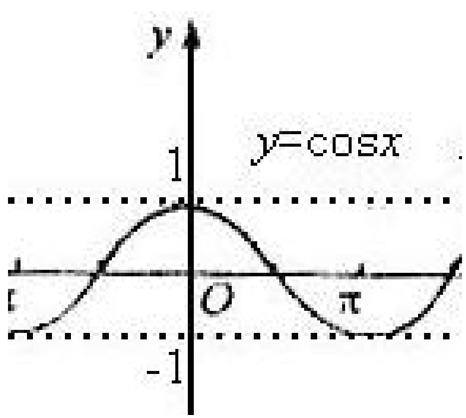
3.5　无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量
2. 无穷小量阶的比较
3. 无穷大量
4. 曲线的渐近线

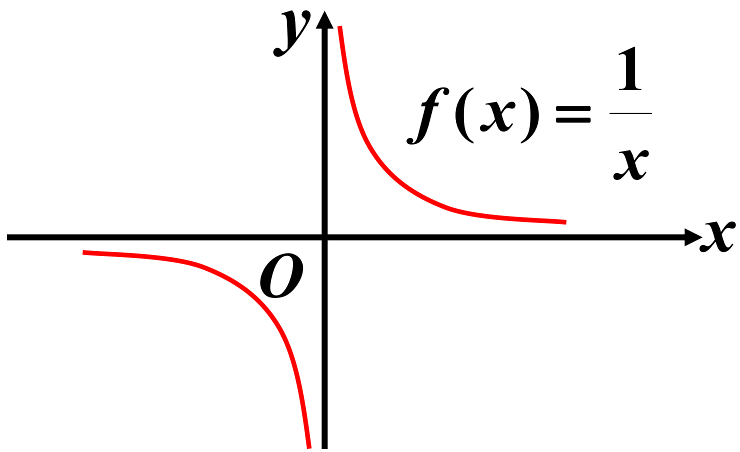
一、无穷小量

定义1：若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量.

- $\cos x$ 是 $x \to \dfrac{\pi}{2}$ 时的无穷小量；



- $\frac{1}{x}$是 $x\to\infty$时的无穷小量 .



定义2：若函数 $f(x)$在某$U^{0}(x_0)$有界，则称 $f(x)$为 $x \to x_0$时的有界量.

- $\sin\frac{1}{x}$是 $x \to 0$时的有界量.
- $\frac{1}{x}$不是 $x \to 0$时的有界量.

注：无穷小量是有界量。

性质1： 两个无穷小量的和、差、积是无穷小量 .

推论1： 有限个无穷小量的和、差、积是无穷小量 .

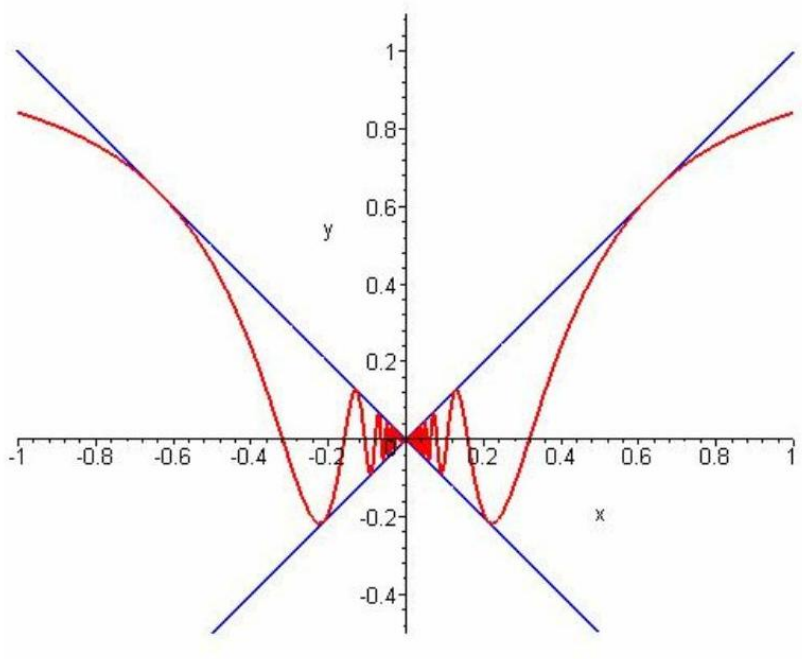
注： 无限个无穷小量之和不一定是无穷小量。

如： $$\lim_{n\to\infty}(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n\text{个}}).$$

