第五章　　导数和微分

1. 导数的概念
2. 求导法则
3. 参变量函数的导数
4. 高阶导数
5. 微分

5.1 导数的概念

1. 导数的引入
2. 导数的定义
3. 可导性与连续性的关系
4. 导数的几何意义
5. 导函数
6. 费马定理

一、导数 (Derivative) 引入

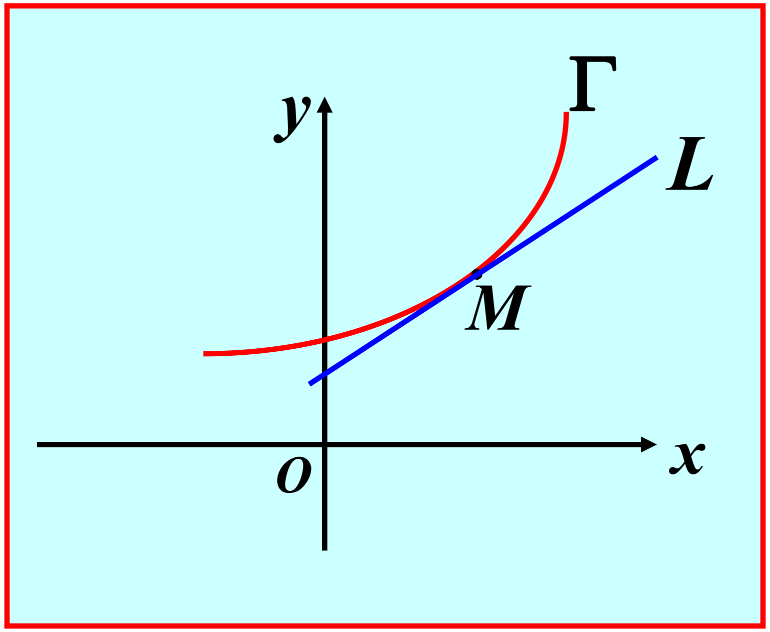
1、瞬时速度

设质点作直线运动的方程为 $s = s(t)$, 研究质点在时刻 t_0 的瞬时速度.

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

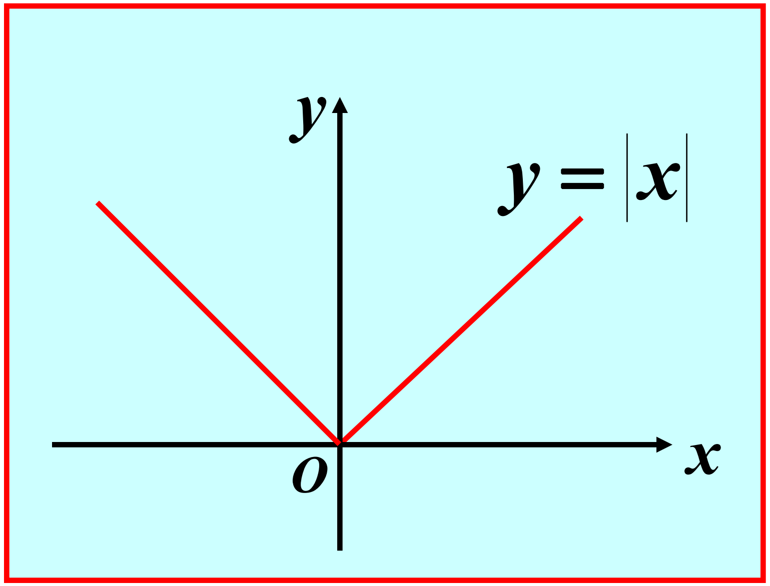
Newton
(1642-1727)

