§ 19.3　欧拉积分

1. Γ函数
2. B 函数
3. Γ函数与 B 函数之间的关系

一、Γ函数

Γ函数：$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x\ \ (s>0).$

- n维单位球面面积：$S_n=\dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$

- n维单位球体积：$V_n=\dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$

1、Γ函数的定义域：$s > 0$.

$$\Gamma(s) = \underbrace{\int_0^1 x^{s-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x}_{\phi(s)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x}_{\psi(s)}.$$

$\phi(s), \psi(s)$ 在 $s > 0$ 时均收敛.

2、递推式 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$.

设 $n<s\leq n+1$,则

$$\Gamma(s+1)=s(s-1)\cdots(s-n)\Gamma(s-n) .$$

- $\Gamma(s)\ (s>0)$ 的函数值由 $\Gamma(s)\ (0<s\leq 1)$ 确定 .

(1) $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x=1$.

$$\boxed{\Gamma(n+1)=n!}$$

$$(2)\ \Gamma(\tfrac{1}{2})=\int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}.$$

（利用 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$）

例1、证明 $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3、$\Gamma(s)$ 任意阶可导 $(s>0)$.

$$\Gamma'(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x\,.$$

$$\Gamma''(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\ln^2 x\,\mathrm{d}x\,.$$

…… ……

$$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\ln^n x\,\mathrm{d}x\,.$$

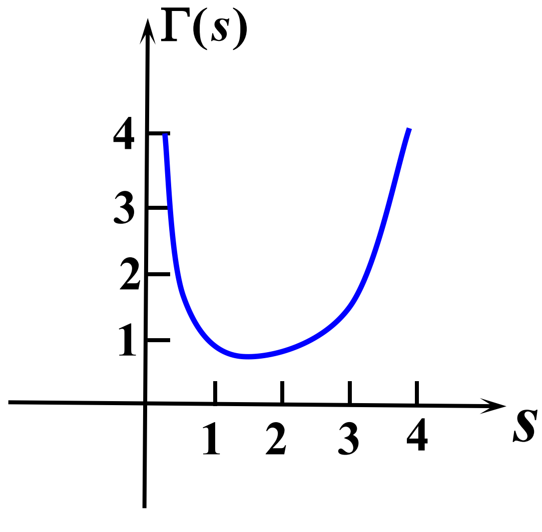
4、Γ函数图象的讨论.

$\Gamma(s)>0$，$\Gamma''(s)>0$：$\Gamma(s)$ 下凸.

$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$：$\exists\, x_0\in(1,2)$ 为$\Gamma(s)$ 极小值点.

$$\lim_{s\to 0+}\Gamma(s)=+\infty.$$

$$\lim_{s\to +\infty}\Gamma(s)=+\infty.$$



二、B函数

B函数：$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$

1、B 函数定义域: $p>0, q>0.$

$$B(p,q)=\underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x}_{I(p,q)}+\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x}_{J(p,q)}.$$

当$p>0,q>0$时,$I(p,q)$与$J(p,q)$均收敛.

B 函数：$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$.

2、B 函数连续性： $B(p,q)$ 在 $p>0, q>0$ 连续.

3、B 函数对称性： $B(p,q)=B(q,p)$.

$$B(p,1)=B(1,p)=\frac{1}{p}.$$

4、递推式：

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p,q-1)\quad(p>0\,,q>1)\,,$$

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p-1,q)\quad(p>1\,,q>0)\,,$$

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{(p-1)(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)}\mathrm{B}(p-1,q-1)$$

$$(p>1\,,q>1)\,.$$

三、Γ函数与 B 函数之间的关系

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

例2、求 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}u\,\mathrm{d}u$；(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}u\,\mathrm{d}u$.