15.2 以 $2l$ 为周期的函数的展开式

1. 周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数
2. 收敛性定理
3. 正弦级数与余弦级数

一、周期为$2l$ 的函数的傅里叶级数

设 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期，令 $t=\dfrac{\pi x}{l}$，即$x=\dfrac{lt}{\pi}$

则$-l\le x\le l$时，$-\pi\le t\le\pi$，且

$$f(x)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\overset{\text{记为}}{=\!=}F(t).$$

$F(t)$ 为以 2π 为周期的函数，则其傅里叶 级数为：

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

其中 $$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\cos nt\,dt \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\sin nt\,dt \quad (n=1,2,\cdots)$$

故以 $2l$ 为周期的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数为:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

其中

$$\boxed{a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=0,1,2,\cdots)}$$

$$\boxed{b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=1,2,\cdots)}$$

二、收敛性定理

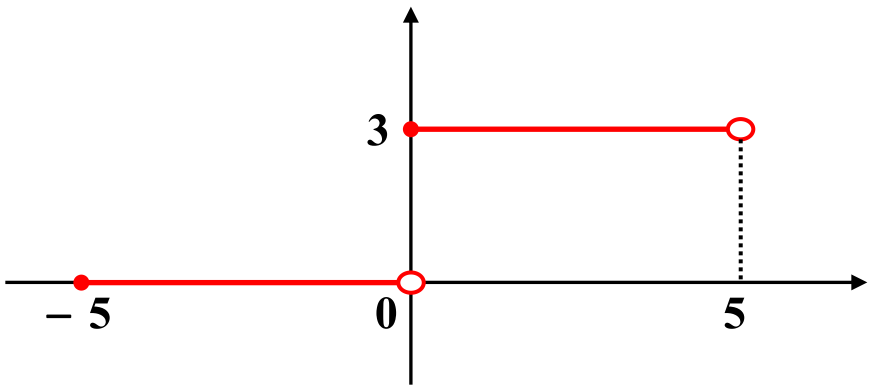
定理：设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的函数，且在 $[-l,l]$ 上按段光滑，则 $\forall x\in[-l,l]$，f 的傅里叶级数收敛于 f 在点 x 的左右极限的算术平均值，即：

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

例1、将周期为10的函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & -5\le x<0,\\ 3, & 0\le x<5,\end{cases}$$

展开成傅里叶级数 .



思考：记上述傅里叶级数的和 函数为$S(x)$,

求 $S(0)$ 与 $S(12)$.

注：求定义在 $(-l,l]$ 上的函数的 傅里叶 级数，

方法：周期延拓。

三、正弦级数与余弦级数

1、奇函数与偶函数的傅里叶级数

(1) 若 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的奇函数，则 $f(x)$ 的傅里叶级数为:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

