10.4　旋转曲面的面积

1 定积分的微元法

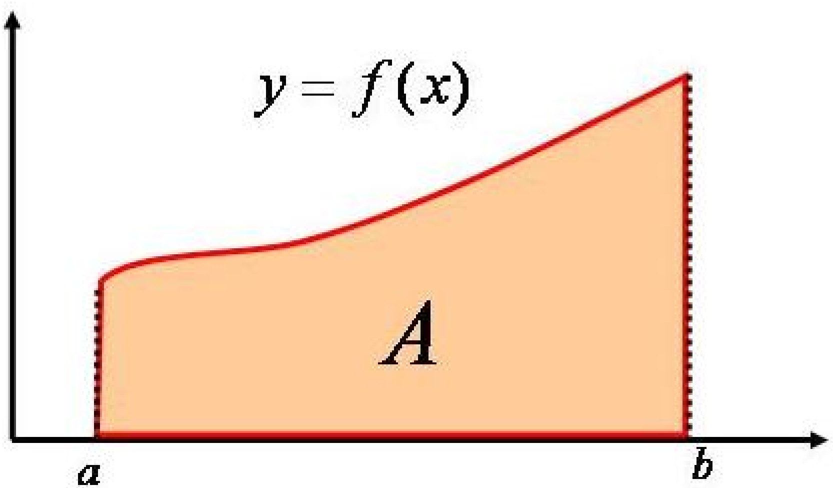
2 旋转曲面的面积

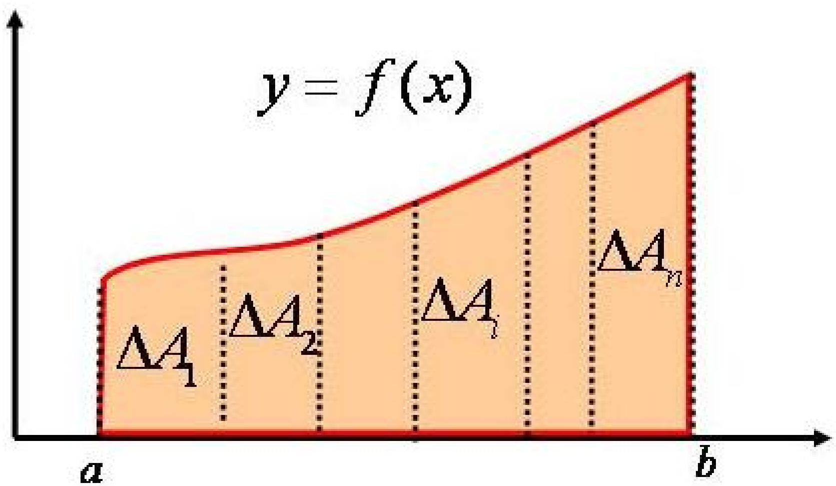
一、定积分的微元法

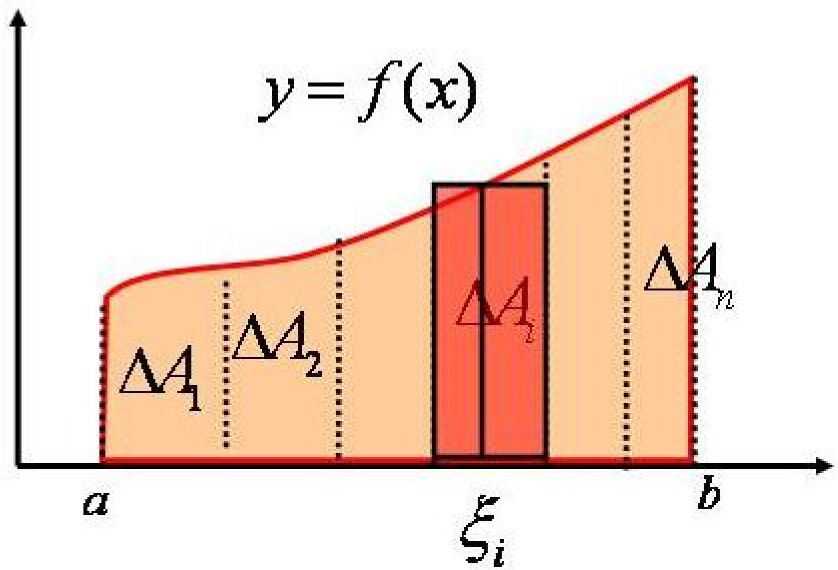
曲边梯形的面积

(1) 面积 A 由函数 $f(x)$ 和区间 $[a,b]$ 确定；

