4.2 连续函数的性质

1 连续函数的局部性质

2 闭区间上连续函数的基本性质

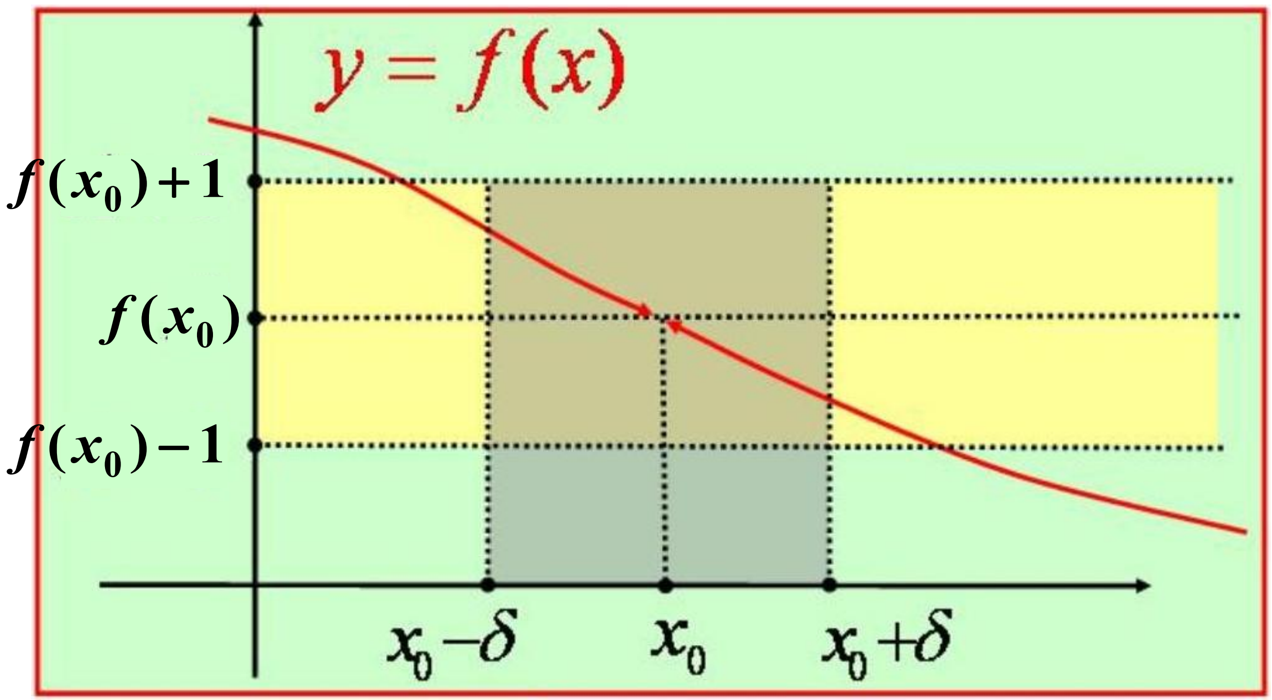
3 反函数的连续性

4 一致连续性

一、连续函数的局部性质

定理1(局部有界性): 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续,

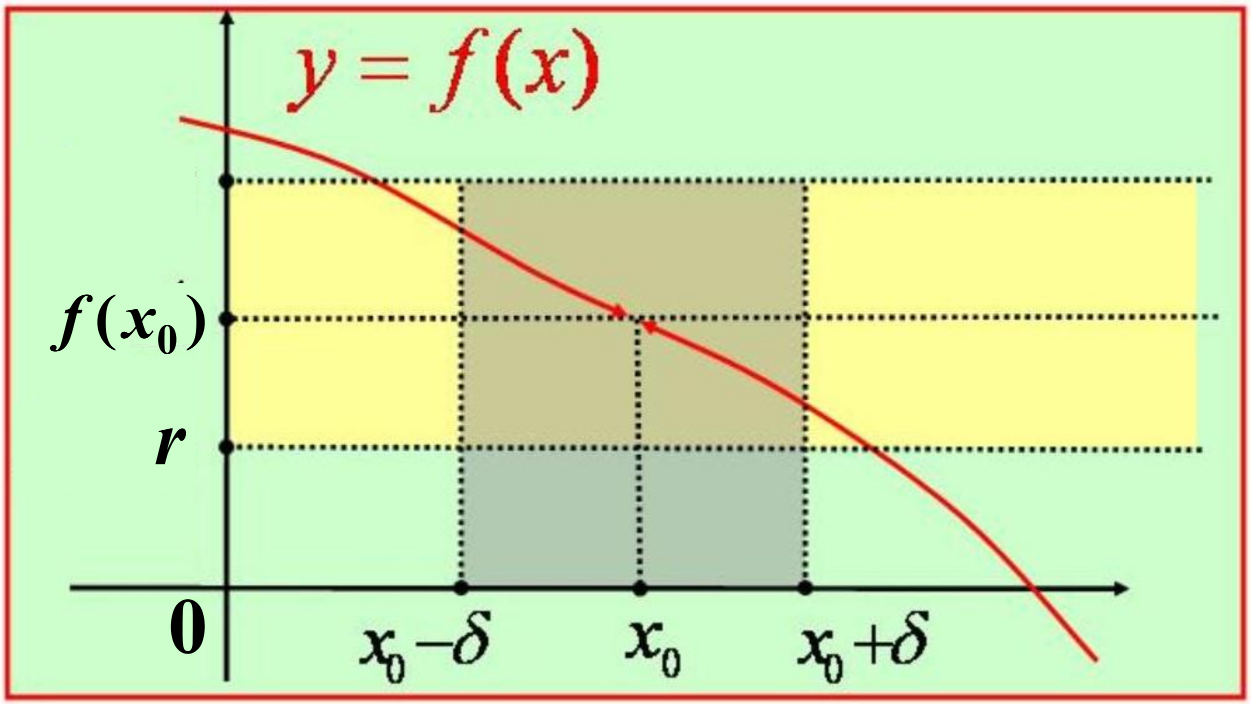
则 $\exists M>0$, 使得 $\forall x\in U(x_0)$, 有 $|f(x)|\le M$.



