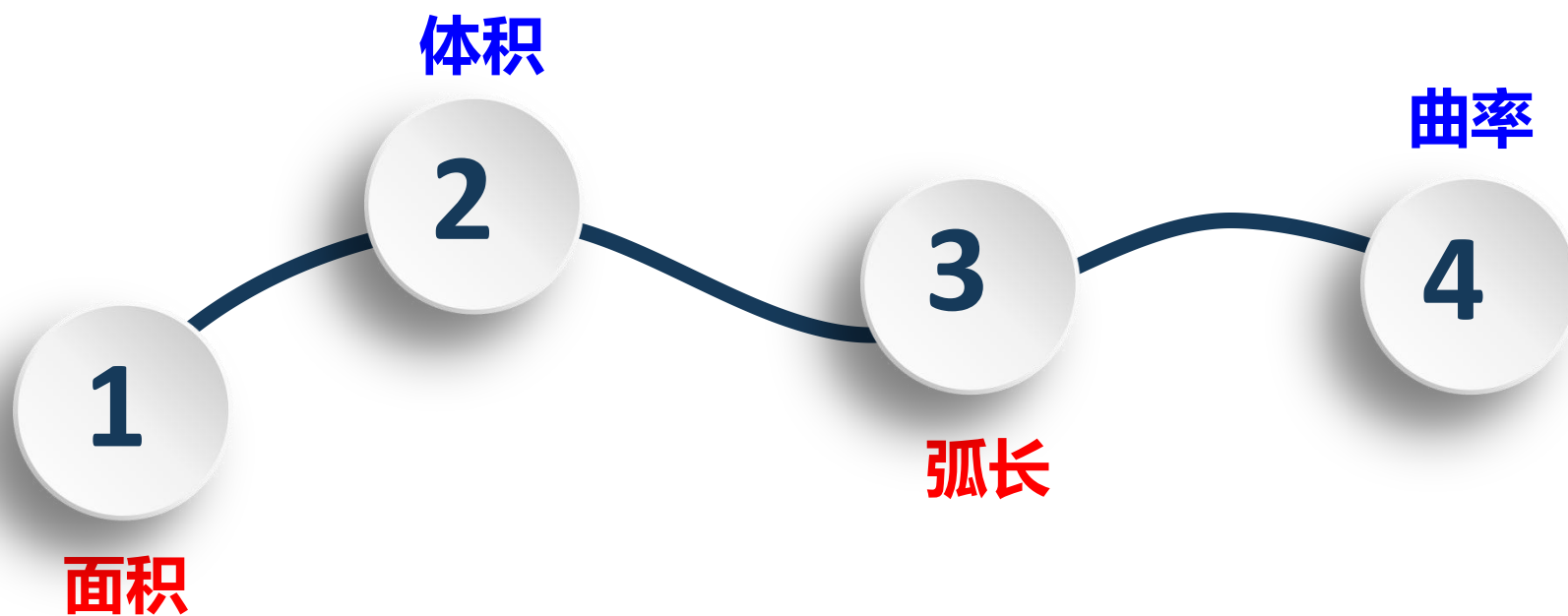


第十章 定积分的应用



10.1 平面图形的面积



1

直角坐标方程表示的平面图形面积

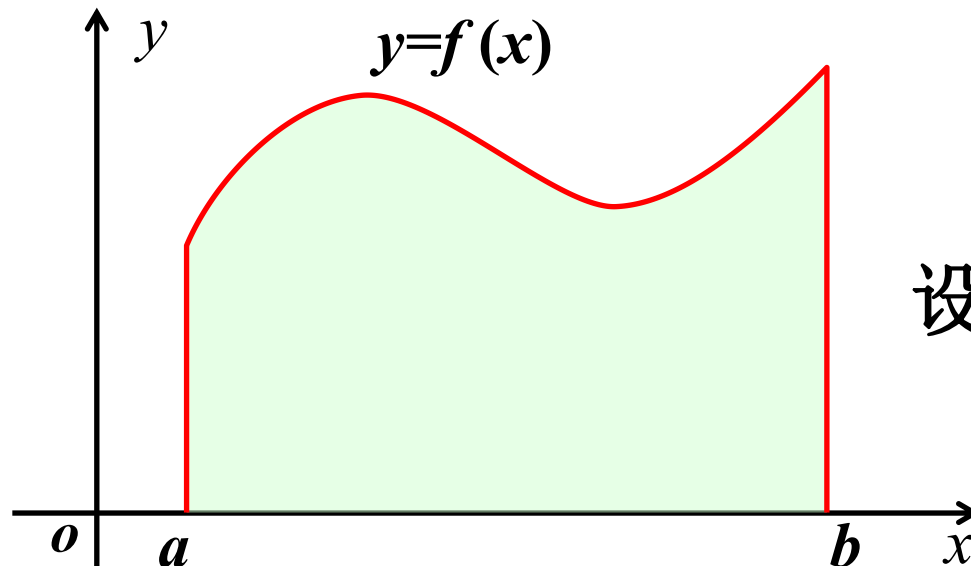
2

参数方程表示的平面图形面积

3

极坐标表示的平面图形面积

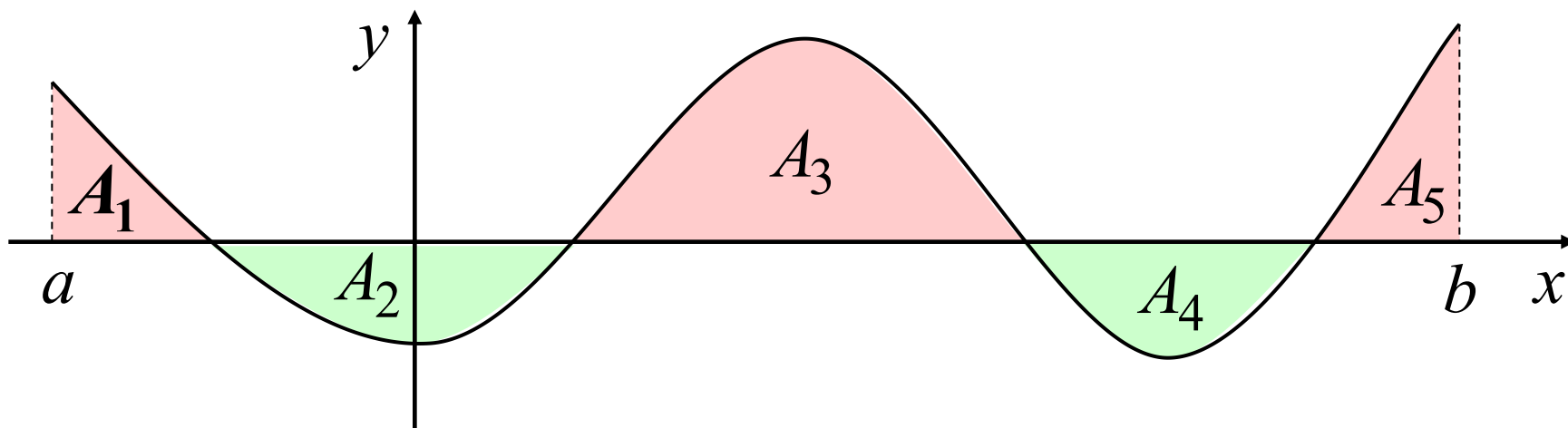