性质2： 有界量与无穷小量之积是无穷小量。

例1、求下列函数的极限 .

$$(1)\ \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x};\qquad (2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}.$$



命题1：（无穷小与函数极限的关系）

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) - A \text{是 } x \to x_0 \text{ 时的无穷小量}.$$

二、无穷小量阶的比较

问题：两个无穷小量的商还是无穷小量吗？

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}=0\ ;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2};\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\infty.$$

定义3: 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $x \to x_0$ 两个非零无穷小.

(1) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, 称 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的高阶无穷小量, 记作

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to x_0).$$

- 特别地, 记 $f(x) = o(1) \quad (x \to x_0)$.

注: $o(g(x)) = \{f(x) \mid \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0\} \quad (x \to x_0)$.

如： $1-\cos x = o(x) \quad (x \to 0);$

$$\sin x = o(1) \quad (x \to 0);$$

$n > m$ 时， $x^n = o(x^m) \ (x \to 0)$.

定义3： 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $x \to x_0$ 两个非零无穷小 .

(2) 若存在 $K, L > 0$, 使得在某 $U^o(x_0)$ 上

$$K \le \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \le L,$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的同阶无穷小量.

- x 与 $x(2+\sin\frac{1}{x})$ 是 $x \to 0$ 的同阶无穷小量 .

特别地，若 $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的同阶无穷小量．

- $1 - \cos x$ 与 x^2 是 $x \to 0$ 时的同阶无穷小量．

练习: 当 $x \to 0$ 时, $f(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小量, 求 k 的值.

(1) $f(x) = 1 - \cos x$, $k =$ ______ .

(2) $f(x) = x^3 + x^5$, $k =$ ______ .

(3) $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$, $k =$ ______ .

定义3： 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $x \to x_0$ 两个非零无穷小．

(3) 若存在 $L > 0$，使得在某 $U^o(x_0)$ 上

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq L,$$

则记 $f(x) = O(g(x))\ (x \to x_0)$．

- 特别地，若 $f(x)$ 在某 $U^o(x_0)$ 内有界，则 $f(x) = O(1)\ \ (x \to x_0)$．

注：若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的同阶无穷小量，

则 $$f(x) = O(g(x))\,(x \to x_0).$$

反之不真。

如：$x\sin\frac{1}{x} = O(x)\ (x \to 0)$，

但 $x\sin\frac{1}{x}$ 与 x 不是 $x \to 0$ 时的同阶无穷小量。

定义3： 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $x \to x_0$ 两个非零无穷小.

(4) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, 称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的等价无穷小量, 记作

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0).$$

如：$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \, (x \to 0).$

定理1： 设函数 f,g,h 在某$U^o(x_0)$内有定义，且

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to x_0),$$

(1) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)h(x) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)h(x) = A$.

(2) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x)}{f(x)} = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x)}{g(x)} = A$.

结论： 若一个函数的分子(母)为若干个因子的乘积，则可对其中任意一个或几个无穷小因子作等价无穷小代换，而不会改变原式的极限.

例2、求 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 2x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}$.

例3、已知 $x \to 1$ 时，x^2+ax+b 与 $x-1$ 是等价无穷小，求 a, b.

