2.2 收敛数列的性质

1 唯一性

2 有界性

3 保号性

4 保不等式性

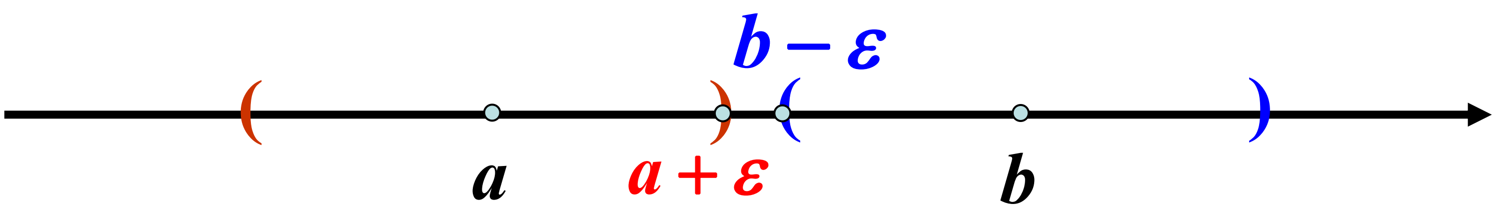
5 迫敛性

6 四则运算

7 收敛数列与其子数列的关系

一、唯一性

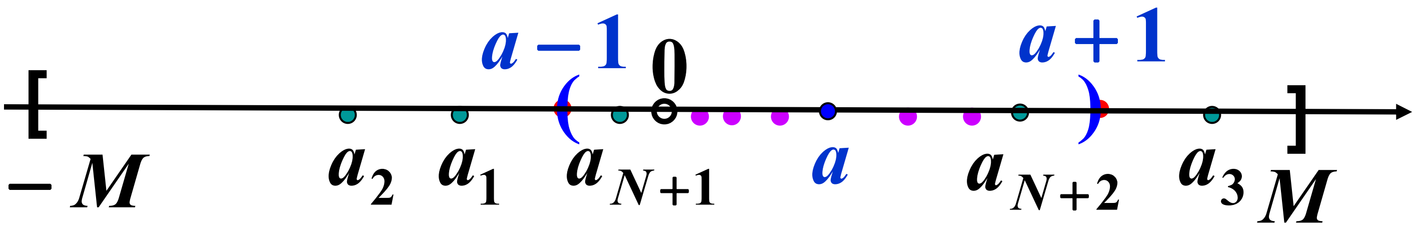
性质1： 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，则它是唯一的.



二、有界性

性质2： 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，则 $\{a_n\}$ 有界. 即 $\exists M>0$,

使得 $\forall n\in Z^+$, 有 $|a_n|\le M$.



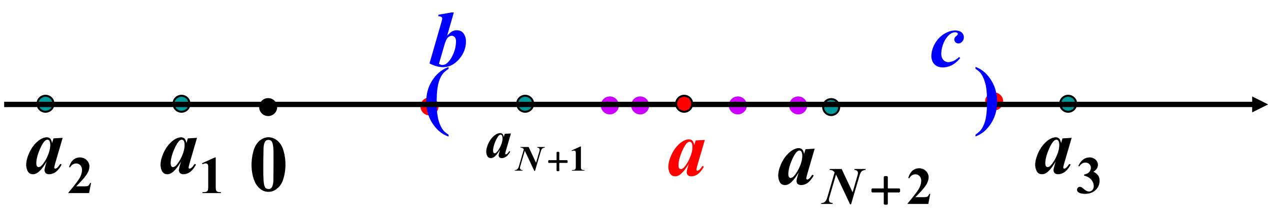
推论： 无界数列必发散。

有界数列
不一定收敛.

三、保号性

性质3：设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\forall b,c\in R$ 且 $b<a<c$，

$\exists N\in Z^+$，当 $n>N$ 时，$b<a_n<c$.



