§ 18.3　几何应用

1 平面曲线的切线与法线

2 空间曲线的切线与法线

3 曲面的切平面与发线

一、平面曲线的切线与法线

设平面曲线 L 由方程 $F(x,y)=0$ 给出,其中 $F(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内满足隐函数定理的条件.则在 P_0 的某邻域内 $L: y=f(x)$.

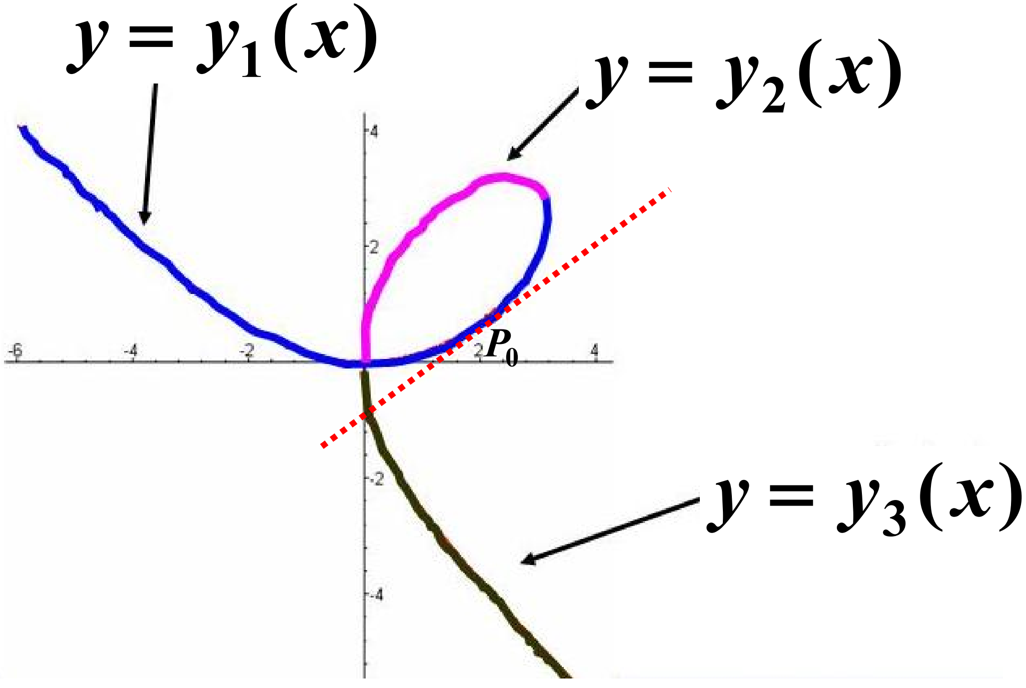
L 在 P_0 的切线: $F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0.$

L 在 P_0 的法线: $F_y(x_0,y_0)(x-x_0)-F_x(x_0,y_0)(y-y_0)=0.$

例1、求笛卡儿叶形线

$$2(x^3+y^3)-9xy=0$$

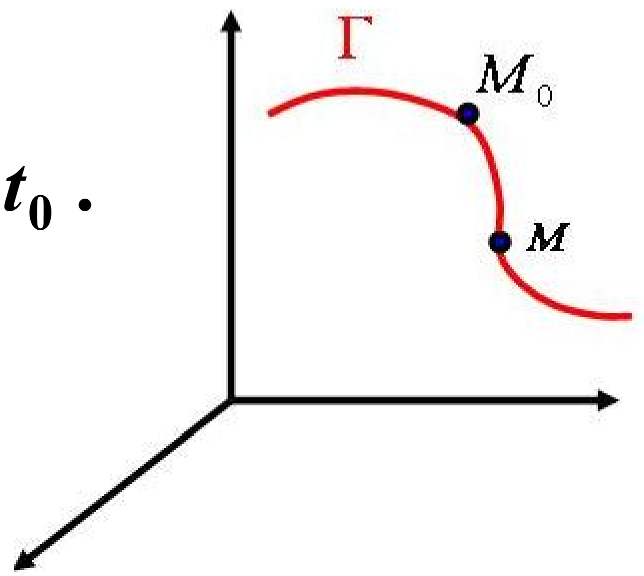
在点 $P_0(2,1)$ 处的切线与法线.



二、空间曲线的切线与法平面

(i) 参数方程

设空间曲线的方程 $\Gamma:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$



点 $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$, 对应参数 $t = t_0$.

