第二十一章　重积分

§21.1　二重积分的概念

§21.2　直角坐标系下二重积分的计算

§21.3　格林公式.曲线积分与路线的无关性

§21.4　二重积分的变量替换

§21.5　三重积分

§21.6　重积分的应用

§21.1　二重积分的概念

1 平面图形的面积

2 二重积分的定义及其存在性

3 二重积分的性质

一、平面图形的面积

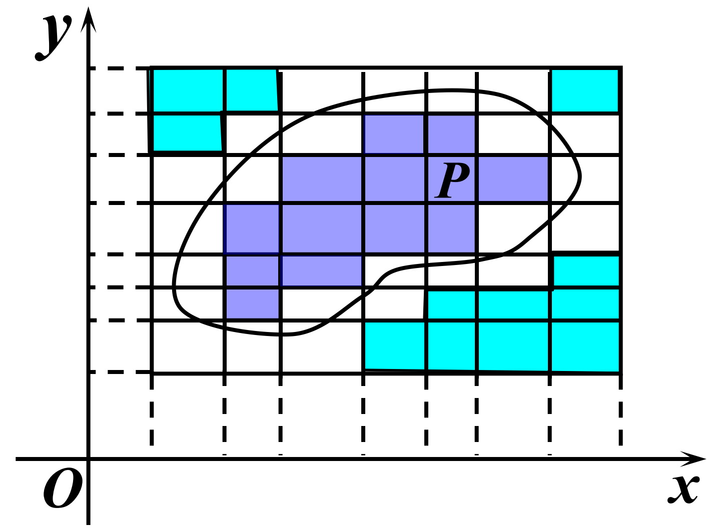
定义1： 称平面图形P有界，若构成该平面图形的点集是平面上的有界点集，即存在一矩形 R，使得 $P \subset R$.

- 设 P 是一平面有界图形，用平行于二坐标轴的一组直线网 T 分割这个图形，直线网 T 的网眼 (小矩形) $\Delta_i \ (1 \le i \le N)$ 可分为三类：

(i) Δ_i 上的点都是 P 的内点;

(ii) Δ_i 上的点都是 P 的外点;

(iii) Δ_i 上含有 P 的边界点.



记 $s_P(T)=\sum\limits_{\Delta_i\in(\mathrm{i})} S(\Delta_i)$, 其中 $S(\Delta_i)$ 表示 Δ_i 的面积.

$$S_P(T)=\sum_{\Delta_i\in(\mathrm{i})或(\mathrm{iii})} S(\Delta_i)\ .$$

记 $\underline{I}_P = \sup\limits_T \{s_P(T)\}$，称为 P 的内面积 .

记 $\overline{I}_P = \inf\limits_T \{S_P(T)\}$，称为 P 的外面积 .

定义2: 若平面图形 P 满足 $\underline{I}_P = \overline{I}_P$，则称 P 可求面积，

并把共同值 $I_P = \underline{I}_P = \overline{I}_P$ 称为 P 的面积.

如: 设 $D = \{(x, y) \mid x, y \in Q \cap [0,1]\}$，则 D 不可求面积.

定理1: 平面有界图形 P 可求面积的充要条件是:

对任意 $\varepsilon > 0$，总存在直线网 T, 使得

$$S_P(T) - s_P(T) < \varepsilon .$$

推论: 平面有界图形 P 的面积为零的充要条件是

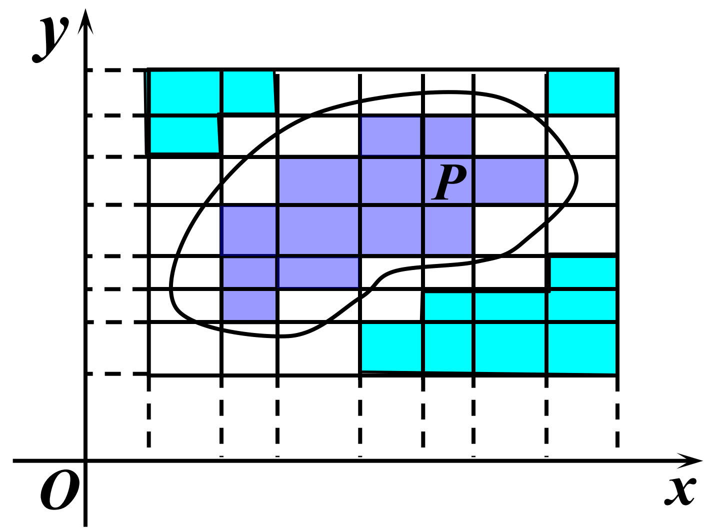
$\overline{I}_P = 0$, 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在直线网 T, 使得

$$S_P(T) < \varepsilon ,$$

或对任意 $\varepsilon > 0$, 平面图形 P 能被有限个面积和小于 ε 的小矩形所覆盖.

定理2: 平面有界图形 P 可求面积的充要条件是:

P 的边界 K 的面积为零.



$$S_K(T) = S_P(T) - s_P(T)$$

定理3: 若曲线 K 为定义在 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 的图象, 则曲线 K 的面积为零.

