5.3 参变量函数的导数

1 参变量方程表示的曲线

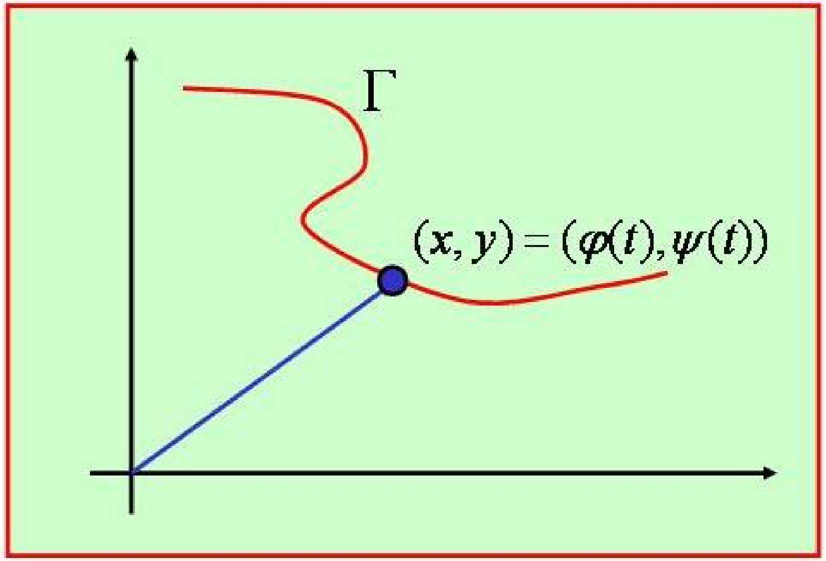
2 参变量函数的导数

一、参变量方程表示的曲线

参变量方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (t\in[\alpha,\beta])$

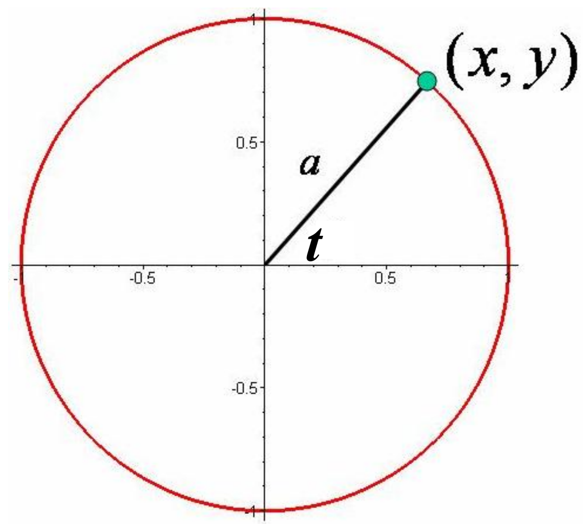
当 t 变化时，点 $(x,y)=(\varphi(t),\psi(t))$ 描绘出曲线 Γ.

Γ：运动轨迹。



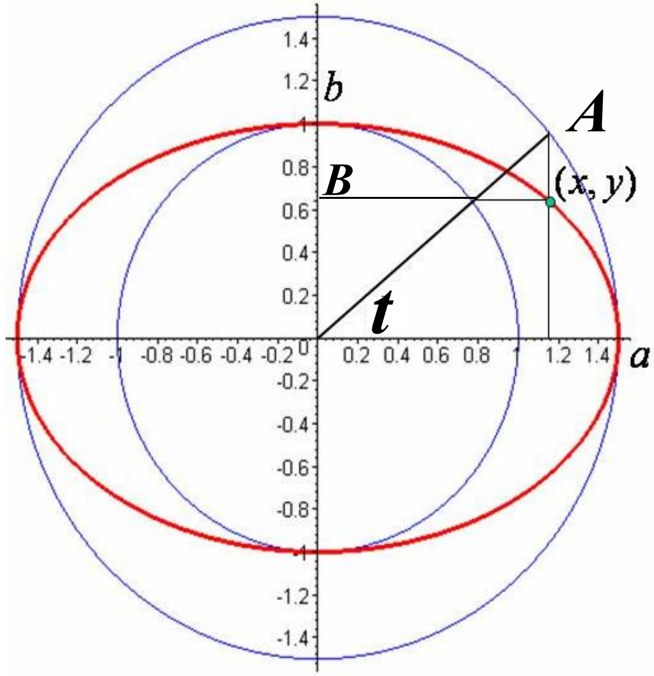
1、圆：$x^2 + y^2 = a^2$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi).$$



