10.3　平面曲线的弧长与曲率

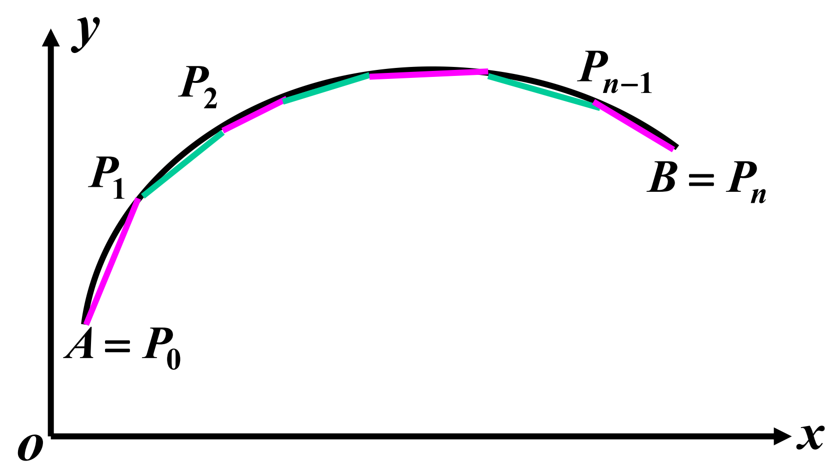
1 平面曲线的弧长

2 曲率

一、平面曲线的弧长

设平面上不自交的非闭 的曲线弧 $C = \overset{\frown}{AB}$.

分割 $T: A = P_0, P_1, \cdots, P_n = B.$



记 $\|T\| = \max\limits_{1 \le i \le n} |P_{i-1}P_i|$,

$$s_T = \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|.$$

定义1: 若 $\lim\limits_{\|T\| \to 0} s_T = s$, 则称曲线弧 C 是可求长的，

并称 s 为曲线弧 C 的弧长 .

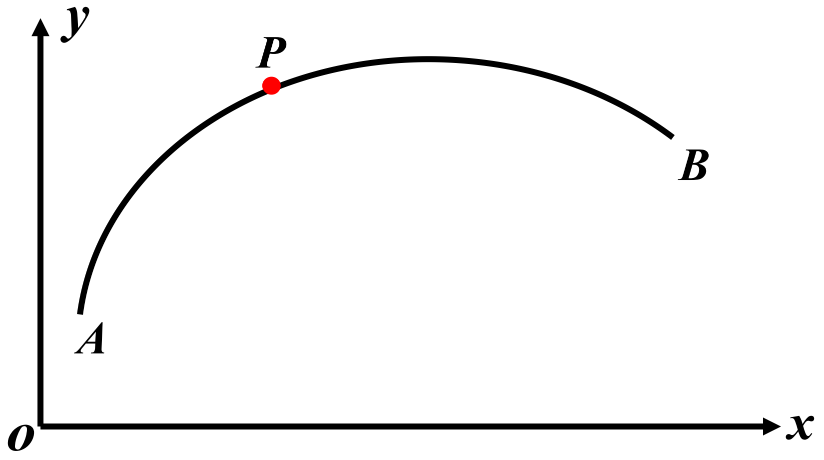
定理1: 设$C:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$为平面上不自交的非闭的曲线．若 $x(t), y(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续可微，则 C 可求长，其弧长为

$$\boxed{s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt\,.}$$

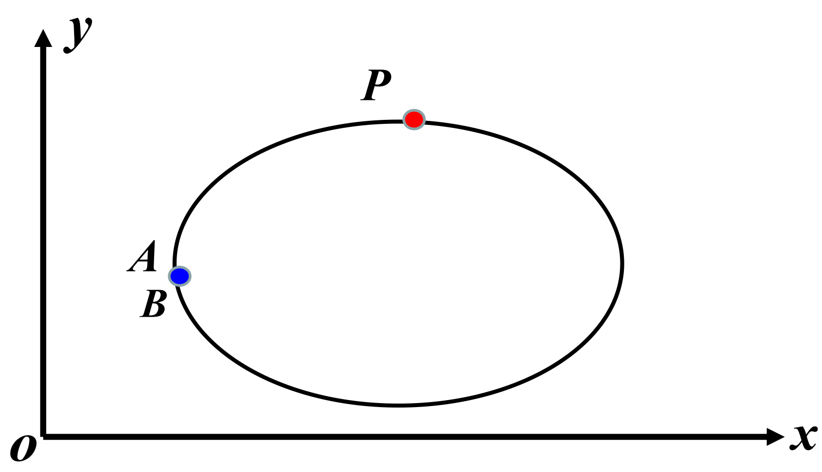
注: 进一步，若$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0\ (t \in [\alpha, \beta])$，则称 C 为光滑曲线．