三、无穷大量

定义4：设函数 f 在 $U^{\circ}(x_0)$ 有定义，若对于任给 $G>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in U^{\circ}(x_0;\delta)\subset U^{\circ}(x_0)$ 时，有

$$|f(x)|>G,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大量，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

类似地可以定义如下的无穷大量:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \text{ 或 } \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty.$$

例4、证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

例5、证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

例6、设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b\neq 0$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$， 则

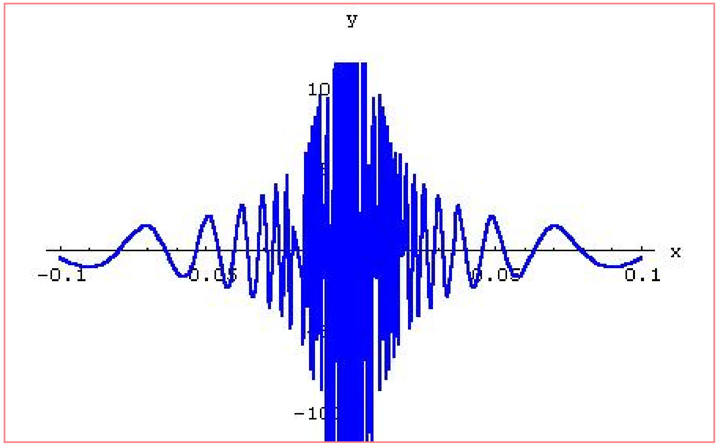
$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\infty.$$

注：$b=0$ 时结论不一定成立.

如 $f(x)=x$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$， $x\to 0$.

注：若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则 $f(x)$ 在 x_0 的任何一个邻域内无界。

反之不真。



如：$f(x) = \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x}$.

$f(x)$为$U^o(0)$ 上的无界量，

但 $f(x)$不是 $x \to 0$ 的无穷大量。

定理2: (i) 若 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的非零无穷小量，

则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷大量 .

(ii) 若 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷大量，

则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量 .

注：无穷大量也可以定义阶的比较.

