§ 21.2　直角坐标系下二重积分的计算

1 矩形区域上二重积分的计算

2 一般区域上二重积分的计算

一、矩形区域上二重积分的计算

定理1：设函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积, 且对任意 $x\in[a,b]$, 积分 $\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y$ 存在, 则累次积分

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y=\int_a^b\left(\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

也存在，且

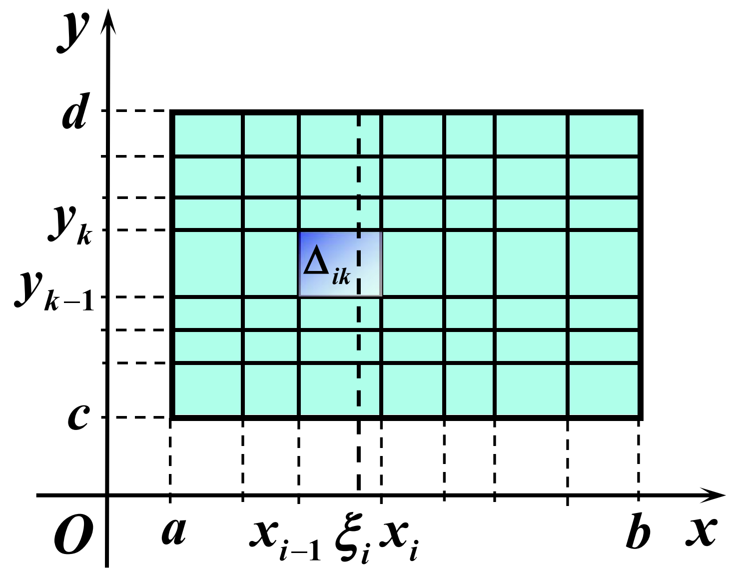
$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y.$$

- $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$

分割:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_r = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_s = d.$$



$$\Delta_{ik} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{k-1}, y_k].$$

$$M_{ik} = \sup\{ f(x,y) : (x,y) \in \Delta_{ik} \},$$

$$m_{ik} = \inf\{ f(x,y) : (x,y) \in \Delta_{ik} \}.$$

定理2: 设函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 $D=[a, b]\times[c, d]$ 上可积, 且对任意 $y\in[c, d]$, 积分 $\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x$ 存在, 则累次积分

$$\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x=\int_c^d\left(\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

也存在，且

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x.$$

注： 当 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续时，则有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

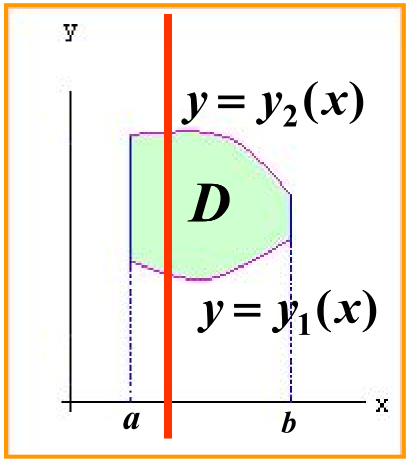
例1、 计算 $\iint_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=[0,1]\times[0,1]$.

