第十五章　傅里叶级数

1 傅里叶级数

2 以 $2l$ 为周期函数的展开式

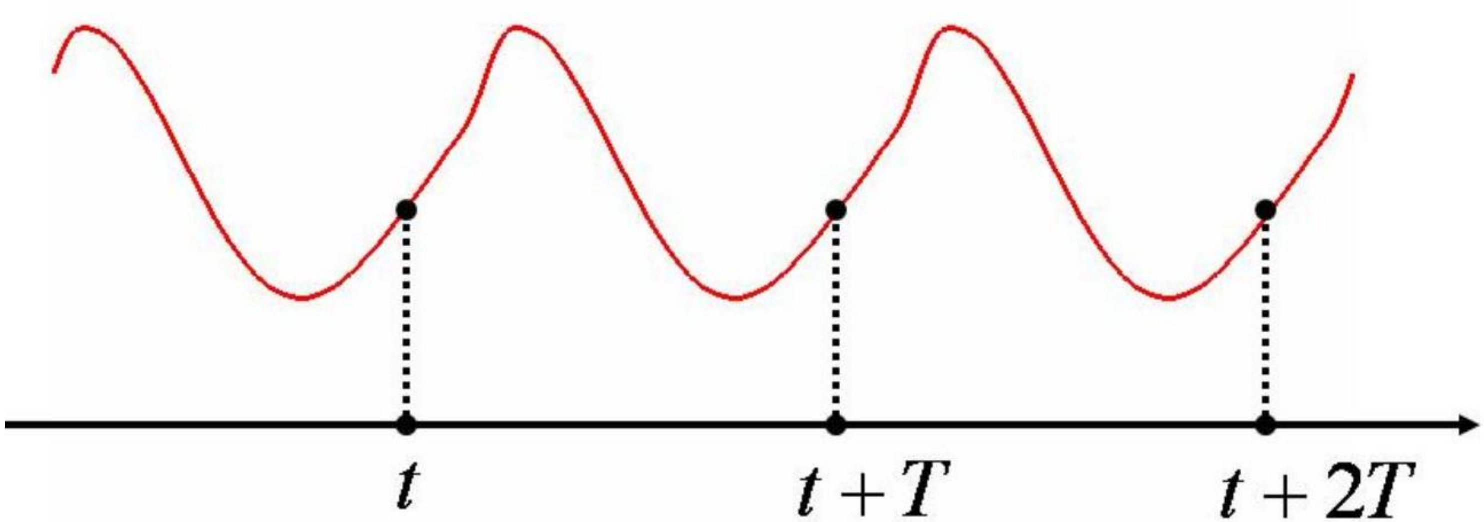
15.1 傅里叶级数

1. 三角级数与正交函数系
2. 以 2π 为周期函数的展开式
3. 收敛性定理

一、三角级数与正交函数系

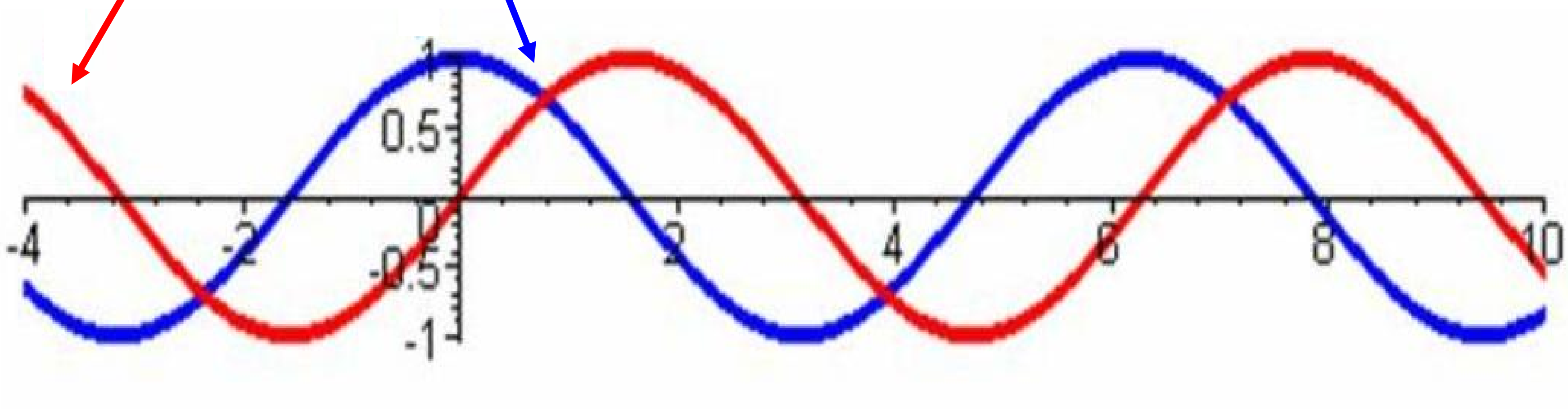
以 T 为周期的函数 $f(x)$:

$$f(x+T)=f(x),\ x\in(-\infty,+\infty).$$



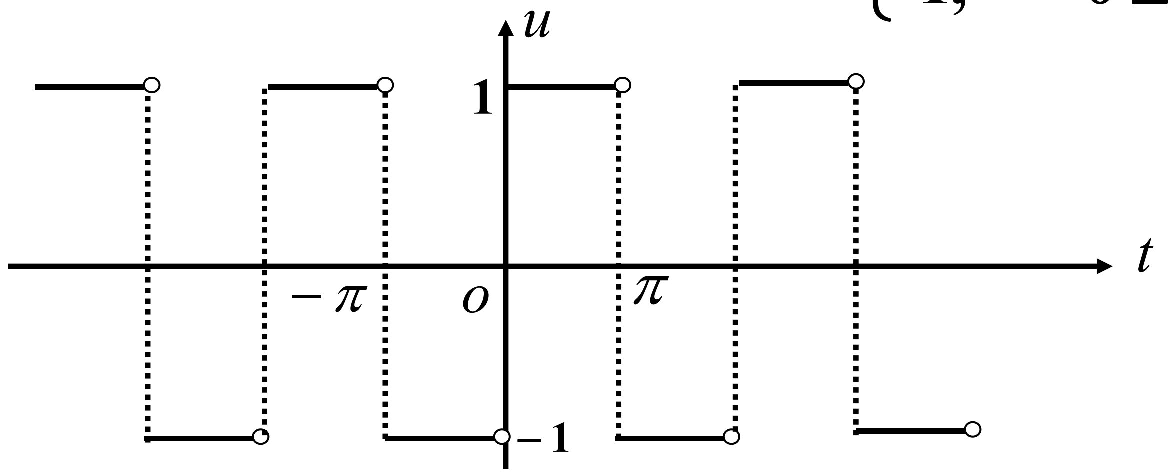
最简单的周期函数：

$\sin x$ $\cos x$ $T = 2\pi$



引例:

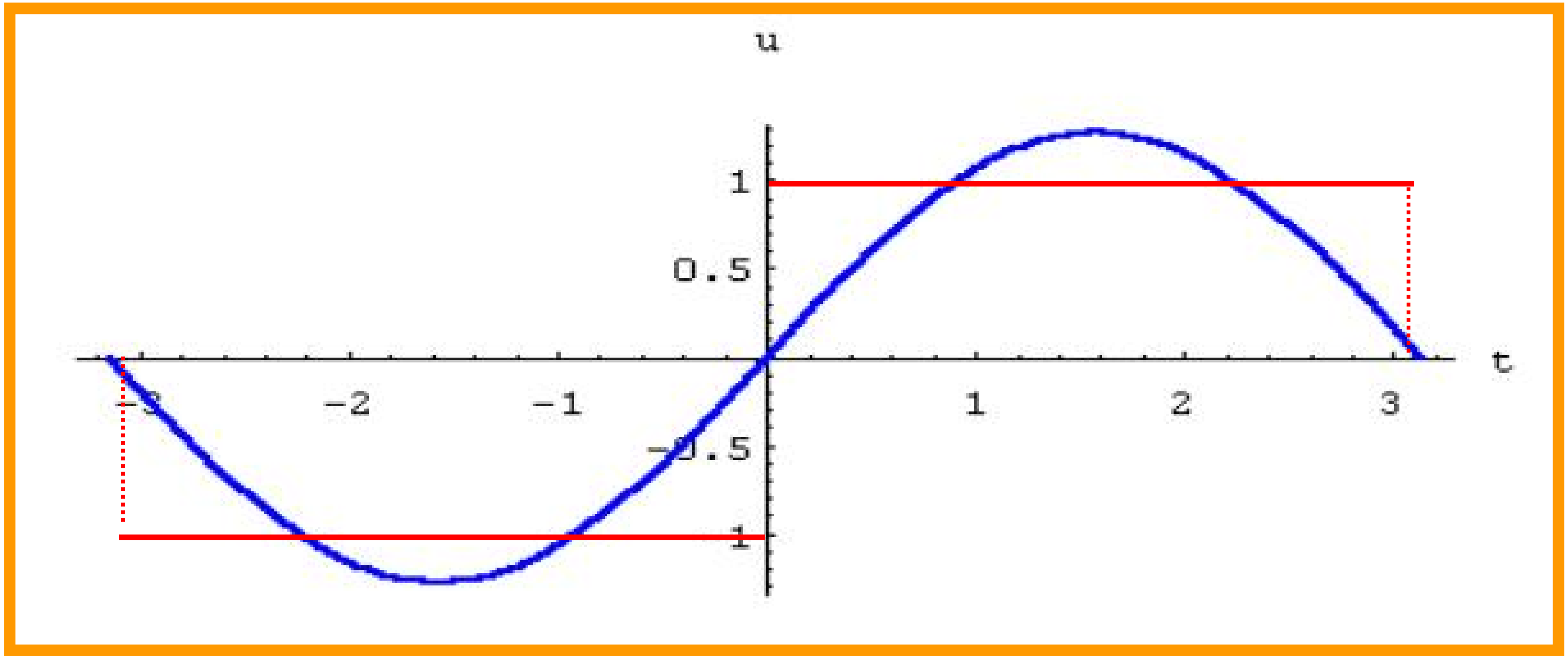
非正弦周期函数:矩形波 $u(t)=\begin{cases}-1, & -\pi\le t<0\\ 1, & 0\le t<\pi\end{cases}.$