正弦级数

其中, $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \cdots).$

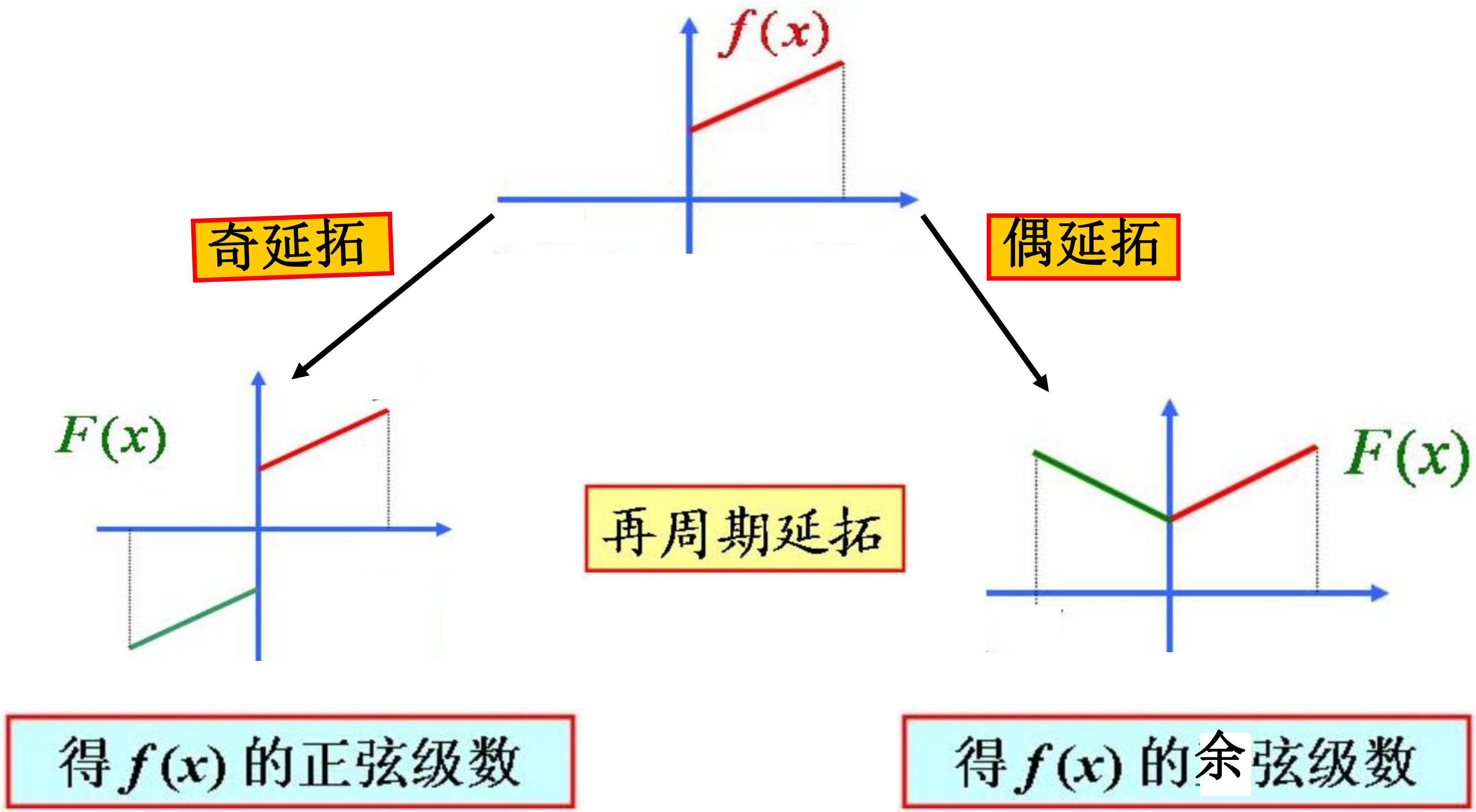
(2) 若 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的偶函数，则 $f(x)$ 的傅里叶级数为：

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x,$$

余弦级数

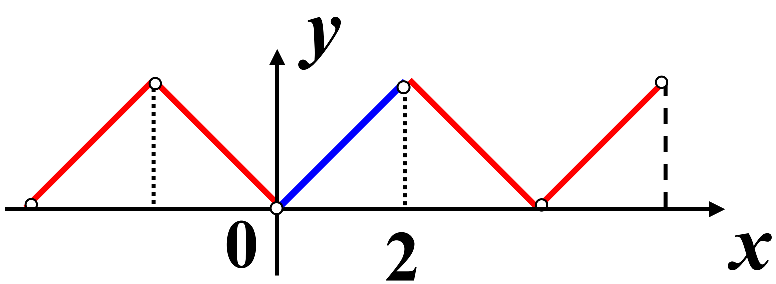
其中，$a_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n=0,1,2,\cdots).$

2、定义在 $[0,l]$ 上函数的正弦级数与余 弦级数



例2: 将 $f(x)=x$ 在 $(0,2)$ 内展为 (i) 余弦级数;

(ii)正弦级数 .



例3：设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x < 1/2, \\ 2-x, & 1/2 \le x < 1, \end{cases}$ 若

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x,$$

其中 $b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx \ (n=1,2,\cdots)$，

求 $S(\frac{3}{2})$.

作业

习题15-2：3