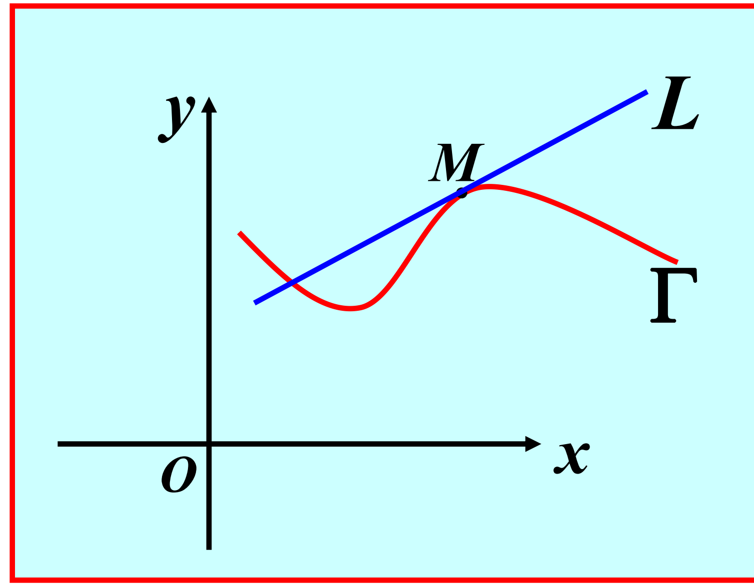
2、曲线的切线



切线的一个定义：

与曲线只交于一点且位于曲线一侧的直线.

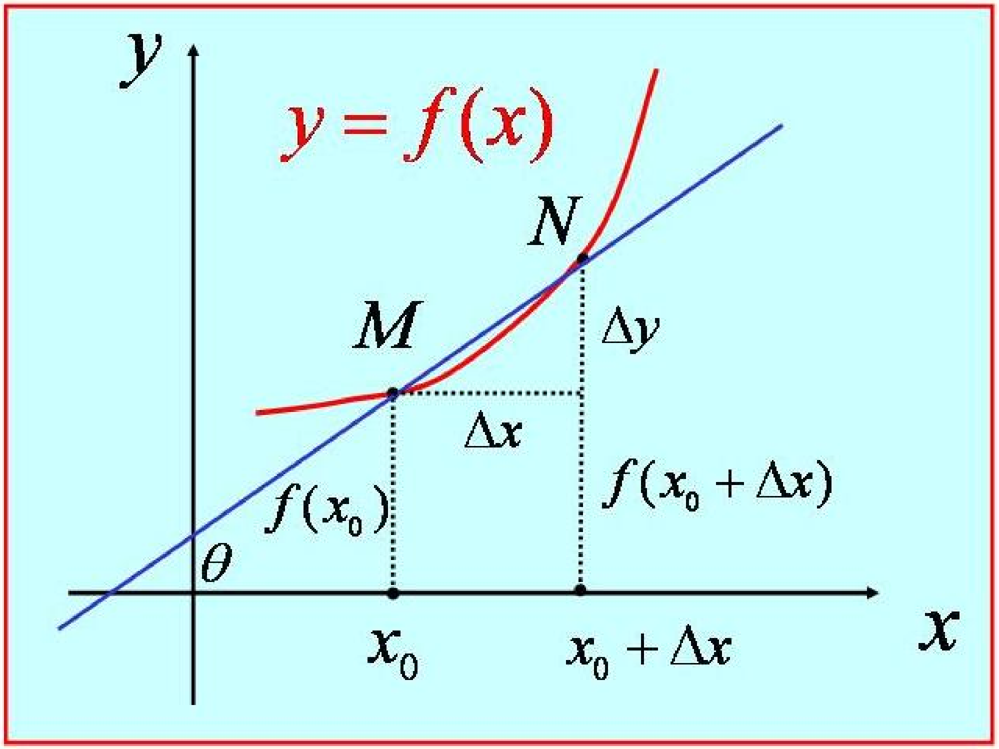




x轴不是 $y=|x|$ 的切线.

直线 L 与曲线 Γ 交于两点.

