8.3 有理函数和可化为有理函数的不定积分

- 有理函数
- 有理函数的不定积分
- 可化为有理函数的不定积分
- 积不出来的不定积分

一、有理函数

定义：两个多项式 $P_n(x), Q_m(x)$ 的商

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+\cdots+b_1 x+b_0}$$

称为有理函数。(其中 $a_n, b_m \neq 0$)

- 若 $n \geq m$,称 $R(x)$ 为假分式；
- 若 $n < m$,称 $R(x)$ 为真分式.

有理数：假分数=整数+真分数，如：$\frac{13}{4}=3+\frac{1}{4}$.

有理函数 $\xrightarrow{\text{长除法}}$ 假分式=多项式+真分式

如：$$\frac{2x^3+5x^2+3x+2}{x^2+2x-1}=\underbrace{2x+1}_{\text{多项式}}+\underbrace{\frac{3x+3}{x^2+2x-1}}_{\text{真分式}}$$

- 有理函数不定积分的关键：真分式的积分。

多项式分解定理：

在实数范围内，任一多项式均可以分解成一次多项式的幂与二次不可约多项式幂的乘积．

$$Q_m(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$$

$$= b_m (x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_s)^{k_s}$$

$$(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \cdots (x^2 + p_t x + q_t)^{l_t}$$

其中 $p_i^2 - 4q_i < 0\ (1 \le i \le t)$.

如：$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 (x^2+1)$

真分式分解定理：

$$\frac{a_n x^n+\cdots+a_1x+a_0}{b_m(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}}$$

- 分母含 $(x-\alpha)^k$,则分解的分式含 k 项之和：

$$\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$$ 部分分式

- 分母含$(x^2+px+q)^l$,则其分解的分式含 l 项之和：

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{A_lx+B_l}{(x^2+px+q)^l}$$

例1、将 $\dfrac{2x^3+2}{(x-1)^2(x^2+1)}$ 分解为有理真分式的和．

方法一：待定系数法，比较同次幂系数。

$$\frac{2x^3+2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{x+1}{x^2+1}.$$

方法二：特殊值法。

四种类型最简真分式的不定积分

$$(1)\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| + C;$$

$$(2)\int \frac{1}{(x-a)^k}dx = \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C;$$

$$(3)\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}dx \qquad (p^2-4q<0)$$

$$=\frac{m}{2}\int \frac{1}{x^2+px+q}d(x^2+px+q)+\int \frac{n-(mp)/2}{x^2+px+q}dx$$

（记 $u=x+\frac{p}{2}, a^2=\frac{4q-p^2}{4}$）

$$=\frac{m}{2}\ln(x^2+px+q)+\int \frac{n-(mp)/2}{u^2+a^2}du$$

$$=\frac{m}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{n-(mp)/2}{a}\arctan\frac{u}{a}+C$$

$$(4)\int \frac{mx+n}{(x^2+px+q)^k}dx \quad (p^2-4q<0)$$ 较复杂

$$x^2+px+q=\underline{(x+\frac{p}{2})}^2+\underline{\frac{4q-p^2}{4}}=\underline{u}^2+\underline{a}^2$$

$$\int \frac{mx+n}{(x^2+px+q)^k}dx=\underbrace{\int \frac{mu}{(u^2+a^2)^k}du}_{\text{凑微分}}+\underbrace{\int \frac{n-(mp)/2}{(u^2+a^2)^k}du}_{\text{递推式}}$$

例2、求下列函数的不定积分。

$$(1)\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx\,.$$

分解：$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$.

分解: $$\frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{2x-1}{(x^2-2x+2)^2}$$

三、可化为有理函数的不定积分

1、$\int R(\cos x, \sin x)dx$

方法：令 $u = \tan\frac{x}{2}$，则

$$\boxed{\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}.}$$

例4、求 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$.

注：对 $\int R(\cos^2 x, \sin^2 x, \sin x\cos x)dx$

令 $u = \tan x$.

例5、求 $\int \frac{1}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}dx$.

2、$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

方法： 令 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=u$

例6、求 (1) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\,dx$;

(2) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{2+x-x^2}}$.

3、$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$

$(b^2-4ac\neq 0,$ 且 $a<0$ 时 $b^2-4ac>0)$

(1) $\int R(u,\sqrt{u^2+k^2})du,$ 令 $u=k\tan t;$

(2) $\int R(u,\sqrt{u^2-k^2})du,$ 令 $u=k\sec t;$

(3) $\int R(u,\sqrt{k^2-u^2})du,$ 令 $u=k\sin t.$

例7、求 $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx.$

例8、求 $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2x-3}}dx.$

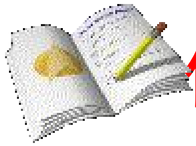
四、积不出来的不定积分

下列积分属于积不出来的积分：

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int \frac{1}{\ln x}dx,\ \int \sin x^2 dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x}dx,\ \int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\ dx\ (0<|k|<1).$$

* 刘维尔(Liouville)[1835年]



作　　业

习题8-3：1(1)(2)(3)、2(1)(6)