定理2(局部保号性)： 若 f 在 x_0 连续且 $f(x_0)>0$，

则 $\forall r\in(0,f(x_0)), \exists\delta>0$，当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时，

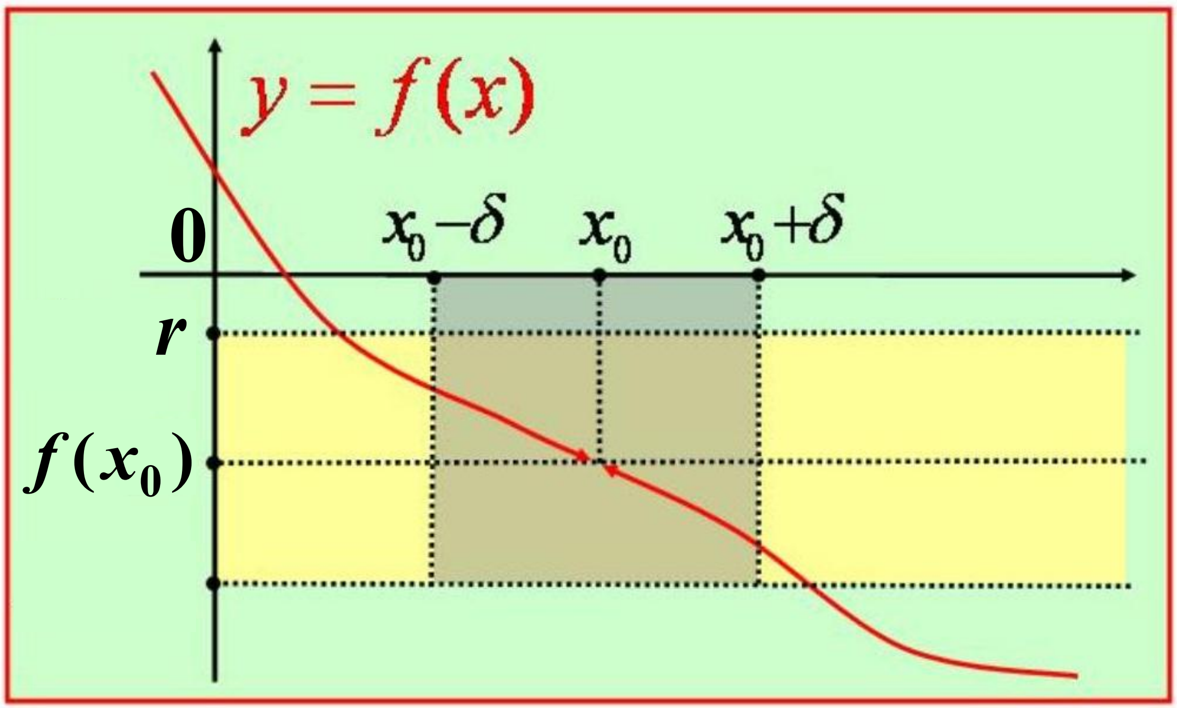
有 $f(x)>r>0$.



定理2(局部保号性)：若 f 在 x_0 连续且 $f(x_0)<0$,

则 $\forall r\in(f(x_0),0)$, $\exists\delta>0$, 当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时,

有 $f(x)<r<0$.



定理3： 若函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 连续，则

(1) $f(x) \pm g(x)$；　　(2) $f(x)g(x)$；

(3) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \, (g(x_0) \neq 0)$

在点 x_0 也连续.

注： 有理函数 $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $\tan x$, $\cot x$ 在定义域

的每一点连续.

定理4： 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，函数 $f(u)$ 在点 a 连续，则

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(a)=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

定理 4′： 设 $y=f(u)$ 在 $u=a$ 连续，$u=\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，且 $\varphi(x_0)=a$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 $x=x_0$ 连续.