切线：割线的极限位置。

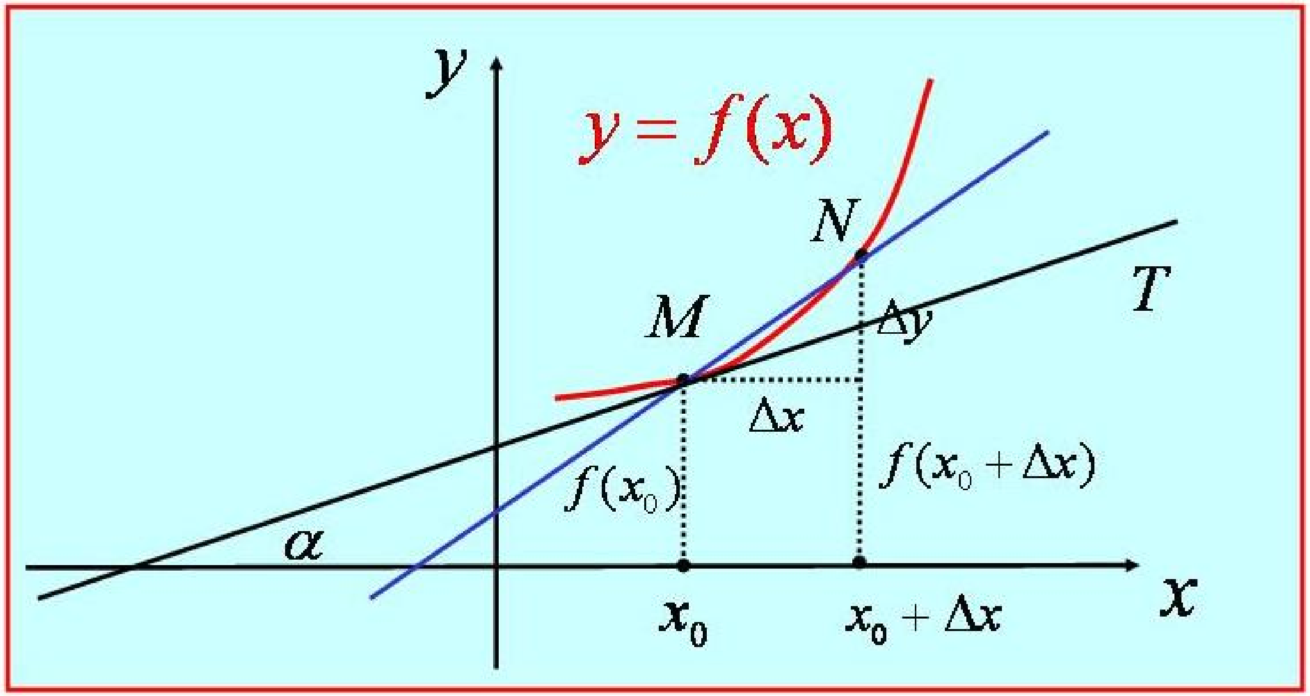


Leibniz

(1646-1716)

