第十三章　函数列与函数项级数

1 一致收敛性

2 一致收敛函数列与函数项级数的性质

13.1 一致收敛性

1. 函数列及其一致收敛性
2. 函数项级数及其一致收敛性
3. 函数项级数的一致收敛判别法

一、函数列及其一致收敛性

设

$$f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots \qquad (1)$$

是一列定义在同一数集 E 上的函数，称为定义在 E 上的函数列，简记为 $\{f_n\}$.

设 $x_0 \in E$,若数列

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \cdots, f_n(x_0), \cdots .$$

收敛，则称 x_0 为函数列 (1) 的收敛点.

若此数列发散，则称函数列 (1) 在 x_0 发散.

定义1： 设函数列$\{f_n\}$定义在集合 E 上，称

$$D=\{x\in E \mid 数列\{f_n(x)\}收敛\}$$

为$\{f_n\}$的**收敛域**。

定义2： 函数列$\{f_n\}$在收敛域 D 由

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

定义的函数 $f(x)$ 称为$\{f_n\}$的**极限函数**。

注：函数列$\{f_n\}$的极限

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in D:$$

对任意 $x\in D$, 任给 $\varepsilon > 0$,存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时，

$$| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$$

其中 N 既与ε有关也与 x 有关.

例1、设 $f_n(x)=x^n\,(n=1,2,\cdots)$，证明函数列 $\{f_n\}$ 的收敛域为 $(-1,1]$，且其极限函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

注：函数列 $\{f_n\}$ 中任一函数 $f_n(x)$ 在收敛域上连续，但极限函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 不连续。

例2、设 $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}\ (n=1,2,\cdots)$，求函数列 $\{f_n\}$ 的收敛域和极限函数。

收敛域 $(-\infty,+\infty)$，极限函数 $f(x)=0.$

注：$f_n'(x)=\cos nx$，当 $x\neq 2k\pi$ 时，$\{f_n'(x)\}$ 不收敛，

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x)\neq f'(x).$$

注： 对函数列$\{f_n\}$的讨论

(1)确定收敛域；

(2)研究极限函数$f(x)$的三条解析性质

连续性、可微性、可积性。

定义3、设函数列 $\{f_n\}$ 与函数 f 都在数集 D 上有定义，

若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，

对所有 $x \in D$，都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

则称 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛于 f，记为

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \ (n \to \infty), x \in D.$$

注： N 仅与 ε 有关.

注：若 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)\ (n\to\infty), x\in D$，则 $\forall x\in D$

$$f_n(x)\to f(x)\,(n\to\infty).$$

例3、证明函数列 $\left\{\dfrac{\sin nx}{n}\right\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于函数 $f(x)=0.$

