# § 19.2 含参量反常积分

1. 含参量反常积分的一致收敛性
2. 含参量反常积分一致收敛的判别
3. 含参量反常积分的性质
4. 含参量无界函数的反常积分

# 一、含参量反常积分的一致收敛性

定义1：设函数 $f(x,y)$ 定义在 $R=I\times[c,+\infty)$ 上，

其中 $I$ 为区间. 若对任意 $x\in I$，反常积分

$\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 收敛到 $\Phi(x)$，则称

$$\Phi(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y,\quad x\in I$$

为定义在 $I$ 上含参量 $x$ 的(无穷限)反常积分.

即：$\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $I$ 上收敛到 $\Phi(x) \Leftrightarrow$

$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists M = M(\varepsilon, x) > c$，当

$A > M$ 时，有

$$\left| \int_c^A f(x,y)\,\mathrm{d}y - \Phi(x) \right| < \varepsilon.$$

注：若上述定义中 $M = M(\varepsilon)$，则得到一致收敛的定义.

**定义2:** 对含参量反常积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$,若$\forall \varepsilon > 0$,

$\exists M > c$,当$A > M$时,对$\forall x \in I$,有

$$\left|\int_c^A f(x,y)dy - \Phi(x)\right| < \varepsilon, \quad \left(\text{或} \left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dy\right| < \varepsilon,\right)$$

则称 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $I$ 上一致收敛于 $\Phi(x)$.

(或称 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $I$ 上一致收敛.)

**定理1：** 含参量反常积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $I$ 上

一致收敛的充要条件是

$$\lim_{A\to+\infty}\left(\sup_{x\in I}\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right|\right)=0.$$

例1、讨论含参量反常积分

$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y,\ x\in(0,+\infty)$$

的一致收敛性.

## 二、含参量反常积分一致收敛性的判别

**定理2:（一致收敛的柯西准则）** 含参量反常积分

$\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $I$ 上一致收敛的充要条件 是

$\forall \varepsilon > 0, \exists M > c$，对 $\forall A_1, A_2 > M$，$\forall x \in I$，有

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right| < \varepsilon .$$

含参量反常积分与函数项级数的一致收敛性的关系:

定理3:含参量反常积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $I$ 上一致收敛的充要条件是:对任一递增趋于 $+\infty$ 的递增数列 $\{A_n\}(A_1=c)$,函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x\,,y)\,\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

在 $I$ 上一致收敛.

**定理4:（魏尔斯特拉斯判别法）** 设

$$|f(x,y)| \le g(y),\ \ (x,y) \in I \times [c,+\infty).$$

若 $\int_c^{+\infty} g(y)\,\mathrm{d}y$ 收敛，则 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $I$ 上一致收敛。

**例2、** 证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛 .

**定理5(狄利克雷判别法)：** 设对 $f(x,y)$ , $g(x,y)$ , 有

(i) $\forall A>c$ , $\int_c^A f(x,y)dy$ 对参量 $x$ 在 $I$ 上一致有界,

即 $\exists M>0$ , $\forall A>c$ , $\forall x\in I$ , 有 $\left|\int_c^A f(x,y)dy\right|\le M$;

(ii) $\forall x\in I$ , $g(x,y)$ 为关于 $y$ 的单调函数 , 且

$$g(x,y) \rightrightarrows 0 \ (y\to+\infty, x\in I).$$

即 $\forall \varepsilon>0$ , $\exists B>c$ , 当 $y>B$ 时 , $\forall x\in I$ , 有 $|g(x,y)|<\varepsilon$.

则 $\int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dy$ 在 $I$ 上一致收敛 .

(函数项级数狄利克雷判别法)若

(i) $\sum u_n(x)$ 部分和数列在 $I$ 上一致有界 ;

(ii) $\forall x\in I$, $\{v_n(x)\}$为单调数列 ;

且 $\{v_n(x)\}$在 $I$ 上一致收敛到 0 ,

则 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛 .

