§ 16.2　二元函数的极限

1 二元函数的极限

2 累次极限

一、二元函数的极限

定义1：设二元函数 f 定义在 $D\subset\mathrm{R}^2$ 上, P_0 为 D 的一个聚点, A 是一实数. 若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得当 $P\in U^{\circ}(P_0;\delta)\cap D$ 时，都有

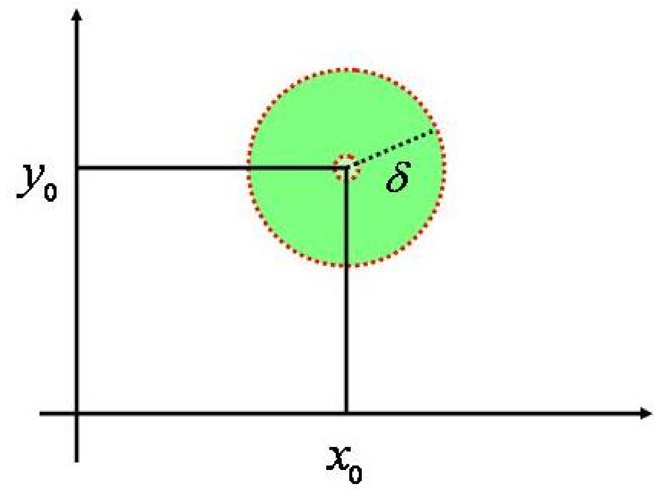
$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

则称 f 在 D 上当 $P\to P_0$ 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P)=A.\quad \text{简记为} \lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

设 $P=(x,y)$, $P_0=(x_0,y_0)$, 常写为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$



注：(1) 二元函数的极限也叫二重极限；

(2) 定义中 $P\to P_0$ 的方式是任意的。

例1、设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$，

证明：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

例2、设 $f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0).$

证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

- 一元函数的极限运算法则可以推广到二元函数。

例3、求 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2+x)\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

- 二元函数的极限具有唯一性、局部有界性和局部保号性。

定理1： $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}} f(P)=A$ 的充要条件是：对于 D 的任一子集 E, 只要 P_0 仍是 E 的聚点, 就有

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in E}} f(P)=A.$$

推论1: 若 $\exists E_1 \subset D$, P_0 是 E_1 的聚点, 使 $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P \in E_1}} f(P)$ 不存在, 则 $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P \in D}} f(P)$ 也不存在.

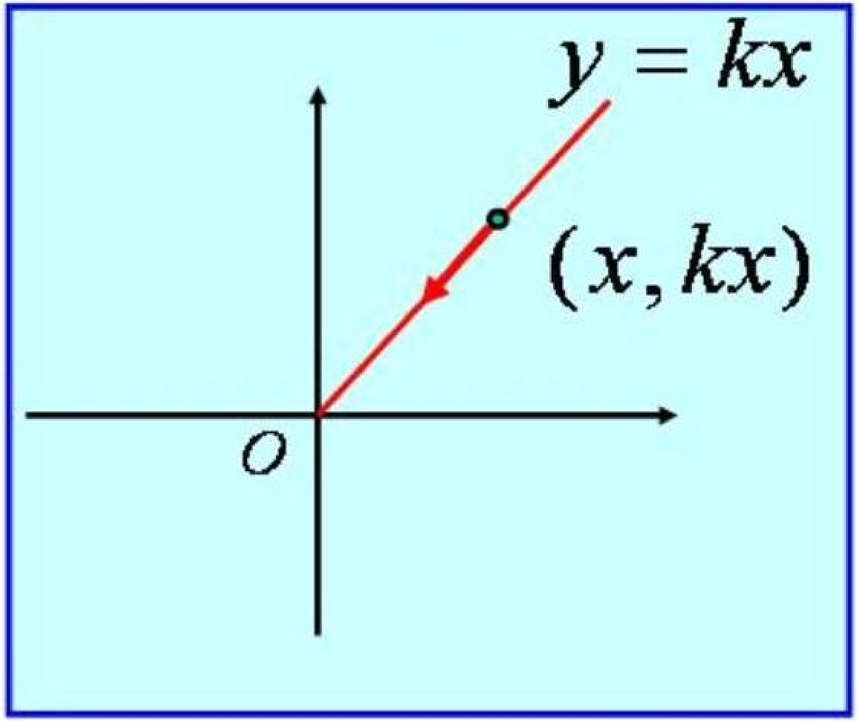
推论2: 若 $\exists E_1, E_2 \subset D$, P_0 是它们的聚点，使得

