

数学分析(2)的主要内容:

第一部分: 积分 (上册: 第八至十一章)

主要内容: 不定积分、定积分、反常积分

第二部分: 级数 (下册: 第十二至十五章)

主要内容: 数项级数、函数项级数

(幂级数与傅里叶级数)

第八章 不定积分

微分法: $F'(x) = (?)$
积分法: $(?)' = f(x)$ } 互逆运算

换元积分法与分部积分法

1

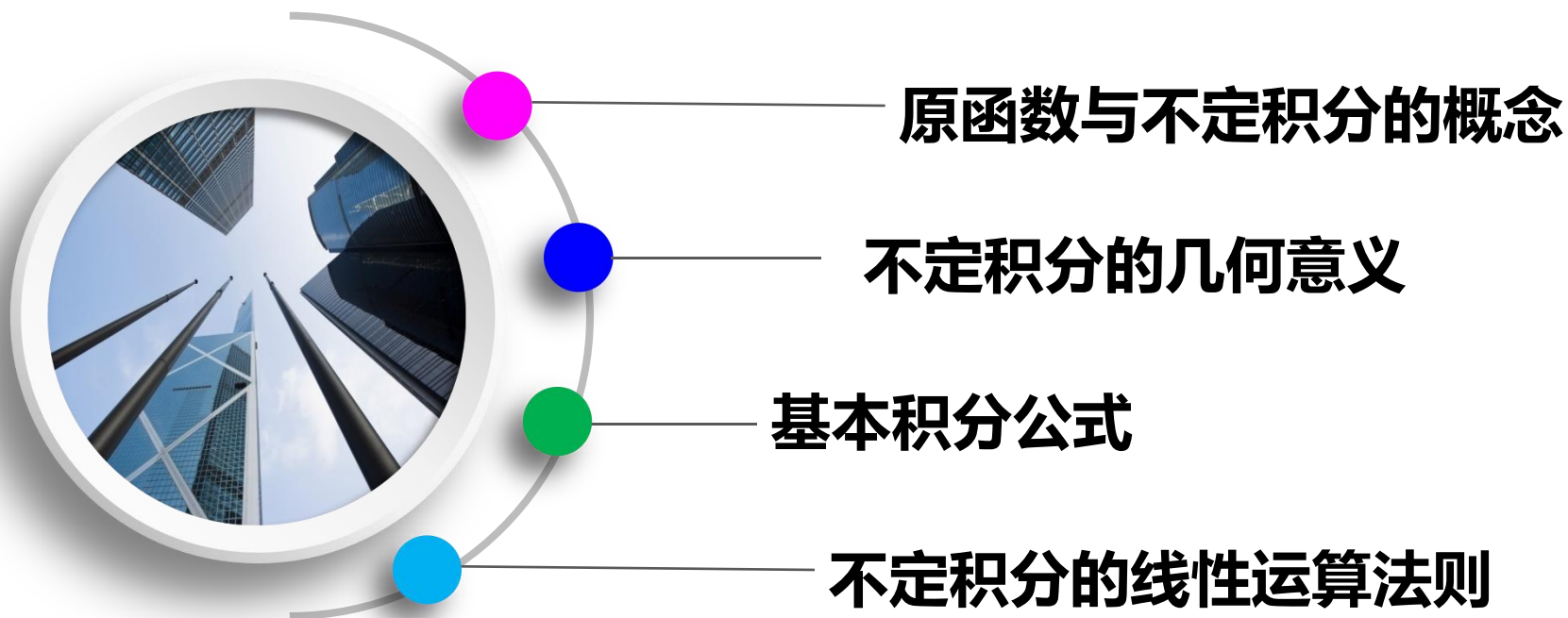
2

3

不定积分的概念
与基本积分公式

有理函数的不定积分

8.1 不定积分的概念与基本积分公式



一、原函数与不定积分的概念

引例：一质量为 m 的质点，在变力 $F(t) = A \sin t$ 的作用下沿直线运动，试求质点的速度 $v(t)$ 。

问题转化为：已知 $v'(t) = \frac{A}{m} \sin t$ ，求 $v(t)$ 。

定义1: 设函数 $F(x)$ 与 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,

若对 $\forall x \in I$, 恒有

$$F'(x) = f(x),$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数.

例1、(1) $-\frac{A}{m}\cos t$ 是 $\frac{A}{m}\sin t$ 的一个原函数 .

(2) $x^3 / 3$ 是 x^2 的一个原函数 .