一、直角坐标方程表示的平面图形的面积



设 $f(x) \in C[a, b]$,

(1) $f(x) \geq 0$ 时, 直线 $x = a, x = b$, x 轴与 $y = f(x)$

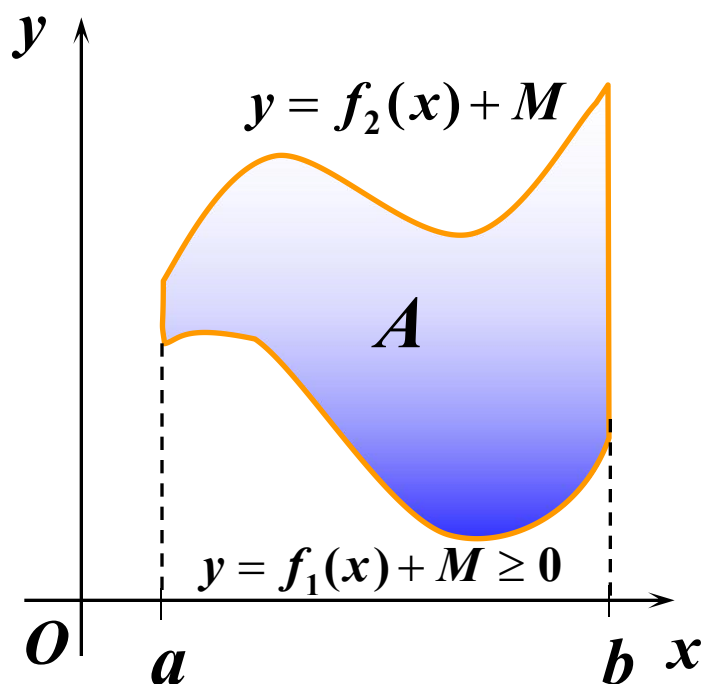
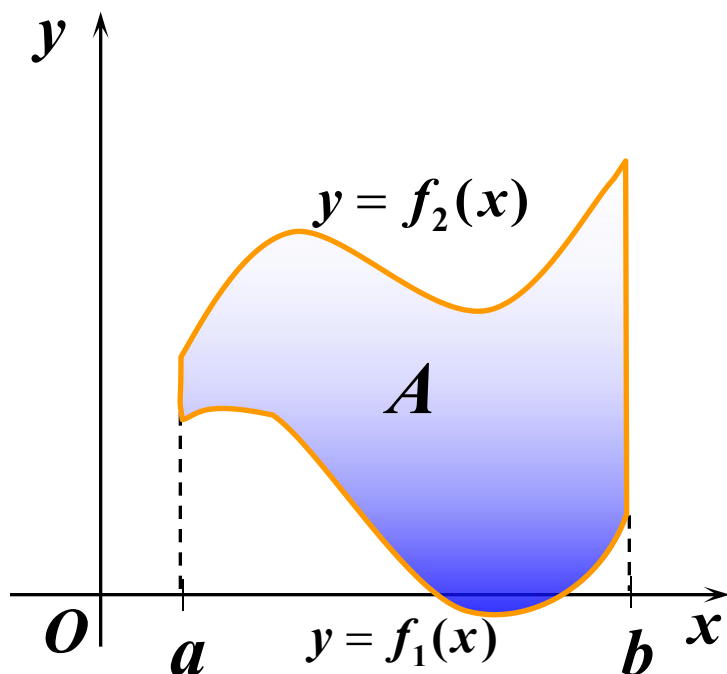