$f_n(x) \rightrightarrows f(x)\ (n\to\infty), x\in D$ 的几何意义：

$\forall \varepsilon>0$,存在N,使得

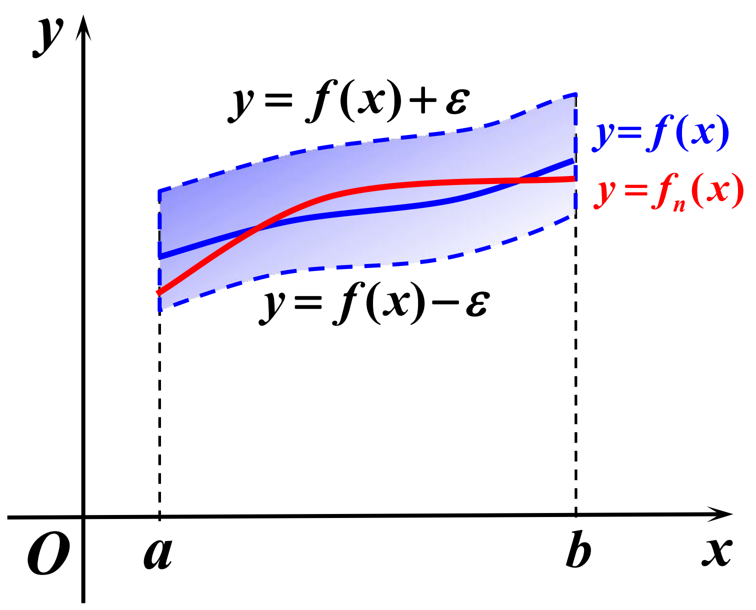
所有曲线

$$y=f_n(x)\ (n>N),$$

都落在曲线 $y=f(x)-\varepsilon$

与曲线 $y=f(x)+\varepsilon$ 所夹

的带状区域之间。

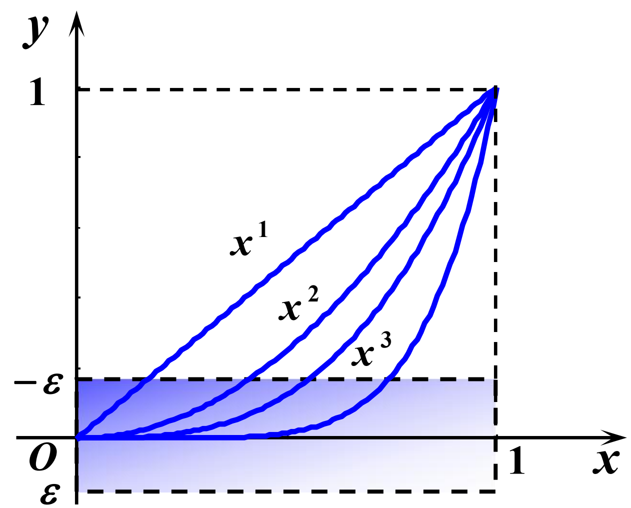


函数列$\{f_n\}$在 D 上不一致收敛于 f

存在 $\varepsilon_0>0$，对任何正整数 N，存在 $x_0\in D$ 以及 $m>N$，使得

$$|f_m(x_0)-f(x_0)|\geq\varepsilon_0.$$

例4、判断函数列$\{x^n\}$在区间$[0,1/2]$和$[0,1)$是否一致收敛。



定理1（函数列一致收敛的柯西准则）：

函数列$\{f_n\}$在集合D上一致收敛的充要条件是：对任意$\varepsilon>0$，存在N为正整数，当$m,n>N$时，对$\forall x\in D$，都有

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon .$$

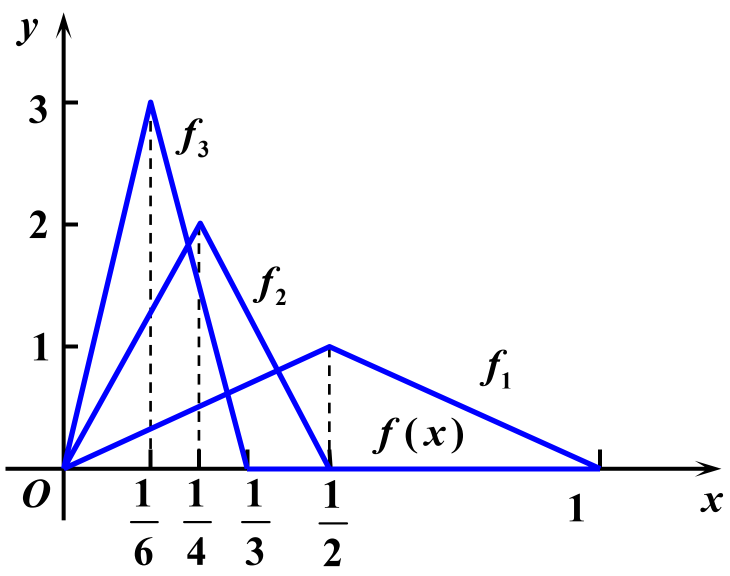
定理2: 函数列$\{f_n\}$在集合 D 上一致收敛于 f 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0.$$

例5、设

$$f_n(x)=\begin{cases} 2n^2x, & 0\le x\le \dfrac{1}{2n}, \\ 2n-2n^2x, & \dfrac{1}{2n}<x\le \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n}<x\le 1, \end{cases} \quad n=1,2,\cdots,$$

证明:函数列$\{f_n\}$在$[0,1]$上不一致收敛。



定义4： 设函数列$\{f_n\}$与f定义在区间I上，若对任意闭区间$[a,b]\subset I$，都有$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于f，则称$\{f_n\}$在I上内闭一致收敛于f.

如： $\{x^n\}$在$[0,1)$上内闭一致收敛于$f(x)=0$.

二、函数项级数及其一致收敛性

设 $\{u_n(x)\}$ 是定义在数集 E 上的一个函数列，称

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots,\ x\in E$$

为定义在 E 上的函数项级数，简记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

称 $$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x),\quad x\in E, n=1,2,\cdots$$

为函数项级数的部分和函数列.