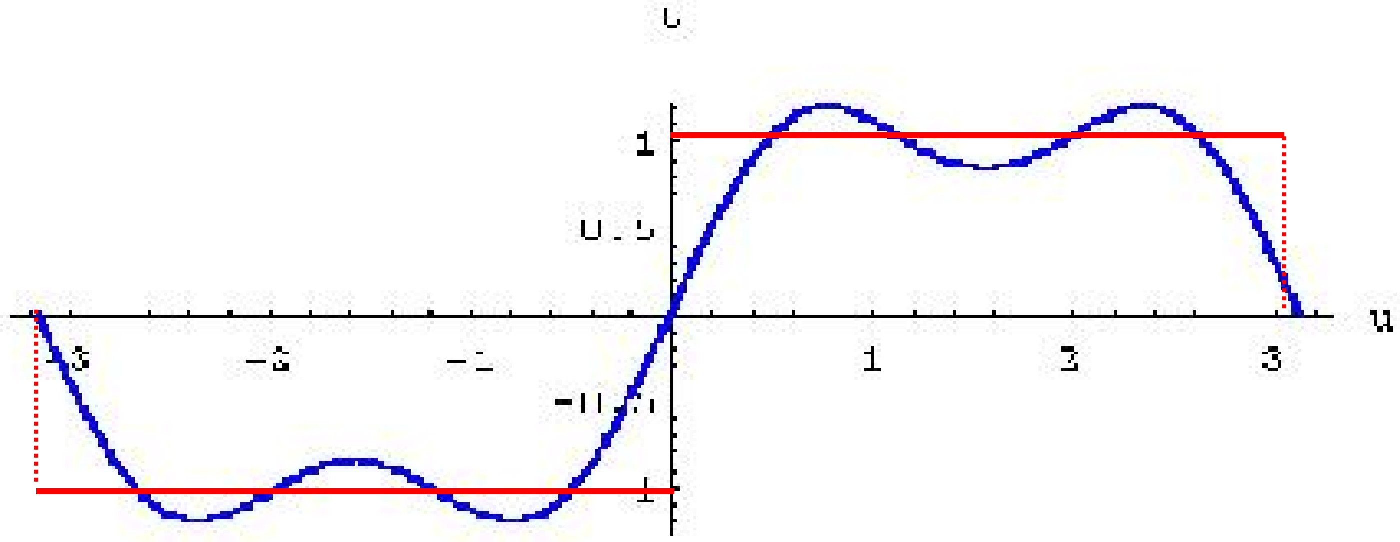
不同频率正弦波逐个叠加

$$\frac{4}{\pi}\sin t,\ \ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{3}\sin 3t,\ \ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{5}\sin 5t,\ \ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{7}\sin 7t,\cdots$$

