$$\text{定积分}\begin{cases}\text{积分区间} \longrightarrow \text{有限} \\ \text{被积函数} \longrightarrow \text{有界}\end{cases}$$

$$\text{反常积分}\begin{cases}\text{积分区间} \longrightarrow \text{无限}\quad\text{（无穷积分）} \\ \text{被积函数} \longrightarrow \text{无界}\quad\text{（瑕积分）}\end{cases}$$

第十一章　反常积分

无穷积分的性质与收敛判别

1

2

3

瑕积分的性质与收敛判别

反常积分概念

11.1　反常积分概念

1 无穷限的反常积分

2 无界函数的反常积分

一、无穷限的反常积分

引例1（第二宇宙速度）在地球表面垂直发射火箭，要使火箭克服地球引力无限远离地球，试问初速度 v_0 至少要多大？

(其中重力加速度 $g = 9.81 m/s^2$，地球半径 $R = 6.371 \times 10^6 m$.)

定义1、设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的任何闭子区间 $[a,b]$ 上可积，记

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 为 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分。

定义2、设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 的任何闭子区间 $[a,b]$ 上可积，若存在极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = J$$

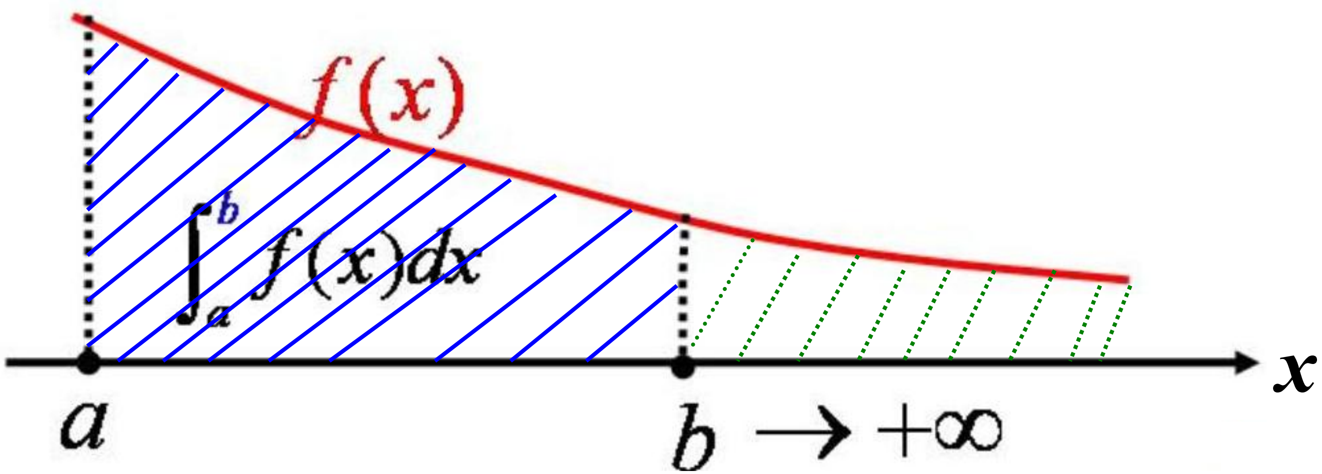
则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，

并称极限 J 为反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的值，记作

$$J=\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

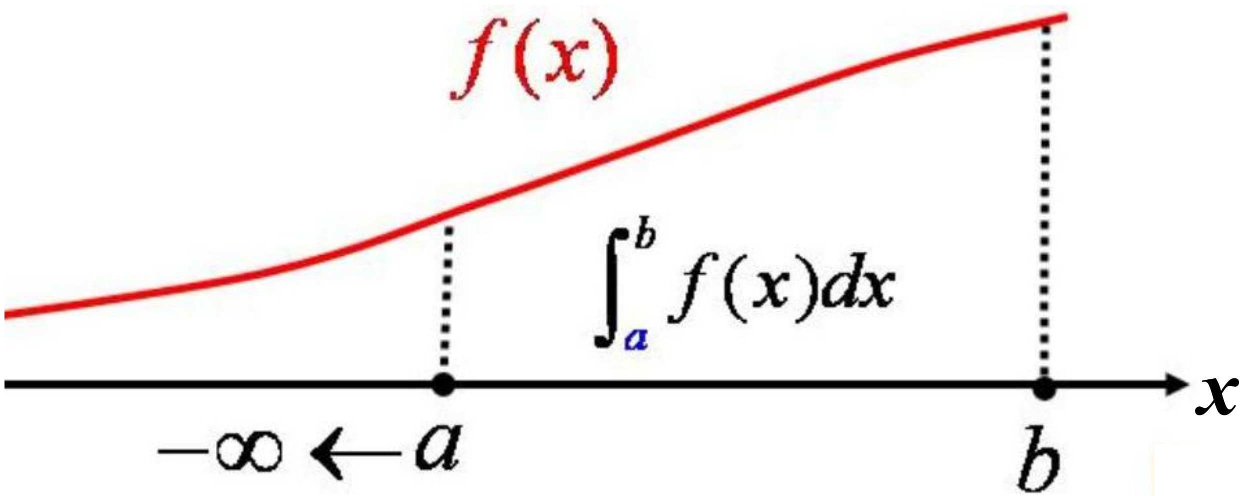
否则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

