§21.5 三重积分

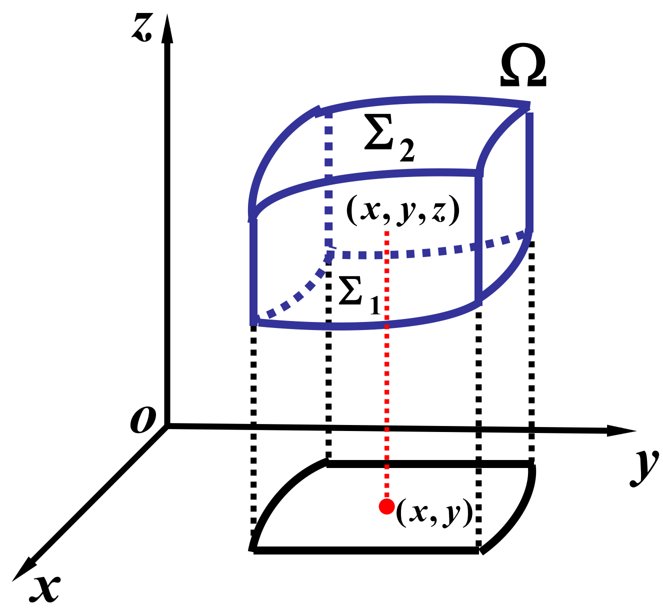
1 三重积分的概念

2 化三重积分为累次积分

3 三重积分换元法

一、三重积分的概念

设一物体占有空间中有 界闭区域 V,密度为 $f(x,y,z)$,求物体的质量 M .



- 用光滑的曲面网 T 将 V 分成 n 个小区域:

$$V_1, V_2, \cdots, V_n .$$

ΔV_i : V_i 的体积 .

$\|T\| = \max\limits_{1 \le i \le n}\{ V_i$ 的直径 $\}$.

任取 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in V_i$,

$$M = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \Delta V_i$$

定义1: 设 $f(x,y,z)$ 定义在空间有界闭区域 V 上, 若对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对于 V 的任何分割 T, 只要 $\|T\|<\delta$, 属于 T 的所有积分和都满足

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i - J\right| < \varepsilon,$$

则称 $f(x,y,z)$ 在 V 上可积, 并称数 J 为 $f(x,y,z)$ 在 V 上的三重积分, 记作

$$J=\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}V \quad \text{或} \quad J=\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

注1: 若 $f(x,y,z)\equiv 1$, $\iiint\limits_V \mathrm{d}V$ 等于立体 V 的体积.

注2: 若 $f(x,y,z)$ 在 V 上连续, 则 $f(x,y,z)$ 在 V 上可积.

二、化三重积分为累次积分

1. 坐标面投影法

定理1： 若函数 $f(x,y,z)$ 在长方体区域

$$V=[a,b]\times[c,d]\times[e,h]$$

上的三重积分存在, 且对 $\forall(x,y)\in D=[a,b]\times[c,d]$,

$$g(x,y)=\int_e^h f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

存在, 则积分

$$\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_e^h f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,.$$

也存在, 且

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_e^h f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

