§ 21.6　重积分的应用

1 曲面的面积

2 质（重）心 *

3 转动惯量 *

4 引力 *

一、曲面的面积

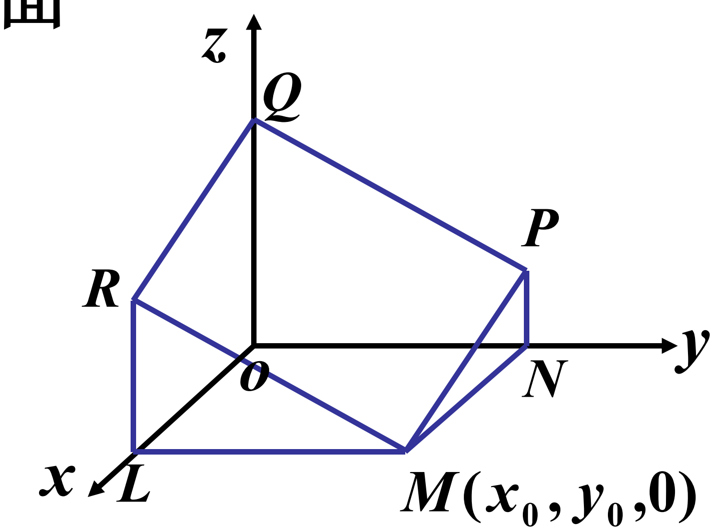
1、平面图形的面积与其在xoy面投影面积的关系

例1、设一个平行四边行的法 向量为$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，

证明其面积 S 与它在xoy平面

上的投影面积 σ 满足

$$S=\frac{1}{|\cos\gamma|}\sigma .$$



注： 上述结论对空间中任一平面图形均成立，即

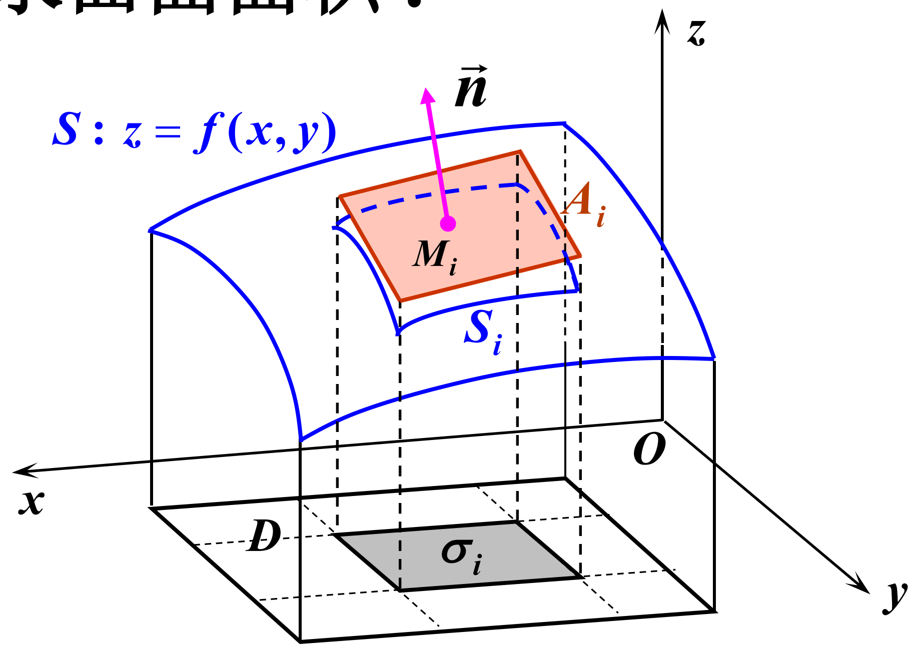
设一个平面法向量为 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$,则

其面积 S 与它在 xoy 平面上的投影面积 σ 满足

$$S = \frac{1}{|\cos\gamma|}\sigma .$$

2、空间有界曲面的面积

设曲面 $\Sigma : z = z(x, y) \in C^1(D)$，其中 D为 xoy平面的有界闭区域，求曲面面积.



$$\Delta S_i \approx \Delta A_i = \frac{1}{|\cos\gamma_i|} \Delta\sigma_i$$

$$|\cos\gamma_i| = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2(\xi_i, \eta_i) + z_y^2(\xi_i, \eta_i)}}$$

曲面的面积公式：$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, d\sigma$

$$= \iint\limits_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$$

其中 D 是曲面 Σ 在 xoy 平面的投影区域 .