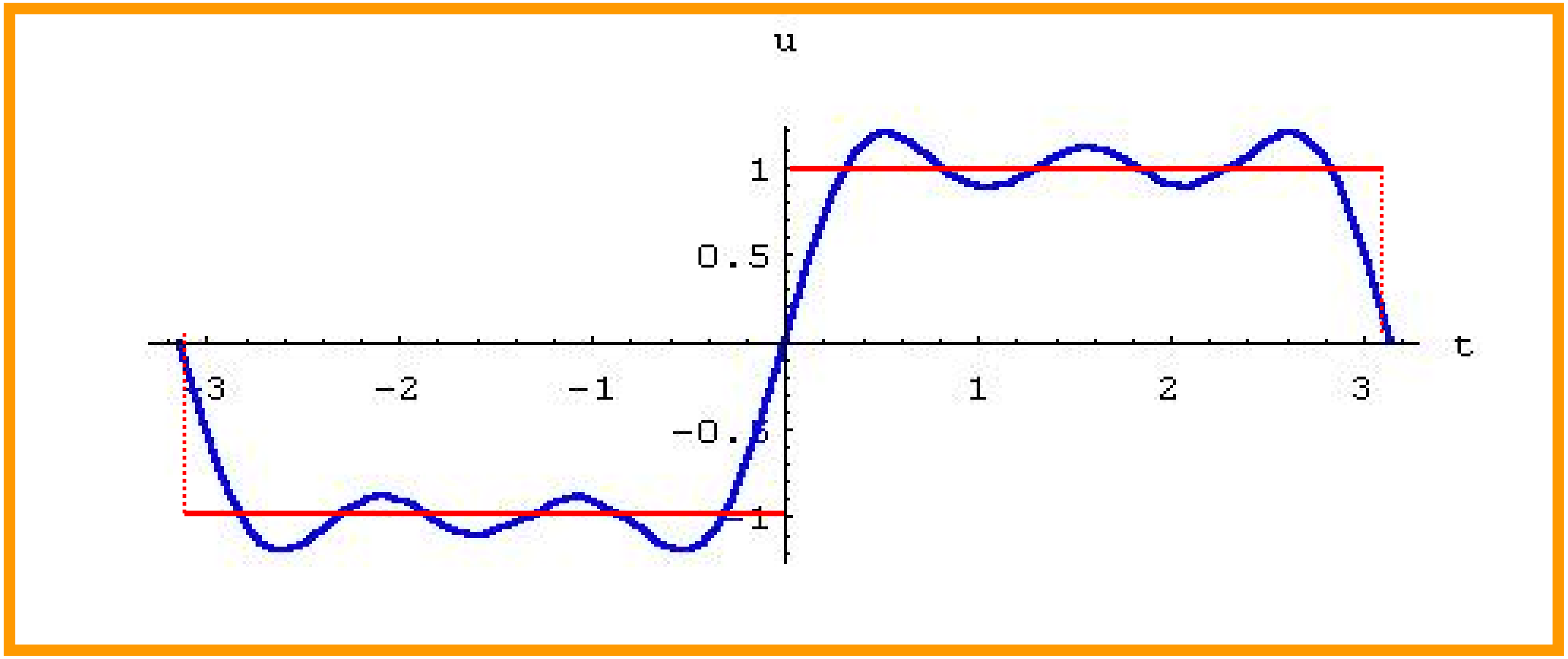
$$v(t) = \frac{4}{\pi}\sin t$$



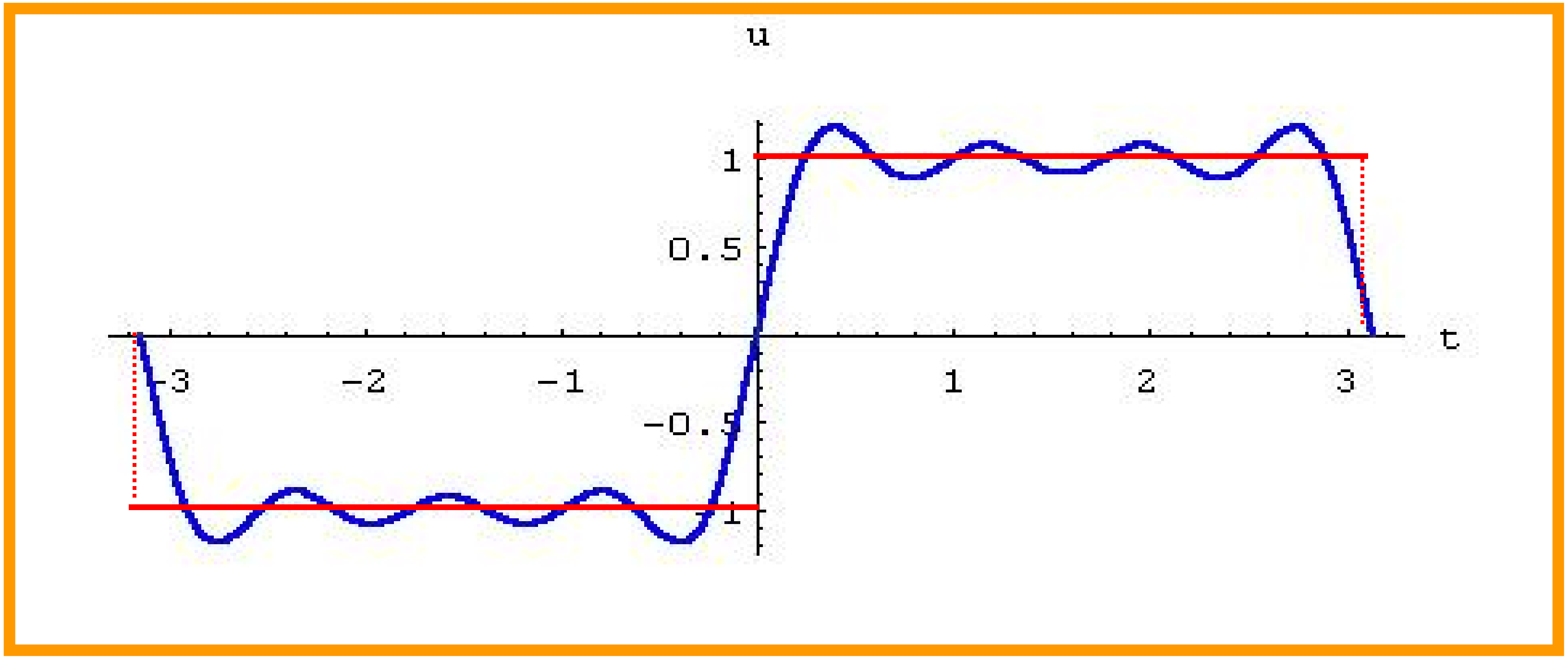
$$v(t) = \frac{4}{\pi}(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t)$$