思考： 任何两个无穷小量都可以进行阶的比较吗？

不一定！

如：$f(x) = x\sin\frac{1}{x},\ g(x) = x^2\ (x \to 0).$

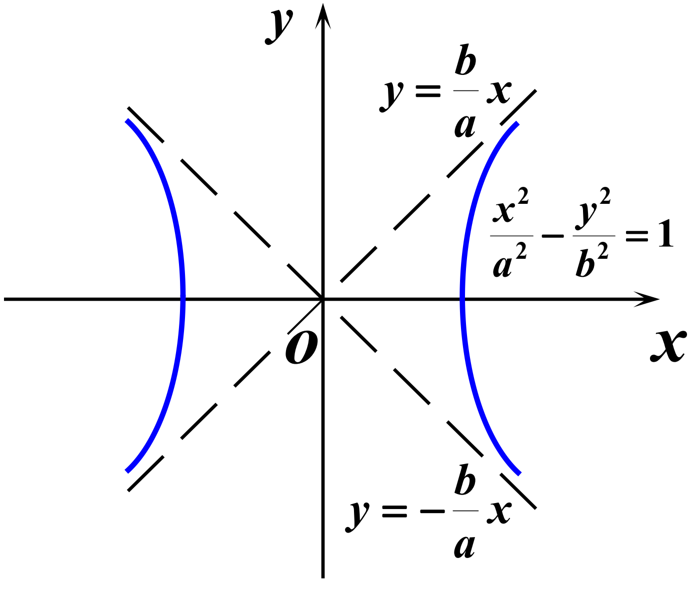
四、曲线的渐近线

双曲线

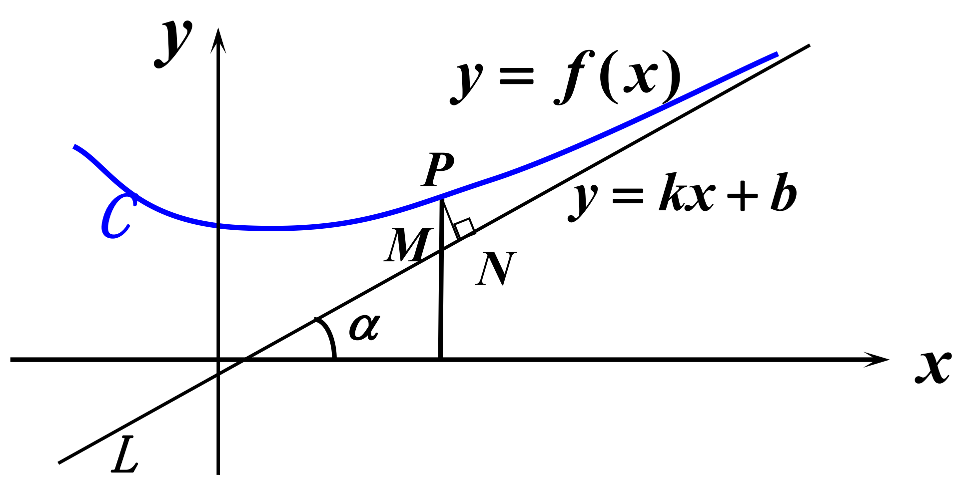
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

渐近线方程为：

$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$



定义5、 设 L 是一条直线，若曲线 C 上的动点 P 沿曲线无限远离原点时，点 P 与 L 的距离趋于0，称直线 L 为曲线 C 的一条渐近线。



设斜渐近线 L 的方程为 $y = kx + b$，则沿x 轴正向的斜渐近线的斜率和截距分别为

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx].$$

沿x 轴负向的斜渐近线的斜率和截距分别为

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx].$$

注：当 $k=0$ 时，该渐近线称为水平渐近线.

曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线的充要条件是

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b\,(\neq\infty)$$

(或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$， 或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$).

其水平渐近线为：$y=b$.

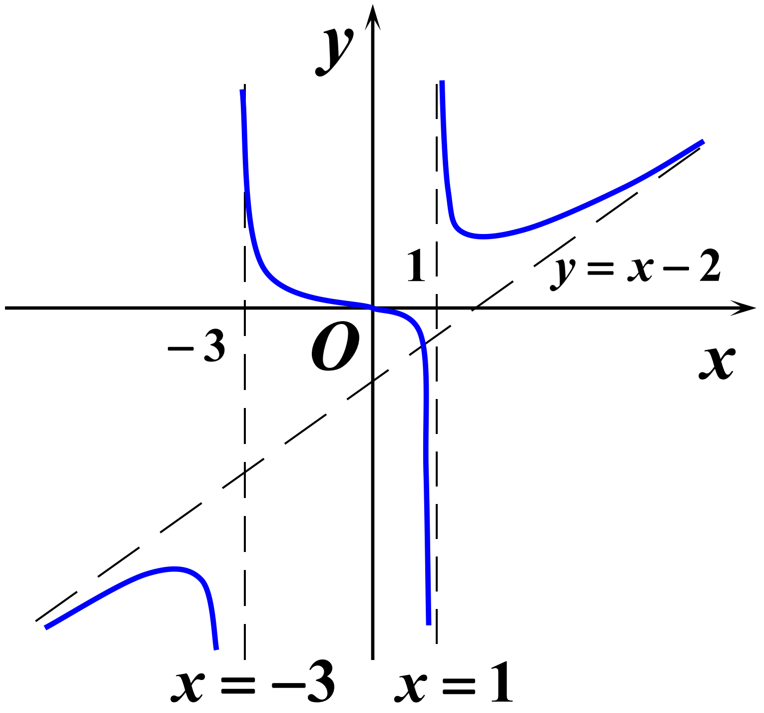
注： 若函数 $f(x)$满足

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

$$\left(\text{或} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty, \text{或} \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty\right),$$

则称 $x = x_0$ 是曲线 $y = f(x)$ 的垂直渐近线.

例7、求曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的渐近线.



作　业

习题3-5： 2(2)、4(3)

5(1)(3)