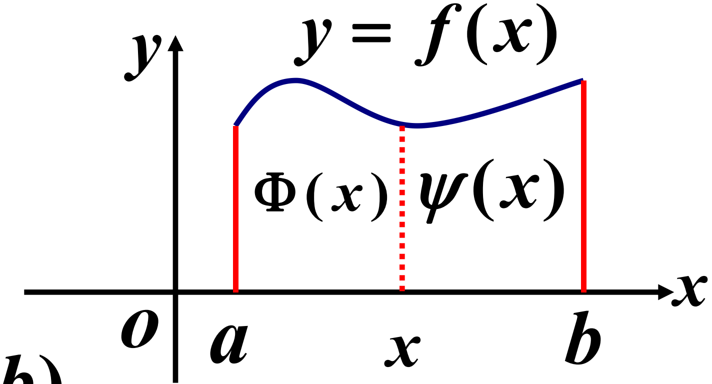
9.5 微积分学基本定理
定积分计算

1. 变限积分与原函数的存在性
2. 换元积分法与分部积分法
3. 泰勒公式的积分型余项

一、变限积分与原函数的存在性

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

$\forall x \in [a,b]$，f 在 $[a,x]$ 可积. 称



$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (a \le x \le b)$$

为变上限的定积分。

称 $\Psi(x) = \int_x^b f(t)\,dt \quad (a \le x \le b)$

为变下限的定积分。

定理1： 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续.

定理2： 若 $f(x)\in C[a,b]$，则 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处可导，且 $\Phi'(x)=f(x)$.

（原函数存在定理）

牛顿-莱布尼兹公式：

若 $f(x)\in C[a,b]$，函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

推论：设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x),\psi(x)$ 可导，则：

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x).$$

特别地,

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{\varphi(x)} f(t)dt = f[\varphi(x)]\varphi'(x);$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{b} f(t)dt = -f[\psi(x)]\psi'(x).$$

例1、求下列函数的极限.

$$(1)\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2};\qquad (2)\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt};$$

$$(3)\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t}dt}{\ln(1+2x)}.$$

例2、设 $f(x)\in C[a,b], F(x)=\int_a^x f(t)(x-t)dt.$

证明: $F''(x)=f(x).$

二、定积分的换元法与分部积分法

1、换元法

定理3：设 $f(x)\in C[a,b]$，若 $x=\varphi(t)$ 满足

$(i)\ \varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$，且 $\varphi([\alpha,\beta])\subset[a,b]$

$(ii)\ \varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积.

则

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.}$$

例3、求下列定积分。

(1) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$；

(2) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$；

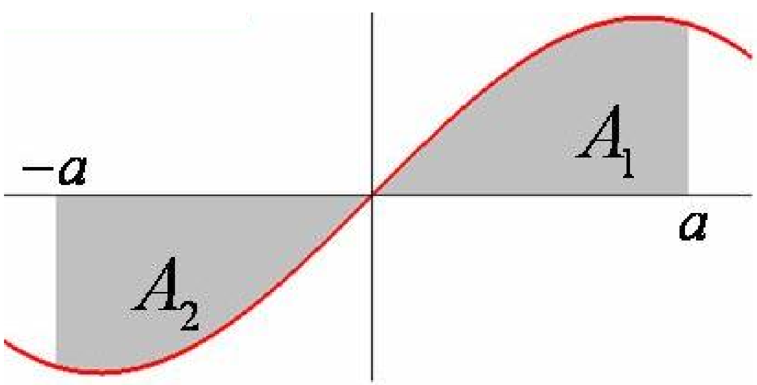
(3) $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx$.