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in E_1}} f(P) = A_1 \text{ 与 } \lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in E_2}} f(P) = A_2$$

都存在，但 $A_1 \neq A_2$, 则 $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P \in D}} f(P)$ 不存在.

推论3: 极限 $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P \in D}} f(P)$ 存在的充要条件是：D 中任一满足条件 $P_n \neq P_0$ 且 $\lim\limits_{n \to \infty} P_n = P_0$ 的点列 $\{P_n\}$，$\lim\limits_{n \to \infty} f(P_n)$ 都存在且相等 .

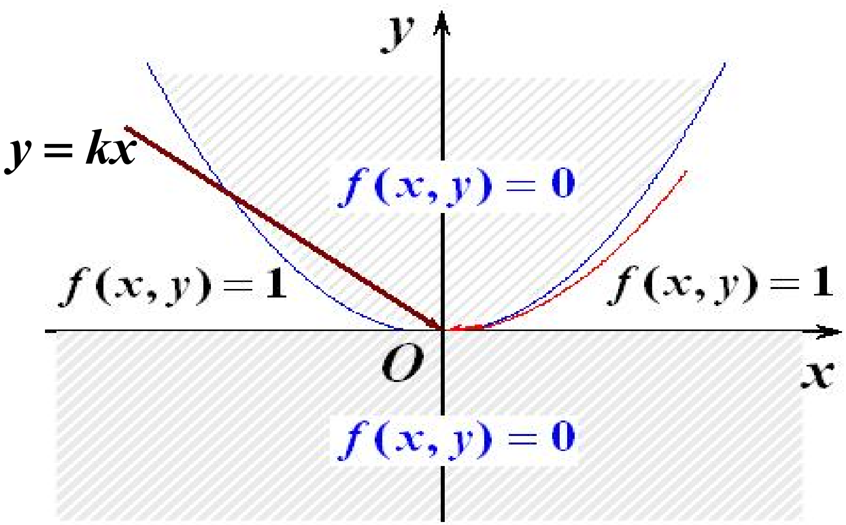
例4、设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在。



例5、设

$$f(x,y)=\begin{cases}1,\ 0<y<x^2, -\infty<x<+\infty,\\ 0, 其余部分.\end{cases}$$

讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 是否存在.



定义2：设 D 为二元函数 f 的定义域，$P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的一个聚点. 若 $\forall M>0, \exists \delta>0$, 使得