$$k_{MN}=\tan\theta=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

切线：割线的极限位置。



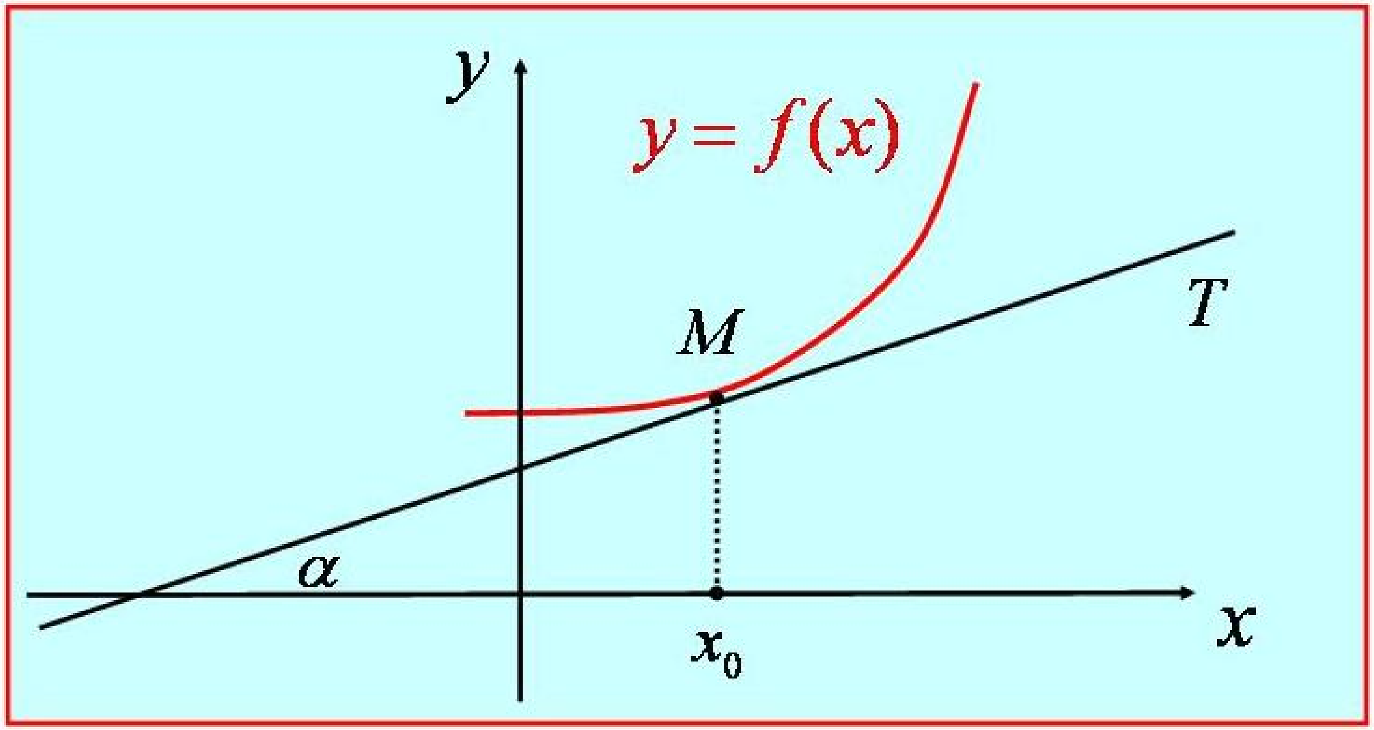
极限位置：

$N \to M,$

即 $\Delta x \to 0$.

切线斜率：$k = \lim\limits_{N \to M} k_{MN} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$



过点 M 的切线的斜率：

$$k=\tan\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

小结：形式完全一样

- 路程 $s = s(t)$，平均速度 $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$，

$$\text{瞬时速度 } v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

- 曲线 $y = f(x)$，割线斜率 $\bar{k} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，

$$\text{切线斜率 } k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

共同点：

(1) 求 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$;

(2) 作 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

(3) 求 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

变化率：加速度、角速度、电流强度、经济增长速度等。

二、导数的定义

定义1：设函数 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 有定义，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 可导，并称这个极限为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数，记为：

Leibniz 的记号

Lagrange 的记号

$$\boxed{f'(x_0),\quad y'(x_0),}\qquad \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0},\quad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}.}$$