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)].$$

例1、求 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2-\dfrac{\sin x}{x}}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\sin(1-x^2)$.

二、闭区间上连续函数的基本性质

定义：(1) 设函数 $f(x)$ 定义在数集 D 上，若 $\exists x_0 \in D$，

使得 $\forall x \in D$，有：

$$f(x) \le f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在数集 D 上有最大值 $f(x_0)$. 记为

$$f(x_0) = \max_{x \in D} f(x).$$

(2) 设函数 $f(x)$ 定义在数集 D 上，若$\exists x_0 \in D$，使得$\forall x \in D$，有：

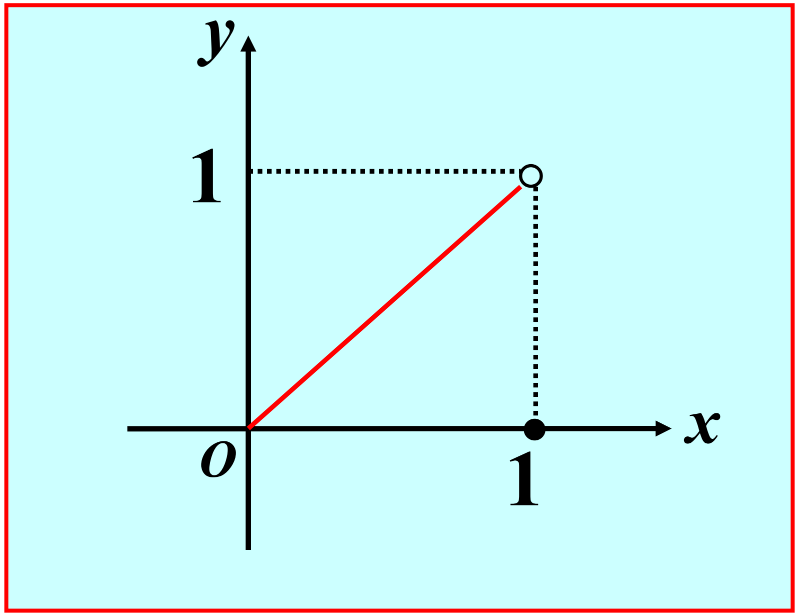
$$f(x) \geq f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在数集 D 上有最小值 $f(x_0)$. 记为

