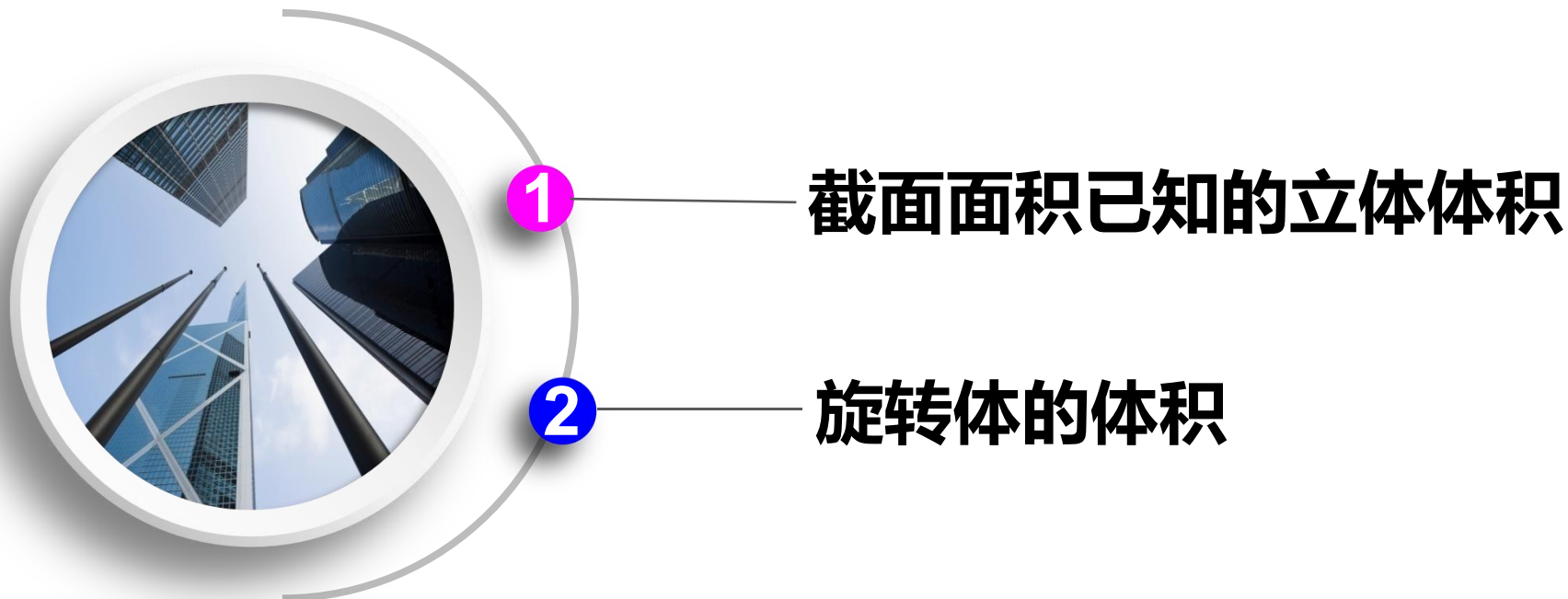
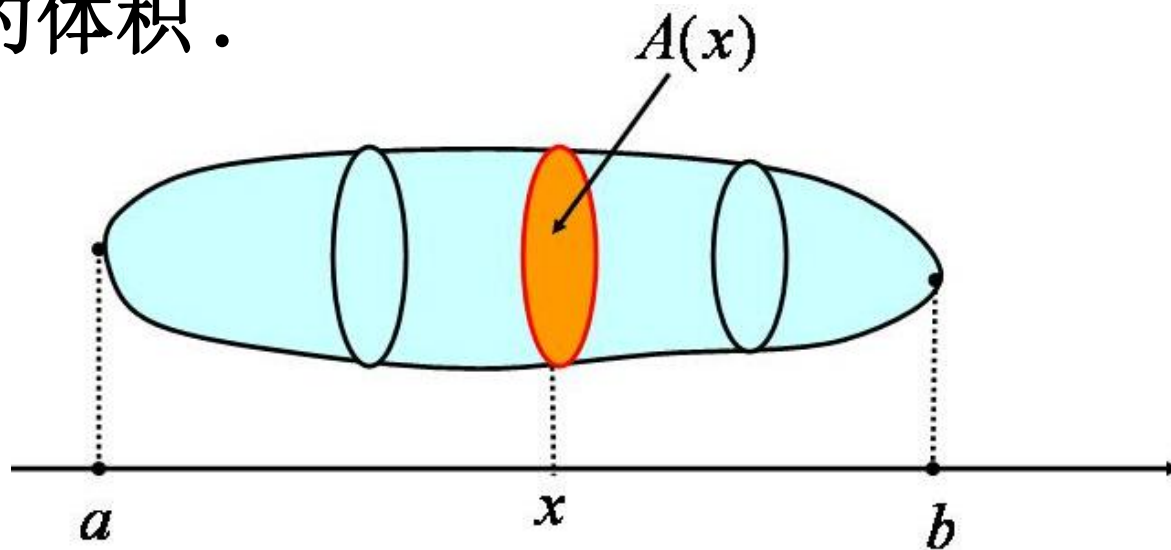