围成的图形的面积 $A = \int_a^b f(x) dx$.



设 $f(x) \in C[a, b]$,

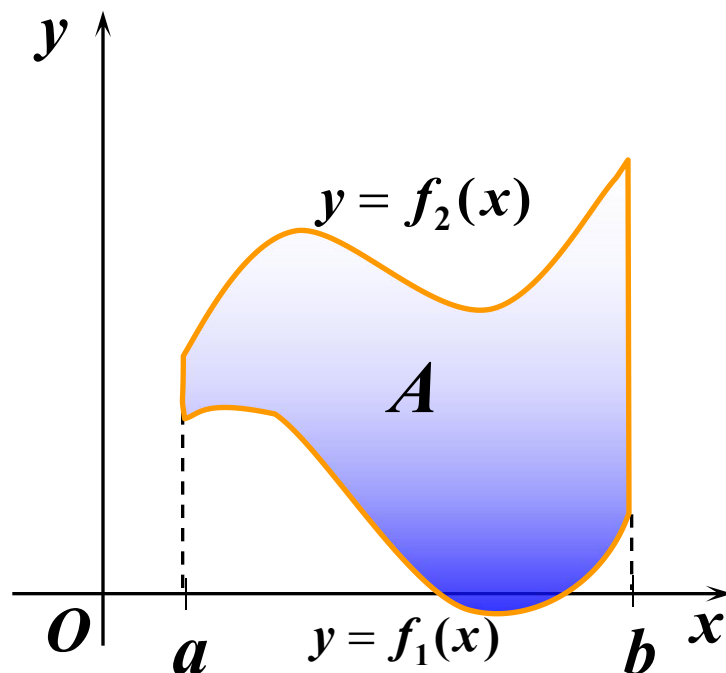
(2) 一般地, 直线 $x = a, x = b$, x 轴与 $y = f(x)$

围成的图形的面积 $A = \int_a^b |f(x)| dx$.



