§ 21.4　二重积分的变量变换

1 二重积分的变量变换公式

2 用极坐标计算二重积分

一、二重积分的变量变换公式

回顾： 在定积分中

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, $x=\varphi(t)$ 为严格单调函数,

$$\varphi(\alpha)=a,\quad \varphi(\beta)=b,$$

且 $\varphi'(t)$ 连续,则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(\mathrm{t})\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(\mathrm{t})\,\mathrm{d}t.$$

记 $X=[a,b]$，换元积分公式即为：

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(X)} f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

目的：将上述公式推广到二重积分中。

引理： 设变换 $T: x = x(u,v), y = y(u,v)$ 将uv 平面上由按段光滑曲线围成的 闭区域 Δ 映成区域 D ,且

(1) 变换是 $T: \Delta \to D$是一一对应;

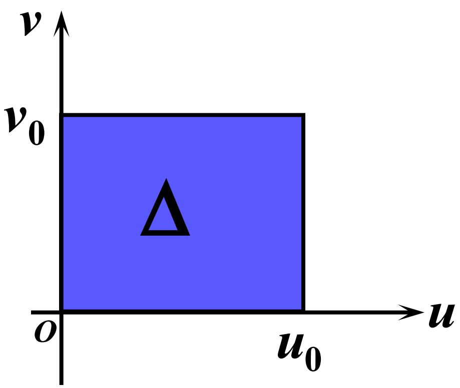
(2) $x(u,v), y(u,v) \in C^{(1)}(\Delta)$;

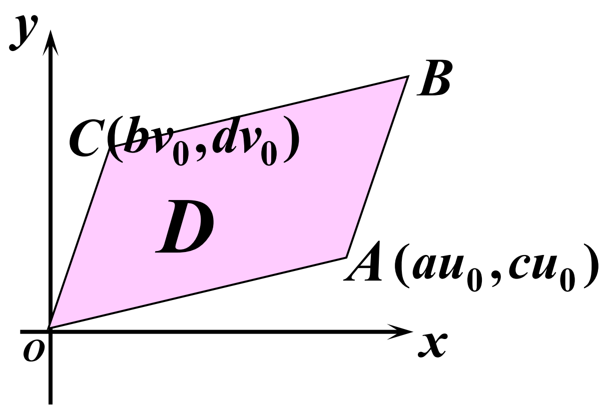
(3) $J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0 \ (\forall (u,v) \in \Delta)$.则

$$\mu(D) = \iint\limits_{\Delta} \left| J(u,v) \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

$$\mu(D) = \iint_{\Delta} |J(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

- 设 $\Delta = [0, u_0] \times [0, v_0]$, $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.





定理1：（二重积分的变量变换法）

设 $f(x,y)$ 在 xoy 平面上的有界闭区域 D 上可积，变换 $T: x=x(u,v), y=y(u,v)$ 将 uov 平面上由按段光滑曲线围成的闭区域 Δ 映成区域 D，且：