$x(t), y(t), z(t)$ 均在 t_0 可导, 且

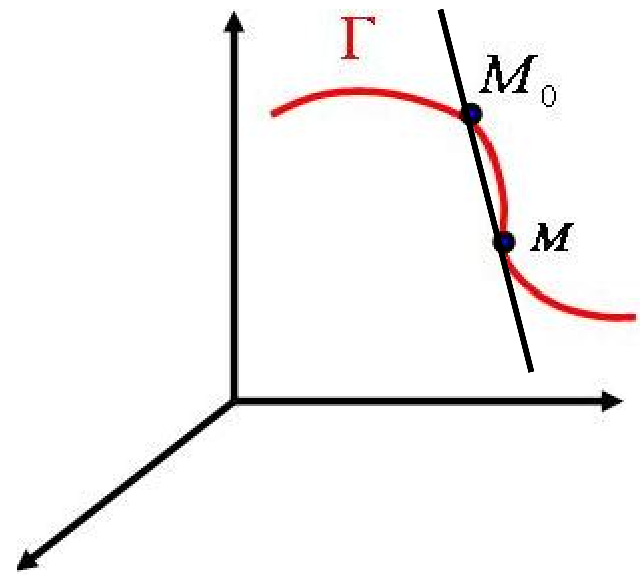
$$[x'(t_0)]^2 + [y'(t_0)]^2 + [z'(t_0)]^2 \neq 0.$$

求 Γ 在点 M_0 处的切线方程。

任取 $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)\in\Gamma$,

对应参数 $t=t_0+\Delta t$.

割线 M_0M 的方程为



$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}$$

上式分母同除以 Δt 得

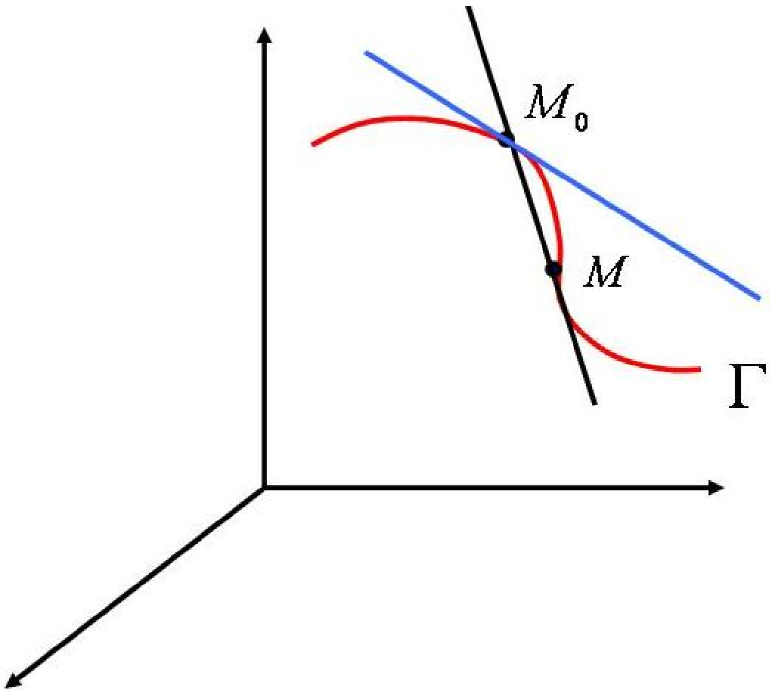
$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}},$$ 当 $M\to M_0$, 即 $\Delta t\to 0$.