$$\forall P(x, y) \in U^{\circ}(P_0; \delta) \cap D, \text{ 都有 } f(x, y) > M,$$

则称 f 在 D 上当 $P \to P_0$ 时有非正常极限 $+\infty$，记作

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = +\infty,$$

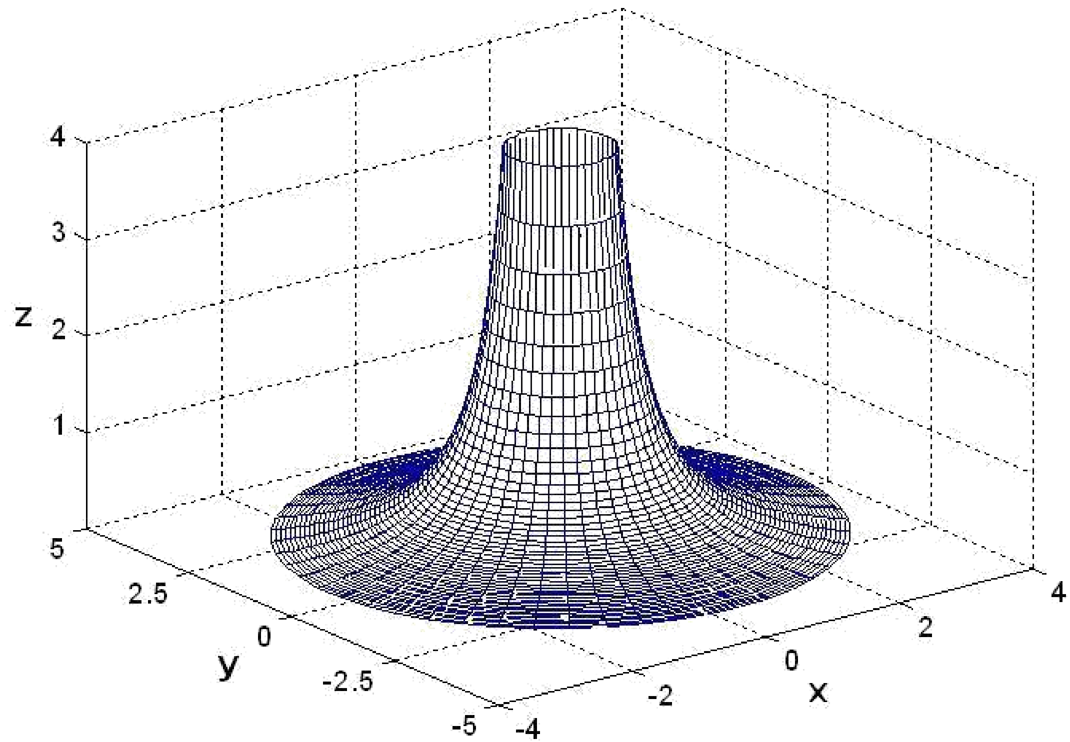
或 $$\lim_{P \to P_0} f(P) = +\infty.$$

类似地可定义：

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = -\infty \text{ 与 } \lim_{P\to P_0} f(P) = \infty.$$

例6、设$f(x,y)=\dfrac{1}{2x^2+3y^2}$. 证明

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = +\infty.$$



$$f(x, y) = \frac{1}{2x^2 + 3y^2}$$

二、累次极限

定义3: 设 $f(x,y)$ 定义在 D 上, D 在 x 轴、y 轴上的投影分别为 X、Y, 即

$$X=\{x\,|\,(x,y)\in D\},\quad Y=\{y\,|\,(x,y)\in D\},$$

x_0, y_0 分别是 X, Y 的聚点. 若 $\forall y\in Y,\ y\neq y_0$

存在极限

$$\varphi(y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y);$$

若进一步还存在极限

$$L=\lim_{y\to y_0}\varphi(y),$$

则称此 L 为 $f(x,y)$ 先对 $x\,(\to x_0)$ 后对 $y\,(\to y_0)$ 的累次极限, 记作

$$L=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

类似地可以定义先对 y 后对 x 的累次极限:

$$K = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x, y).$$

注: 累次极限与重极限是两个不同的概念, 两者之间没有蕴涵关系.

例7、求 $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ 当 $(x, y) \to (0, 0)$ 时的重极限与累次极限。

例8、求 $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2+x-y}{x+y}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$

时的重极限与累次极限。

例9、求 $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$

时的重极限与累次极限。

定理2： 若 $f(x,y)$ 的重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 都存在, 则两者必相等.

推论1:若重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 和累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y),\ \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

都存在，则三者必定相等.

推论2:若累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) \quad 与 \quad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

都存在但不相等，则重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

不存在.

作业

习题16-2：1(1)(3)(6)、2(1)(5)、7(2)(3)