第四章　函数的连续性

1 连续性概念

2 连续函数的性质

3 初等函数的连续性

4.1　连续性概念

1 函数在一点的连续性

2 间断点及其分类

3 区间上的连续函数

一、函数在一点的连续性

定义1： 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域有定义，若

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续，x_0 为 $f(x)$ 的连续点.

否则称 $f(x)$ 在点 x_0 不连续.

- $f(x)$ 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，

  有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

注： (1) 相对于函数极限的定义，要求 $|x-x_0|<\delta$；

(2) 在连续意义下，极限与 f 具有交换性，即：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x)=f(x_0).$$

- $f(x)$在 x_0 连续，需满足：

(1) $f(x)$在x_0有定义； (2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；

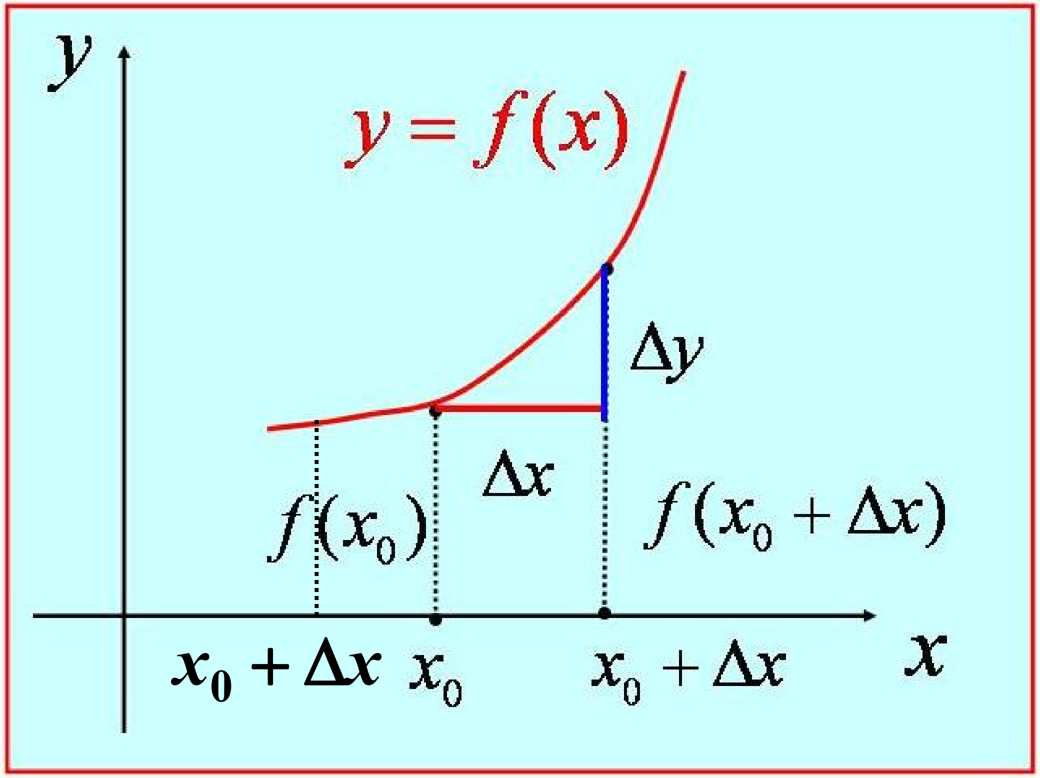
(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

例1、证明函数 $f(x)=xD(x)$ 在点 $x=0$ 连续.

