§ 22.3　高斯公式与斯托克斯公式

1 高斯公式

2 斯托克斯公式

一、高斯（Gauss）公式

定理1： 设 V 是一空间有界闭区域，其边界 ∂V 是由有限块光滑或分片光滑的曲面构成．若函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\in C^{(1)}(V)$，则

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\oiint_{\partial V^+} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中，∂V^+ 表示 V 的边界 ∂V 的外侧．

- $$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}V = \oiint\limits_{\partial V^+} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

设 $V: z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),\ (x,y) \in D_{xy}$.

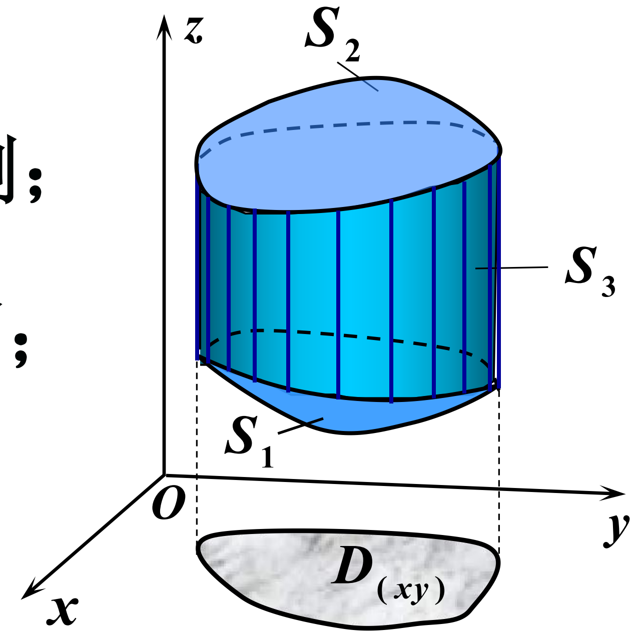
$$\partial V^+ = S_1 + S_2 + S_3$$

$S_1: z = z_1(x,y), (x,y) \in D_{xy}$,下侧;

$S_2: z = z_2(x,y), (x,y) \in D_{xy}$,上侧;

$S_3: z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),$

$(x,y) \in \partial D_{xy}$, 外侧.



- 高斯公式建立了空间闭区域上的三重积分与其定向边界曲面上的第二型曲面积分之间的关系;
- 在高斯公式中，取 $P = x, Q = y, R = z$,则 V 的体积

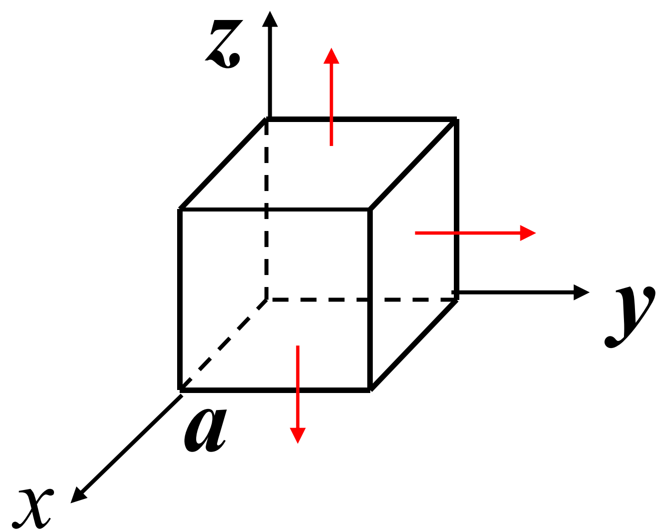
$$V = \iint\limits_{\partial V^+} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\partial V^+} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint\limits_{\partial V^+} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}\iint\limits_{\partial V^+} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例1、求 $\oiint\limits_{S} y(x-z)dydz + x^2dzdx + (y^2+xz)dxdy$，

