§ 22.2　第二型曲面积分

1 定向曲面及其法向量

2 第二型曲面积分的概念

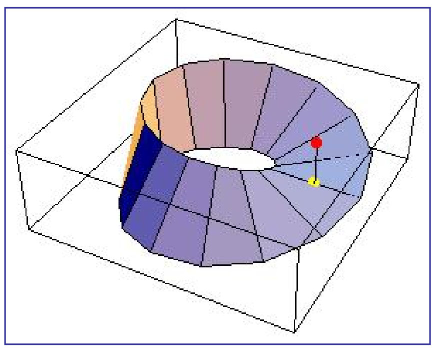
3 第二型曲面积分的计算

一、定向曲面及其法向量

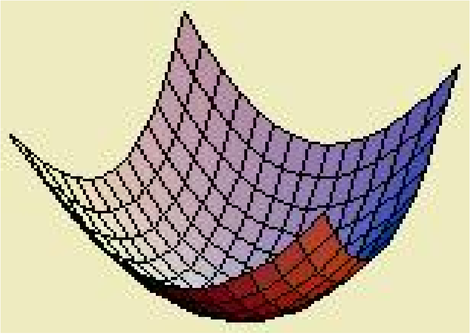
曲面：单侧曲面, 双侧曲面

1. 单侧曲面：

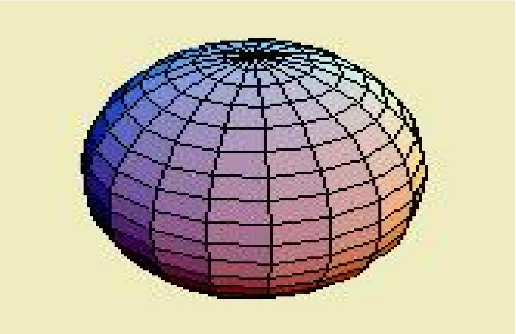
莫比乌斯带



2. 双侧曲面：



上、下侧



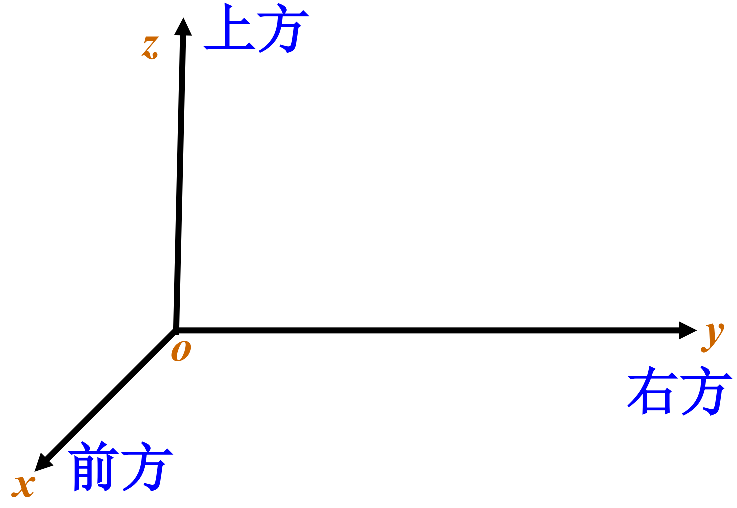
内、外侧

定向曲面： 选定了某一侧的双侧曲面，通常记为 S .

