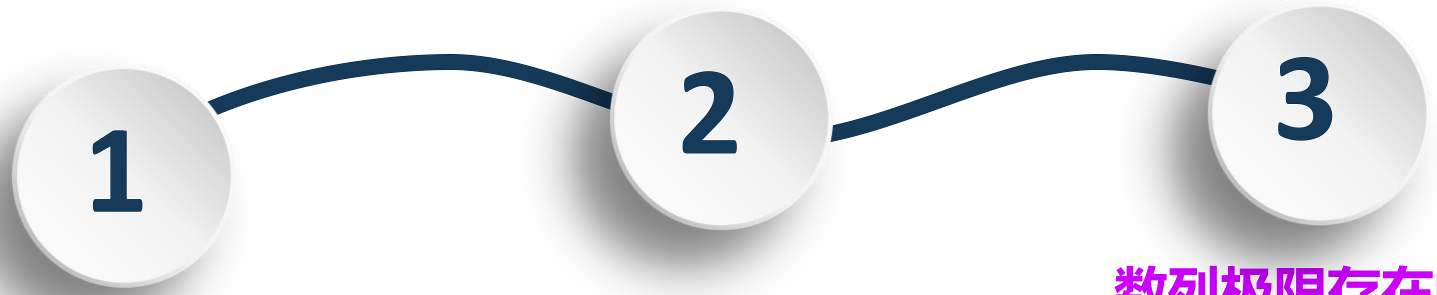
第二章　数列的极限

收敛数列的性质



数列极限存在的条件

数列极限概念

2.1　数列极限概念

数列

数列极限的定义

数列极限的几何意义

无穷小数列和无穷大数列

一、数列（sequence）

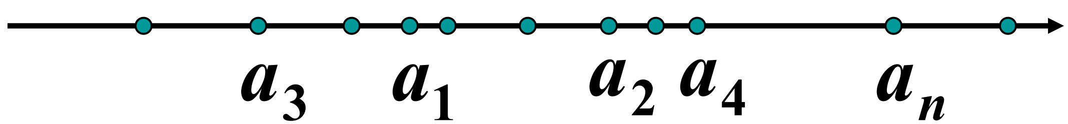
定义： 定义域为正整数集 Z^+ 的函数

$$a_n = f(n), \quad n \in Z^+$$

依次排成的序列

$$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n \cdots\cdots$$

叫做数列(sequence)，记作$\{a_n\}$.



a_n 称为数列$\{a_n\}$的 一般项。

如：(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$ $\quad a_n = \frac{1}{n}$.

(2) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \cdots$ $\quad a_n = \frac{n+1}{n}$.

(3) $1, -1, 1, -1, \cdots$ $\quad a_n = (-1)^{n-1}$.

二、数列的极限的定义

当 $n\to\infty$ 时, a_n 的变化趋势如何？
是否会无限地接近某个 常数?

数列极限的描述性定义:

若 n 无限增大时 , a_n 无限接近于常数 a , 则称数列 $\{a_n\}$ 的极限是 a 或 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 记作 :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad 或 \quad a_n \to a\ (n\to\infty).$$

如： (1) $a_n = \frac{1}{n}$ ： $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2) $a_n = (-1)^{n-1}$ ： $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在 .

收敛数列的特性：

$\boxed{\text{随着}n\text{的无限增大，}a_n\text{无限接近某一常数 }a.}$

即：要使 $|a_n - a|$ 任意小，只要 n 充分大便可.

如：(1) $a_n = \frac{1}{n}$ ：　　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

- 要使 $|a_n - 0| < \frac{1}{10}$，只要 $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$，即 $n > 10$；
- 要使 $|a_n - 0| < \frac{1}{10^3}$，只要 $\frac{1}{n} < \frac{1}{10^3}$，即 $n > 10^3$；

……

- 要使 $|a_n - 0| < \varepsilon\ (\varepsilon > 0)$，只要 $\frac{1}{n} < \varepsilon$，即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

定义1： 对数列$\{a_n\}$，若存在常数 a，使得对任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正整数 N，当$n > N$时，有$|a_n - a| < \varepsilon$，则称 a 为数列$\{a_n\}$的极限或称 $\{a_n\}$收敛于a，记作：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{或} \quad a_n \to a\ (n \to \infty).$$

否则称数列$\{a_n\}$发散．

注： 上述定义称为数列 极限的$\varepsilon - N$ 定义．

几个逻辑符号：

$\forall$: 任意； $\exists$: 存在； $\in$: 属于；

$\notin$: 不属于； $\Rightarrow$: 蕴含； $\Leftrightarrow$: 等价于.

定义1′ ($\varepsilon - N$ 定义)的另一表述：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in Z^+, \forall n > N,$$

$$|a_n - a| < \varepsilon .$$

例1、观察下列数列极限，并用$\varepsilon - N$定义证明.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ (其中$0 < |q| < 1$).