几何意义：$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$



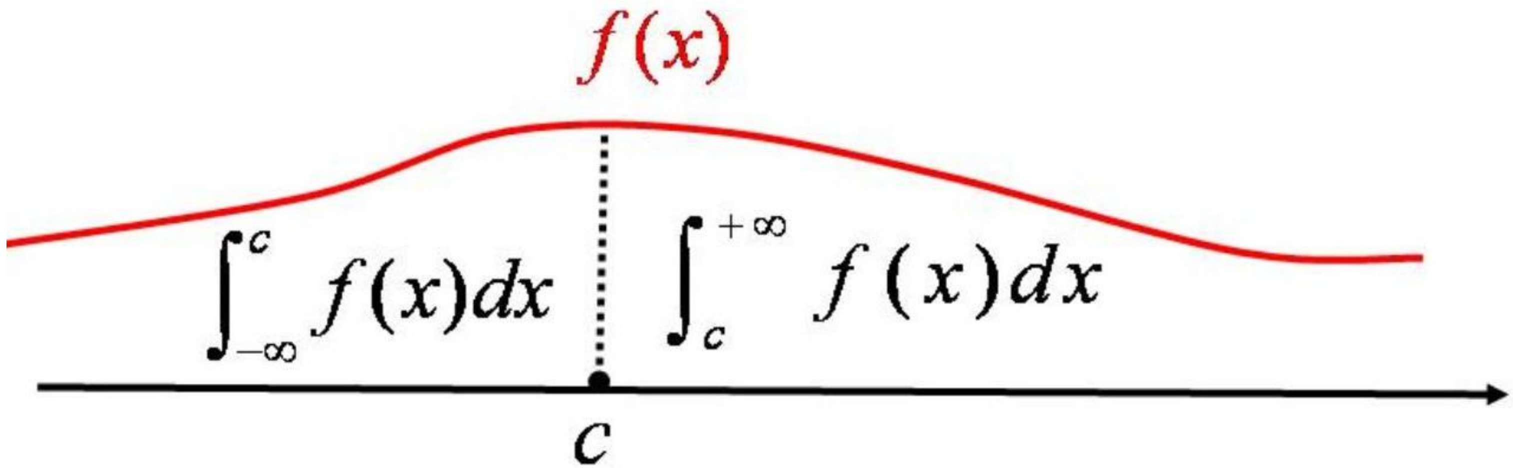
类似地，我们定义：

$$(1)\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$



(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$

收敛 $\Leftarrow$ 收敛 $+$ 收敛



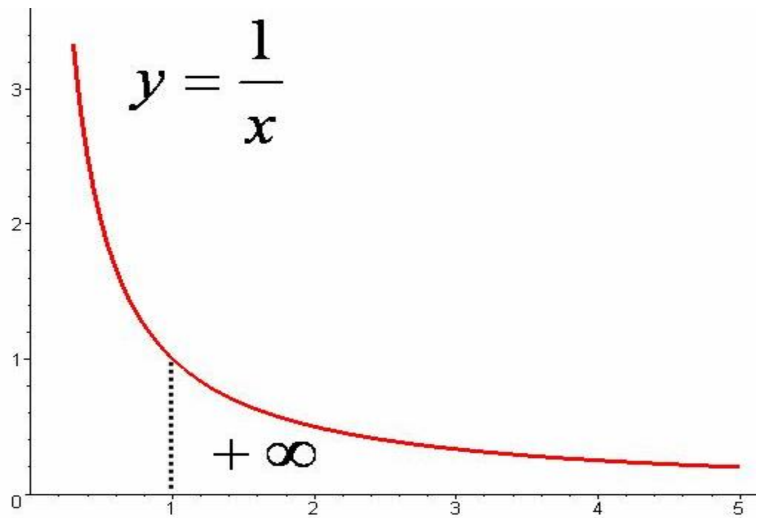
注：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \neq \lim\limits_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx.$