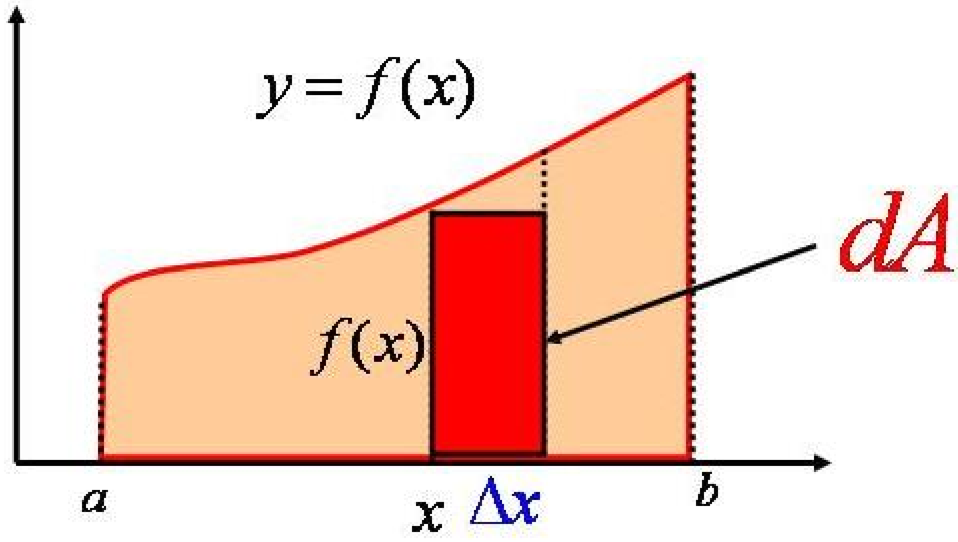
(2) 面积 A 具有区间可加性 $A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$；







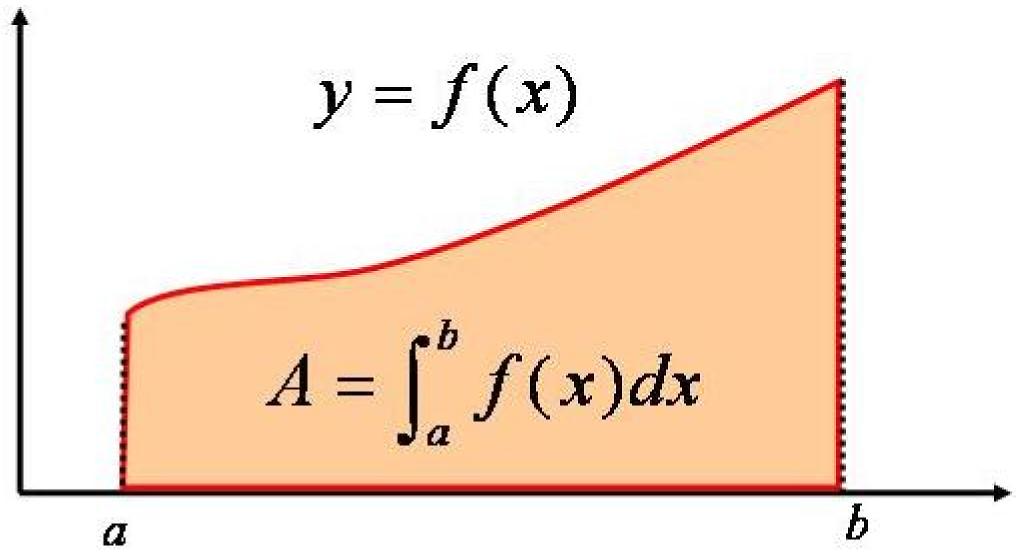
(3) 第 i 个小曲边梯形面积 $\Delta A_i \approx \Delta' A_i = f(\xi_i)\Delta x$；



