6.2　柯西中值定理和不定式极限

1 柯西中值定理

2 洛必达法则

一、柯西中值定理

定理1（柯西）：设函数 $f(x), g(x)$ 满足

(1) $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续；

(2) $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 可导；

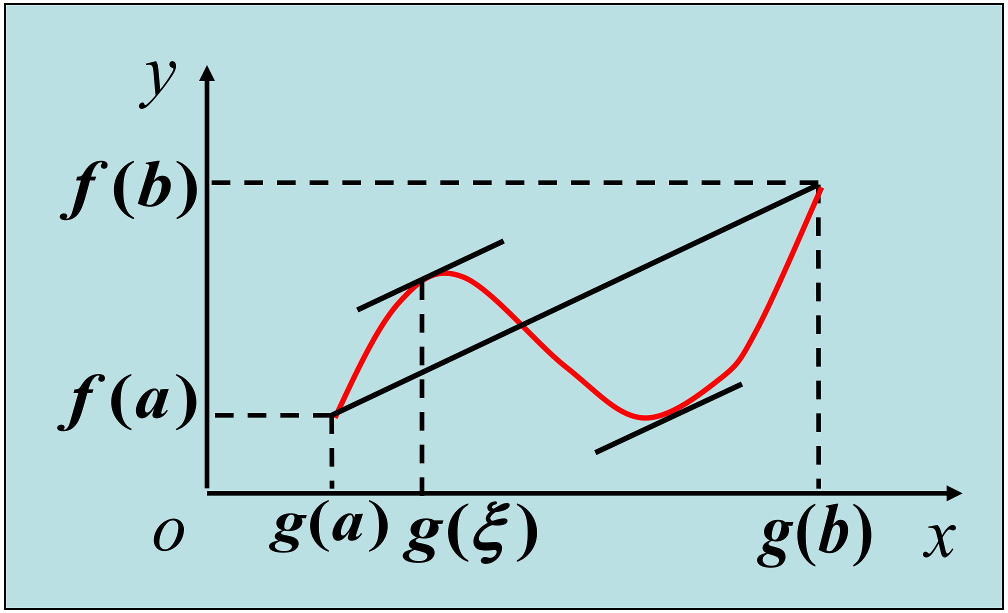
(3) $g'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$.

(法，1789-1857)

则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

柯西中值定理的几何意义

设 $\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}$, $t \in [a,b]$，则 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$



拉格朗日中值定理的参数方程形式

例1、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b](a>0)$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=\xi\ln\frac{b}{a}f'(\xi).$$

例2、设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上可导，且

$$\lim_{x\to0+}\sqrt{x}f'(x)=A.$$

证明：$f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上一致连续.

二、洛必达法则

处理不定式(Inderminate form)的极限.

$$\frac{f(x)}{g(x)}:\quad \frac{0}{0} \text{或} \frac{\bullet}{\infty} \text{型}.$$

$$f(x)\cdot g(x):\quad 0\cdot\infty \text{型}.$$

$$f(x)\pm g(x):\quad \infty\pm\infty \text{型}.$$

$$f(x)^{g(x)}:\quad 0^0 \text{或} 1^\infty \text{或} \infty^0 \text{型}.$$

1. $\dfrac{0}{0}$型不定式

定理2: 设 $f(x), g(x)$ 在某 $U^0(x_0)$ 内可导，并且 $g'(x) \neq 0$，若：

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$；

(2) 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$（或 ∞）；

则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$（或 ∞）.

定理的说明：

(1) 若 $f'(x), g'(x)$ 仍满足定理，可继续用此法则；

(2) 极限过程换为 $x \to x_0^+, x \to x_0^-, x \to \infty$，

$x \to +\infty, x \to -\infty$ 仍成立.

例3、求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$. (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

练习： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}$.

尽量使用等价无穷小替换，减少计算量！

2. $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理3: 设 $f(x), g(x)$ 在某 $U_{+}^{0}(x_0)$ 内可导，并且 $g'(x) \neq 0$，若：

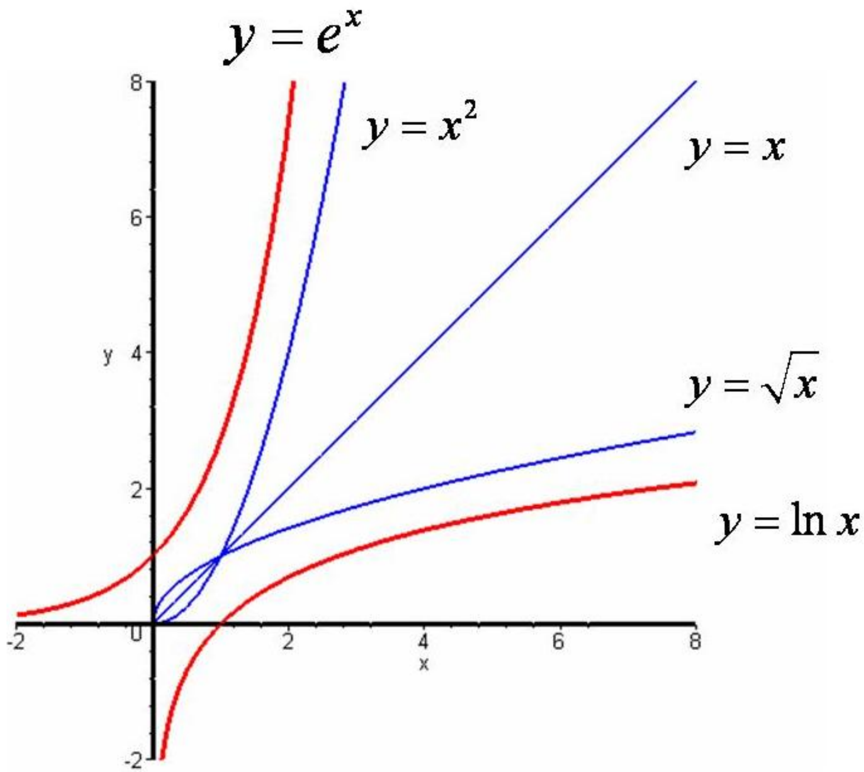
(1) $\lim\limits_{x \to x_0+} g(x) = \infty$；