例1、讨论反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 的敛散性．

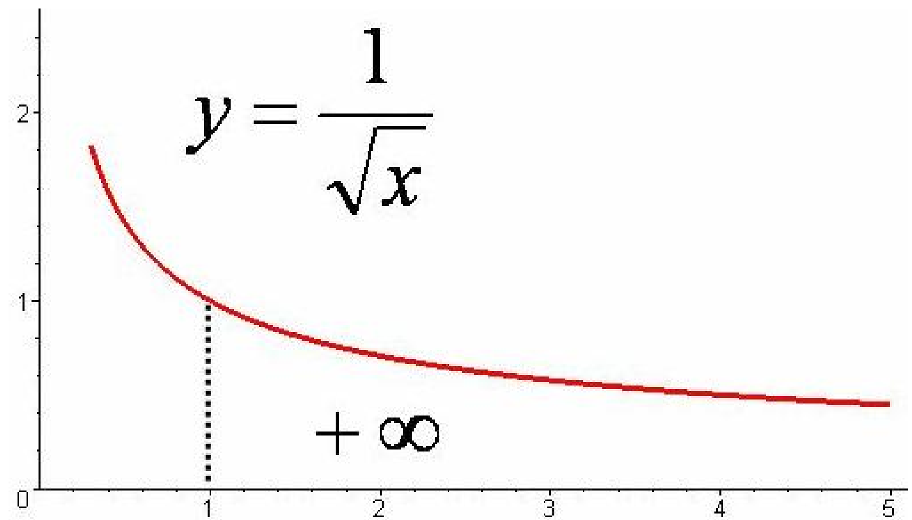
$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1} & p>1\\ +\infty & p\le 1\end{cases}$$

注：无穷限积分的**N-L**公式

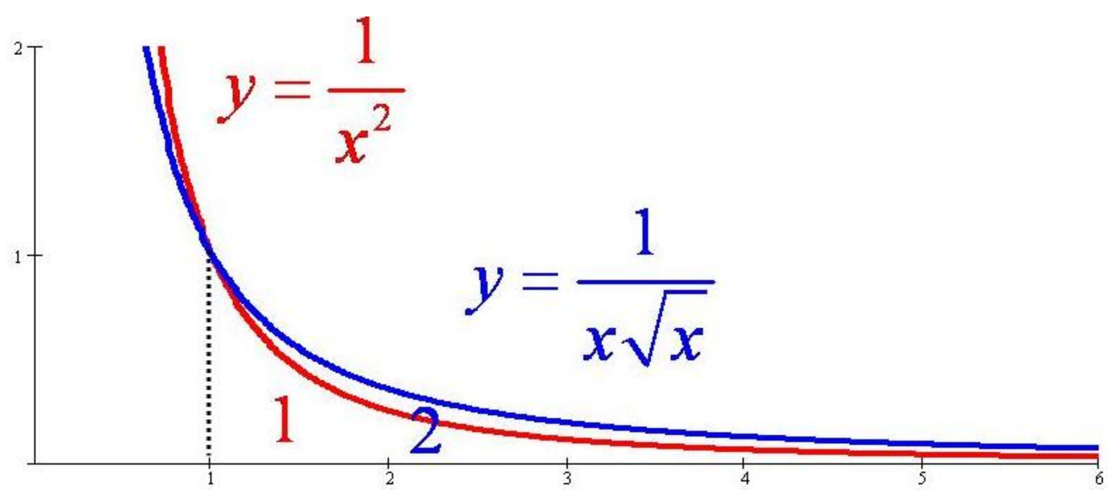
$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=F(x)\Big|_a^{+\infty}$$



$y = \frac{1}{x}$
$+\infty$
0
1
2
3
4
5



$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$
$+\infty$
0
1
2
3
4
5



$y = \frac{1}{x^2}$
$y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$
1
2
1
2
3
4
5
6