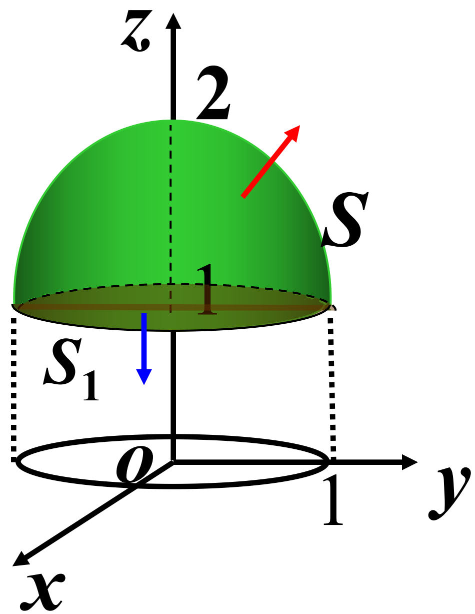
其中 S 为 $x=0, y=0, z=0$ 与 $x=a, y=a, z=a$

这六个平面所围的正方 体表面的外侧 $(a>0)$.



例2、设 S 为曲面 $z=2-x^2-y^2(1\le z\le 2)$ 的上侧，求

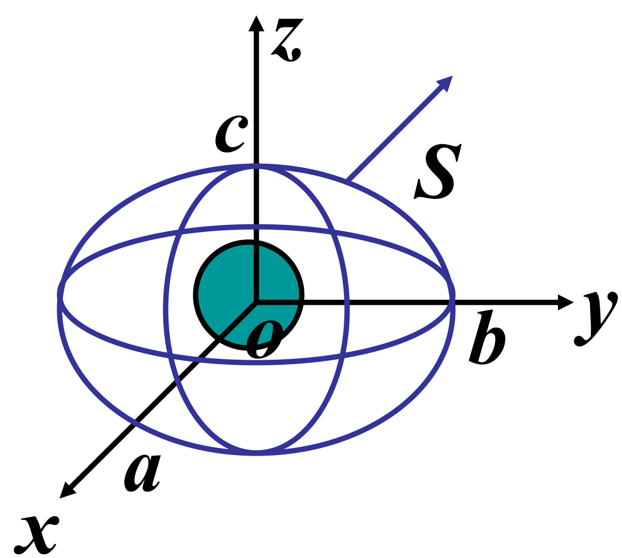
$$I=\iint_S (x^3z+x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x^2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



思考:求 $I = \oiint\limits_S \dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$,其中 S 为

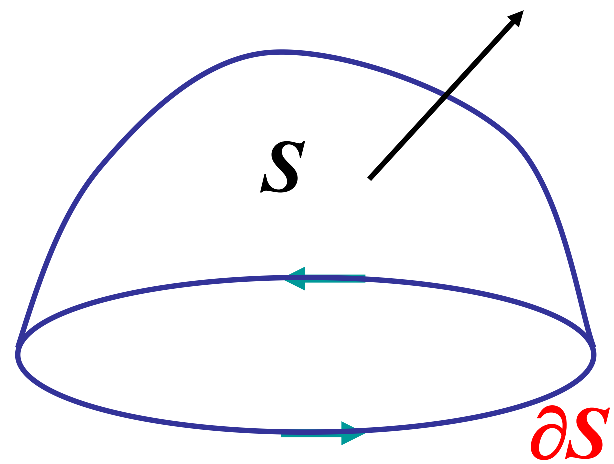
(1) 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧;

(2) 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.



二、斯托克斯公式

规定： 双侧曲面 S 的侧与其边界曲线 ∂S 的正向 ∂S^+ 满足右手法则.



定理2:设 S 是一张光滑或分片光滑 的定向曲面 , S 的正向边界 ∂S^+ 为光滑或分段光滑的闭 曲线 .若函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\in C^{(1)}(S)$,则

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$=\oint_{\partial S^+} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

斯托克斯公式还可写为：

$$\iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\partial S^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z\,.$$

或用第一型曲面积分表示：

$$\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S = \oint_{\partial S^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z\,.$$

