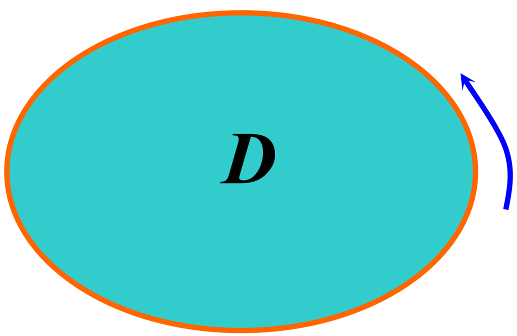
§21.3 格林公式.曲线积分与路线的无关性

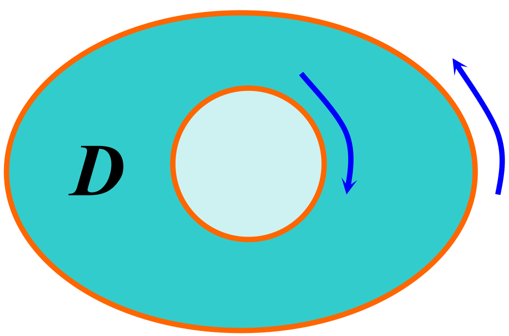
1 格林公式

2 曲线积分与路线的无关性

一、格林公式

设区域 D 的边界是由一条或几条 光滑曲线围成．边界曲线 L 的正向规定为：当人沿 边界行走时，区域 D 总在它的左边，记为∂D^{+}．



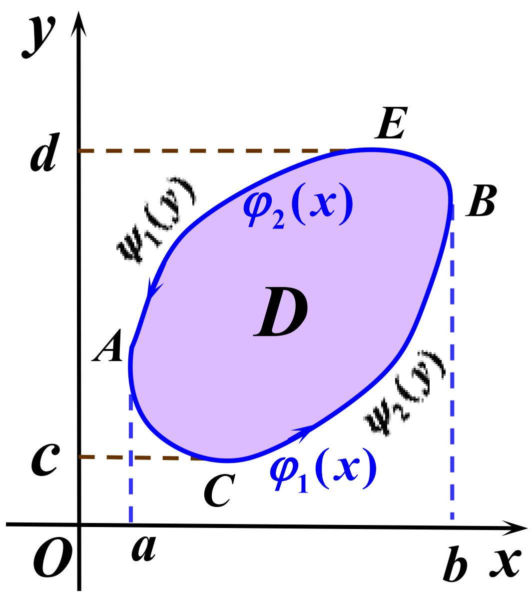


定理1（格林公式）：

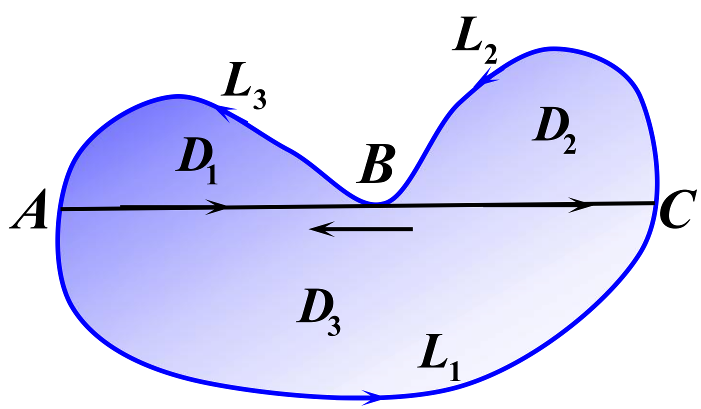
设 D 是平面上的有界闭区域，其边界由有限条光滑或分段光滑的曲线所组成，若函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint_{\partial D^+} P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

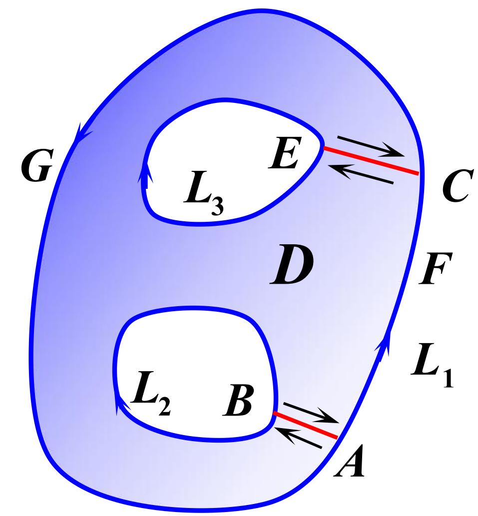
格林公式： $$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint\limits_{\partial D^{+}}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$



