# 第九章　定积分

定积分的来源

平面曲边图形的面积.

**Archimedes**（古希腊）:

穷竭法.

**刘徽**（魏晋）:

割圆术.


我国古代数学家刘徽（魏晋时期）像

面积计算的普遍方法:

积分理论

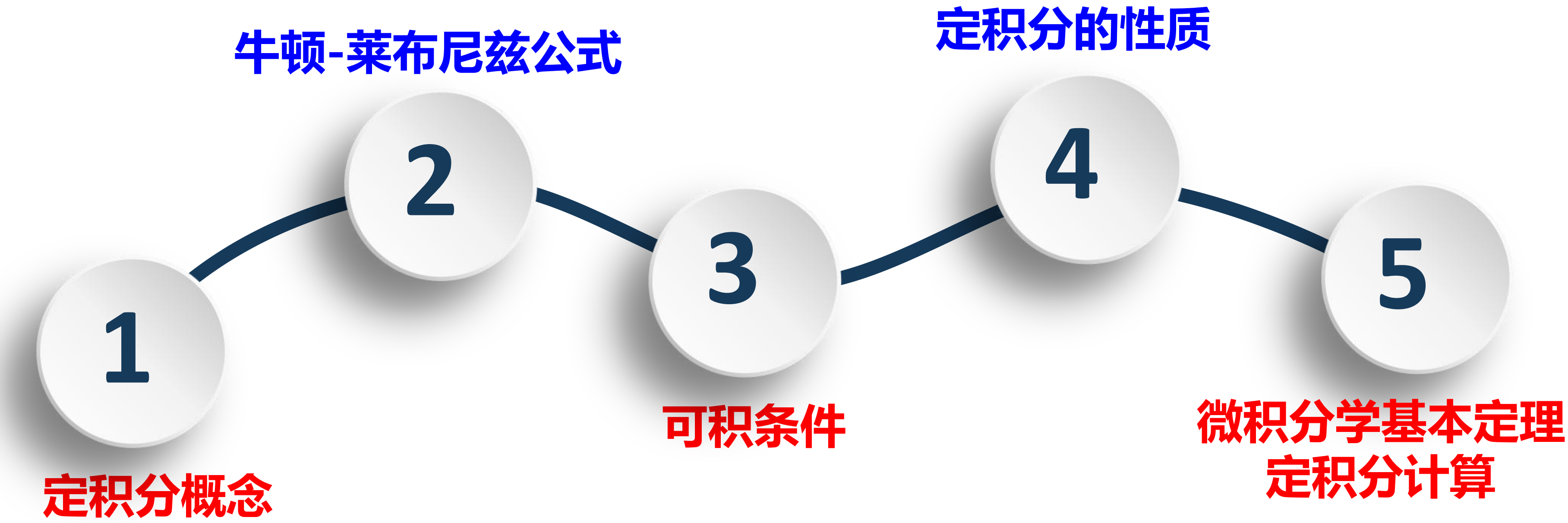
**Newton** (英):

微分的逆运算.

**Leibniz** (德):

微元的和.