2、椭圆：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

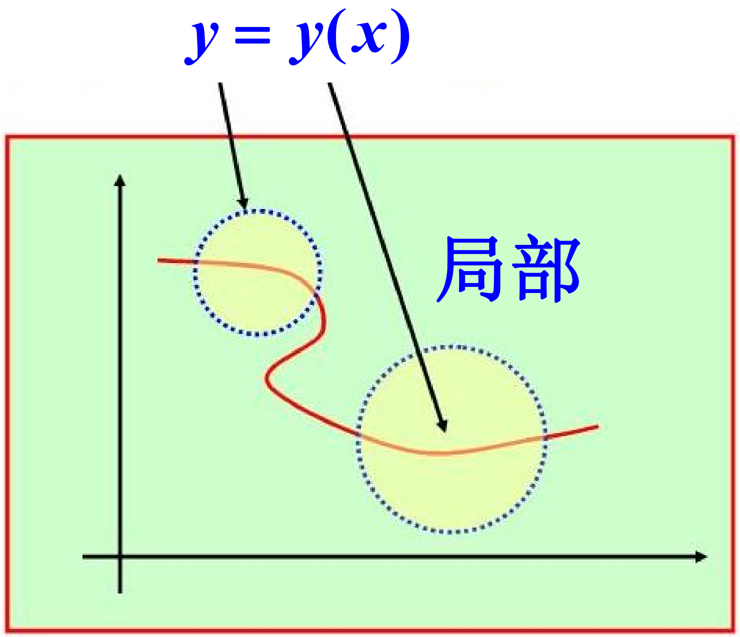
$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi).$$



设 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (t \in [\alpha, \beta]).$

- 若 $x = \varphi(t)$ 在某区间 I_t 上单调，则 $t = \varphi^{-1}(x)$，

故 $y = \psi(t) = \psi[\varphi^{-1}(x)]$
$= y(x)$.



二、参变量函数的导数

定理1： 设 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，若 $\varphi(t)$ 在 t_0 的某邻域单调，

$\varphi(t),\psi(t)$ 在 t_0 可导且 $\varphi'(t_0)\neq 0$，则

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_0}=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.}$$