(3) $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 是 $\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ 的一个原函数 .

$$\left(\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \right)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} .$$

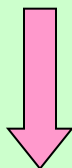
关于原函数的两个问题：

- 1、**原函数的存在性**：在什么条件下，一个函数的原函数存在？
- 2、**原函数之间的关系**：若一个函数的原函数存在，它是否唯一？若不唯一，它们之间有何关系？

定理1: 若 $f(x) \in C(I)$, 则 $f(x)$ 在 I 上有原函数.

注: 证明在 § 9.2 给出。

初等函数在定义区间上连续



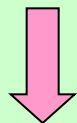
初等函数在定义区间上有原函数

定理2: 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数, 则

(1) $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 的原函数 ($C \in R$);

(2) 若 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数, 则
存在常数 C , 使得 $G(x) = F(x) + C$.

$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数



$\{F(x) + C \mid C \in R\}$ 为 $f(x)$ 的原函数集合

定义2: 函数 $f(x)$ 在区间 I 上的全体原函数称为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分, 记作

$$\int f(x)dx. \quad (\text{Indefinite Integrals})$$

\int : 积分号; $f(x)$: 被积函数;

x : 积分变量; $f(x)dx$: 被积表达式.

◆ 原函数与不定积分的关系:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

◆ 求导运算与求不定积分的关系: 互逆

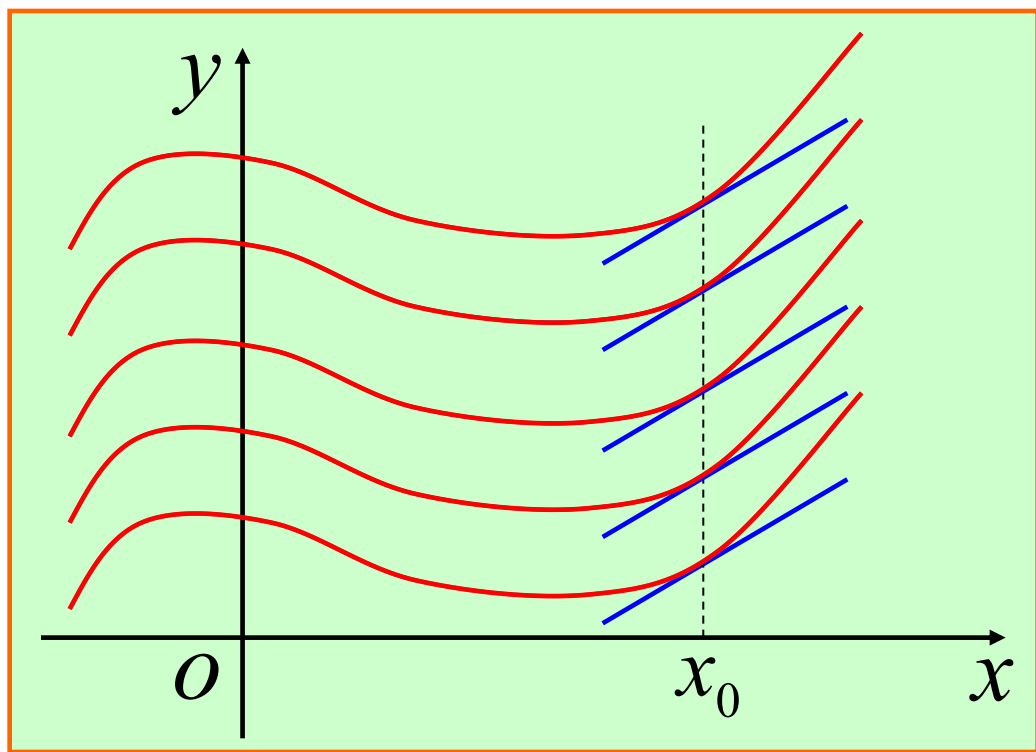
$$(1) \left(\int f(x)dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x);$$

$$(2) \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

例2、求 (1) $\int x^{\alpha} dx$; (2) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$.

