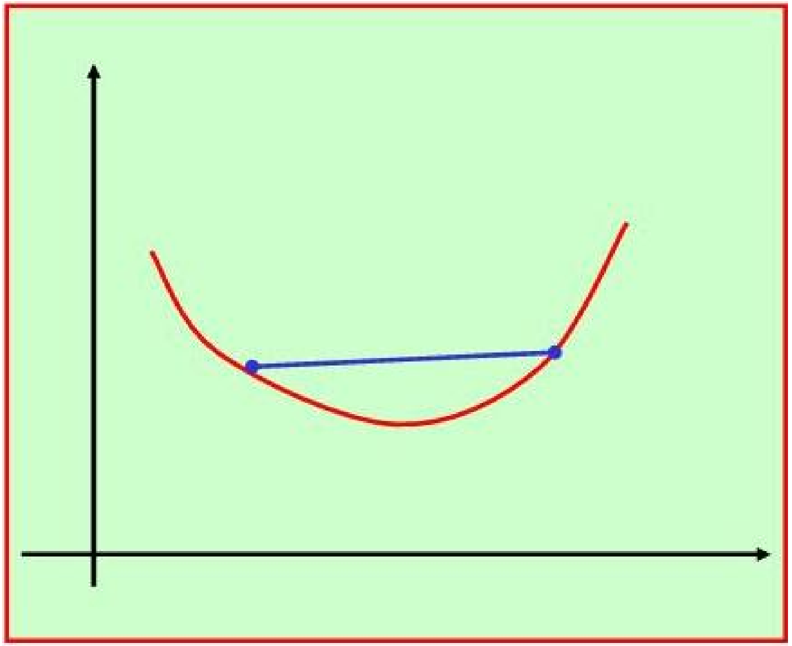
6.5　函数凸性与拐点

1 凸函数的定义

2 凸函数的判定

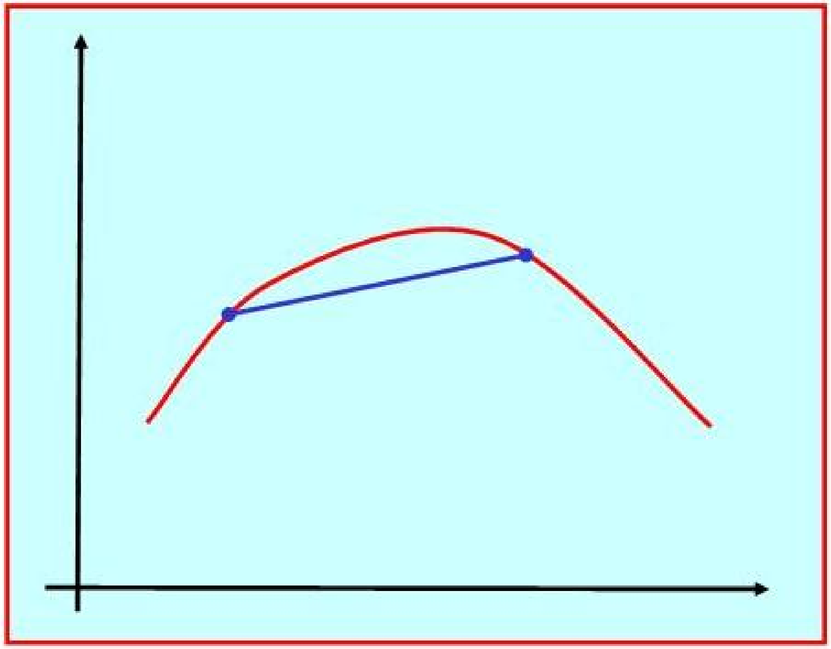
3 拐点

一、凸函数的定义



凸函数

弦位于弧的上方



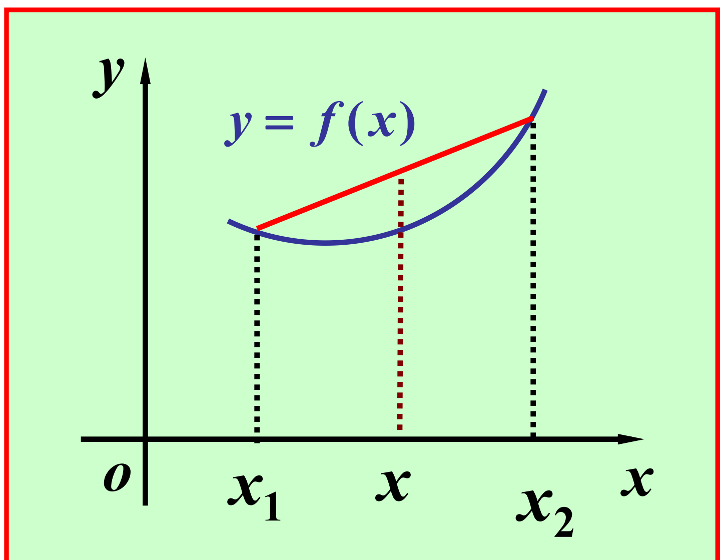
凹函数

弦位于弧的下方

定义1： 设 f 为区间 I上的函数．若对于 I 上的任意 x_1, x_2 和实数 $\lambda \in (0,1)$，总有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \quad (1)$$

