3.3　函数极限存在的条件

归结原则

单调有界定理

柯西收敛准则

一、归结原则

定理1: 设 f 在 $U^{o}(x_0,\delta')$ 有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是对任一数列 $\{x_n\}\subset U^{o}(x_0,\delta')$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

判断函数极限不存在的方法：

1、若存在数列$\{x_n\}$，其中$x_n \neq x_0$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，

使得$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$不存在，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\text{不存在}.$$

判断函数极限不存在的方法：

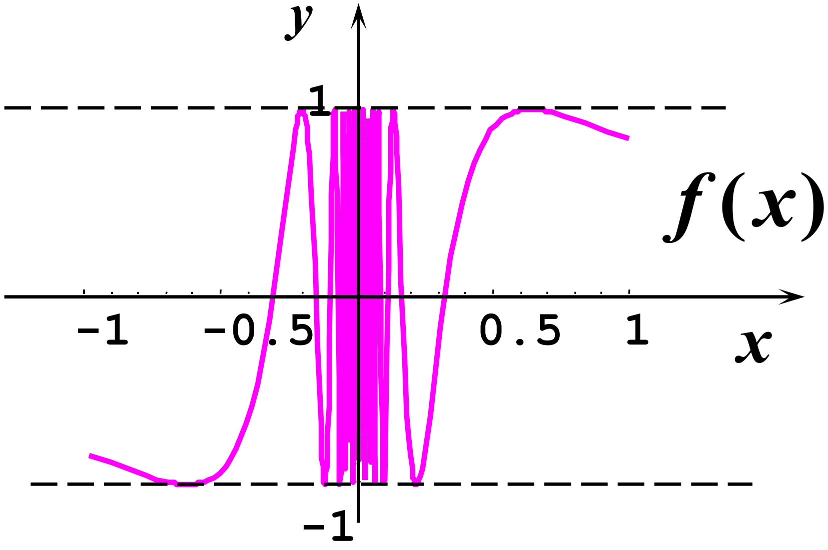
2、 若存在数列$\{x_n\}$和$\{x_n'\}$，其中$x_n, x_n' \neq x_0$且

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n' = x_0$，使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x_n'),$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在．

例1、证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在 .



$$f(x)=\sin\frac{1}{x}$$

$x \to x_0^+$ 的归结原则：

定理2： 设 f 在 $U_+^0(x_0)$ 有定义，则 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 的充要条件是对 任一数列 $\{x_n\} \subset U_+^0(x_0)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

$x \to x_0^+$ 的归结原则:

定理2’：设 f 在 $U_+^0(x_0)$ 有定义，则 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 的充要条件是对任一递减数列 $\{x_n\} \subset U_+^0(x_0)$，且 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$，有

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

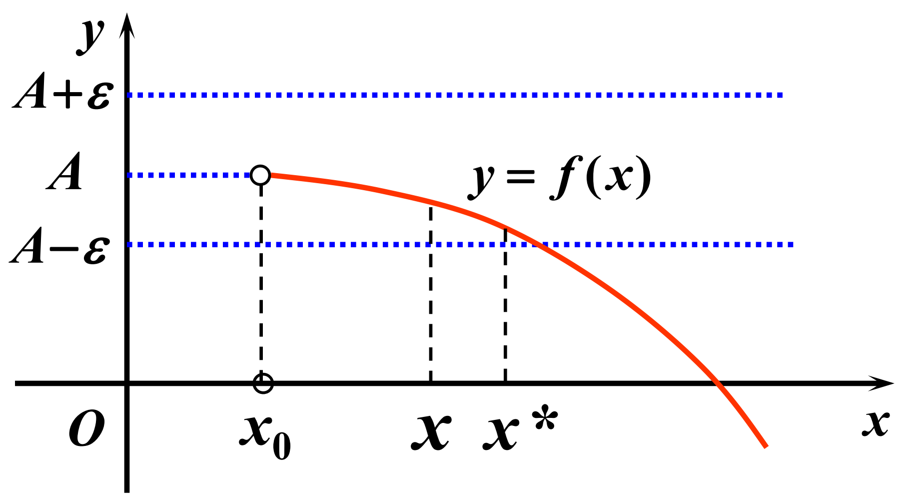
练习：写出函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 的归结原则。

例2、设 $f(x)$ 为周期函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则 $f(x)\equiv 0$.

二、单调有界定理

定理3: 设 f 为定义在 $U_{+}^{\circ}(x_0)$ 上的单调有界函数,

则右极限 $\lim\limits_{x \to x_0^{+}} f(x)$ 存在 .



三、柯西收敛准则

定理4： 设 f 在$U^{\mathrm{o}}(x_0,\delta')$有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta<\delta'$，对任意$x',x''\in U^{\mathrm{o}}(x_0,\delta)$，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在的柯西收敛准则

定理4′: 设 f 在$U^0(x_0,\delta')$有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在的充要条件是：$\exists\varepsilon>0,\forall\delta<\delta'$,存在 $x',x''\in U^0(x_0,\delta)$，有

$$|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon.$$

例3、用柯西收敛准则证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在 .

例4、证明狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\notin Q\end{cases}$

处处无极限.

定理5： 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在的充要条件是：$\forall\varepsilon>0,\exists M>a$，对任意 $x',x''>M$，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$不存在的柯西收敛准则

定理5$'$： 设 f 在 $[a,+\infty)$上有定义，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$不存在的充要条件是：$\exists \varepsilon > 0, \forall M > a$,存在 $x', x'' > M$，有

$$|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon.$$

例5、 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$不存在.

作　　业

习题3-3： 1、3(2)