（1）



（2）



（3）

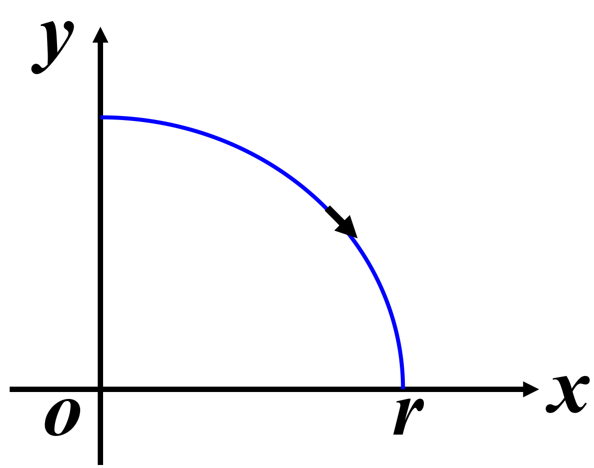
注1、格林公式可简写为：

$$\iint_D \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & \mathrm{Q} \end{vmatrix} \mathrm{d}\sigma = \oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

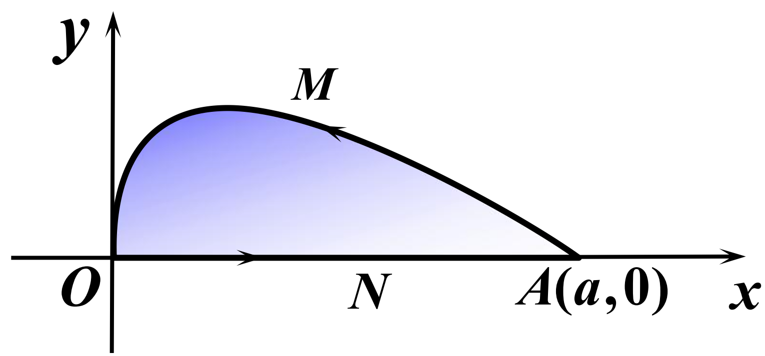
注2、特别地，记有界闭区域 D 的面积为A,

$$A = \oint_{\partial D^+} x\mathrm{d}y = -\oint_{\partial D^+} y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\oint_{\partial D^+} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x \quad .$$

例1、求 $\int_L x\mathrm{d}y$,其中曲线 L 是以原点为圆心,r 为半径的圆在第一象限的部分 取顺时针方向 .



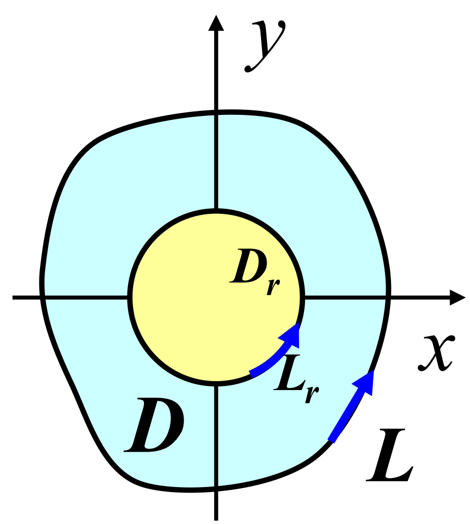
例2、求抛物线 $(x+y)^2 = ax(a>0)$ 与 x 轴所围图形的面积.



例3、求 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$，其中 L 为：

(1) 椭圆 $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ 所围区域的正向边界；

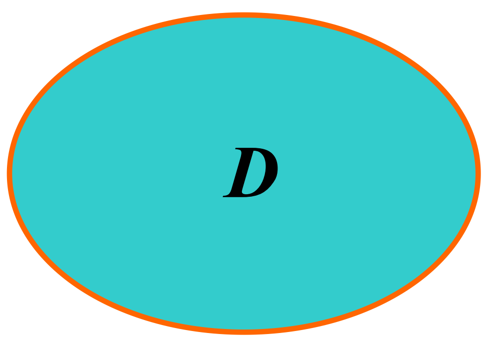
(2) L 是任一包含原点为内点 的区域 D 的正向光滑边界 .



