Обыкновенные дифференциальные уравнения

Оглавление

Вопрос 1: Обыкновенное дифференциальное уравнение. Решение, интегральные кривые, общее решение.

Определение: Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка - это уравнение вида $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, где F - заданная функция $(n+2)$ переменных, x - независимая скалярная переменная функции F, $y = y(x)$ - неизвестная функция, а $y^{(k)}$ - её производные порядка k.

Определение: Решением обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка называется функция $y : I \to \mathbb{R}^m$, где $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ - интервал существования решения, такая что при подстановке этой функции в заданное уравнение оно обращается в тождество:

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad x \in I$$

Определение: Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка - это графики решений этого уравнения.

Определение: Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка - множество всех решений, заданное неявно уравнением $\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$ или явной формулой $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$, такое что выполняются условия:

1. $\forall C_1, \ldots, C_n$: если запись $\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$ для любого набора констант задаёт функцию, то эта функция обязательно является решением,
2. Любое решение уравнения задаётся уравнением $\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$ при некоторых значениях констант $C_1, \ldots, C_n$ на всей своей области определения.

Вопрос 2: Уравнение в дифференциалах. Поле направлений, леммы об интегральной кривой уравнения.

Определение: Уравнение в дифференциалах - уравнение вида $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$, где $M, N : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $(M(x, y), N(x, y)) \neq (0, 0)$ для всех $(x, y) \in G$.

Касательная плоскость

С каждой точкой $(x, y) \in G$ свяжем касательную плоскость $T_{(x,y)}$ с координатами (dx, dy), начало координат которой совмещено с точкой (x, y), а оси координат параллельны соответствующим осям координат области G.

Определение: Поле направлений l - отображение $l : (x, y) \in G \to l(x, y) \subset T_{(x,y)}$, где $l(x, y)$ - прямая, проходящая через точку $(x, y) \in G$.

Определение: Векторное поле v - отображение $v : (x, y) \in G \to v(x, y) \in T_{(x,y)}$, где $v(x, y)$ - вектор, выходящий из точки $(x, y) \in G$.

Определение: Поле нормалей - векторное поле $v = (M, N)$, которое называется полем нормалей, так как в каждой точке оно ортогонально направлению интегральной кривой (вектор v служит нормалью к прямой поля направлений $l(x, y)$).

Определение: Кривую $\Gamma \subset G$ назовем интегральной кривой поля направлений l, если она в каждой своей точке $(x, y) \in \Gamma$ касается прямой $l(x, y)$.

Замечание: Более конкретно, интегральная кривая может быть задана как $\Gamma = \{(x, y) \in G' \mid \varphi(x, y) = 0\}$, где $G' \subset G$, $\varphi \in C^1(G')$ и $\nabla\varphi(x, y) = (\varphi'_x(x, y), \varphi'_y(x, y)) \neq 0$ для всех $(x, y) \in \Gamma$.

Лемма: Критерий интегральной кривой.

Кривая $\Gamma \subset G$ является интегральной для уравнения в дифференциалах тогда и только тогда, когда $\nabla\varphi(x, y) \parallel \nu(x, y)$.

Доказательство:

Кривая Γ касается поля направлений l тогда и только тогда, когда в каждой точке $(x, y) \in \Gamma$ касательная к Γ совпадает с прямой $l(x, y)$, что эквивалентно условию пропорциональности $\varphi'_x(x, y) : \varphi'_y(x, y) = M(x, y) : N(x, y)$ или равенству $M\varphi'_y - N\varphi'_x = 0$.

Вопрос 3: Уравнение первообразной. Интеграл уравнения в дифференциалах. Формула общего решения.

Определение: Уравнение первообразной (ОДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной) - уравнение вида $y' = f(x)$, где $f : I \to \mathbb{R}$.

Теорема: Общее решение уравнения первообразной.

Если $f \in C(I)$, то при любом фиксированном $x_0 \in I$ общее решение уравнения первообразной задается формулой:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi + C$$

Определение: Скалярная функция $\varphi \in C^1(G)$ с ненулевым градиентом называется интегралом уравнения в дифференциалах, если она принимает постоянное значение вдоль каждой интегральной кривой.

Утверждение: Интеграл уравнения в дифференциалах существует для любого уравнения в полных дифференциалах и однозначно определен с точностью до константы.

Теорема: Общее решение уравнения в дифференциалах.

Если φ - интеграл уравнения в дифференциалах, то его общее решение задается уравнением $\varphi(x, y) = C$.

Доказательство:

Пусть $\varphi(x, y) = C$ - семейство интегральных кривых. Тогда $\nabla\varphi(x, y) \cdot (dx, dy) = 0$, что совпадает с исходным уравнением. Обратно, любое решение уравнения является уровнем интеграла.

Вопрос 4: Уравнение в полных дифференциалах.

Определение: Уравнение в полных дифференциалах - уравнение в дифференциалах, для которого существует потенциал.

Определение: Потенциал - функция $\varphi \in C^1(G)$, удовлетворяющая равенству $\nabla\varphi(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$ для всех $(x, y) \in G$.

Свойства уравнений в полных дифференциалах

1. Всякий потенциал уравнения в дифференциалах является его интегралом.
2. Всякий интеграл уравнения в дифференциалах служит потенциалом другого уравнения, получаемого из исходного умножением коэффициентов M и N на интегрирующий множитель $\mu : G \to \mathbb{R}$, где $\nabla\varphi(x, y) = \mu(x, y) \cdot (M(x, y), N(x, y))$.
3. Уравнение в полных дифференциалах с известным потенциалом решается согласно Теореме 3.2 об общем решении уравнения в дифференциалах.
4. Левая часть уравнения в полных дифференциалах совпадает с полным дифференциалом его потенциала: $d\varphi(x, y) = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$.
5. Необходимое условие: Для того чтобы уравнение в дифференциалах с коэффициентами $M, N \in C^1(G)$ было уравнением в полных дифференциалах, необходимо выполнение равенства $M'_y(x, y) = N'_x(x, y)$ для всех $(x, y) \in G$.

Доказательство:

Поскольку $M, N \in C^1(G)$, то $\varphi'_x, \varphi'_y \in C^1(G)$, следовательно $\varphi \in C^2(G)$. Тогда $M'_y(x, y) = \varphi''_{xy}(x, y) = \varphi''_{yx}(x, y) = N'_x(x, y)$.

Вопрос 5: Автономное уравнение. Общее решение.

Единственность при наличии особой точки. Дифференциальный признак единственности.

