数学分析(3)的主要内容

(第十六章至第二十二章)

- 多元函数的极限与连续
- 多元函数微分学及应用
- 多元函数积分学 $\begin{cases} \text{含参量积分} \\ \text{重积分} \\ \text{曲线、曲面积分} \end{cases}$

第十六章 多元函数的极限与连续

§16.1 平面点集与多元函数

§16.2 二元函数的极限

§16.3 二元函数的连续性

§ 16.1　平面点集与多元函数

1. 平面点集
2. R^2 上的完备性定理
3. 二元函数
4. n 元函数

一、平面点集

平面上的点集：$E=\{(x,y)\mid(x,y)\text{ 满足条件 }P\}.$

例如：

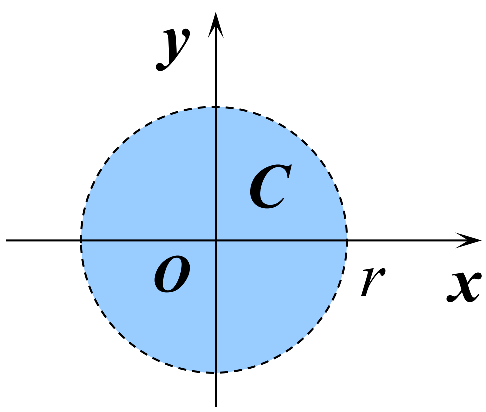
(i) 全平面：

$$\mathbf{R}^2=\{(x,y)\mid-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}. \qquad (1)$$

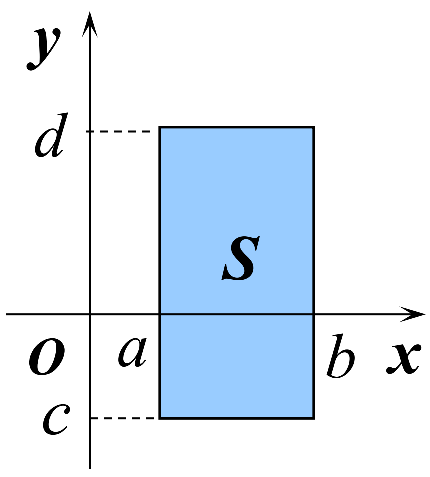
(ii) 圆盘： $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < r^2\}.$ **(2)**

(iii) 矩形： $S = \left\{ (x, y) \;\middle|\; a \le x \le b, c \le y \le d \right\},$ **(3)**

或 $S = [a, b] \times [c, d].$

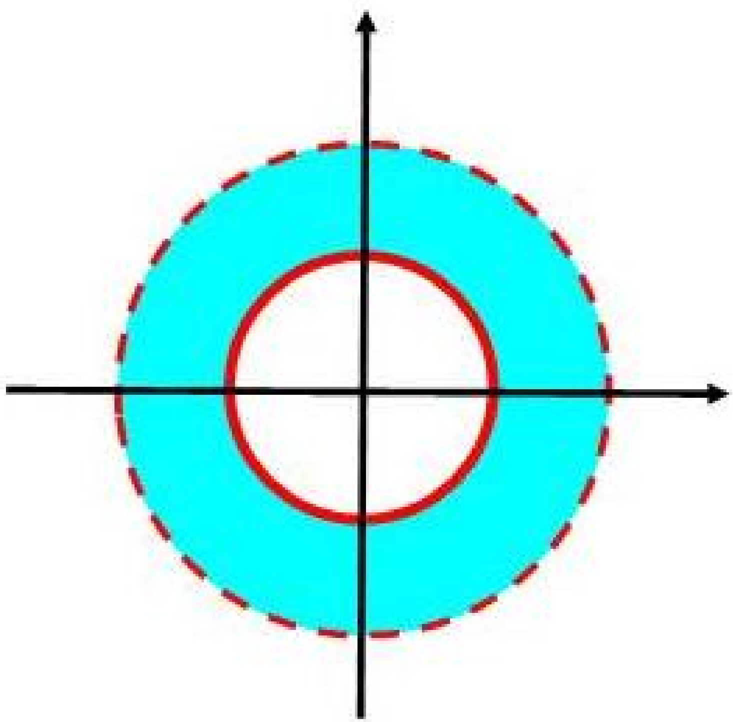


圆 C

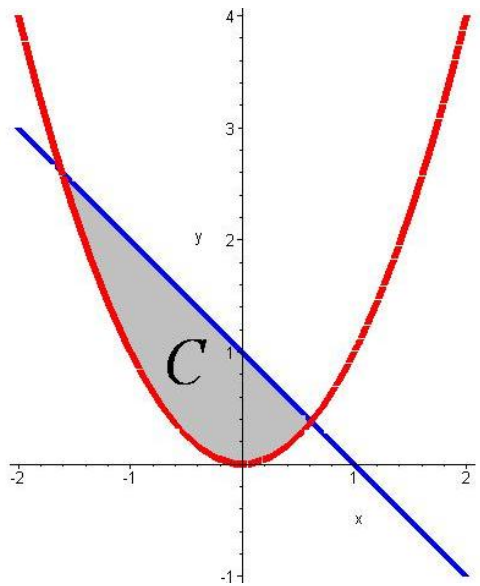


矩形 S

(vi) 圆环 $E=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2<4\}$.



(v) 集合 $E=\{(x,y)\mid x^2\le y\le 1-x\}$.