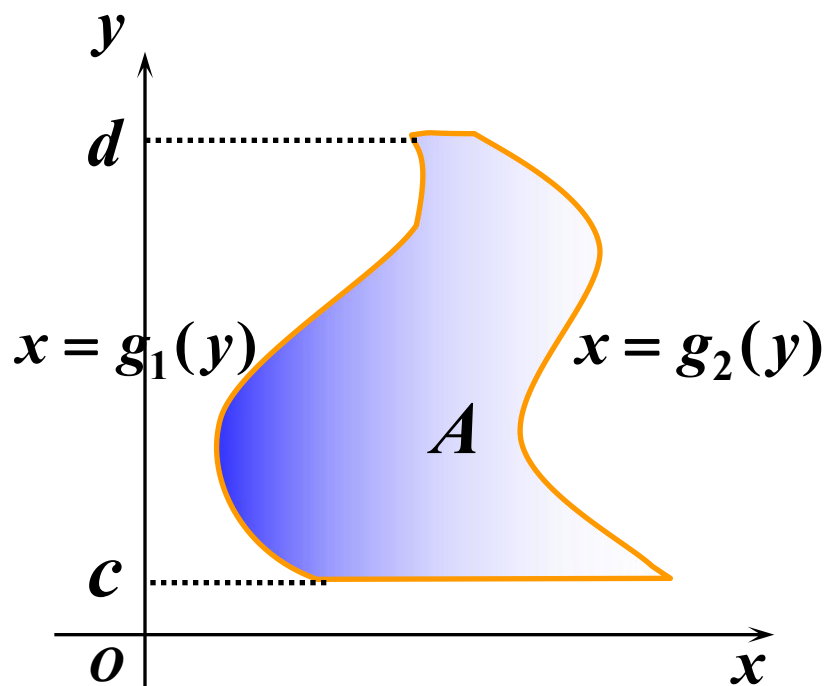
设 $f_2(x) \geq f_1(x)$, 由 $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$,
 $x = b$ 围成的面积

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx .$$



x -型区域: $A = \{(x, y) \mid f_1(x) \leq y \leq f_2(x), x \in [a, b]\}$.

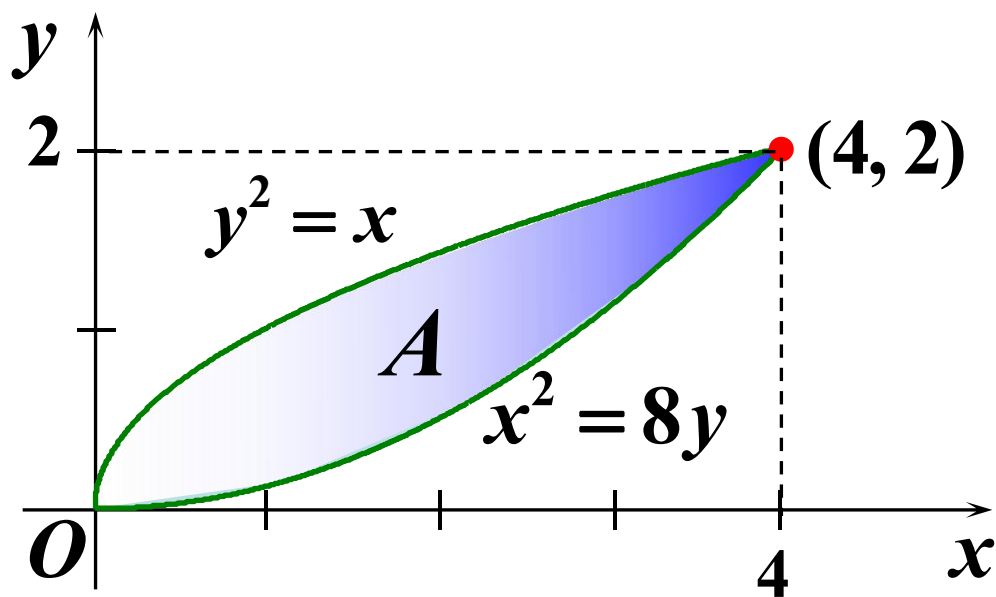
面积: $A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx .$



