14.2 函数的幂级数展开

1 泰勒级数

2 函数展开成幂级数的方法

一、泰勒级数

- $f(x)$在点x_0处的n阶$Taylor$多项式：

(设$f(x)$在点x_0处n阶可导)

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

- $f(x)$的n阶余项：$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$

(设$f(x)$在$U(x_0)$存在$n+1$阶连续导数)

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

定义: 设 $f(x)$ 在 $U(x_0,r)$ 内存在任意阶导数，称

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为 $f(x)$ 在点 x_0 处的**泰勒级数**。

问题: (1) 泰勒级数是否在 $U(x_0,r)$ 收敛?

(2) 若收敛，其和函数是否等于 $f(x)$?

如：设 $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 则 $f^{(n)}(0)=0\ (\forall n)$.

$f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数为 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0$.

但 $f(x)\neq 0\quad(\forall x\neq 0)$.

即：有些函数即使存在任意阶导数，其泰勒级数也不能收敛于函数本身。

- 若 $f(x)$ 的泰勒级数在 $U(x_0,r)$ 内收敛，且其和函数为 $f(x)$，即：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

则称 $f(x)$ 在 $U(x_0,r)$ 内可展开成泰勒级数。

在什么条件下，函数的泰勒级数收敛于它本身?

定理: 设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内具有任意阶导数，则 $f(x)$ 在该邻域内可展开成泰勒级数的充要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $R_n(x)$ 满足：

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

推论： 设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0, r)$ 内具有任意阶导数，且存在常数 $M>0$, 使 $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$ 在该邻域内对 $n=0,1,2,\cdots$ 均成立，则 $f(x)$ 在该邻域内可展开成泰勒级数．

注： $f(x)$ 的幂级数展开式是唯一的，它即为泰勒级数。

二、函数展开成幂级数的方法

1、直接展开法

$f(x)$ 的麦克劳林级数：$(x_0 = 0)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

将 $f(x)$ 展成麦克劳林级数的步骤:

(1) 求 $f(0), f'(0), \cdots f^{(n)}(0), \cdots$;

(2) 作幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$,并求其收敛半径 R;

(3) 考查在收敛区间 $(-R, R)$内, 是否有 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$,

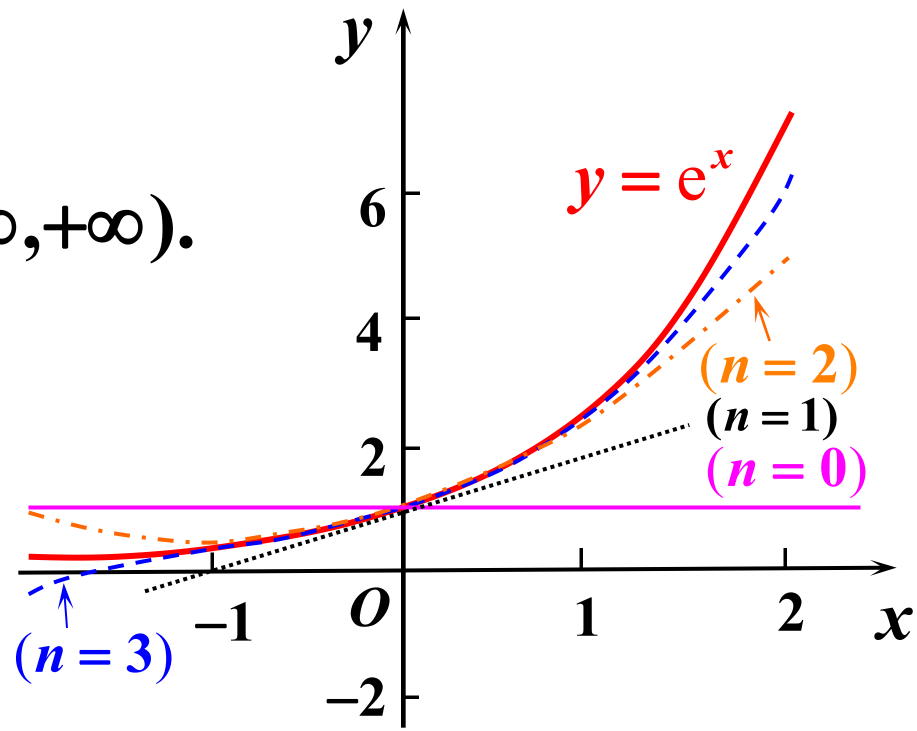
若是 ,则 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$;

(4) 验证在端点 $-R, R$ 处, 泰勒展式是否成立 .