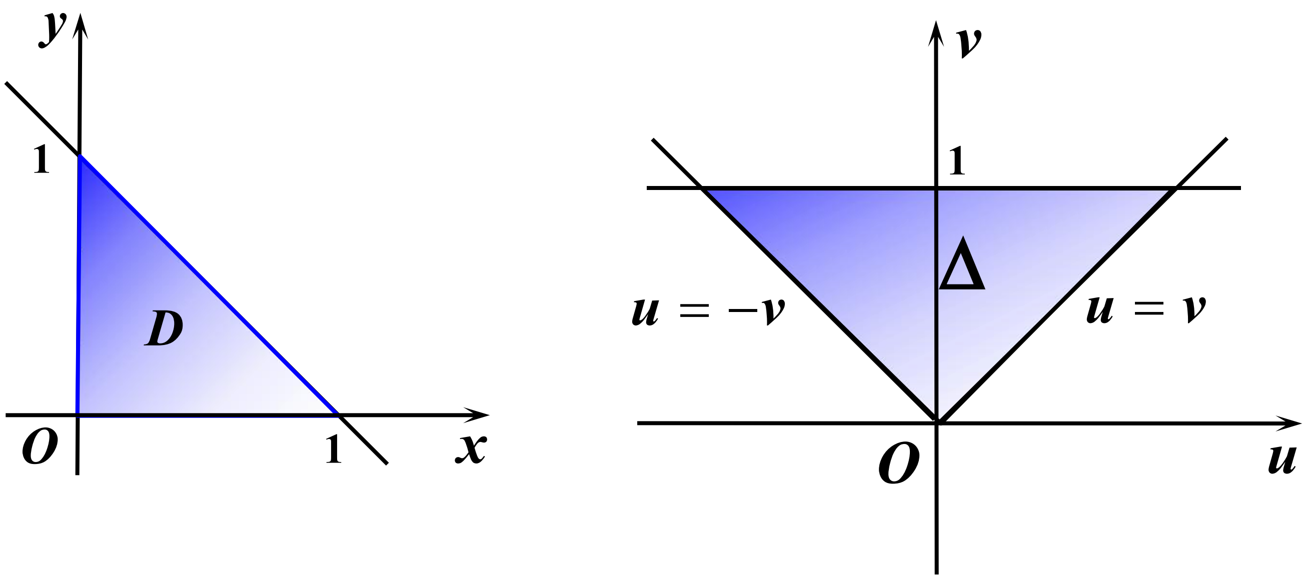
(1) 变换是 $T:\Delta\to D$ 是一一对应；

(2) $x(u,v), y(u,v)\in C^{(1)}(\Delta)$；

(3) $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0\ (\forall(u,v)\in\Delta)$. 则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_\Delta f[x(u,v),y(u,v)]\left|J(u,v)\right|dudv.$$

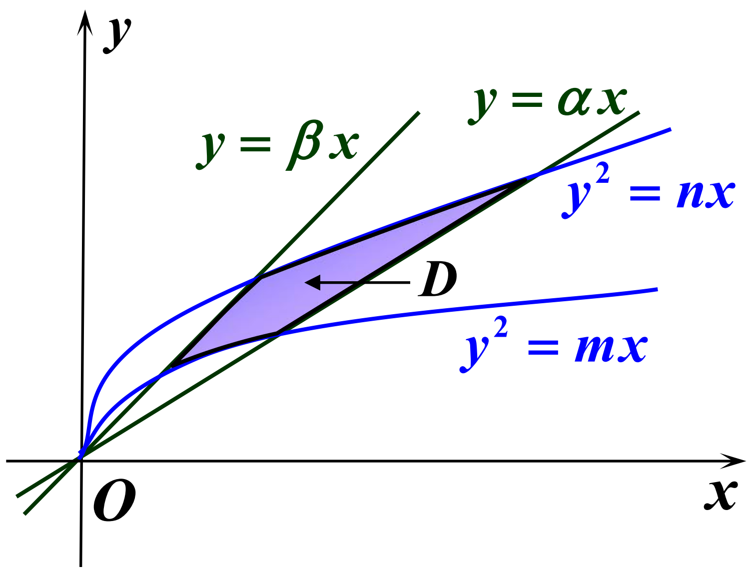
例1、求 $\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为由 x 轴，y 轴和直线 $x+y=1$ 所围成的闭区域．



例2、求抛物线 $y^2 = mx, y^2 = nx$ 和直线 $y = \alpha x$,

$y = \beta x$ 所围成的区域的面积 $\mu(D)$,其中

$0 < m < n,\ 0 < \alpha < \beta$.



二、用极坐标计算二重积分

当积分区域 D 是圆域或其一部分,或被积函数形如 $f(x^2+y^2)$. 极坐标变换:

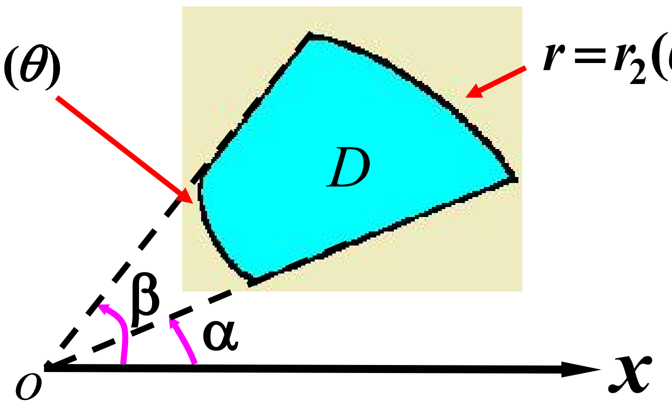
$$T:\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, 0 \le r < +\infty, 0 \le \theta \le 2\pi.$$