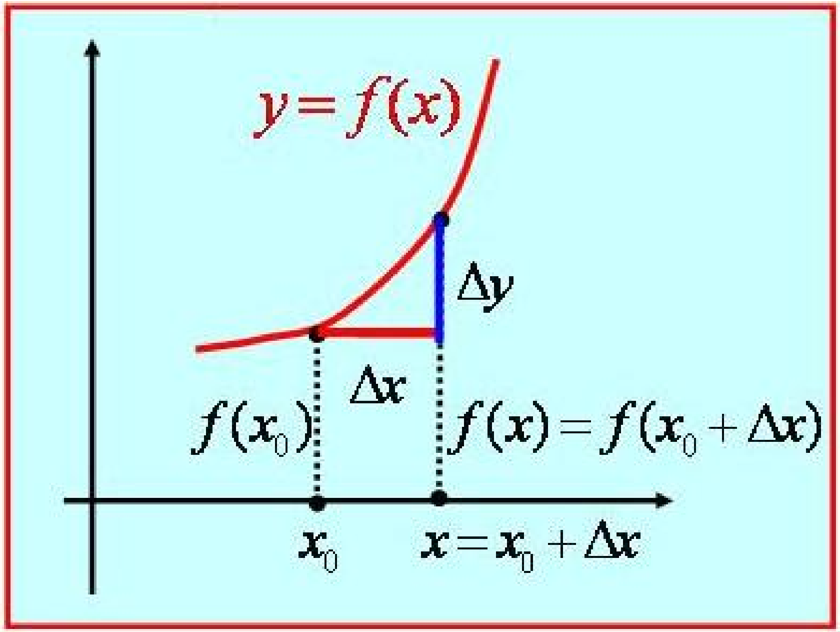
若上述极限不存在，称 $f(x)$ 在点 x_0 不可导.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

注1：$f'(x_0)$为$f(x)$在点x_0处关于x的变化率.

注2：$f'(x_0)$只反映了$f(x)$在点x_0的局部性质.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

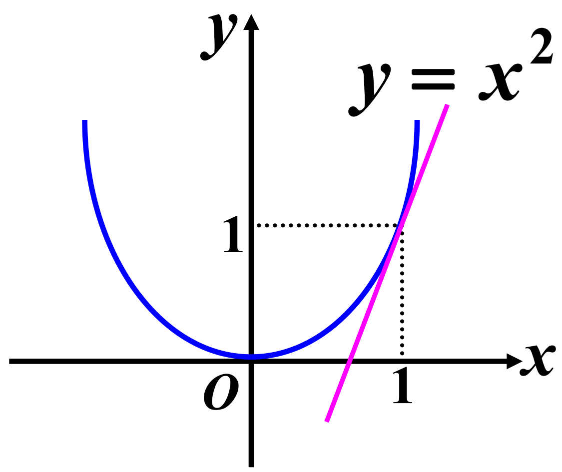


导数的其它常用形式：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

例1、求 $f(x)=x^2$ 在 $x=1$ 处的导数．



例2、已知 $f'(3)=5$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+2h)-f(3)}{h}$．

二、导数的定义：单侧导数

定义2： $f(x)$ 在点 x_0 处的

左导数 $f_-'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$;

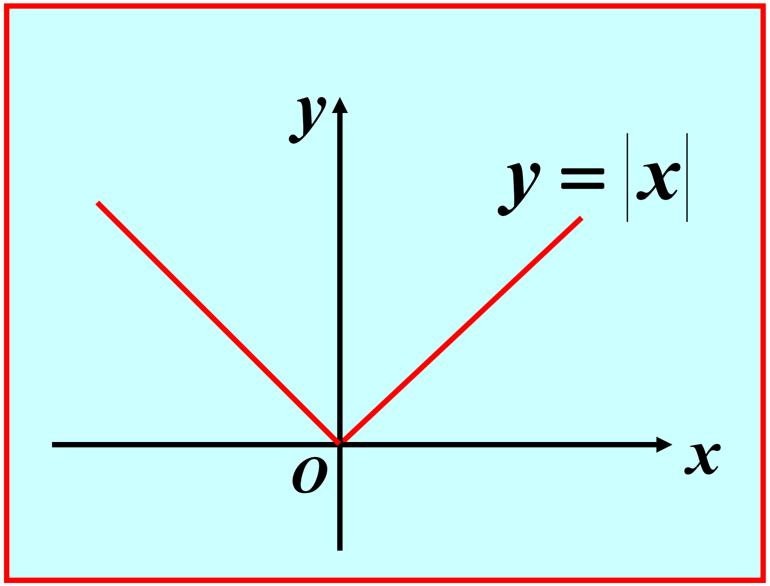
右导数 $f_+'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

- 单侧导数用来讨论分段函数在分段点处的导数.

定理1: $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow$

$f_-'(x_0), f_+'(x_0)$ 存在且相等.