对任意$[x, x+\Delta x] \subset [a,b]$，$\Delta A \approx \Delta' A = f(\xi)\Delta x$.

误差 $\Delta' A - \underline{f(x)\Delta x} = o(\Delta x)$.

面积微元：$dA = f(x)\Delta x = f(x)dx$.



(4) 面积 $A = \int_a^b dA = \int_a^b f(x)dx$.

用微元法建立定积分模型的一般步骤：

1、所求量 $\Phi=\Phi(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上, $\Phi(a)=0$, 求 $\Phi(b)$;

2、量 Φ 具有区间可加性 $\Phi=\sum_{i=1}^{n}\Delta\Phi_i$;

3、$\Delta\Phi$ 用近似可求量 $\Delta'\Phi$ 代替, 且

$$\Delta\Phi\approx\Delta'\Phi=f(x)\Delta x+o(\Delta x),$$

则 $\Delta'\Phi\approx f(x)\Delta x$, 从而 Φ 的微元 $d\Phi=f(x)dx$.

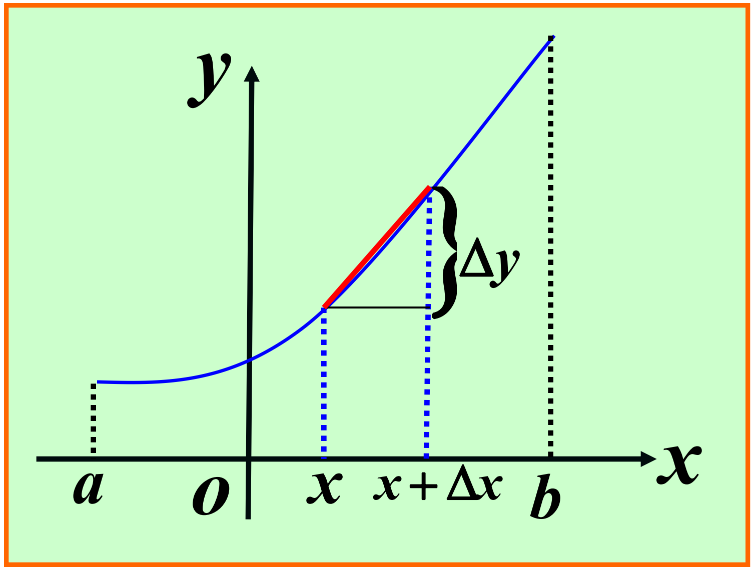
4、所求量 $\Phi=\int_a^b d\Phi=\int_a^b f(x)dx.$

注：定积分的实质是具有可加性的连续变量的求和问题.

如：几何中的面积、体积、弧长；

物理中的功、压力、引力等.

✦ 用微元法求 曲线 $C:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}(t \in [\alpha, \beta])$ 的弧长.



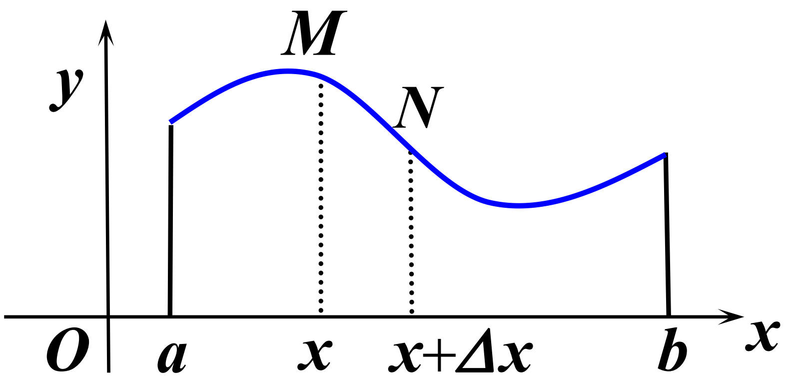
$$\Delta s \approx \Delta' s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \approx \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,\Delta t$$

