第二十章　曲线积分

1 第一型曲线积分

2 第二型曲线积分

§ 20.1　第一型曲线积分

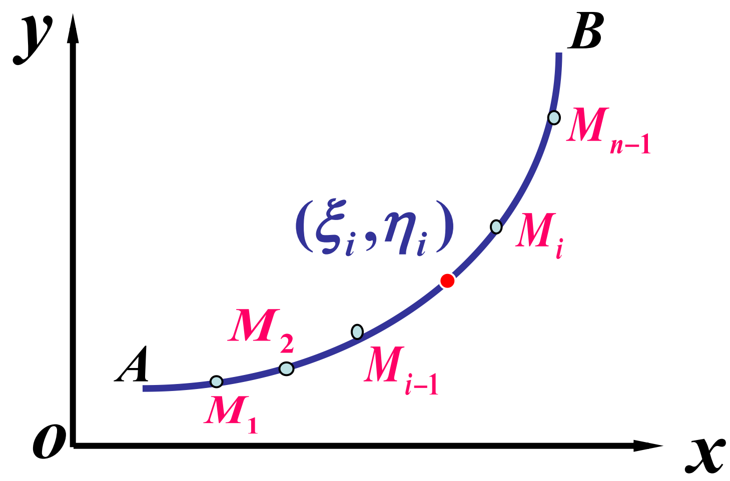
1 第一型曲线积分的背景

2 第一型曲线积分的定义

3 第一型曲线积分的计算

一、第一型曲线积分的背景

1、曲线型物体的质量



设物体的线密度为$\rho(x,y)$

密度均匀：$M=\rho\cdot s$

(1) 分割：用点$M_1,\cdots,M_{n-1}$分割曲线；

(2) 近似：$\Delta M_i\approx\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$；

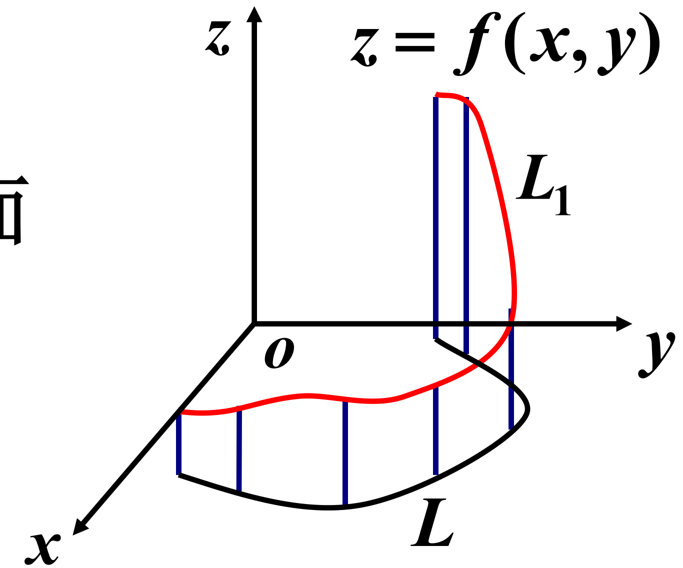
(3) 求和：$M=\sum_{i=1}^{n}\Delta M_i\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$；

(4) 取极限：$M=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$.

2、柱面的面积

设 $L: \varphi(x,y)=0 \longrightarrow$ 柱面

记 $L_1: \begin{cases} z=f(x,y) \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$,



- 求以 L 为准线，母线平行于 z 轴，高度为 $f(x,y)$ 的柱面的面积.

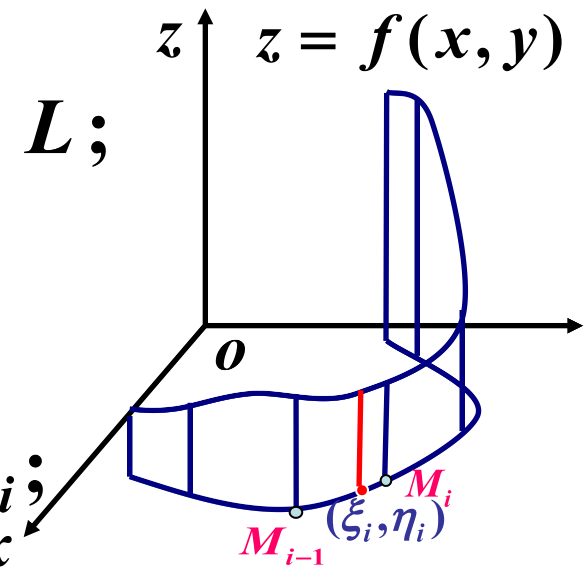
或柱面 $\varphi(x,y)=0$ 介于曲线 L 与 L_1 之间的面积.