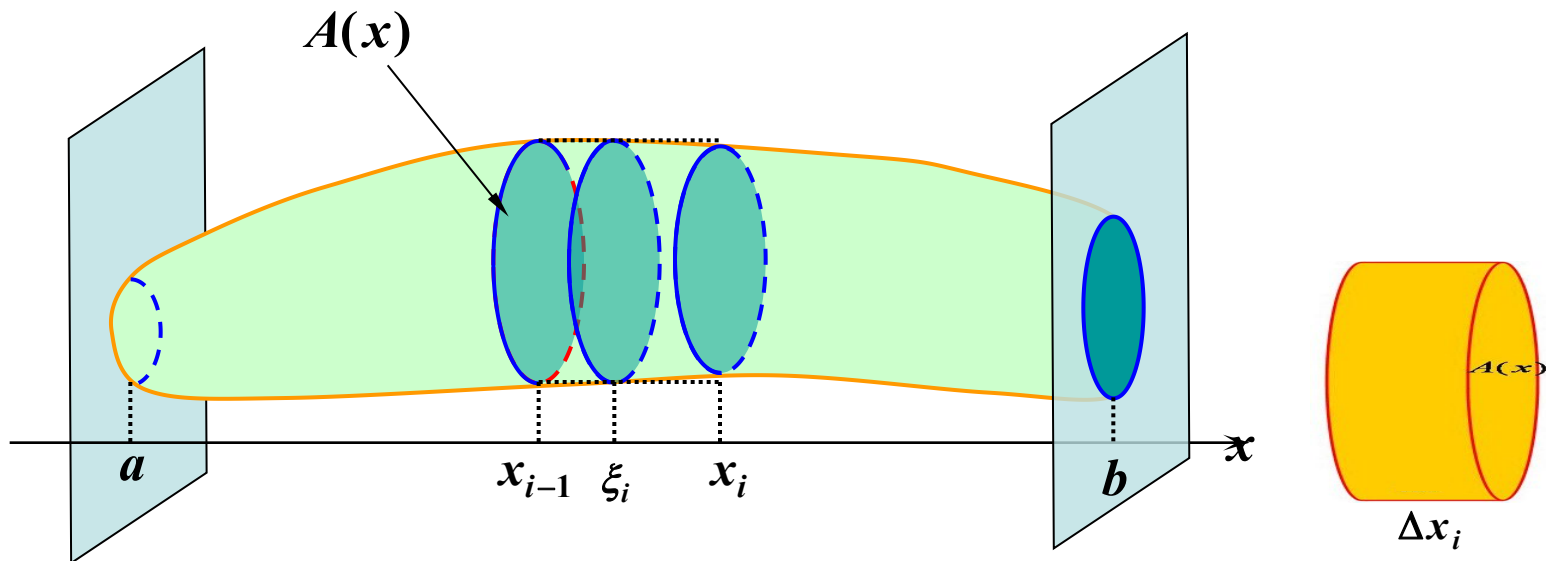
10.2 由平行截面面积求体积



一、截面面积已知的立体体积

设立体 Ω 夹在平面 $x = a$ 与 $x = b$ 之间, 过点 x 且垂直于 x 轴的平面截立体 Ω 的截面面积为 $A(x)$. 求立体 Ω 的体积.



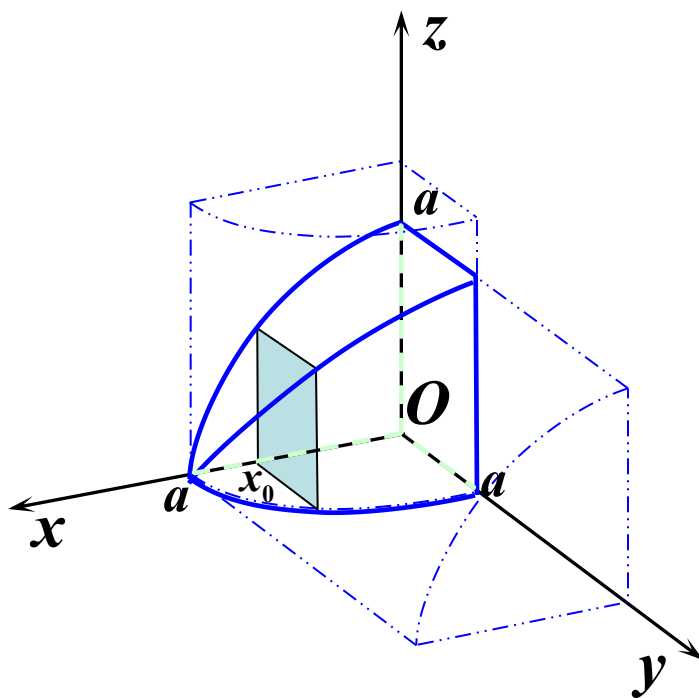


$$\Delta V_i \approx A(\xi_i) \Delta x_i .$$