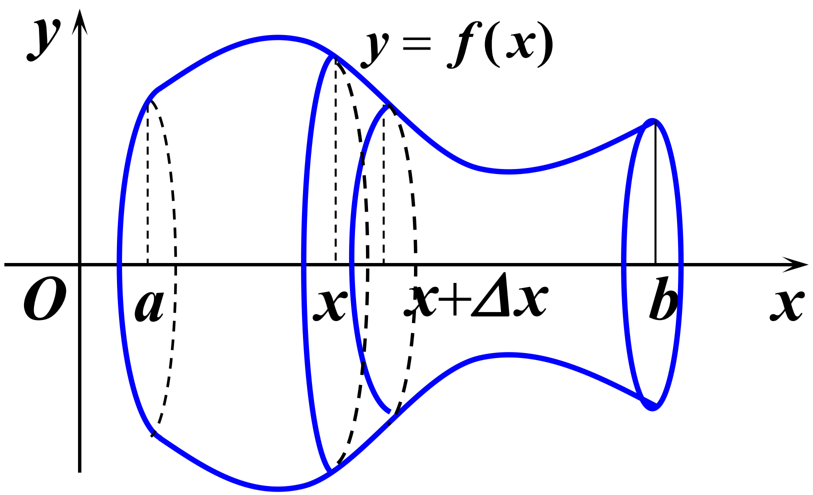
弧长元素：$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$.

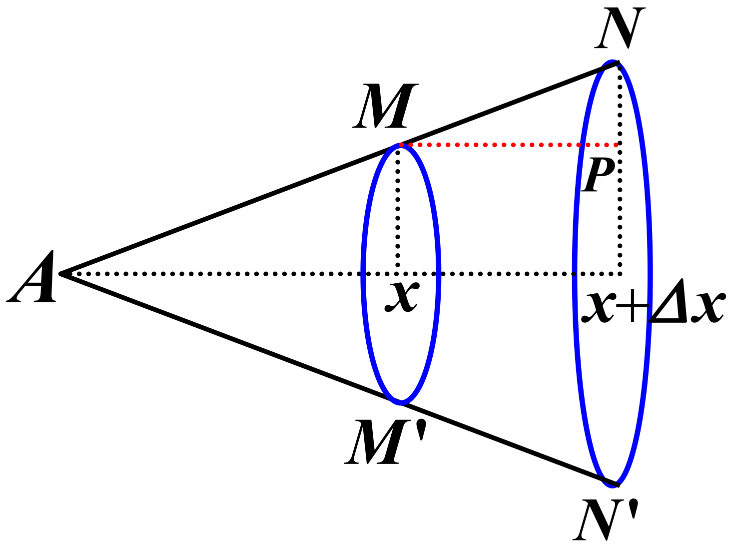
弧长：$$\boxed{s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt\ .}$$

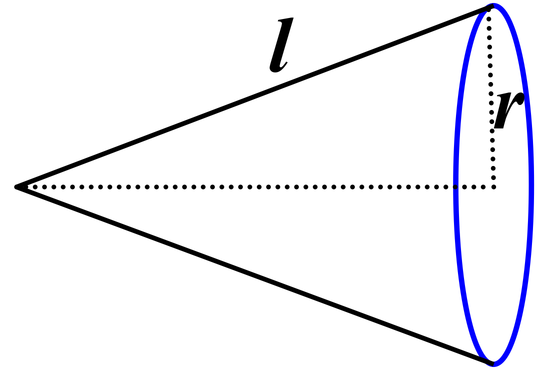
二、旋转曲面的面积

求平面光滑曲线 $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ $(f(x)\geq 0)$, 绕 x 轴旋转一周得到的旋转曲面的面积.









