9.4　定积分的性质

1 定积分的基本性质

2 积分中值定理

一、定积分的基本性质

性质1： 设 $f(x)$在 $[a,b]$ 上可积，则对任意常数 k，$kf(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

性质2：设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x) \pm g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

注：对任意 α, β 为常数，有

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

性质3： 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

思路：

- 记 $A=\sup\limits_{[a,b]}|f(x)|,\ B=\sup\limits_{[a,b]}|g(x)|$.
- $\sum\limits_{T'}\omega_i^f\Delta x_i'<\dfrac{\varepsilon}{2B},\quad \sum\limits_{T''}\omega_i^g\Delta x_j''<\dfrac{\varepsilon}{2A}$.
- 令 $T=T'+T''$, $\forall\Delta_i\in T$:

$$\omega_i^{fg}=\sup_{x',x''\in\Delta_i}|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|$$

性质4(积分的区间可加性)：

函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积 的充要条件是：对任意

$c\in(a,b)$, 有 $f(x)$ 在$[a,c]$与$[c,b]$上都可积 .

并且 $$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.}$$

补充规定：

$$(1)\int_a^a f(x)dx = 0;$$

$$(2)\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

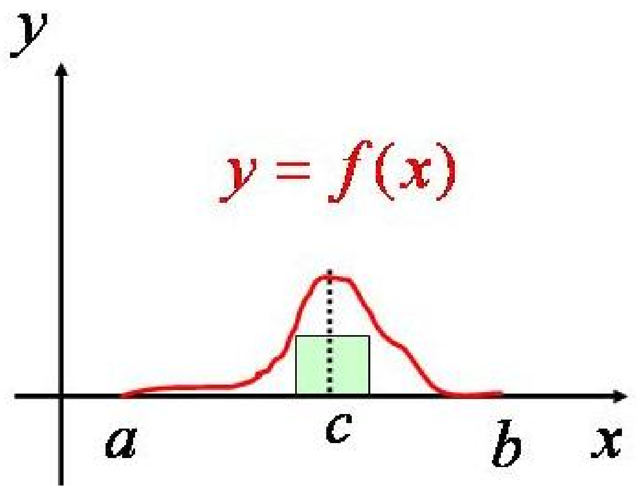
- 若$a < b < c$,则当$f(x)$在$[a,c]$上可积时,仍有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

性质5: 设 $f(x)$在 $[a,b]$ 上可积. 若 $f(x)\geq 0$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

注: 设 $f(x)\in C[a,b]$, $f(x)\geq 0$. 若 $f(x)$ 不恒为 0, 则 $\int_a^b f(x)dx > 0$.



推论： 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 若任意 $x\in[a,b]$，有 $f(x)\ge g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx.$$

性质6： 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

例1、设 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & -1\le x<0\\ e^{-x}, & 0\le x\le 1\end{cases}$，求 $\int_{-1}^{1}f(x)dx$.

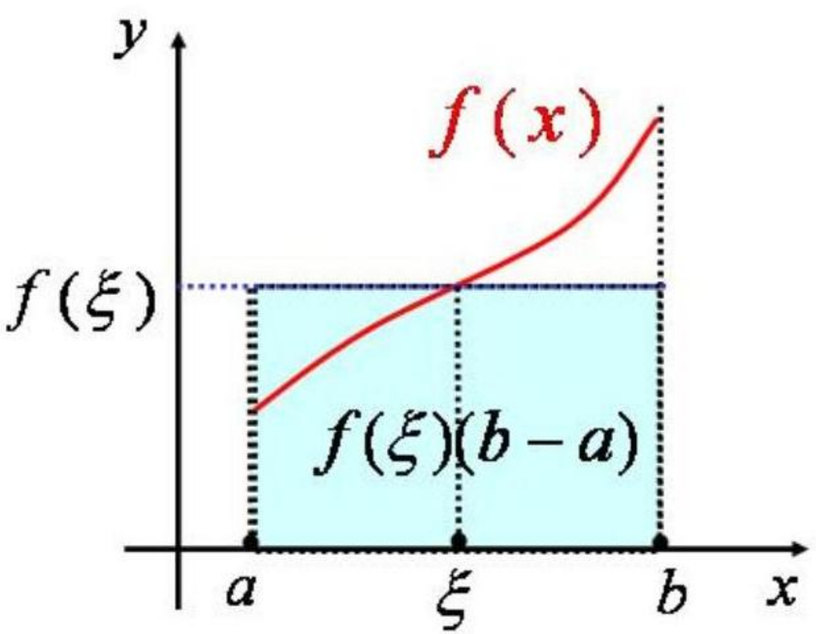
例2、比较 $\int_0^1 xdx$ 与 $\int_0^1 \ln(1+x)dx$ 的大小.

二、积分中值定理

性质7(积分第一中值定理)：

若 $f \in C[a,b]$，则 $\exists \xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$



注：称 $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值。

例3、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx$.

证明：$\exists c\in(0,1)$，使得 $f'(c)=-\frac{f(c)}{c}$.

例4、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(\sqrt[n]{x})dx$.

性质8(推广的积分第一中值定理):

若 $f(x), g(x) \in C[a,b]$, 且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号,

则 $\exists \xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

作　业

习题9-4：3(3)、4