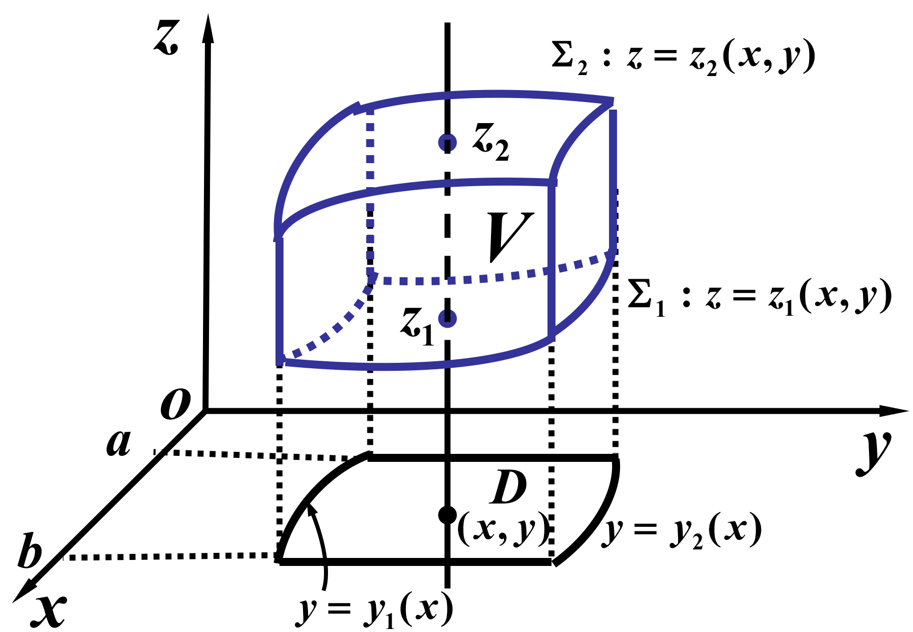
注：若 $f(x,y,z)$ 在 V 上连续，则上面的等式成立.

设有界闭区域

$$V=\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),(x,y)\in D\}.$$

D : V 在 xoy 平面上的投影区域 .

特点： 过区域 V 内部任一点作垂直于 xoy 平面的直线与 V 的边界至多交于两点.



推论1：若有界闭区域

$$V=\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),(x,y)\in D\},$$

$z_1(x,y)$ 与 $z_2(x,y)$ 在 D 上连续, $f(x,y,z)$ 在 V 上的三重积分存在, 且对 $\forall(x,y)\in D$,

$$g(x,y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

存在, 则积分

$$\iint\limits_{D} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_1(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

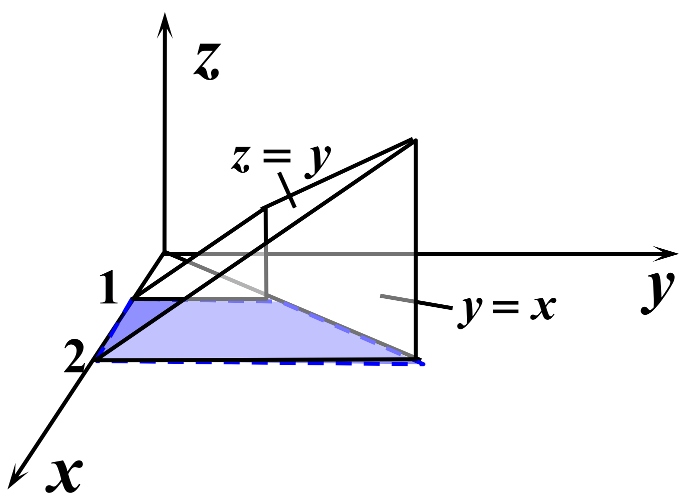
也存在, 且

$$\iiint\limits_{V} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z.$$

注：设 $D = \{(x, y) \mid y_1(x) \le y \le y_2(x), a \le x \le b\}$,则

$$\iiint\limits_{V} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z.$$

例1、计算 $\iiint\limits_V \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 V 是由平面 $x=1$, $x=2$, $y=0$, $y=x$, $z=0$ 与 $z=y$ 所围成的闭区域 .



例2、计算 $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 V 是由

$\begin{cases} z=y \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与 $z=1$

所围的区域.

2、坐标轴投影法（截面法）

定理2：若函数 $f(x,y,z)$ 在长方体区域

$$V=[a,b]\times[c,d]\times[e,h]$$

上的三重积分存在，且对 $\forall z\in[e,h]$,

$$I(z)=\iint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

存在，其中 $D=[a,b]\times[c,d]$，则积分

$$\int_e^h I(z)\,\mathrm{d}z=\int_e^h\mathrm{d}z\iint_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

也存在, 且

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_e^h \mathrm{d}z \iint\limits_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

注: 若 $f(x,y,z)$ 在 V 上连续, 则上面的等式成立.