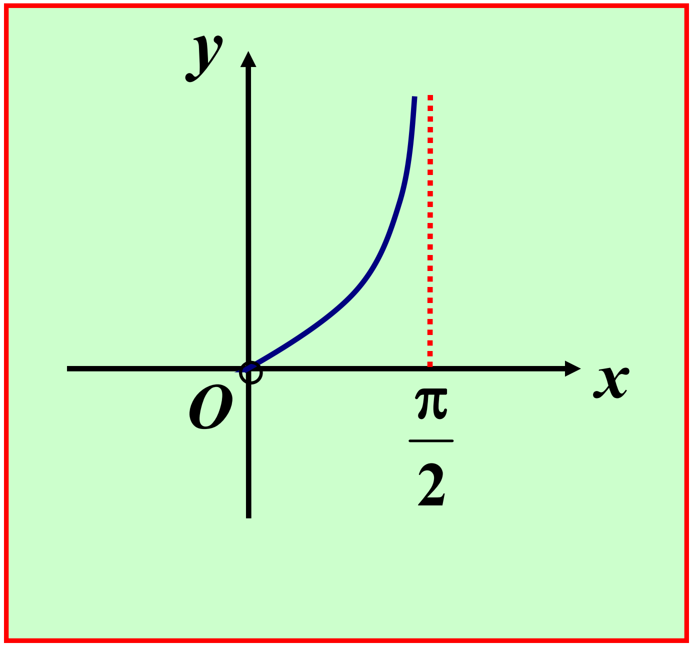
$$f(x_0) = \min_{x \in D} f(x).$$

例2、求下列函数的最大值和最小值。

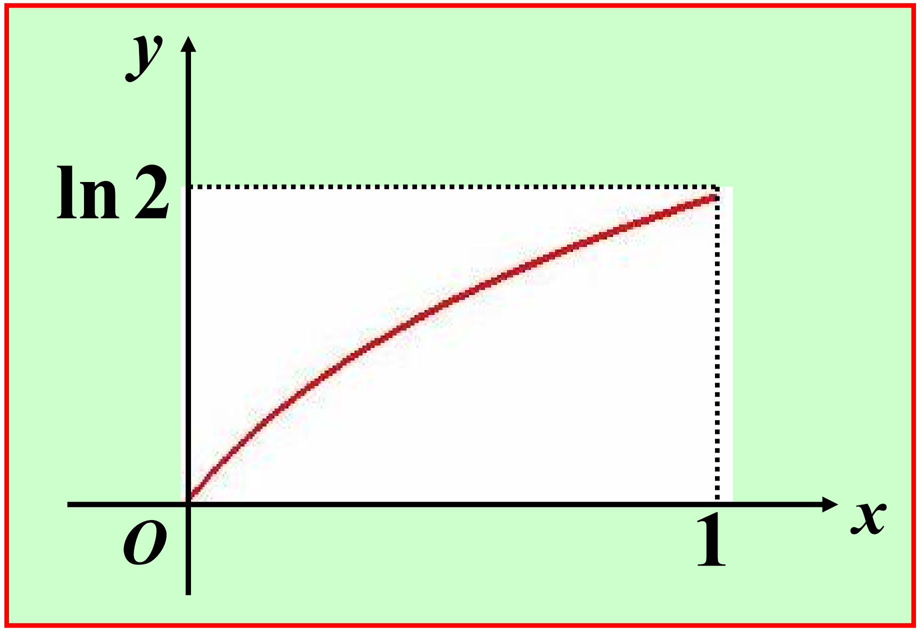
$$(1)\ f(x) = x - [x],\ x \in [0,1].$$

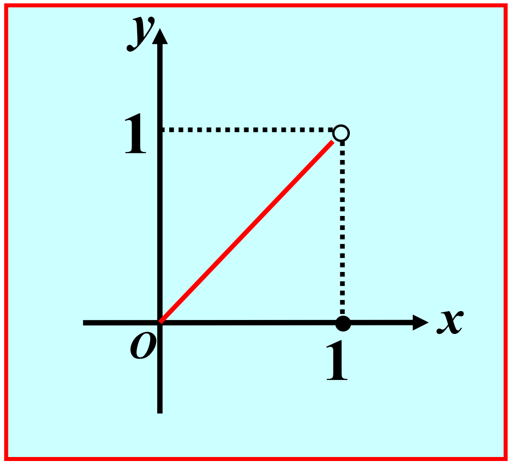


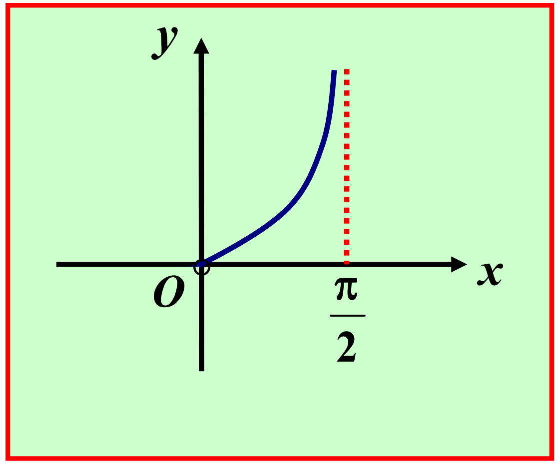
(2) $f(x)=\tan x$, $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

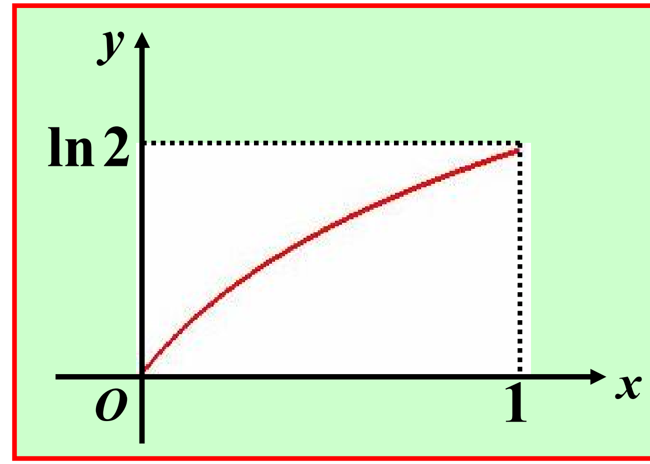


(3) $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in [0,1]$.









$f(x) = x - [x]$ 在 $[0,1]$ 不连续.

闭区间

$f(x) = \tan x$ 在 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 连续.