注1：曲线弧的弧长具有可加性。

即 $$s_{\overset{\frown}{AB}} = s_{\overset{\frown}{AP}} + s_{\overset{\frown}{PB}}.$$



注2: 设曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 封闭,在 $\overset{\frown}{AB}$ 上任取点 P,若曲线弧 $\overset{\frown}{AP}$ 与 $\overset{\frown}{PB}$ 均可求长,则称 $\overset{\frown}{AB}$ 可求长, 且 $s_{\overset{\frown}{AB}} = s_{\overset{\frown}{AP}} + s_{\overset{\frown}{PB}}$.



两类曲线的弧长

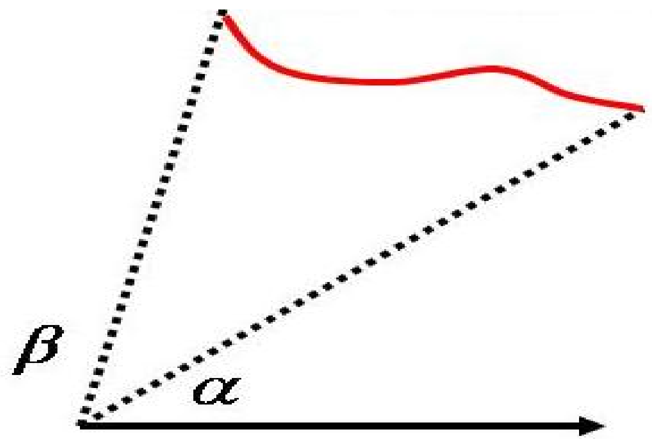
1、曲线 $C: y = f(x)(x \in [a,b])$，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，则其弧长为

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx .}$$

2、曲线 $C: r = r(\theta)(\theta \in [\alpha, \beta])$, 若 $r'(\theta)$在$[\alpha, \beta]$上连续, 且 $r^2(\theta) + r'^2(\theta) \neq 0$, 则

弧长：

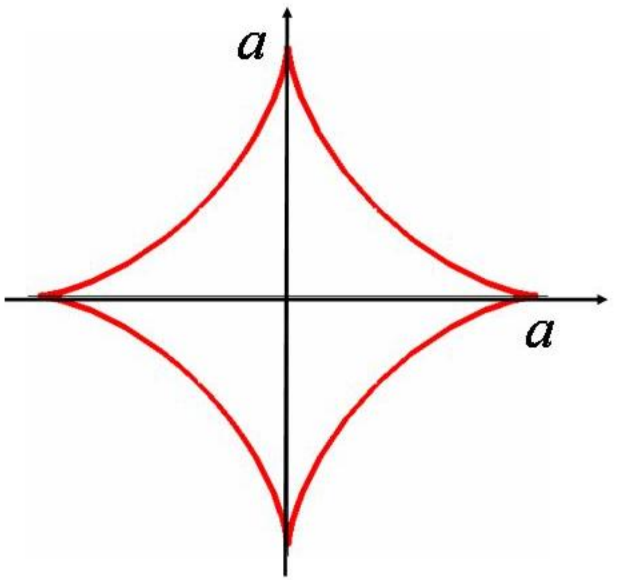
$$\boxed{s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\theta)]^2 + r'^2(\theta)}\, d\theta .}$$