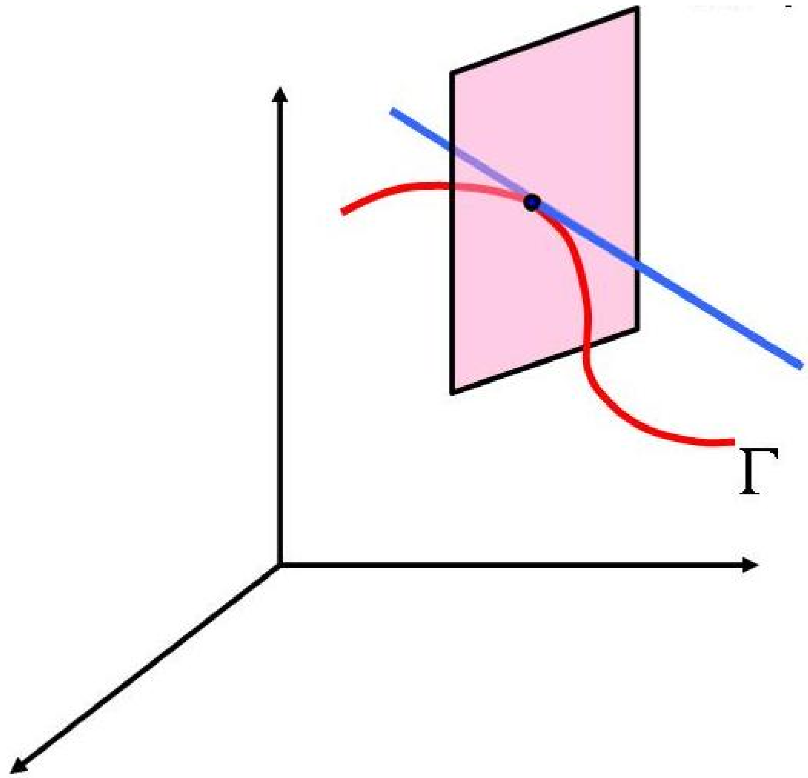
切向量：切线的方向向量。

$$\vec{\tau} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

曲线在 M_0 处的切线方程为：

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}.}$$





法平面： 过切点且与切线垂直的平面.

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$

◆ 特别地，设空间曲线方程为 $\Gamma:\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$

Γ 在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切向量为

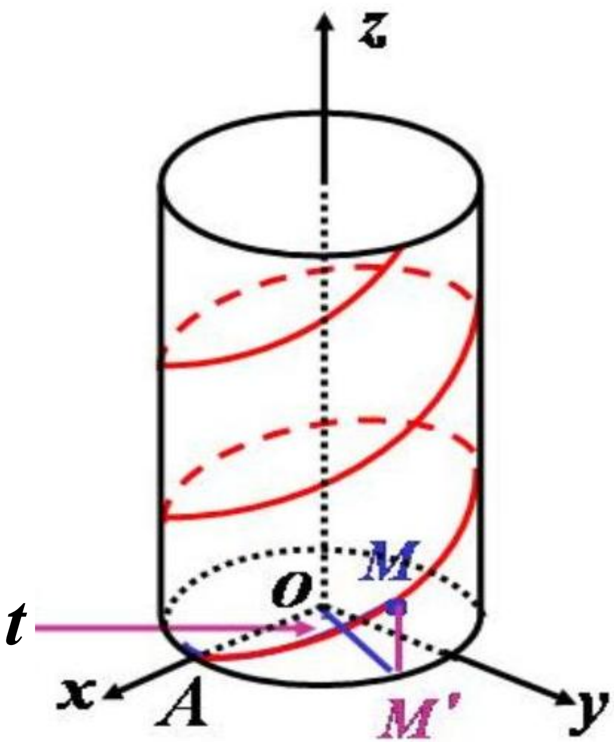
$$\vec{\tau} = (1, y'(x_0), z'(x_0))$$

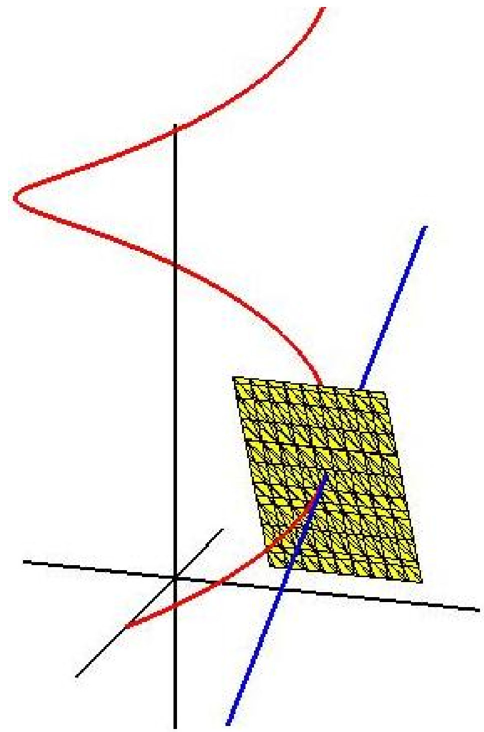
切线方程为 $$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{y'(x_0)} = \frac{z - z_0}{z'(x_0)};$$