Определение: Автономное уравнение - уравнение вида $y' = f(y)$, где $f : I \to \mathbb{R}$, заданное в области $G = \mathbb{R} \times I$.

Замечание: Автономное уравнение можно записать в виде уравнения в дифференциалах: $dy = f(y)\,dx$.

Общее решение автономного уравнения

Пусть на интервале $J \subset I$ нет особых точек (точек, где $f(y) = 0$). Тогда автономное уравнение приводится к уравнению в полных дифференциалах $dx = \frac{1}{f(y)}\,dy$, где $(x, y) \in G' = \mathbb{R} \times J$.

Если $f \in C(J)$, то оно имеет потенциал $\varphi(x, y) = x - \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{f(\eta)}$ и общее решение задается формулой:

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{f(\eta)} + C$$

Поскольку f не обнуляется на J, функция $x(y)$ монотонна и обратима, что позволяет неявно задавать $y(x)$.

Особые точки

Если $a \in I$ - особая точка ($f(a) = 0$), то прямая $y = a$ является интегральной кривой автономного уравнения.

Определение: Точка $(x_0, y_0) \in G$ называется:

- точкой существования, если через нее проходит хотя бы одна интегральная кривая,
- точкой единственности, если любые две интегральные кривые, проходящие через эту точку локально совпадают.

Лемма: Свойства точек для автономного уравнения.

Если $f \in C(I)$, то для автономного уравнения любая точка $(x, y) \in G$ является точкой существования, причем:

- если y - неособая точка, то (x, y) - точка единственности,
- если $y = a$ - изолированная особая точка, то (x, y) - точка единственности тогда и только тогда, когда расходятся оба интеграла $\int_{a}^{a \pm 0} \frac{d\eta}{f(\eta)}$.

Доказательство:

Пусть a - изолированная особая точка, где $f(y) > 0$ при $y_0 \le y < a$. Изучим поведение интегральной кривой вблизи точки (x_0, a) при $y \to a - 0$.

1. Случай конечного интеграла: Пусть $\int_{y_0}^{a-0} \frac{d\eta}{f(\eta)} = x_1 < \infty$. Тогда $\lim_{y \to a-0} x(y) = x_1 + C = x_0$, где $C = x_0 - x_1$. Следовательно, через (x_0, a) проходит бесконечно много интегральных кривых, что нарушает единственность.
2. Случай бесконечного интеграла: Пусть интеграл расходится. Тогда интегральные кривые, подходящие к прямой $y = a$ снизу, приближаются к ней асимптотически при $x \to \infty$, не достигая ее. Таким образом, единственность сохраняется.

Следствие 6 (Дифференциальный признак единственности):

Если $f \in C(I)$ и в изолированной особой точке $a \in I$ существует производная $f'(a)$, то все точки прямой $y = a$ являются точками единственности.

Доказательство:

1. $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$ при $h \to 0$.
2. Обозначим $L = |f'(a)| + 1$. Для достаточно малого $h_0 > 0$ имеем:

$$0 < f(a - h) \le |f'(a)(-h)| + |o(-h)| \le L|h| \text{ при } 0 < h < h_0.$$

3. Тогда $\int_{a-h_0}^{a-0} \frac{d\eta}{f(\eta)} = \int_{0}^{h_0} \frac{dh}{f(a-h)} \ge \int_{0}^{h_0} \frac{dh}{Lh} = \infty$.
4. Согласно Лемме 5, это обеспечивает единственность.

Вопрос 6: Уравнение с разделяющимися переменными.

Определение: Уравнение с разделяющимися переменными - уравнение вида $P(x)Q(y)\,dx = R(x)S(y)\,dy$, где $P, R : I \to \mathbb{R}, Q, S : J \to \mathbb{R}$, заданное в области $G \subset \{(x, y) \in I \times J \mid (P(x)Q(y), R(x)S(y)) \neq (0, 0)\}$.

Замечание: В случае обыкновенного дифференциального уравнения оно записывается в виде $y' = f(x)g(y)$.

Особые случаи

Для точек (x_0, y_0), где $(R(x_0), Q(y_0)) = (0, 0)$, получаем интегральные кривые $x = x_0$ или $y = y_0$.

Теорема: Решение уравнения с разделяющимися переменными.

Если $P, R \in C(I)$ и $Q, S \in C(J)$, а функции Q, R не имеют нулей, то для уравнения с разделяющимися переменными в области G:

1. Для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ общее решение задается уравнением:
$$\int_{x_0}^{x} \frac{P(\xi)}{R(\xi)}\, d\xi = \int_{y_0}^{y} \frac{S(\eta)}{Q(\eta)}\, d\eta + C$$
2. Все точки $(x, y) \in G$ являются точками существования и единственности.

Доказательство:

Уравнение с разделенными переменными $M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$, где $M(x) = \frac{P(x)}{R(x)}$, $N(y) = -\frac{S(y)}{Q(y)}$, является уравнением в полных дифференциалах с потенциалом $\varphi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} N(\eta)\,d\eta$. Поэтому к нему применима Теорема 3.2 об общем решении уравнения в дифференциалах.

Вопрос 7: Однородное уравнение.

Определение: Однородное уравнение — уравнение вида $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, заданное в области $G = \{(x, y) \mid x > 0, \frac{y}{x} \in I\}$ или $G = \{(x, y) \mid x < 0, \frac{y}{x} \in I\}$.

Лемма: Сведение к уравнению с разделяющимися переменными.

При переходе от переменных x, y к переменным x, z, связанным соотношением $z = \frac{y}{x}$, все решения однородного уравнения переходят в решения уравнения $z' = \frac{f(z)-z}{x}$, где $z \in I$, и наоборот.

Доказательство:

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right) \Leftrightarrow (xz(x))' = f\left(\frac{xz(x)}{x}\right) \Leftrightarrow xz'(x) + z = f(z(x)) \Leftrightarrow z'(x) = \frac{f(z(x)) - z}{x}$$

Вопрос 8: Постановка задачи Коши. Формулировка локальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Сведение задачи к интегральному уравнению.

Определение: Задача Коши — система вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

где $(t, x) \in G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : G \to \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$. Принята следующая терминология:

- функция f — правая часть уравнения,
- равенство $x(t_0) = x_0$ — начальное условие,
- начальная точка $(t_0, x_0) \in G$ состоит из начального момента t_0 и начального значения x_0,
- решение задачи Коши — функция $x : I \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая системе,
- переменная $x \in \mathbb{R}^n$ называется фазовой, а $t \in \mathbb{R}$ — временем.