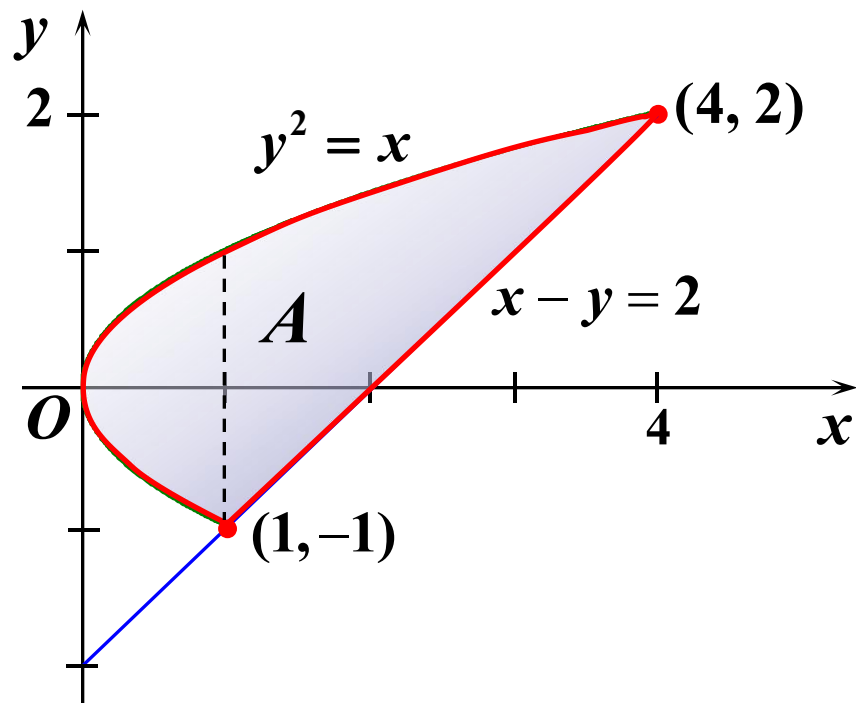
y -型区域: $A = \{(x, y) \mid g_1(y) \leq x \leq g_2(y), y \in [c, d]\}$.

面积: $A = \int_c^d [g_2(y) - g_1(y)] dy .$

例1、求抛物线 $y^2 = x$ 与 $x^2 = 8y$ 围成的图形的面积 .



例2、求由 $y^2 = x$ 与 $x - y = 2$ 围成的图形的面积 .



二、参数方程表示的平面图形的面积

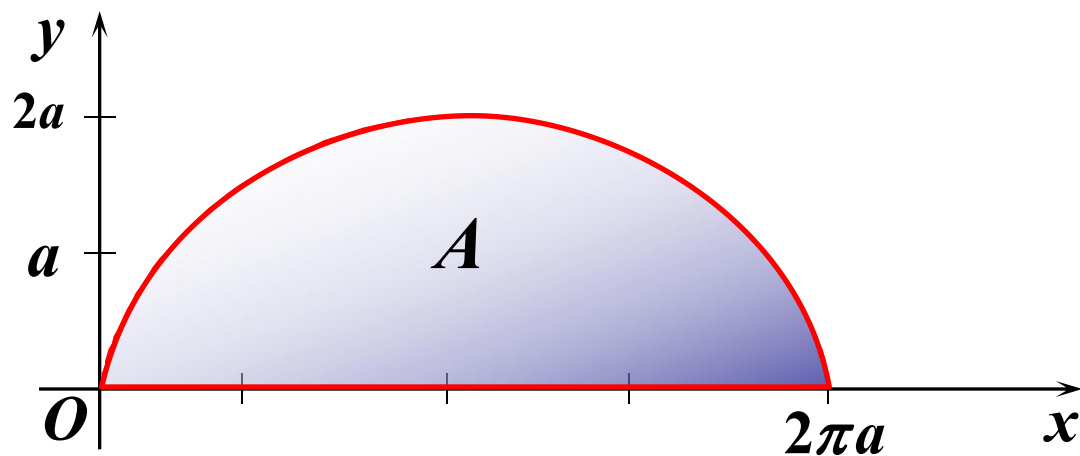
设曲线 C 由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$ 表示,