例2、判断函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

在点 $x=0$ 是否连续。

函数的连续性：增量形式

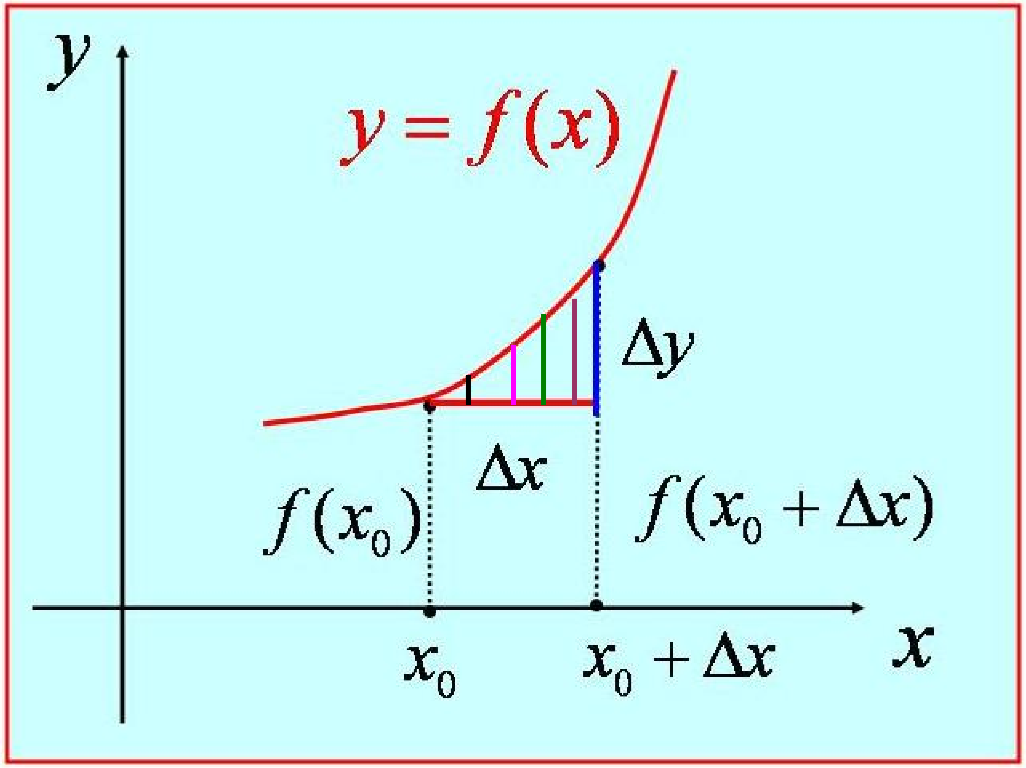


- x 在 x_0 的增量：

  $\Delta x = x - x_0$；

- $f(x)$ 在 x_0 的增量：

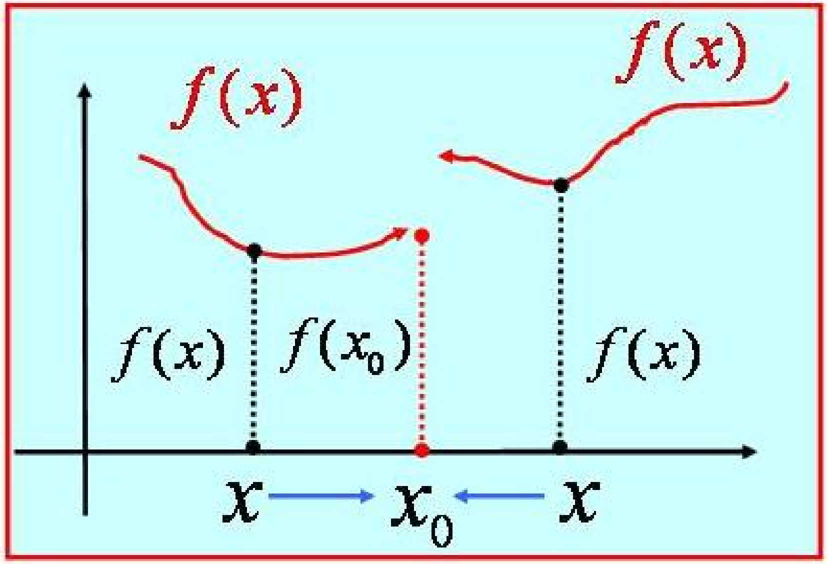
$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$