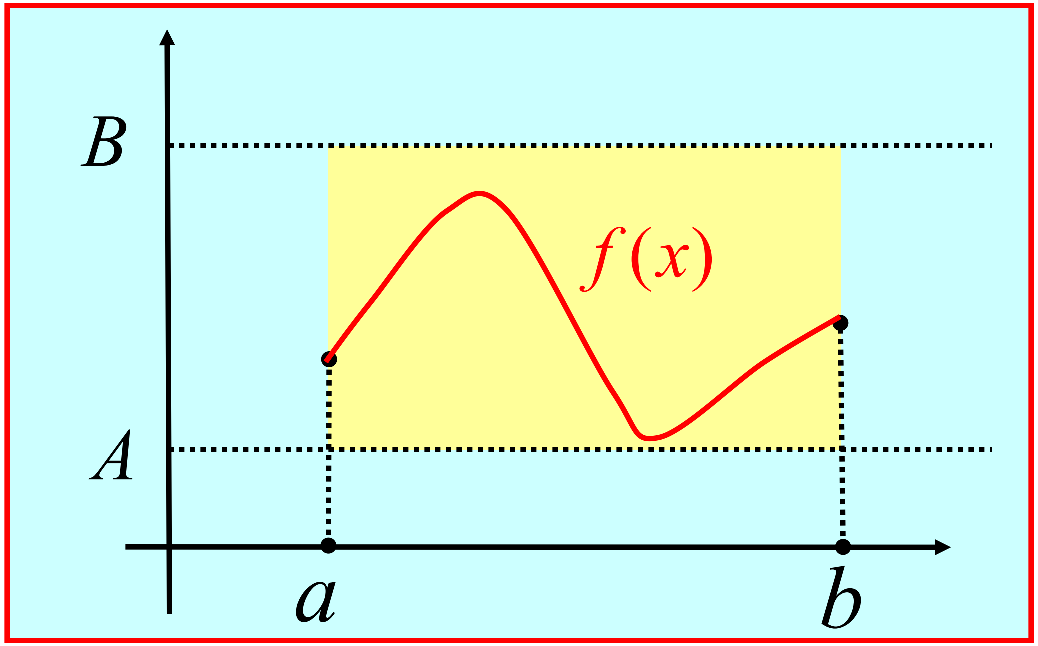
开区间

$f(x) = \ln(1 + x)$ 在 $[0,1]$ 连续.

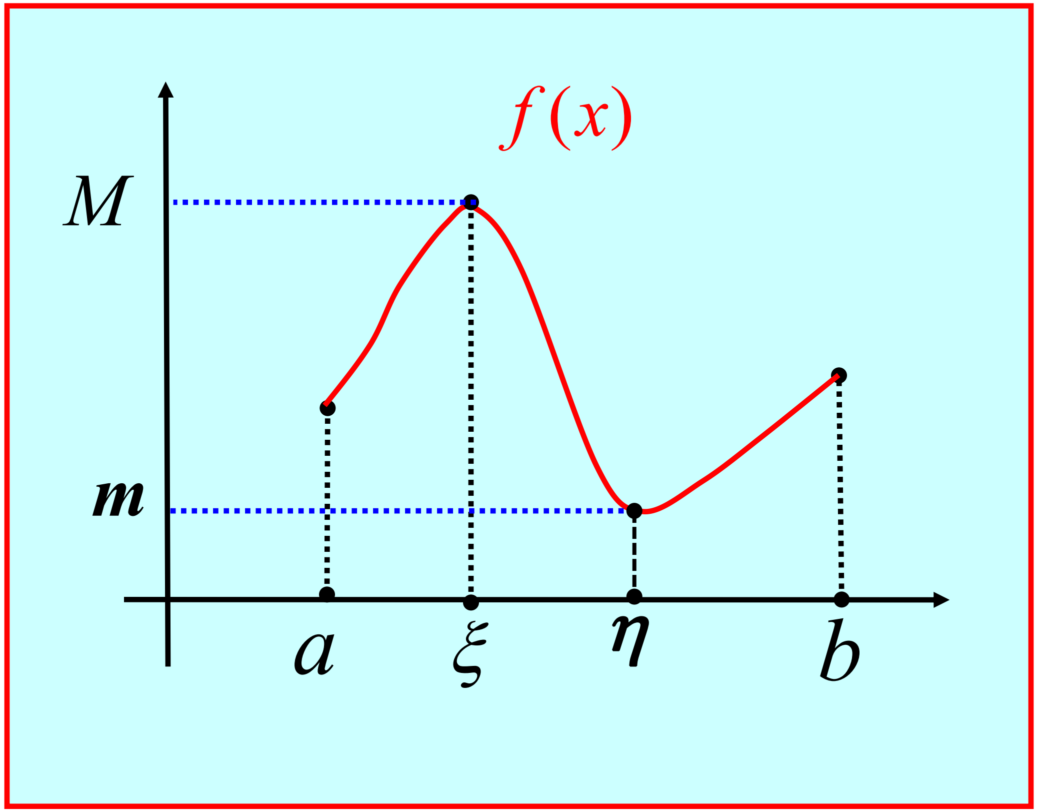
闭区间

有最大、最小值

引理: 若 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界 .