其中 $\psi(t), \varphi'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续且 $\varphi'(t) \neq 0$.

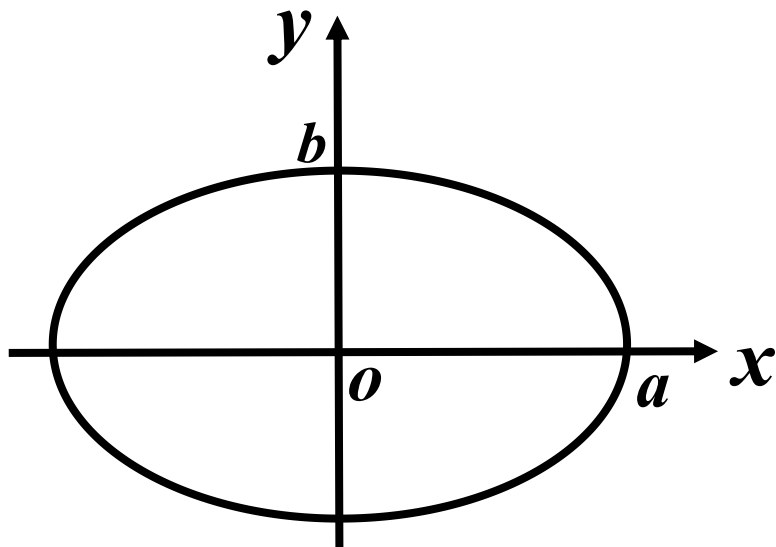
记 $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$, 则曲线 C 与 $x = a, x = b$ 和 x 轴所围成的图形的面积为:

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)\varphi'(t)| dt.$$

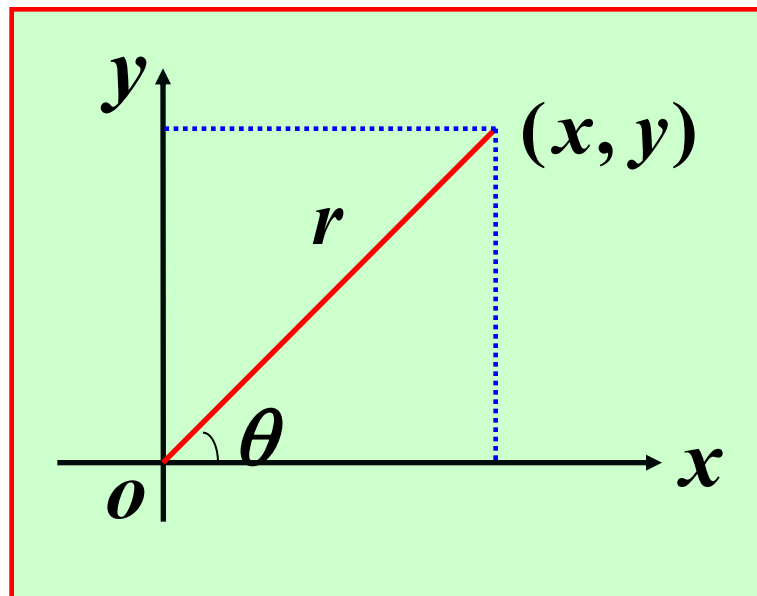
例3、求 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 x 轴所围图形的面积.



例4、求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围的面积 .