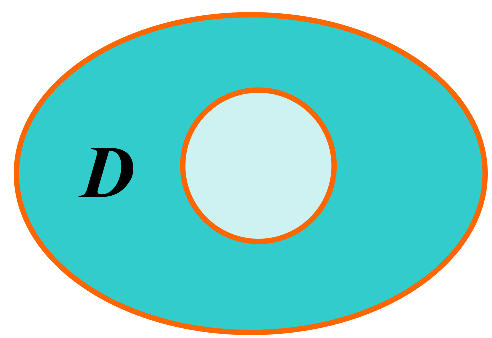
二、曲线积分与路线的无关性

单连通区域： 平面区域 D 内任一条闭曲线所围有界区域都属于 D，即“无洞”区域。

复连通区域： 非单连通的平面区域。

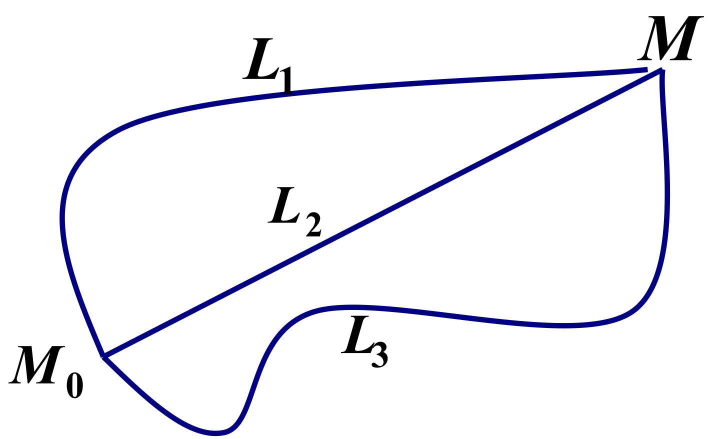


单连通区域



复连通区域

设 D 为一平面区域，$M_0, M \in D$，L 是 D 内从 M_0 到 M 的光滑或分段光滑曲线．若 $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 只与 L 的两个端点 M_0, M 有关而与积分路线无关，则称曲线积分在 D 内与路线无关，否则称与路线有关．



定理2： 设 D 是平面上的单连通区域，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)\in C^{(1)}(D)$，则以下四个条件等价：

(1) 对 D 内任一条分段光滑闭曲线 L，有

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0;$$

(2) $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在 D 内与路线无关；

(3) 在 D 内存在 $u(x,y)$，使 $\mathrm{d}u=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$；

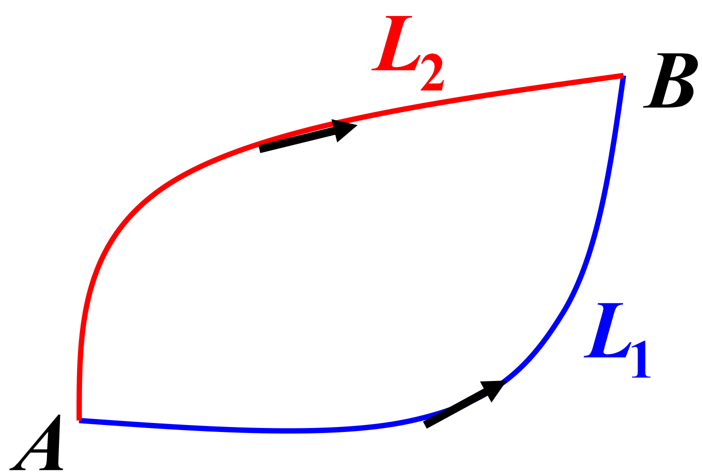
(4) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内处处成立.

(1) 对 D 内任一条分段光滑闭曲 线 L，有

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0;$$

(2) $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在 D 内与路线无关；

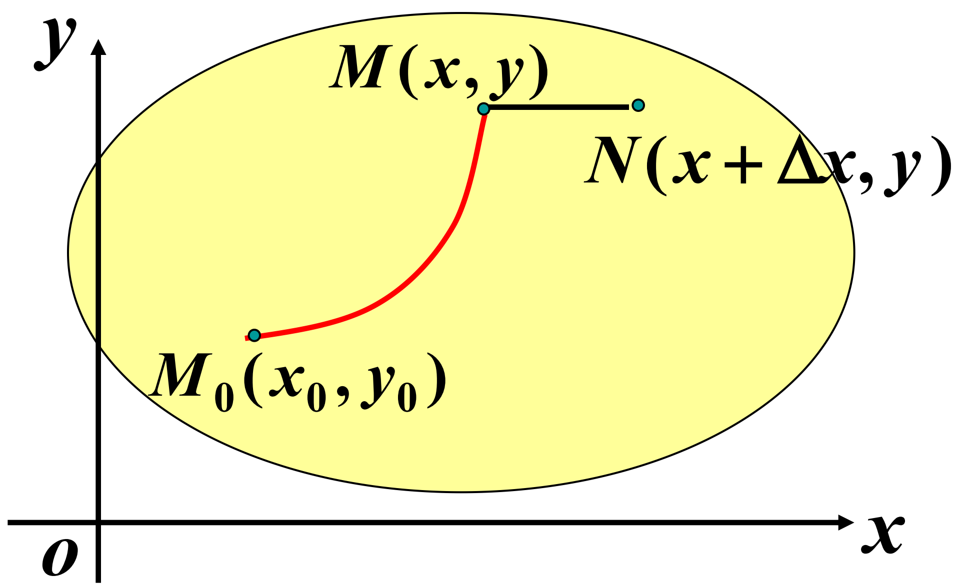
- (1) $\Longrightarrow$ (2)