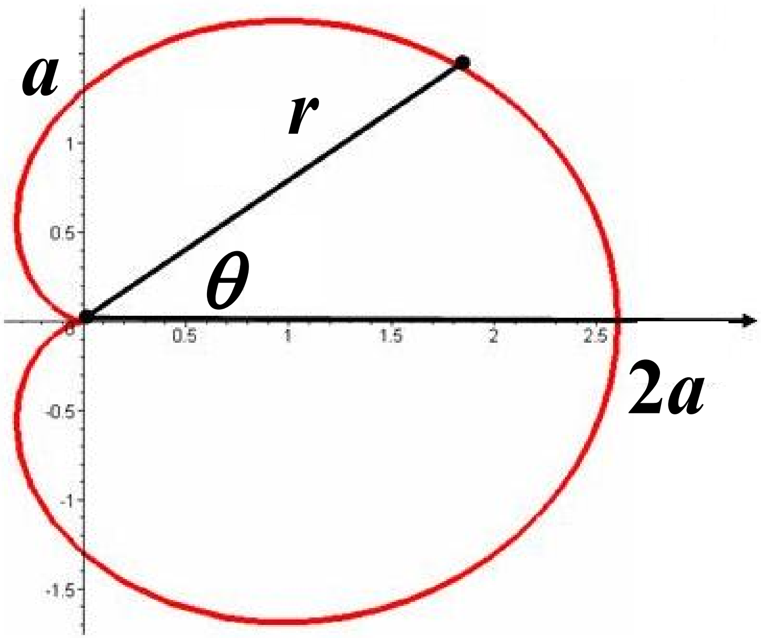
例1、求下列曲线的弧长。

(1) 星形线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

(2) $y = \int_0^x \tan t dt$， $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

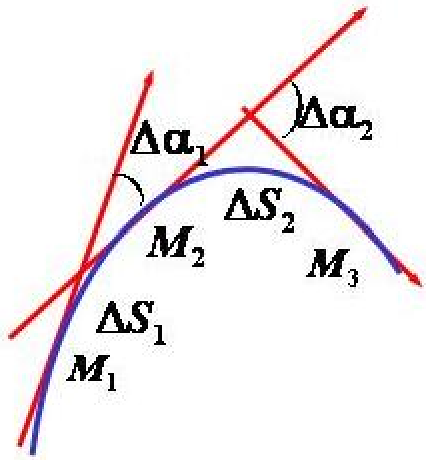


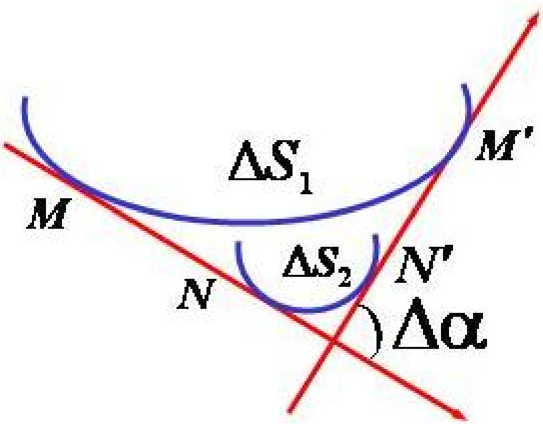
(3) 心形线 $r = a(1+\cos\theta)$.



二、曲率

曲率： 曲线弯曲程度的度量。





$\Delta s_1 = \overset{\frown}{M_1 M_2}$， $\Delta s_2 = \overset{\frown}{M_2 M_3}$

$$\Delta\alpha_1 < \Delta\alpha_2$$

曲线 M_2M_3 比 M_1M_2 弯曲大.