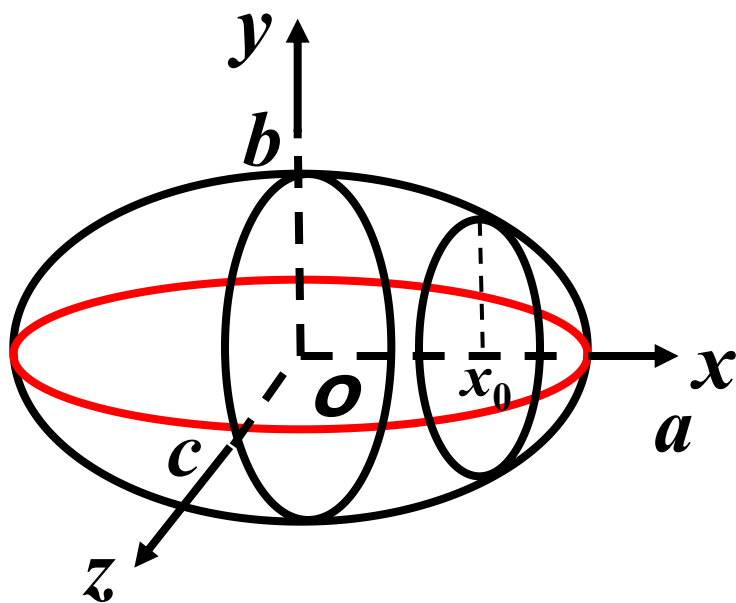
✦ 设 $A(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则立体 Ω 的体积

$$V = \int_a^b A(x) dx .$$

例1、求由两个圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与 $z^2 + x^2 = a^2$ 所围立体的体积.



