6.3　泰勒公式

——用多项式逼近函数

1. n 阶泰勒多项式
2. 带佩亚诺余项的泰勒公式
3. 带拉格朗日余项的泰勒公式

一、n 阶泰勒多项式

- 由微分的定义：

$$f(x)=\boxed{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}+\boxed{o(x-x_0)}.$$

一次多项式 $T_1(x)$　　误差

$T_1(x_0)=f(x_0),\ T_1'(x_0)=f'(x_0).$

问题： 是否存在 n 次多项式 $T_n(x)$，使得

$$\text{(i)}\ T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0),\ \ 0 \le k \le n.$$

$$\text{(ii)}\ f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n),\ \ x \to x_0.$$

设 $T_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n$,

其中 $$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\ (0 \le k \le n),$$

则 $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)\ \ (0 \le k \le n)$.

即 $T_n(x)$ 满足条件 (i).

定义：设 $f(x)$ 在点 x_0 为 n 阶可导，称多项式

$$T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶泰勒多项式 .

特点：$T_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)$，$0\le k\le n$.

- 求 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶泰勒多项式 的本质：

确定高阶导数 $f^{(k)}(x_0)\,(0 \le k \le n)$.

- 特别地，多项式

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

为 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处的 n 阶泰勒多项式 .

例1、计算下列函数在 $x_0=0$ 处的 n 阶泰勒多项式．

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

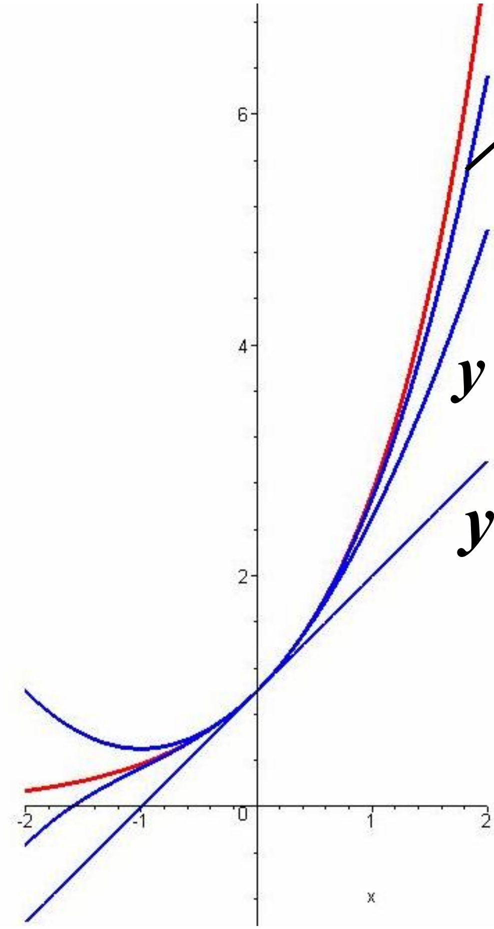
$$\boxed{\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}=n!\frac{1}{(1-x)^{n+1}}.}$$

