第十四章　幂级数

1 幂级数

2 函数的幂级数展开

14.1 幂级数

1 幂级数的收敛区间

2 幂级数的性质

3 幂级数的运算

幂级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \quad (1)$$

令 $x_0 = 0$,得幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (2)$$

注:只需讨论形如(2)的幂级数.

问题：（i）如何确定幂级数的收敛域？

（ii）如何求幂级数的和函数？

如： 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

收敛域 $D = \{x \mid |x| < 1\}$.

和函数：$S(x) = \dfrac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$.

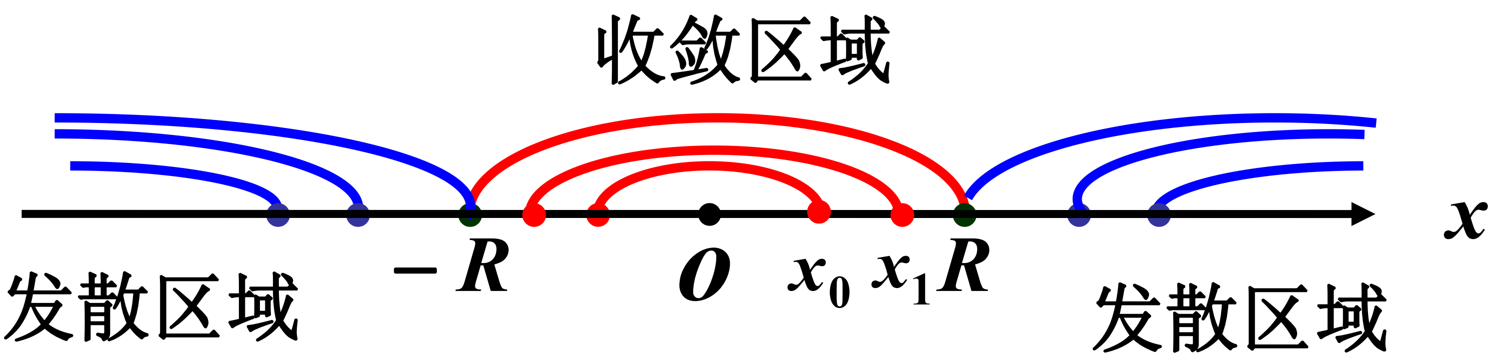
一、幂级数的收敛区间

定理(阿贝尔定理)：

(i) 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x_0 \neq 0$ 收敛,则对任一满足 $|x| < |x_0|$ 的 x ,幂级数绝对收敛；

(ii) 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x_0 \neq 0$ 发散,则对任一满足 $|x| > |x_0|$ 的 x ,幂级数发散.

几何意义：令 $R=\sup\left\{|x|\,\middle|\,\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \text{ 收敛}\right\}$，



即：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛域 D 是以原点为中心的区间，若以 $2R$ 表示区间长度，称 R 为幂级数的收敛半径。

结论：

(1) $R=0$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 仅在 $x=0$ 收敛；

(2) $R=+\infty$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛；

(3) $0<R<+\infty$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $(-R,R)$ 绝对收敛；

在 $(-\infty,-R)\cup(R,+\infty)$ 上发散。

收敛区间：$(-R,R)$

收敛域：$(-R,R),(-R,R],[-R,R),[-R,R]$

问题： 如何确定幂级数的收敛半径?

定理2： 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ (或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$), 则幂级数

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为：

$$R = \begin{cases} 1/\rho, & 0 < \rho < +\infty; \\ +\infty & \rho = 0; \\ 0, & \rho = +\infty. \end{cases}$$

例1、求下列幂级数的收敛域。

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$;

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}} (x-\frac{1}{2})^n$.

例2、求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n-1}$ 的收敛半径 .

注：缺省了 x^{2n} ,即 $a_{2n}=0$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ 不存在 .

$$令\ u_n(x)=\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n-1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+2)!\,x^{2n+1}}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!\,x^{2n-1}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)x^2}{(n+1)^2}=4x^2.$$

定理3： 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R>0$，则幂级数在 $(-R,R)$ 上内闭一致收敛.即对任意 $[a,b]\subset(-R,R)$，幂级数在 $[a,b]$ 上一致收敛。

定理4： 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 且

在 $x = R$ (或 $x = -R$) 处收敛, 则幂级数在

$[0, R]$ (或 $[-R, 0]$) 上一致收敛 .

推论： 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛域上内闭一致收敛。

二、幂级数的性质

定理5：（幂级数和函数的连续性）

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 D,则其和函数

$S(x)$ 在 D 上连续.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (*)$$

逐项求导得:

$$a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad (a)$$

逐项求积得:

$$a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \qquad (b)$$

定理6： 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与其逐项求导级数 (a) 和逐项求积级数 (b) 有相同的**收敛区间** $(-R, R)$.

定理7：（可微性）

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 的和函数

为 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 可导，且有逐项求导公式：

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

定理8：（可积性）

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 的和函数

为 $S(x)$, 则 $\forall x \in (-R, R)$, $S(t)$ 在 $[0, x]$(或$[x,0]$) 可积 ,

且有逐项求积公式:

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

基本公式：$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad (|x|<1)$

例3、求下列幂级数的和函数。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$.

思考：求 $\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)x^{n-1}$.

三、幂级数的运算

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_a 和 R_b，

记 $R=\min\{R_a, R_b\}$，则：

（1）数乘

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n, \qquad |x|<R_a.$$

（2）加减法

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n ; \qquad |x| < R.$$

*（3）乘法

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j \right) x^n , \qquad |x| < R.$$

作业：

习题14-1：1(2)(6)、2(1)(2)