§ 20.2　第二型曲线积分

1 第二型曲线积分的背景

2 第二型曲线积分的定义

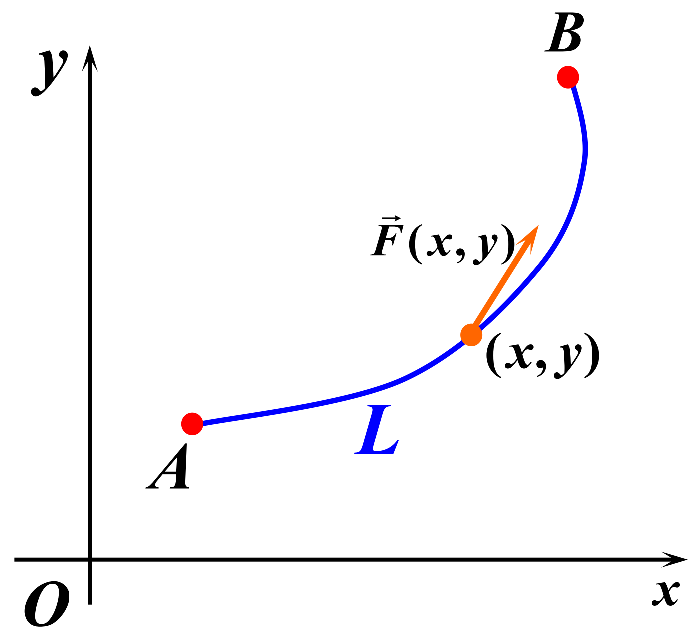
3 第二型曲线积分的计算

一、第二型曲线积分的背景

- 常力 $\vec{F}$ 沿直线从点 A 运动到点 B 做功:

$$W=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

- 设质点受力 $\vec{F}(x,y)$ 的作用沿平面曲线 L 从点 A 移动到点 B, 求 $\vec{F}(x,y)$ 所作的功.



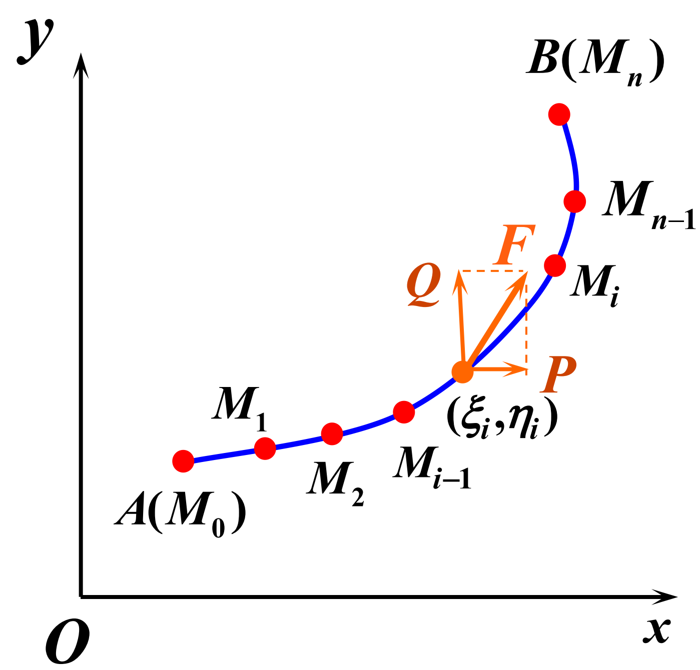
记 $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$.

(1) 分割：用点 $M_1,\cdots,M_{n-1}$ 分割曲线 ；

(2) 近似：

$$W_i \approx F(\xi_i,\eta_i)\cdot L_{M_{i-1}M_i}$$

$$= P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i;$$



(3) 求和：

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i \approx \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i.$$

(4) 取极限：

$$W = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i.$$

二、第二型曲线积分的定义

定义： 设 $L=\overset{\frown}{AB}$ 是 xoy 面上的有向可求长曲线弧，$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 在 L 上有界. 对 L 上的任一分割 $T:\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}(i=1,\cdots,n)$，其中 $M_0=A, M_n=B$. 记曲线段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 的弧长为 Δs_i，$\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta s_i$. 设 $M_i(x_i,y_i)$，记