利用函数的奇偶性来计算定积分

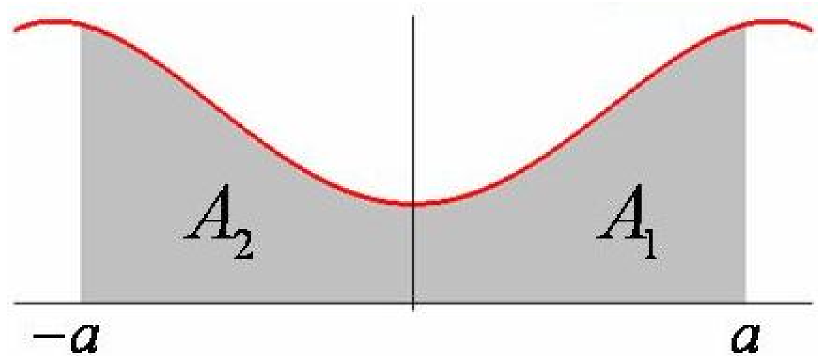
性质1： 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上可积，则：

(1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$；

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$



（1）



（2）

例4、求下列定积分。

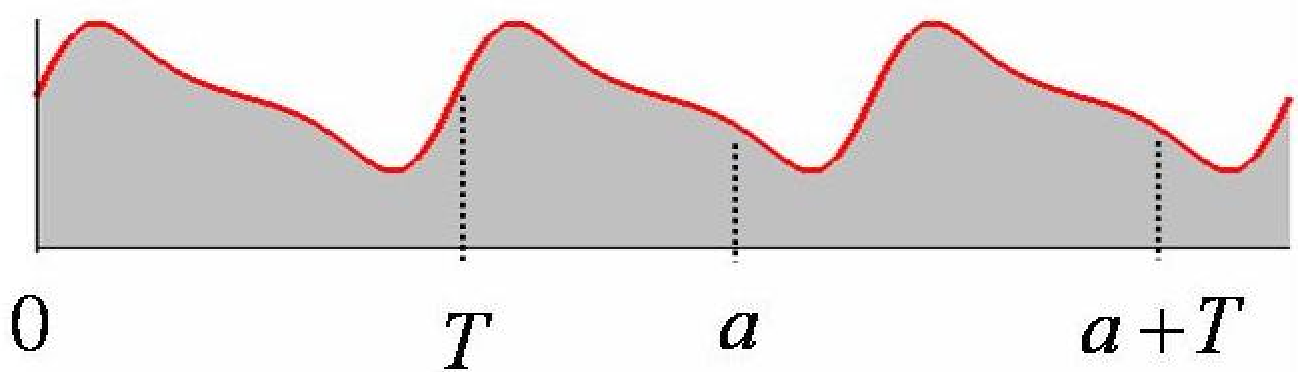
$$(1)\int_{-1}^{1}|x|\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx;$$

$$(2)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{x+\cos x}{1+\sin^2 x}dx.$$

利用函数的周期性来计算定积分

性质2：设 $f(x) \in C(-\infty,+\infty)$ 且以 T 为周期，则 $\forall a \in R$：

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$



例5、计算 $\int_0^{100\pi} |\sin x| dx$.

2、分部积分法

定理4：设 $u(x),v(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且 $u'(x),v'(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\int_a^b uv'dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'vdx\,,$$

或
$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu\,.$$

例6、求 $\int_{1/e}^{e} |\ln x| dx.$

例7、设 $f(x)$ 是连续函数，证明：

$$\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t.$$

例8、 记 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

(1) 证明: $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.

(2) 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} & n \text{ 是偶数} \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{2}{3} & n \text{ 是奇数} \end{cases}$$

定理5（积分第二中值定理）：设 f 在 $[a, b]$ 上可积.

(i) 若函数 g 在 $[a, b]$ 上单调减, 且 $g(x) \geq 0$, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) 若函数 g 在 $[a, b]$ 上单调增, 且 $g(x) \geq 0$, 则存在 $\eta \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_{\eta}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

注：仅证 f 在 $[a,b]$ 连续, g' 在 $[a,b]$ 可积时的情形.

推论： 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注2： 积分第二中值定理及推论主要用于第十一章反常积分收敛的判别。

三、泰勒公式的积分型余项

定理6：设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有 $(n+1)$ 阶连续导数，则

$$f(x)=f(x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t.$

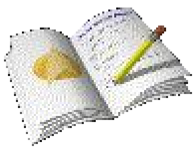
$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \mathrm{d}t.$$

（1）拉格朗日型余项：

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.$$

（2）柯西型余项：

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}.$$



作　业

习题9-5：3(1)、4(3)(7)(10)(12)、10