平面上两点 $P_1=(x_1,y_1), P_2=(x_2,y_2)$ 的距离

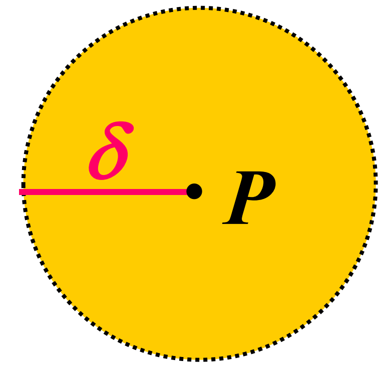
$$\rho(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

三角不等式:

平面上任意三点 P_1,P_2,P_3 满足

$$\rho(P_1,P_2)\le\rho(P_1,P_3)+\rho(P_2,P_3).$$

定义1: 设 $P(x_0,y_0)\in R^2$, $\delta>0$, 在 R^2 中与点 P 的距离小于 δ 的点 (x,y) 的全体，称为点 P 的 δ 邻域，记作 $U(P,\delta)$，即：



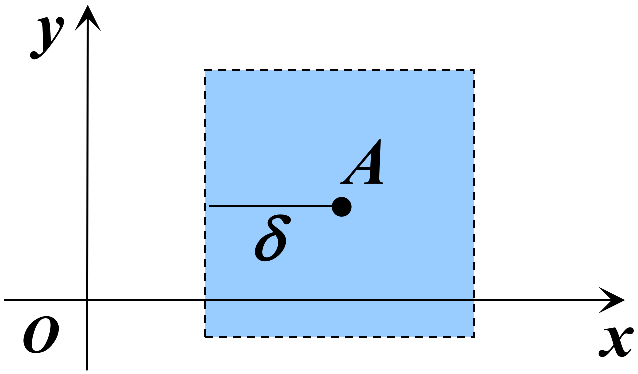
$$U(P,\delta)=\{(x,y)\,\big|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

$$U^{\circ}(P,\delta)=U(P,\delta)\setminus P.$$

不强调半径时：$U(P),U^{\circ}(P)$.

注：点 $P(x_0, y_0)$ 的另一 δ 邻域

$$\{ (x, y) \mid |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta \}$$

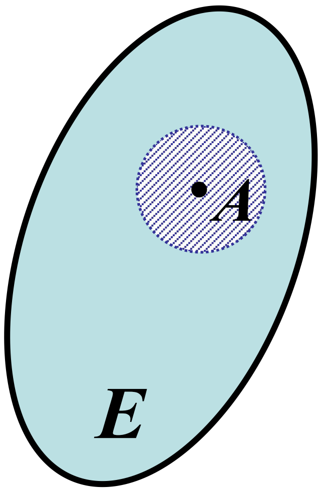


点 $P(x_0, y_0)$ 的 δ 方邻域

点与点集之间的关系一：内-外

对任意一点 $A \in R^2$ 与任意一个点集 $E \subset R^2$, 点 A 与集合 E 必定有以下三种关系之一：

(a) **内点**：存在点 A 的某邻域 $U(A)$，使得 $U(A) \subset E$，则称点 A 是集合 E 的内点.

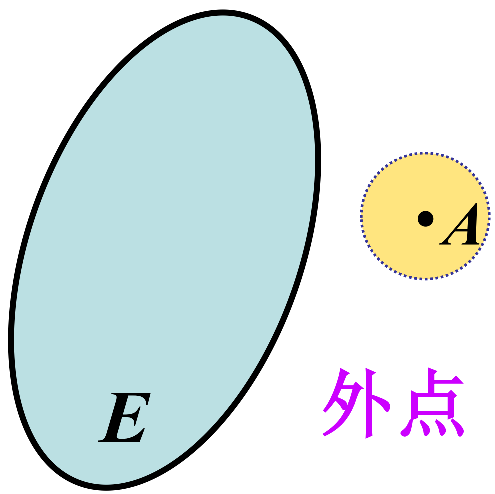


内点

注：若点 A 是集合 E 的内点，则 $A \in E$.

(b) 外点：存在点 A 的某邻域 $U(A)$，使得 $U(A)\cap E=\phi$，

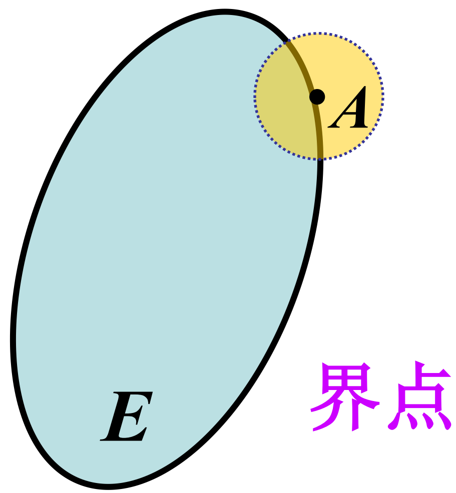
则称点 A 是集合 E 的外点．



注：若点 A 是集合 E 的外点，则 $A\notin E$．

(c) 界点：对点 A 的任一邻域 $U(A)$,有 $U(A)\cap E\neq\phi$,

且 $U(A)\cap E^C\neq\phi$, 则称点 A 是集合 E 的界点 .

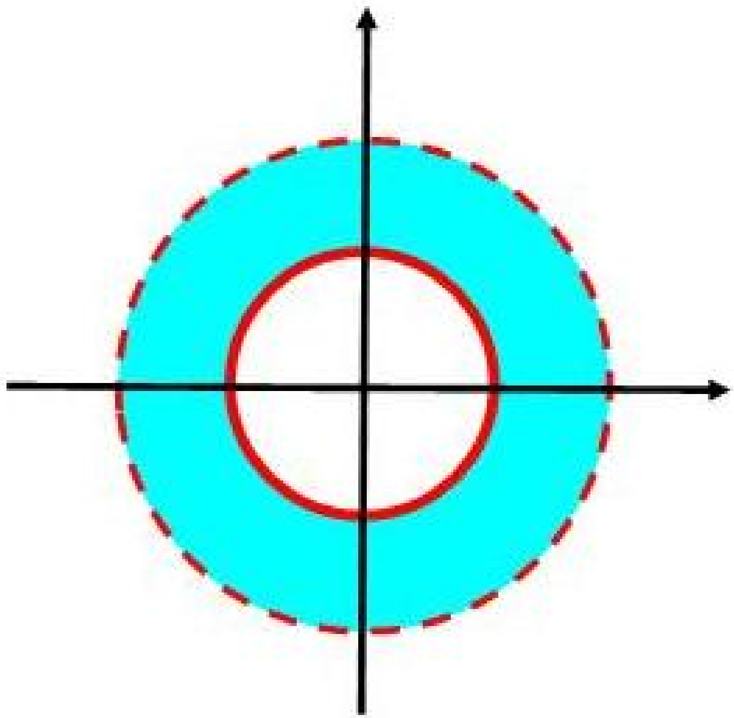


$E^c=R^2\setminus E$,即E关于R^2的余集.