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\ \Delta y_i=y_i-y_{i-1},(i=1,2,\cdots,n).$$

任取$(\xi_i,\eta_i)\in \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$,若极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

存在且与分割 T 和点(ξ_i,η_i)的取法无关,则称

此极限为向量值函数 $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$

在有向曲线 L 上的积分,也叫第二型曲线积分,记为

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

注1：若 L 为封闭曲线，记为

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

注2：记 $\mathrm{d}\vec{s} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$，第二型曲线积分也可写为

$$\int_L \vec{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

性质：设 L 为有向光滑曲线，

(1) 若 $P(x,y),Q(x,y)\in C(L)$,则 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 存在.

(2) $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 有线性性，曲线弧可加性.

(3) $\int_{L^-} P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=$

$$-\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

三、第二型曲线积分的计算

定理： 设平面上有向光滑曲线 $L:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t: a \to b,$

且 $P(x,y), Q(x,y) \in C(L)$, 则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^b \left[P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right] \mathrm{d}t \,.$$

特别地，若 $L: y = y(x), x: a \to b$，则

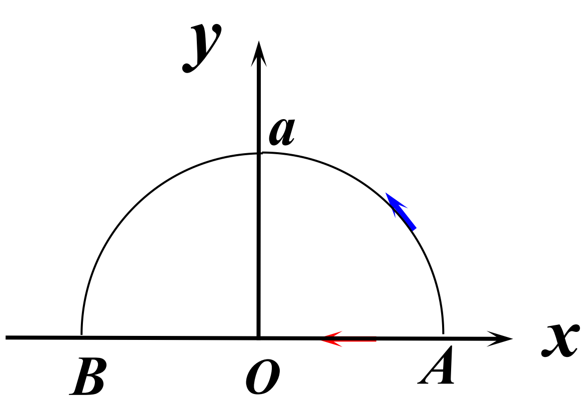
$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^b \left[P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)\right]\mathrm{d}x.$$

例1、求 $\int_L y^2 \mathrm{d}x$，其中 L：

(1) 以原点为圆心，a 为半径，逆时针绕向的上半圆周.

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$ 的直线段.