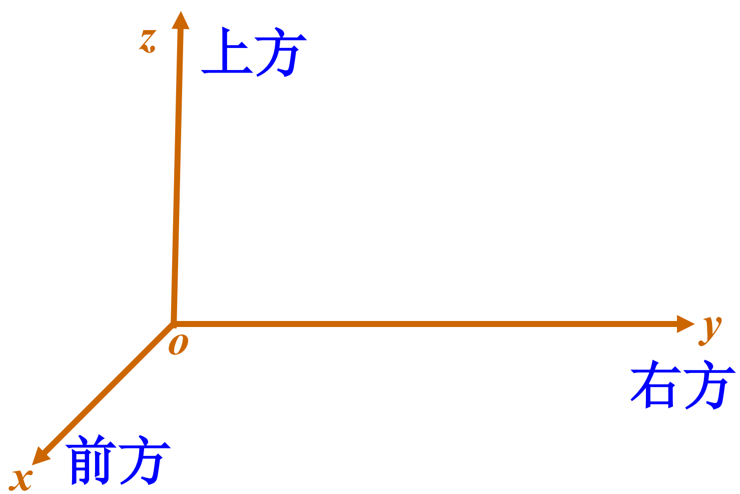
S^- 表示与 S 反侧的曲面 .

定向曲面的法向量： 方向总是指向曲面指定的一侧。

在直角坐标系中，称 x, y, z 轴的正向分别指向前方、右方、上方 .



方向余弦	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	封闭曲面
侧的规定	>0 为前侧 <0 为后侧	>0 为右侧 <0 为左侧	>0 为上侧 <0 为下侧	外侧 内侧



I、设光滑曲面 $S: z = z(x, y)$. 若 S 取上侧，则 S 上点 $(x, y, z(x, y))$ 处的法向量 $\vec{n} = (-z_x, -z_y, 1)$;

II、设光滑曲面 $S: y = y(z, x)$. 若 S 取右侧，则 S 上点 $(x, y(z, x), z)$ 处的法向量 $\vec{n} = (-y_x, 1, -y_z)$;

III、设光滑曲面 $S: x = x(y, z)$. 若 S 取前侧，则 S 上点 $(x(y, z), y, z)$ 处的法向量 $\vec{n} = (1, -x_y, -x_z)$.

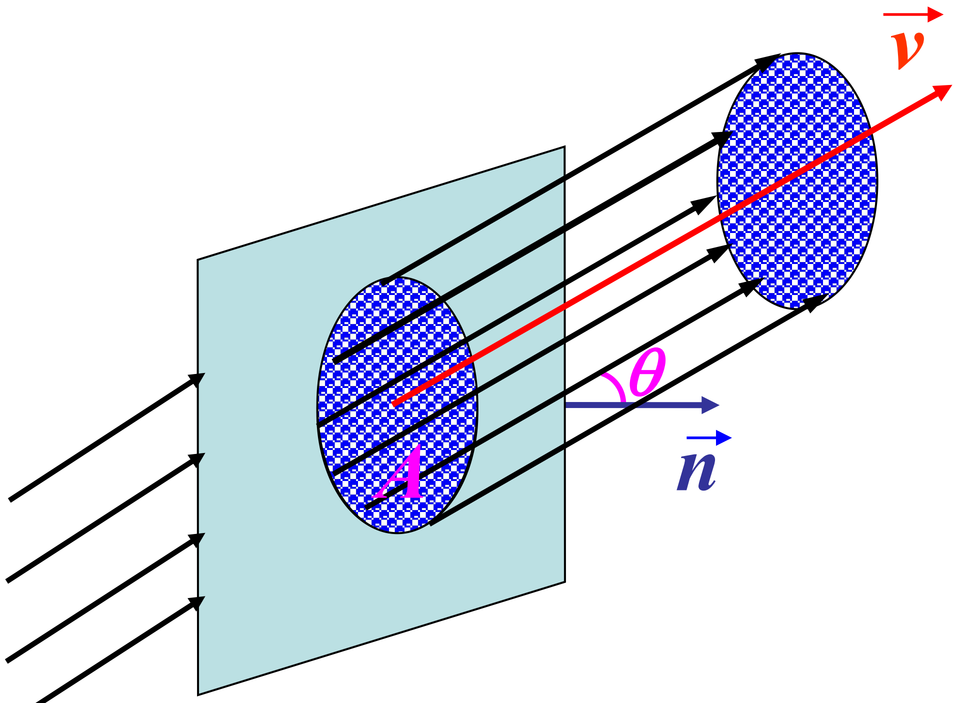
二、第二型曲面积分的概念

问题: 设流体以流速

$$\vec{v}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

从给定的曲面 S 的负侧流向正侧，求单位时间内水流过曲面 S 的流量.