$$T_n(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n.$$

(2) $f(x)=e^x$

$$\boxed{(e^x)^{(n)}=e^x.}$$

$$T_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$



(3) $f(x) = \sin x$

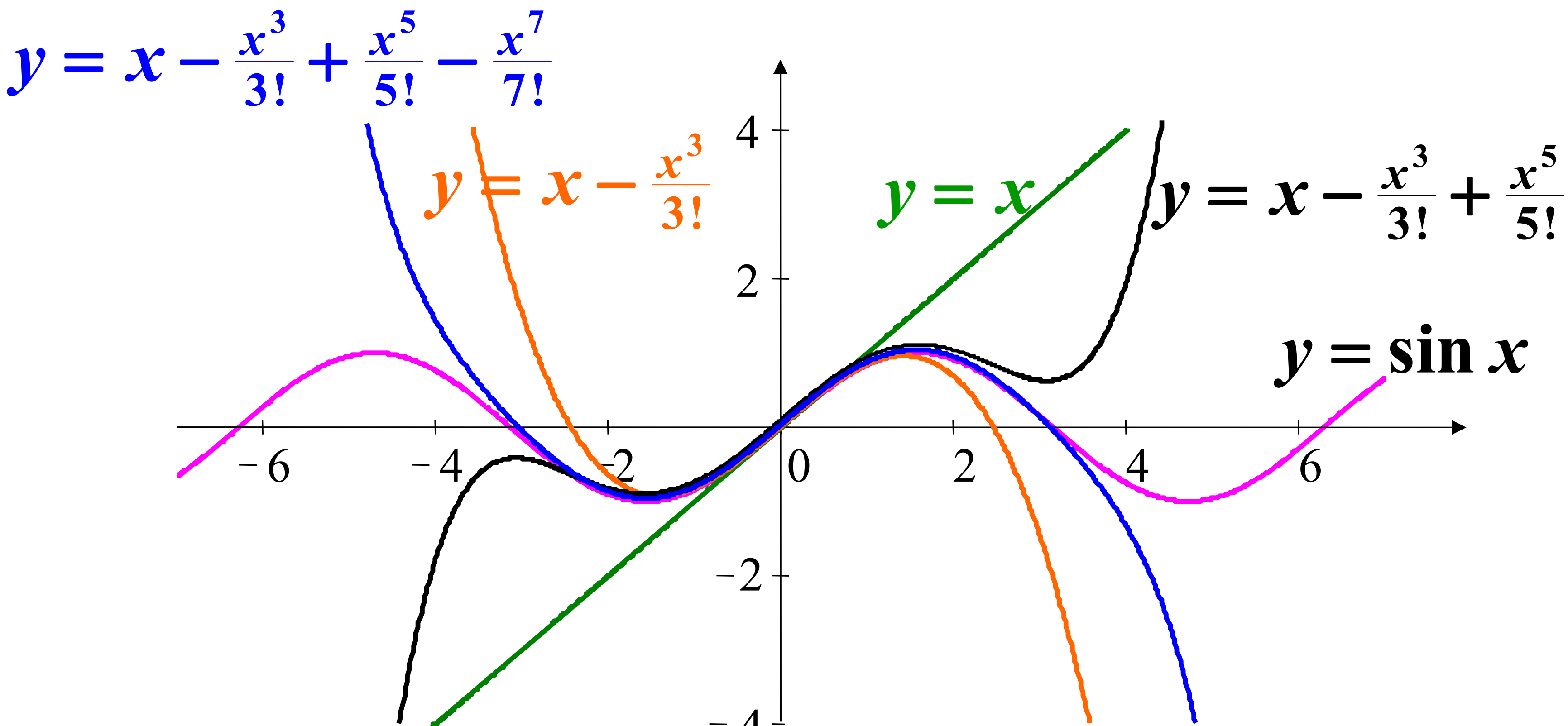
$$\boxed{(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).}$$

$$T_{2m-1}(x) = T_{2m}(x)$$

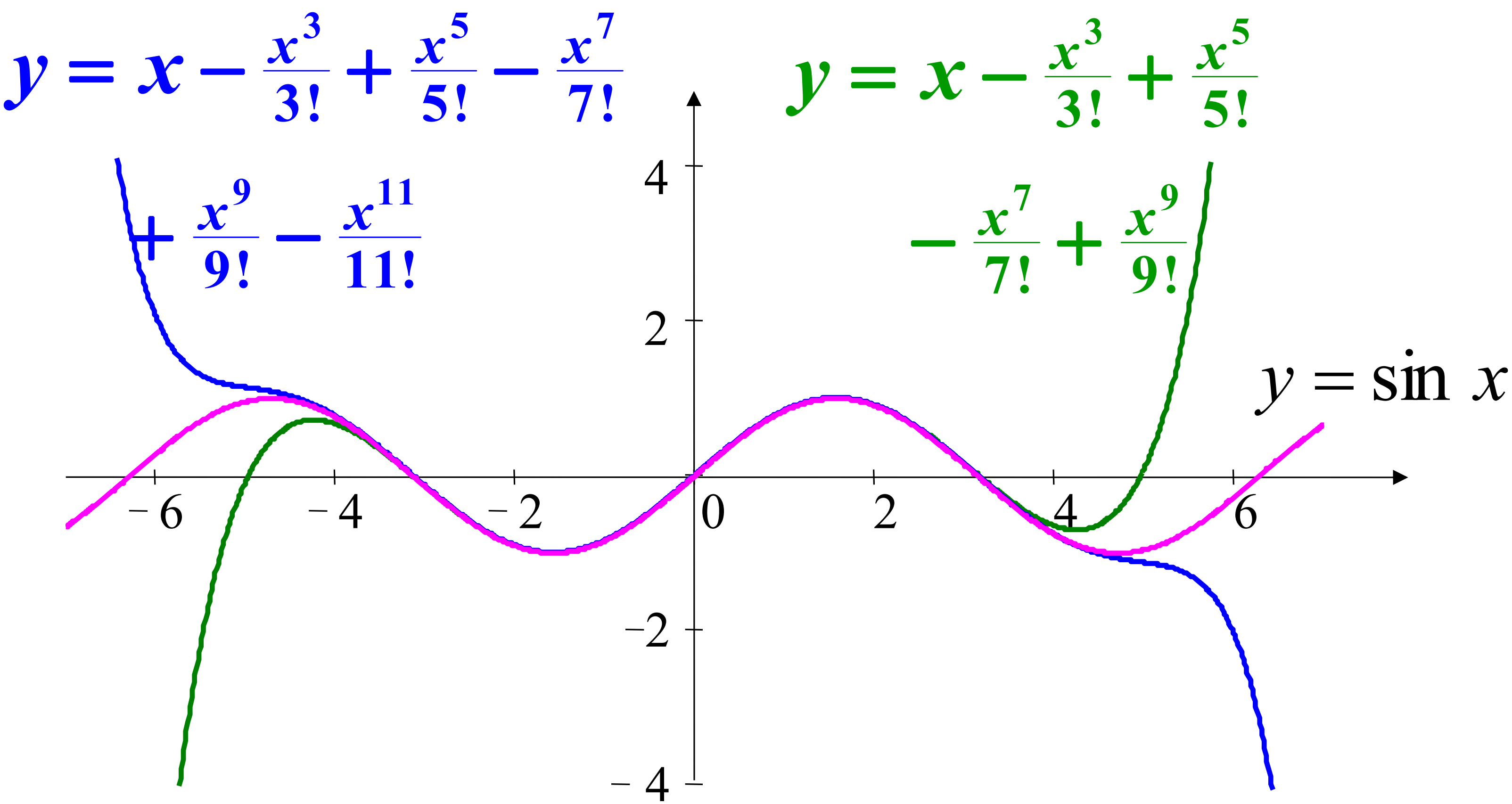
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1} x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