例1、将下列函数展开成 x 的幂级数：

(1) $f(x)=e^x$；

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

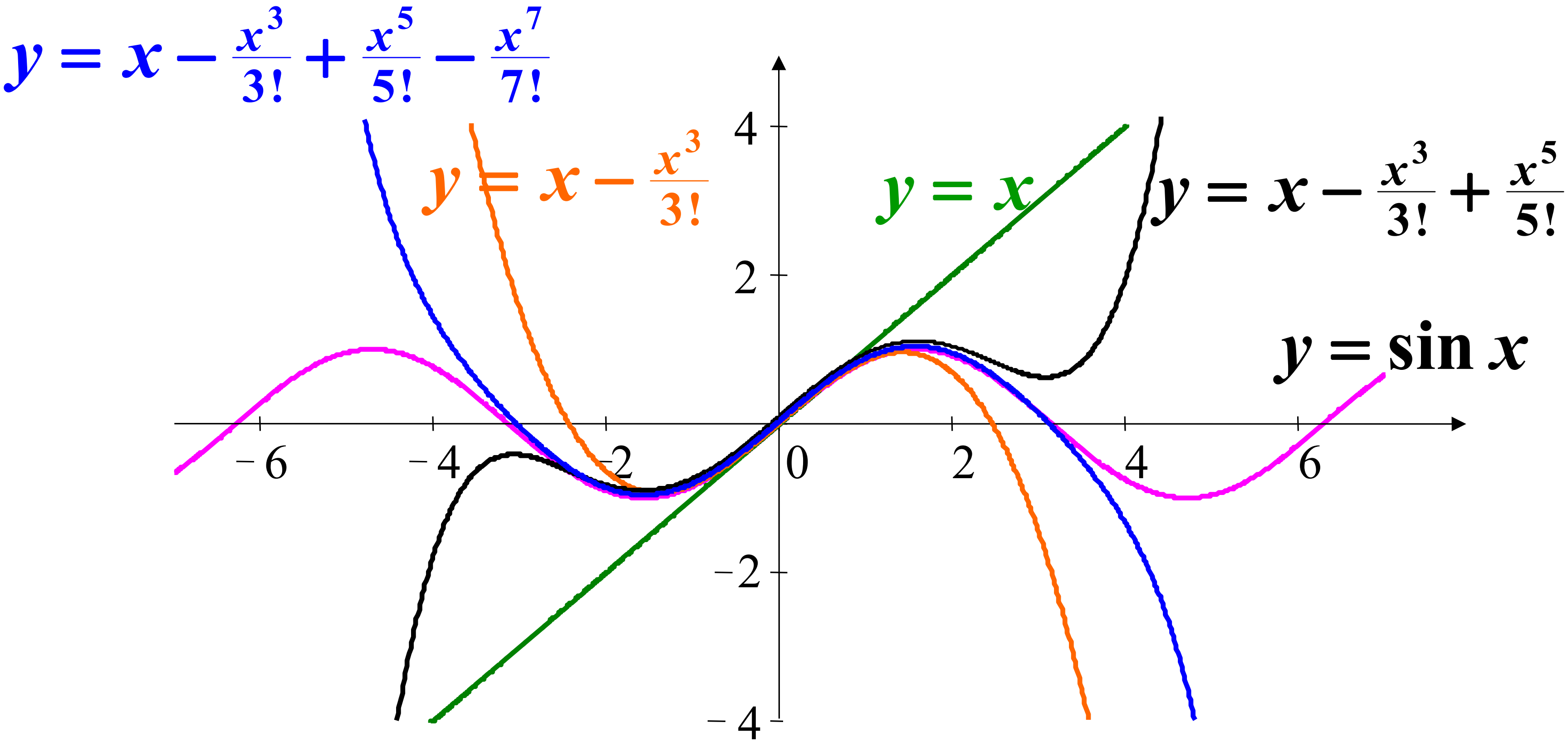


例1、将下列函数展开成 x 的幂级数：

$(2)\ f(x)=\sin x$.

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$f(x) = \sin x, \quad P_7(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7.$$



(3) $f(x)=(1+x)^{\alpha}\ (\alpha \neq 0)$.

- $$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\cdots.$$

收敛区间: $(-1,1)$.

2、间接展开法

基本公式：

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \qquad x\in(-1,1).$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

例2、将下列函数展开成 x 的幂级数：

(1) $f(x)=a^x\,(a>0,a\neq 1)$；

(2) $f(x)=\cos x$；

(3) $f(x)=\ln(1+x)$；

(4) $f(x)=\arctan x$.

例3、将下列函数展开成 x 的幂级数，并指出展开式成立的区间。

(1) $f(x)=(1-x)\ln(1-x)$；

(2) $f(x)=\ln(2+3x)$；

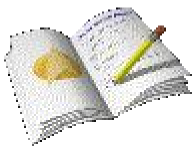
(3) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

(4) $f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

例4、将下列函数在指定点 x_0 展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数，并指出展开式成立的区间.

$$(1)\ f(x)=\ln\frac{x}{1+x}, \quad x_0=1;$$

$$(2)\ f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}, \quad x_0=-4;$$



作业

习题14-2 ：2（6）（8）、

3（2）