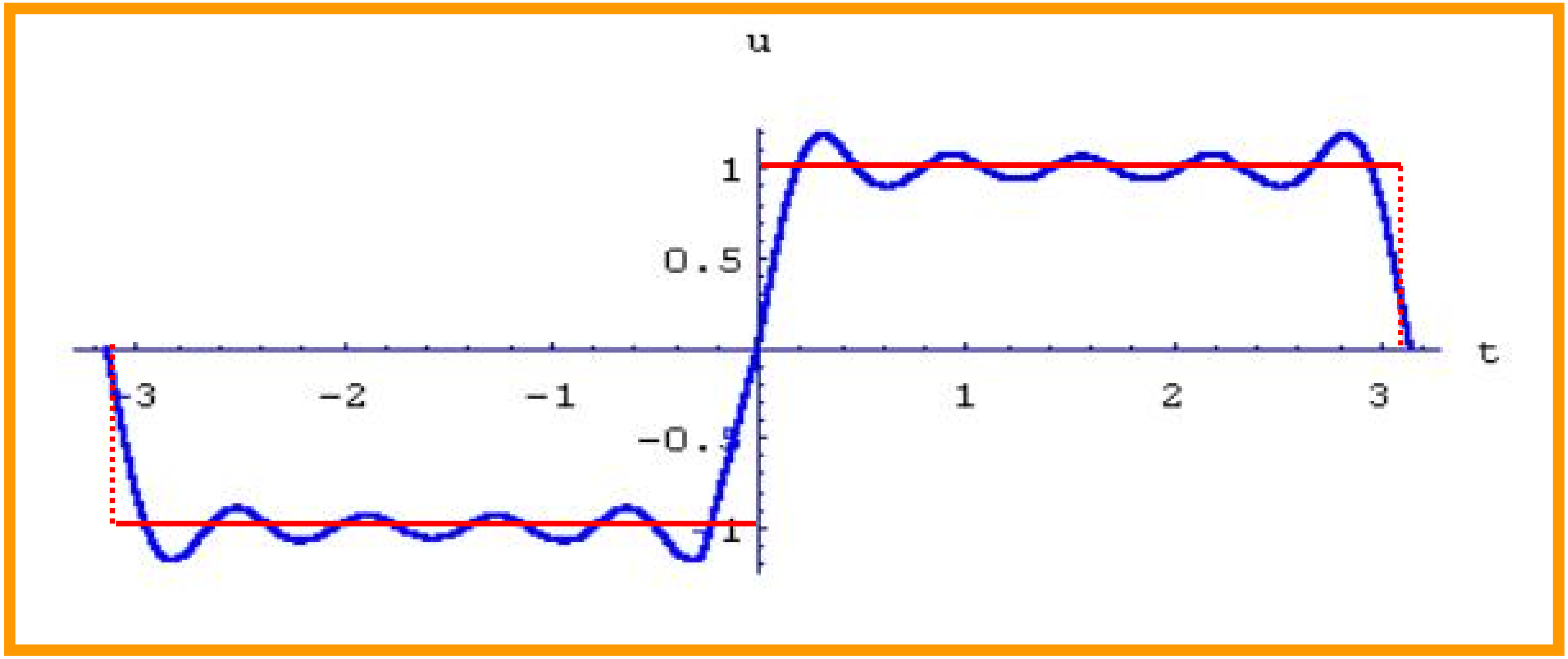
$$v(t)=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t)$$