则称 f 为 I上的一个凸函数.

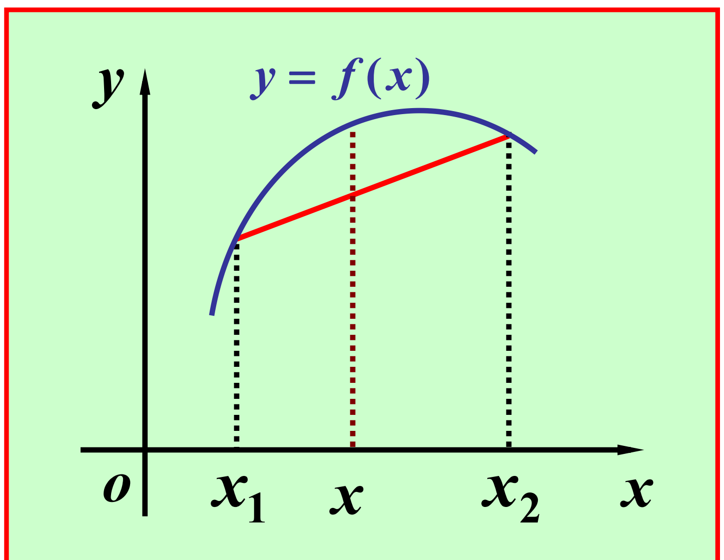


- 若(1)式中的 $\le$ 改为 $<$，则称 f 为 I 上的严格凸函数.

定义1：设 f 为区间 I 上的函数．若对于 I 上的任意 x_1, x_2 和实数 $\lambda \in (0,1)$，总有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \quad (2)$$

则称 f 为 I 上的一个凹函数.



- 若(2)式中的 $\geq$ 改为 $>$，则称 f 为 I 上的严格凹函数.