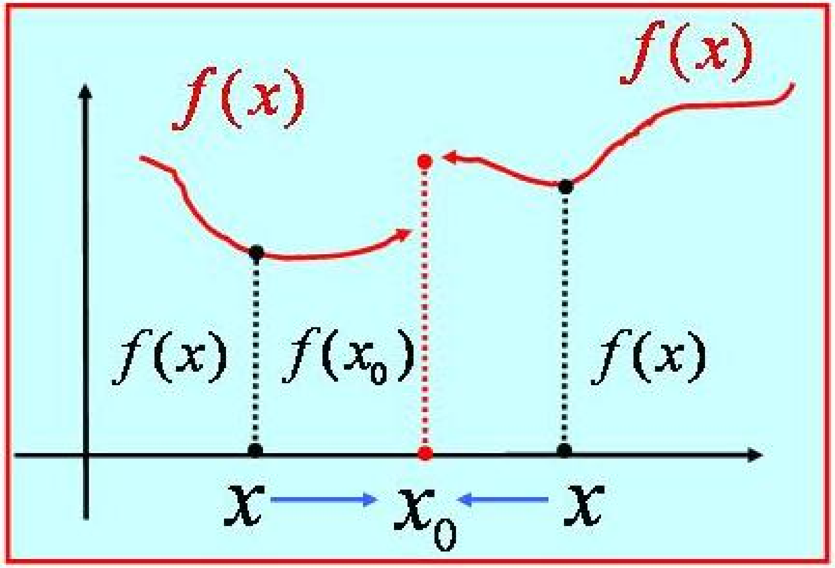
函数 $f(x)$ 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

定义2: (1) 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，称 $f(x)$ 在 x_0 左连续；

(2) 若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，称 $f(x)$ 在 x_0 右连续.



