第二十二章　曲面积分

1. 第一型曲面积分
2. 第二型曲面积分
3. 高斯公式与斯托克斯公式

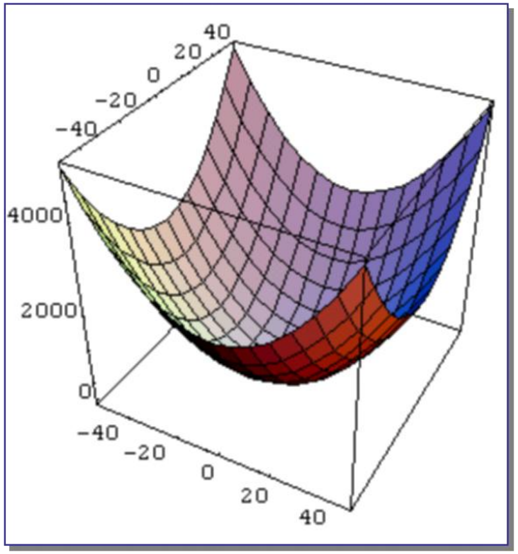
§ 22.1　第一型曲面积分

1. 第一型曲面积分的背景
2. 第一型曲面积分的定义
3. 第一型曲面积分的计算

一、第一型曲面积分的背景

求面密度为连续函数 $f(x,y,z)$ 的光滑曲面 S 的质量 .

光滑曲面：曲面上各点处都有切平面，且当点在曲面上连续移动时，切平面也连续转动。



(1) 分割：将曲面 S 分割为小曲面 $S_i (1 \le i \le n)$,

(ξ_i, η_i, ζ_i) 为 S_i 中任一点.

(2) 近似：

$$\Delta m_i \approx f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i .$$

(3) 求和：

$$M = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i .$$

(4) 取极限：

$$M = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i .$$

二、第一型曲面积分的定义

定义： 设 S 为空间中的可求面积的 曲面，$f(x,y,z)$ 在 S 上有界. 对曲面 S 作分割 $T: S_1,\cdots,S_n$，记 S_i 的面积为 ΔS_i，$\|T\| = \max\limits_{1\le i\le n}\{S_i$ 的直径$\}$.

任取 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in S_i (1\le i\le n)$，若极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

存在且与 T 及 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(1\le i\le n)$ 的取法

无关,则称此极限为 $f(x,y,z)$ 在曲面 S 上的

第一型曲面积分 ,记作

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

即 $$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

第一型曲面积分的性质：

(1) 若 $f(x,y,z)\in C(S)$，则 $\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 存在．

(2) 若 $f(x,y,z)\equiv 1$，则 $\iint\limits_S \mathrm{d}S$ 为曲面 S 的面积．

(3) 线性性：

$$\iint\limits_S [\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)]\mathrm{d}S = \alpha\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S+\beta\iint\limits_S g(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

(4) 曲面可加性：若 $S = S_1 + S_2$，则

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{S_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S + \iint_{S_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S.$$