$$\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_2 = \Delta\alpha$$

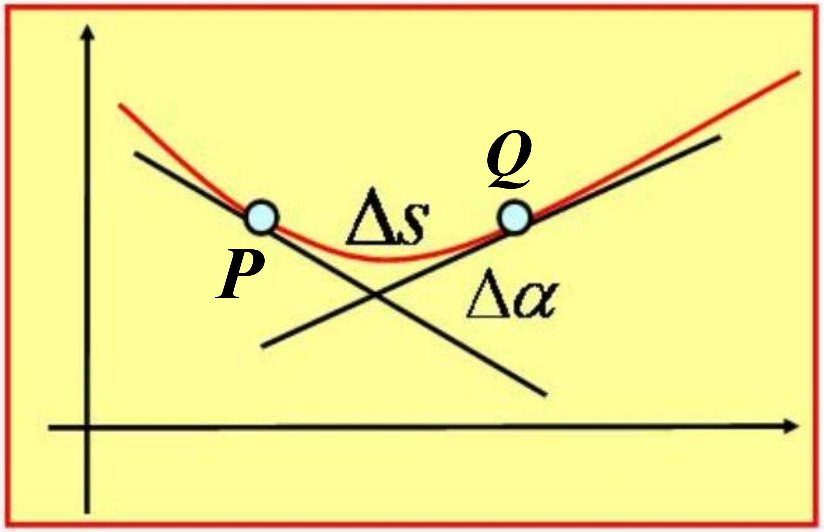
$$\Delta s_1 > \Delta s_2$$

曲线 NN' 比 MM' 弯曲大 .

曲线的弯曲程度与切线转角和弧长有关。

设动点在点 P 沿曲线 C 运动到Q ,移动了Δs ,曲线的方向 (切线的倾斜度) 改变了$\Delta\alpha$.

平均曲率：$\bar{K} = \left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$



曲线在点 P 的曲率：

$$K = \lim_{Q\to P}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

定理2: 设 $C:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(t \in [\alpha, \beta])$, 且 $x(t)$, $y(t)$

二阶可导, 则点 $P(x(t), y(t))$ 的曲率

$$K = \frac{|y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)|}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{3/2}}.$$

$$K = \lim_{Q \to P} \frac{|\Delta \alpha|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta \alpha / \Delta t}{\Delta s / \Delta t} \right| = \left| \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} \right|,$$

其中 $\alpha(t) = \arctan(y'(t)/x'(t))$,

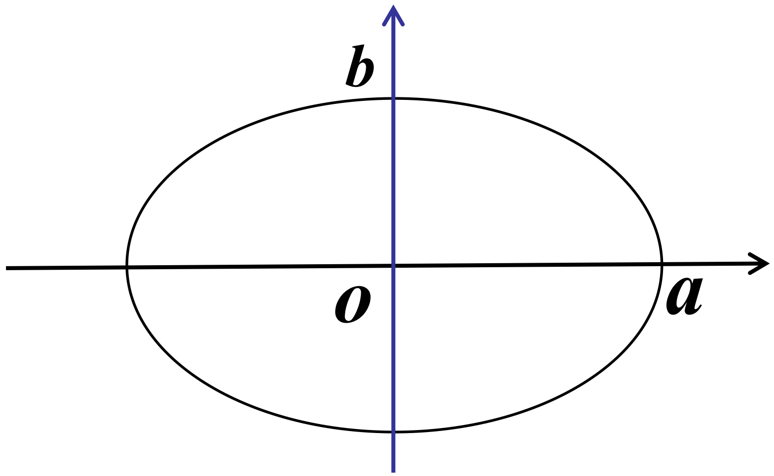
$$s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, du.$$