**例3、** 证明$\int_1^{+\infty}\frac{y\sin xy}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$在$[a,b]$上一致收敛，

其中$b>a>0$.

**注：** $\int_1^{+\infty}\frac{y\sin xy}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛.

**定理6(阿贝尔判别法)：** 设对 $f(x,y)$ , $g(x,y)$ , 有

(i) $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $I$ 上一致收敛;

(ii) $\forall x \in I$ , $g(x,y)$ 为关于 $y$ 的单调函数 , 且 $g(x,y)$ 对参量 $x$ 在 $I$ 上一致有界 , 即

$\exists M > 0$ , $\forall y \in [c,+\infty)$, $\forall x \in I$ , 有 $|g(x,y)| < M$ .

则 $\int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $I$ 上一致收敛 .

(函数项级数阿贝尔判别法) 若

(i) $\sum u_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛 ;

(ii) $\forall x \in I$, $\{v_n(x)\}$为单调数列 ;

且 $\{v_n(x)\}$在 $I$ 上一致有界 ,

则 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛 .

**例4、** 证明$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$在$[0,+\infty)$上一致收敛 .

## 三、含参量反常积分的性质

定理7(连续性)：设 $f(x,y)$ 在 $I\times[c,+\infty)$ 上连续，若

$$\Phi(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

在 $I$ 上一致收敛，则 $\Phi(x)$ 在 $I$ 上连续．即

$$\int_c^{+\infty} f(x_0,y)dy=\lim_{x\to x_0}\int_c^{+\infty} f(x,y)dy\ (\forall x_0\in I).$$

(函数项级数的连续性)：

设 $\{u_n(x)\}$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数列，若 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$，则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上也连续．

**定理8(可微性)：** 设 $f(x,y), f_x(x,y)$ 在 $I\times[c,+\infty)$ 上连续. 若 $\Phi(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $I$ 上收敛，$\int_c^{+\infty} f_x(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $I$ 上一致收敛，则 $\Phi(x)$ 在 $I$ 上可微，且 $\Phi'(x)=\int_c^{+\infty} f_x(x,y)\,\mathrm{d}y$.

(函数项级数的逐项求导性)：

设 $\{u_n'(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数列，$x_0\in[a,b]$ 为 $\sum u_n(x)$ 的收敛点，且 $\sum u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则 $\sum\left(\frac{d}{dx}u_n(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(\sum u_n(x)\right)$.

例5、利用反常积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

计算 $\varphi(r) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos rx \, \mathrm{d}x$ .

**定理9(可积性)**: 设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上连续，若

$$\Phi(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛，则 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

(函数项级数的逐项可积性):

设 $\{u_n(x)\}$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数列，若 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则

$$\sum\int_a^b u_n(x)\,dx=\int_a^b\Big(\sum u_n(x)\Big)dx.$$

例6、设 $p>0, b>a$，计算

$$J=\int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x .$$

例7、计算狄利克雷积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x .$$

## 四、含参量无界函数的反常积分

定义3：设函数 $f(x,y)$ 定义在 $R=[a,b]\times[c,d)$ 上，

对 $x\in D\subset[a,b]$，$y=d$ 为 $f(x,y)$ 的瑕点.

若 $\forall x\in[a,b],\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 收敛到 $\Phi(x)$，则称

$$\Phi(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y,\quad x\in[a,b]$$

为定义在 $[a,b]$ 上含参量 $x$ 的(无界函数)反常积分。

**定义4:** 对含参量反常积分 $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$，若$\forall \varepsilon > 0$，

$\exists 0 < \delta < d-c$，当$0 < \eta < \delta$时，对$\forall x \in [a,b]$，有

$$\left| \int_c^{d-\eta} f(x,y)dy - \Phi(x) \right| < \varepsilon, \quad \left(\text{或} \left| \int_{d-\eta}^{d} f(x,y)dy \right| < \varepsilon\right)$$

则称 $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\Phi(x)$.

(或称 $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.)

## 作业

习题19-2：1(2)、2、4(2)