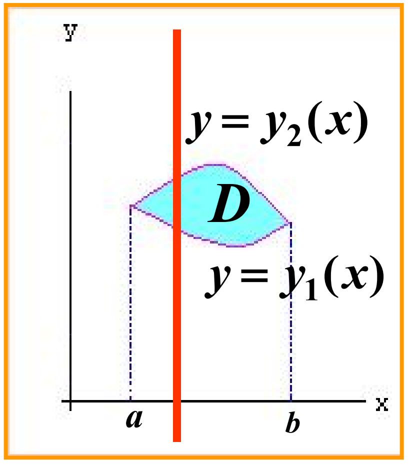
二、一般区域上二重积分的计算

1、x 型区域

$$D=\{(x,y): y_1(x)\le y\le y_2(x),\ a\le x\le b\}.$$

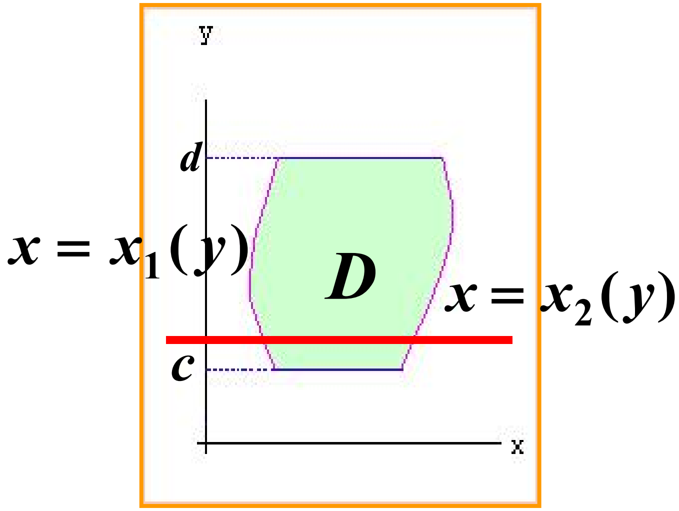
特点： 穿过 D 的内部且垂直于 x 轴的直线与 D 的边界至多交于两点 .

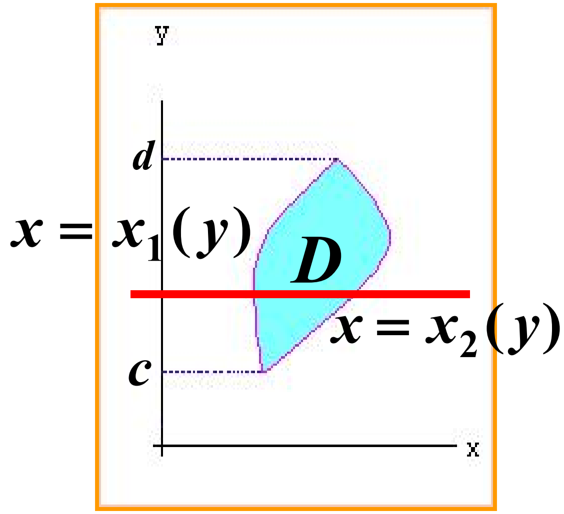




2、y 型区域

$$D = \{(x, y) : x_1(y) \le x \le x_2(y), c \le y \le d\};$$





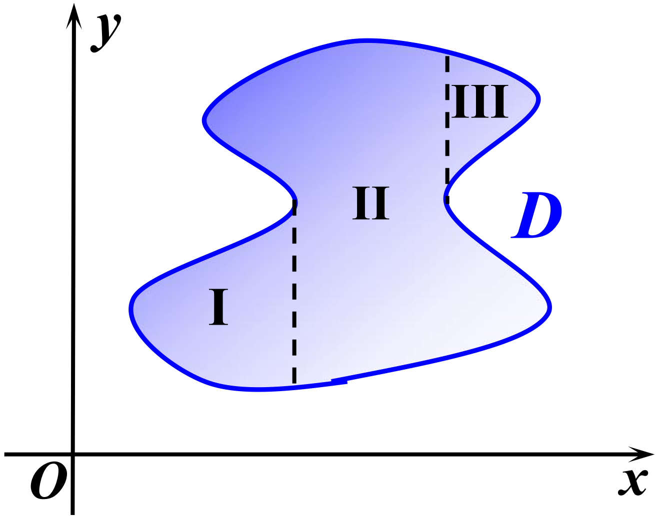
特点： 穿过 D 的内部且垂直于 y 轴的直线与 D 的边界至多交于两点．

3、积分区域既不是 x 型，也不是 y 型，

$$D = \mathrm{I} \cup \mathrm{II} \cup \mathrm{III}$$

由积分的区域可加性，得

$$\iint\limits_{D} = \iint\limits_{I} + \iint\limits_{II} + \iint\limits_{III}.$$