**Riemann** (德) : 定积分的严格定义.

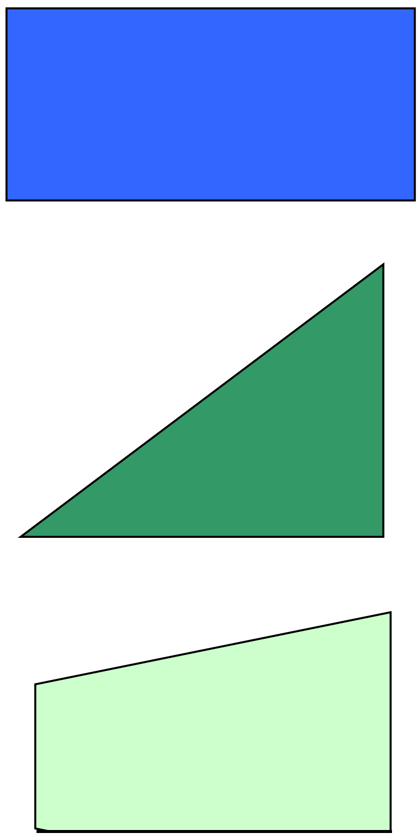

1
定积分概念
2
牛顿-莱布尼兹公式
3
可积条件
4
定积分的性质
5
微积分学基本定理
定积分计算

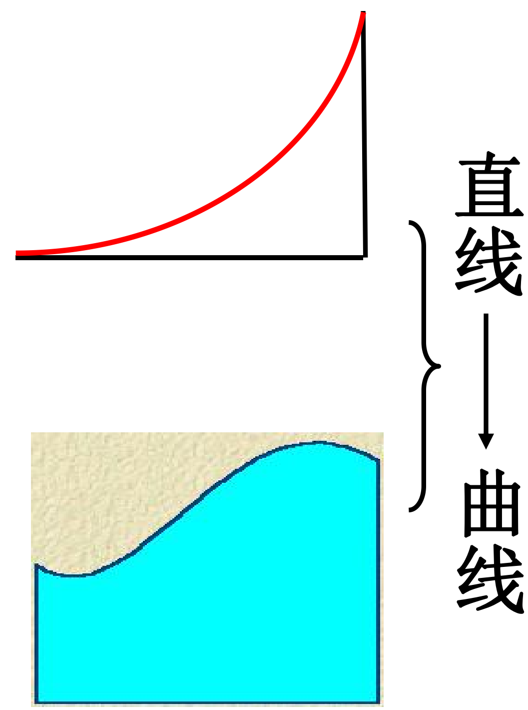
# 9.1 定积分的概念

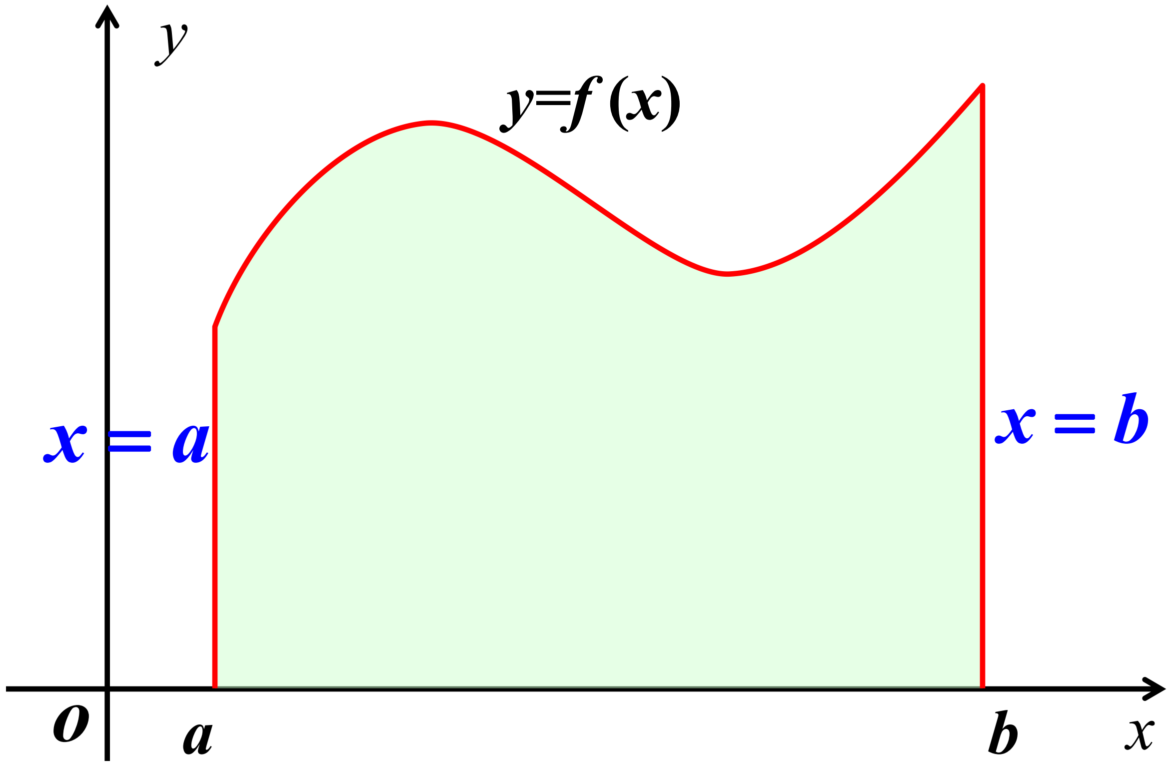
1. 定积分中的问题
2. 定积分的概念
3. 定积分的几何意义

# 一、定积分中的问题1：面积

## 标准图形的面积：





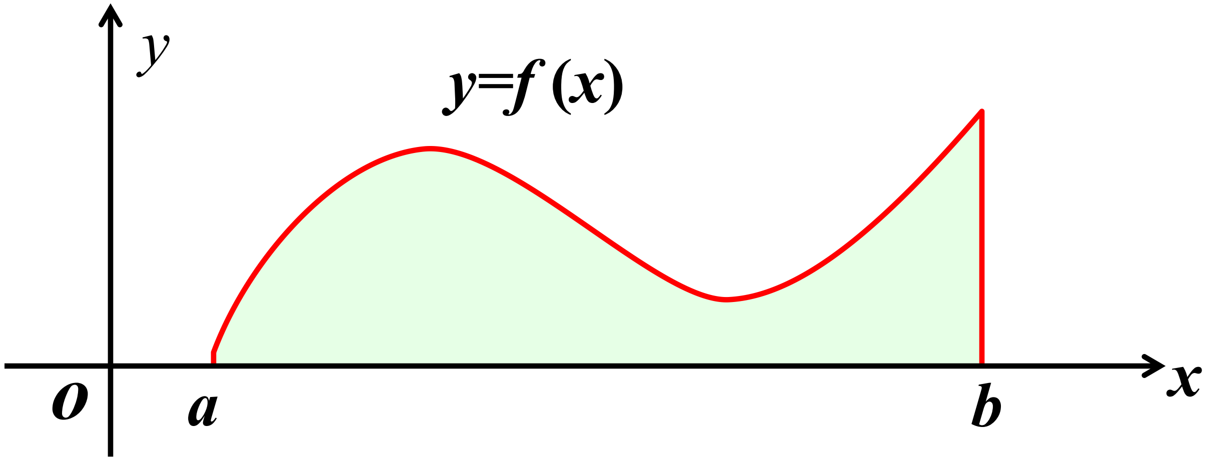


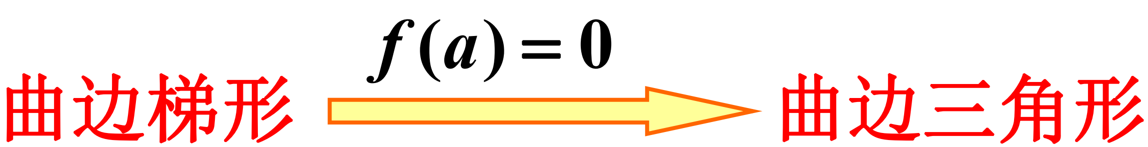

直线 $x=a, x=b$,

$x$ 轴与 $y=f(x)$

围成的图形：

曲边梯形。