二、不定积分的几何意义

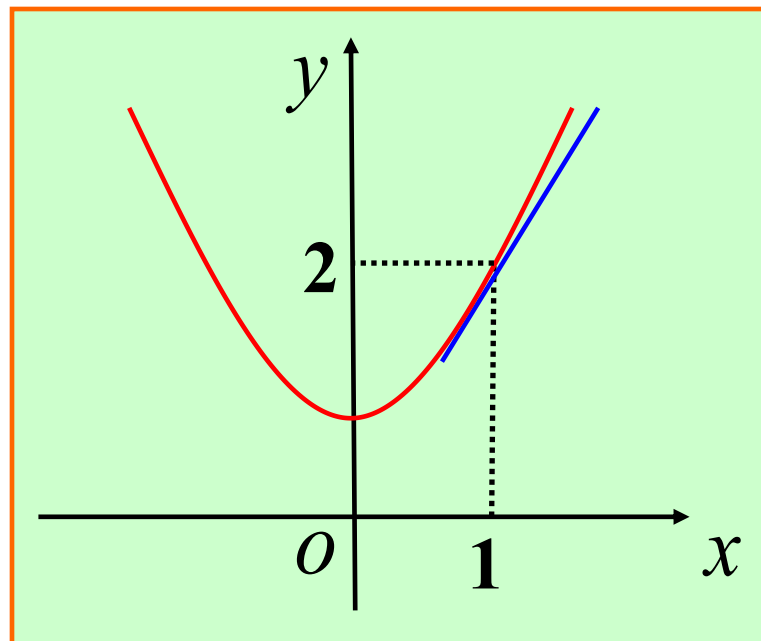
- ◆ $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线。
- ◆ $\int f(x)dx$ 的图形—— $f(x)$ 的所有积分曲线组成的平行曲线族。



- ◆ 积分曲线族在横坐标为 x_0 处的切线互相平行。

- ◆ 要从积分曲线族中确定 某一条积分曲线，
用这条积分曲线特有的 性质来确定常数 C .

例3、求过点 $(1,2)$, 且在每一点的切线斜率是该点横坐标2倍的曲线方程 .



三、基本积分公式

$$(1) \int k dx = kx + C ;$$

$$(2) \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$$

$$(3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C ;$$

$$(4) \int e^x dx = e^x + C ;$$

$$(5) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$(6) \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$(7) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$(8) \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$$

$$(9) \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$$

$$(10) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$$

$$(11) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C;$$

$$(12) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C = -\textit{arc cot } x + C;$$

$$(13) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$$

四、不定积分的线性运算法则

定理3: 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 I 上均有原函数, 则

$$(1) \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx .$$

$$(2) \int kf(x) dx = k \int f(x) dx .$$

(k 是常数, 且 $k \neq 0$)

例4、求下列不定积分。

$$(1) \int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n) dx ;$$

$$(2) \int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx ;$$

$$(3) \int (3x^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}) dx ;$$

例5、求下列不定积分。

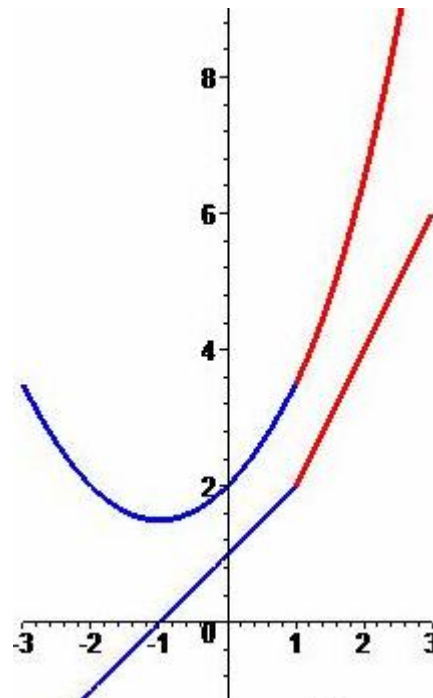
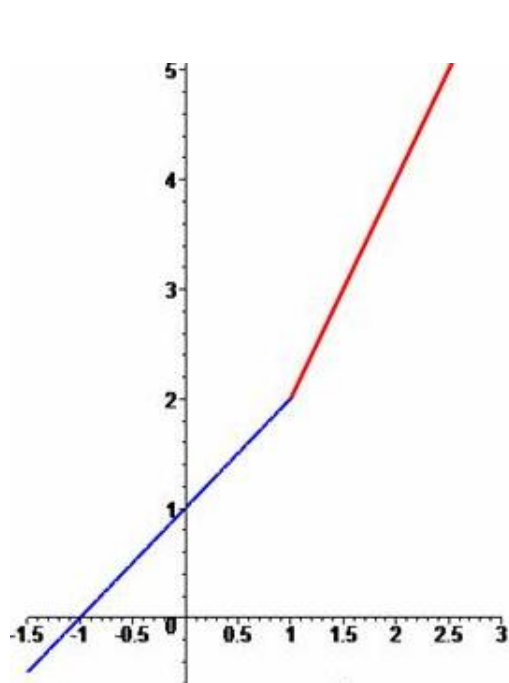
$$(1) \int a^x e^x dx;$$

$$(2) \int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx.$$

练习：求

$$(1) \int \tan^2 x dx; \quad (2) \int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx.$$

例6、设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$, 求 $\int f(x)dx$.



练习：求 $\int |x-1| dx$.



作 业

习题8-1：5（偶数题）