- 集合 E 的界点的全体称为 E 的边界,记为 ∂E.

注：若 A 为集合 E 的界点 ,则 $A\in E$ 或 $A\notin E$.

例1、设集合 $E=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2<4\}$, 求集合 E 的内点、外点与界点。



点与点集之间的关系二：疏-密

(i) **聚点**: 对点 A 的任何空心邻域 $U^{\circ}(A)$, 有

$$U^{\circ}(A)\bigcap E \neq \phi,$$

则称点 A 是点集 E 的聚点.

注1: 聚点本身可能属于E，也可能不属于E.

注2: 聚点的另一等价定义为“在点 A 的任何邻域 $U(A)$ 内都含有 E 中的无穷多个点”.

(ii) **孤立点：** 若点 $A \in E$，但不是 E 的聚点，（即存在$\delta > 0$, 使得$U^\circ(A;\delta) \cap E = \varnothing$), 则称点 A 是 E 的孤立点.

注： E 中的点要么是聚点, 要么是孤立点;

孤立点必为界点;

内点和不是孤立点的界点必为聚点;

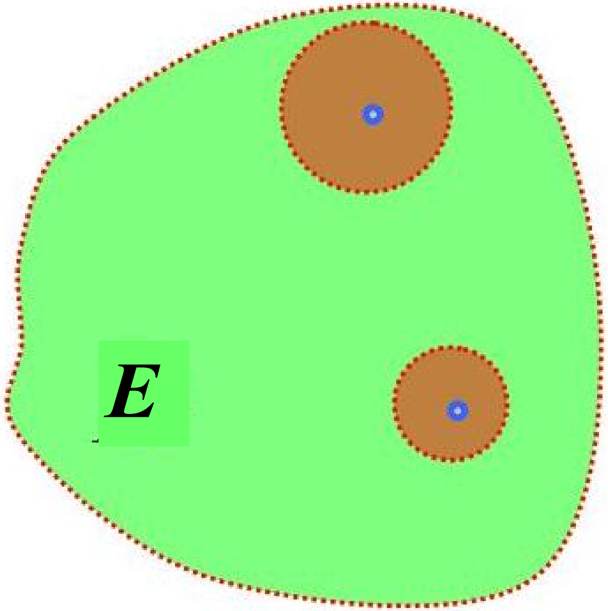
既非聚点, 又非孤立点, 则必为外点.

例2、设 $E=\left\{(p,q)\,\middle|\,p, q \text{ 为任意整数}\right\}$. 求集合 E 的内点、外点、界点、聚点和孤立点。

※ 一些重要的平面点集

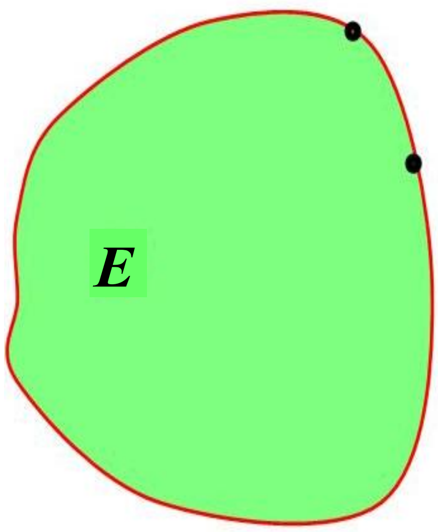
根据集合 $E \subset R^2$ 的点的特征，定义：

(a) **开集**：若 $\forall A \in E$, 点 A 都是集合 E 的内点，则称 E 是 R^2 的开集；



(b) 闭集：若集合 E 的所有聚点都属于 E,

则称 E 是 R^2 的闭集；



注：约定 ϕ 与 R^2 既是 R^2 的开集, 又是闭集。

例3、证明开集与闭集具有对偶性，即

(1) 若 E 为开集，则 E^c 为闭集；

(2) 若 E 为闭集，则 E^c 为开集.

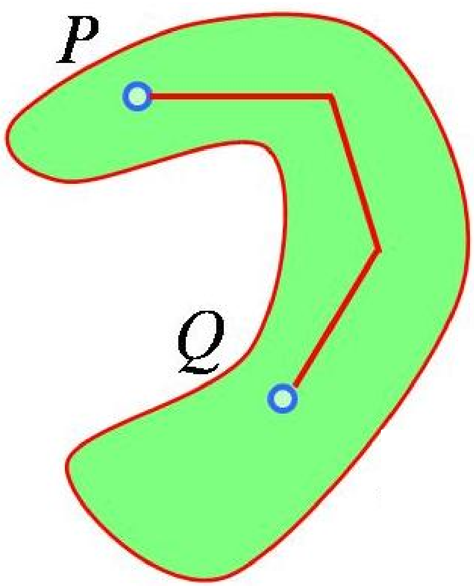
例4、判断下列集合是开集，闭集或非开非闭集。

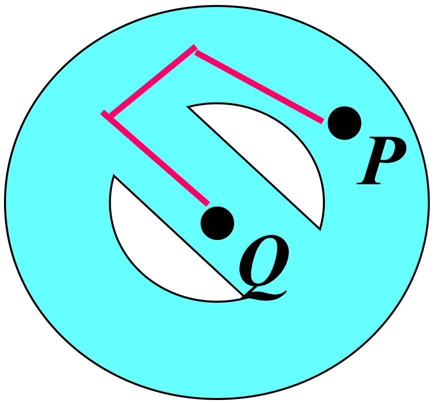
$$(1)\ E=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\};$$