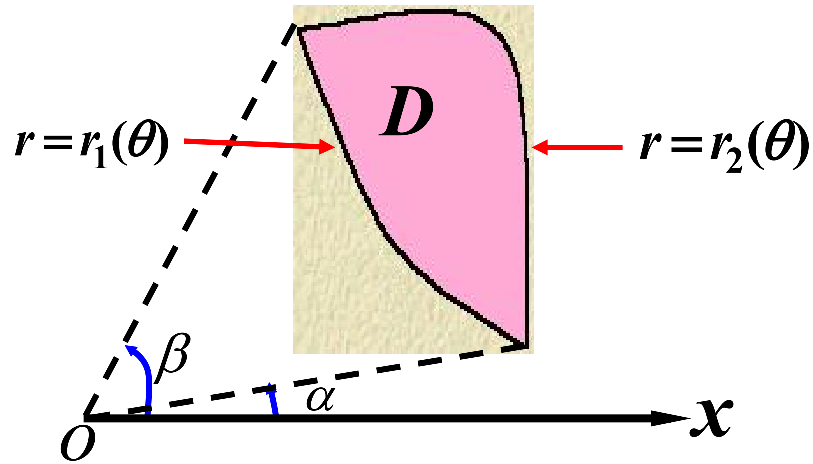
则 $J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$

定理2： 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 可积，在极坐标变换下 D 与 $r\theta$ 平面上的区域 Δ 对应，则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Delta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,.$$

情形1：原点 $(0,0) \notin D$.

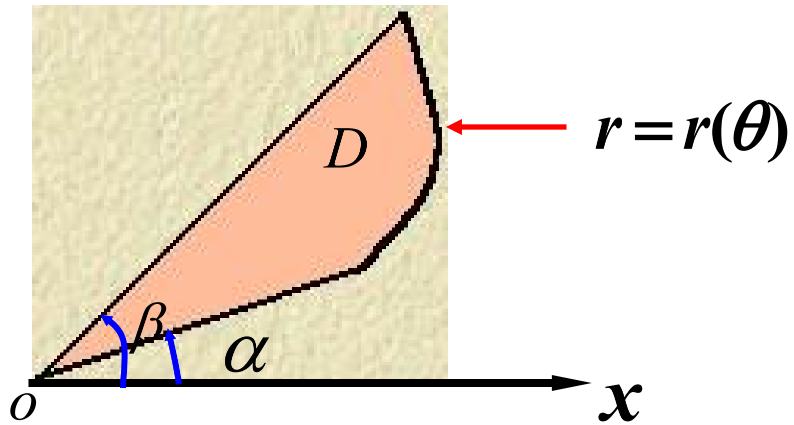




$$\Delta = \{(r,\theta): r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\}.$$

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r.$$

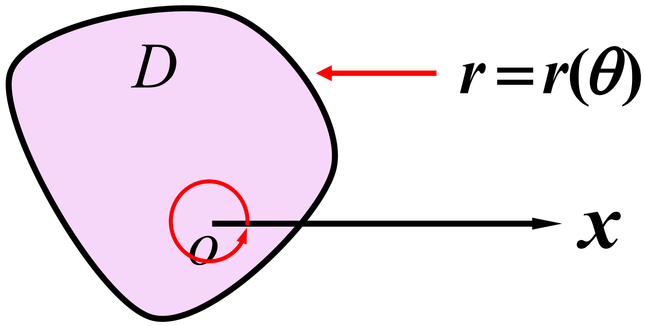
情形2： 原点 $(0,0)$ 为 D 的边界点 .



$$\Delta=\{(r,\theta):0\le r\le r(\theta),\alpha\le\theta\le\beta\}.$$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,.$$

情形3： 原点 $(0,0)$ 是积分区域 D 的内点 .

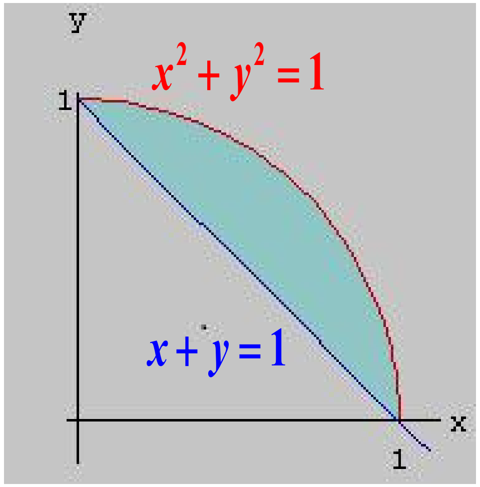


$$\Delta=\{(r,\theta):0\le r\le r(\theta),0\le\theta\le 2\pi\}.$$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r.$$

例3、写出积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的极坐标形式，

其中 $D: 1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}, 0 \le x \le 1$.