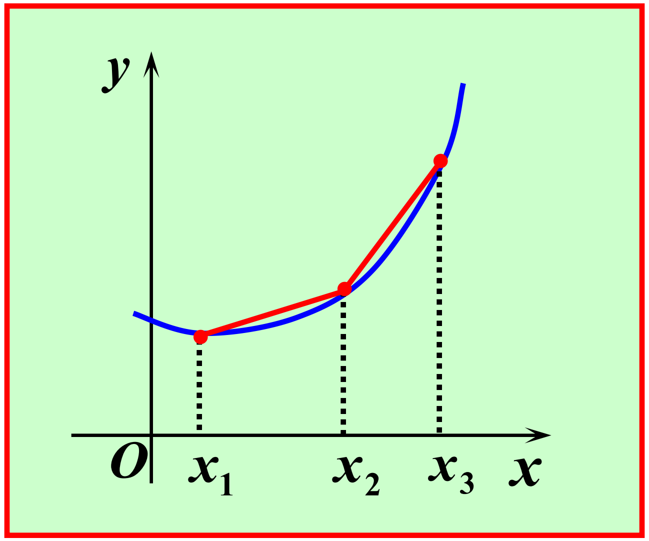
注：若 f 为 I 上的凸函数，则 $-f$ 为 I 上的凹函数．

若 f 为 I 上的凹函数，则 $-f$ 为 I 上的凸函数．

引理： $f(x)$为区间 I上的凸函数的充要条件是：

对于 I 中的任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$,有

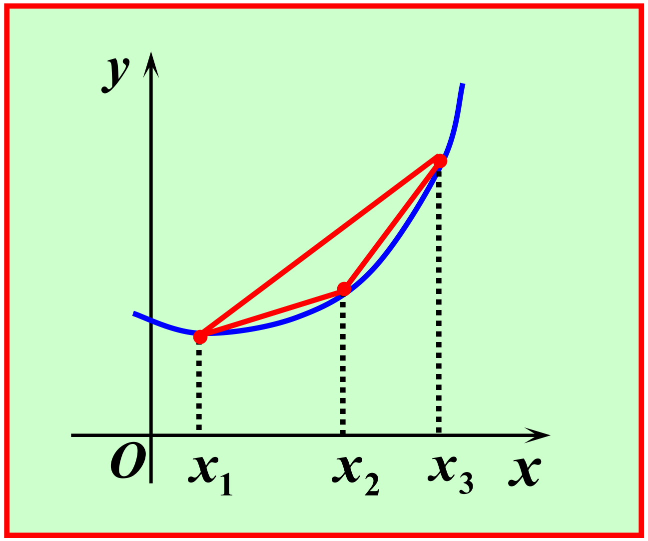
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \qquad (3)$$



推论： $f(x)$为区间 I上的凸函数的充要条件是：

对于 I 中的任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$，有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$



二、凸函数的判定

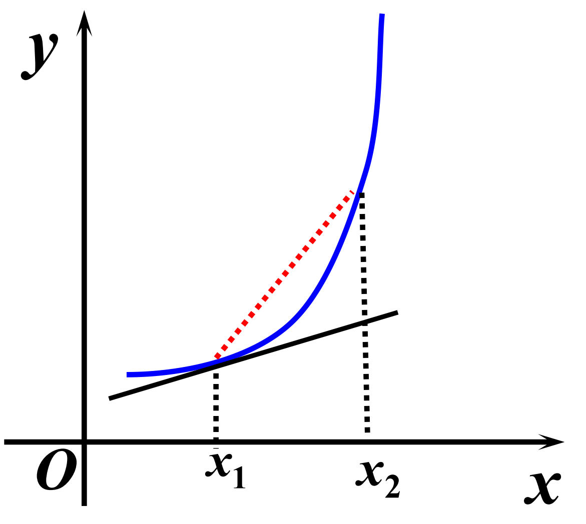
定理1: 设 f 为区间 I 上的可导函数, 则下述论断互相等价:

(1) $f(x)$ 为 I 上的凸函数;

(2) $f'(x)$ 为 I 上的增函数;

(3) 对于任意 $x_1, x_2 \in I$, 有

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

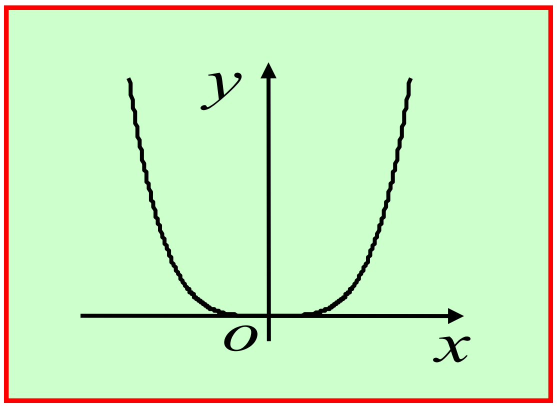


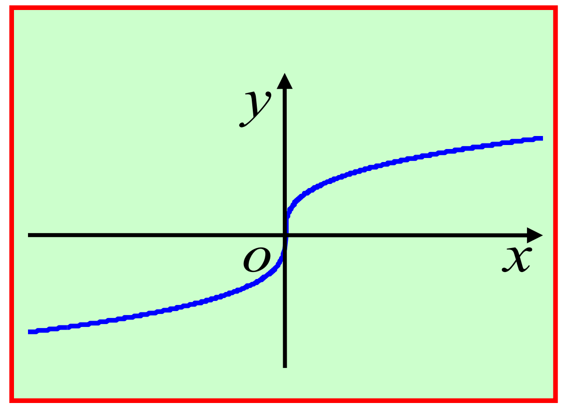
定理2：设 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导，则 $f(x)$ 在区间 I 上是凸(凹)函数的充要条件为：

$$f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0).$$

例1、求下列函数的凹凸区间。

$(1)\ y = x^4$；　　$(2)\ y = \sqrt[3]{x}$.