例3、讨论函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的可导性.



三、可导性与连续性的关系

有限增量公式：

若 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0).$$

定理2： 若 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

注： 可导 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 连续.

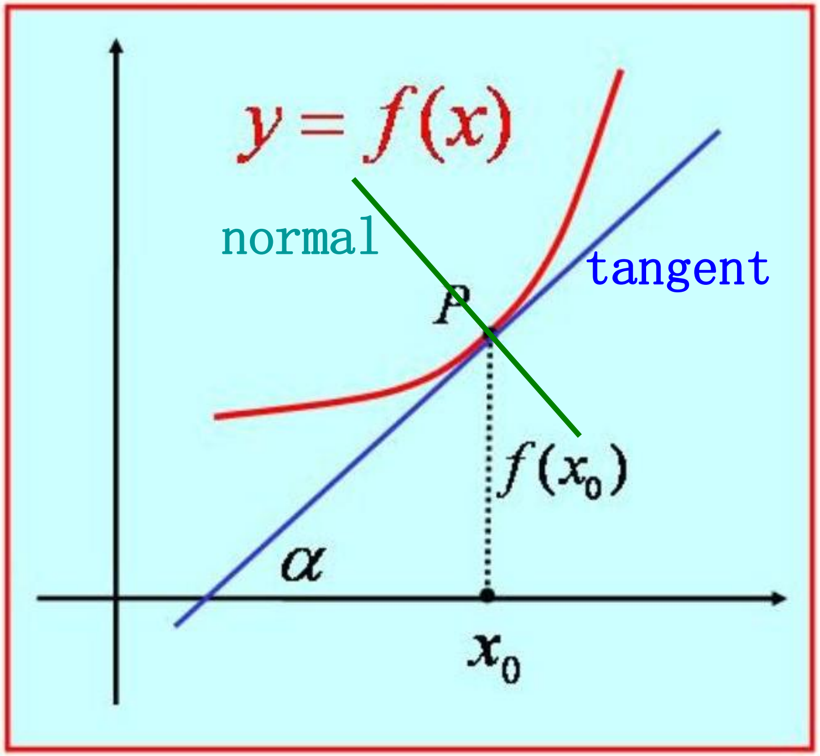
如：$f(x) = |x|$，$x_0 = 0$.

例4、证明函数 $f(x) = x^2 D(x)$ 仅在点 $x_0 = 0$ 处可导. 其中 $D(x)$ 为狄利克雷函数.

四、导数的几何意义

曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处切线的斜率

$\tan\alpha = f'(x_0)$.