例2、讨论下列反常积分的敛散性。

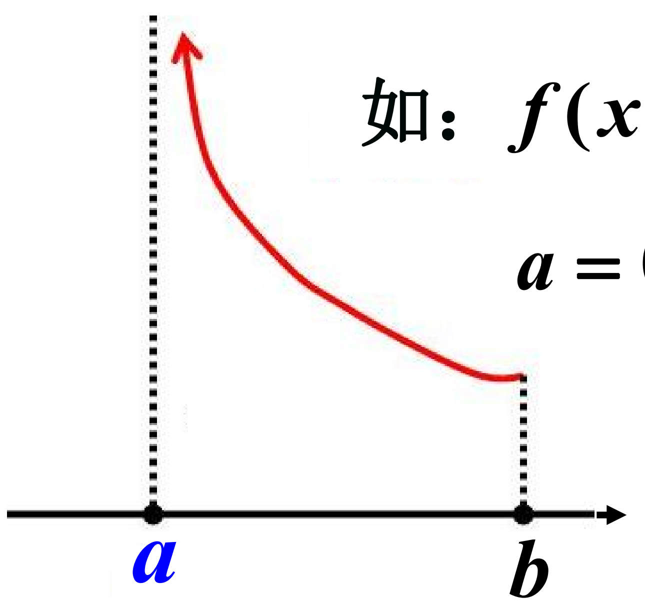
$$(1)\ \int_{e}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{p}}dx;$$

$$(2)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^{2}+1}dx;$$

$$(3)\ \int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{2}(1+x)}dx.$$

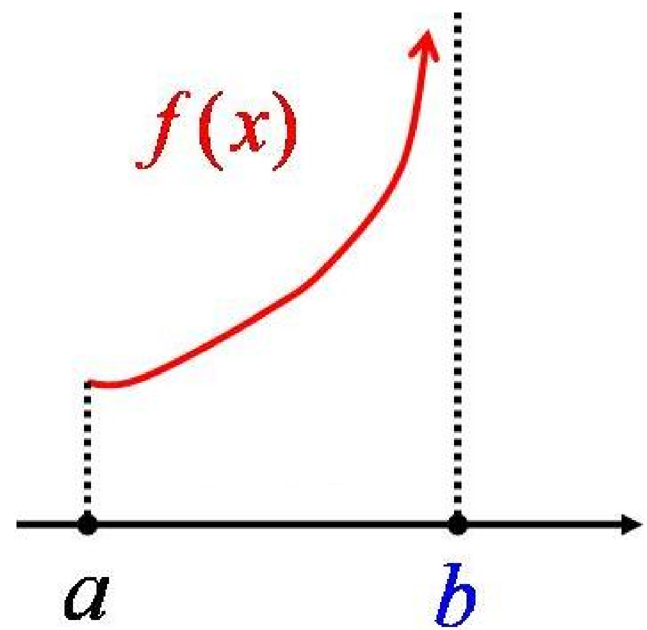
二、无界函数的反常积分

- 若 $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=\infty$，则称点 a 为函数 $f(x)$ 的瑕点.
- 若 $\lim\limits_{x\to b^{-}} f(x)=\infty$，则称点 b 为函数 $f(x)$ 的瑕点.



如：$f(x)=\dfrac{1}{x}$，

$a=0.$



定义3、 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 的任一闭子区间 $[a+\varepsilon,b]$ 上可积，a 是 $f(x)$ 的瑕点．称 $\int_a^b f(x)dx$ 为无界函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的**反常积分**.

如：$\int_0^1 \frac{1}{x}dx$.

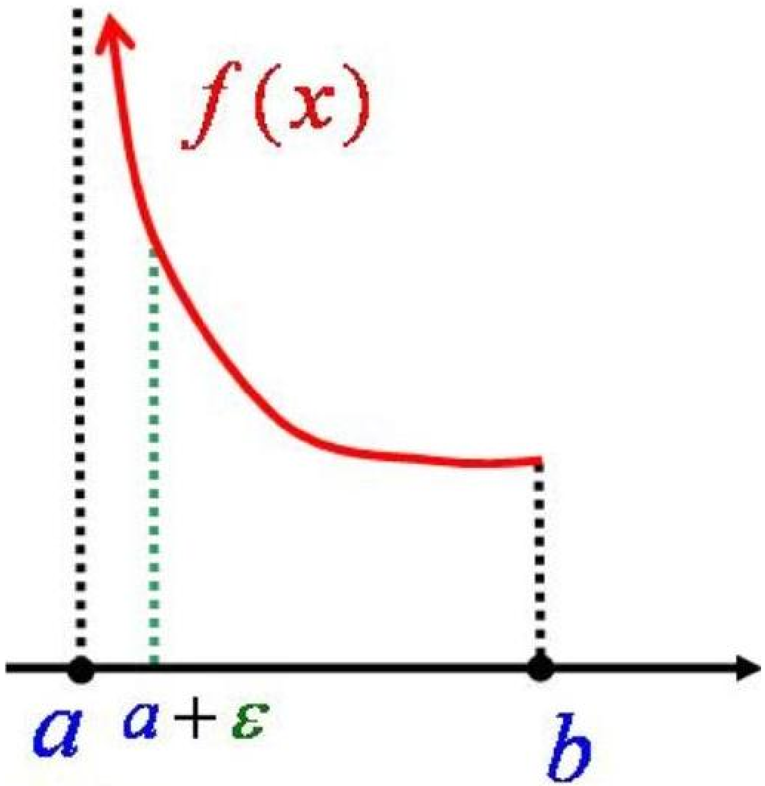
定义4、设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 的任一闭子区间 $[a+\varepsilon,b]$ 可积，a 是 $f(x)$ 的瑕点. 若存在极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = I,$$