数列极限概念的几点注记

注1：ε 的任意性

(1) ε 的作用在于衡量 a_n 与 a 的接近程度，ε 越小，a_n 与 a 的接近；

(2) ε 一经给出，看作暂时固定的，以便找对应的 N.

(3) ε 可用 $2\varepsilon, \varepsilon^2 \cdots$ 等来代替，另 "$<\varepsilon$" 可用 "$\leq \varepsilon$" 代替.

注2：N 的相应性

(1) N 随着 ε 的变小而变大 .

(2) N 不唯一 ,强调 N 的存在性.

(3) $n > N$ 可换成 $n \geq N$.

用$\varepsilon - N$定义证明$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$的步骤：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in Z^+, \forall n > N,$$
$$|a_n - a| < \varepsilon .$$

(1) 计算$|a_n - a|$,必要时作适当放大；

(2) 由$|a_n - a| < \varepsilon$解出$n > \varphi(\varepsilon)$, 取$N = [\varphi(\varepsilon)]$；

(3) 用极限的定义写出来 .

例2、证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$.

例3、用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2-3}=3$.

例4、用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，其中 $a>0$.

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k,$$

其中 $C_n^k=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

例5、证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

数列不收敛:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0, \forall N \in Z_+, \exists n > N$, 有

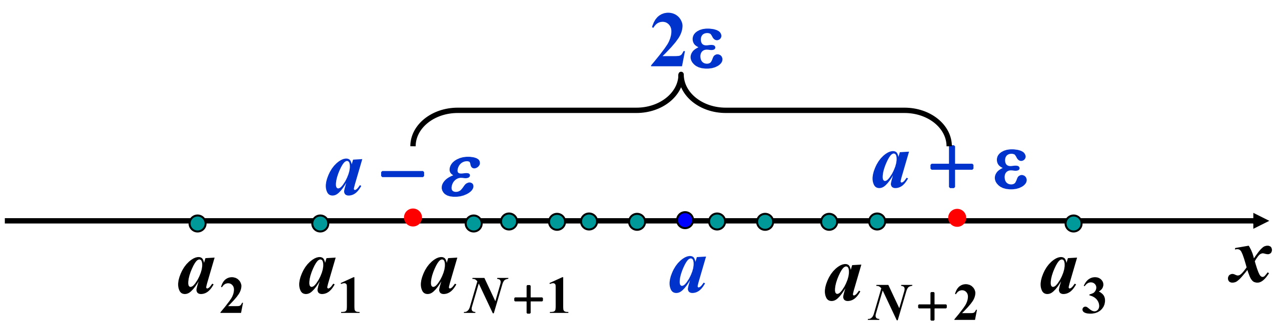
$$|a_n - a| \geq \varepsilon.$$

(2) 数列$\{a_n\}$发散 $\Leftrightarrow \forall a \in R, \exists\varepsilon > 0, \forall N \in Z_+,$

$$\exists n > N, \text{有} |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

三、数列极限的几何意义

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall U(a,\varepsilon), \exists N, \text{当} n > N \text{时}, a_n \in U(a,\varepsilon).$$



推论:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall U(a,\varepsilon) \text{之外至多只有数列} \{a_n\} \text{中的有限项}.$$

例6、证明数列$\{(-1)^n\}$发散.

例7、设$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = a$且$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$，证明$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

思考：若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，是否能推出$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$？

反之是否成立？

例8、将数列$\{a_n\}$增加、减少或改变有限 项之后得到数列$\{b_n\}$. 证明：数列$\{b_n\}$与数列$\{a_n\}$同时收敛或同时发散， 且收敛时有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

四、无穷小数列和无穷大数列

定义2: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,则称 $\{a_n\}$ 为无穷小数列.

定理: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \{a_n - a\}$ 为无穷小数列.

定义3：若 数列$\{a_n\}$满足：$\forall M>0$，$\exists N\in N_+$，当

$n>N$时有

$$|a_n|>M,$$

则称 数列$\{a_n\}$是一个无穷大数列，记 作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty \quad \text{或} \quad a_n\to\infty.$$

注：无穷大数列是无界数列，

无界数列不一定是无穷大数列。

如数列$\{n\cdot(1+(-1)^n)\}$无界，但非无穷大数列.

定义4: 若 数列$\{a_n\}$满足：$\forall M>0$，$\exists N\in N_+$,当

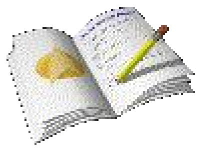
$n>N$时有

$$a_n > M \quad (\text{或}\ a_n < -M)$$

则称 数列$\{a_n\}$是一个正无穷大数列， 记作
(负)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty .$$

$$(\text{或} \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty)$$



作　　业

习题2-1： 2 (1)(3)、6、9(1)