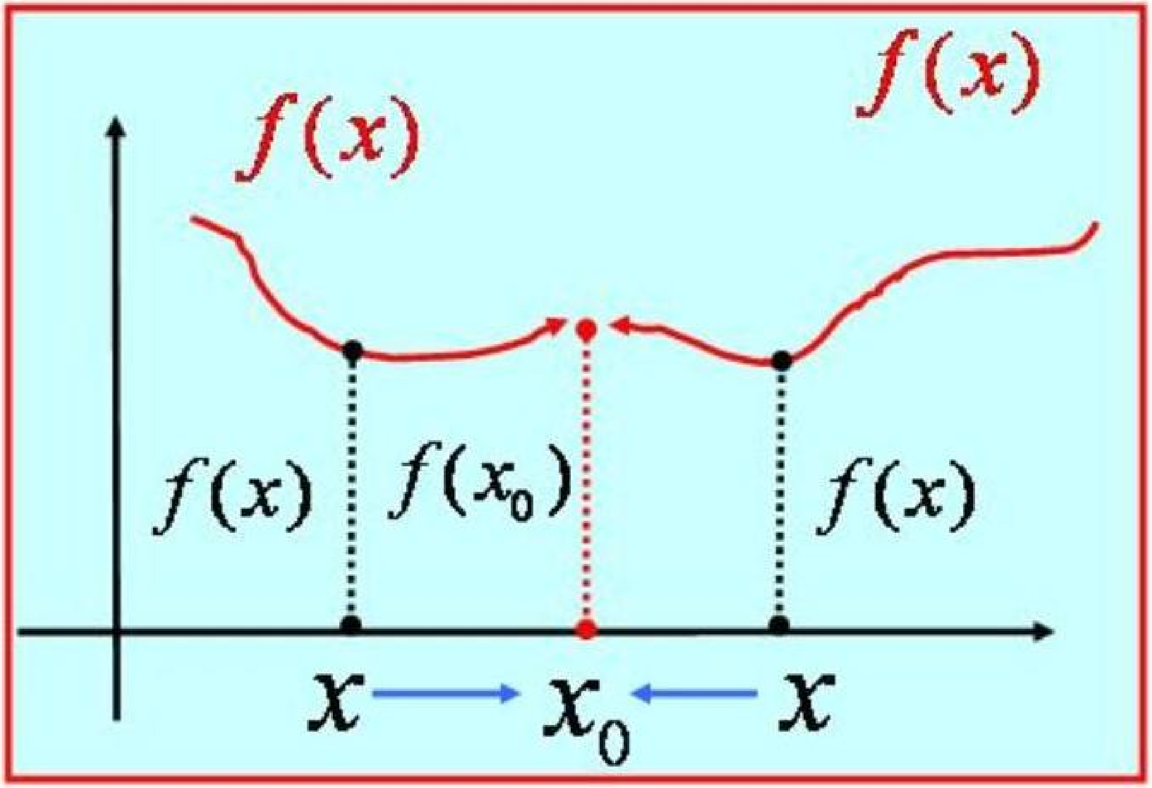
左连续但不右连续



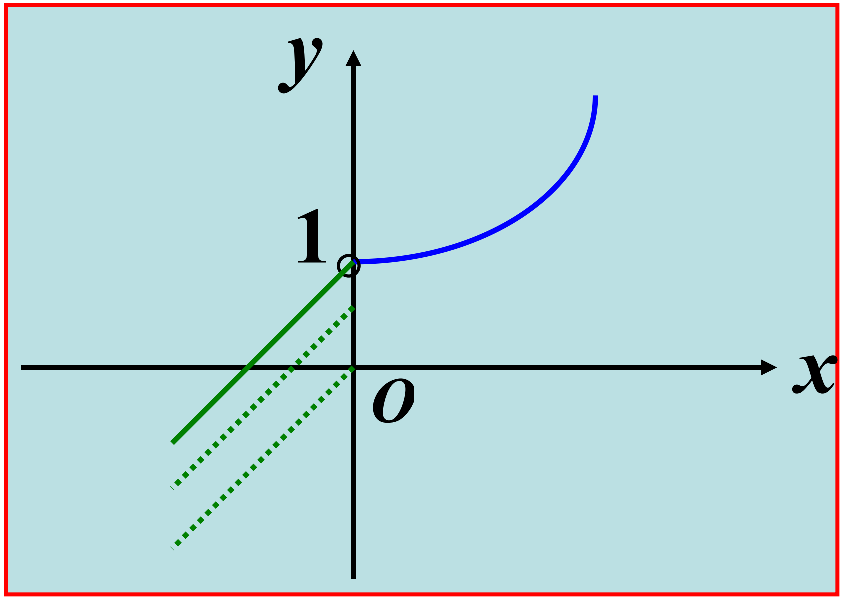
右连续但不左连续

定理1： $f(x)$ 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow$

$f(x)$ 在 x_0 既左连续也右连续 .



例3、设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x>0 \\ x+a, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a.



二、间断点及其分类

若 $f(x)$ 在 x_0 不连续,则可能出现下列情况之 一:

(1) $f(x)$ 在 x_0 无定义;

(2) $f(x)$ 在 x_0 有定义,但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在;

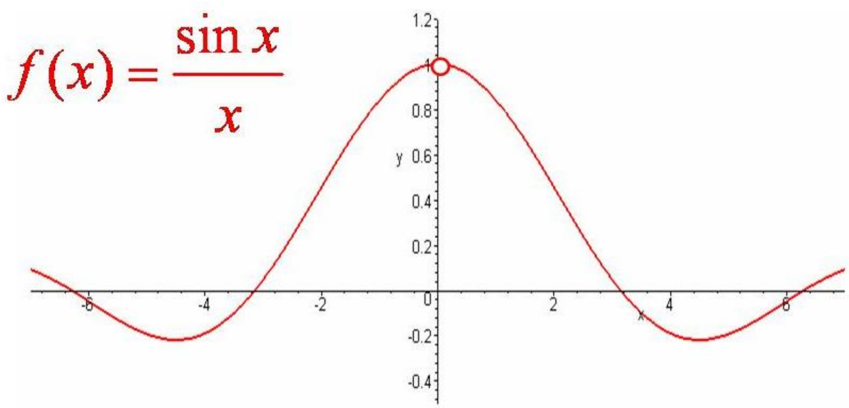
(3) $f(x)$ 在 x_0 有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 ,但

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点。

- 称 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，而 $f(x)$ 在 x_0 无定义，或 $f(x)$ 在 x_0 有定义但 $f(x_0)\neq A$.

