13.2 一致收敛函数列与函数项级数的性质

1 一致收敛函数列的性质

2 一致收敛函数项级数的性质

一、一致收敛函数列的性质

定理1(连续性):

设$\{f_n(x)\}$是区间I上的连续函数列,若$\{f_n(x)\}$在I上一致收敛于$f(x)$,则$f(x)$在I上也连续。

即 $$\lim_{x\to x_0}(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to x_0} f_n(x)).$$

推论1: 设$\{f_n(x)\}$是区间I上的连续函数列，且

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. 若$f(x)$在$I$上不连续，

则$\{f_n(x)\}$在I上不一致收敛于$f(x)$.

例: $f_n(x) = x^n$是$(-1,1]$上的连续函数列，极限函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

在$x = 1$不连续，则$\{x^n\}$在$(-1,1]$上不一致收敛.

推论2: 设 $\{f_n(x)\}$ 是区间 I 上的连续函数列,若 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上内闭一致收敛于 $f(x)$,则 $f(x)$ 在 I 上也连续.

例: $f_n(x)=x^n$ 在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛,极限函数 $f(x)=0$ 在 $(-1,1)$ 上连续.

定理2(可积性)：

设$\{f_n(x)\}$是区间I上的连续函数列，若$\{f_n(x)\}$在I上一致收敛于$f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

即 $$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

例1、 设

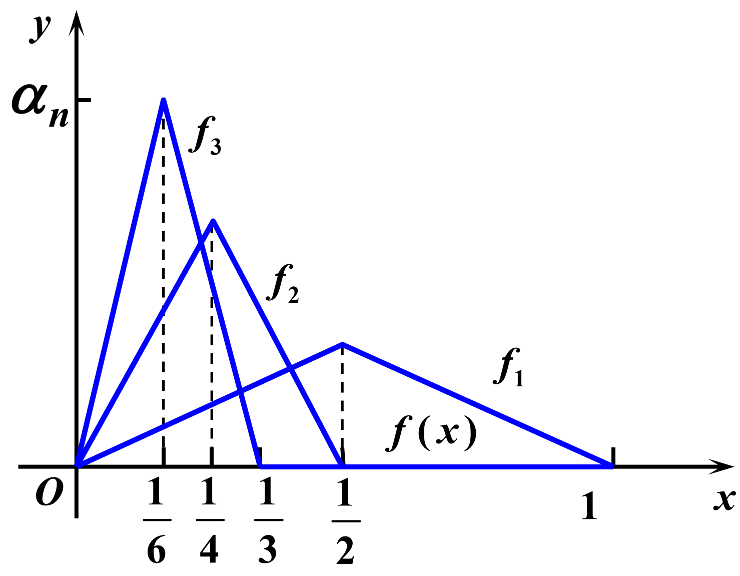
$$f_n(x)=\begin{cases}2n\alpha_n x, & 0\le x<1/(2n)\\ 2\alpha_n-2n\alpha_n x, & 1/(2n)\le x<1/n,\\ 0, & 1/n\le x\le 1\end{cases}$$

讨论 $(1)\alpha_n=1/n\ (\forall n)$

$(2)\alpha_n=1\ (\forall n)$ 时

$$\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$$

是否分别成立？



定理3(可微性):

设$\{f_n(x)\}$是区间$[a,b]$上的函数列,且$x_0\in[a,b]$为$\{f_n(x)\}$的收敛点.若$\{f_n'(x)\}$是I上的连续函数列且$\{f_n'(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛,则

$$\frac{d}{dx}(\lim_{n\to\infty} f_n(x))=\lim_{n\to\infty}(\frac{d}{dx}f_n(x)).$$

注: 在定理3的条件下,$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛。

推论：设$\{f_n(x)\}$是区间I上的函数列，且$x_0 \in I$为$\{f_n(x)\}$的收敛点.若$\{f_n'(x)\}$是I上的连续函数列且$\{f_n'(x)\}$在I上内闭一致收敛，则

$$\frac{d}{dx}(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to\infty}(\frac{d}{dx} f_n(x)).$$

二、一致收敛函数项级数的性质

定理5（连续性）：

设 $\{u_n(x)\}$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数列，若 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$，则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上也连续. 即

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sum u_n(x)\right)=\sum\left(\lim_{x\to x_0} u_n(x)\right).$$

定理6（逐项可积性）：

设$\{u_n(x)\}$是区间$[a,b]$上的连续函数列，若

$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛，则

$$\sum \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum u_n(x)\right) dx.$$

定理7（逐项求导性）：

设 $\{u_n'(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数列，$x_0 \in [a,b]$ 为 $\sum u_n(x)$ 的收敛点，且 $\sum u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则

$$\sum\left(\frac{d}{dx}u_n(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(\sum u_n(x)\right).$$

例2、设 $u_n(x)=\dfrac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)$，$n=1,2,\cdots$.

证明 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，并讨论

其和函数在 $[0,1]$ 上的连续性，可积性，可微性.

例3、设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$, $x>0$. 求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} S(t)dt$.

例4、设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$, $x\in(-\infty,+\infty)$. 证明:

$S(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且有连续的导函 数.

作业：

习题13-2：4、8