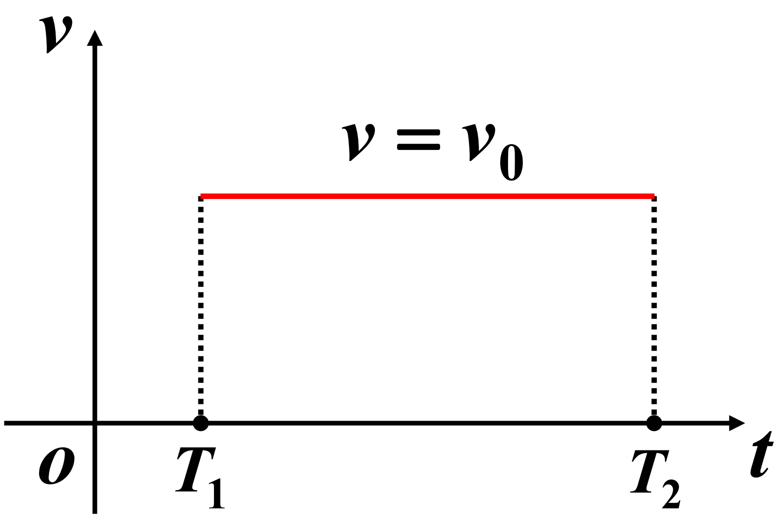




**Archimedes**（古希腊）：$y = x^2$ 时曲边三角形的面积 .

# 一、定积分中的问题2：变速直线运动的路程

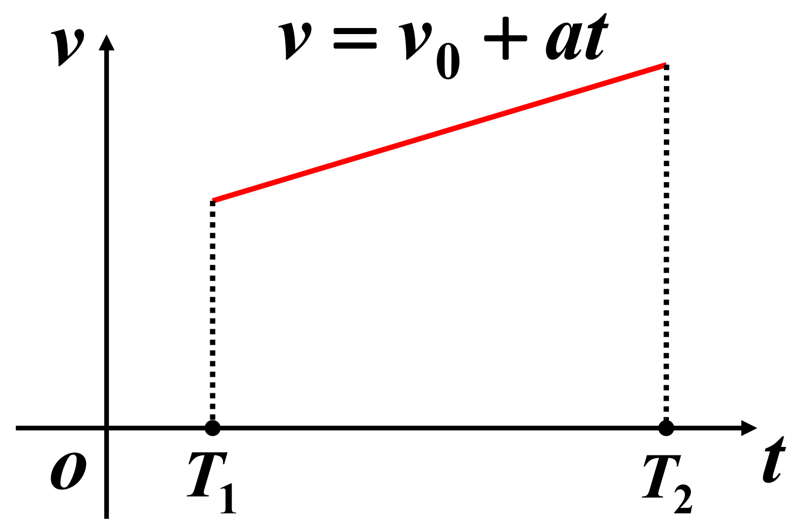
设质点作直线运动，速度 $v = v(t) \geq 0$ 且连续，求质点在 $[T_1, T_2]$ 内经过的路程 $s$.





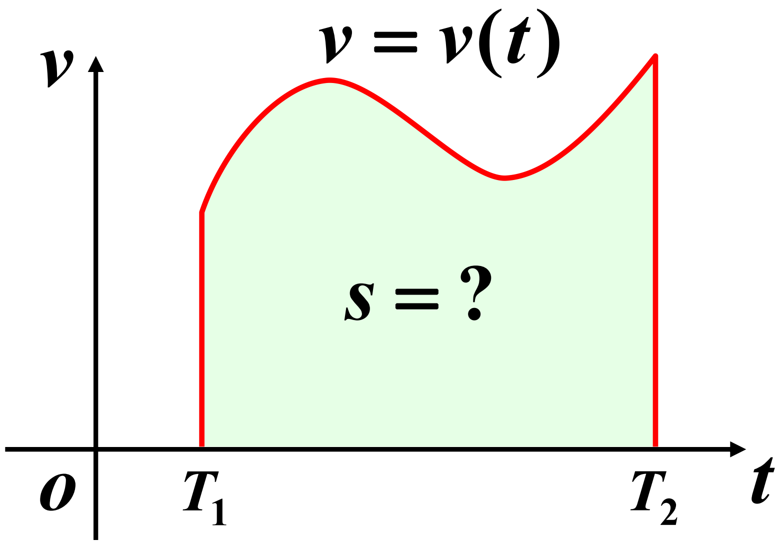

匀速运动

$$s = v_0(T_2 - T_1)$$




匀加速运动

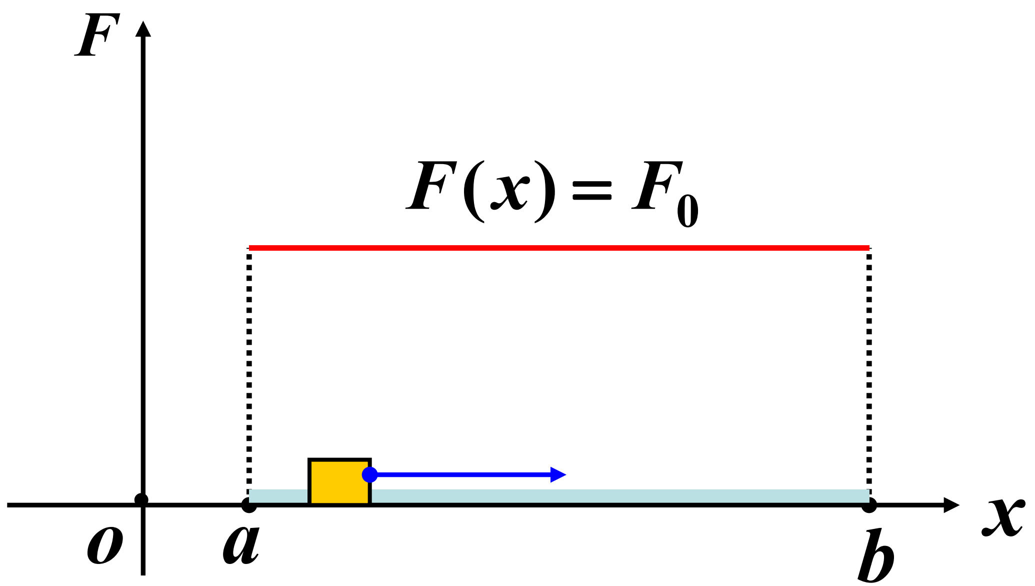
$$s = v_0(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}a(T_2 - T_1)^2$$