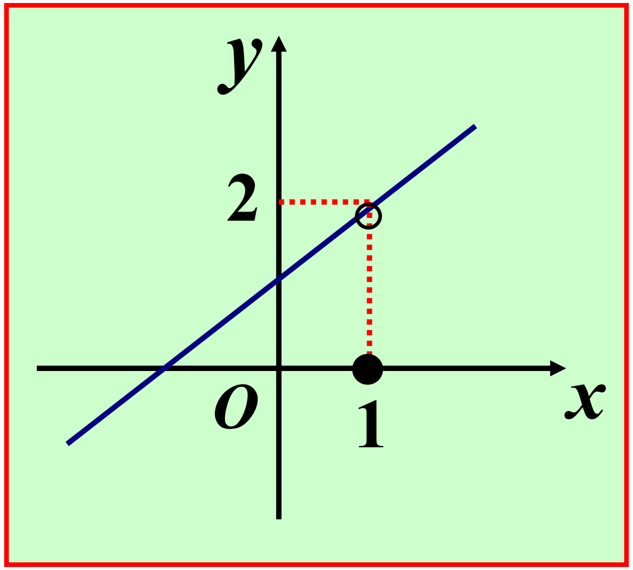
例4、设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，判断 $x=0$ 是否为 $f(x)$ 的间断点？若是，求间断点的类型.



- $x=0$ 是 $f(x)$ 的 可去间断点。

- 补充定义 $f(0)=1$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

例5、设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x \neq 1, \\ 0, & x=1, \end{cases}$



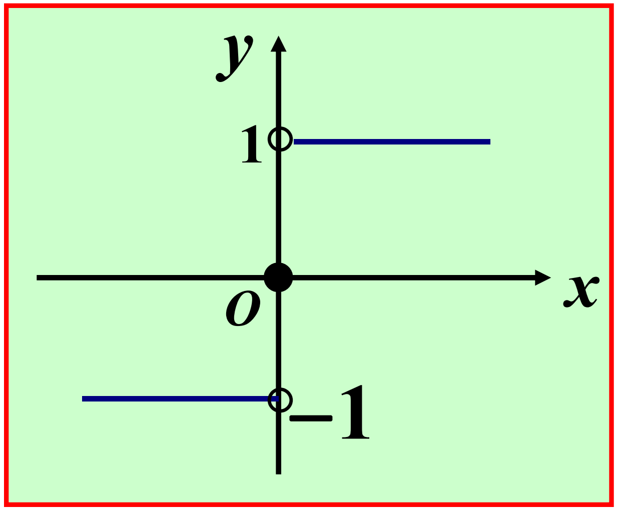
则 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2 \neq f(1)$.

- $x=1$ 是 $f(x)$ 的 可去间断点。

- 修改 $f(1)=2$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续.

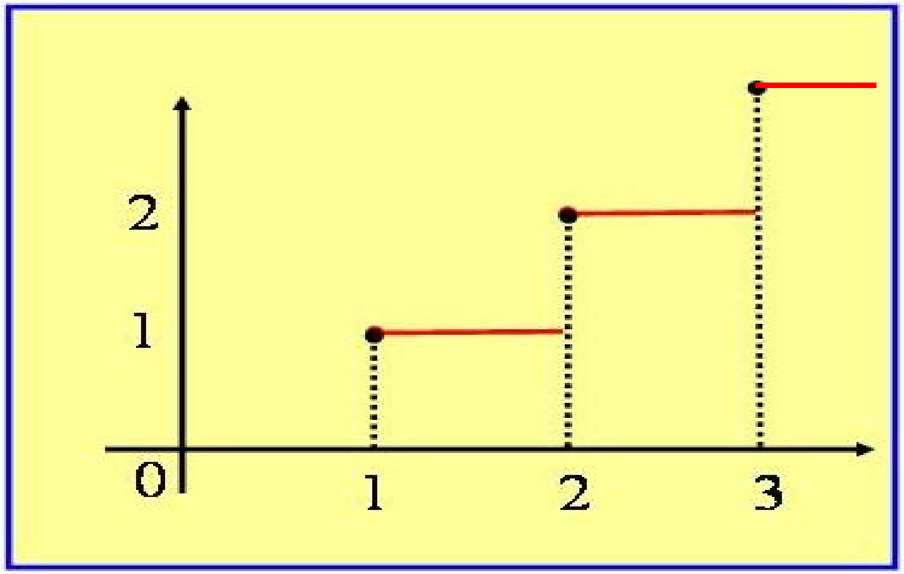
- 称 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点，若 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限存在，但 $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

