5.4 高阶导数

1. 高阶导数的概念
2. 高阶导数的运算法则
3. 参变量函数的高阶导数

引例：设某质点作变速直线运动的方程为 $s = s(t)$,

速度：$v(t) = \dfrac{ds}{dt}$， 或 $v(t) = s'(t)$.

加速度：$a(t) = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\dfrac{ds}{dt})$,

或 $a(t) = v'(t) = (s'(t))'$.

一、高阶导数的概念

- 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 有定义:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

定义1: 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 可导,定义函数 $f(x)$ 在点 x_0 的二阶导数 为

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}.$$

注: 若 $f''(x_0)$ 存在,则 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 可导.

定义2: 若 $f'(x)$ 在区间 I 内每一点都可导，则称 $f'(x)$ 的导数为 $f(x)$ 在 I 上的二阶导数．

记作 y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$.

含义: $y''=(y')'$. $\qquad f''(x)=(f'(x))'$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right). \qquad \frac{d^2f(x)}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right).$$

- 类似地，二阶导数的导数称为三阶导数，$\cdots$

$n-1$ 阶导数的导数称为 n 阶导数。分别记作：

$$y''',\quad y^{(4)},\quad \cdots,\quad y^{(n)}.$$

或 $$\frac{d^3y}{dx^3},\quad \frac{d^4y}{dx^4},\cdots,\quad \frac{d^ny}{dx^n}.$$

例1、设 $y=x^{\alpha}$,求 $y^{(n)}$.

$$\boxed{(x^{\alpha})^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.}$$

(1) $(x^{n})^{(n)}=n!$, $(x^{n})^{(m)}=0\ (m>n)$.

(2) $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^{n}\frac{n!}{x^{n+1}}$.

(3) $\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=(-1)^{n}\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$.

例2、设 $y=\ln(1+x)$，求 $y^{(n)}$.

$$\boxed{\left(\ln(1+x)\right)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^{n}}.}$$

思考：设 $y=\ln(1-x)$，求 $y^{(n)}$.

$$\boxed{\left(\ln(1-x)\right)^{(n)}=-\frac{(n-1)!}{(1-x)^{n}}.}$$

例3、设 $y = e^{ax}$，求 $y^{(n)}$.

$$\boxed{(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}.}$$

$$\boxed{(e^x)^{(n)} = e^x.}$$

例4、设 $y = \sin x$，求 $y^{(n)}$.

$$\boxed{(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2}).}$$

类似地，$\boxed{(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2}).}$

二、高阶导数的运算法则

定理： 设 $u(x), v(x)$ 均 n 阶可导，则：

$$(1)\ (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}.$$

$$(2)\ (cu)^{(n)} = cu^{(n)}.$$

$$(3)\ (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

莱布尼兹 (Leibniz) 公式

二项展开式

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{n-k} v^k$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

莱布尼兹公式

例5、求下列函数的 n 阶导数 $y^{(n)}$.

(1) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$;

(2) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$;

(3) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

例6、设 $y = x\sin 2x$，求 $y^{(10)}$.

例7、研究函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x \ge 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

的高阶导数。

例8、设 $y=\arctan x$，求 $y^{(n)}(0)$.

- $$y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2m \\ (-1)^m(2m)!, & n=2m+1\end{cases}\quad(m=0,1,2,\cdots)$$

思考：设 $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，求 $y^{(n)}(0)$.

三、参变量函数的高阶导数

设参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$.

- 若 $x = \varphi(t)$ 与 $y = \psi(t)$ 二阶可导且 $\varphi'(t) \neq 0$,则

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \Big/ \frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^{3}(t)}.$$

例9、 (1) 设 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$；

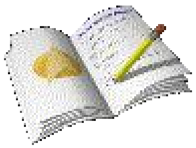
(2) 设 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=a\pi}$.

内容小结： 求高阶导数的方法

(1) 逐阶求导，利用归纳法。

(2) 分解为已知高阶导数公式的函数的线性组合。

(3) 利用莱布尼兹公式。



作　　业

习题5-4：3(4)、5(3)、6(1)