5.2 求导法则

1 四则运算求导法则

2 反函数的求导法则

3 复合函数求导法则

4 基本求导法则与公式

主要目的：解决初等函数的求导

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

5. 1节

5.2节

$$\left\{\begin{array}{l}(C)'=0,\ (x^n)'=nx^{n-1}\\(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}\\(\sin x)'=\cos x\\(\cos x)'=-\sin x\end{array}\right.$$

求导法则

其它基本初等函数求导公式

初等函数的求导

一、四则运算求导法则

定理1： 若 $u(x)$, $v(x)$ 在点 x 可导，则：

$$(1)\ [u(x)\pm v(x)]' = u'(x)\pm v'(x);$$

$$(2)\ [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x);$$

$$(3)\ \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0).$$

$$\boxed{\left[\frac{1}{v(x)}\right]' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}.}$$

一、四则运算求导法则：特殊情形和一般化

$$\boxed{(u+v)' = u' + v'.}$$

$$(u+v+\omega)' = u' + v' + \omega'.$$

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'.}$$

$$\begin{cases} (cu)' = cu'. \\ (uv\omega)' = u'v\omega + uv'\omega + uv\omega'. \end{cases}$$

$$(c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n)' = c_1u_1' + c_2u_2' + \cdots + c_nu_n'.$$

线性组合的导数 = 导数的线性组合

例1、设 $f(x)=\ln x+x^2+\sin 1$，求 $f'(x)$ 及 $f'(1)$.

$$\boxed{f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}.}$$

例2、设 $f(x)=\cos x\ln x$，求 $f'(x)$.

例3、证明下列公式．

(1) $(\tan x)' = \sec^2 x$ ．

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

(2) $(\cot x)' = -\csc^2 x$.

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

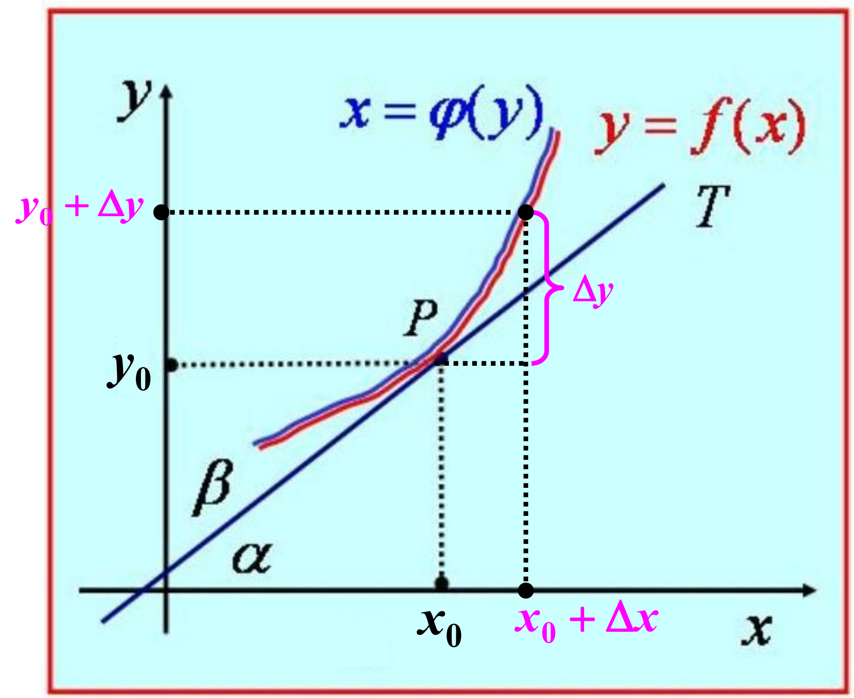
(3) $(\sec x)' = \sec x \tan x$.

(4) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$.