例6、设 $f(x)=\operatorname{sgn} x$,



- $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点。

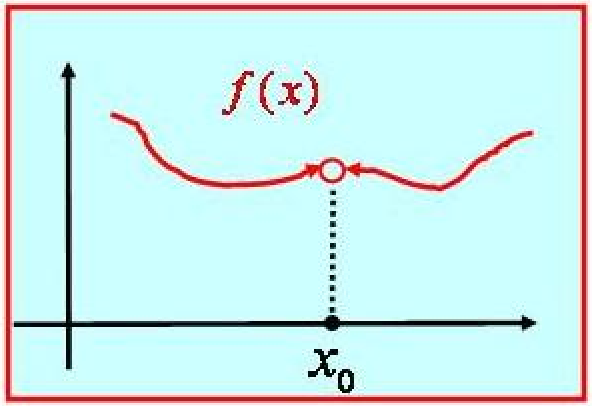
练习: 求 $f(x)=[x]$ 的间断点，并确定它的类型 .



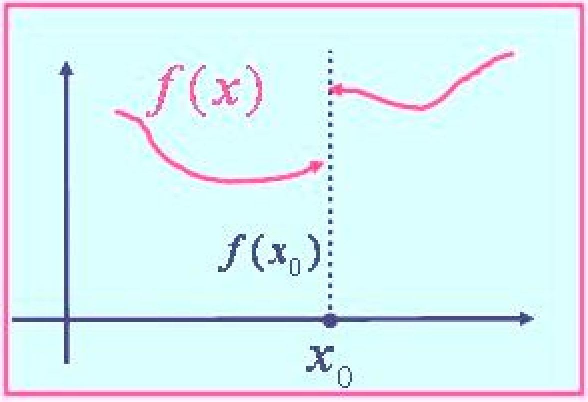
第一类间断点：左右极限都存在的间断点

可去间断点：左右极限相等的间断点

即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在



跳跃间断点：左右极限不相等的间断点

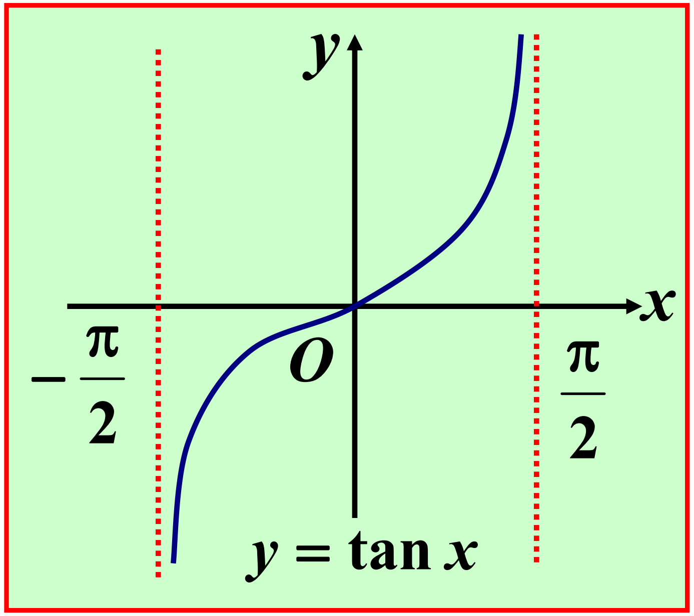


第二类间断点： 左右极限至少有一个不存在。