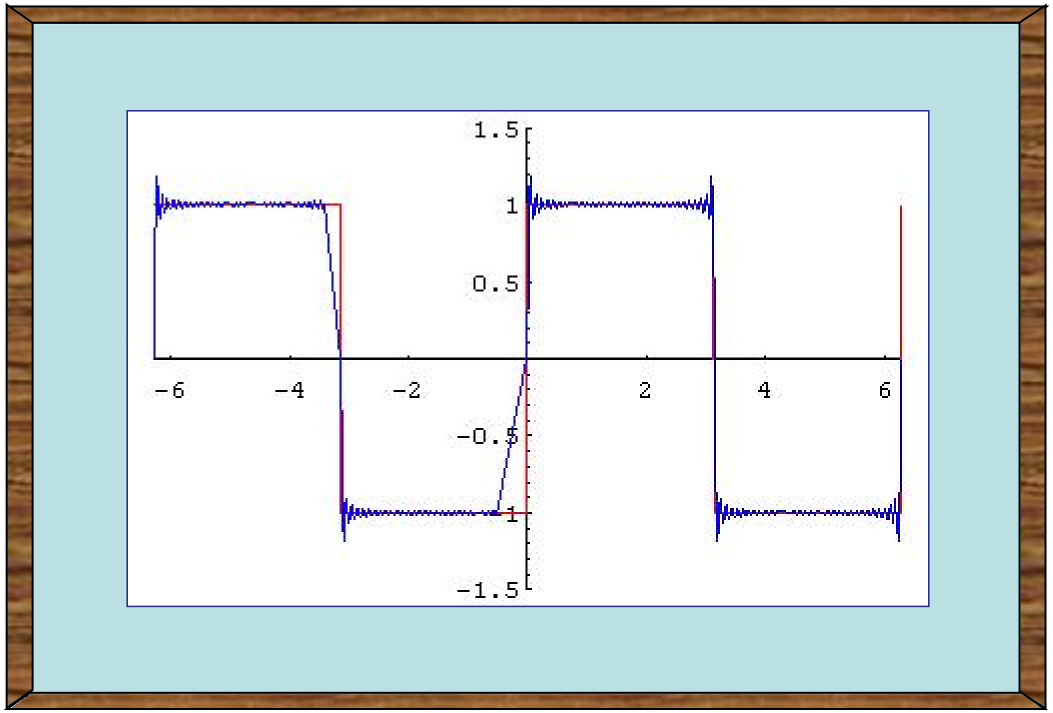


$$v(t)=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t)$$



$$v(t)=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t+\frac{1}{9}\sin 9t)$$





$$u(t)=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t+\cdots)$$

$$(t\neq k\pi, k\in Z)$$

无限个正弦函数的叠加

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} y_n = A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t+\varphi_n)$$

周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

其中：$\dfrac{a_0}{2}=A_0$，$a_n=A_n\sin\varphi_n$，$b_n=A_n\cos\varphi_n$，$x=\omega t$.

三角级数： $$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

三角函数系：

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$$

问题：三角级数是周期函数，周期函数能否展开成三角级数？

定理1：若级数

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$$

收敛，则三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对且一致收敛。

- 三角函数系的正交性

函数 f,g 在 $[a,b]$ 上的内积 $:<f,g>=\int_a^b f\cdot g\,dx$.

若 $<f,g>=0$,则称 f,g 在 $[a,b]$ 上正交 .

定理2： 三角函数系

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$$

在一个周期 $[-\pi,\pi]$ 内两两正交 ,即有 :

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

即
$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = 0, \ \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \quad (m \neq n) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \quad (m \neq n) \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \end{cases}$$

且
$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = \pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \pi \end{cases}$$

二、以2π为周期的函数的傅里叶级数

定理2： 若在 $(-\infty,+\infty)$ 上

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

且等式右边的级数一致收敛，则

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\quad(n=1,2,\cdots).$$

定义： 若 $f(x)$ 以 2π 为周期且 $f(x)\in R[-\pi,\pi]$，则称

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

为函数 $f(x)$ 的 **傅里叶系数。**

定义：以 $f(x)$ 的傅里叶系数为系数的 三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

称为 $f(x)$ 的**傅里叶级数。**

问题： 1、$f(x)$ 的傅里叶级数是否收敛？

2、若收敛，傅里叶级数 的和函数是否等于 $f(x)$?