Покопонентная запись

Если в $\mathbb{R}^n$ фиксирован базис, то задачу Коши можно записать покомпонентно:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(t, x^1, \ldots, x^n) \\ \ldots \\ \dot{x}^n = f^n(t, x^1, \ldots, x^n) \\ \\ x^1(t_0) = x_0^1 \\ \ldots \\ x^n(t_0) = x_0^n \end{cases}$$

Теорема: Локальная теорема существования и единственности.

Если $f, f'_x \in C(G)$, то $\forall (t_0, x_0) \in G$ ∃U(t_0): ∃! решение x: U(t_0) → $\mathbb{R}^n$ задачи Коши.

Лемма: Интегральное представление решения.

Если $f \in C(G)$, то функция x ∈ C(I) является решением задачи Коши тогда и только тогда, когда:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau, \quad t \in I$$

Следствие: Дифференцируемость решений.

Если $f \in C(G)$, то любое решение задачи Коши является непрерывно дифференцируемой функцией.

Вопрос 9: Инвариантность понятия производной. Эквивалентность норм. Определение топологии.

Инвариантность понятия производной

Производная $\dot{\mathbf{x}}(t)$ вектор-функции $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^n$ в точке $t \in I$ может пониматься двояко:

- либо в $\mathbb{R}^n$ как абстрактном линейном векторном пространстве,
- либо в $\mathbb{R}^n$ как координатном линейном пространстве.

Однако, они ведут к одному результату из-за существования изоморфизма между указанными двумя линейными топологическими пространствами.

Лемма: Эквивалентность норм.

Для любых двух норм $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$ в $\mathbb{R}^n$ существует константа C, удовлетворяющая оценке:

$$||x||_1 \leq C\, ||x||_2\,, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Доказательство:

В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны. Пусть $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$ — две нормы. Множество $\{x : ||x||_2 = 1\}$ компактно, поэтому функция $f(x) = ||x||_1$ достигает минимума $m > 0$. Тогда $||x||_1 \geq m||x||_2$. Аналогично существует M такое, что $||x||_2 \leq M||x||_1$.

Определение: Система открытых множеств τ в топологическом пространстве X называется его топологией, если обладает следующими свойствами:

1. $\varnothing, X \in \tau$,
2. если $U_1, U_2 \in \tau$, то $U_1 \cap U_2 \in \tau$,
3. если $U_\alpha \in \tau$ при каждом $\alpha \in A$, то $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$.

Предел последовательности

С помощью топологии можно определить предел последовательности $x_n \in X$ как такую точку $a \in X$, что для любой её окрестности $U(a) \in \tau$ существует число N, удовлетворяющее импликации $n > N \implies x_n \in U(a)$.

Также с помощью топологии можно определить предельные, внутренние, граничные точки множества, его открытость, закрытость, замкнутость, компактность и т.п.

Вопрос 10: Операторная норма. Оценка конечных приращений.

Операторная норма

Пусть пространство $\mathbb{R}^n$ нормированное (задана норма $|\cdot|$).

Операторная норма в пространстве $\operatorname{End}\mathbb{R}^n$ линейных операторов, действующих из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, задается формулой:

$$||A|| = \sup_{|x| \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax|, \quad A \in \operatorname{End}\mathbb{R}^n$$

Свойства операторной нормы

Имеют место следующие утверждения об операторной норме:

1. $||A|| < \infty$,

2. $||Ax|| \leq ||A|| \cdot |x|$,
3. $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$.

Доказательство: $||ABx|| \leq ||A|| \cdot ||Bx|| \leq ||A|| \cdot ||B|| \cdot ||x||$, откуда $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$.

Замечание: Операторная норма помогает понять максимально возможное растяжение вектора оператором.

Производная вектор-функция

Производная g' конечномерной функции $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ по конечномерной переменной x определяется как линейный оператор $g'(x) \in \operatorname{End} \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условию:

$$g(x+h) - g(x) = g'(x)h + o(|h|), \quad h \to 0$$

Лемма: Оценка конечных приращений.

Если $g \in C^1(B)$, где $B \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество, то:

$$|g(y) - g(x)| \leq \sup_{\xi \in B} \|g'(\xi)\| \cdot |y - x|, \quad x, y \in B$$

Доказательство:

Если $x \in B$ и $y = x + h \in B$, то $(x + \theta h) \in B$, где $\theta \in [0; 1]$. Обозначив $\varphi(\theta) = g(x + \theta h)$, получим:

$$|g(x+h) - g(x)| = |\varphi(1) - \varphi(0)| = \left| \int_0^1 \varphi'(\theta)\, d\theta \right| = \int_0^1 |g'(x+\theta h)h|\, d\theta \leq \int_0^1 \|g'(x+\theta h)\| \cdot |h|\, d\theta \leq \sup_{\xi \in B} \|g'(\xi)\| \cdot |h|$$

Откуда вытекает доказываемая оценка.

Вопрос 11: Пространство непрерывных функций. Принцип сжимающих отображений. Приближения Пикара.

Метрическое пространство

Пусть X — метрическое пространство с метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$.

Определение: Последовательность точек $x_n \in X$, где $n \in \mathbb{N}$, называется фундаментальной, если выполнено условие $\lim_{m,n \to \infty} \rho(x_m, x_n) = 0$.

Определение: Пространство X называется полным, если в нём всякая фундаментальная последовательность сходится.

Лемма: Замкнутое подпространство.

Если пространство X полно, то любое его замкнутое подпространство также полно.

Пространство непрерывных функций

Если для заданного отрезка $K \subset \mathbb{R}$ множество всех непрерывных функций $x : K \to \mathbb{R}^n$ наделить равномерной нормой (метрикой) $||x|| = \sup_{t \in K} |x(t)|$, то полученное нормированное (метрическое) пространство, обозначаемое через $C(K)$, будет полным.

Сходящиеся в этом пространстве последовательности функций называются **равномерно сходящимися на отрезке** K.

Определение: Отображение $A : X \to X$ называется **сжимающим**, если $\exists q < 1 : \rho(Ay, Ax) \leq q \cdot \rho(y, x)$, где $x, y \in X$.

Замечание: Если отображение является сжимающим, то оно также является непрерывным и даже липшицевым, где константа $L = q$.

Определение: Любая точка $x \in X$, удовлетворяющая равенству $Ax = x$, называется **неподвижной точкой** отображения A.

Лемма: Принцип сжимающих отображений.

Пусть $A : X \to X$ — сжимающее отображение в полном метрическом пространстве X. Тогда A имеет единственную неподвижную точку.

