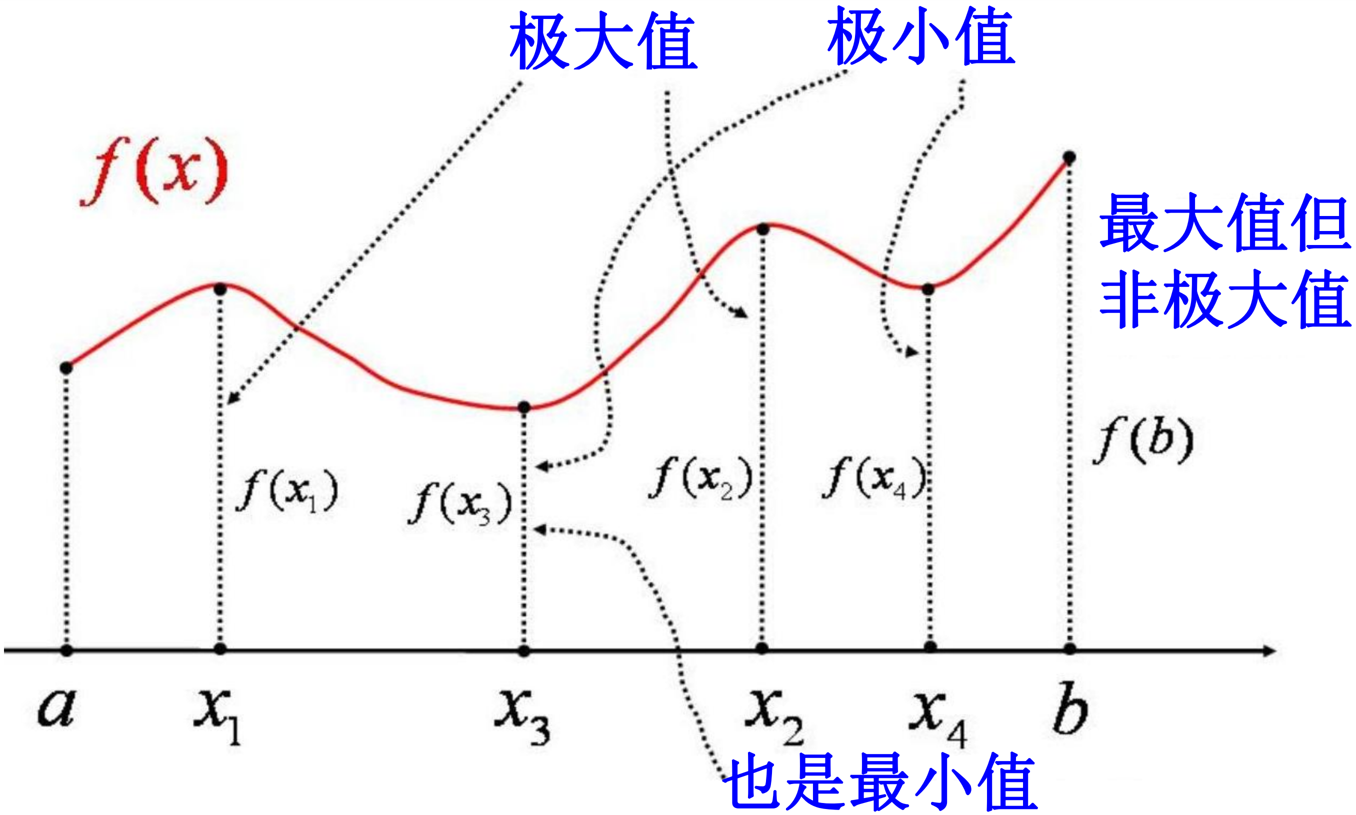
$f^{(n)}(x_0)>0$ 时，x_0 是 $f(x)$ 的极小值点；

$f^{(n)}(x_0)<0$ 时，x_0 是 $f(x)$ 的极大值点．

(ii) 当 n 为奇数时，则 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点．

练习：求函数 $f(x)=x^4(x-1)^3$ 的极值。

二、函数的最值



(1)最值可在区间内部取得（也是极值）；

(2)最值也可在区间端点取得（不是极值）。

闭区间上连续函数的最值

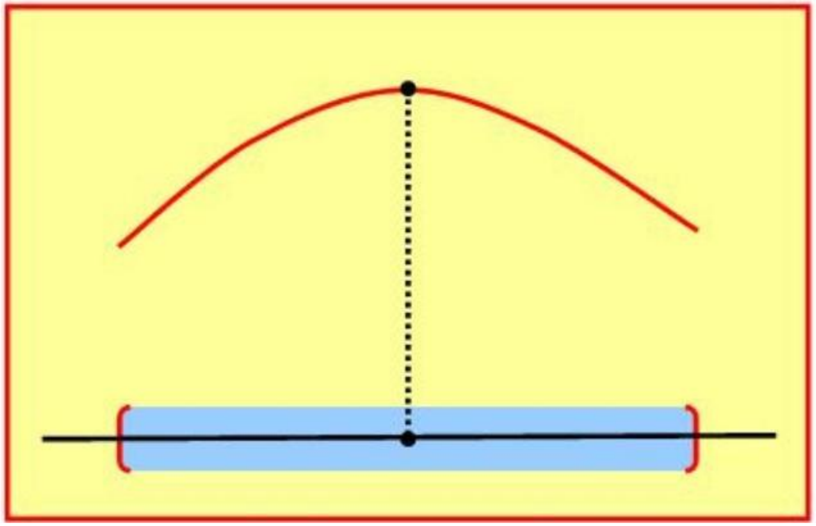
（1）求稳定点或不可导点；

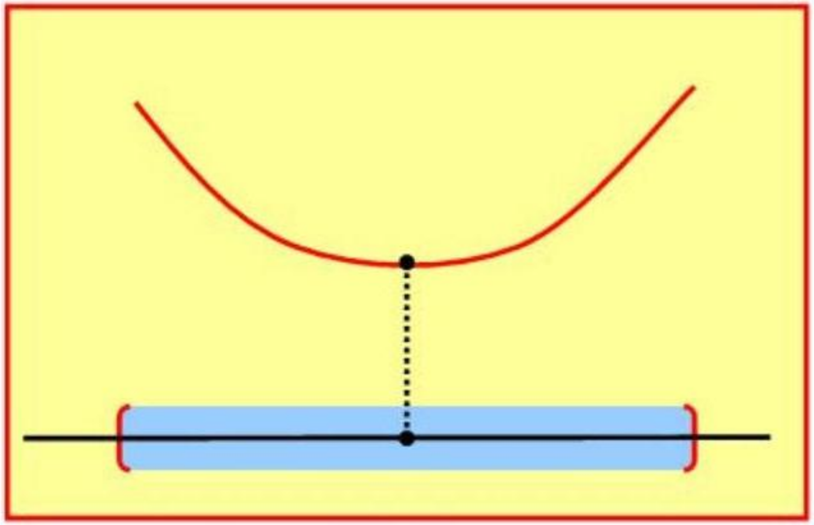
（2）求函数在稳定点、不可导点、端点处的值；

