§ 18.4　条件极值

1 问题的引入

2 拉格朗日乘数法

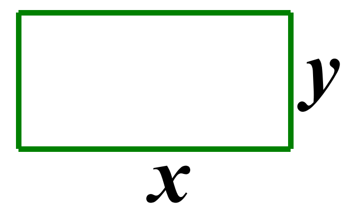
3 应用举例

一、问题的引入

引例1：某人要用100米长的篱笆围成一个长方形的庭院，如何围才能得到面积最大的庭院？

目标函数：$f(x,y)=xy$，

约束条件：$\varphi(x,y)=x+y-50=0$.



- 求目标函数在约束条件下的最大值.

引例2: 求曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 上的点到原点距离的最大值和最小值.

目标函数: $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

约束条件: $\varphi_1(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = 0$,

$\varphi_2(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0.$

- 求目标函数在约束条件下的最大、最小值.

定义：设目标函数

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\subset \mathrm{R}^n;$$

约束条件

$$\Phi:\ \varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\ k=1,2,\cdots,m\ \ (m<n).$$

记 $\Omega=\{P=(x_1,\cdots,x_n)\,|\,P\in D,\varphi_k(P)=0,1\le k\le m\}$,

若存在 $P_0\in\Omega$ 及 $\delta>0$，使得

$$f(P_0)\le f(P),\ \underline{\forall P\in\Omega\cap U(P_0,\delta)},\ (\text{或}\forall P\in\Omega)$$

则称 $f(P_0)$ 是 f 在约束条件 Φ 下的<u>极小值</u>.(最小值)

二、拉格朗日乘数法

目标函数：$z=f(x,y)$，　约束条件：$\varphi(x,y)=0$.

拉格朗日函数：$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$.

定理1：设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 在区域 D 上有一阶连续偏导数，$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的内点且

$$(\varphi_x(x_0,y_0),\varphi_y(x_0,y_0))\neq(0,0).$$

若 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值点，则存在 $\lambda_0\in R$，使得 (x_0,y_0,λ_0) 是 $L(x,y,\lambda)$ 的驻点.

定理2：设 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 与

$$\varphi_k(x_1,\cdots,x_n), k=1,\cdots m \ (m<n)$$

在区域 D 上有一阶连续偏导数，$P_0(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 为 D 的内点且

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{P_0} = m,$$

则存在 m 个常数 $\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\cdots,\lambda_m^{(0)}$，使得

$$(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\cdots,\lambda_m^{(0)})$$

为拉格朗日函数

$$L(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=$$

$$f(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k(x_1,\cdots,x_n)$$

的稳定点。

即 $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \cdots, \lambda_m^{(0)})$

是如下 $(n+m)$ 个方程的解。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = 0,\ i = 1,2,\cdots,n; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_k} = \varphi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0,\ k = 1,2,\cdots,m. \end{cases}$$

注：拉格朗日函数

$$L(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=$$

$$f(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k(x_1,\cdots,x_n)$$

的稳定点是目标函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在

约束条件 $\varphi_k(x_1,\cdots,x_n),k=1,\cdots m\ (m<n)$

下的可疑极值点。

拉格朗日乘数法求条件极值的步骤：

(1) 构造拉格朗日函数

$$L(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=$$

$$f(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k(x_1,\cdots,x_n)$$

(2) 解下列方程组得可疑极值点

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_i}=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}+\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}=0,\ i=1,2,\cdots,n;\\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_k}=\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\ k=1,2,\cdots,m.\end{cases}$$

(3) 判断可疑极值点是否为条件极值。

三、应用举例

例1、求曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 上的点到原点距离的最大值和最小值 .

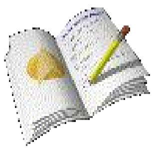
例2、求 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{r}\,(x,y,z,r>0)$$

下的极小值, 并证明不等式

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{-1}\le\sqrt[3]{abc},\text{其中}\,a,b,c>0.$$

例3、在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的第一卦限上求一点 P_0，使得过 P_0 的切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积 最小.



作业

习题18-4：1(3)、4