(2) $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在 D 内与路线无关；

(3) 在 D 内存在 $u(x,y)$，使 $\mathrm{d}u = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$；

- (2) $\Longrightarrow$ (3)



(3) 在 D 内存在 $u(x, y)$，使 $\mathrm{d}u = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$；

(4) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内处处成立.

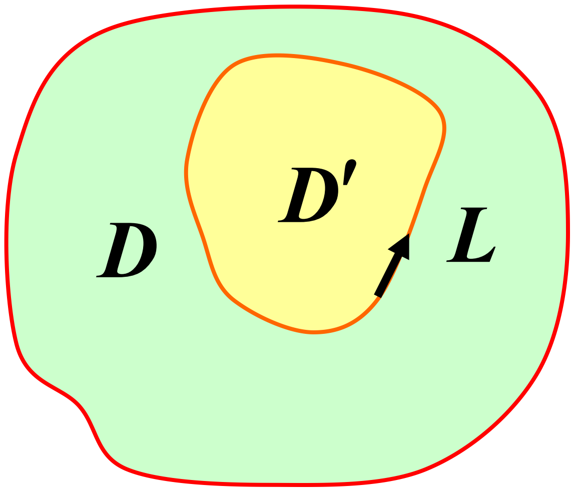
- (3) $\Longrightarrow$ (4)

(4) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内处处成立 .

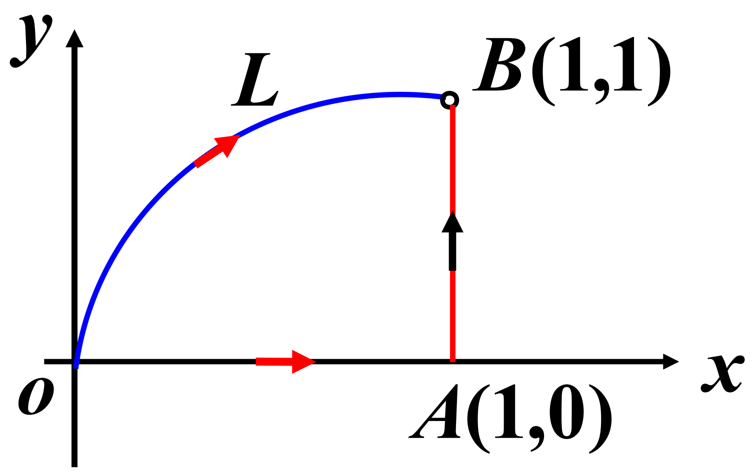
(1) 对 D 内任一条分段光滑闭曲 线 L ,有

$$\oint_L P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0\,;$$

- (4) $\Longrightarrow$ (1)

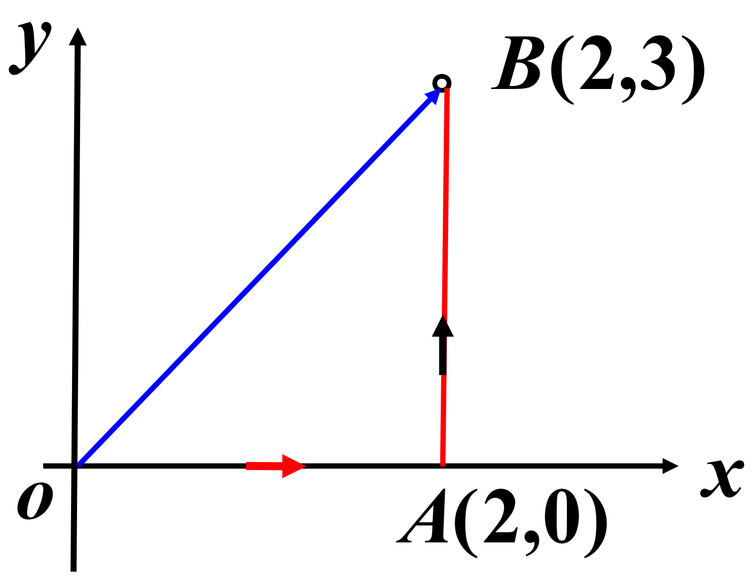


例4、求 $\int_L (x^2+2xy)\mathrm{d}x+(x^2+y^4)\mathrm{d}y$，其中 L 为由点 $O(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 的曲线弧 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$.