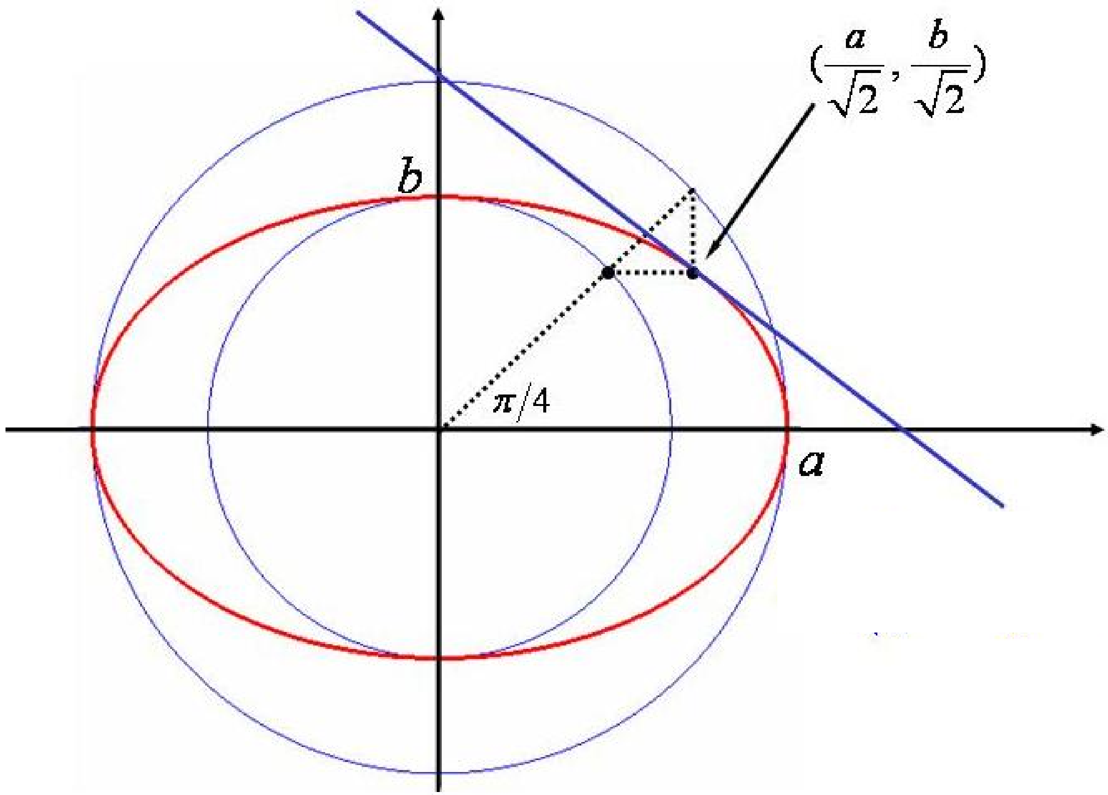
注：若$\varphi(t),\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上都存在连续导数，且

$$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0,$$

则称曲线为光滑曲线. 若$\varphi'(t)\neq 0$,则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

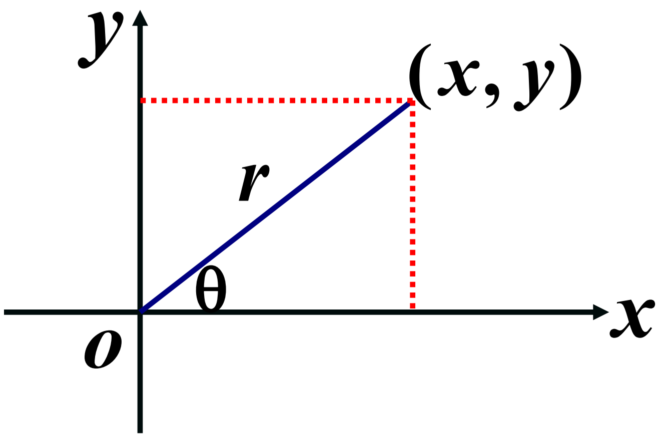
例1、求椭圆$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$在$\theta = \dfrac{\pi}{4}$对应点处的切线方程.



极坐标系下的参数方程

直角坐标：(x, y)

极坐标：(r, θ)



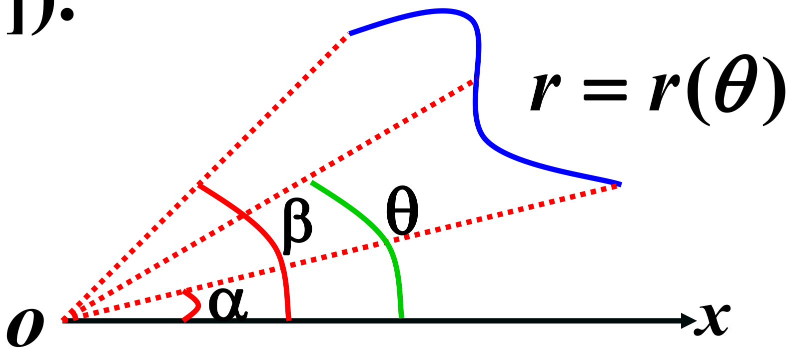
关系：$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，　$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$