Доказательство:

1. Если бы существовало две разные неподвижные точки $x, y \in X$, то $\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \leq q\rho(x, y) < \rho(x, y)$, что невозможно.
2. Для нахождения неподвижной точки возьмём произвольную точку $x_0 \in X$ и образуем последовательность $x_n = A^n x_0$. Она фундаментальна, поскольку $\rho(x_n, x_m) \leq q^n \frac{\rho(x_0, x_1)}{1-q}$. Поэтому в полном пространстве существует предел x этой последовательности,

который и является неподвижной точкой.

Определение: **Приближения Пикара** на отрезке $K_T = [t_0 - T; t_0 + T]$ определяются рекуррентно:

$$x_0(t) \equiv x_0, \quad x_n = Ax_{n-1},$$

где оператор A определяется формулой $(Ax)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$.

Утверждение: Приближения Пикара на некотором отрезке K_T все одновременно определены и равномерно сходятся к решению интегрального уравнения задачи Коши.

Вопрос 12: Доказательство локальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Теорема: Локальная теорема существования и единственности.

Если $f, f'_x \in C(G)$, то для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ существует интервал $U(t_0) \subset \mathbb{R}$ такой, что задача Коши имеет единственное решение $x : U(t_0) \to \mathbb{R}^n$.

Доказательство:

Согласно Лемме 10 (сведение задачи Коши к интегральному уравнению), решение задачи Коши удовлетворяет интегральному уравнению $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$.

Рассмотрим оператор $A : C(K_T) \to C(K_T)$, где $K_T = [t_0 - T; t_0 + T]$:

$$(Ax)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

Покажем, что при достаточно малом $T > 0$ этот оператор сжимающий в пространстве $C(K_T)$ с равномерной нормой.

Для $x, y \in C(K_T)$:

$$||Ax - Ay|| \le \sup_{t \in K_T} \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))|\, d\tau \le LT||x - y||$$

где L — константа Липшица для f по x.

При $LT < 1$ оператор A сжимающий. Кроме того, A отображает замкнутый шар $\{x \in C(K_T) : ||x - x_0|| \le R\}$ в себя при достаточно малом T.

По принципу сжимающих отображений A имеет единственную неподвижную точку, которая является решением задачи Коши.

Вопрос 13: Единственность решения задачи Коши. Локальная единственность. Глобальная единственность.

Следствие: Локальная единственность.

В условиях Теоремы 8.1 любые два решения задачи Коши локально (вблизи t_0) совпадают.

Доказательство:

Пусть x', x'' - два решения задачи Коши, определенные в окрестности t_0. Тогда на некотором интервале $U(t_0)$ оба решения совпадают с единственным решением, существование которого гарантируется Теоремой 8.1.

Теорема: Глобальная единственность.

Если каждая точка области G является точкой единственности, то любые два решения x и y задачи Коши удовлетворяют равенству $x|_I = y|_I$, где $I = D(x) \cap D(y)$ - область определения обоих решений.

Доказательство:

Предположим, что решения различаются в точке $T \in I$. Пусть $t_1 = \inf\{t \ge t_0 \mid x(t) \ne y(t)\}$. Тогда $x(t) = y(t)$ для $t_0 \le t \le t_1$, и решения совпадают в точке t_1. Поскольку t_1 - точка единственности, решения совпадают и в окрестности t_1, что противоречит определению t_1.

Вопрос 14: Теорема Пеано (формулировка). Ломаная Эйлера. Лемма Арцела - Асколи.

Теорема: Теорема Пеано.

Если $f \in C(G)$, то для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ существует решение задачи Коши.

Замечание: В формулировке Теоремы Пеано условие непрерывности f нельзя ослабить.

Определение: Ломаная Эйлера - график функции φ, удовлетворяющей $\dot{\varphi}(t) = f(s, \varphi(s))$ на каждом интервале разбиения $[s_{i-1}; s_i]$, где s - точка из этого интервала.

Определение: Семейство Φ функций $\varphi : K \to \mathbb{R}^n$ называется равномерно ограниченным, если $\sup_{\varphi \in \Phi} ||\varphi|| < \infty$.

Определение: Семейство Φ называется равностепенно непрерывным, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ такое, что для любых $\varphi \in \Phi$ и $t, s \in K$ выполняется: $|t - s| < \delta \implies |\varphi(t) - \varphi(s)| < \varepsilon$.

Определение: Семейство Φ называется предкомпактным, если из любой его последовательности можно выбрать фундаментальную подпоследовательность.

Лемма 18 (Лемма Арцела - Асколи):

Всякое равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство $\Phi \subset C(K)$ предкомпактно.

Доказательство:

Семейство равномерно ограничено, поэтому имеет компактное замыкание. Равностепенная непрерывность обеспечивает, что предел последовательности непрерывен.

Вопрос 15: Доказательство теоремы Пеано.

Теорема: Теорема Пеано.

Если $f \in C(G)$, то для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ существует решение задачи Коши.

Доказательство:

Рассмотрим последовательность ломаных Эйлера на отрезке $K = [t_0, t_0 + T]$ с разбиением на n равных частей точками $t_0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = t_0 + T$, шаг $h = T/n$.

Ломаная Эйлера строится индуктивно:

- $x_0(t) = x_0$ на $[s_0, s_1]$
- $x_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{i-1}(\tau))\, d\tau$ на $[s_0, s_1]$
- На каждом интервале $[s_{i-1}, s_i]$ функция определяется как решение задачи Коши с начальным условием $x_i(s_{i-1}) = x_{i-1}(s_{i-1})$ и правой частью $f(t, x_{i-1}(t))$.

Семейство Φ_h всех таких ломаных равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на K.

Ограниченность следует из непрерывности f. Равностепенная непрерывность: на каждом участке функция либо линейна, либо является интегралом от непрерывной функции.

По Лемме 14.1 из любой последовательности ломаных можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность. Предел является решением задачи Коши.

Следствие: Если $f \in C(G)$, то для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ существует отрезок K, содержащий t_0, такой что:

- Для любого разбиения определена хотя бы одна ломаная Эйлера
- Любая равномерно сходящаяся последовательность ломаных со стремящейся к нулю нормой разбиения сходится к решению задачи Коши.

Вопрос 16: Продолжаемость решений. Максимальное продолжение решения. Единственность непродолжаемого решения.

Определение: Решение x называется продолжением решения y, если $y = x|_{D(y)}$.

Определение: Решение называется непродолжаемым (или максимально продолженным), если оно не имеет продолжений, отличных от самого себя.

Лемма: Продолжаемость решений.

Любое решение задачи Коши можно продолжить до непродолжаемого.