三、收敛性定理

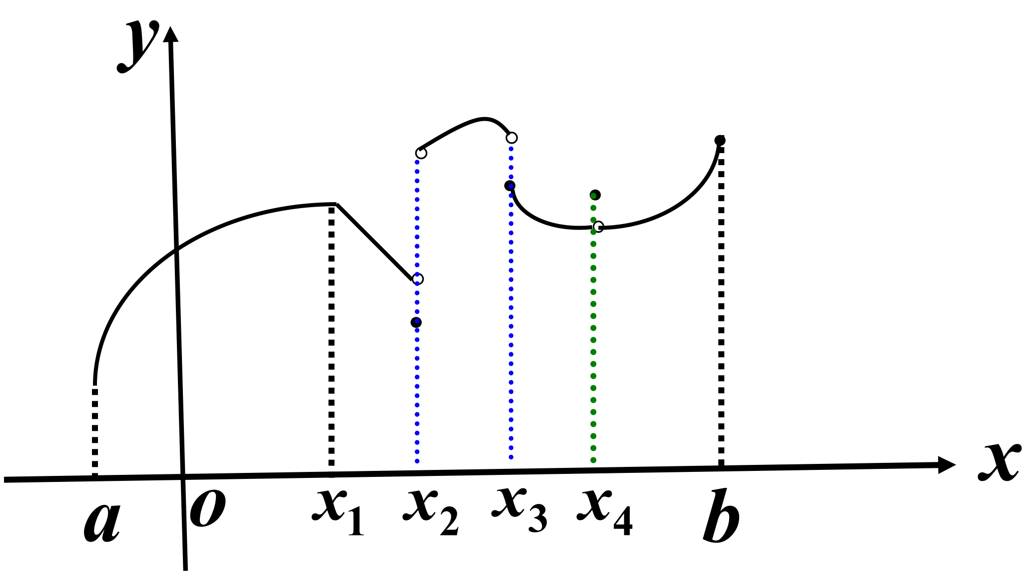
定义：称 $f(x)$ 在$[a,b]$上按段光滑，若

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除有限个第一类间断点外连续；

(2) $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上除有限个点外都存在且连续；

(3) $f'(x)$ 在 $f(x)$ 的不可导点处的左右极限存在。

按段光滑函数的几何意义：由有限个光滑弧段组成，至多有有限个第一类间断点与角点。



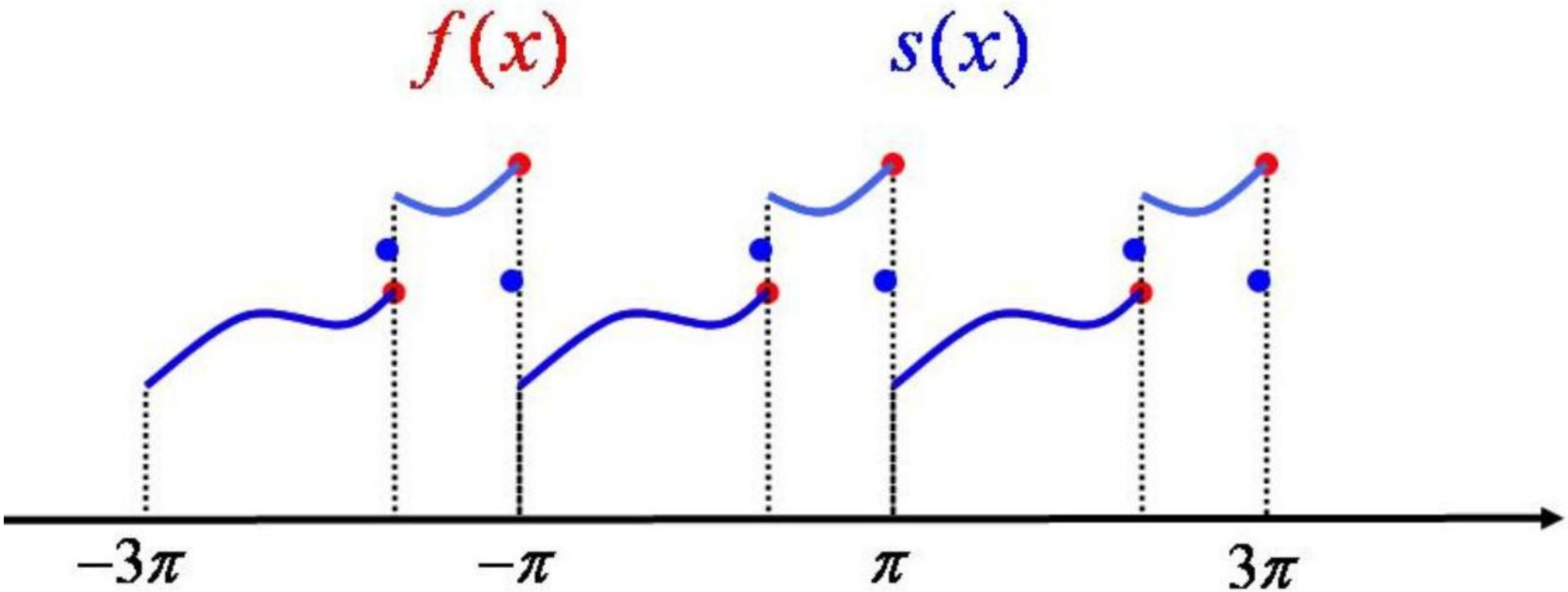
定理3：（傅里叶级数收敛性定理）

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且在 $[-\pi,\pi]$ 上按段光滑，则 $\forall x \in [-\pi,\pi]$，f 的傅里叶级数收敛于 f 在点 x 的左右极限的算术平均值，即：