则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛。

并称 I 为反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的值，记作

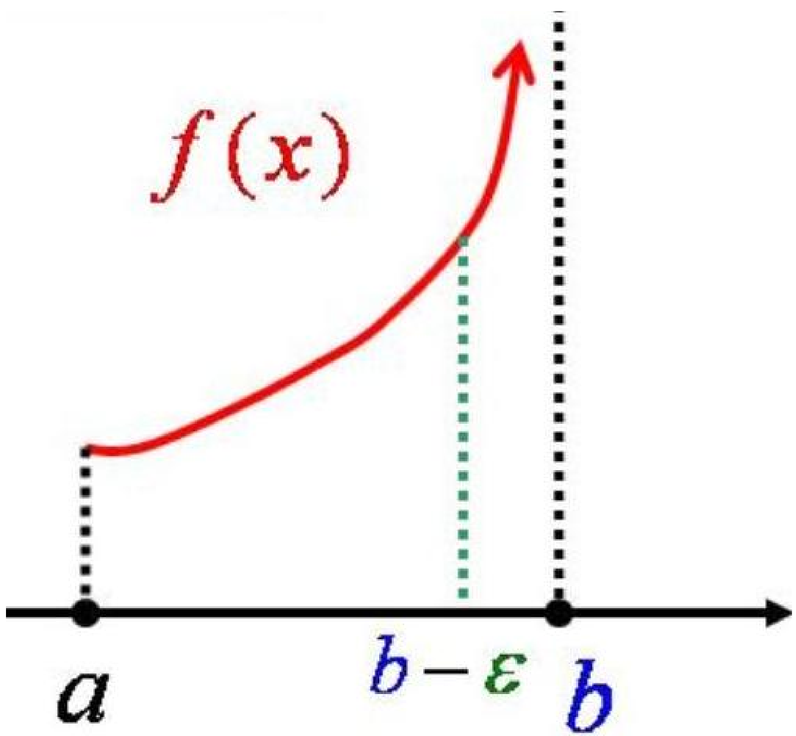
$$I=\int_a^b f(x)dx.$$



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

类似地，(1) 以 b 为瑕点的反常积分

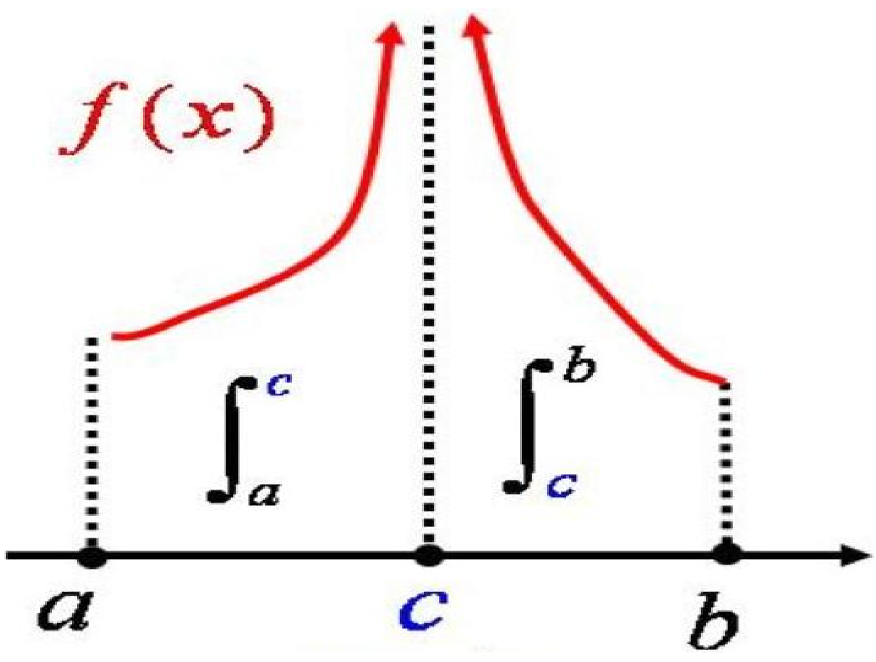
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx;$$