斯托克斯公式的实质：

建立了定向曲面上的第二型曲面积分与其边界曲线上的第二型曲线积分之间的联系。

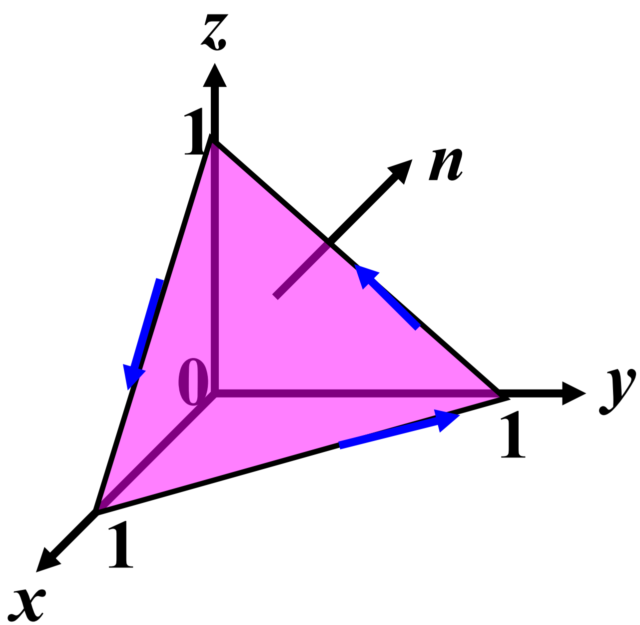
斯托克斯公式 $\xrightarrow{\text{特殊情形}}$ 格林公式

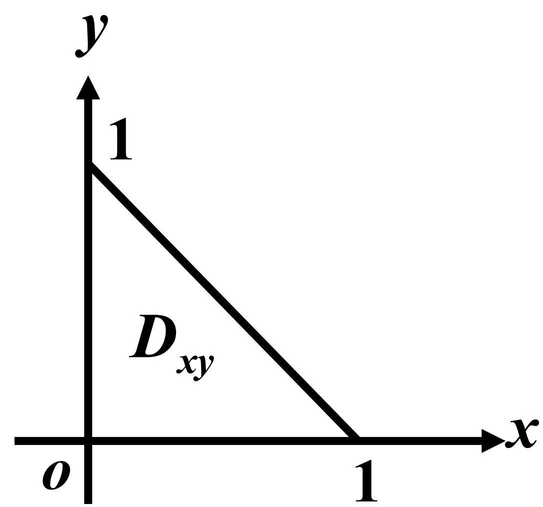
(S 是 xoy 面上的平面区域时)

例3、计算曲线积分 $\oint_{\Gamma}(2y+z)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-x)\mathrm{d}z$,

其中 Γ 是平面 $x+y+z=1$ 与各坐标面的交线,

从 z 轴正向看去 , Γ 取逆时针方向 .





定理3: 设 V 是空间上的单连通区域，函数 $P(x,y,z)$,

$Q(x,y,z), R(x,y,z) \in C^{(1)}(V)$，则以下条件等价：

(1) 对 V 内任一条分段光滑闭曲 线 L，有

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = 0 .$$

(2) $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 在 V 内与路线无关.

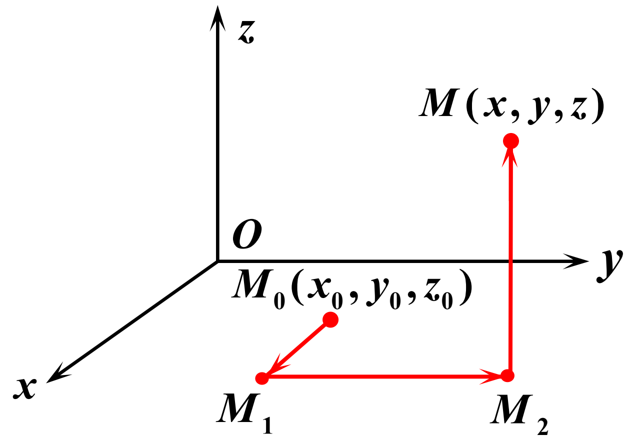
(3) 在 V 内存在 $u(x,y,z)$，使 $\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$.

(4) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x},\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y},\ \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}$ 在 V 内处处成立 .

例4、验证曲线积分

$$\int_L (y+z)\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z$$

与路线无关, 并求被积表达式的原函数 $u(x,y,z)$.



作业

习题22-3：1(3)(4)(5)、3(2)