Доказательство:

Используя теорему о локальном существовании, решение можно последовательно продолжать до границы области определения.

Следствие: Если задача Коши имеет единственное непродолжаемое решение, то оно служит продолжением любого ее решения.

Теорема: Единственность непродолжаемого решения.

Если все точки области G являются точками $\exists!$, то для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ существует единственное непродолжаемое решение задачи Коши.

Доказательство:

По Лемме 16.1 любое решение можно продолжить до границы. Единственность следует из того, что все точки - точки единственности.

Вопрос 17: Продолжаемость до границы области. Пример не продолжаемости на всю ось.

Теорема: Продолжаемость до границы.

Если $f \in C(G)$, а x — непродолжаемое решение, то для любого компакта $C \subset G$ существует отрезок $K \subset D(x)$ такой, что $(t, x(t)) \notin C$ для $t \notin K$.

Утверждение: Непродолжаемое решение достигает границы области определения правой части.

Доказательство:

Если решение можно продолжить дальше, оно не является непродолжаемым. Если решение ограничено компактом, оно равномерно непрерывно и может быть продолжено.

Пример: Уравнение взрыва

Уравнение $\dot{x} = x^2$, заданное в $G = \mathbb{R}^2$, имеет точки $\exists!$, но решение $x(t) = -\frac{1}{t-C}$ не определено на всей прямой. Это показывает, что гладкость правой части не гарантирует неограниченную продолжаемость.

Вопрос 18: Лемма Гронуолла - Беллмана. Лемма о дифференциальном неравенстве.

Лемма: Лемма Гронуолла-Беллмана.

Если $u \in C(J)$, $J = [t_0; \beta)$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$, и $0 \leq u(t) \leq a + b\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau$, то $u(t) \leq ae^{b(t-t_0)}$.

Доказательство:

Обозначим $v(t) = a + b\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau$. Тогда $u(t) \leq v(t)$ и $v'(t) = bu(t) \leq bv(t)$.

Решая $v' \leq bv$, $v(t_0) = a$, получаем $v(t) \leq ae^{b(t-t_0)}$. Следовательно, $u(t) \leq ae^{b(t-t_0)}$.

Следствие: Если $u \in C(J)$, $J = (\alpha; \beta)$, и $0 \leq u(t) \leq a + b\left|\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau\right|$ для $t_0 \in J$, то $u(t) \leq ae^{b(t-t_0)}$.

Доказательство:

Применяя Лемму 18.1 к функции $u(t) = |x(t)|$.

Лемма: Дифференциальное неравенство.

Если $x \in C^1(J)$, $J = (\alpha, \beta)$, и $|\dot{x}(t)| \leq a + b|x(t)|$ для $a, b \geq 0$, то $|x(t)| \leq (|x(t_0)| + a|t - t_0|)e^{b|t-t_0|}$.

Доказательство:

Дифференцируя неравенство для $u(t) = |x(t)|$, получаем интегральное неравенство и применяем Лемму 18.1.

Вопрос 19: Теорема продолжаемости для линейной системы.

Линейная система

Задача Коши записывается как:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + F(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

где $A : I \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n$, $F : I \to \mathbb{R}^n$. Система однородная при $F = 0$, неоднородная иначе.

Теорема: Продолжаемость линейной системы.

Если $A, F \in C(I)$, то любое решение определено на всем интервале I.

Доказательство:

Решение: $x(t) = X(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau)^{-1}F(\tau)d\tau\right)$, где $X(t)$ - фундаментальная матрица.

Поскольку $A \in C(I)$, $X(t)$ определена на I. Интеграл сходится на всем I.

Следствие: Если $|f(t,x)| \le a(t) + b(t)|x|$ с $a, b \in C(I)$, $f \in C(G)$, то любое непродолжаемое решение определено на всем I.

Вопрос 20: Каноническая замена переменных. Простейшие свойства канонической замены. Связь между уравнением и системой.

Утверждение: Каноническая замена переменных сводит любое уравнение n-го порядка $y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$, где $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^{1+n}$, разрешённое относительно старшей производной, к нормальной системе из n уравнений специального вида.

Определение: Каноническая замена переменных - это переход от скалярного уравнения n-го порядка к системе n уравнений первого порядка вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

где $x_1 = y$, $x_2 = y'$, ..., $x_n = y^{(n-1)}$.

Утверждение: Пусть S_f - множество всех решений уравнения выше, а $S_f(t_0, y_0, \dots, y_{n-1}) = S_f(t_0, \overline{y}_0)$ - его подмножество, состоящее из всех решений задачи Коши, определяемой набором начальных условий $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ \dot{y}(t_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$. Аналогично, обозначим через $S_{\overline{j}}$ и $S_{\overline{j}}(t_0, \overline{y}_0)$.

множества решений следующей нормальной системы и, соответственно, задачи Коши для неё $\dot{x} = \overline{f}(t, x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \\ f(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$, $x(t_0) = \overline{y}_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$.

Утверждение: Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через Φ^{n-1} множество всех $n-1$ раз дифференцируемых скалярных функций (определённых на всяких интервалах), а через Φ - множество всех функций, принимающих значения в $\mathbb{R}^n$.

Определение: Канонической заменой назовём формальную операцию ψ, переводящую скалярную переменную y в следующую векторную $\psi y = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$.

Определение: В случае $y = \Phi^{n-1}$ функция ψy называется $(n-1)$-струй функции y, а её график $\Gamma_{\psi y} - (n-1)$-графиком функции y.

Лемма: Каноническая замена осуществляет изоморфизмы множеств $S_f \to S_{\overline{j}}$ и $S_f(t_0, \overline{y}_0) \to S_{\overline{j}}(t_0, \overline{y}_0)$, а обратные к ним отображения задаются формулой $\psi^{-1}x = x_1$.

Каноническая замена переводит решение исходного уравнения в решение соответствующей системы и обратно.

Доказательство: Каноническая замена переводит решение исходного уравнения в решение соответствующей системы и обратно.

Вопрос 21: Теоремы существования, единственности и продолжаемости для уравнения.

Теорема: Если $f, f'_y, \dots, f'_{y^{n-1}} \in C(G)$, то для любого набора $(t_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in G$ в некоторой окрестности $U(t_0)$ точки t_0 $\exists! y : U(t_0) \to \mathbb{R}$, где y - решение задачи Коши.

Теорема: Если каждая точка области G - точка единственности для уравнения, то любые два решения y и z задачи Коши удовлетворяют равенству $y|_I = z|_I$, где $I = D(y) \cap D(z)$.