例2、求圆锥 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 含在圆柱体 $x^2+y^2\le x$ 内的那部分面积.

例3、求由曲面 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $x^2+y^2=az$ 所围立体的表面积.

作业

习题21-6 ：1、2

二、质(重)心 *

- 设 xoy 面上的 n 个质点 分别位于 $(x_1, y_1), \cdots,$ (x_n, y_n) 处，质量分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$.

质点系的质心：

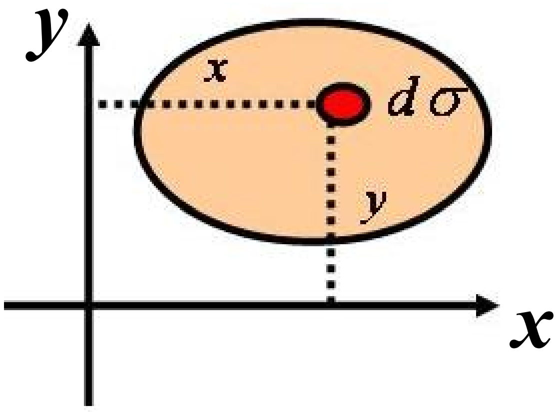
$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

称：M_x 为质点系对 x 轴的静矩；

M_y 为质点系对 y 轴的静矩 .

- 设一平面薄片占有 xoy 面上的有界闭区域 D，其面密度为$\mu(x,y)\in C(D)$，求其质心？

元素法：



$$dM_x = y\mu(x,y)d\sigma,$$

$$dM_y = x\mu(x,y)d\sigma.$$

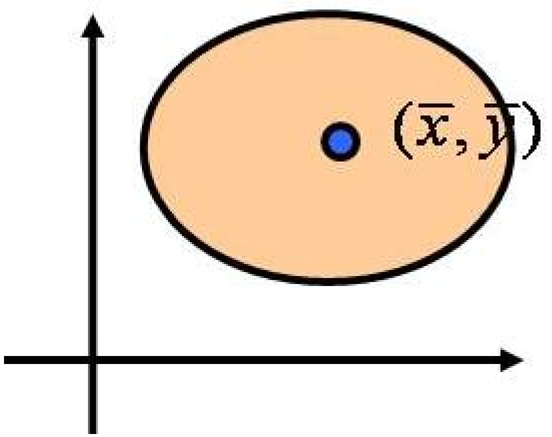
薄片对 x 轴的静矩：$M_x = \iint_D dM_x = \iint_D y\mu(x,y)d\sigma$.

薄片对 y 轴的静矩：$M_y = \iint_D dM_y = \iint_D x\mu(x,y)d\sigma$.

- 设一平面薄片占有 xoy 面上的有界闭区域 D，其面密度为 $\mu(x,y)\in C(D)$，求其质心?

薄片的质心：

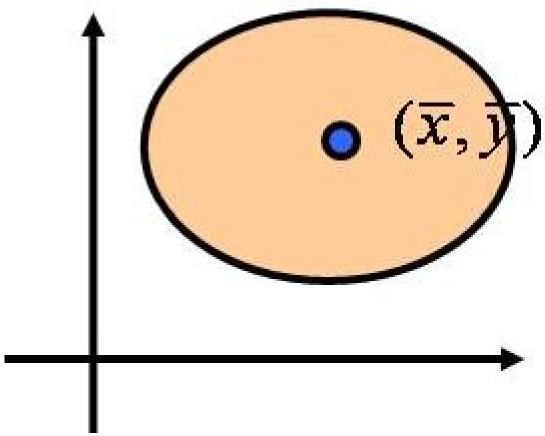
$$\overline{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint\limits_D x\mu(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \mu(x,y)d\sigma},$$



$$\overline{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_D y\mu(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D \mu(x,y)d\sigma}.$$

● 当薄片是均匀的，

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint_D x d\sigma,\quad \bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y d\sigma .$$