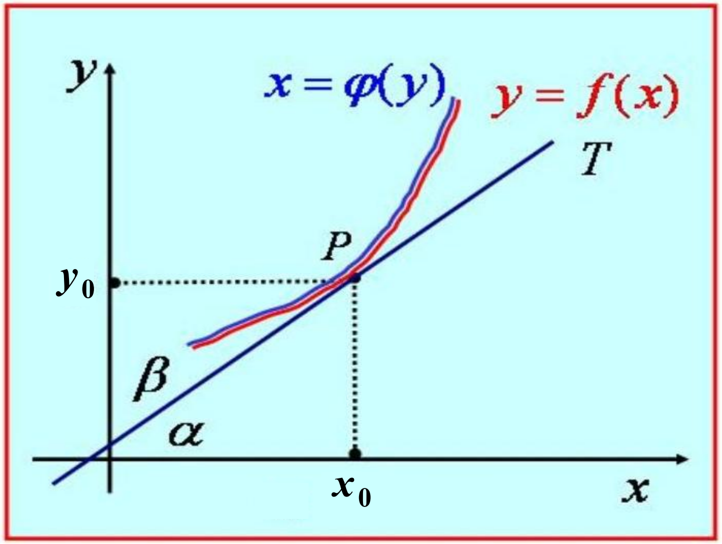
二、反函数的求导法则

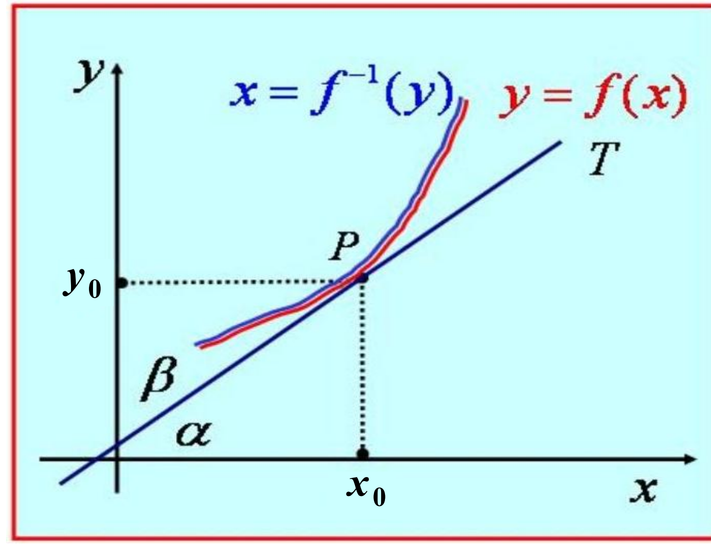
定理2: 设 $x=\varphi(y)$ 在 y_0 的某邻域内严格单调 且 $\varphi'(y_0)\neq 0$，则其反函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0=\varphi(y_0)$ 可导，且

$$f'(x_0)=\frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$



$y=f(x)$ 反函数 $x=\varphi(y)$. $\quad$ $y=f(x)$ 反函数 $x=f^{-1}(y)$.





$$f'(x_0)=\frac{1}{\varphi'(y_0)}.$$

$$f'(x_0)=\frac{1}{(f^{-1})'(y_0)}.$$

例4、设 $f(x)=2x+\cos x$, 求 $(f^{-1})'(1)$.

例5、求下列函数的导数。

(1) $y = a^x$.

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a.}$$

特别地，$(e^x)' = e^x$.

(2) $y = \arcsin x$.

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.} \quad (-1 < x < 1)$$

(3) $y = \arccos x$.

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.} \quad (-1 < x < 1)$$

(4) $y = \arctan x$.

$$\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.}$$

(5) $y = arc\cot x$.

$$\boxed{(arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}.}$$

三、复合函数的求导法则

练习：设 $y = \sin 2x$，求 y'.

令 $y = f(u) = \sin u$, $u = \varphi(x) = 2x$.

$$y' = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

或

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

引理： 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导的充要条件是在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上存在一个在点 x_0 连续的函数 $H(x)$，使得

$$f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0),$$

从而 $f'(x_0)=H(x_0)$.

定理3： 若 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 可导，$y=f(u)$ 在对应点 $u_0=\varphi(x_0)$ 处可导，则复合函数 $f\circ\varphi$ 在点 x_0 处可导，且

$$\boxed{(f\circ\varphi)'(x_0)=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0)=f'(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0).}$$

链式法则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}.$

例6、求幂函数 $y = x^{\alpha}$ 的导数 .

例7、求下列函数的导数。

(1) $y = \sqrt{1+x^2}$.　(2) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

(3) $y = \ln\cos(e^x)$.　(4) $y = \frac{2}{3}\arctan(\frac{1}{3}\tan\frac{x}{2})$.

(5) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

对数求导法

1、幂指函数 $y=u(x)^{v(x)}\ (u(x)>0)$ 求导。

取对数： $\ln y = v\ln u$

关于 x 求导： $\frac{1}{y}y' = v'\ln u + \frac{u'v}{u}$

代入 $y=u^v$： $y' = u^v\left(v'\ln u + \frac{u'v}{u}\right)$

注意： $y' = \underline{u^v \ln u \cdot v'} + \underline{vu^{v-1}\cdot u'}$

按指数函数求导公式　　按幂函数求导公式

例8、求 $y = x^{\sin x}\ (x > 0)$ 的导数 .

2、含较多乘积因子的函数的导数

例9、求 $y = \dfrac{(x+5)^2 (x-4)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^5 (x+4)^{\frac{1}{2}}}\ (x > 4)$ 的导数 .

注：对数可以化乘为和，化商为差，化幂为系数。

四、基本求导法则与公式

1、四则运算的求导法则

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; \qquad (uv)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

2、反函数求导法则： $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$.

3、复合函数求导法则： $y = f(u)\,, u = \varphi(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

4、 基本初等函数的导数

$(C)' = 0$

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

四则运算求导

$$\begin{cases} (\tan x)' = \sec^2 x \\ (\sec x)' = \sec x \tan x \end{cases}$$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

反函数求导

$$\begin{cases} (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

例10、(1) 设 $f(x)=x(x-1)\cdots(x-9)$，求 $f'(0)$；

(2) 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续，求 $f'(a)$.

作　　业

习题5-2：2（偶数题）、3（奇数题）