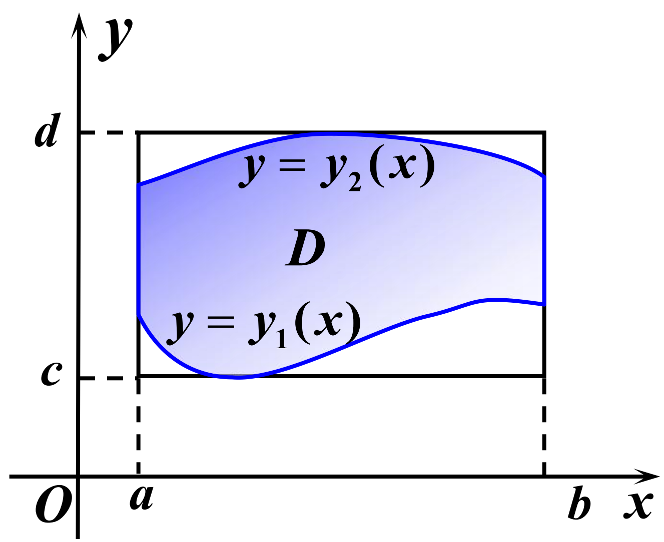


定理3： 若函数 $f(x, y)$ 在 x 型区域

$$D = \{(x, y): y_1(x) \le y \le y_2(x), a \le x \le b\}$$

上连续，其中 $y_1(x), y_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y.$$



同样地：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$= \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

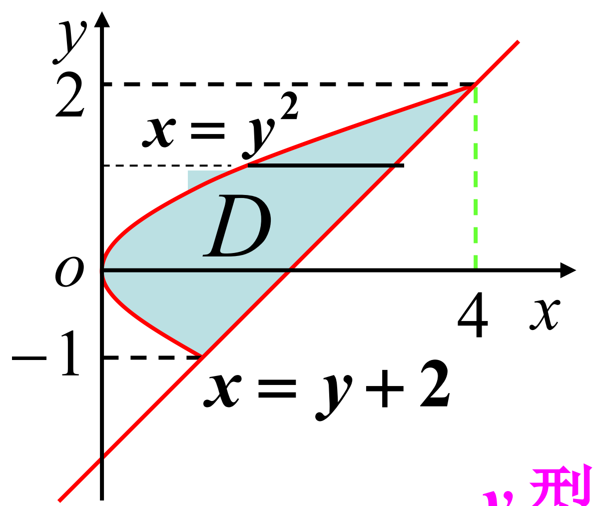
计算二重积分的步骤：

（1）画出积分区域 D；

（2）选择恰当的积分区域类型； x 型、y 型区域

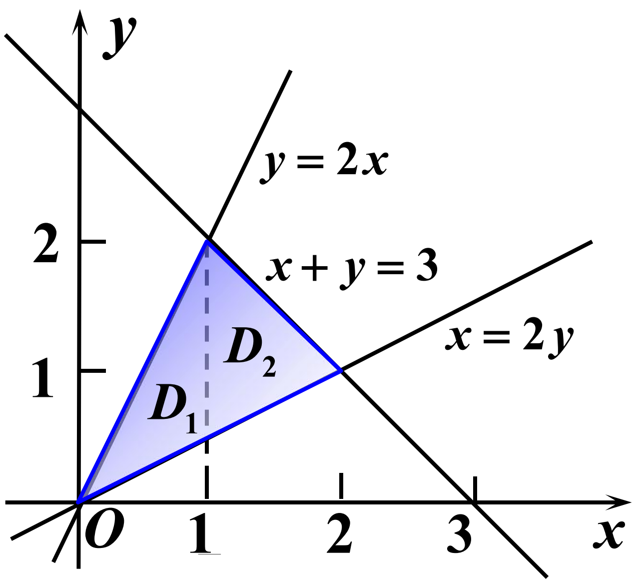
（3）定出积分限，通过累次积分求出二重积分。

例2、计算 $\iint\limits_D xy\,dxdy$，其中 D 为直线 $x-y-2=0$ 与抛物线 $y^2=x$ 所围成的区域 .



y 型区域

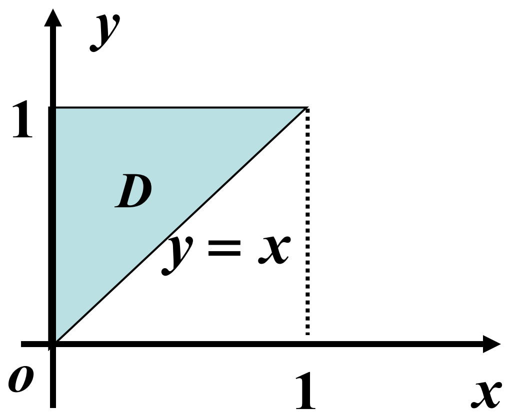
例3、 计算 $\iint\limits_D dxdy$，其中 D 是由直线 $y=2x$，$x=2y$ 和 $x+y=3$ 围成.