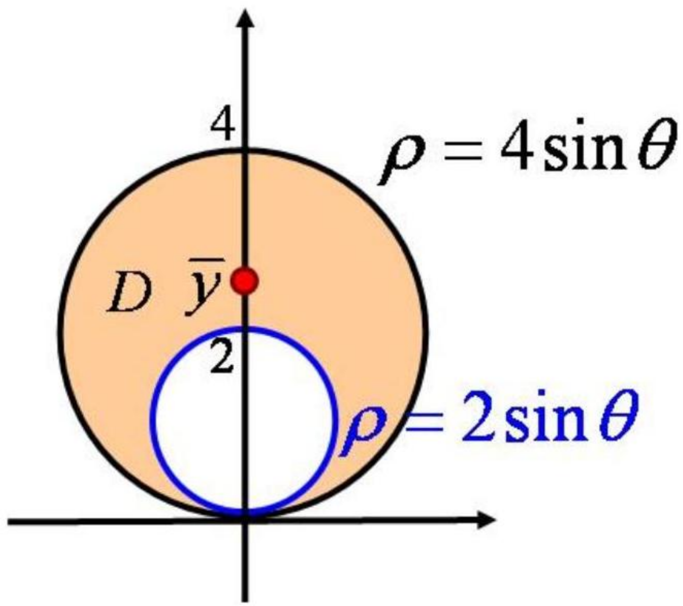


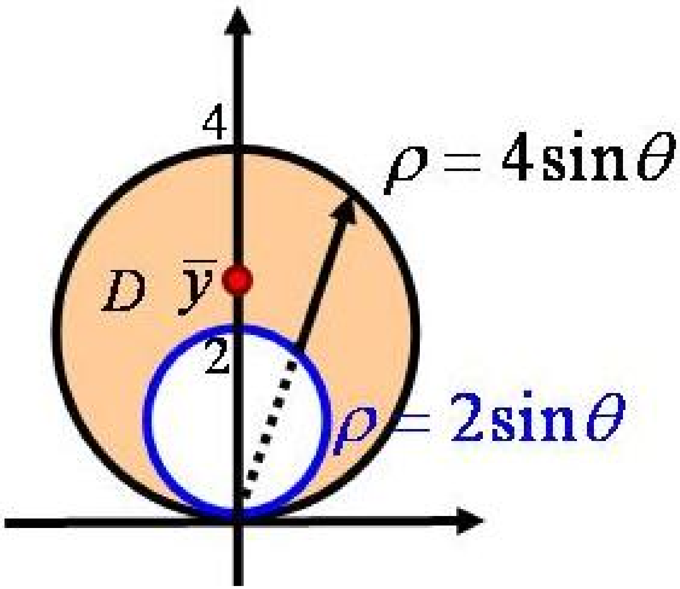
其中 $A=\iint_D d\sigma$ 为薄片的面积 .

均匀薄片的质心称为形心。

注：质心和形心的结论可推广到空间有界闭区域上。

例4、求位于两圆 $\rho = 2\sin\theta$ 和 $\rho = 4\sin\theta$ 之间的均匀薄片的质心 .





例5、求半径为 a 的均匀半球体的形心．

注：关于三重积分中对称性的应用。

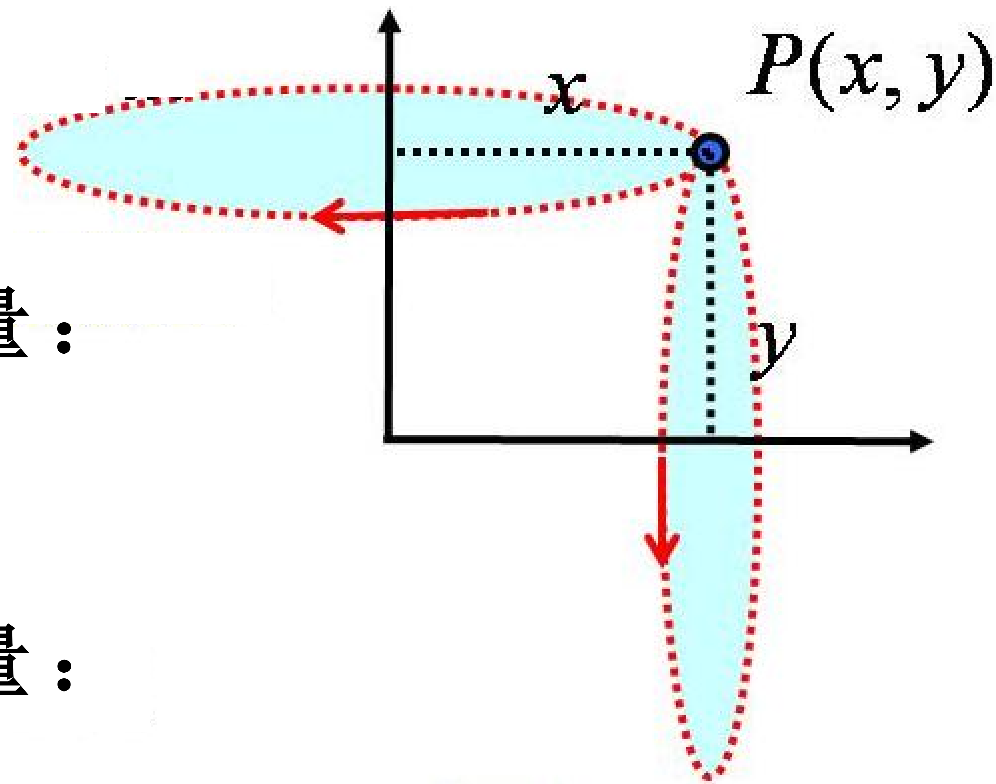
当区域 Ω 关于 yoz 平面对称时：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV = \begin{cases} 0, & f(-x,y,z) = -f(x,y,z); \\ 2\iiint\limits_{\Omega_1}, & f(-x,y,z) = f(x,y,z). \end{cases}$$