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.}$$

$f(x)$的傅里叶级数的和函数为 $S(x)$, 则

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & x为f(x)的连续点, \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x为f(x)的间断点. \end{cases}$$



将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数的步骤:

(1) 写出 $f(x)$ 的傅里叶系数;

(2)写出 $f(x)$ 的傅里叶级数,若 x 为 f 的连续点,则:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

例1、将以 2π 为周期的函数

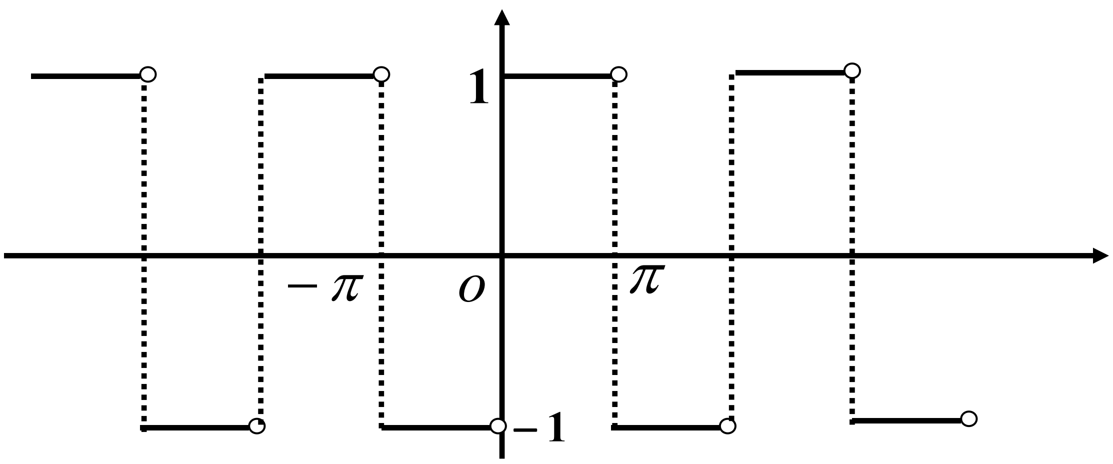
$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi < x < 0\\ x, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$$

展为傅里叶级数.

例2、将以 2π 为周期的矩形波

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi\end{cases}$$

展为傅里叶级数.



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}\,x = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & n\text{为奇数} \\ 0, & n\text{为偶数} \end{cases}.$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots + \frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x + \cdots\right]$$

$$(-\infty < x < +\infty,\ x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots)$$

- 有限区间上函数的傅里叶级数

定义在 $(-\pi,\pi]$ 上的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开法

$$f(x), \quad x\in(-\pi,\pi]$$

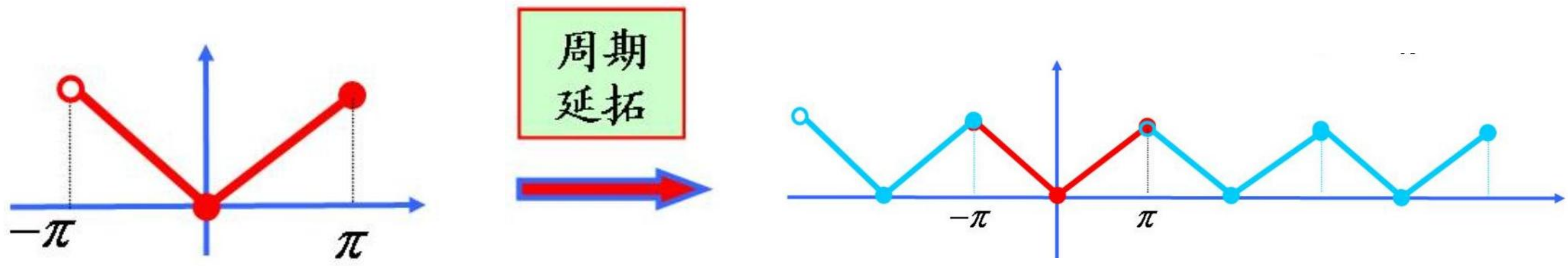
$$\Big\downarrow \text{周期延拓}$$

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(-\pi,\pi] \\ f(x-2k\pi), & x\in((2k-1)\pi,(2k+1)\pi] \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \text{傅里叶展开}$$

$f(x)$ 在 $(-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数

例3、将 $f(x)=|x| \quad (-\pi < x \leq \pi)$ 展开成傅里叶级数.



- $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\left(\cos x+\dfrac{1}{3^2}\cos 3x+\dfrac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$

$$(-\pi < x \leq \pi)$$

- $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$

$$(-\pi < x \le \pi)$$

- 令 $x=0$ 得：

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$$

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots.$$

例4、证明：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{\pi^2-3x^2}{12}\ (-\pi\le x\le\pi).$

作业

习题15-1：1(1)(i)、3 (1)