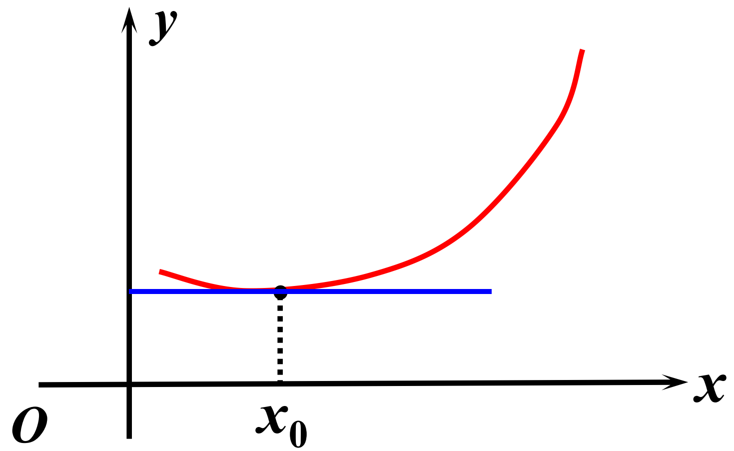


凸函数的性质

性质1： 设 $f(x)$ 为开区间 I 上的凸 (凹) 函数, 则 $\forall x_0 \in I$, $f'_+(x_0)$与 $f'_-(x_0)$ 均存在.

推论： 开区间 I 上的凸 (凹) 函数为连续函数.

性质2：设 $f(x)$ 为开区间 I 上的可导凸 (凹) 函数,则 x_0 为 $f(x)$ 的极值点的充要条件是 $f'(x_0)=0.$



性质3: 设 $f(x)$ 定义在开区间 I 上,且不恒为常数.

(1) 若 $f(x)$ 为凸函数,则 $f(x)$在 I 上无最大值.

(2) 若 $f(x)$ 为凹函数,则 $f(x)$在 I 上无最小值.

推论: (1) 若 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的凸连续函数, 则

$$f(x) \le \max\{f(a), f(b)\}.$$

(2) 若 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的凹连续函数, 则

$$f(x) \ge \min\{f(a), f(b)\}.$$

例2、证明: $1 + x^2 \le 2^x \le 1 + x$, 其中 $x \in [0,1]$.

- 詹森不等式：f 为 I 上的凸函数充要条件是

  对任意 $x_1,\cdots,x_n \in I$，$\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$，其中

  $0<\lambda_i<1\,(1\le i\le n)$．有

$$\boxed{f(\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n)\le \lambda_1 f(x_1)+\cdots+\lambda_n f(x_n).}$$

特别地，取$\lambda_i = 1/n\,(1\le i\le n)$，有：

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\le \frac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right],$$