- $f(x)=\sin x$的泰勒多项式：

$$T_7(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7$$



$$T_{11}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11}$$



(4) $f(x)=\cos x$

$$\boxed{(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).}$$

$$T_{2m}(x)=T_{2m+1}(x)$$

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}.$$

(5) $f(x)=\ln(1+x)$

$$\boxed{\left(\ln(1+x)\right)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^{n}}.}$$

$$T_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

余项估计：

设 $f(x)$ 在点 x_0 为 n 阶可导，则 $f(x)$ 与其在点 x_0 的泰勒多项式 $T_n(x)$ 之间有误差。

- 我们称 $\boxed{R_n(x) = f(x) - T_n(x)}$ 为 $f(x)$ 的 n 阶余项.

二、带佩亚诺余项的泰勒公式

定理1（带佩亚诺余项的泰勒公式）： 设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 n 阶导数，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

即 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)\ (x\to x_0)$,

或 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0.$

注1： 泰勒公式具有唯一性。即设 $f(x)$ 在点 x_0 处存在 n 阶导数，若 n 次多项式 $Q(x)$ 满足

$$f(x) = Q(x) + o((x - x_0)^n),$$

则 $$Q(x) = T_n(x).$$

注2： $x_0 = 0$ 时的泰勒公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

称为带佩亚诺余项的麦克劳林公式。

常用公式(带Peano余项)：

1、$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

2、$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \underbrace{o(x^{2n-1})}_{o(x^{2n})}$.

3、$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \underbrace{o(x^{2n})}_{o(x^{2n+1})}$.

4、$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+o(x^n)$.

5、$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$$

例2、写出下列函数的带佩亚诺余项的三阶麦克劳林公式。

(1) $f(x) = xe^{x}$.　　　　(2) $f(x) = \tan x$.

例3、写出 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的麦克劳林公式，并求 $f^{(98)}(0)$ 与 $f^{(99)}(0)$.

例4、求 $\ln x$ 在 $x=2$ 处的 n 阶带佩亚诺余项的泰勒公式.

例5、求极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-x^2/2}+\dfrac{x^4}{12}}{x^6}$.

三、 带拉格朗日余项的泰勒公式

定理2：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在直至 n 阶的连续导数，在 (a,b) 上存在 $n+1$ 阶导数，则对任意 $x, x_0 \in [a,b]$，存在 ξ 介于 x_0 与 x 之间，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

即 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$

两个注记

1、0 阶泰勒公式就是拉格朗日中值公式。

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0).$$

2、当 $x_0=0$ 时，又称为 $f(x)$ 的麦克劳林公式。

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

常用的带拉格朗日余项的泰勒公式：

1、$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$.

2、$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} +$

$$\frac{(-1)^n \cos(\theta x)}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

3、$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^{n+1}\cos(\theta x)}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

4、$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}.$$

5、$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}\ .$$

$$(x>-1)$$

应用一：求近似值

例6、求 e 的近似值，使其误差不超过 10^{-6}.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

应用二：证明不等式（等式）

例7、证明 $\sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \ (x > 0).$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}(1+\theta x)^{\alpha-3}x^{n+1}$$

例8、设 $f(x)$ 三阶可导，$f(0)=0, f(1)=1, f'(\frac{1}{2})=0.$

证明存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $|f'''(\xi)| \geq 24$.

作　　业

习题6-3：1（1）、2（1）（2）、3（2）