切线方程:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

法线方程:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

五、导函数

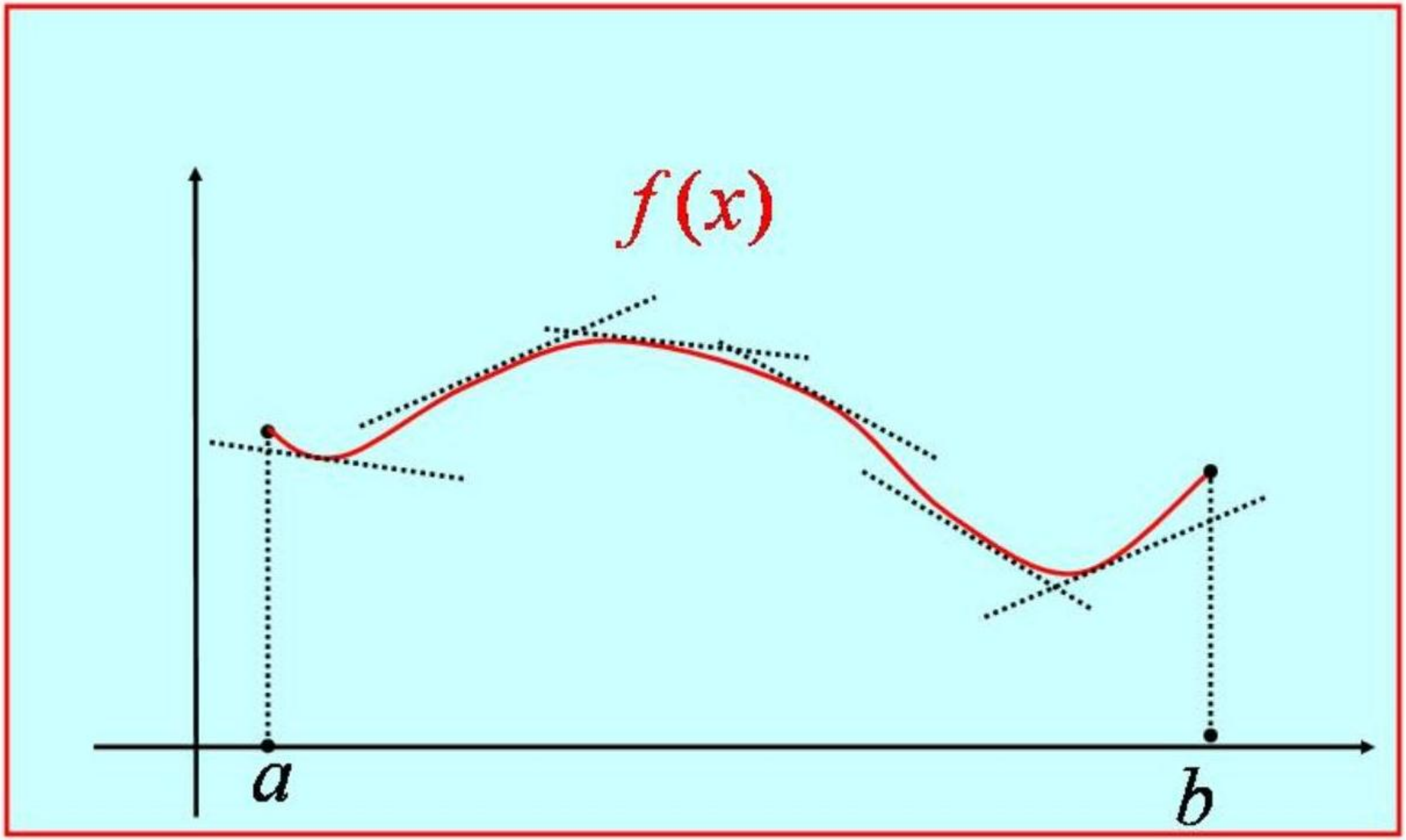
定义3： 若函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内每一点可导，则映射

$$x \to f'(x)$$

定义了 I 上一个新函数，称它为 $f(x)$ 的导函数，简称导数．记为：

$$f'(x),\text{或 } y',\text{或 } \frac{dy}{dx},\text{或 } \frac{df(x)}{dx}.$$

- $D(I)$：区间 I 内可导函数的全体构成 的集合．



$f(x)$
a
b

例5、证明下列导数。

(1) $(C)' = 0$.

(2) $(x^n)' = n\,x^{n-1}\ (n \in Z^+)$.

(3) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$.

特别地：$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

(4) $(\sin x)' = \cos x$.

$$\boxed{\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$(\cos x)' = -\sin x$.

$$\boxed{\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

例6、求曲线 $y = \ln x$ 在点 $P(x_0, \ln x_0)$ 处的切线和法线方程.

