4.3 初等函数的连续性

1 指数函数及其连续性

2 初等函数的连续性

一、指数函数及其连续性

- 设 $a>1$.

(1) 对 $n\in Z^{+}$,用归纳法令

$$a^{1}=a,\quad a^{n+1}=a^{n}\cdot a\,.$$

则 $m>n$ 时, $\frac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m-n}$.

(2) 定义 $a^{0}=1, a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$.

性质： $a^{m}\cdot a^{n}=a^{m+n}\ (m,n\in Z)$.

(3) 由零点定理，$x^n = a$ 有唯一正实根，记为

$$x = a^{\frac{1}{n}}\ (\text{其中}\, n \in Z^+).$$

定义：$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$，$a^{-\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^{-1}\ (n \in Z^+, m \in Z)$.

(4) $a^{\frac{mk}{nk}} = a^{\frac{m}{n}}\ (k \in Z)$.

- 故函数 $y = a^r\ (r \in Q)$ 定义好了。

(5) 函数 $y = a^r\ (r \in Q)$ 的性质：

(i) $a^r > 0$.

(ii) $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$.

(iii) 当 $r_1 < r_2$ 时，$a^{r_1} < a^{r_2}$.

(6) 函数 $y = a^r\ (r \in Q)$ 的连续性：设 $r_0 \in Q$,

$$\lim_{\substack{r \to r_0 \\ r \in Q}} a^r = a^{r_0}.$$

再将指数函数延拓到实数集上。

(7) 设 $a>1$, 对任意 $x\in R$, 定义

$$a^{x}=\sup_{r\le x}\{a^{r}\mid r\in \mathrm{Q}\}$$

$$=\inf_{r\ge x}\{a^{r}\mid r\in \mathrm{Q}\}.$$

(8) 函数 $y=a^x(a>1, x\in R)$ 的性质：

(i) $a^x>0$.

(ii) $a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$.

(iii) 当 $x_1<x_2$ 时，$a^{x_1}<a^{x_2}$.

(9) 函数 $y=a^x(0<a<1, x\in R)$的性质：

(i) $a^x>0$.

(ii) $a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$.

(iii)当$x_1<x_2$时，$a^{x_1}>a^{x_2}$.

定理1： 设 $a>0$ 且 $a\neq 1$, α 与 β 为任意实数, 则有

$$a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}.$$

定理2： 指数函数 $y=a^{x}$ $(a>0\,,a\neq 1)$ 是 R 上的连续函数.

- 指数函数 $y = a^{x}$ 的反函数:

  对数函数 $y = \log_{a}^{x}$.

推论1：对数函数 $y = \log_{a} x \ (a > 0, a \neq 1)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上是连续的.

对数函数的性质：

(1) $\log_a^{a} = 1.$

(2) $\log_a^{(x_1 \cdot x_2)} = \log_a^{x_1} + \log_a^{x_2}.$

(3) $a > 1$时, $\log_a^{x_1} < \log_a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2.$

$0 < a < 1$时, $\log_a^{x_1} < \log_a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2.$

(4) $\log_a^{(b^{\alpha})} = \alpha \log_a^{b}.$

借助(4), 得到指数函数的性质：

$$(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}.$$

推论2： 幂函数 $y = x^{\alpha}$ 在定义域 $(0, +\infty)$上连续.

例1、 设 $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = a > 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = b$. 证明

$$\lim_{x \to x_0} u(x)^{v(x)} = a^{b}.$$

例2、 求 $\lim\limits_{x \to 0}(1 + \sin x)^{\cot x}$.

二、初等函数的连续性

基本初等函数 $\begin{cases} \text{(1) 常值函数} \\ \text{(2) 三角函数} \\ \text{(3) 反三角函数} \\ \text{(4) 指数函数} \\ \text{(5) 对数函数} \\ \text{(6) 幂函数} \end{cases}$

在其定义域上连续。

初等函数： 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所产生的函数。

定理3： 任何初等函数都是在它有定义的区间上的连续函数。

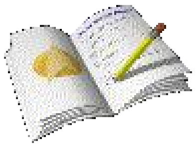
例3、 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\tan(x+\pi/4)}{\cos x}$.

例4、求下列函数的极限。

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}\ (a>0\ \text{且}\ a\neq 1).$$



作 业

习题4-3：1（1）（4）

习题 4.2

P85. T3. 设 f, g 在区间 I 上连续. 记

$$F(x)=\max\{f(x),g(x)\},\ G(x)=\min\{f(x),g(x)\}.$$

证明: $F(x)$ 和 $G(x)$ 也在区间 I 上连续.

P85. T6. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，证明：f 在 $[a,+\infty)$ 上有界 . f 在 $[a,+\infty)$ 上必有最大值或最小值吗？

P86. T16. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，证明：f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续 .

P85. T10.

证明:任一实系数奇次方程至少有一个实根.

P85. T13. 证明: $f(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上一致连续,

但在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续.

P86. T14. 设函数 f 在区间 I 上满足 $Lipschitz$ 条件，即存在常数 $L>0$，使得对 I 上任意两点 x', x''，有

$$|f(x')-f(x'')| \leq L|x'-x''|.$$

证明 f 在 I 上一致连续.

P85. T17. 设函数 f 在 $[0,2a]$ 上连续,且 $f(0)=f(2a)$.

证明:存在 $x_0\in[0,a]$,使得 $f(x_0)=f(x_0+a)$.

P85. T19. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续,$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$.

证明:存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$