其中 Ω_1 是 Ω 位于 yoz 平面上右部分的区域．

三、转动惯量 *

质量为 m 的质点位于点 $P(x, y)$ 处.



质点对 x 轴的转动惯量：

$$I_x = y^2 m.$$

质点对 y 轴的转动惯量：

$$I_y = x^2 m.$$

- 设 xoy 面上的 n 个质点 分别位于 $(x_1, y_1), \cdots,$ (x_n, y_n) 处，质量分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，则该质点系对 x 轴和 y 轴的转动惯量分别为：

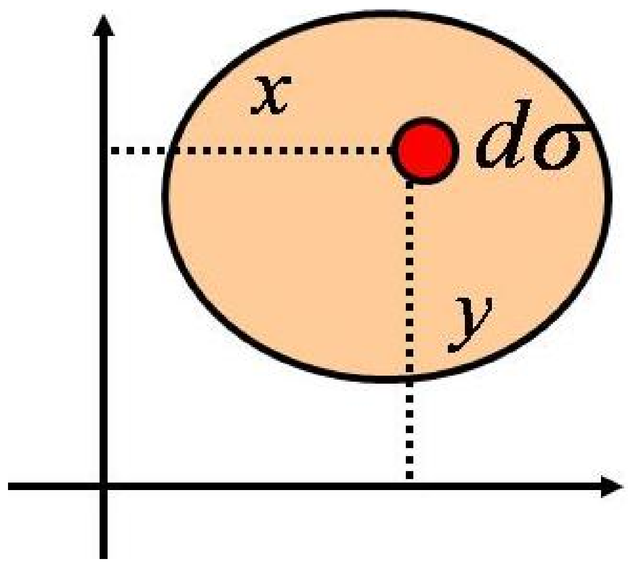
$$I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2,$$

$$I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2.$$

- 设一平面薄片,占有 xoy 面上的有界闭区域 D,其面密度为 $\mu(x,y)\in C(D)$,求平面薄片对 x 轴和 y 轴的转动惯量？

$$dI_x = y^2\mu(x,y)d\sigma,$$

$$dI_y = x^2\mu(x,y)d\sigma.$$



平面薄片对 x 轴和 y 轴的转动惯量分别为:

$$I_x = \iint_D y^2\mu(x,y)d\sigma, \qquad I_y = \iint_D x^2\mu(x,y)d\sigma.$$

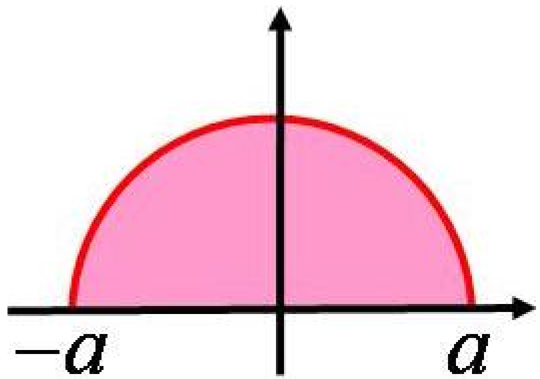
推广到三维空间的情形有：

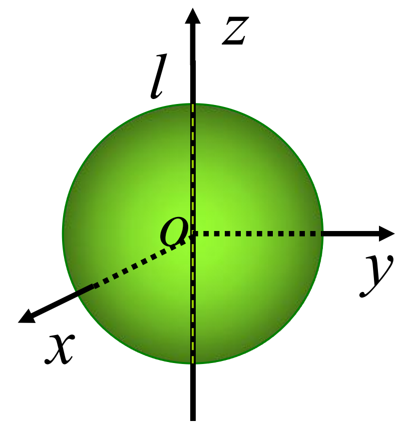
$$I_x = \iiint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dV,$$

$$I_y = \iiint\limits_{\Omega} (z^2 + x^2)\mu(x, y, z)dV,$$

$$I_z = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\mu(x, y, z)dV.$$

例6、求半径为 a, 面密度为常量 μ 的均匀半圆薄片对于其直径的转动 惯量.