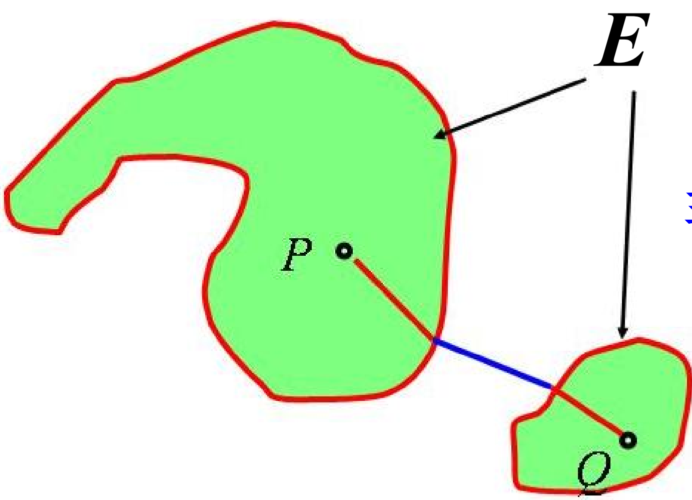
$$(2)\ E=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 2\};$$

$$(3)\ E=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\le 2\}.$$

连通集: 若 $\forall P, Q \in E$, 存在一条完全包含于集合 E 中的折线将 P, Q 连接起来，则称 E 为 R^2 的连通集。







开(区)域与闭(区)域

开域：称 E 为 R^2 的开域，若 E 为连通的开集。

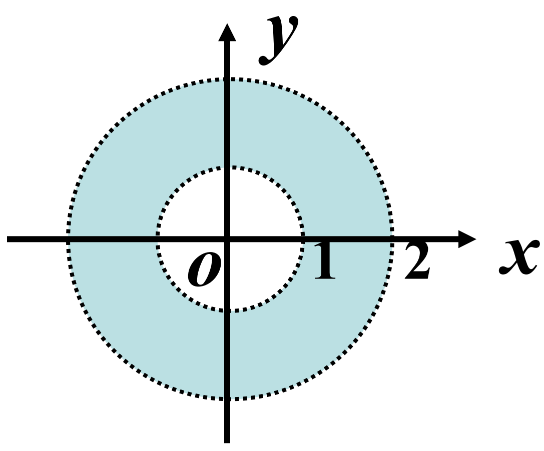
闭域：开域连同其边界点所成的点集称为闭域。

区域：开域、闭域, 或开域连同部分边界点所成的点集。

注：闭域必为闭集。

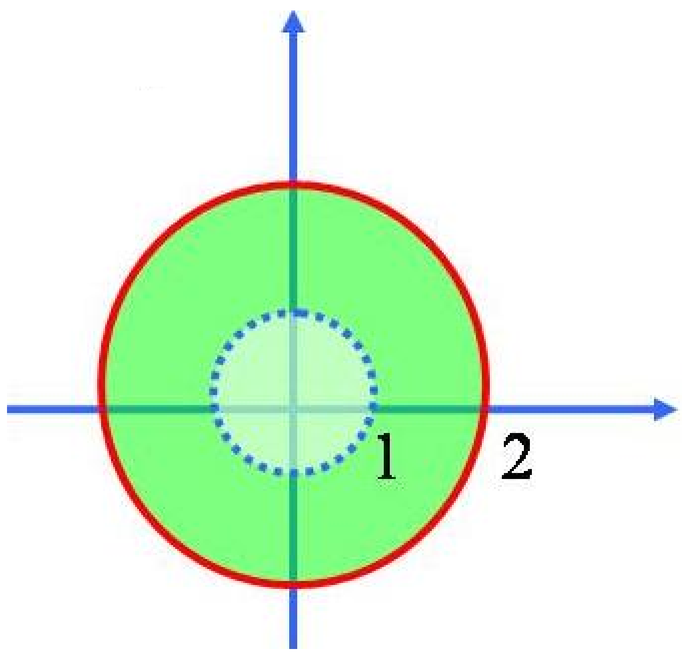
例5、判断下列集合是否为区域, 是开域还是闭域。

$$(1)\ E_1 = \{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\};$$



例5、判断下列集合是否为区域, 是开域还是闭域。

$$(2)\ E_2 = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \le 4\}$$



例5、判断下列集合是否为区域, 是开域还是闭域。

$$(3) E_3 = \{(x, y) \mid x + y > 0\};$$

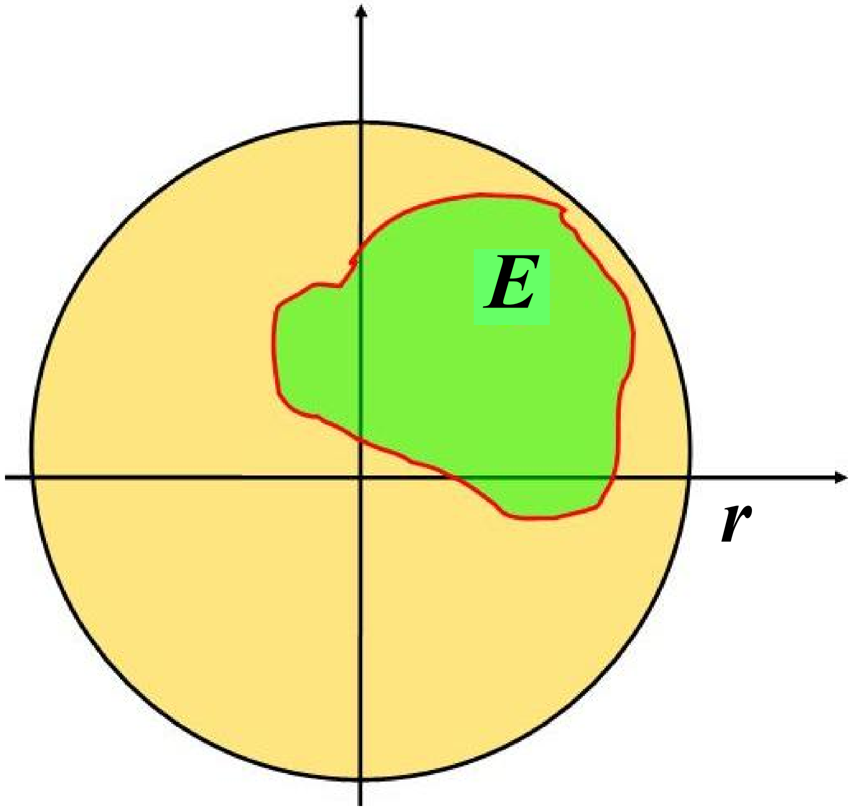
$$(4) E_4 = \{(x, y) \mid x \geq a, y \geq c\}.$$