定理5(最值定理)： 若 $f(x)\in C[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值．

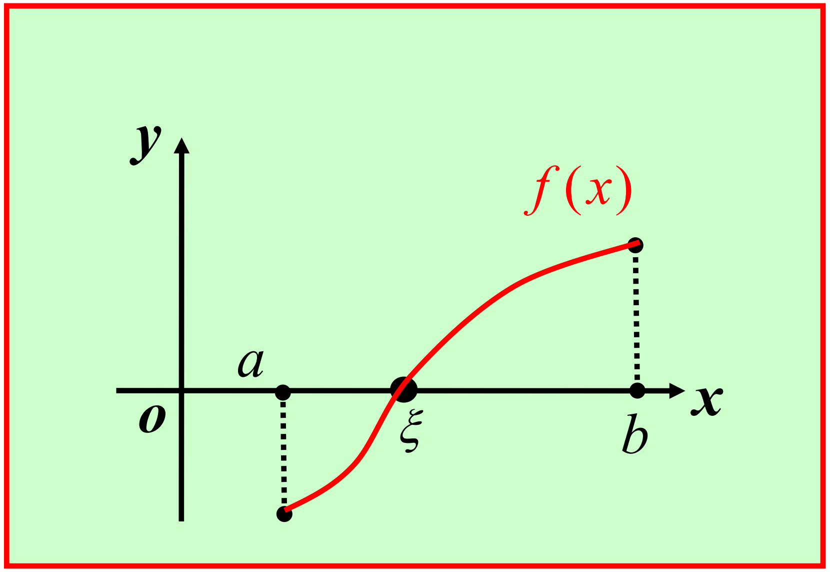


$$\sup_{x\in D} f(x)=M.$$

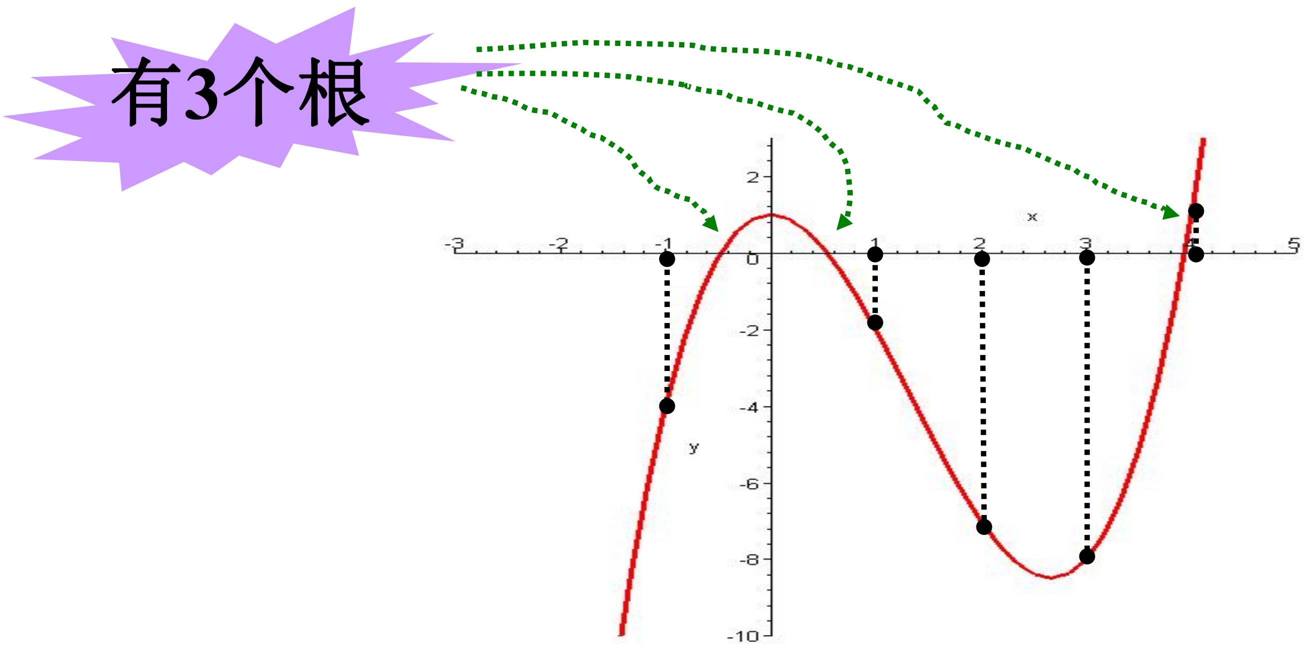
$$\inf_{x\in D} f(x)=m.$$

定理6(根的存在定理): 设 $f(x) \in C[a,b]$, $f(a)f(b) < 0$,

则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = 0$.



例3、证明：方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根 .