推论2: 设有界闭区域 $V \subset [a,b]\times[c,d]\times[e,h]$,

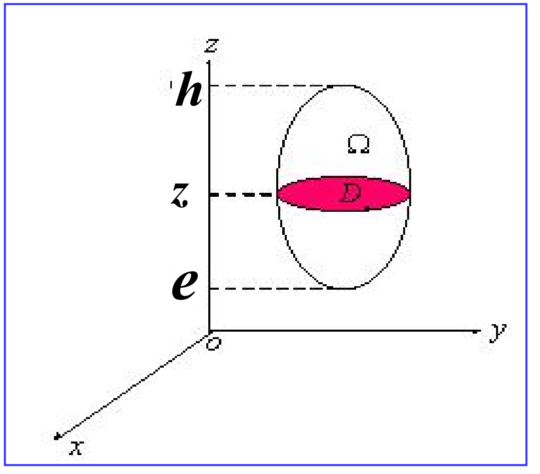
若 $f(x,y,z)$ 在 V 上的三重积分存在，且对

$\forall z \in [e,h]$, 积分

$$I(z) = \iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

存在, 其中

$$D_z = \{(x,y) \mid (x,y,z) \in V\}.$$



则

$$\int_e^h I(z)\,\mathrm{d}z = \int_e^h \mathrm{d}z \iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

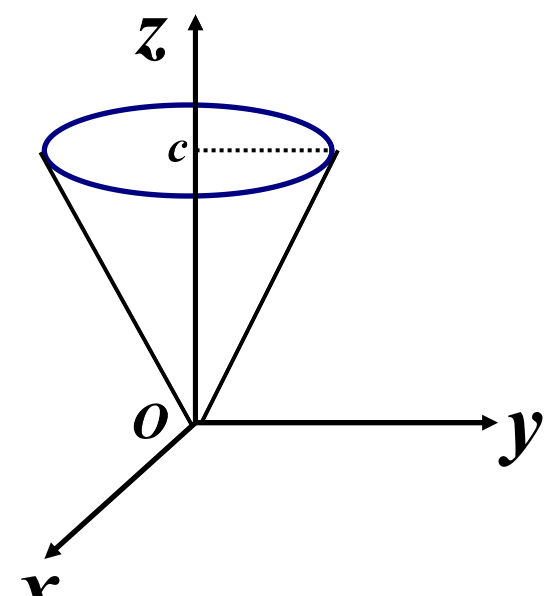
也存在，且

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_e^h \mathrm{d}z \iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

例3、求 $\iiint\limits_V z^2 dxdydz$，其中 V 为上半锥面

$$\left(\frac{z}{c}\right)^2=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2 \quad (z\geq 0),(a,b,c>0)$$

与平面 $z=c$ 所围成的闭区域 .



三、三重积分换元法

定理2：（三重积分的变量变换法）

设 $f(x,y,z)$ 在 xyz 平面上的有界闭区域 V 上可积，

$$T: x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$$

将uvw平面上的闭区域 Δ 映成区域 V，且：

(1) 变换是 $T:\Delta \to V$ 是一一对应;

(2) $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w) \in C^{(1)}(\Delta)$;

(3) $J(u,v,w) = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0 \ (\forall (u,v,w) \in \Delta)$. 则