例4、求 $I=\iint\limits_{D}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{1-x^{2}-y^{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D: $x^{2}+y^{2}\leq 1$.

面积公式：

（1）直角坐标下：

$$\sigma = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

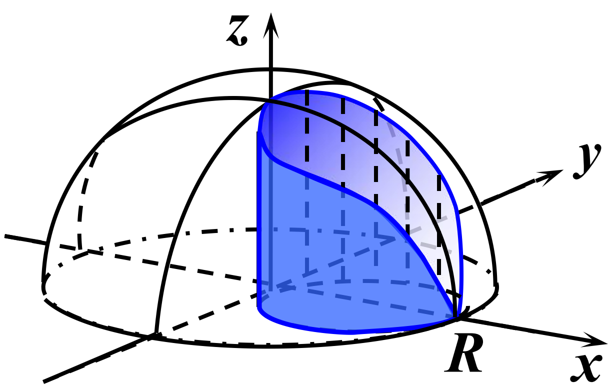
（2）极坐标下：

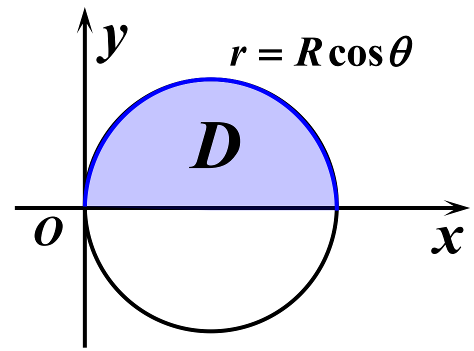
$$\sigma = \iint_\Delta r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

例5、求位于圆周 $r = 3\cos\theta$ 的内部及心脏线

$r = 1 + \cos\theta$ 的外部的区域的面积 .

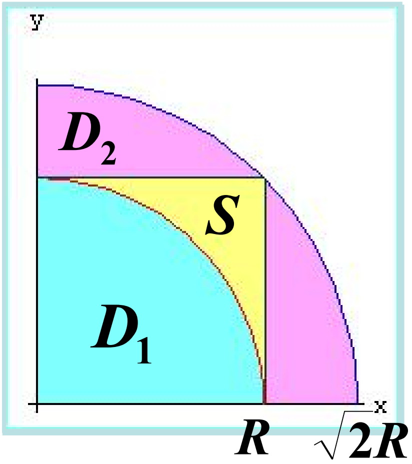
例6、计算球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与柱面 $x^2+y^2=Rx$ 所围立体的体积 .





例7、(1) 求 $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D: x^2+y^2\le R^2$.

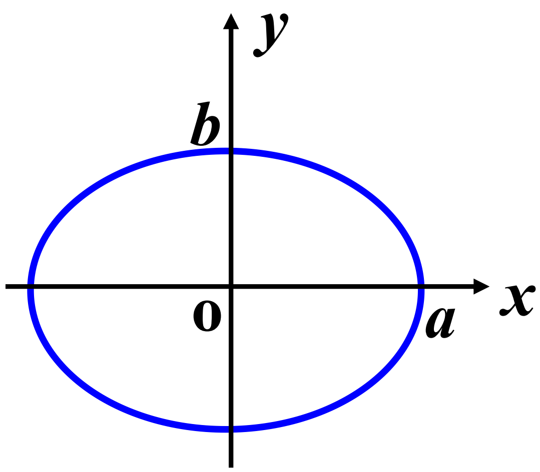
(2) 证明广义积分 : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

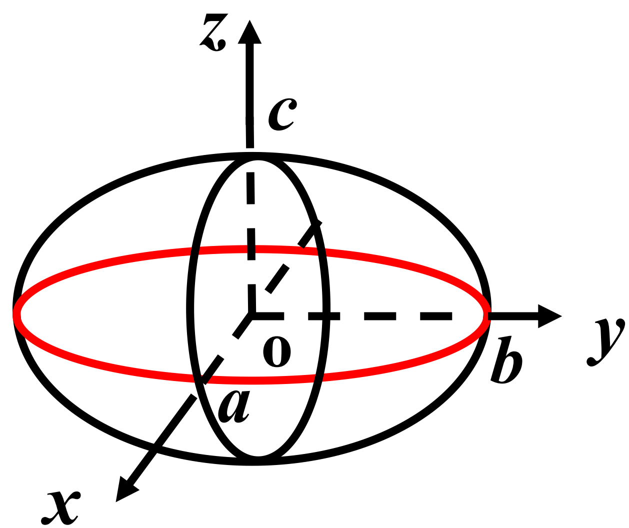


广义极坐标变换：

$$T:\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases},\ J(r,\theta) = abr.$$

例8、 求椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积 .