设 $x_0 \in E$,若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛 ,即

$$S_1(x_0), S_2(x_0), \cdots, S_n(x_0), \cdots$$

收敛，则称 x_0 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点.

否则，称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在点 x_0 发散.

定义5：设函数项级数$\sum u_n(x)$定义在集合 E 上，称

$$D=\{x\in E\mid \sum u_n(x)\text{收敛}\}$$

为函数项级数$\sum u_n(x)$的收敛域。

定义6：函数项级数 $\sum u_n(x)$在收敛域 D 由

$$S(x)=\sum u_n(x)$$

定义的函数 $S(x)$称为$\sum u_n(x)$的和函数。

例6、求定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + \cdots + x^{n} + \cdots$$

的收敛域与和函数。

定义7： 若函数项级数$\sum u_n(x)$的部分和函数列在数集 D 上一致收敛于 $S(x)$，则称$\sum u_n(x)$在 D 上一致收敛于 $S(x)$.

若$\sum u_n(x)$在任意闭区间$[a,b]\subset D$上一致收敛，则称$\sum u_n(x)$在 I 上内闭一致收敛.

定理3(函数项级数一致收敛的柯西准则)：

函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛的充要条件是：对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N 为正整数，当 $n > N$ 时，对任意 $x \in D$ 及正整数 p，都有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon .$$

推论： 若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛，

则函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 0.

定理4： 函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛

于 $S(x)$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|S(x)-S_n(x)|=0.$$

（余项准则）

例7、证明函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

(1) 在 $(-1,1)$ 上不一致收敛；

(2) 在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛 .

注：当和函数容易求出时，余项准则是比较好用的一种判别一致收敛的方法。

三、函数项级数的一致收敛性判别法

定理5（魏尔斯特拉斯判别法，或优级数判别法）

设函数项级数 $\sum u_n(x)$ 定义在数集 D 上，

$\sum M_n$ 为收敛的正项级数，若对任意 $x \in D$，有

$$|u_n(x)| \le M_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

则函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

例8、证明函数项级数

$$\sum \frac{\sin nx}{n^2}, \quad \sum \frac{\cos nx}{n^2}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛．

定理5：（阿贝尔判别法） 若

(i) 函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛；

(ii) 对任意 $x \in I, \{v_n(x)\}$ 为单调数列；

(iii) $\{v_n(x)\}$ 在 I 上一致有界，即存在 $M > 0$，

对 $\forall x \in I, \forall n \in Z^+$，有 $|v_n(x)| \le M$，

则函数项级数 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛．

（阿贝尔判别法）若

(i) 级数 $\sum a_n$ 收敛

(ii) $\{b_n\}$ 为单调有界数列

则级数 $\sum a_n b_n$ 收敛．

定理5：（阿贝尔判别法） 若

(i) 函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛；

(ii) 对任意 $x \in I, \{v_n(x)\}$ 为单调数列;

(iii) $\{v_n(x)\}$ 在 I 上一致有界，即 存在 $M > 0$,

对 $\forall x \in I, \forall n \in Z^+$, 有 $|v_n(x)| \le M$,

则函数项级数 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛 .

（阿贝尔引理）若

(i) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 单调，记 $\varepsilon = \max\limits_{1 \le k \le n}\{|\varepsilon_k|\}$;

(ii) $|\sigma_k| \le A (1 \le k \le n)$, 其中 $\sigma_k = v_1 + \cdots + v_k$,

则 $$\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k\right| \le 3\varepsilon A.$$

定理6：（狄利克雷判别法）若

(i) $\sum u_n(x)$ 的部分和数列在区间 I 上一致有界；

(ii) 对任意 $x \in I, \{v_n(x)\}$ 为单调数列；

(iii) $v_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 0，

则函数项级数 $\sum u_n(x) v_n(x)$ 在 I 上一致收敛．

（狄利克雷判别法）若

(i) $\{a_n\}$ 为单调数列 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$；

(ii) 级数 $\sum b_n$ 的部分和数列有界 ，

则级数 $\sum a_n b_n$ 收敛．

例9、证明函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+n)^n}{n^{n+1}}$$

在[0, 1]上一致收敛.

例10、若数列$\{a_n\}$单调且收敛于零，证明

$$\sum a_n\cos nx$$

在$[\alpha,2\pi-\alpha]\ (0<\alpha<\pi)$上一致收敛。

作业

习题13-1：1(2)(5)、2;

3(1)(4)、4