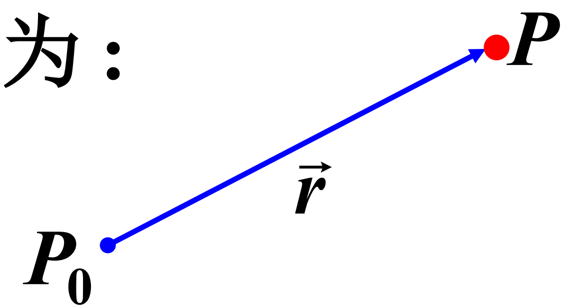
例7、求密度为 μ 的均匀球体对于过球心 的一条轴 l 的转动惯量.

球体的质量

$$M = \frac{4}{3}\pi a^3 \mu$$

四、引力 *

位于点 $P(x,y,z)$ 处质量为 m 的质点对 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处单位质点的引力为：

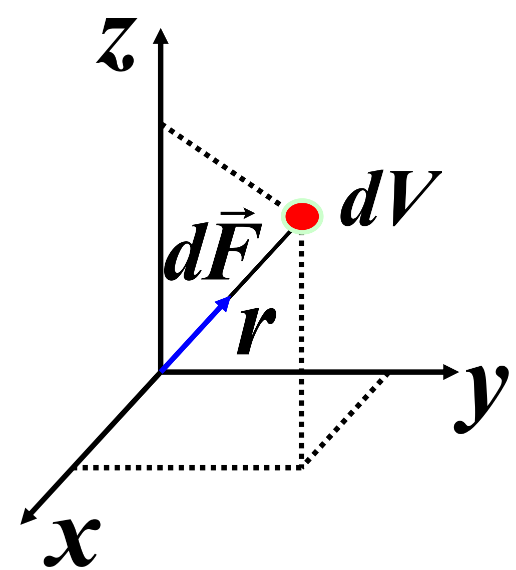


$$\vec{F}=\frac{Gm}{r^2}\vec{e}_r=\frac{Gm}{r^3}\vec{r}$$

$$=\left(\frac{G(x-x_0)m}{r^3},\frac{G(y-y_0)m}{r^3},\frac{G(z-z_0)m}{r^3}\right)$$

其中 $r=\left|\overrightarrow{P_0P}\right|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$

- 求体密度为 $\mu(x,y,z)\in C(\Omega)$的物体对点 (x_0,y_0,z_0)处单位质量的引力？



用元素法求引力分量：

$$d\vec{F}_x=\frac{G\mu(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}dV,$$

则 $$\vec{F}_x=\iiint_{\Omega}\frac{G\mu(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}dV,$$

同理得： $\vec{F}_y$, $\vec{F}_z$.

故 $\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)$，其中：

$$\begin{cases}\vec{F}_x=\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{G\mu(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}dV,\\ \vec{F}_y=\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{G\mu(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}dV,\\ \vec{F}_z=\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{G\mu(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}dV.\end{cases}$$

特别地，面密度为 $\mu(x,y)\in C(D)$ 的物体对薄片外一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的单位质点的引力：

$\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)$，

其中：

$$\begin{cases} F_x=\iint\limits_D \dfrac{G\mu(x,y)(x-x_0)}{r^3}\,d\sigma, \\ F_y=\iint\limits_D \dfrac{G\mu(x,y)(y-y_0)}{r^3}\,d\sigma, \\ F_z=\iint\limits_D \dfrac{G\mu(x,y)(0-z_0)}{r^3}\,d\sigma. \end{cases}$$

例8、 设面密度为常量 μ 的均匀圆形薄片占有

$$D=\{(x,y,0)\mid \sqrt{x^2+y^2}\le R^2\},$$

求它对位于 z 轴上点 $M_0(0,0,a)(a>0)$ 处单位质点的引力.