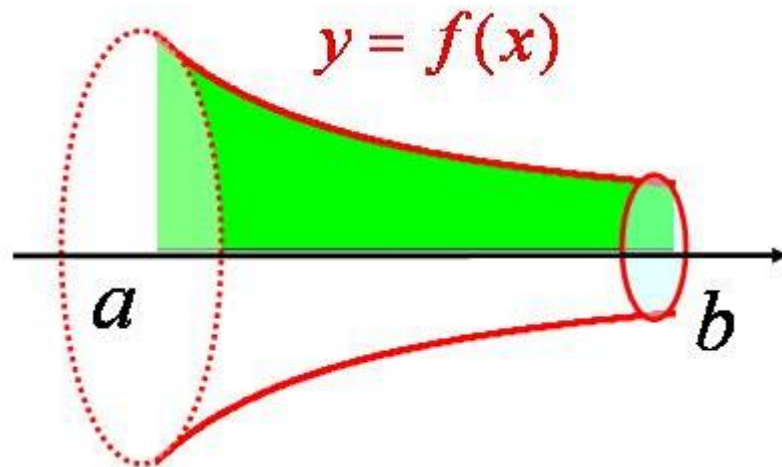
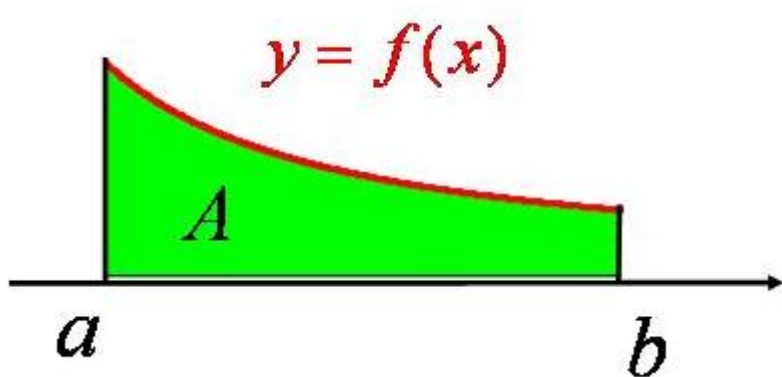
例2、求椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围立体的体积.

