第十九章　含参量积分

1. 含参量正常积分
2. 含参量反常积分
3. 欧拉积分

19.1 含参量正常积分

1 含参量正常积分的概念

2 含参量正常积分的连续性

3 含参量正常积分的可微性

4 含参量正常积分的可积性

一、含参量正常积分的概念

定义1： 设函数 $f(x,y)$ 定义在 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上，若对任意 $x\in[a,b]$，函数 $f(x,y)$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上可积，称

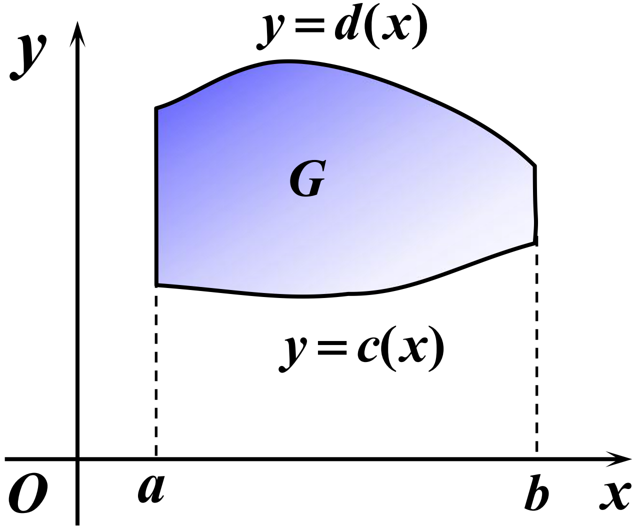
$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y,\quad x\in[a,b]$$

为定义在 $[a,b]$ 上含参量 x 的(正常)积分。

- 更一般地，设 $f(x,y)$ 定义在区域

$$G=\{(x,y)\mid c(x)\le y\le d(x),a\le x\le b\}$$

上，其中$c(x)$，$d(x)$为$[a,b]$上的连续函数．



定义1′：设函数 $f(x,y)$ 定义在

$$G=\{(x,y)\mid c(x)\le y\le d(x),\ a\le x\le b\}$$

上，其中$c(x)$，$d(x)$为$[a,b]$上的连续函数，若对任意 $x\in[a,b]$，函数 $f(x,y)$ 关于 y 在 $[c(x),d(x)]$ 上可积，称

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y,\quad x\in[a,b]$$

为定义在 $[a,b]$ 上含参量 x 的(正常)积分。

二、含参量正常积分的连续性

定理1：若函数 $f(x,y)$ 在区域 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上

上连续，则含参量正常积分

$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

在$[a,b]$上连续.

注： 定理1说明，定义在矩形区域上的连续函数，其极限与积分可换序. 即

$$\lim_{x \to x_0} \int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y = \int_c^d \lim_{x \to x_0} f(x, y)\mathrm{d}y .$$

定理 1′： 若函数 $f(x,y)$ 在区域

$$G=\{(x,y)\mid c(x)\le y\le d(x),\ a\le x\le b\}$$

上连续，其中 $c(x),d(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

则含参量正常积分

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

在 $[a,b]$ 上连续.

例1、求 $\lim\limits_{\alpha \to 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$.

三、含参量正常积分的可微性

定理2: 若函数 $f(x,y)$ 与其偏导数 $f_x(x,y)$ 在区域

$R=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则含参积分

$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

在 $[a,b]$ 上可微, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y\,.$$

定理 $2'$： 若函数 $f(x,y)$ 与其偏导数 $f_x(x,y)$ 在区域 $R=[a,b]\times[p,q]$ 上连续，$c(x),d(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上其值含于 $[p,q]$ 内的可微函数，则

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

在 $[a,b]$ 上可微，且

$$F'(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x,y)\,\mathrm{d}y+f(x,d(x))d'(x)$$
$$-f(x,c(x))c'(x).$$

例2、设 $F(y)=\int_{y}^{y^2}\frac{\sin yx}{x}\mathrm{d}x\ (y>0)$, 求 $F'(y)$.

例3、设 $f(x)$在 $x=0$的某个邻域内连续, 验证当

$|x|$充分小时 ,

$$\varphi(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)\mathrm{d}t$$

的各阶导数存在 , 且 $\varphi^{(n)}(x)=f(x)$.

例4、计算积分 $I=\int_{0}^{1}\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

四、含参量正常积分的可积性

定理3：若函数 $f(x,y)$ 在区域 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上

上连续，则

(1) $\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上可积；

(2) $\psi(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上可积．

注：当 $f(x,y)$ 连续时，同时存在两个求积顺序不同的积分，称为累次积分或二次积分。

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \xlongequal{\text{记为}} \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

$$\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \xlongequal{\text{记为}} \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

问题：在什么条件下，累次积分与求积分顺序无关？

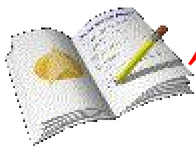
定理4： 若 $f(x, y)$ 在矩形区域 $R=[a, b]\times[c, d]$ 上

连续，则

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x .$$

例5、设 $I(x)=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{y\sin(xy)}{y-\sin y}\mathrm{d}y$, 求 $\int_0^1 I(x)\,\mathrm{d}x$.

例6、求 $I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x \quad (b>a>0)$.



作业

习题19-1：2、3