$$(5) E_5 = \{(x, y) \mid xy > 0\}.$$

有界集与无界集

有界集：若$\exists\, r>0$，使得 $E\subset U(O,r)$，则称集合 E 为有界集。

否则称为**无界集**。



(有界)闭域

↑

开域 ⟵ 开集 ⟵ 内点（边界点、外点）

↑

闭集 ⟵ 聚点 ⟵ 邻域 ⟵ 距离

$\boldsymbol{R}$	开区间	闭区间	有界闭区间
$\boldsymbol{R}^2$	开域	闭域	有界闭域

二、R^2上的完备性定理

※ 实轴上点列的收敛性定义及柯西准则反映实数完备性的几个等价定理，构成了一元函数极限理论的基础.

定义2： 设$\{P_n\}\subset \mathbf{R}^2$为一列点，$P_0\in \mathbf{R}^2$为一固定点.

若$\forall \varepsilon>0, \exists N\in \mathrm{N}_+$，使当$n>N$时，$P_n\in U(P_0;\varepsilon)$，

则称点列$\{P_n\}$收敛于点P_0，记作

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \quad \text{或} \quad P_n\to P_0\ (n\to\infty).$$

注1：记 $\rho_n = \rho(P_n, P_0)$，则

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho_n = 0.$$

注2：设 $P_n = (x_n, y_n)$，$P_0 = (x_0, y_0)$，则

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} y_n = y_0;$$

定理16.1(柯西准则):

平面上的点列$\{P_n\}$收敛的充要条件是:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$, 使当 $n > N$ 时, 都有

$$\rho(P_n, P_{n+p}) < \varepsilon, \quad \forall p \in \mathbf{N}_+ .$$

- 定义点集 E 的直径为:

$$d(E) = \sup_{P_1, P_2 \in E} \rho(P_1, P_2)$$

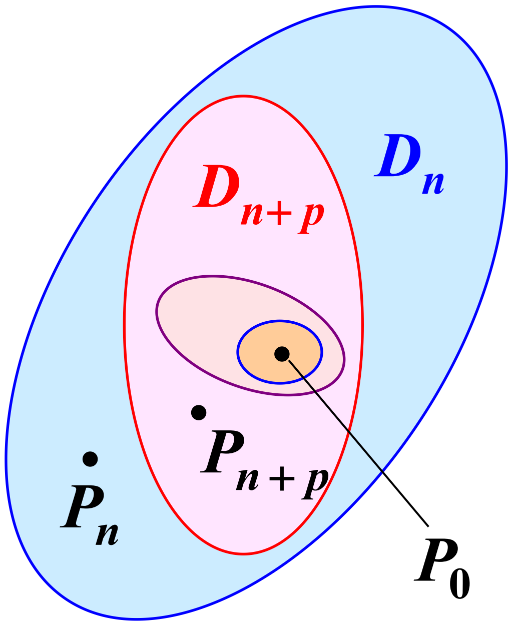
定理16.2(闭域套定理)：设 $\{D_n\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一列闭域，满足：

(i) $D_n \supset D_{n+1},\ n = 1,\ 2,\ \cdots;$

(ii) $d_n = d(D_n),\ \lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0.$

则存在惟一的点

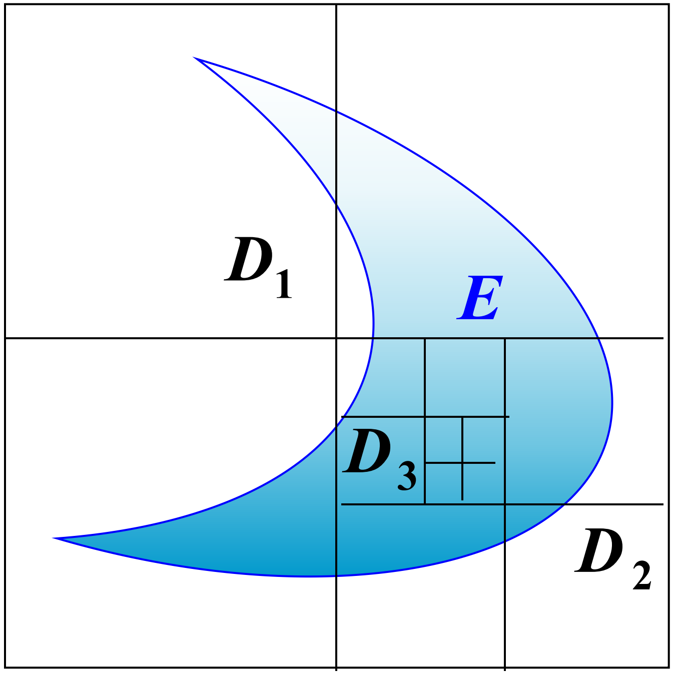
$$P_0 \in D_n,\ n = 1, 2, \cdots.$$



推论: 对上述闭域套$\{D_n\}$, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+$, 当$n > N$时, $D_n \subset U(P_0;\varepsilon)$.