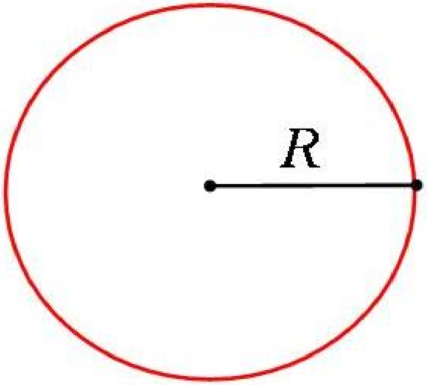
注：特别地，若曲线为 $y = f(x)$, 则：

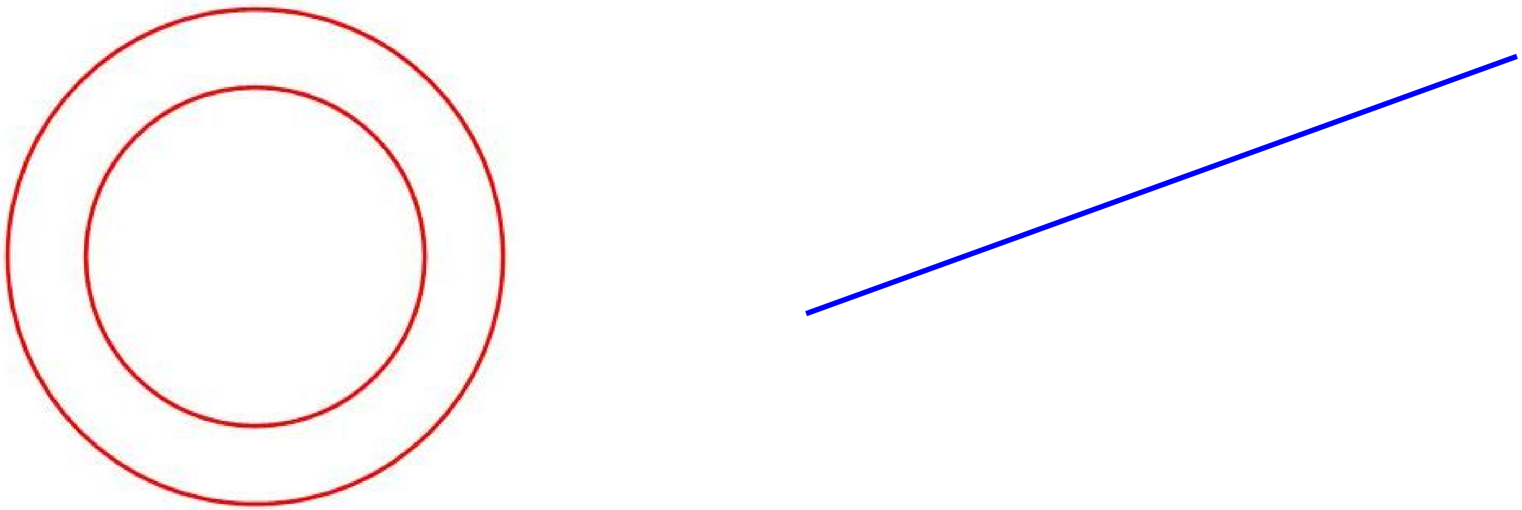
$$\boxed{K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.}$$

例2、求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上曲率最大和最小的点，

其中 $a>b>0.$







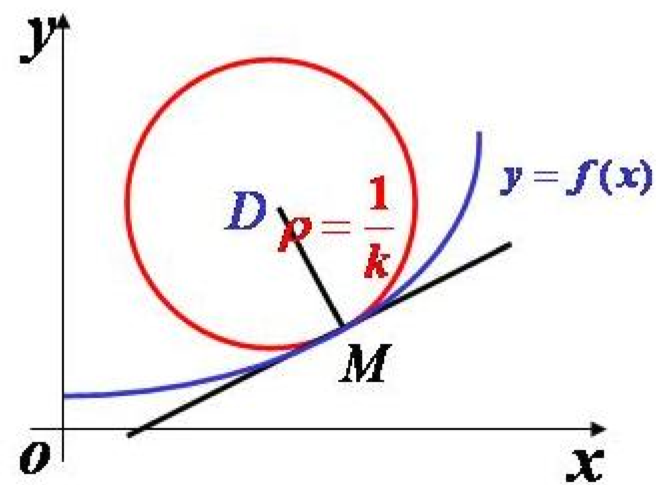
（1）小圆比大圆的曲率大；同一圆上各点曲率相等。

（2）直线曲率为0。

定义： 设曲线 C 在点 M 处的曲率 $K \neq 0$, 过点 M 作一个半径 $\rho = 1/K$ 的圆, 使它在点 M 处与曲线 C 有相同的切线，并与曲线位于切线同侧，称此圆为曲线 C 在点 M 处的曲率圆。

D： 曲率中心。

ρ：曲率半径。



作　业

习题10-3：1(3)(5)、2(2)