锥面面积： πrl

ΔS 近似于圆台 $MNN'M'$ 的面积．

$$\Delta S \approx \pi[2f(x)+\Delta y]\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

旋转曲面微元

$$\mathrm{d}S = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x,$$

旋转曲面的面积为

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

- 若光滑曲线由 $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$ 给出，且 $y(t) \ge 0$，则曲线 C 绕 x 轴旋转所得旋转曲面的面积为

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

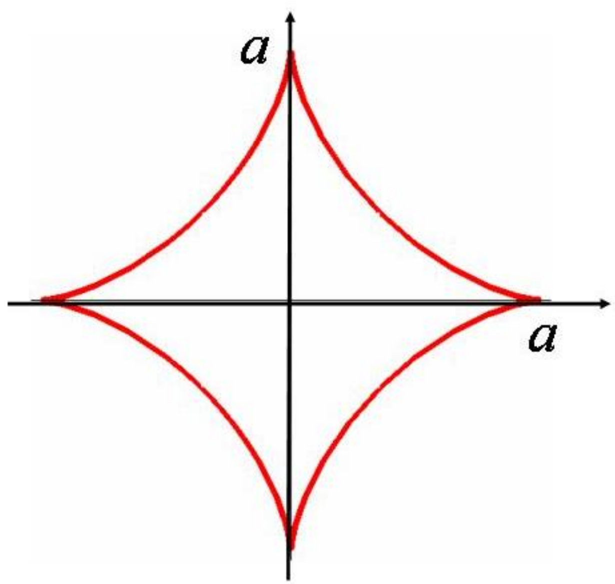
- 若光滑曲线 $r = r(\theta) \ge 0, \theta \in [\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$,则

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\, d\theta.$$

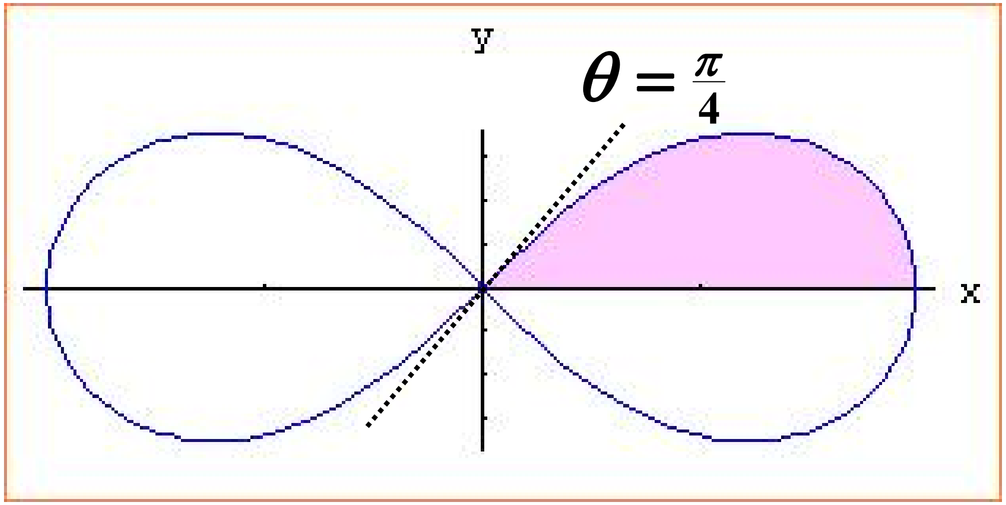
例1、求半径为 R 的球面面积。

例2、求星形线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 绕 x 轴

旋转所得旋转曲面的面 积.



例3、求双纽线 $r^2 = 2a^2\cos 2\theta\ (a>0)$ 绕极轴旋转一周所得旋转曲面的面积。



作　业

习题10-4：1(1)(2)、3(1)