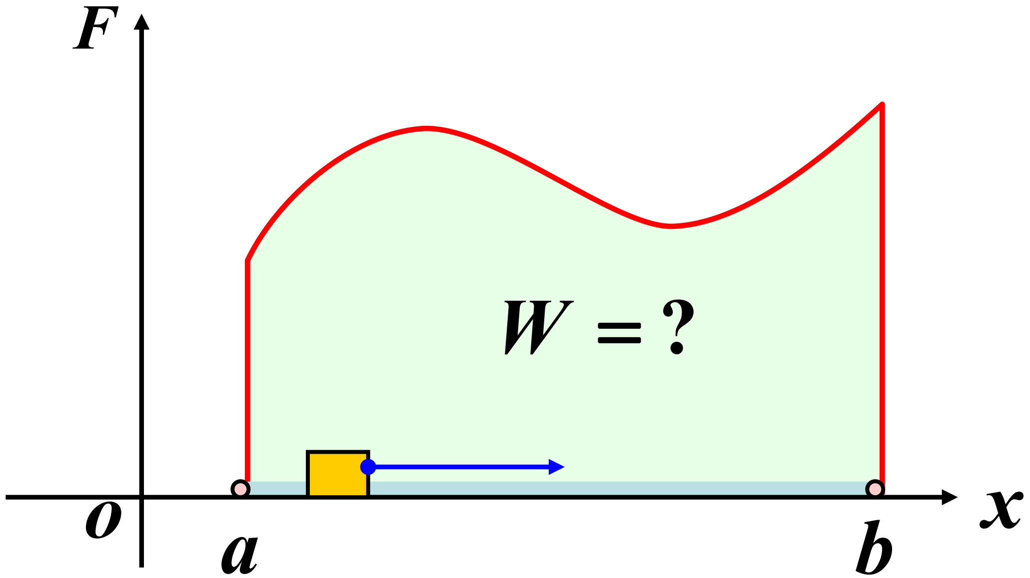

本质：求曲边梯形的面积。

# 一、定积分中的问题3：变力做功

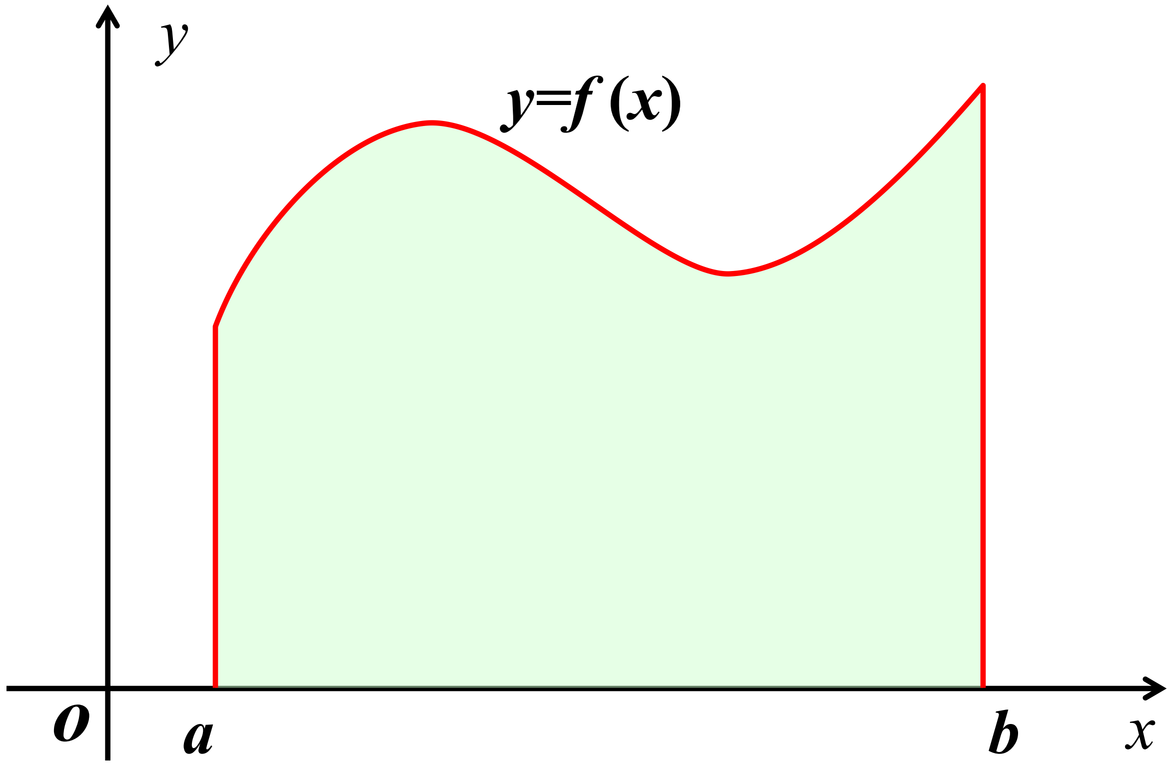
物体在力 $F = F(x)$ 的作用下沿直线从 $a$ 运动到 $b$，力 $F(x) \geq 0$ 且连续，求力对物体所做的功．




常力做功：$W = F_0(b-a)$.