（3）其中最大值为最大值，最小值为最小值。

例3、求 $f(x)=|x-2|e^{x}$ 在 $[0,3]$ 上的最值 .

◆ 只有唯一极值点的情形（单峰或单谷）

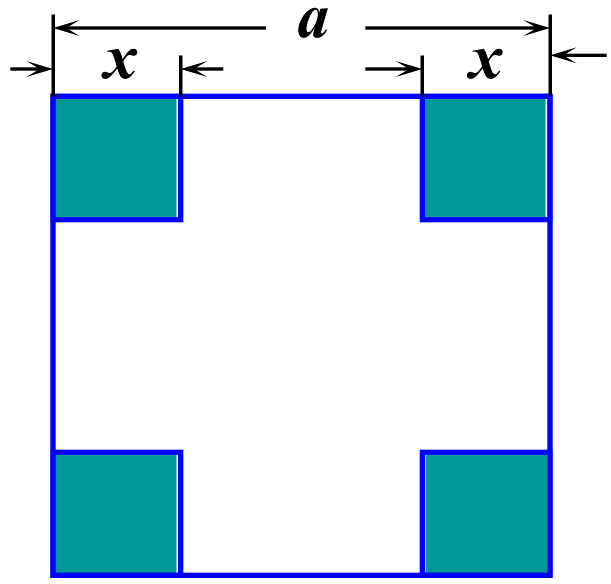




唯一极大值即最大值；唯一极小值即最小值。

例5、求函数 $f(x)=x^2e^{-x^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 的最大值。

例6、设正方形的边长为 a, 减去四个角中同样大小的正方形后制成一个无盖的盒子, 剪去小正方形的边长为何值时, 盒子的容积最大.



练习1：讨论方程 $x\ln x+a=0$ 根的情况.

练习2：证明不等式 $2^{x}\geq 1+x^{2}$，$0\leq x\leq 1$.

作　　业

习题6-4：1(2)、4(1)、8