(1) 分割：用点$M_1,\cdots,M_{n-1}$分割曲线 L；

(2) 近似：$\Delta A_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$；

(3) 求和：$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$；

(4) 取极限：$A=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$.



以上两个问题最终都归结为同一类和式的极限，

即第一型曲线积分。

二、第一型曲线积分的定义

定义：设 L 为平面上可求长的曲线弧，$f(x,y)$ 为定义在 L 上的有界函数．对曲线 L 作分割 T，将 L 分成 n 个可求长曲线段 $L_i(1\le i\le n)$，L_i 的弧长记为 Δs_i，分割 T 的细度为 $\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta s_i$，对任意 $(\xi_i,\eta_i)\in L_i$，若

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

存在，称此极限为数量值函数 $f(x,y)$在 L 上的第一型曲线积分，记为

$$\int_L f(x,y)ds.$$

注：同理可定义 $f(x,y,z)$ 在空间可求长曲线 L 上的第一型曲线积分：

$$\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta s_i$$

被积函数

积分和式

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s = \lim_{\|T\|\to 0} \boxed{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta s_i}.$$

积分弧段

性质（以二元函数为例）：

(1) 若 $f \in C(L)$, 则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 存在；

(2) 当 $f(x,y) \equiv 1$ 时, $\int_L \mathrm{d}s$ 等于曲线弧 L 的长度；

(3) 线性性：若 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$ 与 $\int_L g(x,y)\,\mathrm{d}s$ 存在，则

对任意 $\alpha,\beta\in R$，有

$$\int_L[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\mathrm{d}s=\alpha\int_L f(x,y)\mathrm{d}s+\beta\int_L g(x,y)\mathrm{d}s.$$

(4) 曲线弧可加性：若 $L = L_1 + L_2$, 且

$$\int_{L_i} f(x, y)\,\mathrm{d}s \ (i = 1,2) \text{ 存在 , 则}$$

$$\int_{L} f(x, y)\,\mathrm{d}s = \int_{L_1} f(x, y)\,\mathrm{d}s + \int_{L_2} f(x, y)\,\mathrm{d}s.$$

(5) 单调性：若 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$ 与 $\int_L g(x,y)\,\mathrm{d}s$ 存在，且

$$f(x,y) \le g(x,y),\ \forall (x,y) \in L,$$

则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s \le \int_L g(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

(6) 绝对值不等式 : 若 $\int_L f(x, y)\,\mathrm{d}s$ 存在 ,则

$\int_L |f(x, y)|\,\mathrm{d}s$ 也存在 , 且

$$\int_L f(x, y)\,\mathrm{d}s \le \int_L |f(x, y)|\,\mathrm{d}s\,.$$

三、第一型曲线积分的计算

定理：设平面光滑曲线弧 L 由参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

给出，函数 $f(x,y)$ 在 L 上连续，则：

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

特别地:

(1) 若 $L: y = y(x), a \le x \le b$, 则

$$\int_L f(x, y)\mathrm{d}s = \int_a^b f[x, y(x)]\sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x\,;$$

(2) 若 $L: x = x(y),\ c \le y \le d$, 则

$$\int_L f(x, y)\mathrm{d}s = \int_c^d f[x(y), y]\sqrt{1 + x'^2(y)}\,\mathrm{d}y\,.$$

- $f(x, y, z)$在空间曲线L上的第一型曲线积分：

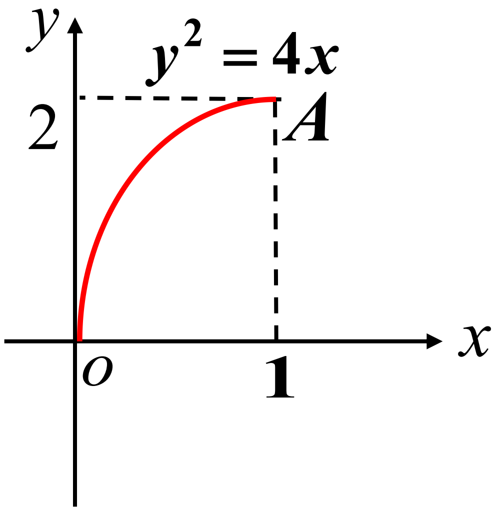
设空间光滑曲线弧 $L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta),$

函数 $f(x, y, z)$ 在 L 上连续，则：

$$\int_L f(x, y, z) ds =$$

$$\int_\alpha^\beta f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt.$$

例1、求 $\int_L y\,\mathrm{d}s$，其中 $L: y^2 = 4x$ 上从(0,0)到(1,2)的一段.