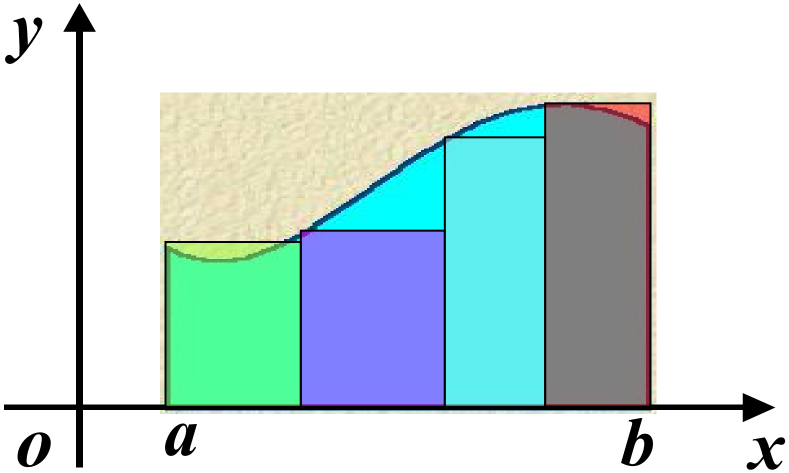



本质：求曲边梯形的面积。

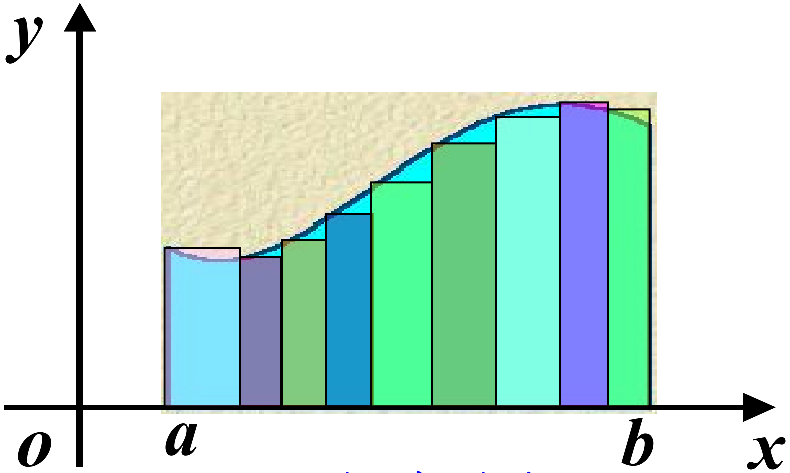



设 $f(x)$ 连续，如何求图中曲边梯形的面积？

用矩形面积近似代替曲边梯形的面积。



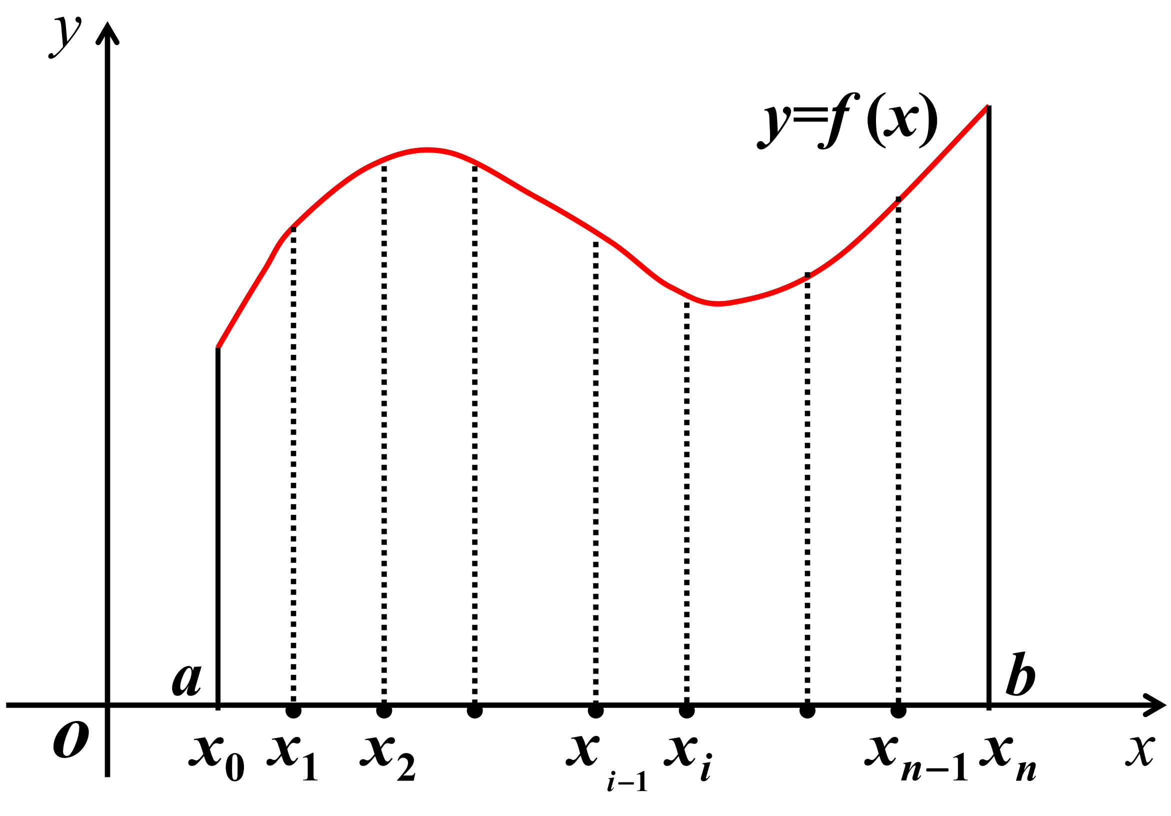

（四个小矩形）




（九个小矩形）

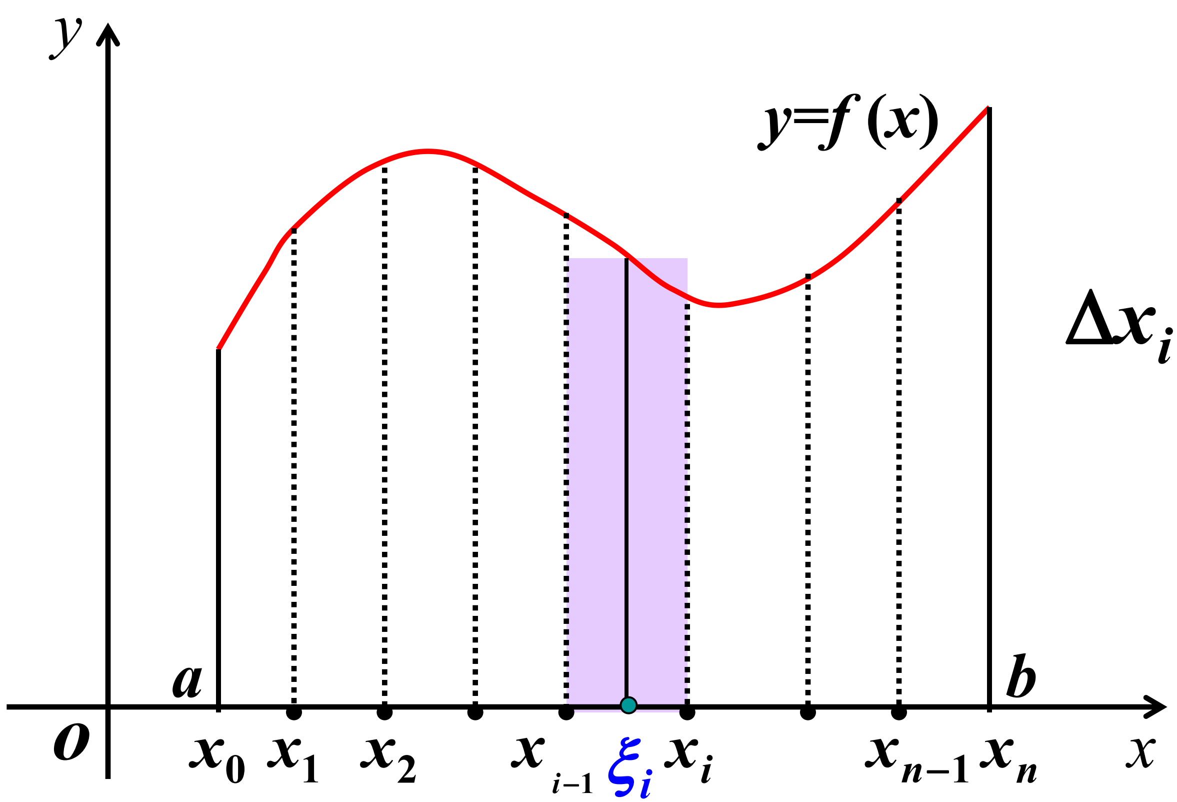
小矩形越多，总面积越接近曲边梯形面积。