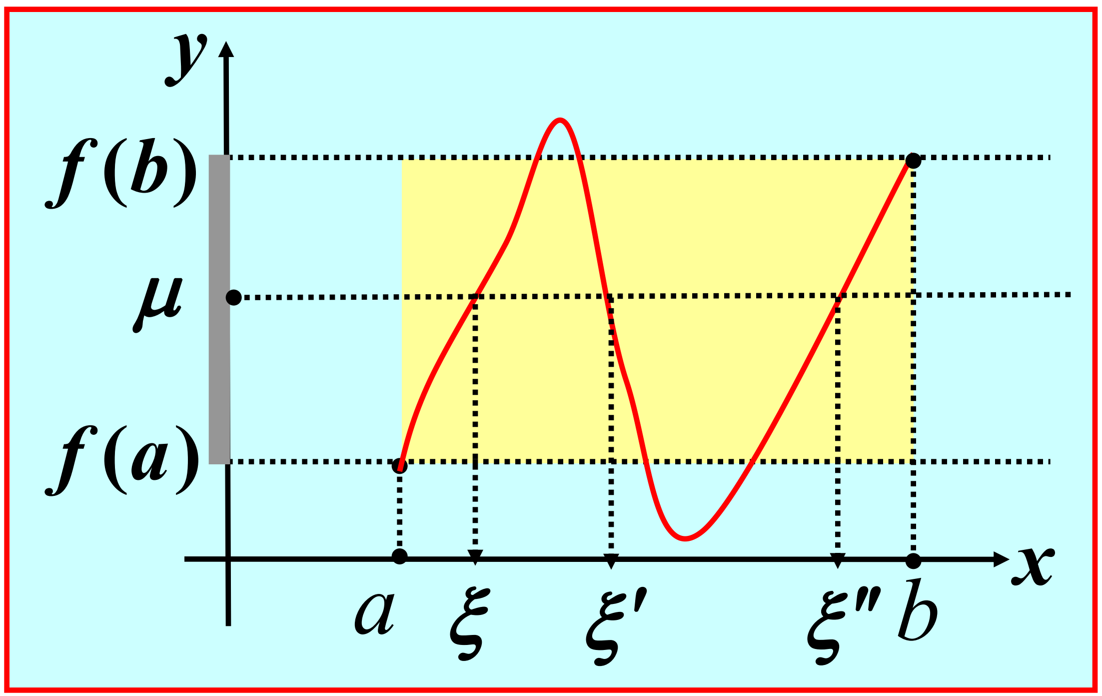


注：若 $f(x)\in C[a,b]$ 且严格单调，若 $f(a)f(b)<0$，则 $f(x)=0$ 有唯一实根.

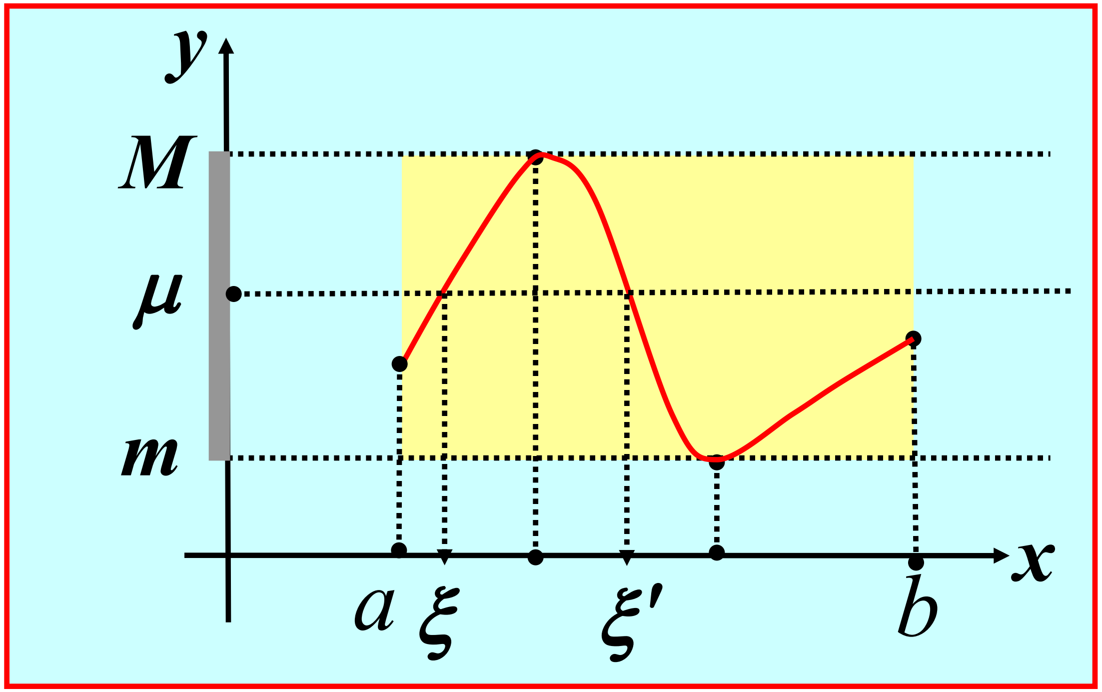
定理7(介值定理)： 若 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(a)\neq f(b)$，

则对介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一实数 μ，存在

$\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\mu$.



推论: 设 $f(x)\in C[a,b]$，且 M 和 m 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值，则对任意 $\mu\in(m,M)$，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\mu$.



例4、设 $a>0, n$ 为正整数，证明存在唯一正数 x_0，使得 $x_0^n = a$.