推论2: 参数方程 $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\ (\alpha\le t\le\beta)$ 所表示的光滑曲线或按段光滑曲线, 其面积为零.

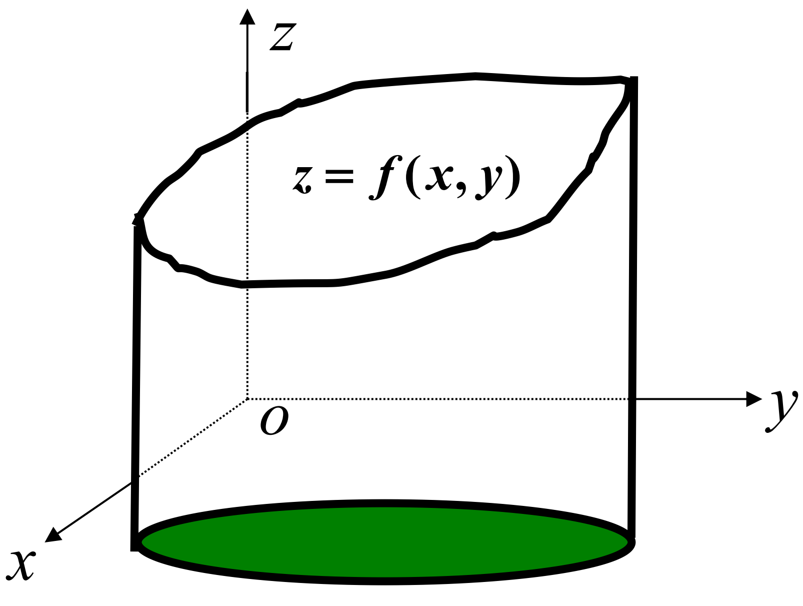
推论3: 由光滑曲线或按段光滑曲线所围的平面图形是可求面积的.

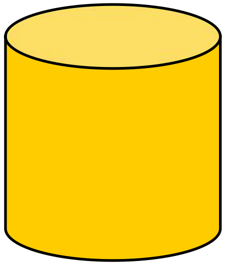
注: 本章所讨论的有界闭区域均指由光滑或分段光滑曲线所围成的有界闭区域.

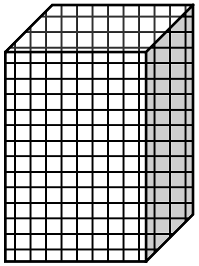
二、二重积分的定义及其存在性

求曲顶柱体的体积

设 D 为可求面积的有界闭区 域, $f(x,y)\geq 0$ 在 D 上连续. 求以 $z=f(x,y)$ 为顶, D 为底的柱体体积.







平顶柱体体积=底面积×高

思想：分割、近似、求和、取极限

(1) 分割 D, 得到 n 个小曲顶柱体.

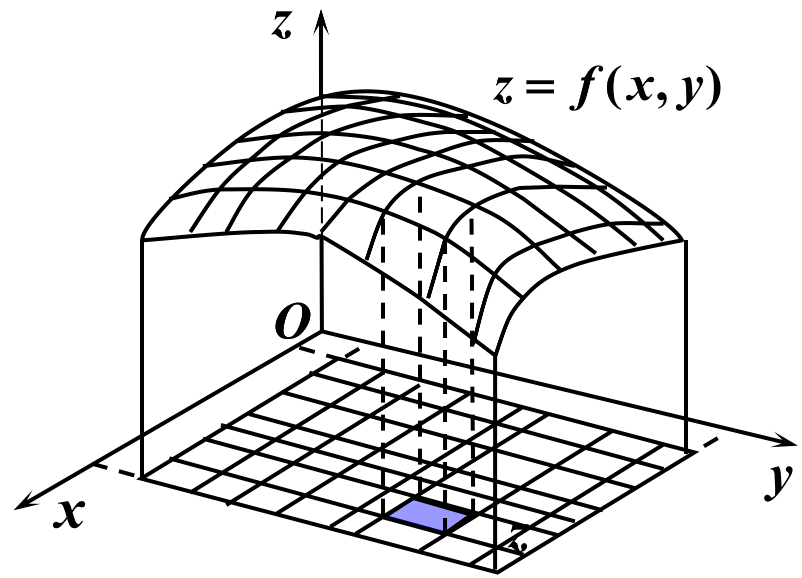
(2) 用平顶柱体近似：

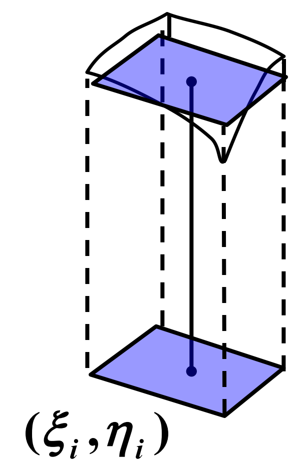
$$\Delta v_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

(3) 求和：$V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta v_i$.

(4) 取极限：

$$V = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$





设 D 为平面上的可求面积的 有界闭区域 .