(1) 分割： 用 $n-1$ 个分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 将 $[a,b]$ 分成 $n$ 个小区间，作垂线将曲边梯形分成 $n$ 个小曲边梯形 .



(2) 近似: 任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$,

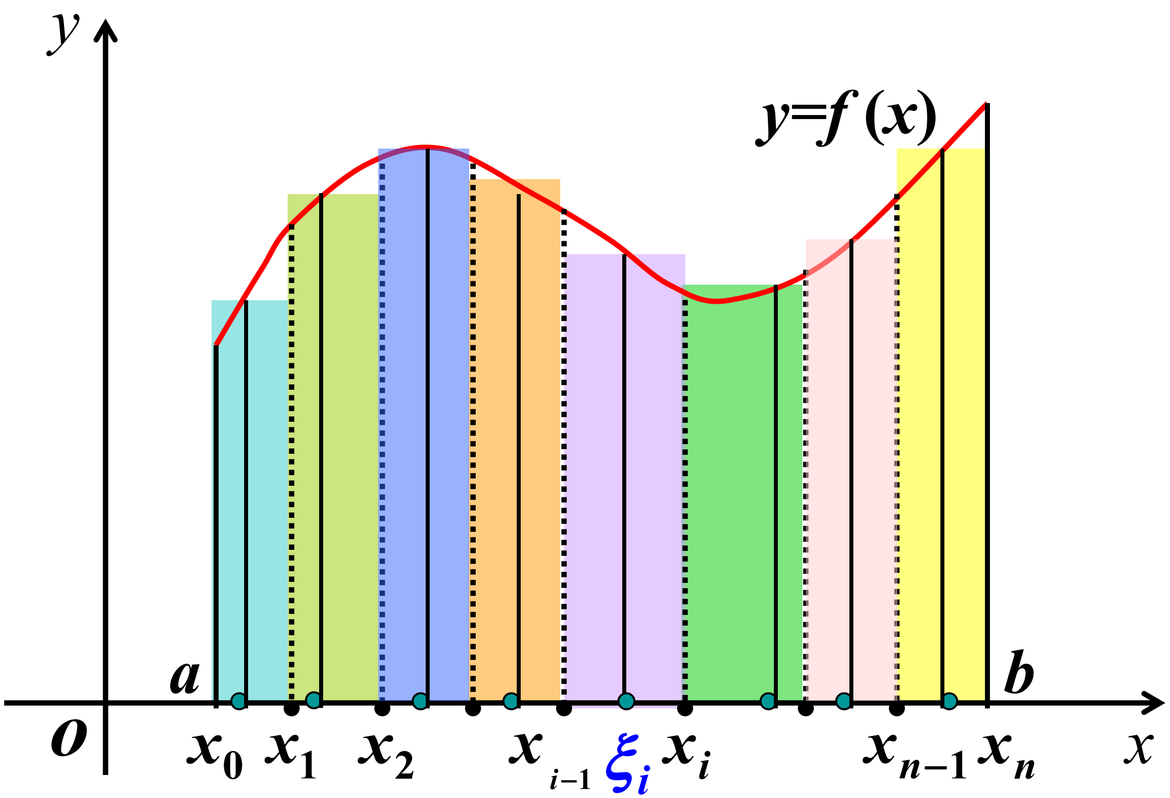
第 $i$ 个小曲边梯形面积 $\Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$ .