(2) 以 c 为瑕点的反常积分 (其中 $c \in (a,b)$)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

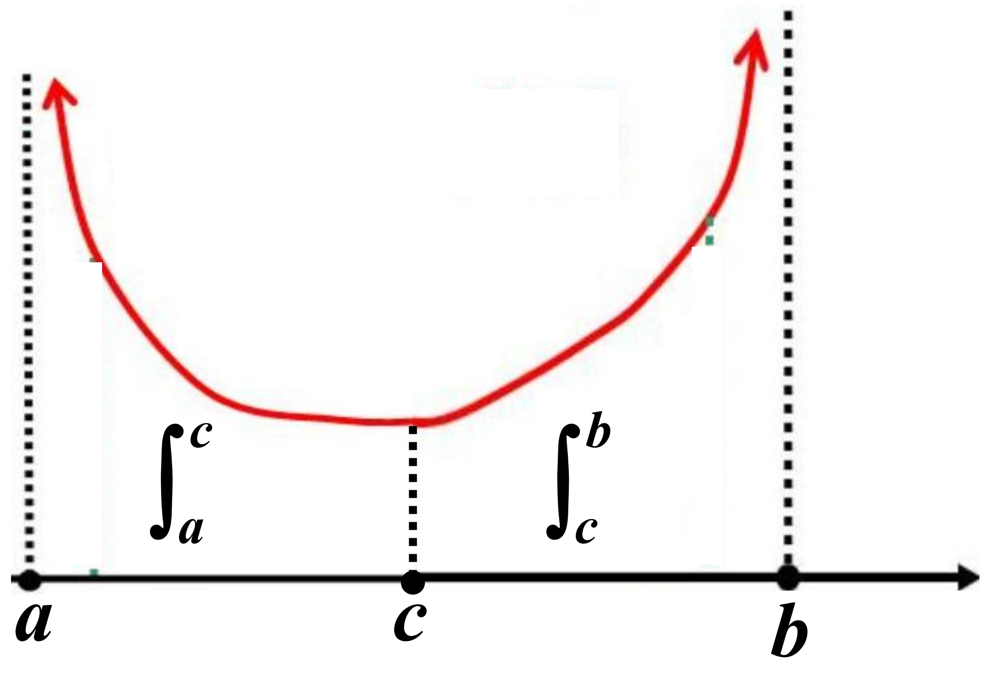
收敛 $\Leftarrow$ 收敛 $+$ 收敛



(3) 以 a,b 为瑕点的反常积分

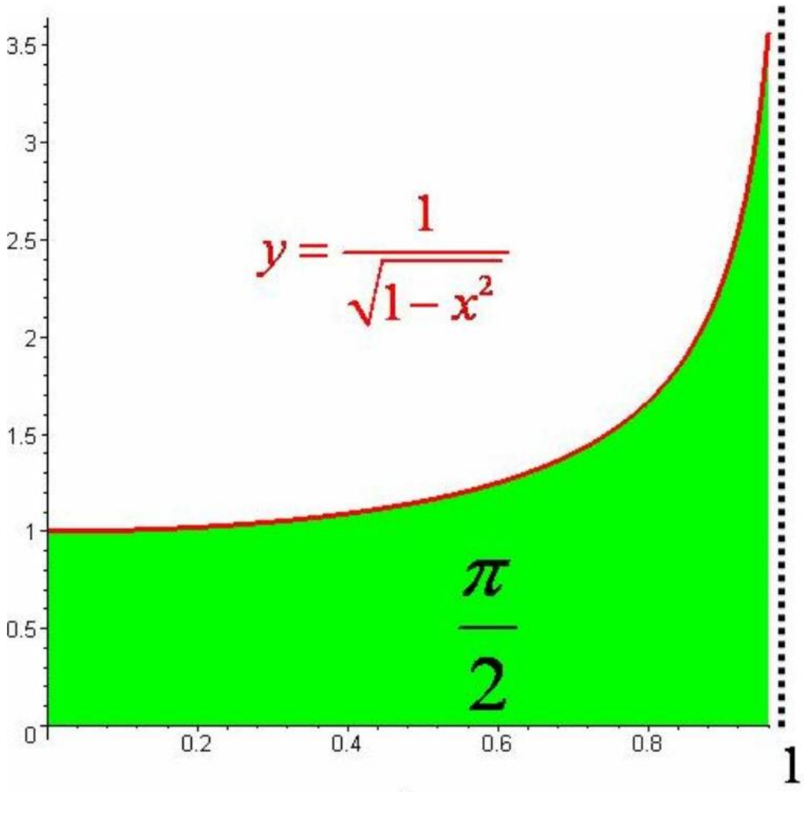
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

