2.3　数列极限存在的条件

1. 单调有界定理
2. 柯西收敛准则

一、单调有界定理

单调数列：

递增数列$\{a_n\}: a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots$

递减数列$\{a_n\}: a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge \cdots$

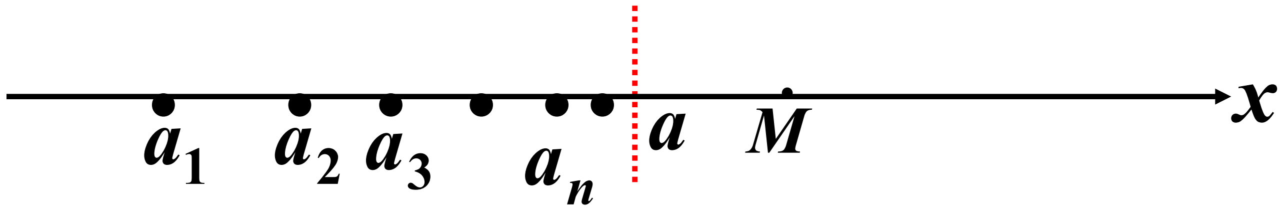
定理1： 单调有界数列必有极限。即：

(i) 若递增数列 $\{a_n\}$ 有上界，即 $\exists M$，使得 $\forall n$，有 $a_n \le M$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le M$；

(ii) 若递减数列 $\{a_n\}$ 有下界，即 $\exists M$，使得 $\forall n$，有 $a_n \ge M$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ge M$.

设 $\{a_n\}$ 为递增数列，且 $a_n \le M\ (\forall n)$.

如图：



设 $\sup\{a_n\} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

确界原理 $\Longrightarrow$ 单调有界定理

● 有些数列很难判定其收敛性，但较容易判断其单调性和有界性，从而可由单调有界收敛准则断定其收敛。

例1、设 $a_1=\sqrt{2}, a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots,$

$$a_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{个根号}}.$$

证明数列 $\{a_n\}$ 收敛，并求其极限.

例2、设 $a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 1.$

证明数列 $\{a_n\}$ 收敛 .

例3、证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$ 存在.

记 $a_n=(1+\dfrac{1}{n})^n$.

- （1）$\{a_n\}$为递增数列;

$$\boxed{(1+\tfrac{1}{n})^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{1}{n^k}.}$$

- （2）$\{a_n\}$有上界 3.

n	10^2	10^4	10^6	10^8	$\cdots$
$(1+1/n)^n$	2.70481	2.71815	2.71828	2.71828	$\cdots$

定义：$e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

→ 1^∞ 型

- Euler(1737): e 是无理数；
- Hermite(1873): e 是超越数,
  即不是代数方程的解.

Euler (1707-1783)

例4、求下列极限。

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n};\qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}.$$

引理： 任一数列都存在单调子列.

定理2:（致密性定理）

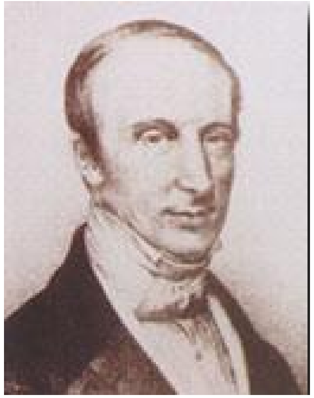
任何有界数列必有收敛子列.

二、柯西收敛准则

定理2： $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在 $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in Z_+$, 当 $m, n > N$ 时，有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$



柯西(Cauchy,A.L.
1789－1857 ,法国)

注1：若数列$\{a_n\}$满足：对$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in Z_+,$

当$m, n > N$时，有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

则称数列$\{a_n\}$是一个Cauchy列或基本列.

注2：数列$\{a_n\}$是一个Cauchy列$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,$

$\exists N \in Z_+$，当$n > N$时，$\forall\, p \in Z_+$，有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

例5、设 $\alpha = 0.b_1b_2\cdots b_n\cdots (b_k \in \{0,1,\cdots,9\}, k \geq 1)$，

记 $a_n = 0.b_1b_2\cdots b_n$ 为 α 的 n 位不足近似，

验证数列 $\{a_n\}$ 为Cauchy列.

例6、设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$，证明 $\{a_n\}$ 发散。

作　　业

习题2-3： 1(2)(4)、3(1)、5(1)