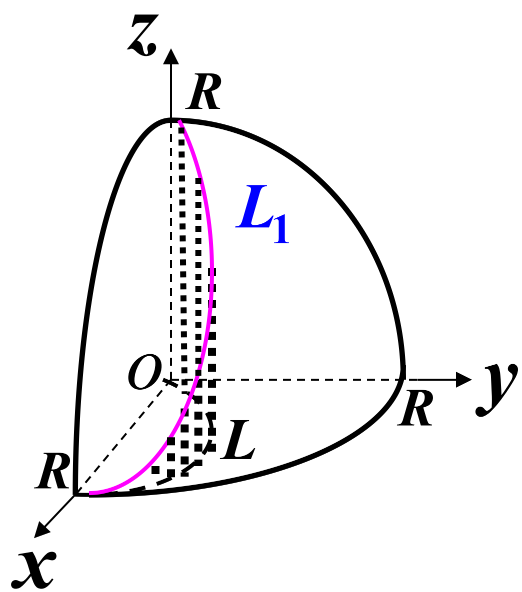


- 若 $L:\rho=\rho(\varphi),\alpha\le\varphi\le\beta$,则

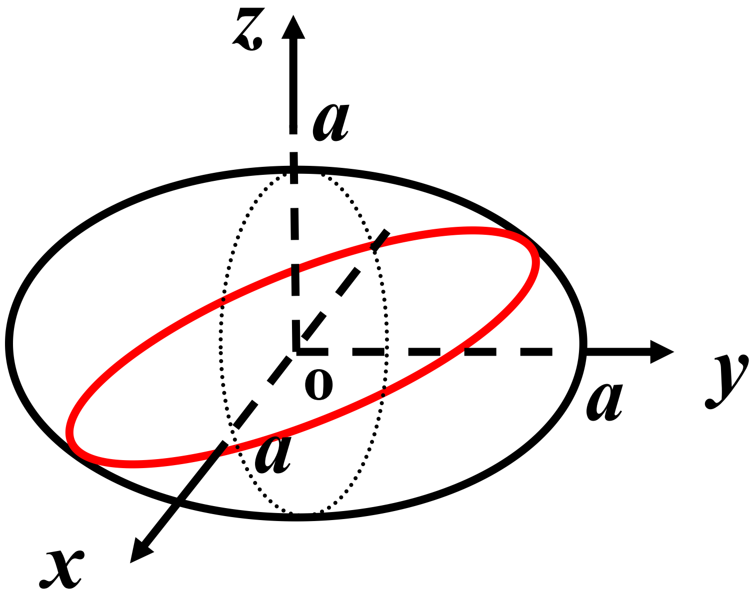
$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\rho(\varphi)\cos\varphi,\rho(\varphi)\sin\varphi]\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi\ .$$

例2、求$\int_L \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}s$,其中

$$L: x^2 + y^2 = Rx, y \geq 0.$$



例3、求$\int_L x^2 \mathrm{d}s$,其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截得的圆周 .



物理上的应用

设曲线弧 L 的线密度为 $\rho(x,y)$，则 L 的质量：

$$M=\int_L \rho(x,y)\mathrm{d}s\,.$$

曲线弧 L 的质心坐标：

$$\bar{x}=\frac{\int_L x\rho(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L \rho(x,y)\mathrm{d}s},\qquad \bar{y}=\frac{\int_L y\rho(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L \rho(x,y)\mathrm{d}s}.$$

曲线弧 L 对 x 轴及 y 轴的转动惯量：

$$I_x = \int_L y^2 \rho(x, y) \mathrm{d}s,$$

$$I_y = \int_L x^2 \rho(x, y) \mathrm{d}s.$$

例4、 求线密度为 $\rho(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}}$ 的曲线段

$y=\ln x\ (1\le x\le 2)$ 对于 y 轴的转动惯量.

作业

习题20-1：1(1)(2)(7)、2