Теорема: Если $f \in C(G)$, то для любого набора существует решение задачи Коши.

Теорема: Если все точки области G - точки $\exists!$ для уравнения, то для любого набора $\exists!$ непродолжаемое решение задачи Коши.

Теорема: Если $f \in C(G)$, а y - непродолжаемое решение уравнения, то для любого компакта $C \subset G$ существует такой отрезок $K \subset D(y)$, что имеет место условие $(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \notin C$, где $t \notin K$.

Определение: Уравнение $y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = f(t)$, где $a_1, \dots, a_n, f : I \to \mathbb{R}$, назовём линейным неоднородным уравнением n-ого порядка, а в случае $f = 0$ - линейным однородным. Матричную функцию A и вектор-функцию F, определённые по формулам $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}$, назовём матрицей уравнения и его векторной неоднородностью соответственно.

Лемма: Каноническая замена осуществляет изоморфизм множеств $S_{n,f} S_{A,F}$.

Доказательство: Каноническая замена переводит скалярное уравнение в эквивалентную векторную систему и обратно.

Теорема: Если $a_1, \dots, a_n, f \in C(I)$, то для любой задачи Коши $\exists!$ непродолжаемое решение, причём оно определено на всём интервале I.

Вопрос 22: Уравнение, не разрешенное относительно производной. (Расширение задачи Коши, теоремы существования и единственности). Особые решения. Дискриминантная кривая.

Определение: Уравнение, не разрешенное относительно производной - уравнение вида $F(t, y, y') = 0$, где $F : H \to \mathbb{R}$, $H \subset \mathbb{R}^3$.

Определение: Расширение задачи Коши для уравнения $F(t, y, y') = 0$ состоит в задании начальных условий $(t_0, y_0, y'_0) \in H$ таких, что $F(t_0, y_0, y'_0) = 0$.

Теорема: Если $F, F'_y, F'_{y'} \in C(H)$, то для любой точки $(t_0, y_0, y'_0) \in H$, удовлетворяющей условию $F(t_0, y_0, y'_0) = 0$, существует интервал $U(t_0) \subset I$ и единственное решение $y : U(t_0) \to \mathbb{R}$ задачи Коши с расширенными начальными условиями.

Определение: Особое решение - решение уравнения $F(t, y, y') = 0$, которое при каждом $t \in D(y)$ тройка $(t, y(t), \dot{y}(t))$ является точкой неединственности (т.е. через нее проходят как минимум два решения с разными производными).

Определение: Дискриминантная кривая определяется системой уравнений $F(t, y, y_1) = 0$ и $F'_y(t, y, y_1) = 0$, где $y_1 = y'$. Это геометрическое место точек (t, y), в которых особое решение касается общего решения или где нарушается единственность решения.

Вопрос 23: Метод введения параметра. Уравнение Клеро.

Утверждение: Метод введения параметра позволяет свести уравнение, не разрешенное относительно производной, к разрешённому с некоторыми ограничениями.

Утверждение: Пусть уравнение $F(t, y, y') = 0$, где $(t, y, y') \in H \subset \mathbb{R}^3$, приведено к виду $y = f(t, y')$, где $f \in C^1(G)$. Введём параметр $p = y'$ и получим систему:

$$\begin{cases} y = f(t, p) \\ y' = p \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение по t, получаем $y'' = f'_t(t, p) + f'_y(t, p)p'$.

Определение: Уравнение Клеро - уравнение вида $y = tp + \varphi(p)$, где $p = y'$.

Теорема: Общее решение уравнения Клеро $y = tp + \varphi(p)$ имеет вид $y = Ct + \varphi(C)$.

Особые решения уравнения Клеро получаются исключением параметра p из системы $y = tp + \varphi(p)$, $0 = t + \varphi'(p)$.

Вопрос 24: Общее решение однородной системы. Теорема об изоморфизме. Фундаментальные системы решений.

Утверждение: Общее решение однородной системы $\dot{x} = A(t)x$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in I$, имеет линейную структуру.

Утверждение: Для заданного интервала $I \subset \mathbb{R}$ обозначим через $\Phi(I)$ линейное векторное пространство всех функций $f : I \to \mathbb{R}^n$ с линейными операциями $(C_1 f_1 + C_2 f_2)(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$, где $t \in I$, $C_{1,2} \in \mathbb{R}$. Нулевым вектором в пространстве $\Phi(I)$ является нулевая функция $0(t) = 0 \in \mathbb{R}^n$, где $t \in I$.

Определение: Функции $f_1, \dots, f_k \in \Phi(I)$ называются линейно зависимыми, если некоторая их нетривиальная (т.е. $C_1^2 + \dots + C_k^2 \neq 0$) линейная комбинация равна нулю $C_1 f_1 + \dots + C_k f_k = 0$, и линейно независимыми - в противном случае.

Теорема: Общее решение однородной линейной системы $\dot{x} = A(t)x$ имеет вид $x(t) = X(t)C$, где $X(t)$ - фундаментальная матрица, $C \in \mathbb{R}^n$.

Утверждение: Согласно теореме множества $S_{A,F}$ и $S_A = S_{A,0}$ всех непродолжаемых решений линейной неоднородной системы $\dot{x} = A(t)x + F(t)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in I$ и соответствующей однородной системы являются подмножествами пространства $\Phi(I)$.

Теорема: Множество S_A - линейное пространство, причём для любого $t_0 \in I$ отображение $\varphi_{t_0} : S_A \to \mathbb{R}^n$, где $\varphi_{t_0} x = x(t_0)$, есть изоморфизм линейных пространств.

Доказательство: Линейность S_A следует из линейности однородной системы. Изоморфизм φ_{t_0} следует из того, что любое начальное условие $x(t_0) = x_0$ определяет единственное решение, и все решения проходят через каждую точку в момент t_0.

Утверждение: Из-за существования изоморфизма любые свойства

Следствие: Размерность пространства решений линейной однородной системы из n уравнений первого порядка равна n.

Определение: Любой базис $x_1, \dots, x_n$ в пространстве S_A решений линейной однородной системы называется её фундаментальной системой решений.

Следствие: Если $x_1, \dots, x_n$ - фундаментальная система решений системы, то общее решение этой системы имеет вид $x = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t)$.

Вопрос 25: Фундаментальная матрица и оператор Коши (леммы об операторе и матрице).

Утверждение: Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ фиксирован базис и задана система. Под решением, далее, будем понимать функцию $x \in S_A$, а под матрицей - $(n \times n)$-матрицу.