非 x 型和 y 型区域

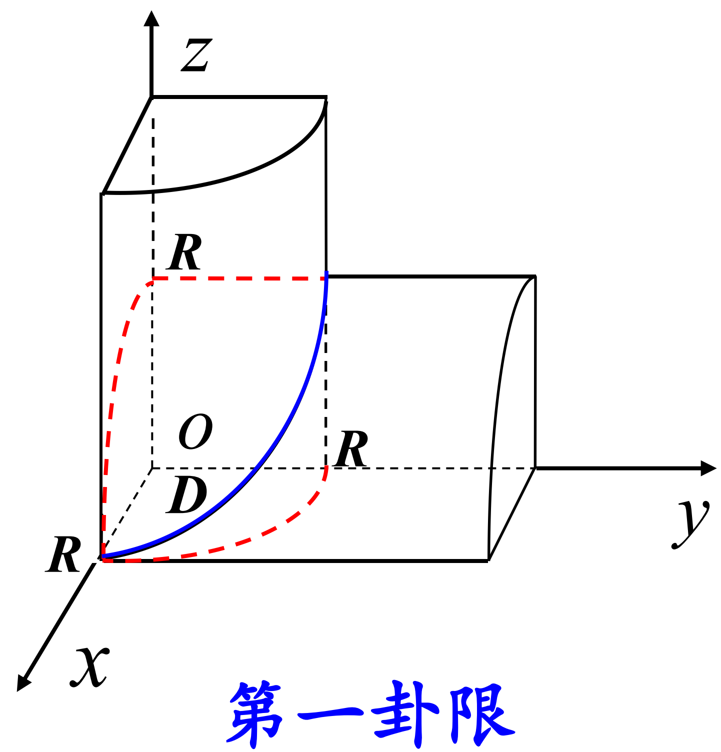
例4、计算 $\iint\limits_D x^2 e^{-y^2} d\sigma$，其中 D 由直线 $x=0, y=1$

及 $y=x$ 围成.



● 当 $f(x,y)\geq 0$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = V_{\text{曲顶柱体}}$.

例5、求曲面 $x^2+y^2=R^2$ 与 $x^2+z^2=R^2$ 所围成的立体体积.

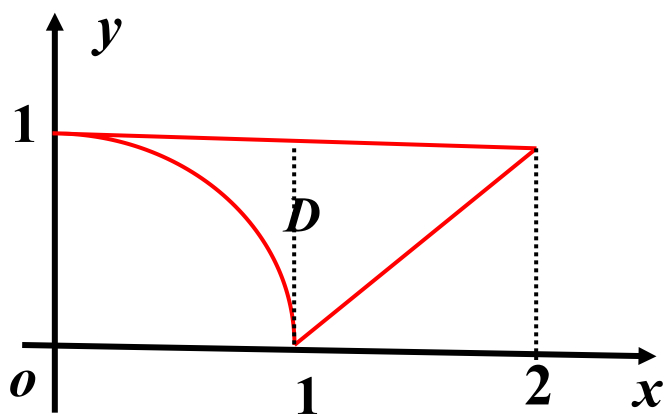


✦ 画出投影区域，找出曲顶.

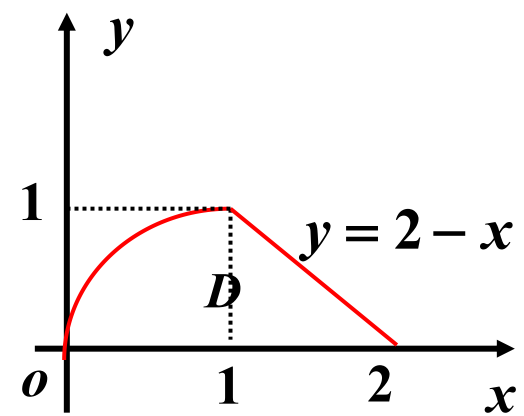
例6、交换下列累次积分的次序。

(1) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{y+1} f(x,y)dx$；

(2) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$.



（1）



（2）

作业

习题21-2：2(3)(4)、3(2)(4)