三、极坐标表示的平面图形的面积



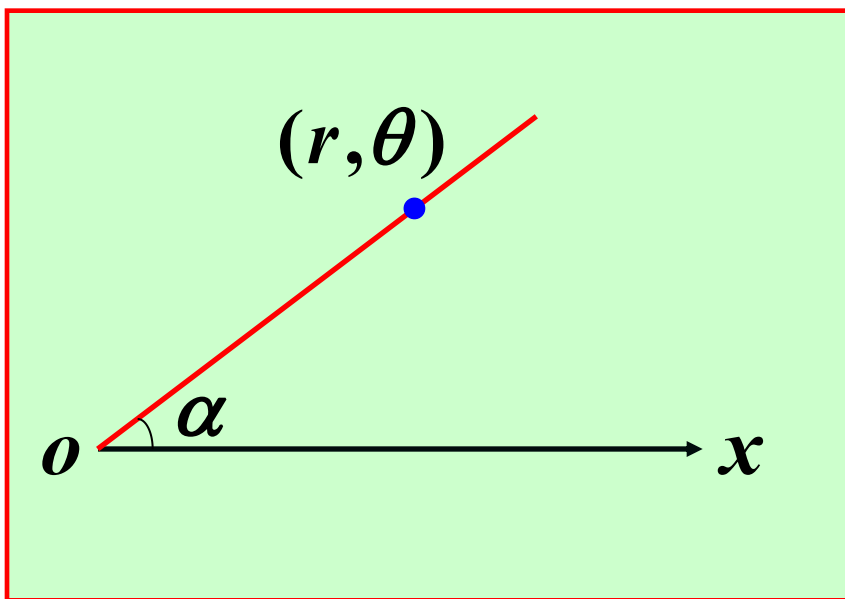
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases},$$

直角坐标:

极坐标:

直线 $y = \tan \alpha \cdot x$
($x \geq 0$)

$\theta = \alpha$



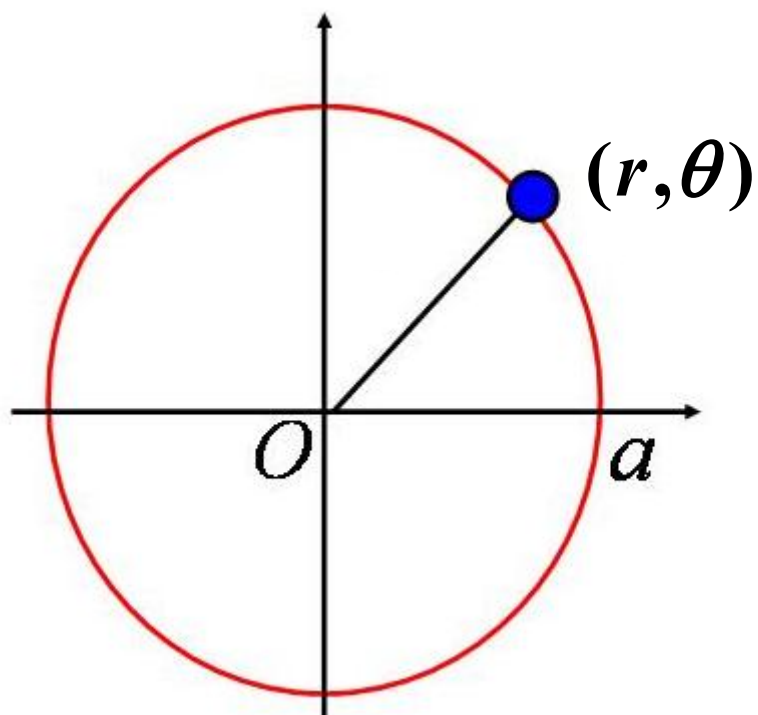
直角坐标:

极坐标:

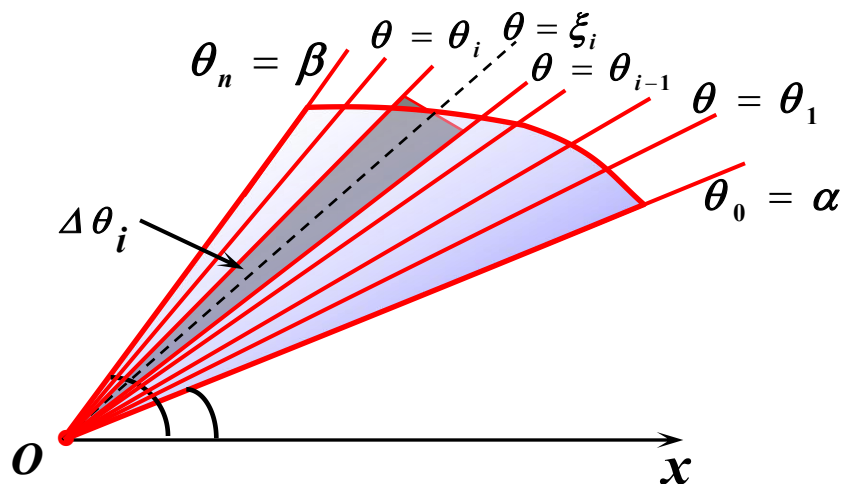
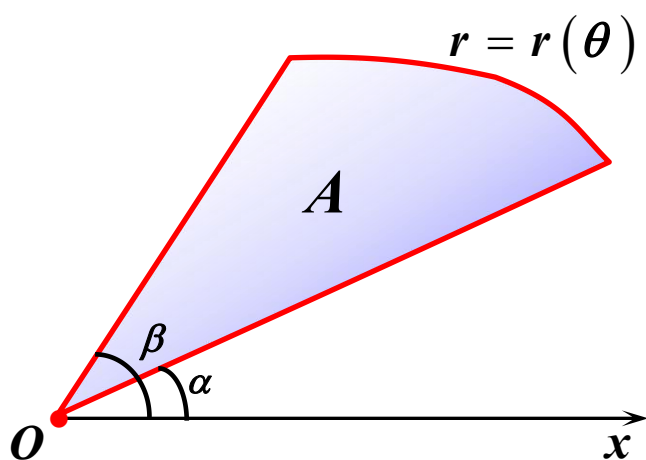
圆

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$r = a$$



求由连续曲线 $r = r(\theta)$ 与射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成的曲边扇形的面积。

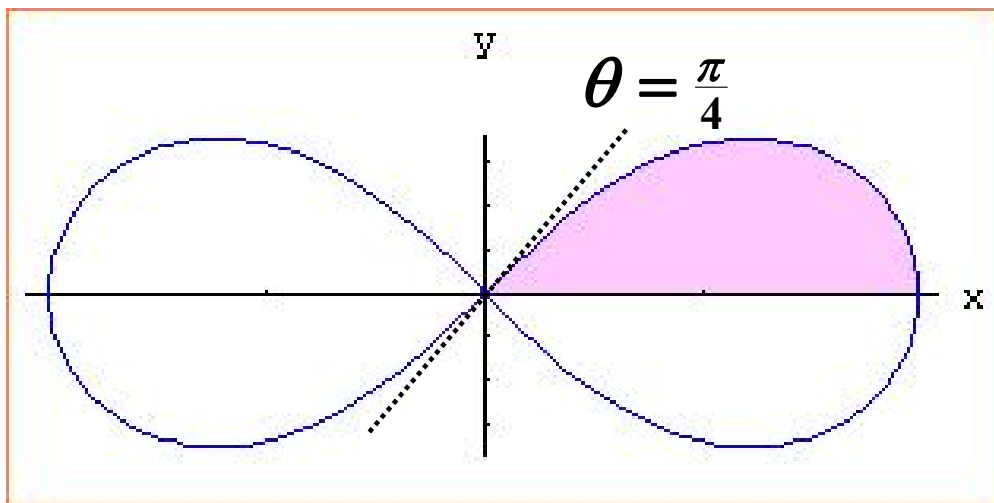


$$\Delta A_i \approx \frac{1}{2} r^2(\xi_i) \Delta\theta_i$$

面积:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta.$$

例5、求双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ 所围成图形的面积。





作 业

习题10-1: 1、4、5