Определение: Матрицу $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, где $t \in I$, назовём:

- матрицей решений, если её столбцы $x_1, \dots, x_n$ являются решениями,
- фундаментальной матрицей, если её столбцы $x_1, \dots, x_n$ образуют фундаментальную систему решений.

Следствие: Для любого $t_0 \in I$ матрица решений X:

- однозначно определяется начальным условием $X(t_0) = X_0$ при каждой начальной матрице X_0,
- фундаментальна тогда и только тогда, когда $\det X(t_0) \neq 0$.

Доказательство: Первое утверждение следует из единственности решения задачи Коши. Второе следует из того, что фундаментальная система решений образует базис в пространстве решений, что эквивалентно невырожденности матрицы в начальный момент.

Следствие: Если X - фундаментальная матрица системы, то общее решение последней имеет вид $x = X(t)c$, где $c \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство: Любое решение системы можно представить как линейную комбинацию фундаментальной системы решений.

Определение: Для заданной пары чисел $t, s \in I$ назовём оператором Коши системы или оператором сдвига из s в t оператор $X(t, s)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий требованию $X(t, s)x(s) = x(t)$, где $x \in S_A$.

Утверждение: Таким образом, оператор Коши - двухпараметрическое семейство операторов, задаваемых начальным s и конечным t моментами времени и переводящих значение любого решения в момент s в значение того же решения в момент t.

Лемма: Оператор Коши $X(t,s)$ является линейным и невырожденным для любых $t,s \in I$.

Вопрос 26: Определитель Вронского и линейная зависимость для вектор-функций.

Утверждение: Определитель Вронского и формула Лиувилля-Остроградского для вектор-функций отражает их специфические свойства, связанные с линейной независимостью и объёмом натянутого на них параллелепипеда.

Определение: Определитель Вронского вектор-функций $f_1, \ldots, f_n \in \Phi(I)$ - функция $W_{f_1,\ldots,f_n}(t) = \det(f_1(t), \ldots, f_n(t))$, где $t \in I$.

Утверждение: Определитель Вронского в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет независимый от выбора ортогонального базиса положительной ориентации геометрический смысл: $W_{f_1,\ldots,f_n}(t)$ - ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на репер $f_1(t), \ldots, f_n(t)$.

Лемма: Если функции $f_1, \ldots, f_n \in \Phi(I)$ линейно зависимы, то $W_{f_1,\ldots,f_n}(t) = 0$, где $t \in I$.

Доказательство: Если вектор-функции $f_1, \ldots, f_n$ линейно зависимы, то $\forall t \in I$ линейно зависимы и векторы $f_1(t), \ldots, f_n(t)$, а значит $W_{f_1,\ldots,f_n}(t) = 0$.

Лемма: Утверждение, обратное к сформулированному в лемме выше, неверно.

Доказательство: Приведём контрпример. Пусть $f_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, где $t \in \mathbb{R}$. Тогда $W_{f_1,f_2} = 0$, хотя они и линейно независимы, т.к. тождество $C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot t = 0$, где $t \in \mathbb{R}$, возможно только при $C_1 = C_2 = 0$.

Теорема: Если $x_1, \ldots, x_n \in S_A$, то следующие утверждения эквивалентны:

- функции $x_1, \ldots, x_n$ - линейно зависимы,
- $W_{x_1,\ldots,x_n}(t) = 0$ для всех $t \in I$,
- $W_{x_1,\ldots,x_n}(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in I$.

Доказательство: Из первого вытекает второе по лемме выше, из второго - третье, а из третьего - первое.

Вопрос 27: Формула Лиувилля – Остроградского для вектор-функций. Определитель и след оператора Коши.

Теорема: Для любых решений $x_1, \ldots, x_n \in S_A$ имеет место равенство $W_{x_1,\ldots,x_n}(t) = W_{x_1,\ldots,x_n}(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau) d\tau}$, где $t_0, t \in I$.

Доказательство: Достаточно показать, что определитель Вронского удовлетворяет дифференциальному уравнение $\dot{W} = \operatorname{tr} A(t) \cdot W$, где $t \in I$, из которого получим требуемое.

Следствие: Если $\operatorname{tr} A = 0$, то определитель Вронского любых решений $x_1, \ldots, x_n \in S_A$ есть константа.

Определение: Определитель $\det X$ и след $\operatorname{tr} X$ оператора $X \in End\mathbb{R}^n$ - это определитель и след его матрицы X, записанной в каком-либо базисе в $\mathbb{R}^n$.

Утверждение: Для оператора Коши $X(t,s)$ выполняется соотношение $X(t,s)X(s,r) = X(t,r)$ для любых $t,s,r \in I$.

Следствие: Если $X(t,s)$ - оператор Коши системы, то $\det X(t,s) = e^{\int_s^t \operatorname{tr} A(\tau) d\tau}$.

Доказательство: Если в $\mathbb{R}^n$ задан базис, то по лемме для любого фиксированного $s \in I$ матрица $X(\cdot, s)$ оператора $X(\cdot, s)$ есть матрица решений, причём $X(s,s) = E$, поэтому $\det X(t,s) = \det X(s,s) \cdot e^{\int_s^t \operatorname{tr} A(\tau) d\tau} = e^{\int_s^t \operatorname{tr} A(\tau) d\tau}$ согласно теореме.

Вопрос 28: Общее решение неоднородной системы. Метод вариации постоянных (теорема).

Утверждение: Общее решение однородной системы есть общее решение соответствующей однородной системы плюс частное решение неоднородной.

Теорема: Для всякого $x_0 \in S_{A,F}$ справедливо равенство $S_{A,F} = x_0 + S_A = \{x_0 + x \mid x \in S_A\}$.

Доказательство: Множество решений неоднородной системы является аффинным подпространством в пространстве решений однородной системы.

Следствие: Если x_0 - частное решение линейной неоднородной системы, а $x_1, \ldots, x_n$ - фундаментальная система решений соответствующей однородной системы, то общее решение системы имеет вид $x = x_0(t) + C_1 x_1(t) + \cdots + C_n x_n(t)$.

Утверждение: Множество $S_{A,F}$ является аффинным пространством над S_A.

Теорема: Для любой фундаментальной матрицы X линейной однородной системы верно следующее: если функция $c : I \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет уравнению $X(t)\dot{c}(t) = F(t)$, где $t \in I$, то функция X_c - решение неоднородной системы, т.е. $X_c \in S_{A,F}$.

Доказательство: Т.к. $\dot{X} = AX$, то $X\dot{c} = F \implies (\dot{X c}) = \dot{X}c + X\dot{c} = A(Xc) + F \implies X_c \in S_{A,F}$.