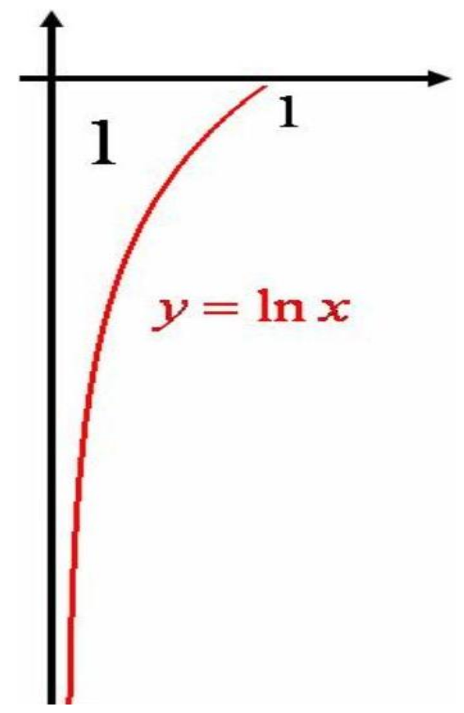
收敛 $\Leftarrow$ 收敛 + 收敛



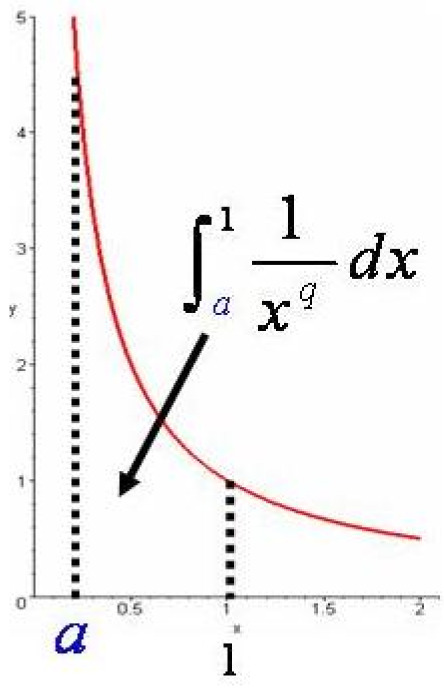
例3、求下列反常积分。

$$(1)\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx; \qquad (2)\int_0^1 \ln x dx.$$