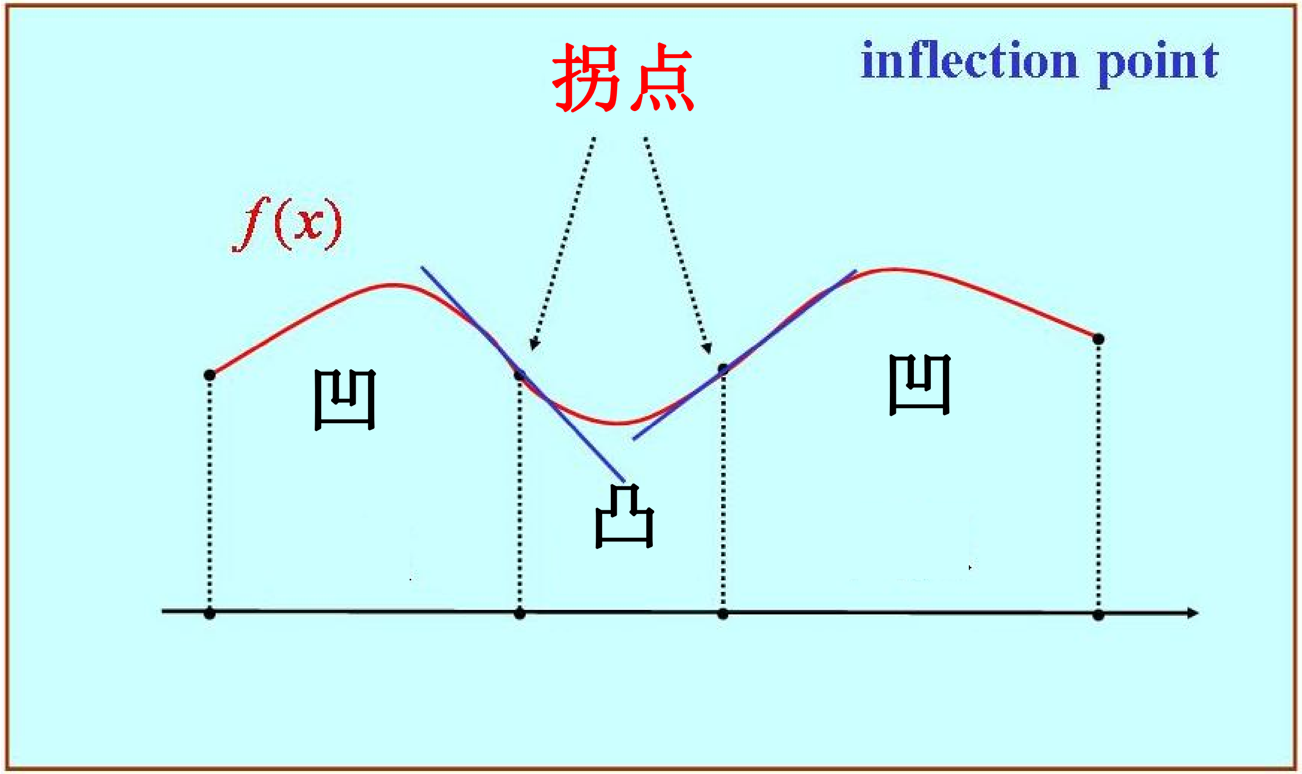
例3、设 $a_i > 0\,(1 \le i \le n)$，证明

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

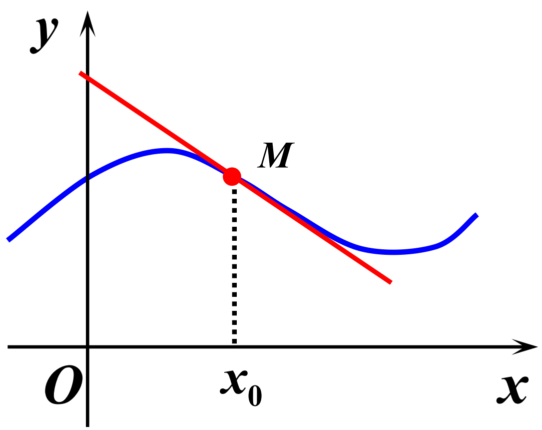
例4、设 $a,b,c>0$. 证明

$$(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \le a^a b^b c^c.$$

三、拐点



定义2: 若 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处有穿过曲线的切线，并且曲线在切线的两侧分别是严格凸和严格凹的,则称点 $(x_0,f(x_0))$ 为 $y=f(x)$ 的**拐点**。



定理3： 设 $f(x)$ 在点 x_0 二阶可导，若 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，则 $f''(x_0)=0$.

