# 12.2 正项级数

1. 正项级数收敛的一般判别原则
2. 比式判别法和根式判别法
3. 积分判别法

# 一、正项级数收敛性的一般判别原则

正项级数： $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n \geq 0)$

定理1（正项级数的收敛准则）：

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

依据：单调递增有上界的数列收敛。

比较原则1：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，若

$\exists N$，使得 $\forall n > N$，都有 $u_n \le v_n$，则：

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

依据：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与它的任一余项有相同的敛散性。

关键：选取恰当的参考级数。

例1、判断下列级数的敛散性.

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+1};$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-n+1}.$$

**比较原则2：** 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l,$$

则 (1) 当 $0 < l < +\infty$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散；

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(3) 当 $l = +\infty$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例3、判别下列级数的敛散性。

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n});$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{\pi}{n});$$

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}} \quad (a>0).$$

# 二、比式判别法和根式判别法

**定理2：比式判别法（达朗贝尔判别法）**

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，若存在正整数 $N_0$，使得

当 $n > N_0$ 时，

(1) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le q$ 且 $0 < q < 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

**推论：**（比式判别法的极限形式）

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

(1) 当 $q < 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) $1 < q \le +\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

**注：** $q = 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛，也可能发散.

例4、判别下列级数的敛散性。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n\cdot 3^n}$；（收敛）

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$；（发散）

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$.（收敛）

## 定理3：根式判别法（柯西判别法）

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数,若存在正整数 $N_0$,使得当 $n > N_0$ 时,

(1) $\sqrt[n]{u_n} \le l$ 且 $0 < l < 1$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) $\sqrt[n]{u_n} \ge 1$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

**推论**（根式判别法的极限形式）

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，若极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$，则

(1) $l<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) $1<l\le+\infty$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

例5、判别下列级数的敛散性。

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2};\qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{e^{n+1}};$$

$$(3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}.$$

## 三、积分判别法

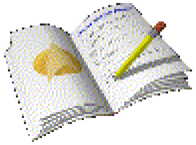
定理4：设 $f(x)$ 为$[1,+\infty)$ 上非负减函数，则正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$与反常积分$\int_1^{+\infty} f(x)dx$同时收敛或同时发散。

例6、讨论 $p-$级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

练习：判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$的敛散性。

例7、设 $p>1$,求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right].$$



# 作业

习题12-2：1(1)(2)(4)；2(2)(3)；9(3)