用任意曲线将 D 分为 n 个可求面积的小区域 ,

$$\text{分割}\,T:\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\ .$$

记 $\Delta\sigma_i$ 为 σ_i 的面积 , d_i 为 σ_i 的直径 ;

记 $\|T\| = \max\{d_i | 1\le i\le n\}$, 称为分割 T 的细度.

对任意 $(\xi_i,\eta_i)\in\sigma_i$, 称 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 为 T 的一个积分和 .

定义3： 设 $f(x,y)$ 是定义在有界闭区域 D 上的函数, J 为确定的实数. 若对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得对于 D 的任何分割 T, 当 $\|T\|<\delta$ 时,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i - J\right| < \varepsilon,$$

则称 $f(x,y)$ 在 D 上可积, 数 J 称为 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分, 记为

$$J = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma.$$

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,d\sigma = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

积分区域

被积函数

积分变量

被积表达式

面积元素

积分和

例1、设 $D=[0,1]\times[0,1]$，证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D\cap Q\times Q\\ 0, & 其它\end{cases}$$

在 D 上不可积.

注1：二重积分的值只与被积函数和积分区域有关，与积分变量的选取和区域的划分无关.

注2：几何意义：当 $f(x,y)\geq 0$ 且在 D 上连续时，$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 为曲顶柱体的体积．

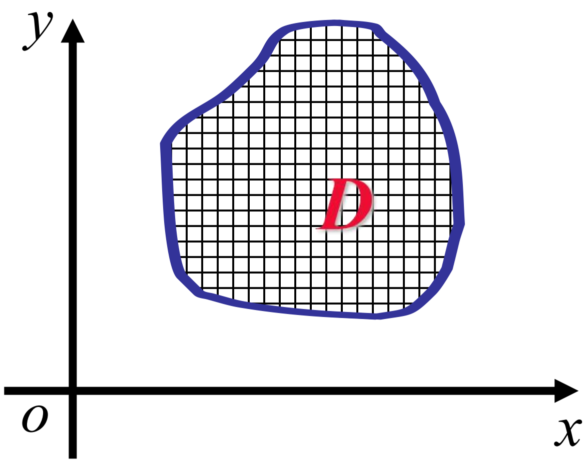
注3：当 $f(x,y)\equiv 1$ 时，$\iint\limits_D d\sigma$ 为区域 D 的面积．

注4: 若 $f(x,y)$ 在区域 D 可积，取

T: 平行于坐标轴的直线网.

- $\Delta\sigma = \Delta x \Delta y,$

  $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$



记 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

注5: 若 $f(x,y)$ 在有界区域 D 可积，则 $f(x,y)$ 在 D 上有界.

- 设函数 $f(x,y)$ 在 D 上有界，分割 T: $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$.

令 $M_i=\sup\limits_{(x,y)\in\sigma_i} f(x,y)$，$m_i=\inf\limits_{(x,y)\in\sigma_i} f(x,y)$.

上和 $S(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta\sigma_i$，下和 $s(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta\sigma_i$.

定理4： 函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上可积的充要条件是

$$\lim_{\|T\|\to 0} S(T) = \lim_{\|T\|\to 0} s(T).$$

定理5： 函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上可积的充要条件是对于任意正数 ε，存在 D 的某个分割 T，使得

$$S(T) - s(T) < \varepsilon.$$

定理6： 有界闭区域 D 上的连续函数可积.

定理7： 设 $f(x, y)$ 是定义在有界闭域 D 上的有界函数. 若 $f(x, y)$ 的不连续点构成的集合面积为 $\mathbf{0}$, 则 $f(x, y)$ 在 D 上可积.

三、二重积分的性质

性质1(线性性)：

若 $f(x,y), g(x,y)$ 均在 D 上可积，则

$$\iint_D [\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y)]d\sigma = \alpha \iint_D f(x,y)d\sigma \pm \beta \iint_D g(x,y)d\sigma.$$

性质2(区域可加性)：

若 $f(x,y)$ 在 D_1, D_2 上都可积，且 D_1, D_2 无公共内点，则 $f(x,y)$ 在 $D = D_1 \cup D_2$ 可积，

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

性质3(单调性)：

若 $f(x,y),g(x,y)$ 均在 D 上可积, 且

$$f(x,y)\geq g(x,y),\ \ (x,y)\in D,$$

则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \geq \iint_D g(x,y)d\sigma.$$

性质4： 若 $f(x,y)$ 在 D 上可积，则 $|f(x,y)|$ 也在 D 上可积，且

$$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|d\sigma.$$

性质5（估值不等式）：

若 $f(x,y)$ 在 D 上可积，且 $m \le f(x,y) \le M$，

则
$$mS_D \le \iint_D f(x,y)\,d\sigma \le MS_D .$$

其中 S_D 表示区域 D 的面积．

性质6（积分中值定理）：

若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得：

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\,S_D.$$

例2、根据二重积分的几何意义，确定下列积分值.

(1) $\iint\limits_{D}(3-\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}\sigma$,其中$D: x^2+y^2 \le 9$.

(2) $\iint\limits_{D}\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\sigma$,其中$D: x^2+y^2 \le a^2$.

作业

习题21-1：3、4