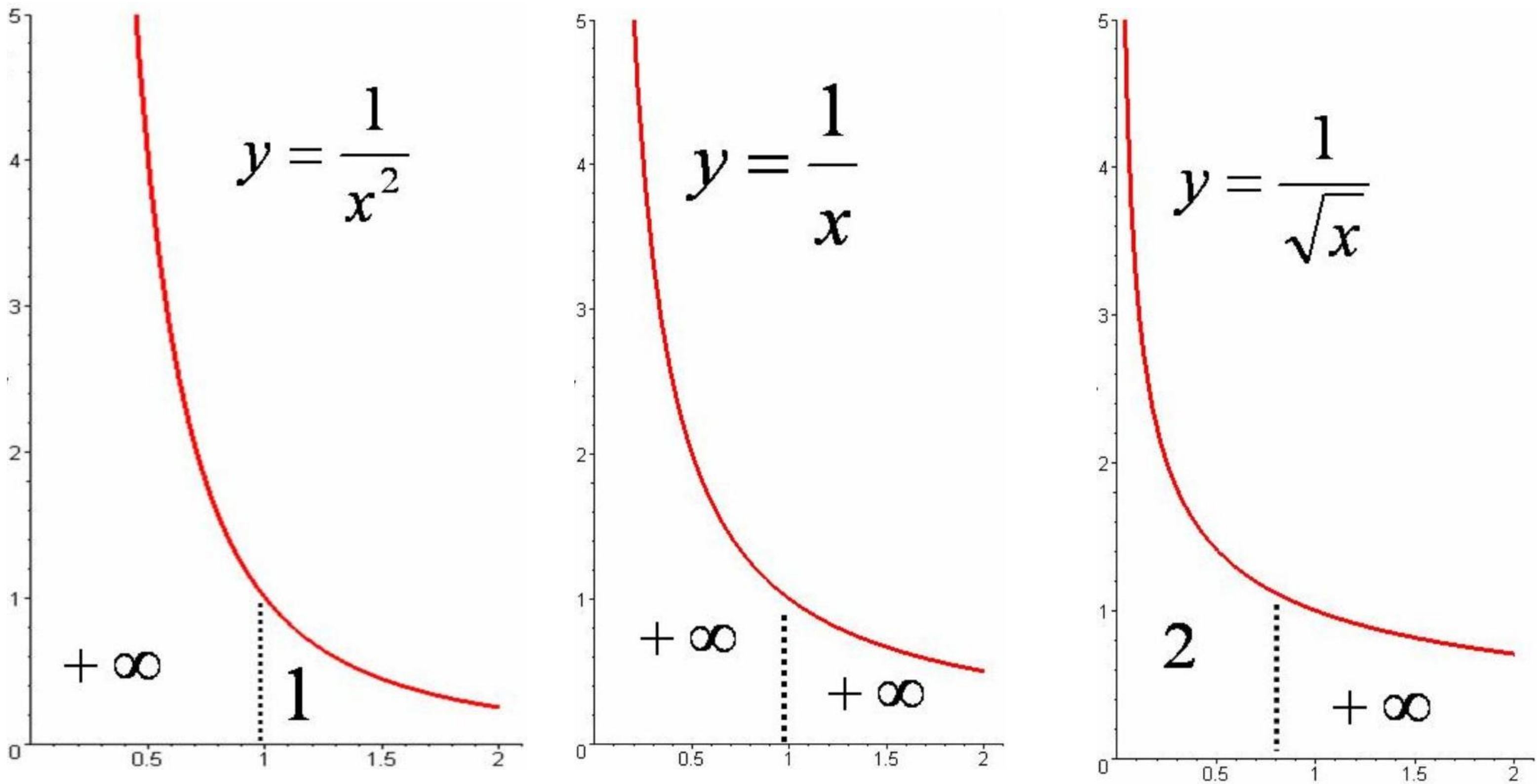


例4、 讨论反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^q} dx$ 的敛散性 $(q > 0)$.

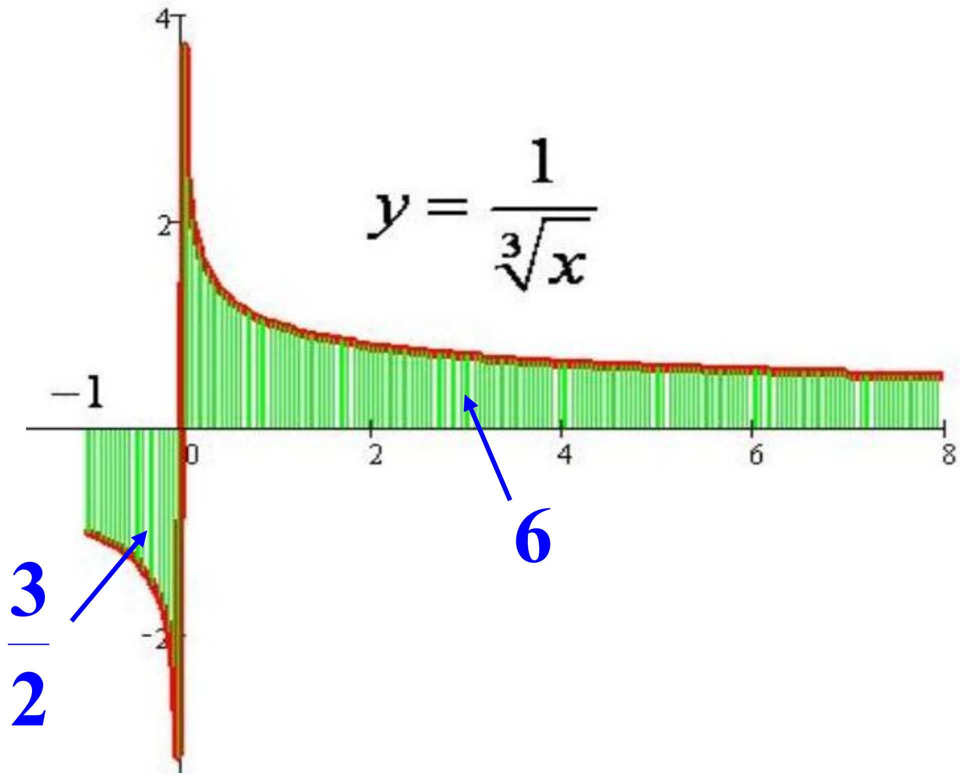


$$\int_0^1 \frac{1}{x^q} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & 0 < q < 1 \\ +\infty & q \geq 1 \end{cases}$$

例5、讨论反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 的敛散性 .



例6、求反常积分 $\int_{-1}^{8}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$.



作　业

习题11-1：1(1)(5)、2(1)(4)