注: 把$\{D_n\}$改为闭集套时, 上面的命题同样成立.

定理16.3(聚点定理)：若 $E \subset \mathbf{R}^2$ 为有界无限点集, 则 E 在 $\mathbf{R}^2$ 中至少有一个聚点.



推论： 任一有界无限点列$\{P_n\}\subset \mathbf{R}^2$必存在收敛子列$\{P_{n_k}\}$.

定理16.4(有限覆盖定理)： 设$D\subset \mathbf{R}^2$为一有界闭域，$\{\Delta_\alpha\}$为一族覆盖了D的开域(即$D\subset \bigcup\limits_{\alpha}\Delta_\alpha$). 则在$\{\Delta_\alpha\}$中必存在有限个开域$\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n$, 它们同样覆盖了$D$, 即

$$D\subset \bigcup_{i=1}^{n}\Delta_i .$$

三、二元函数

定义2：设平面点集$D \subset \mathbf{R}^2$，若按照某对应法则f，D中每一点$P(x,y)$都有惟一确定的实数z与之对应，则称f为定义在D上的二元函数（或称f为D到$\mathbf{R}$的一个映射），记作

$$f: D \to R.$$

也常记作

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D; \quad 或 \quad z = f(P), \quad P \in D.$$

函数 f 的自变量 $:(x, y)$.

函数 f 的定义域 $:D$.

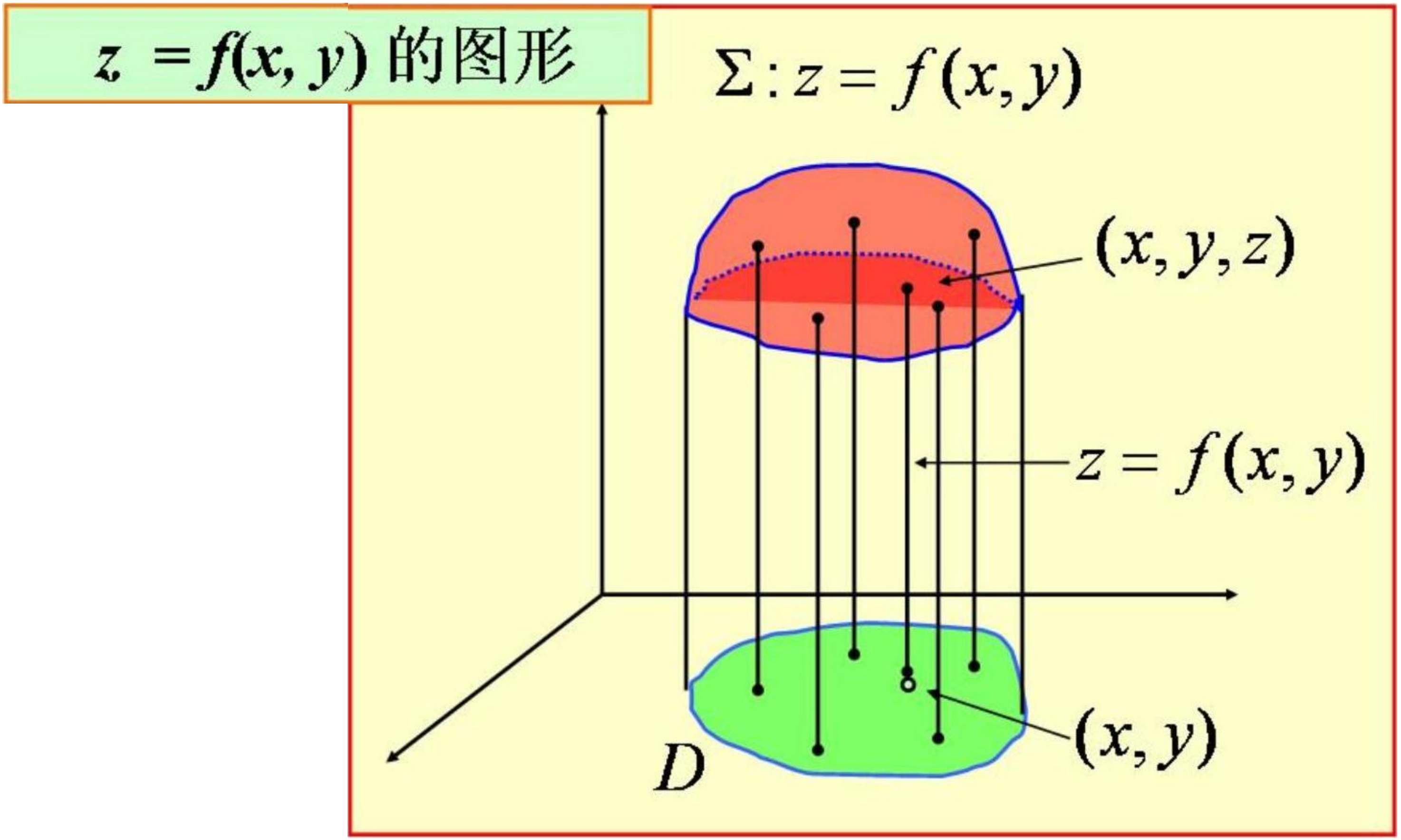
函数 f 的值域：$f(D)=\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.