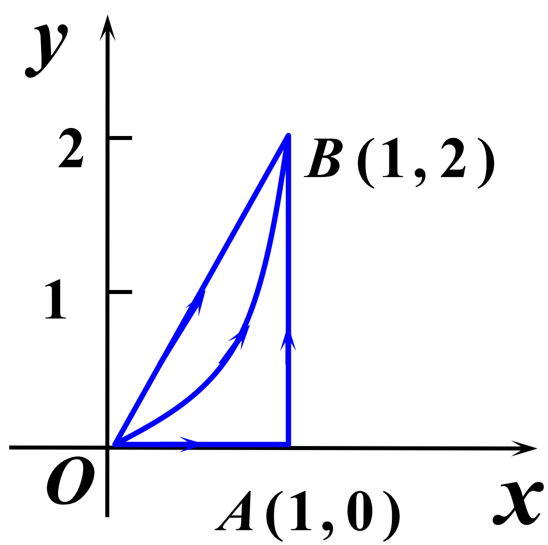


例2、求 $\int_L y\,dx + x\,dy$，其中 L：

(1) $y = 2x^2$ 上从 $O(0,0)$ 到 $B(1,2)$ 的一段弧；

(2) 沿直线段 $O(0,0)$ 到 $B(1,2)$；

(3) 沿着 $O(0,0) \to A(1,0) \to B(1,2)$ 的折线段．



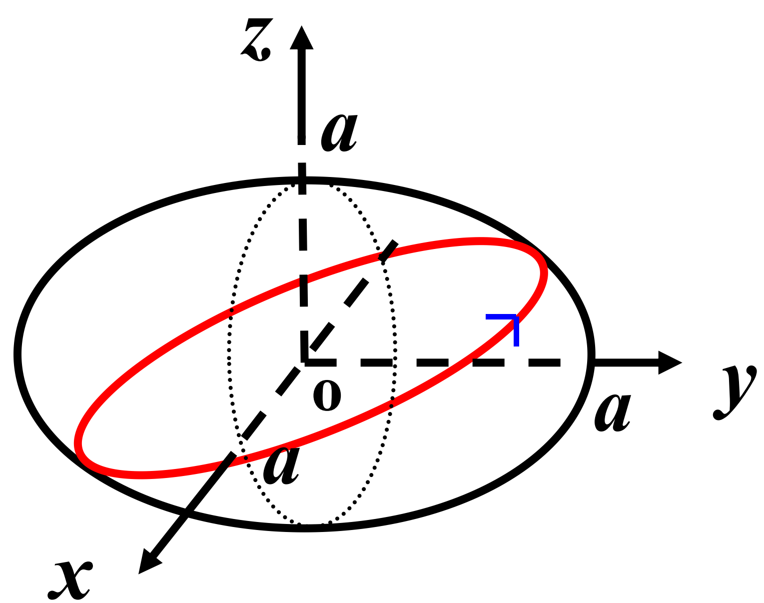
- 类似地, 可以定义三维向量值函数

$$\vec{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

在空间有向光滑曲线 L 上第二型曲线积分

$$\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

例3、设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $y=z$ 的交线，其方向按曲线依次经过 1,2,7,8 卦限，求 $\int_L xyz\mathrm{d}z$.

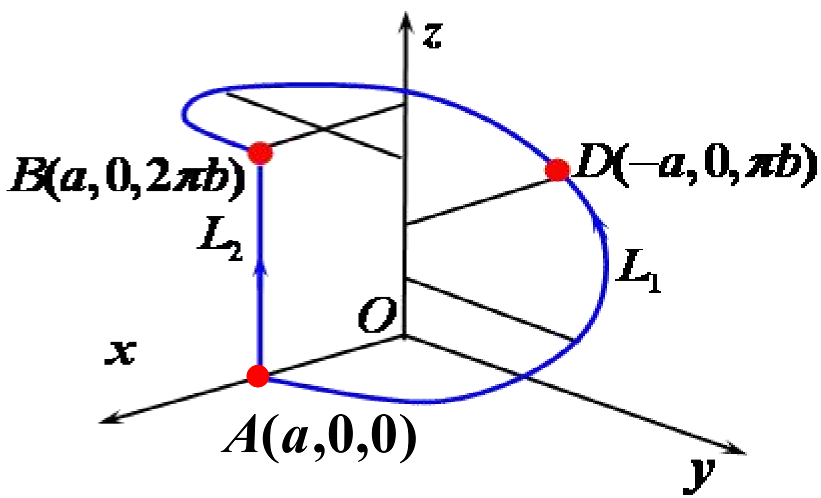


例4、求在力 $F(y,-x,x+y+z)$ 作用下,

(i)质点由 A 沿螺旋线 L_1 到 B 所作的功, 其中

$L_1: x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt, 0\le t\le 2\pi$;

(ii)质点由 A 沿直线 L_2 到 B 所作的功.

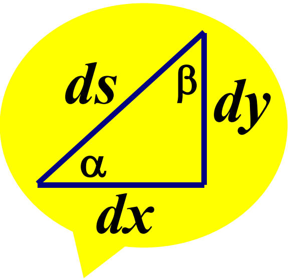


两类曲线积分之间的关系

设有向曲线 L 上任一点的切向量 (与 L 指向一致)

$\vec{\tau}=\vec{\tau}(x,y)$. 记 α,β 分别为 $\vec{\tau}$ 与 x 轴和 y 轴正方向

的夹角, 则



$$\mathrm{d}\vec{s}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)=(\cos\alpha\,\mathrm{d}s,\cos\beta\,\mathrm{d}s).$$

从而

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$
$$=\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]\,\mathrm{d}s.$$

例5、(1)证明曲线积分的估计式：

$$\left|\int_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y\right| \le LM,$$

其中 L 为 AB 的弧长，$M = \max\limits_{(x,y)\in AB} \sqrt{P^2+Q^2}$.

(2)利用上述不等式估计积分

$$I_R = \int_{x^2+y^2=R^2} \frac{y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2},$$

并证明 $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R = 0.$

作业

习题20-2： 1(2)(3)(5)、2