(1) $\vec{v}(x,y,z)=\vec{v}$ 为常量，且 S 为平面，设其面积为 A.



$$\Phi = A|\vec{v}|\cos\theta$$

$$= A|\vec{v}||\vec{e}_n|\cos\theta$$

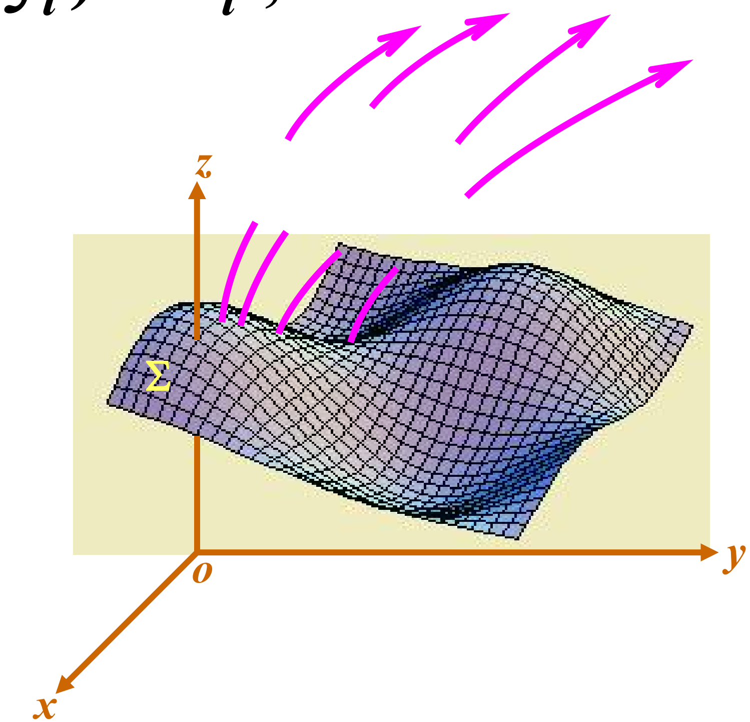
$$= (\vec{v}\cdot\vec{e}_n)A$$

(2) 设 $\vec{v}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$,

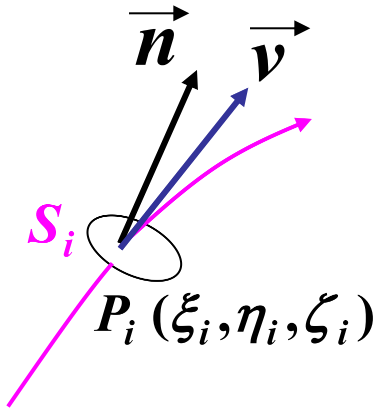
将 S 分为 n 个小曲面 $S_i\ (1\le i\le n)$,

S_i 的面积为 ΔS_i,

任取 $P_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in S_i$,



$$\Delta\Phi_i \approx [\vec{v}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec{e}_n(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)]\Delta S_i$$



$$\therefore \Phi = \iint_S [\vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{e}_n(x,y,z)]\mathrm{d}S$$

设 $\vec{e}_n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$\Phi = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S.$$

定义: 设 S 为一定向光滑曲面，向量值函数

$\vec{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 在 S 上有界，$\vec{e}_n(x,y,z)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是 S 上点 (x,y,z) 的单位法向量. 若第一类曲面积分

$$\iint_S P\cos\alpha\,\mathrm{d}S,\quad \iint_S Q\cos\beta\,\mathrm{d}S,\quad \iint_S R\cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