三维点集

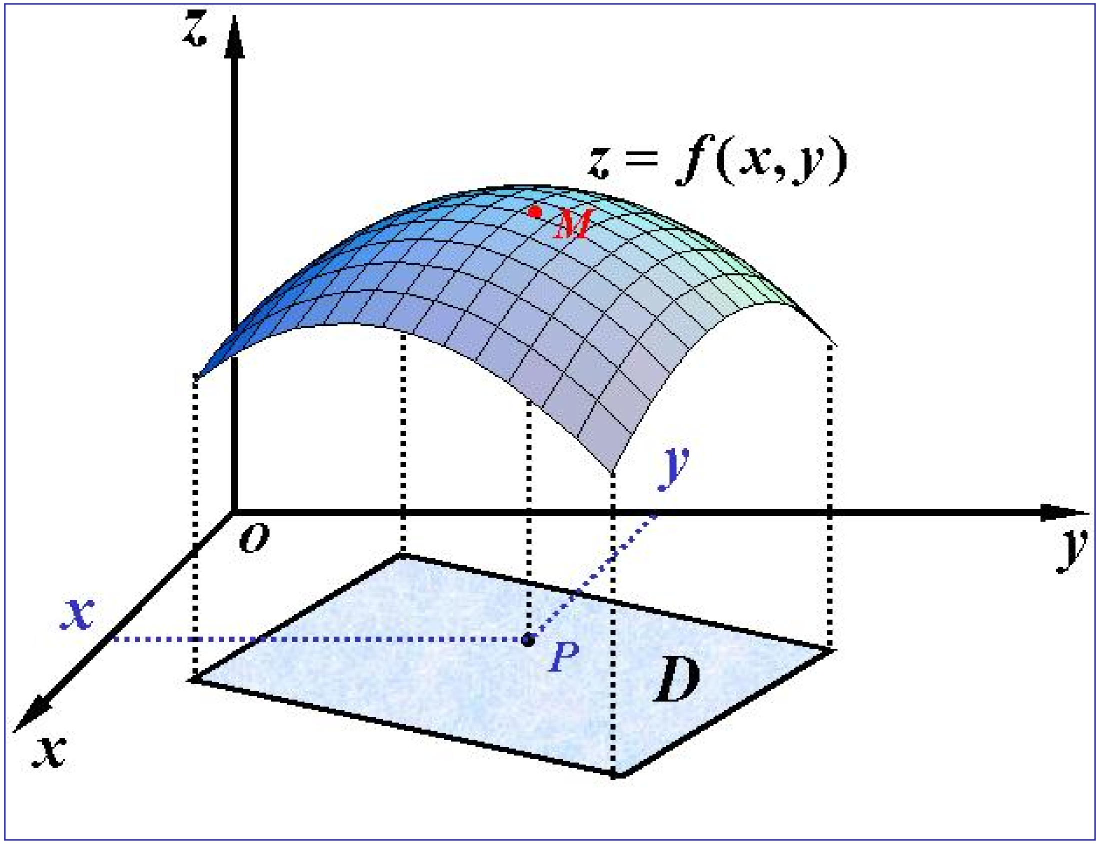
$$\Sigma=\{(x, y, z) \mid z=f(x, y),(x, y) \in D\} \subset R^{3}$$

是二元函数 f 的图象。

二元函数的图像



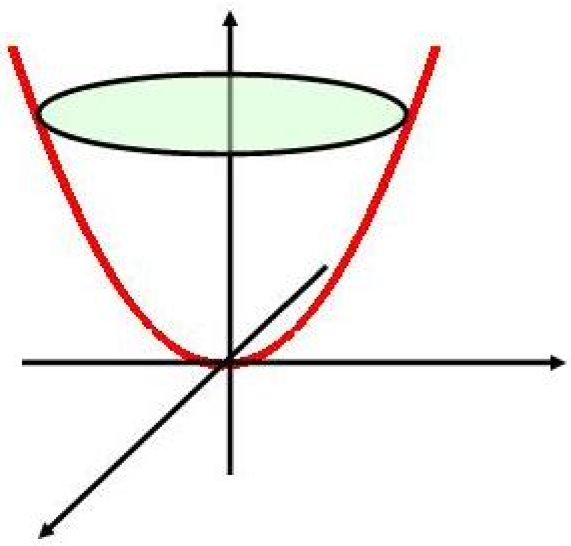
$$\Sigma = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