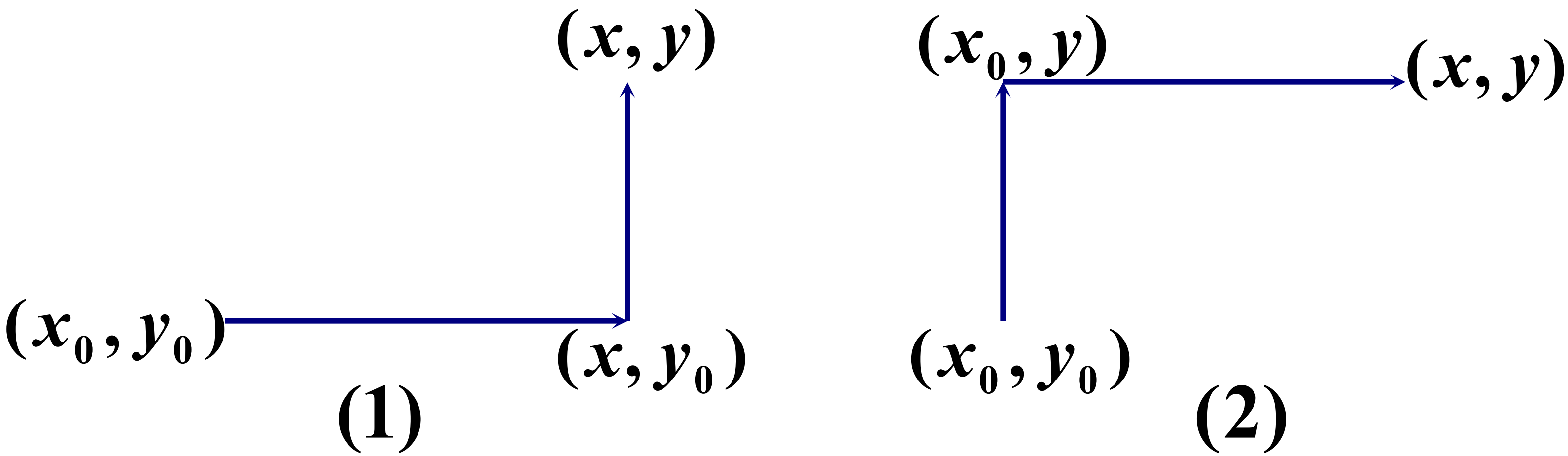


例5、设曲线积分 $\int_L xy^2 \mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续导数，且 $\varphi(0)=0$，计算

$$\int_{(0,0)}^{(2,3)} xy^2 \mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y .$$



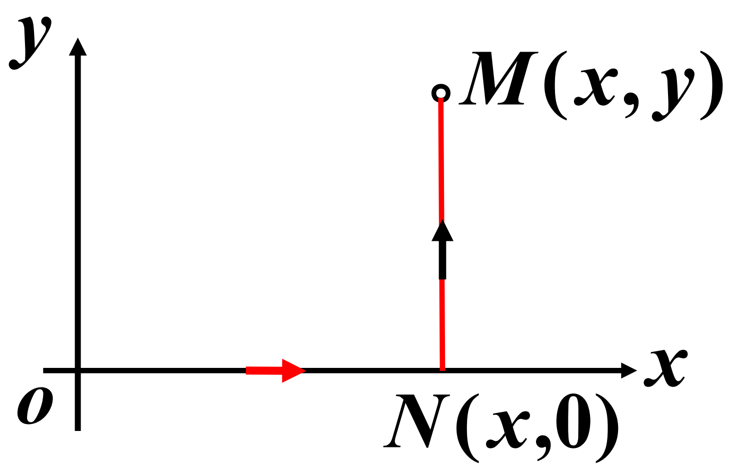
Questions 已知 $\mathrm{d}u = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$，求 $u(x,y)$?



按(1)： $u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(u, y_0)\mathrm{d}u + \int_{y_0}^{y} Q(x, v)\mathrm{d}v$

按(2)： $u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(u, y)\mathrm{d}u + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, v)\mathrm{d}v$

例6、试用曲线积分求 $(2x+\sin y)\mathrm{d}x+(x\cos y)\mathrm{d}y$ 的原函数.



作业

习题21-3：1(2)、2(1)、5(1)、6(1)