- 直角坐标系下曲线 L：

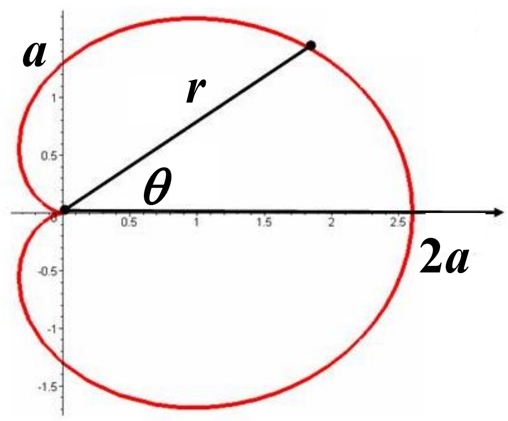
$$y = f(x), x \in D.$$

- 极坐标系下曲线 C：

$$r = r(\theta)\,(\theta \in [\alpha, \beta]).$$



例：心形线 $r = a(1+\cos\theta)$

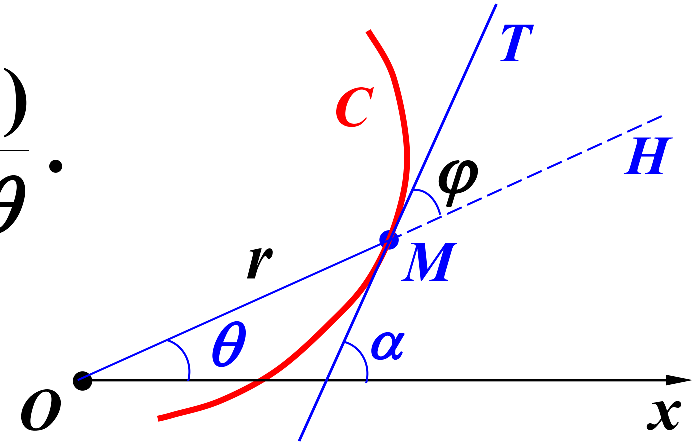


✦ $r = r(\theta)\ (\theta \in [\alpha, \beta])$ 的参数方程：

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad (\alpha \le \theta \le \beta).$$

曲线 $C: r = r(\theta)$ 在点 $M(r(\theta),\theta)$ 处切线的斜率：

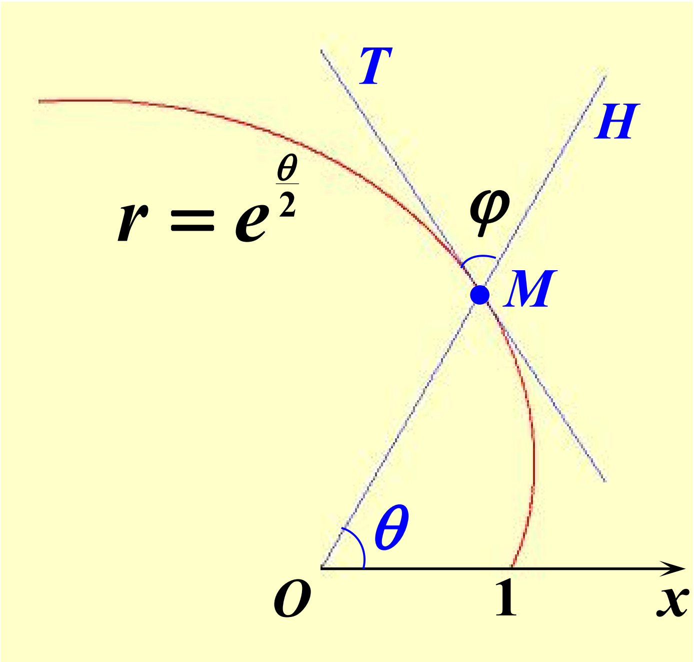
$$k = \tan\alpha = \frac{r'(\theta)\tan\theta + r(\theta)}{r'(\theta) - r(\theta)\tan\theta}.$$



点 M 的向径 (OM) 与点 M 处切线的夹角为 φ，则

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}.$$

例2、证明对数螺线 $r = e^{\frac{\theta}{2}}$ 上所有点处的切线与向径的夹角 φ 是常数 .



作　　业

习题5-3： 1（2）、2、5