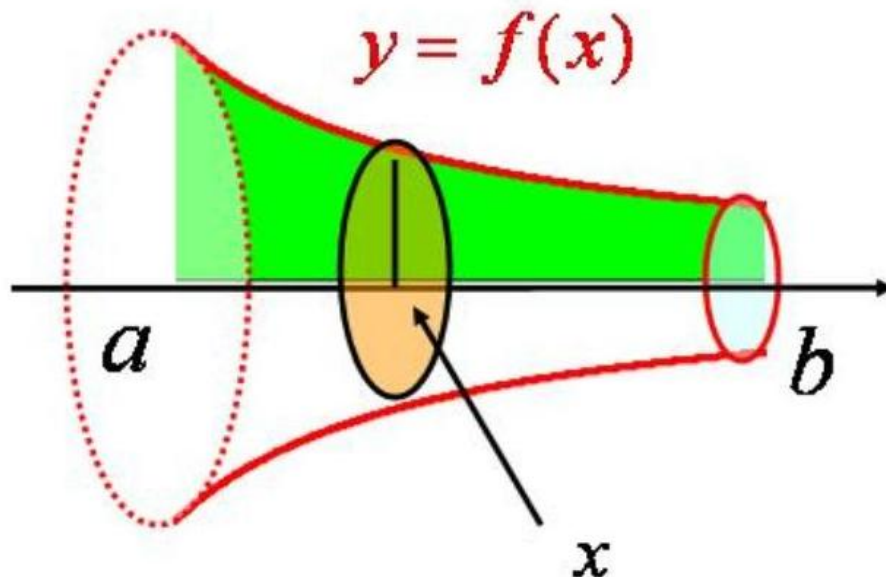


二、旋转体的体积

旋转体：平面图形绕它所在平面内的一条直线旋转一周所成的立体。

情形1： $0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b$ 绕 x 轴旋转一周



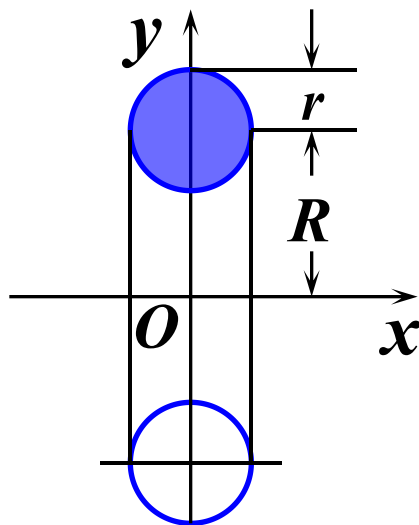


截面面积函数: $A(x) = \pi f^2(x), x \in [a, b]$.

体积:

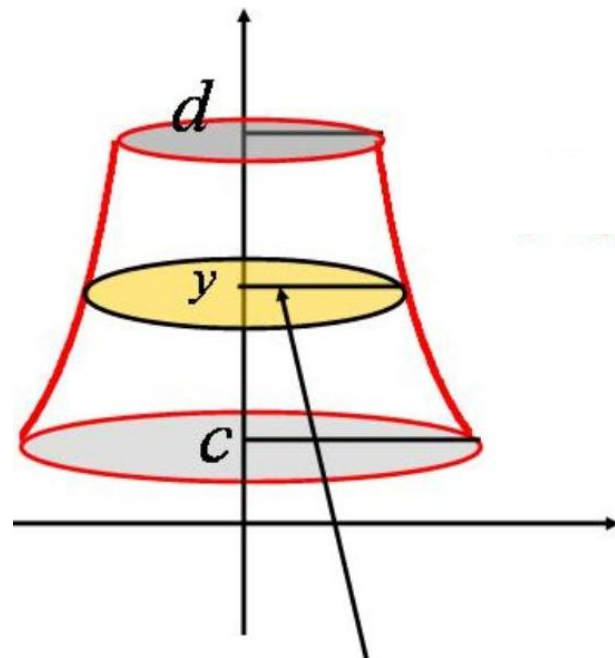
$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx .$$

例3、求圆 $x^2 + (y - R)^2 \leq r^2$ ($0 < r < R$) 绕 x 轴
旋转一周所得环状立体的体积.