注： 可能的拐点 $(x_0, f(x_0))$

$$f''(x_0)=0 \text{ 或 } f''(x_0) \text{ 不存在}.$$

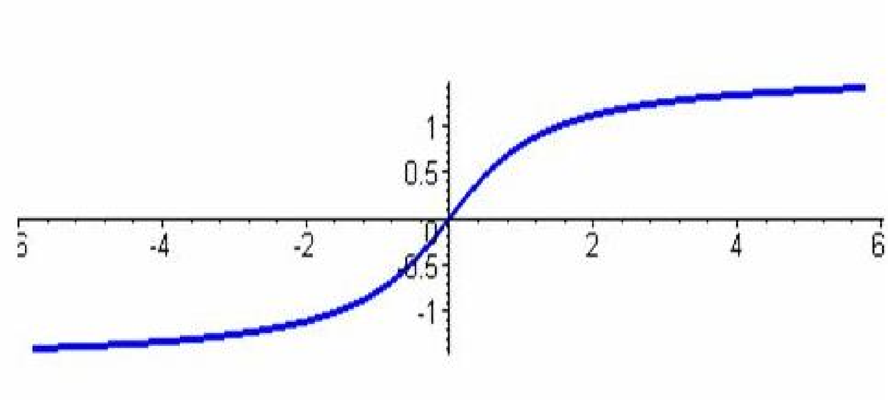
定理4: 设 $f(x)$ 在 x_0 上可导, 在 $U^0(x_0)$ 上二阶可导.

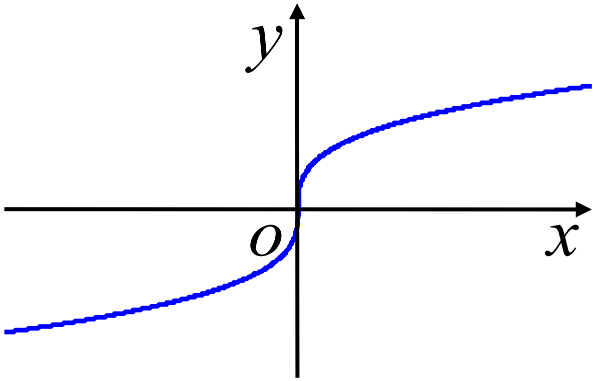
若 $f''(x)$ 在 $U_+^0(x_0)$ 与 $U_-^0(x_0)$ 上符号相反,

则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

例5、求下列函数的拐点。

(1) $y = \arctan x$;　　(2) $y = \sqrt[3]{x}$.



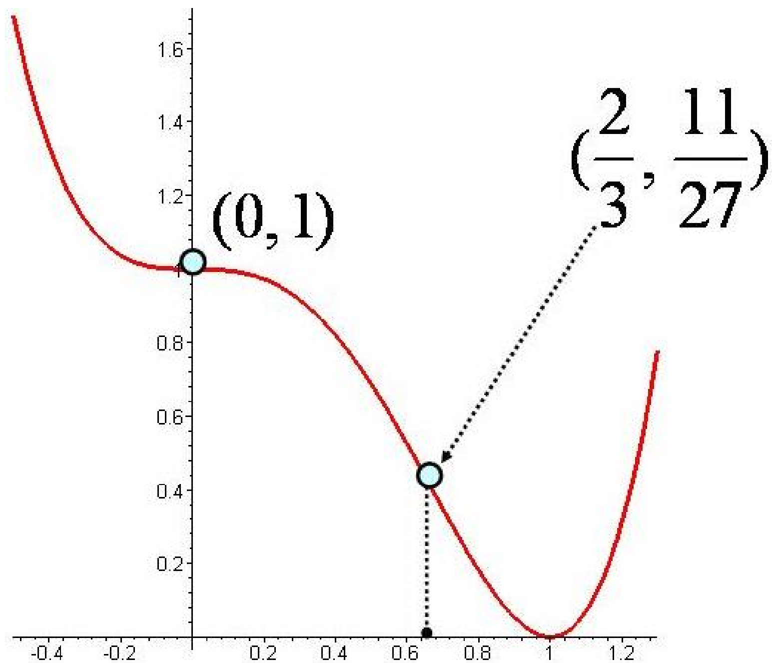


例6、求 $f(x)=3x^4-4x^3+1$ 的单调区间，凹凸区间，极值及拐点.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\searrow$ 凸	拐点 $(0,1)$	$\searrow$ 凹	拐点 $(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$	$\searrow$ 凸	极小值 0	$\nearrow$ 凸

思考：画出 $f(x)=3x^4-4x^3+1$ 的近似图像.

$$f(x)=3x^4-4x^3+1$$ 的近似图像：



作　　业

习题6-5：1(4)、2、5(2)、6、9(1)