法平面方程为

$$(x - x_0) + y'(x_0)(y - y_0) + z'(x_0)(z - z_0) = 0.$$

例2、求螺旋线 $\Gamma:\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = vt \end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线和法平面方程。





例3、求曲线 $y=x^2, z=x^3$ 上的点，使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

(ii) 隐函数

设空间曲线 L 由方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 给出，

F,G 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$的邻域具有一阶连续偏导数，

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0} \neq 0,$$

则方程组在点 P_0 的邻域确定了隐函数组

$$y=y(x), z=z(x).$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\Bigg/\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}\Bigg/\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}.$$

曲线在点 P_0 的切线方程：

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}}.$$

曲线在点 P_0 的法平面方程：

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0}(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}(z-z_0)=0.$$

例4、求曲线

$$L: \ x^2+y^2+z^2=50,\ \ x^2+y^2=z^2$$

在点 $P_0(3,4,5)$ 处的切线与法平面.

三、曲面的切平面与法线

设曲面方程为 $z=f(x,y)$，其中 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，则

- 曲面在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程：

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)=z-z_0 .$$

法线方程：$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

设曲面Σ由方程 $F(x,y,z)=0$ 给出，F 在曲面上的点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的邻域有一阶连续偏导数，且

$$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0,$$

则方程在 M_0 的某邻域确定了 $z=f(x,y)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

- 曲面上过点 M_0 的切平面方程为:

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$$
$$+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

- 曲面上过点 M_0 的切平面的法向量为:

$$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$$

- 曲面上过点 M_0 的法线方程为:

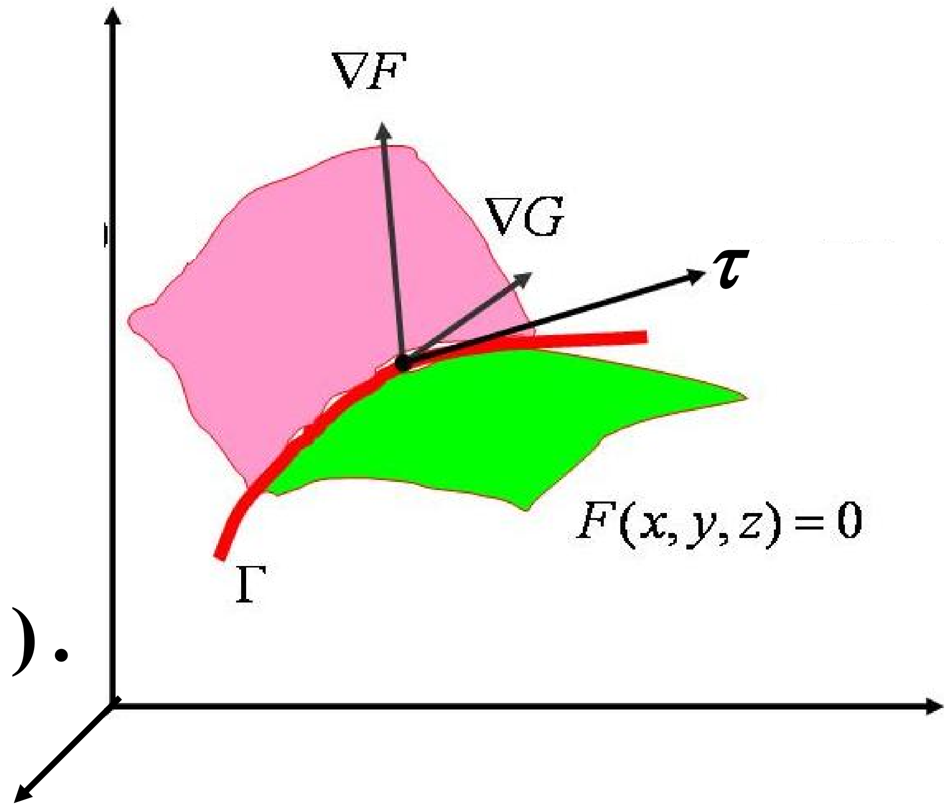
$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

注：设空间曲线方程为 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$.

Γ 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量

$$\vec{\tau}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0}$$

$$=\nabla F(M_0)\times\nabla G(M_0).$$



例5、求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在 $(1,1,1)$ 处的切平面与法线方程．

例6、证明曲面 $f(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})=0$ 的任一切平面都过某个定点，其中 f 为连续可微函数．

作业

习题18-3：2、3(2)、 9