积分中对称性的应用：

(1) 定积分中，积分变量为 x.

① $f(x)$为奇函数，即：

$$f(-x)=-f(x)\text{时}, \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0;$$

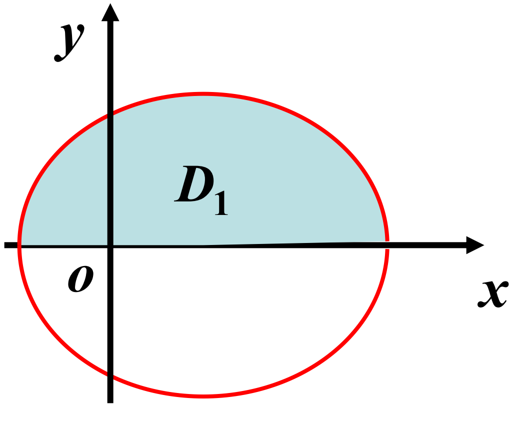
② $f(x)$为偶函数，即：

$$f(-x)=f(x)\text{时}, \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 二重积分中，积分变量为x, y.

① $f(x,y)$为关于y的奇(偶)函数,且D关于x轴对称,记D_1为x轴上半部分区域,

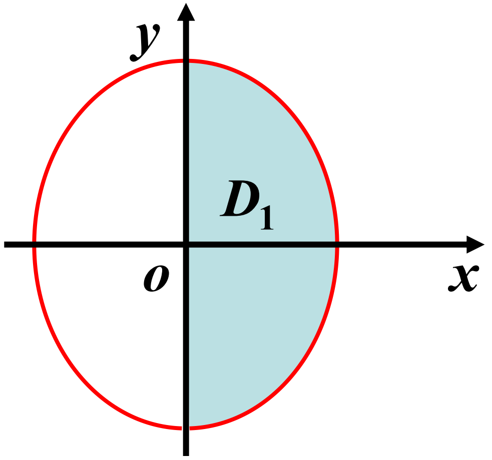
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & f(x,-y) = -f(x,y), \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy, & f(x,-y) = f(x,y), \end{cases}$$



② $f(x,y)$ 为关于 x 的奇(偶)函数,且 D 关于 y 轴对称,记 D_1 为 y 轴右半部分区域,

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

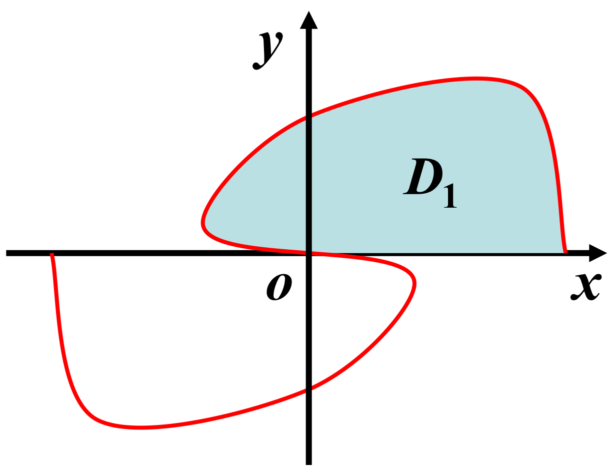
$$=\begin{cases} 0, & f(-x,y)=-f(x,y), \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(-x,y)=f(x,y), \end{cases}$$



③ $f(x,y)$同时为x,y的奇(偶)函数,且D关于原点对称,记D_1为x轴上半部分区域,

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\begin{cases} 0, & f(-x,-y)=-f(x,y), \\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(-x,-y)=f(x,y). \end{cases}$$



④ 若 D 关于直线 $y = x$ 对称, 则:

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(y, x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作业

习题21-4： 2（1）（3）、4（1）、6（1）