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

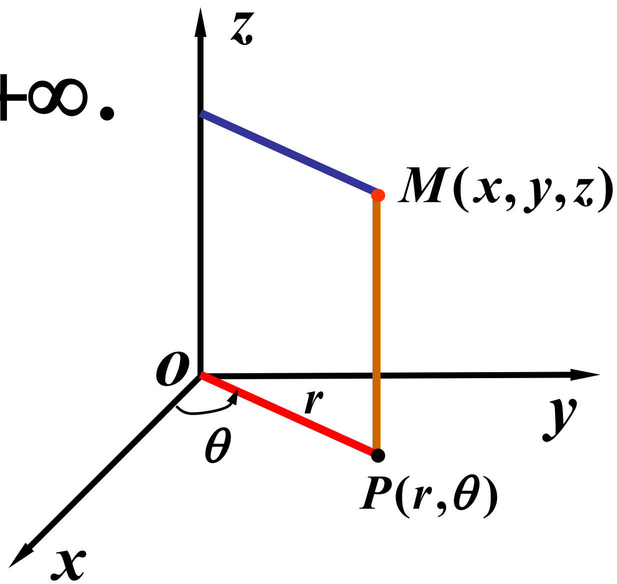
$$\iiint_\Delta f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|J(u,v,w)\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

1、利用柱面坐标计算三重积分

设点 $M(x,y,z)$ 在 xoy 面的投影 P 的极坐标为 (r,θ)，则称 (r,θ,z) 为点 M 的柱面坐标．

其中：$0 \le r < +\infty$，M 到 z 轴的距离；

$$0 \le \theta \le 2\pi; \quad -\infty < z < +\infty.$$



柱面坐标与直角坐标的关系：

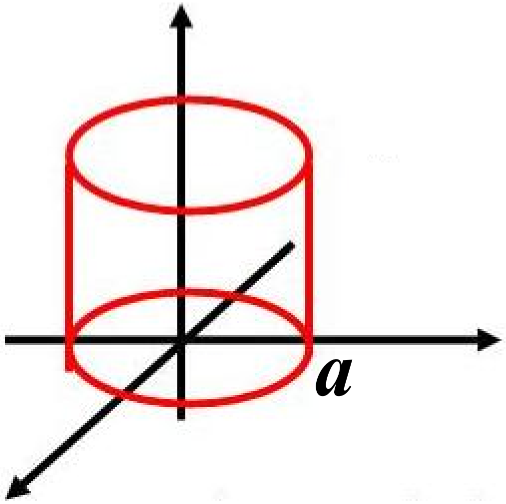
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \quad J(r,\theta,z) = r. \\ z = z \end{cases}$$

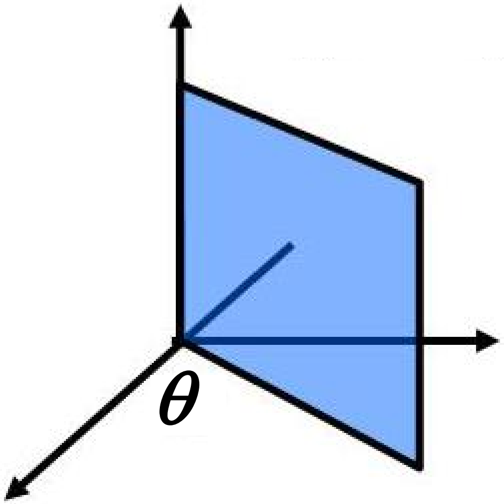
坐标面分别为:

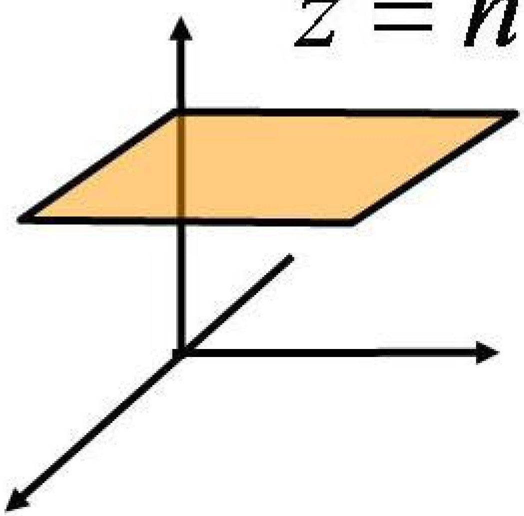
$r=$ 常数 ⟶ 柱面

$\theta=$ 常数 ⟶ 半平面

$z=$ 常数 ⟶ 平面





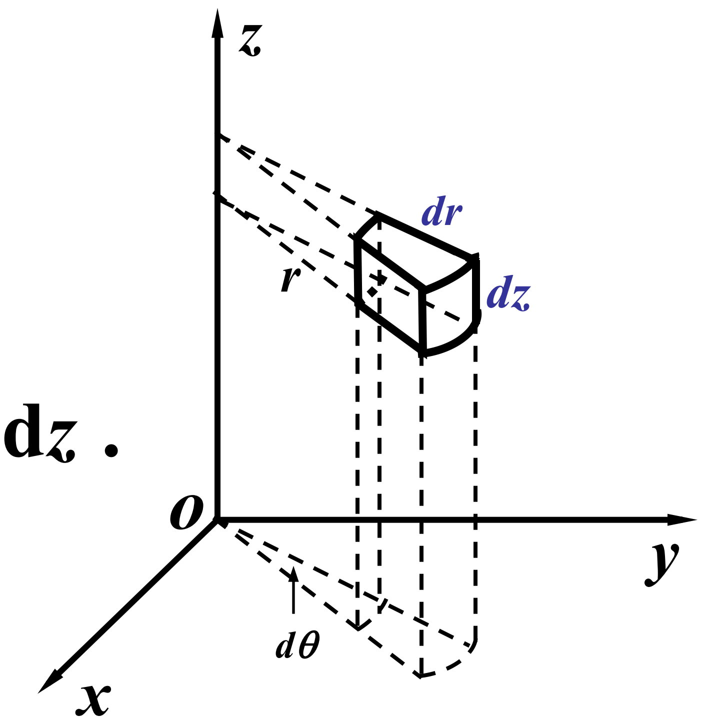


柱面坐标系中的体积元素：

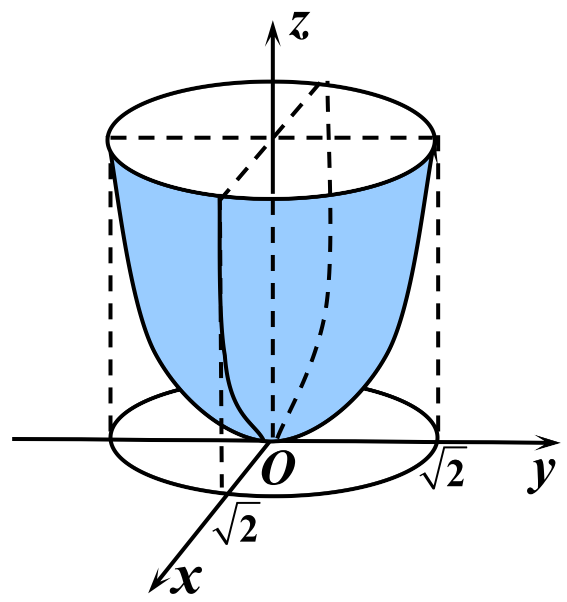
$$dV = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,,$$

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

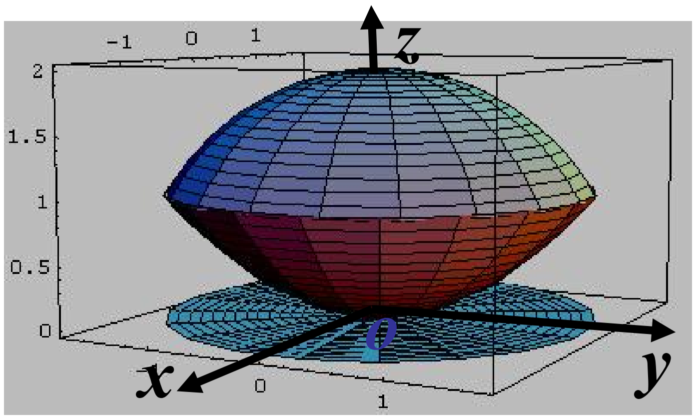
$$= \iiint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,.$$