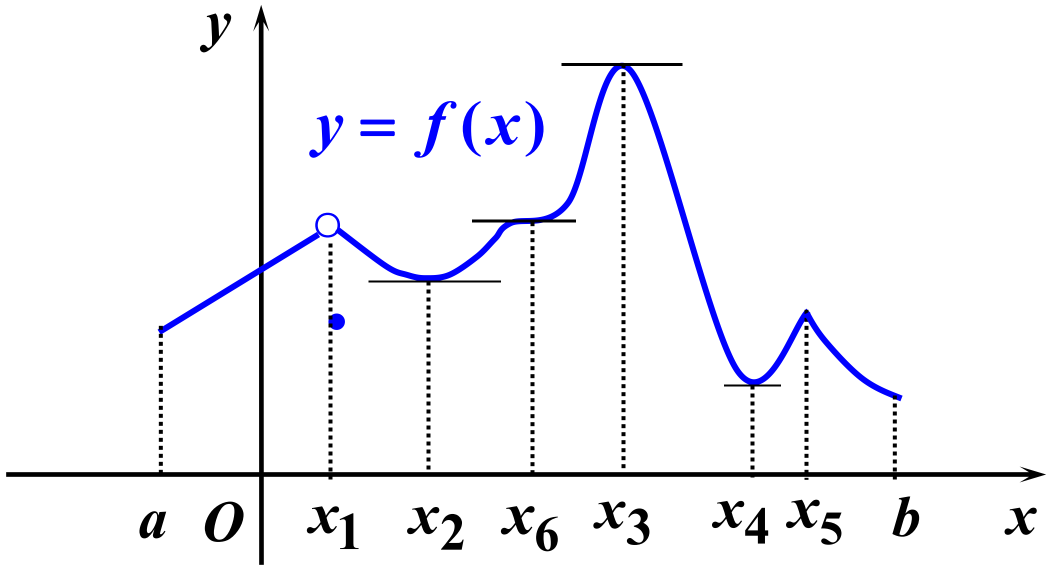
六、费马(Fermat)定理

定义 4：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 有定义，若 $\forall x \in U(x_0)$，有

$$f(x) \le f(x_0), \quad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点.（极小值点.）

※ 极大值点和极小值点统称为极值点.



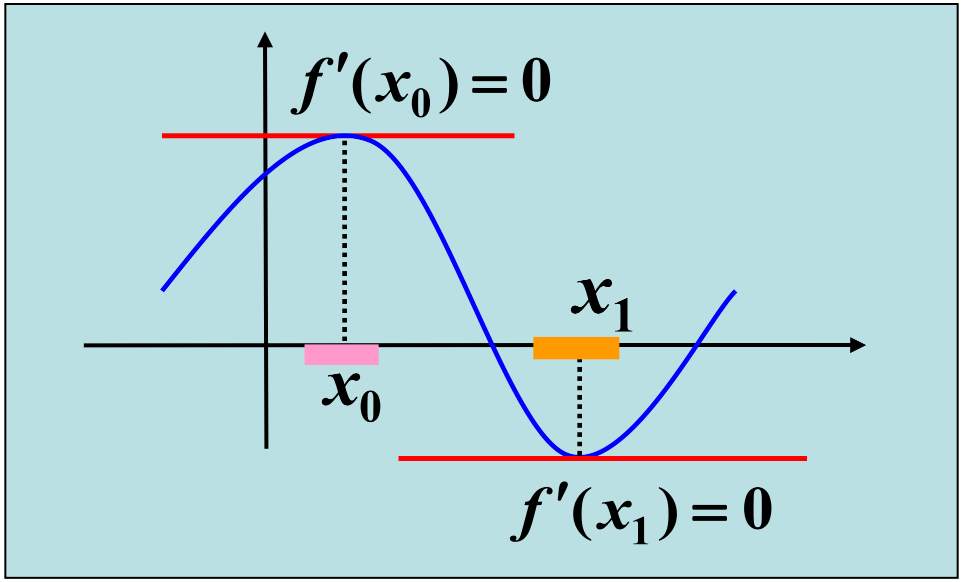
极大值点：x_3 , x_5 .

极小值点：x_1 , x_2 , x_4 .

定理 3：（费马定理）

设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，若 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $f'(x_0)=0$.

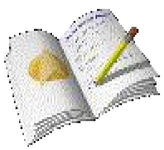
(法，1601–1665)



稳定点（驻点）：满足 $f'(x)=0$ 的点 x.

注1：可导的极值点为稳定点.

注2：极值点 $\not\rightleftarrows$ 稳定点.



作　　业

习题 5 -1：3 、4 、6 (2)、1 3