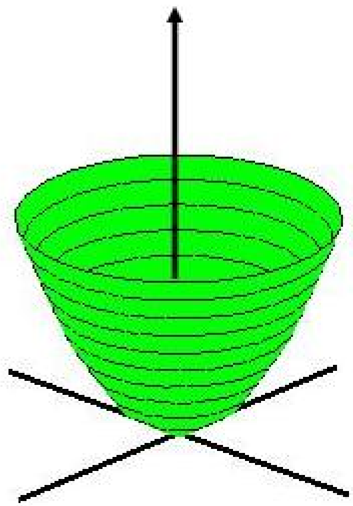


◆ 二元函数的图像通常是空间中的一个曲面。

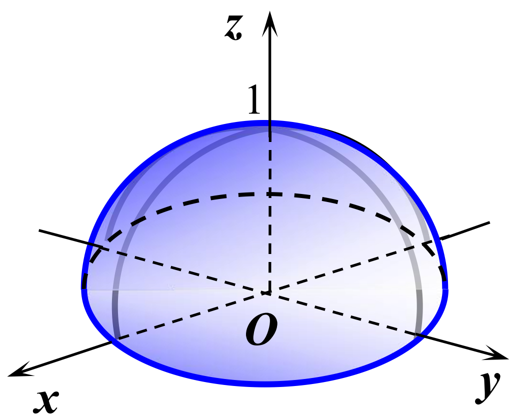
二元函数的例子：

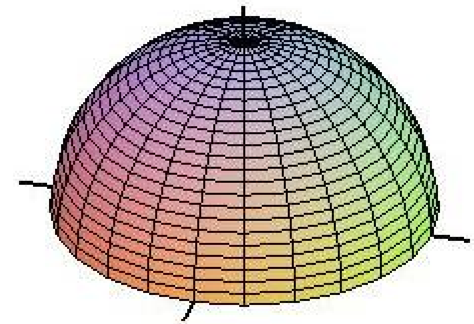
(1) $z = x^2 + y^2$



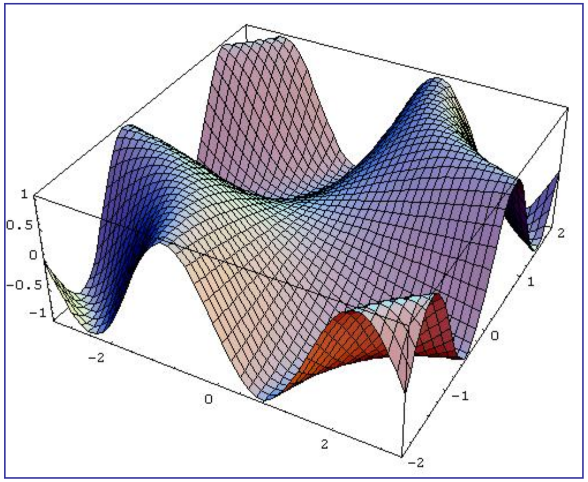


(2) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

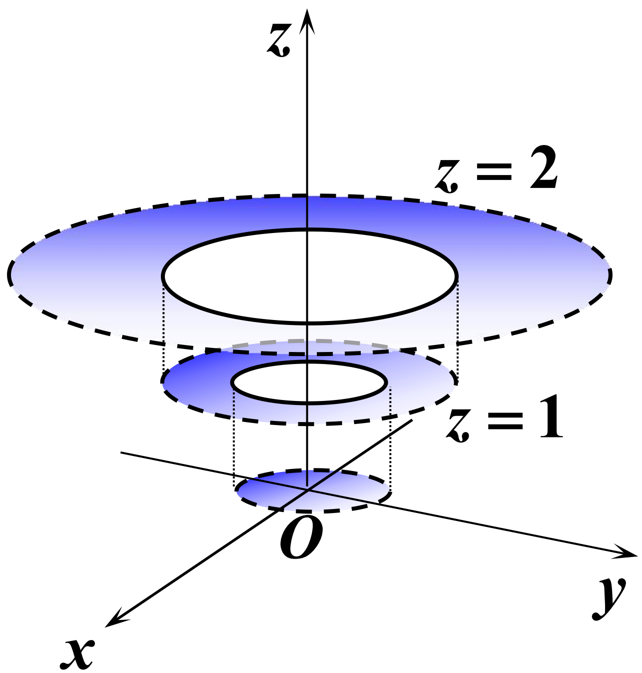




(3) $z = \sin xy$

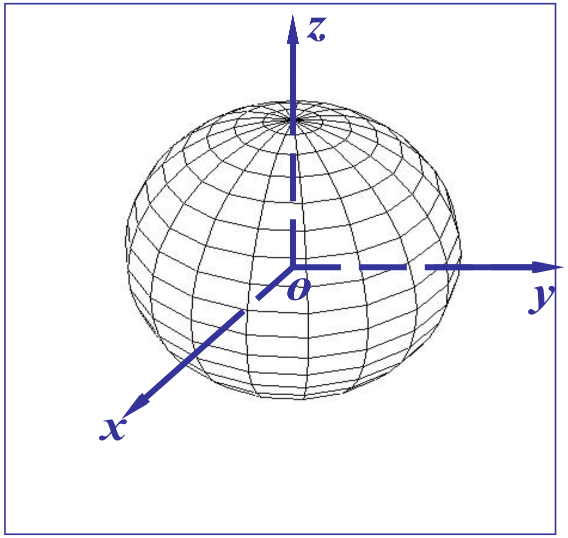


(4) $z = [\sqrt{x^2 + y^2}]$

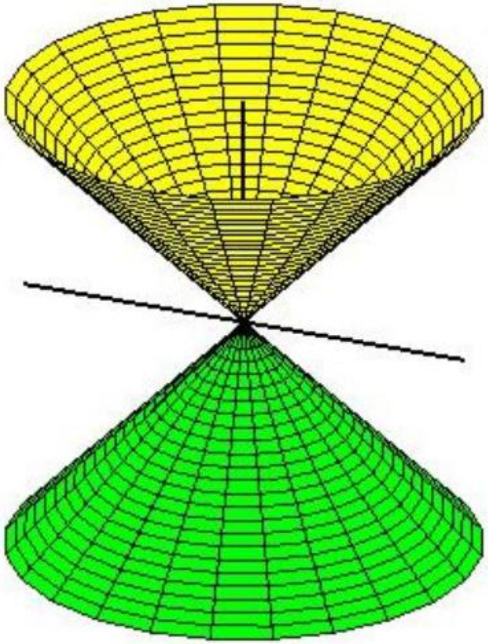


曲面不一定是二元函数的图像

$$(1)\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$



$$(2)\ x^2 + y^2 = z^2$$



- 函数 $f(x, y)$ 在 D 上有界：$f(D)$ 是 R 的有界数集。

- 类似于一元函数，设 $D \subset \mathrm{R}^2$，则有

$$f \text{ 在 } D \text{ 上无界} \Leftrightarrow \exists \{P_k\} \subset D, \text{ 使 } \lim_{k \to \infty} f(P_k) = \infty.$$

四、n 元函数

n 元有序实数组：$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

R^n：n 元有序实数组构成的集合，即：

$$R^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_k\in R,\ 1\le k\le n\}$$

特别地，$0=(0,0,\cdots,0)$ 称为 R^n 中的零元。

定义 R^n 中 $P=(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $Q=(y_1,\cdots,y_n)$ 的距离：

$$\rho(P,Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

称 R^n 中点列 $\{P_k\}$ 趋于点 A，若

$$\rho(P_k,A)\to 0\,(k\to\infty).$$

定义3：设 E 为R^n中的点集, 若有某对应法则 f, 使 E 中每一点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 都有惟一的一个实数 y 与之对应, 则称 f 为定义在 E 上的 n 元函数, 记作

$$f: E \to \mathrm{R},$$

也常写成

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E,$$

$$\text{或}\quad y = f(P),\ P \in E.$$

作业

习题16-1：1(1)(4)(5)(7)、7(1)(2)、9(3)(10)