均存在，则称积分

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

为向量值函数$\vec{F}(x,y,z)$在定向曲面S上的积分，或称第二型曲面积分，记为

$$\iint\limits_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint\limits_S [\vec{F}(x,y,z)\cdot \vec{e}_n(x,y,z)]\mathrm{d}S .$$

$$= \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$= \ldots\ldots\ldots$$

性质：

(1) 若 $\vec{F}(x,y,z)$ 在分片光滑定向曲面 S 上连续，则

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} \text{ 存在}.$$

(2) 第二类曲面积分有线性 性、定向曲面积分可加 性.

(3) $\iint_{S^-} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$.

(4) 若S为定向封闭曲面，记为 $\oiint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$.

第二型曲面积分的几个等价表达式:

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S [\vec{F}(x,y,z)\cdot \vec{e}_n(x,y,z)]\mathrm{d}S$$

$$= \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$= \iint_S P\cos\alpha\,\mathrm{d}S + Q\cos\beta\,\mathrm{d}S + R\cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_S P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

两类曲面积分互化公式

其中, $\mathrm{d}\vec{S}$:定向曲面元素;

$\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$: $\mathrm{d}\vec{S}$ 的坐标或 S 的投影元素.

注:书中用 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示.

三、第二型曲面积分的计算

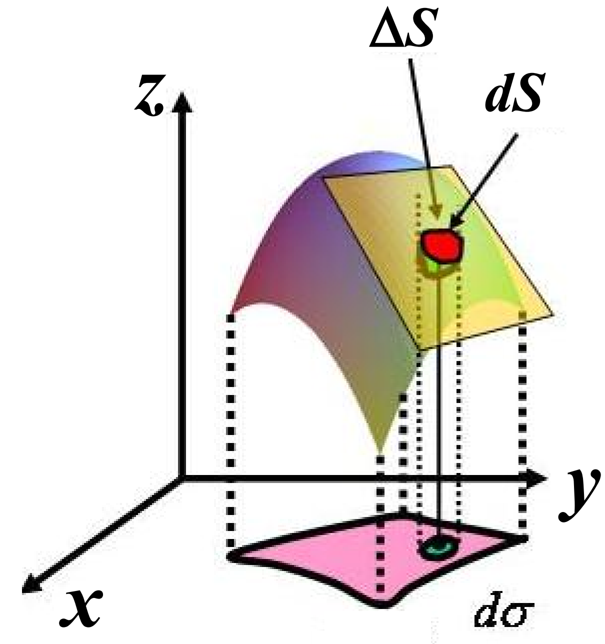
方法一：分别计算三个积分

$$\iint_S P(x,y,z)dydz, \quad \iint_S Q(x,y,z)dzdx, \quad \iint_S R(x,y,z)dxdy$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

yz 型积分　　zx 型积分　　xy 型积分

公式一：$S: z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$



$$\mathrm{d}S \approx \mathrm{d}A = \frac{1}{|\cos\gamma|}\mathrm{d}\sigma$$

则 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \cos\gamma\mathrm{d}S = \cos\gamma\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{|\cos\gamma|}$

- $\displaystyle\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}\sigma,$

S 取上侧为正，取下侧为负 .