(2) 极限 $\lim\limits_{x \to x_0+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (或∞)，

则 $$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = A\ (\text{或}\ \infty).$$

例4、求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$.



当 $x\to+\infty$ 时，

函数 $\to\infty$ 的速度：

x^n 比 $\ln x$ 快得多，

e^x 比 x^n 快得多.

例5、求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.　　慎用洛必达法则！

(2) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$.

及时整理极限式，分离非零因子，减少计算量！

3. 其它类型未定式一：$0\cdot\infty$ 或 $\infty\pm\infty$ 型

$$\boxed{\infty\pm\infty}\ \xrightarrow[\text{转化}]{\text{通分}}\ \boxed{\dfrac{0}{0}}\ \text{或}\ \boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}\ \xleftarrow[\text{转化}]{\text{取倒数}}\ \boxed{0\cdot\infty}$$

例6、求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-e^{2x})\cot x$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

3、其它类型未定式二：0^0 或 1^∞ 或 ∞^0 型

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{0^0}\\ \boxed{1^\infty}\\ \boxed{\infty^0}\end{array}\right\rangle \xrightarrow[\text{转化}]{\text{取对数}} \boxed{0\cdot\infty}$$

例7、求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$;　　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\dfrac{1}{x})^x$.

练习：求 $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-x^2/2}+\frac{x^4}{12}}{x^6}$.

✦ 洛必达法则不是万能的！

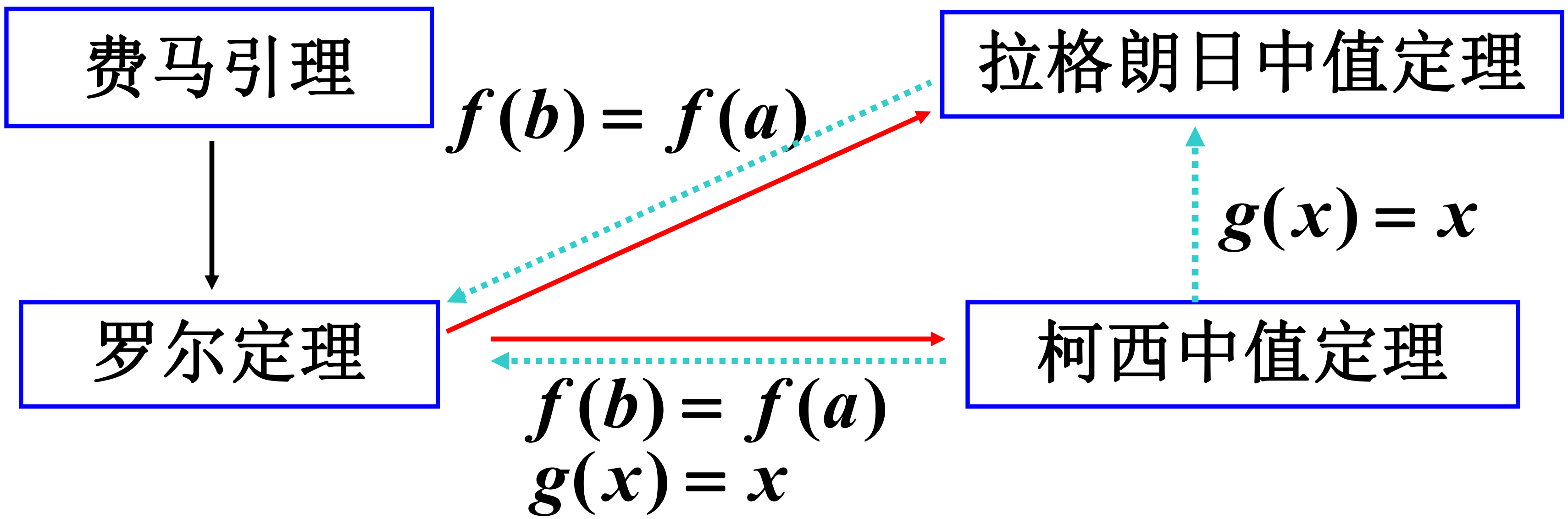
思考：设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 有2阶连续导数，且 $g(0)=1$，$g'(0)=-1$。求 $f'(x)$ 并讨论其连续性。

作　　业

习题6-2 ：2、5(3)(8)(10)、7(6)(7)

内容小结

1. 微分中值定理的条件、结论及关系



内容小结

2. 微分中值定理的应用

(1) 讨论方程的根；

(2) 证明不等式；

(3) 证明等式；

(4) 证明有关中值问题的结论。

关键：设辅助函数。