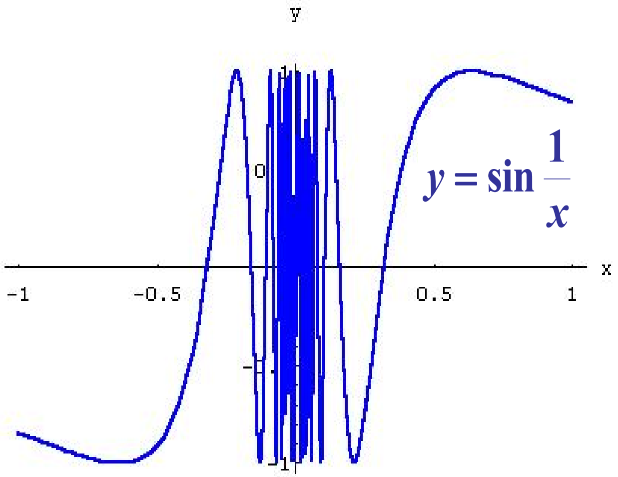
例7、设 $f(x)=\tan x$，

则 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$，

- $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点。



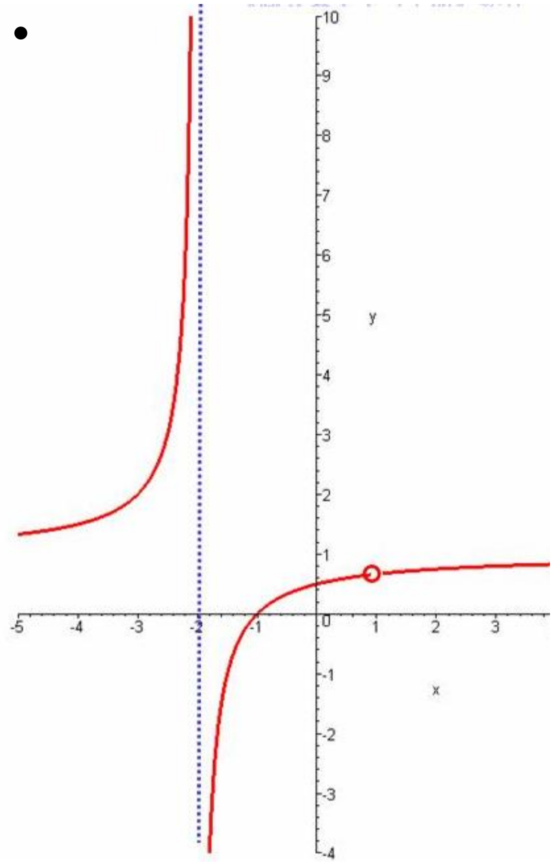
例8、设 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$,



- $x=0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点。

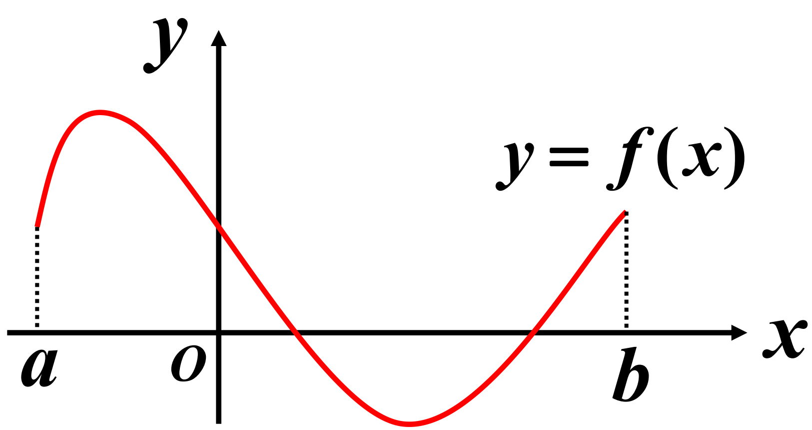
例9、$D(x)$ 中任一点 x 均为第二类间断点.

