11.2 无穷积分的性质与收敛判别

1 无穷积分的性质

2 非负函数无穷积分的收敛判别

3 一般函数无穷积分的收敛判别

一、无穷积分的性质

定理1 (无穷积分收敛的柯西准则)

无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是:

$\forall \varepsilon > 0, \exists G \geq a$, 当 $u_1, u_2 > G$ 时,

$$\left| \int_a^{u_1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{u_2} f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{u_1}^{u_2} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

性质1： 若 $\int_a^{+\infty} f_1(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f_2(x)dx$ 都收敛，

对任意常数 k_1, k_2，有

$$\int_a^{+\infty}\left(k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)\right)\mathrm{d}x$$

$$=k_1\int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x+k_2\int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x.$$

性质2： 若 $f(x)$ 在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积,则

对任意 $b>a$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_b^{+\infty} f(x)dx$

同时收敛或同时发散, 且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

性质3： 若 $f(x)$ 在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积,

且 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛，

并且 $$\left|\int_a^{+\infty}f(x)dx\right| \le \int_a^{+\infty}|f(x)|dx.$$

定义：若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，称 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 绝对收敛.

注：由性质3, 绝对收敛的无穷积分收敛.

定义：若 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，但 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散，

称 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 条件收敛.

二、非负函数无穷积分的收敛判别法

定理2(非负函数无穷积分的判别法)

设定义在 $[a,+\infty)$ 上的非负函数 $f(x)$ 在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充要条件是存在 $M>0$，使得

$$\forall\, u \in [a,+\infty),\ \left|\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le M.$$

定理3(比较判别法)： 设定义在 $[a,+\infty)$ 上的两个非负函数 f, g 在任何有限区间 $[a, u]$ 上可积, 且存在 $G > a$, 满足

$$f(x) \le g(x),\ x \in [G,+\infty),$$

则当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛；

当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 也发散 .

例1、讨论 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} \mathrm{d}x$ 的敛散性.

例2、设 $f(x), g(x), h(x)$ 在任意 $[a, u]$ 上可积, 且

$$f(x) \le h(x) \le g(x),\ x \in [a,+\infty)$$

若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 均收敛,则

$\int_a^{+\infty} h(x)dx$ 也收敛.

推论1：设 f 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的非负函数，在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积 .

(i) 若 $f(x)\le\dfrac{1}{x^p}$ 且 $p>1$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛;

(ii) 若 $f(x)\ge\dfrac{1}{x^p}$ 且 $p\le 1$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散 .

例3、判别 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x^6+1}}$ 的敛散性 .

推论2: 设非负函数 f 和 g 在任何 $[a,u]$ 上可积, 且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=c.$$

(i)若$0<c<+\infty$,则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$与$\int_a^{+\infty}g(x)dx$同敛散;

(ii)若$c=0$,且$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛,则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛;

(ii)若$c=+\infty$,且$\int_a^{+\infty}g(x)dx$发散,则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散.

推论3: 设 f 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的非负函数, 在任何有限区间 $[a, u]$ 上可积. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)=\lambda$, 则

(i) 当 $p>1$, $0\le\lambda<+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

(ii) 当 $p\le 1$, $0<\lambda\le+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

例4、讨论下列无穷积分的收敛性.

$$(1)\ \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x}\,dx\,;$$

$$(2)\ \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}\,dx\,.$$

$$(3)\ \int_1^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x}\,dx\,;$$

$$(4)\ \int_1^{+\infty} \frac{\ln^k x}{x^p}\,dx\ (k>0).$$

三、一般无穷积分的收敛判别法

定理4（狄利克雷判别法）

若 (i) $F(u)=\int_a^u f(x)dx$ 在$[a,+\infty)$ 上有界，

(ii) $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上当 $x\to+\infty$ 时单调趋于 0，

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛 .

定理5(阿贝尔判别法)

若 (i) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，

(ii) $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界，

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛 .

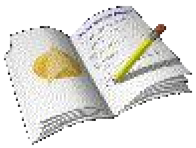
例5、讨论

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx\ 与\ \int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx\ (p>0)$$

的收敛性.

注：特别地，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛.

例6、证明无穷积分 $\int_1^{+\infty}\cos x^2\,dx$ 条件收敛.



作　业

习题11-2：4(1)(3)(4)、5(1)(2)