例4、求 $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$，其中 V 是由曲面 $z=2(x^2+y^2)$ 与平面 $z=4$ 所围成的立体．

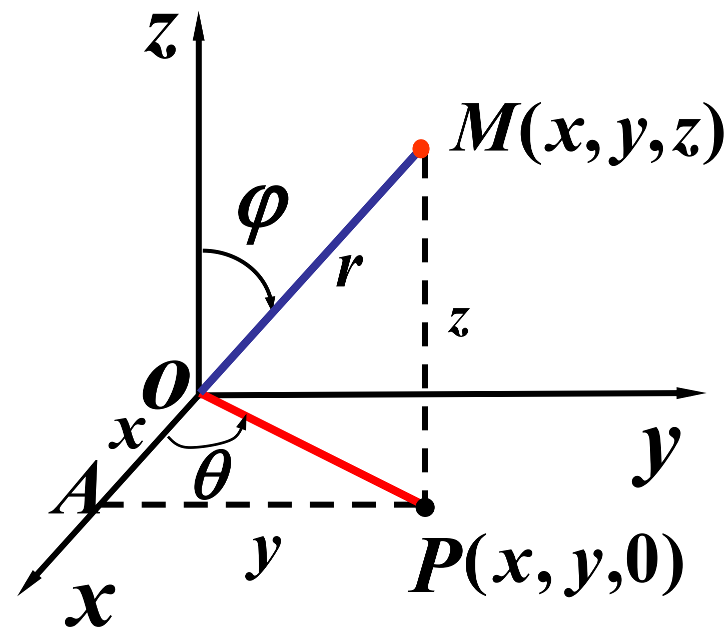


例5、求 $\iiint\limits_V z\,dxdydz$，$V$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围成的立体．



2、利用球面坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)$ 为空间一点，M 的球面坐标 (r,θ,φ) 表示：



$r = |\overrightarrow{OM}|$，$(0 \le r < +\infty)$；

$\varphi : \overrightarrow{OM}$ 与 z 轴正向的夹角，

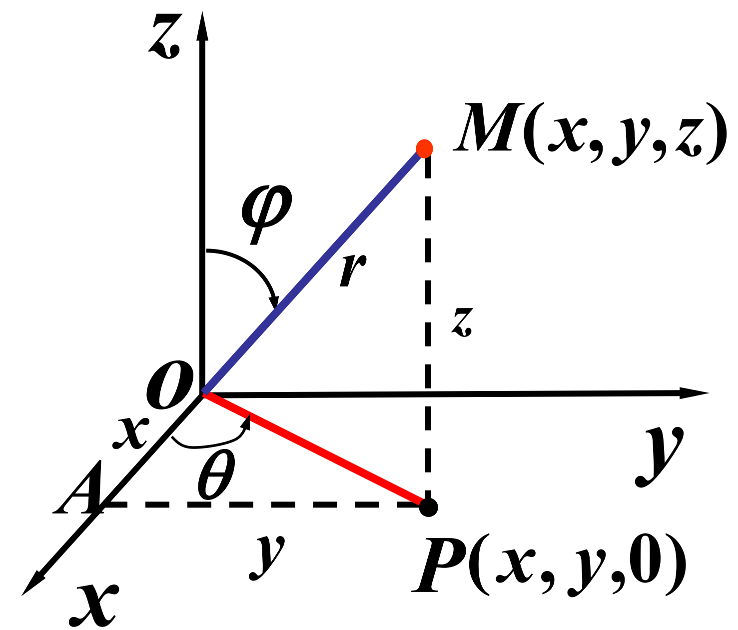
$(0 \le \varphi \le \pi)$.