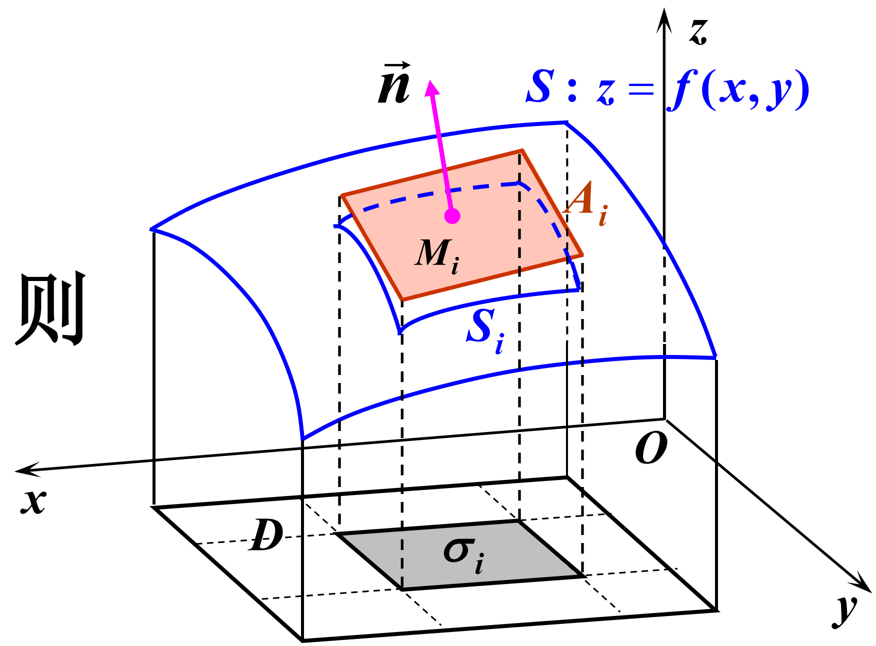
三、第一型曲面积分的计算

- 设光滑曲面 $S: z = z(x, y)$，
  其中 $(x, y) \in D_{xy}$.

若 $f(x,y,z)$ 在 S 上连续，则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S =$$

$$\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



- 若 $S: y=y(x,z),(x,z)\in D_{zx}$,则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=$$

$$\iint_{D_{zx}} f[x,y(x,z),z]\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

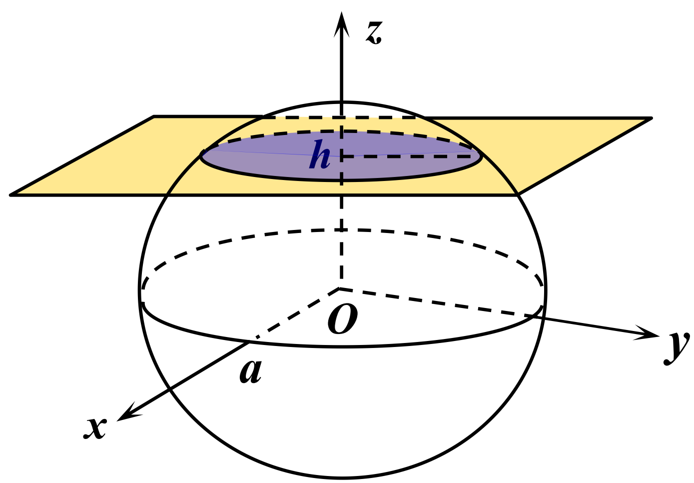
- 若 $S: x=x(y,z),(y,z)\in D_{yz}$,则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=$$

$$\iint_{D_{yz}} f[x(y,z),y,z]\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

例1、求 $\iint\limits_{S} \frac{\mathrm{d}S}{z}$,其中$S$是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$

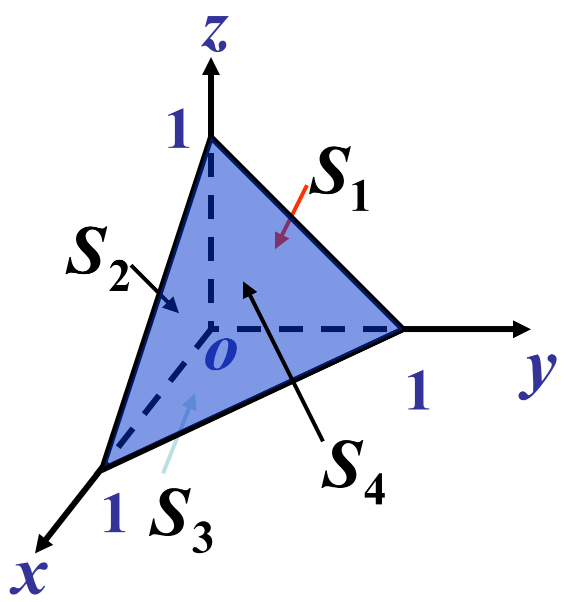
被平面 $z=h\,(0<h<a)$ 所截的顶部 .



答案: $2\pi a\ln\frac{a}{h}$.

例2、求 $\oint\!\!\!\!\!\iint_{S} xyz\,\mathrm{d}S$，$S$ 是由 $x=0, y=0, z=0,$

$x+y+z=1$ 所围四面体整个边界曲 面.



答案: $\dfrac{\sqrt{3}}{120}$.

作业

习题22-1：1(2)(3)