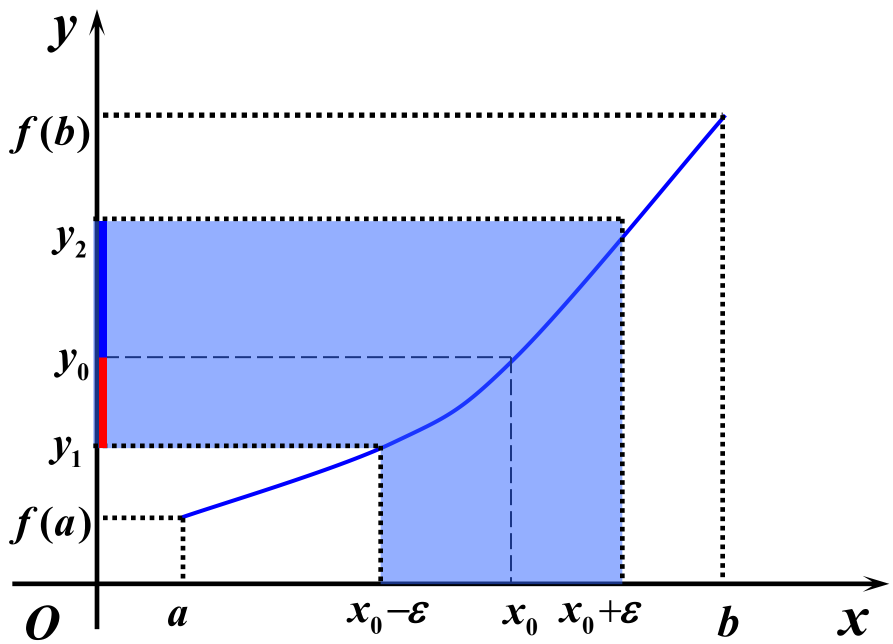
例5、设 $f(x)\in C[a,b]$，且

$$f([a,b])\subset[a,b].$$

证明：存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)=x_0$.

三、反函数的连续性

定理8： 若 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单增 (减) 且连续，则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在区间 $[f(a), f(b)]$ (或 $[f(b), f(a)]$) 上严格单增 (减)且连续.



注： 反三角函数的连续性

$\arcsin x$ 与 $\arccos x$ 在 $[-1,1]$ 连续；

$\arctan x$ 与 $arc\cot x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续.

四、一致连续性

定义2：设 $f(x)$为定义在区间 I 上的函数, 若任意

$\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $x_1, x_2 \in I$,

只要$|x_1 - x_2| < \delta$, 就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

注：若 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续, 则 $f(x)$ 在 I 上连续． 反之不真.

例6、 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(a,1]$ 上一致连续

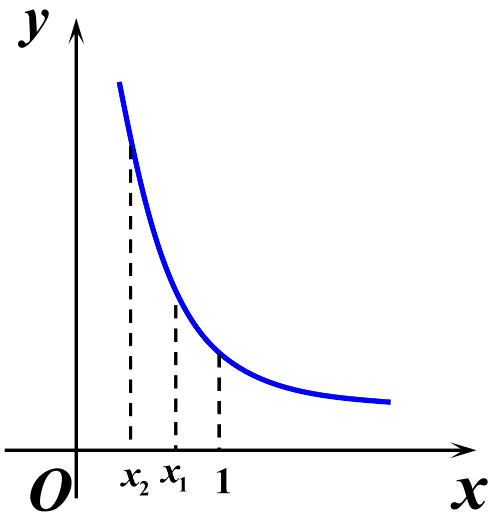
(其中 $0<a<1$), 在 $(0,1]$ 上不一致连续.

- $f(x)$在区间 I 上不一致连续:

  $\exists \varepsilon_0>0, \forall \delta>0, \exists x_1, x_2 \in I,$

  虽然 $|x_1-x_2|<\delta$, 但

  $|f(x_1)-f(x_2)|\geq \varepsilon_0$.



思考：函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续与一致连续的区别。

(1) 对于 $\varepsilon > 0$,

若 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$.

若 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续，则 $\delta = \delta(\varepsilon)$.

(2) 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$,

若 $\delta(x_0, \varepsilon)$ 随着 x_0 的变化有一个正下界

η, 则 $f(x)$ 在 I 上一致连续 .

命题： 设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上. 证明：$f(x)$ 在 I 上一致连续的充要条件 是对任意数列 $\{x_n'\},\{x_n''\}\subset I$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n')-f(x_n'')]=0.$$

- $f(x)$ 在 I 上不一致连续 $\Leftrightarrow$

  存在 $\{x_n'\},\{x_n''\}\subset I$，虽然 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，

  但 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n')-f(x_n'')]\neq 0$.

例7、证明：$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

问题：连续函数在什么条件下是一致连续的？

定理9（一致连续性定理）若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

例8、证明：若 $f(x)$ 分别在区间 I_1 和 I_2 上一致连续，且 $I_1 \cap I_2 = \{c\}$，则 $f(x)$ 在 $I_1 \cup I_2$ 上一致连续。

例9、证明 $f(x) = \sin\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。

作　业

习题4-2： 8、9、12、14、17