$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

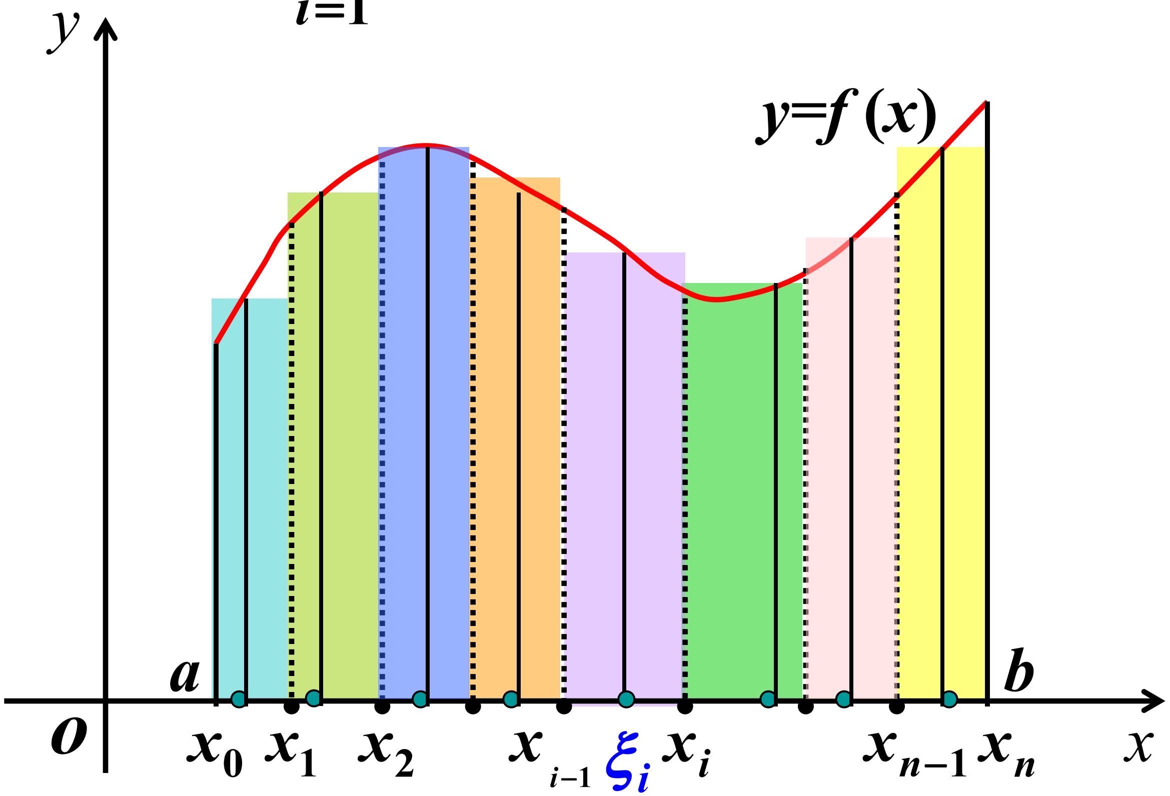
## (3) 求和：曲边梯形的面积

$$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,.$$



(4) 取极限： 对 $[a,b]$ 无限细分，则

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \to S.$$



**问题：**

1、如何刻画分割越来越细？

2、如何刻画 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 越来越逼近 $S$？

## 二、定积分的概念

**定义1：** 设闭区间$[a,b]$内有$n-1$个分点：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\,,$$

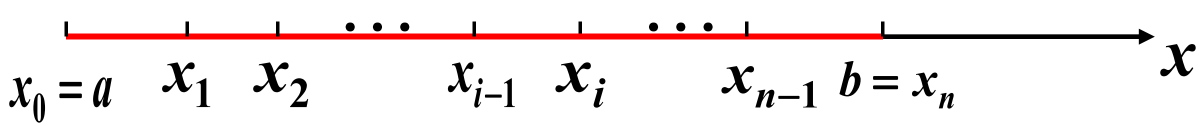
将$[a,b]$分为$n$个小区间 $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]\,(1 \le i \le n)$.

由此得到$[a,b]$的一个 分割

$$T = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \text{或} \{\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n\}.$$

记第$i$个小区间$\Delta_i$的长度为$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，

记 $\|T\| = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，称为分割$T$的模。

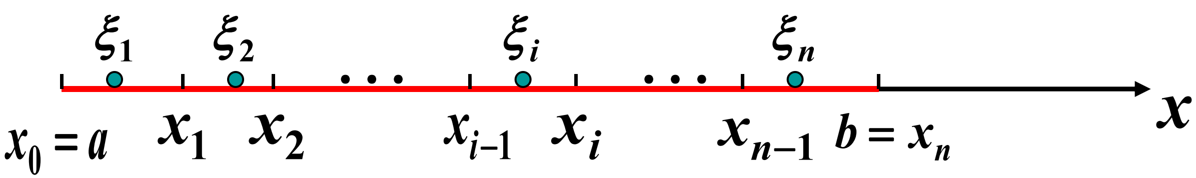


**定义2：**设函数 $f(x)$定义在$[a,b]$上,对 $[a,b]$ 上的分割

$T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}$, 任取 $\xi_i\in\Delta_i$,称和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个**积分和**，也称**黎曼和**。



定义3：设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上, $J$ 是一个实数.

若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得对 $[a,b]$ 的任意分割 $T$,

以及任意 $\xi_i \in \Delta_i$, 只要 $\|T\| < \delta$, 就有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i - J \right| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（黎曼）可积, 实数 $J$ 称为

函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的定积分，记为

$$J = \int_a^b f(x)dx .$$

注1：记 $\boxed{J=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx.}$

$\int$：积分号 ⟹ 拉长的字母“S”（Leibniz）

$[a,b]$：积分区间 $\begin{cases} a：\text{积分下限} \\ b：\text{积分上限} \end{cases}$

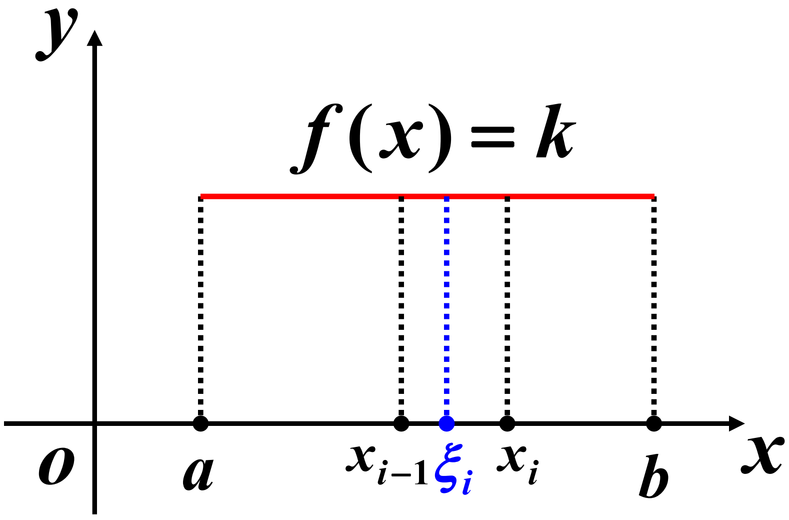
$f(x)dx$：被积表达式 ⟹ 微分

$\int_a^b f(x)d\underline{x}$：将微分“加”起来

被积函数

积分变量

例1、求定积分$\int_a^b k dx$.