公式二： $S: x = x(y,z), (y,z) \in D_{yz}$

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]\mathrm{d}\sigma$$

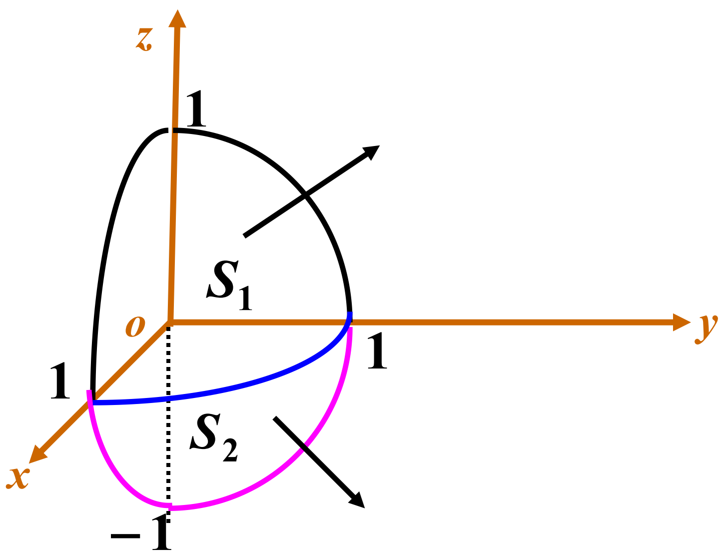
S 取前侧为正，取后侧为负.

公式三： $S: y = y(z,x), (z,x) \in D_{zx}$

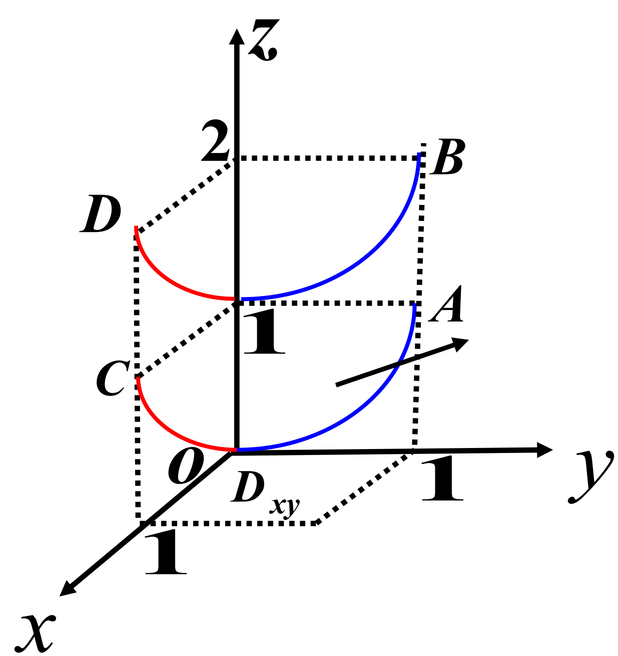
$$\iint_S Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \pm \iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]\mathrm{d}\sigma$$

S 取右侧为正，取左侧为负.

例1、求 $\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $S: x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧且 $x \geq 0, y \geq 0$.



例2、求 $\iint\limits_S e^y \mathrm{d}y\mathrm{d}z + ye^x \mathrm{d}z\mathrm{d}x + x^2 y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ 所截部分的上侧 .



方法二：直接化为第一类曲面积分

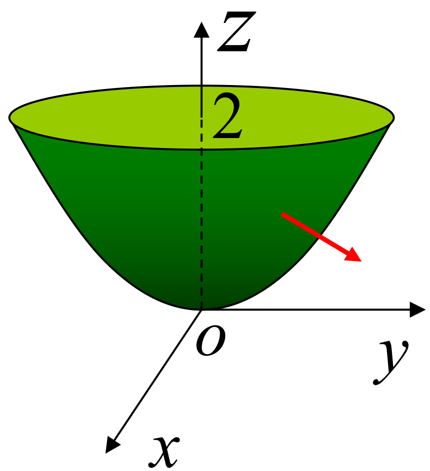
$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S.$$

关键：写出 $\vec{e}_n(x, y, z)$ 并利用 $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}\sigma.$

例3、计算 $\iint\limits_{S}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$$S=\{(x,y,z)\mid z=x^2+y^2, z\in[0,1]\}$$，取上侧.

例4、求 $\iint\limits_{S} z\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是抛物面 $z = \dfrac{x^2+y^2}{2}$ 介于 $z=0$ 及 $z=2$ 之间部分的下侧.



作业：

习题22-2：1(3)(4)