例10、判断函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$ 的连续性，若有间断点，判断间断点的类型．



三、区间上的连续函数

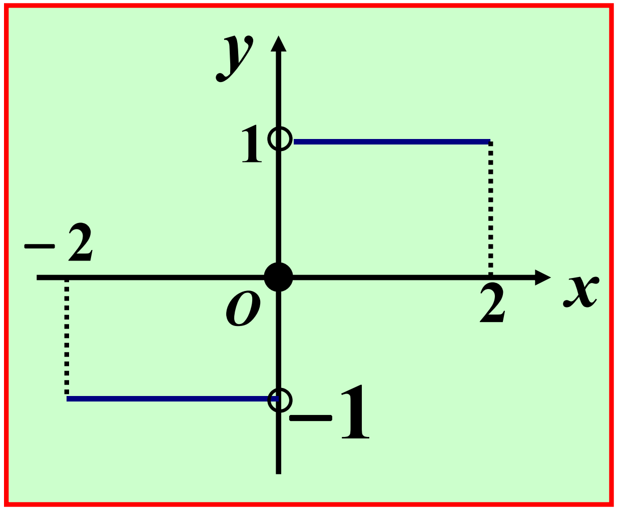
定义3: 若 $f(x)$ 在区间 I 上每一点都连续，则称 $f(x)$ 在 I 上连续或称 $f(x)$ 是 I 上的连续函数．



- 函数在区间端点连续指单侧连续。

- $C(I)$ 表示区间 I 上的连续函数的集合．

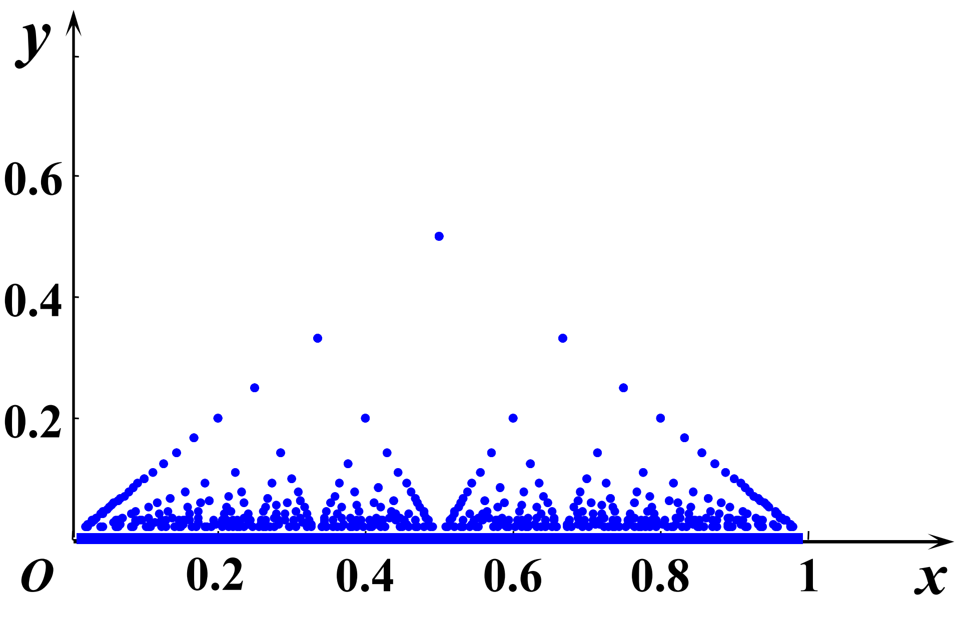
- 如果函数 f 在 $[a, b]$ 上的不连续点都是第一类的，并且不连续点只有有限个，则称 f 是 $[a, b]$ 上的**分段连续函数**．



*例11、证明黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\ (\dfrac{p}{q}\text{既约真分数}) \\ 0, & x\text{为}(0,1)\text{上无理数或}0,1\end{cases}.$$

在(0,1)上任何无理点处连续，有理点处不连续.



作　　业

习题4-1： 2(1)(2)、3(2)、5