**注2:** 若 $f(x)$ 连续, 则 $f(x)$ 可积 .（第9.3节证明）

定积分的例子：

1、曲边梯形的面积：$A=\int_a^b f(x)dx$ .

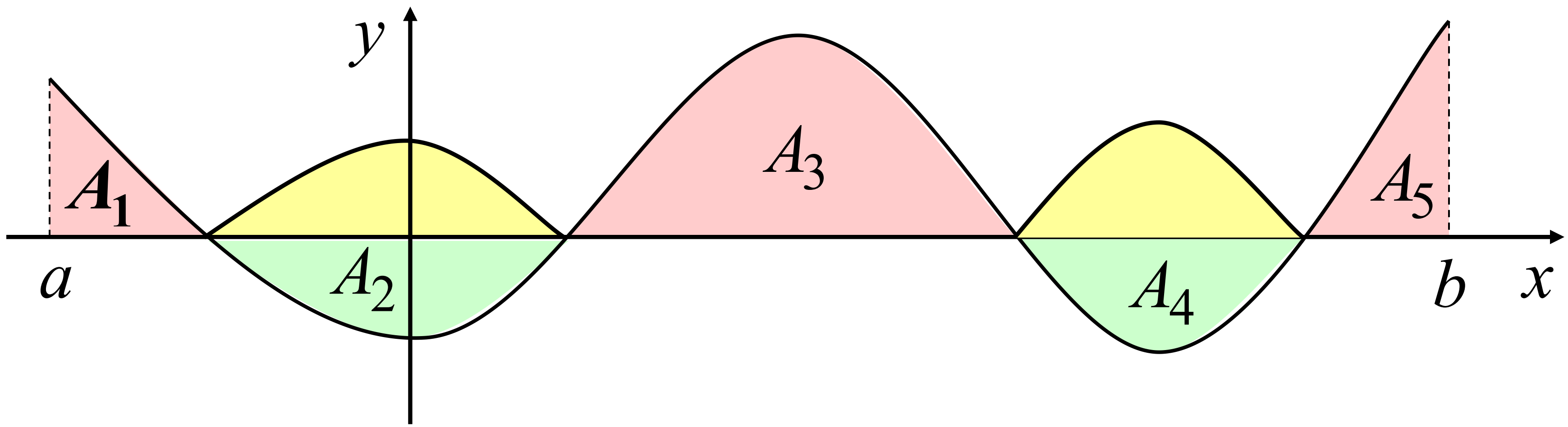
2、变速直线运动的路程：$s=\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$ .

3、变力做功：$W=\int_a^b F(x)dx$ .

# 三、定积分的几何意义

$f(x)>0,\ \int_a^b f(x)dx = A$： 曲边梯形面积

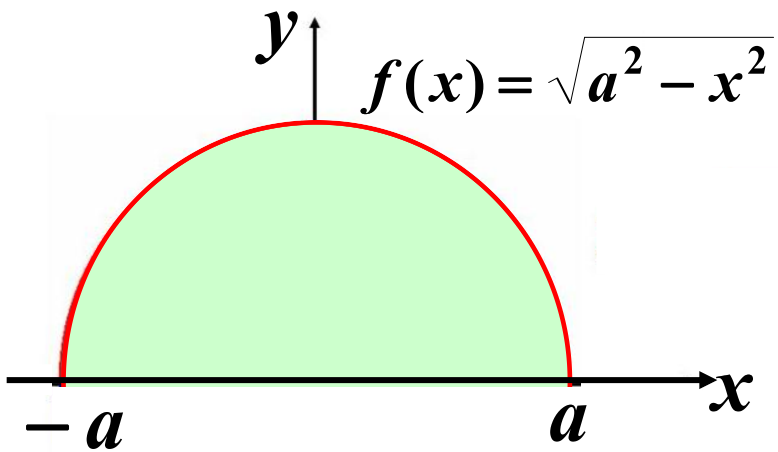
$f(x)<0,\ \int_a^b f(x)dx = -A$： 曲边梯形面积的负值



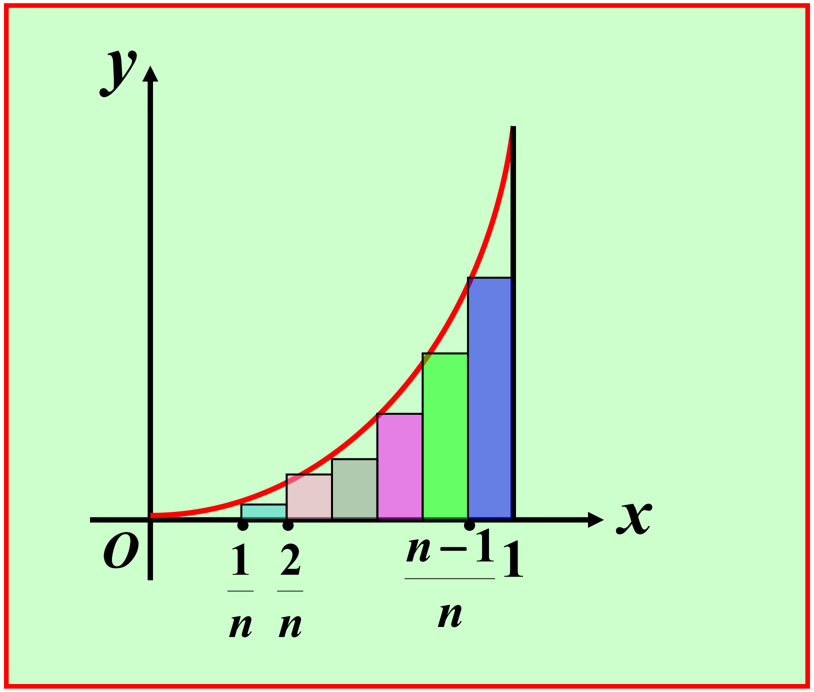

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

各部分面积的代数和

例1、求定积分$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$.



例2、求定积分 $\int_0^1 x^2 dx$ .




即使是一个很简单的定积分，用定义来求都很复杂！

# 作　业

**习题9-1：2（1）（4）**