$\theta : \overrightarrow{OP}$ 与 x 轴正向的夹角，

$(0 \le \theta \le 2\pi)$；

球面坐标与直角坐标的关系：

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$



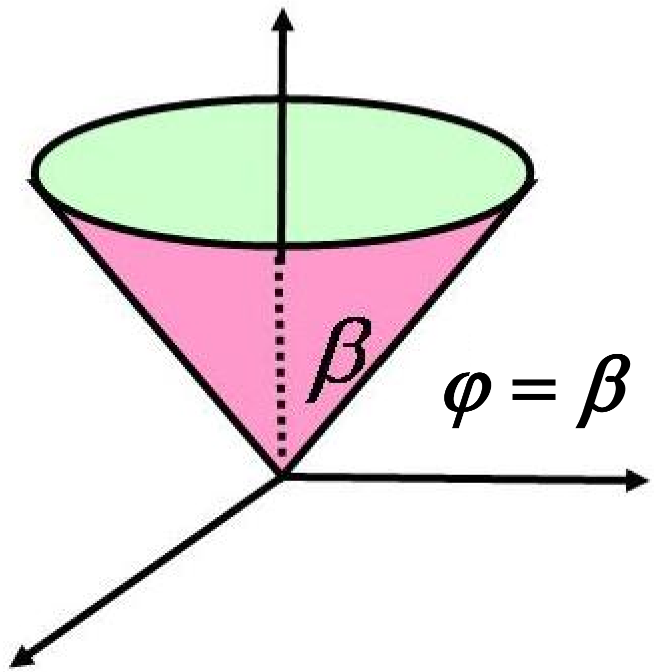
$$J(r,\varphi,\theta) = r^2\sin\varphi.$$

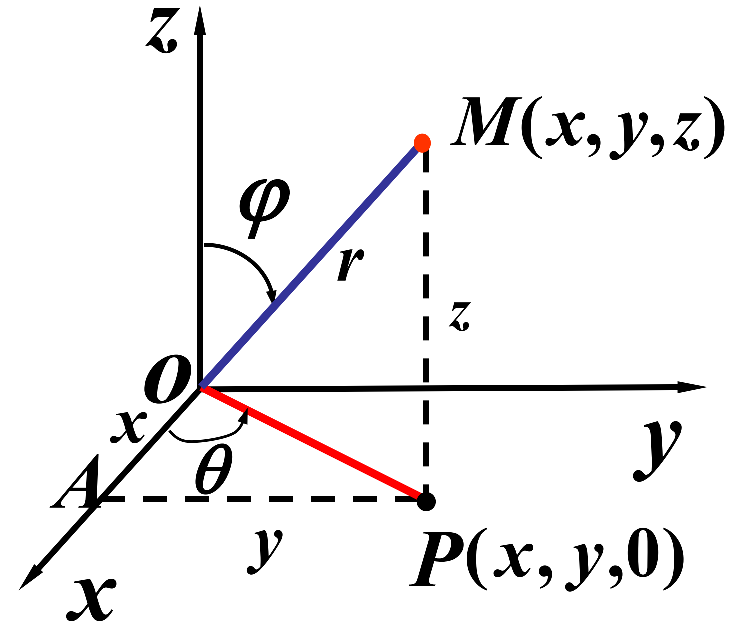
坐标面分别为:

$r =$ 常数 ⟶ 球面

$\theta =$ 常数 ⟶ 半平面

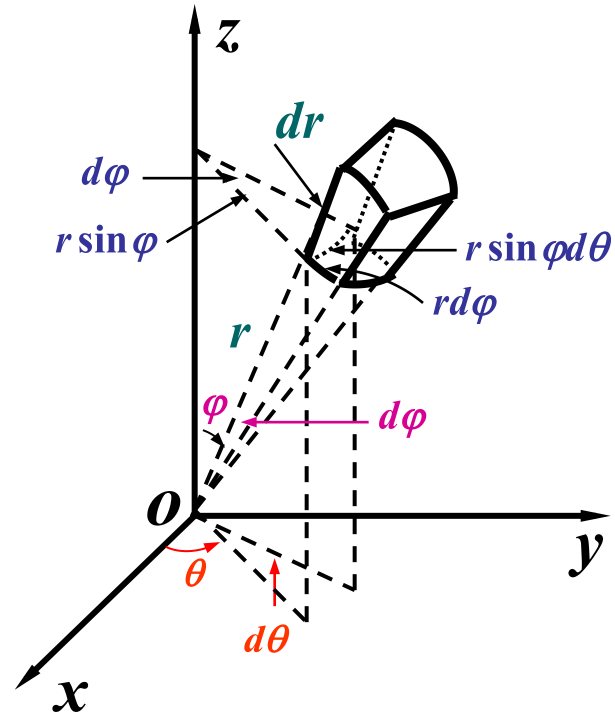
$\varphi =$ 常数 ⟶ 锥面





球面坐标系中的体积元素：

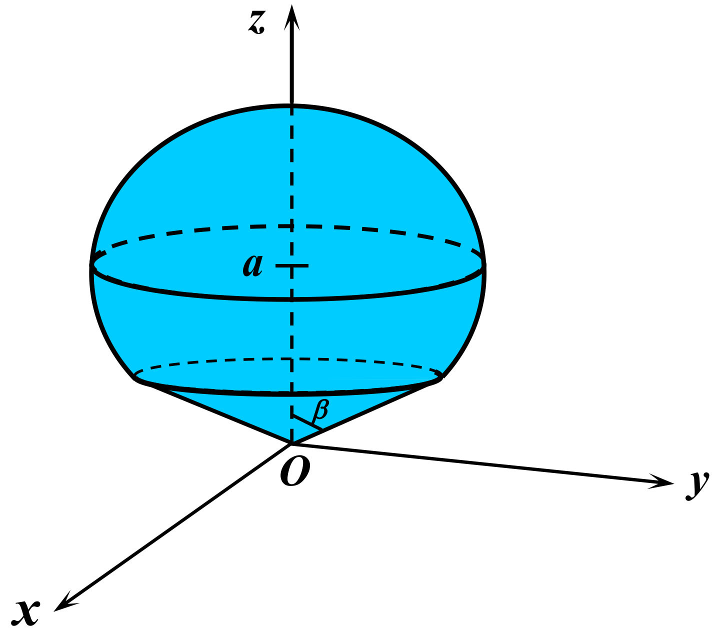
$$dV = r^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta,$$



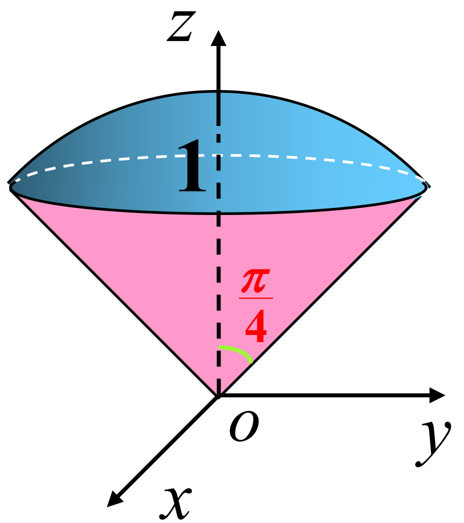
$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\iiint_{\Delta} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta.$$

例6、求球面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 与以 z 轴为轴，半顶角为 β 的圆锥面所围立体的体积.



例7、求$\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz$，其中$\Omega$是由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=1$所围成的闭区域.



作业

习题21-5：1(3)、3(1) 、4(1)