情形2: $0 \leq x \leq g(y), c \leq y \leq d$

绕 y 轴旋转一周



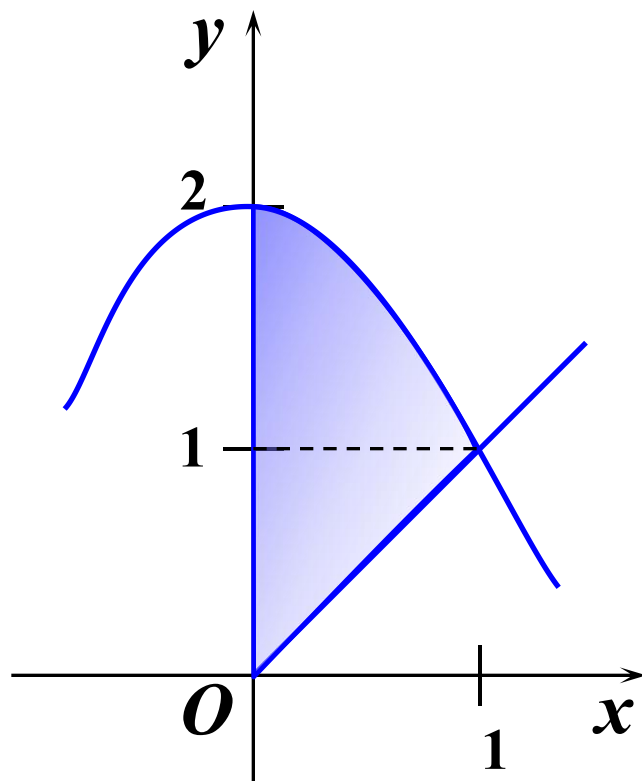
$$A(y) = \pi g^2(y)$$

截面面积函数: $A(y) = \pi g^2(y), y \in [c, d]$.

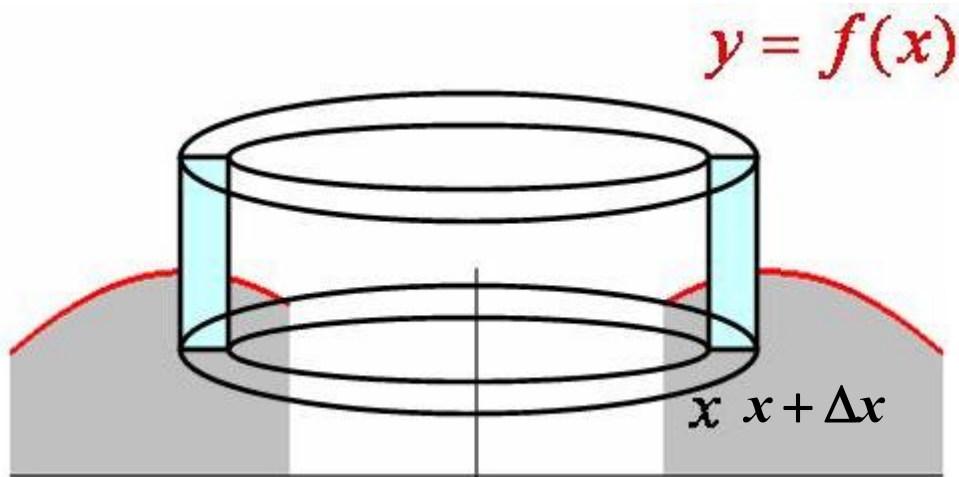
体积:

$$V = \int_c^d \pi g^2(y) dy .$$

例4、求由区域 $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2 - x^2\}$
绕 y 轴旋转一周所得立体的 体积 .



问题：曲边梯形 $0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b$ 绕 y 轴
旋转一周的旋转体体积=？



x : 柱壳半径

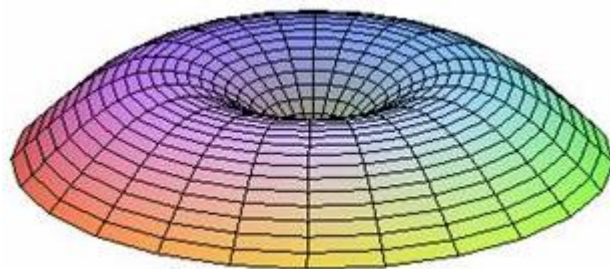
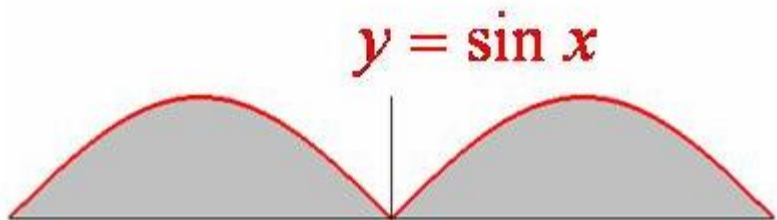
$f(x)$: 柱壳高度

Δx : 柱壳厚度

$$\Delta V \approx 2\pi x f(x) \Delta x$$

体积： $V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$

例5、 求 $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 y 轴旋转所成旋转体的体积。





作 业

习题10-2: 2(1) (2)、3