推论1：(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 且 $a > 0$ ，则 $\exists N \in Z^+$，

当 $n > N$ 时，$a_n > 0$.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 且 $a < 0$ ，则 $\exists N \in Z^+$，

当 $n > N$ 时，$a_n < 0$.

推论2：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ 且 $a < b$，则 $\exists N \in Z^+$，当 $n > N$ 时，有 $a_n < b_n$．

例1、证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$

四、保不等式性

性质4： 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.若 $\exists N \in Z^+$,当 $n > N$ 时,有 $a_n \le b_n$,则

$$a \le b.$$

思考： 若将条件中的 $a_n \le b_n$ 改为 $a_n < b_n$,是否有 $a < b$?

例2、设 $a_n \geq 0\ (n = 1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

五、迫敛性

性质5：设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. 数列$\{c_n\}$满足：

存在 $N \in Z_+$,当$n > N$时有

$$a_n \le c_n \le b_n \ ,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

例3、设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$，求证 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

例4、求极限 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,$$

其中 $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

六、四则运算

性质6： 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

(3) 若 $b \neq 0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

例5、 设 $|q|<1$, 求极限

$$\lim_{n\to\infty}(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}).$$

例6、设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 m 个正数，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^{\,n}+a_2^{\,n}+\cdots+a_m^{\,n}}=\max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}.$$

例7、用极限的四则运算法则计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0},$$

其中 $m \le k, a_m b_k \neq 0$.

- 利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}} = 0\,(\alpha > 0)$.

七、收敛数列与其子数列的关系

定义：设$\{a_n\}$为数列，$\{n_k\}$为Z_+的无限子集，且

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots,$$

则数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

总有：

$n_k \geq k$.

称为$\{a_n\}$的子列，记为$\{a_{n_k}\}$.

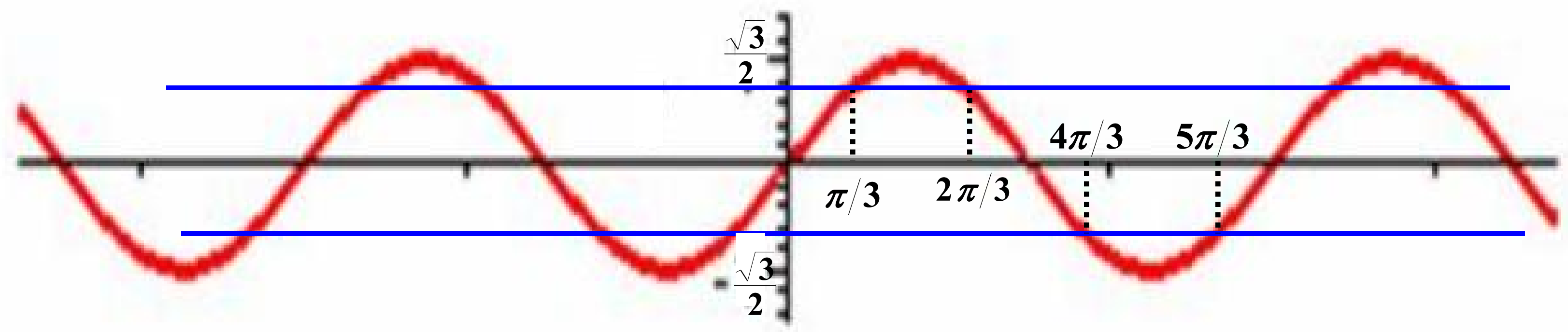
- 如 $a_n = \dfrac{1}{n}$. $\{a_{2k}\}: \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \cdots, \dfrac{1}{2k}, \cdots$.

性质7：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则对数列 $\{a_n\}$ 的任一子数列 $\{a_{n_k}\}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$.

注：若数列有两个子数列收敛于不同的极限，则原数列一定发散。

如：$a_n = (-1)^{n-1}$.

思考: 证明数列 $\{\sin n\}$ 发散 .



作　　业

习题2-2： 1(3)(4)(5)(6)、4(1)(2)(4)(5)、6(3)