Следствие: Решение задачи Коши задаётся формулой $x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t, \tau)F(\tau)d\tau$, где X - оператор Коши системы.

Вопрос 29: Общее решение линейного уравнения. Линейность канонической замены (лемма). Сведение линейного уравнения к системе.

Утверждение: Общее решение линейного уравнения, заданного на фиксированном интервале I и имеющего порядок $n \in \mathbb{N}$, тесно связано с линейным векторным пространством $\Phi^{n-1}(I)$ всех $(n-1)$ раз дифференцируемых функций $f : I \to \mathbb{R}$.

Лемма: Каноническая замена переменных является линейным отображением между пространством решений уравнения n-го порядка и пространством решений соответствующей системы.

Теорема: Линейное уравнение n-го порядка $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)$ эквивалентно системе $\dot{x} = A(t)x + F(t)$.

Вопрос 30: Определитель Вронского скалярных функций. Свойства. Восстановление линейного уравнения. Признаки линейной зависимости.

Определение: Определитель Вронского скалярных функций $f_1, \ldots, f_n \in \Phi^{n-1}(I)$ - это функция $W_{f_1,\ldots,f_n}(t) = W_{\psi f_1,\ldots,\psi f_n}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) & \ldots & f_n(t) \\ \dot{f}_1(t) & \ldots & \dot{f}_n(t) \\ & \ldots & \\ f_1^{(n-1)}(t) & \ldots & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$, где $t \in I$.

Лемма: Если функции $f_1, \ldots, f_n \in \Phi^{n-1}(I)$ линейно зависимы, то $W_{f_1,\ldots,f_n}(t) = 0$, где $t \in I$.

Лемма: Утверждение, обратное к сформулированному в лемме выше, неверно.

Доказательство: Для произвольных скалярных функций из $W = 0$ не следует линейная зависимость. Контрпример: функции $f_1(t) = t^3$ и $f_2(t) = |t|^3$ на $\mathbb{R}$ имеют нулевой определитель Вронского, но линейно независимы. Эквивалентность $W = 0 \iff$ линейная зависимость верна только если функции являются решениями одного линейного однородного уравнения.

Теорема: Если $y_1, \ldots, y_n \in S_0$, то следующие утверждения эквивалентны:

- функции $y_1, \ldots, y_n$ - линейно зависимы,
- $W_{y_1,\ldots,y_n}(t) = 0$ для всех $t \in I$,
- $W_{y_1,\ldots,y_n}(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in I$.

Теорема: Для любых решений $y_1, \ldots, y_n \in S_0$ имеет место равенство $W_{y_1,\ldots,y_n}(t) = W_{y_1,\ldots,y_n}(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(\tau)d\tau}$, где $t_0, t \in I$.

Теорема: Если скалярные функции $f_1, \ldots, f_n \in C^n(I)$ удовлетворяют условию $W_{f_1,\ldots,f_n}(t) \neq 0$, где $t \in I$, то они образуют фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения, определяемого как определитель Вронского, расширенный на y и его производные.

Доказательство: Уравнение строится так, чтобы данные функции были его решениями, и определитель Вронского является нетривиальным решением характеристического уравнения.

Следствие: Если скалярные функции $f_1, \ldots, f_n \in C^{n-1}(I)$ удовлетворяют условиям $W_{f_1,\ldots,f_n}(t) = 0$, $W_{f_1,\ldots,f_{n-1}}(t) \neq 0$, где $t \in I$, то они линейно зависимы.

Доказательство: Следует из свойств определителя Вронского и линейной зависимости.

Следствие: Если определитель Вронского скалярных функций $f_1, \ldots, f_n \in C^{n-1}(I)$ тождественно равен нулю, то их сужения на некоторый интервал $J \subset I$ линейно зависимы.

Доказательство: На интервале, где определитель Вронского отличен от нуля, функции образуют базис, но если он тождественно нуль, то они зависимы.

Следствие: Если определитель Вронского $k \leq n$ решений $y_1, \ldots, y_k \in S_0$ тождественно равен нулю, то они линейно зависимы.

Доказательство: Для решений линейного уравнения определитель Вронского либо тождественно нуль, либо никогда не обращается в нуль.

Вопрос 31: Метод вариации постоянных для линейного неоднородного уравнения n-го порядка (теорема). Функция Грина задачи Коши.

Утверждение: Пусть задана формула общего решения $y = Y(t)c$, где $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ - ФСР, $c = \begin{pmatrix} C_1 \\ \ldots \\ C_n \end{pmatrix}$. Для нахождения частного решения неоднородного уравнения константы принимаются за функции от t и записывается система специального вида.

Теорема: Для любой фундаментальной системы решений $y_1, \ldots, y_n$ линейного однородного уравнения верно следующее: если вектор-функция $c : I \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} Y(t)\dot{c}(t) = 0 \\ \dot{Y}(t)\dot{c}(t) = 0 \\ \ldots \\ Y^{(n-2)}(t)\dot{c}(t) = 0 \\ Y^{(n-1)}(t)\dot{c}(t) = f(t) \end{cases}$$

, где $t \in I$, то функция Y_c - решение неоднородного уравнения, т.е. $Y_c \in S_{n,f}$.

Доказательство: Комплексификация сохраняет структуру векторного пространства и линейных операторов.

Утверждение: Функция Грина является решением задачи Коши с импульсным воздействием в точке τ.

Определение: Ядро $G_\tau(t, t_0) : J \to \mathbb{R}$ интегрального оператора, зависящее от параметра $\tau \in J$ и определяемое формулой $G_\tau(t, t_0) = \begin{cases} 0, & t_0 \leq t \leq \tau \\ y_\tau(t), \tau \leq t < \beta \end{cases}$, называется функцией Грина задачи Коши.

Вопрос 32: Краевая задача. Теорема об альтернативе.

Утверждение: Краевая задача для линейного уравнения второго порядка $Ly = \ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = f(t)$, где $t \in J = [t_1; t_2]$, $p, q \in C(J)$, имеет два краевых условия $l_i y = \alpha_i y(t_i) + \beta_i \dot{y}(t_i) = \varphi_i$, где $\alpha_i, \beta_i \neq (0, 0)$, $i = 1, 2$.

Теорема: Теорема об альтернативе.

Для однородной краевой задачи ($f = 0, \varphi = 0$) либо существует только нулевое решение, либо существует нетривиальное решение. Для неоднородной задачи решение существует тогда и только тогда, когда соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение.

Вопрос 33: Функция Грина краевой задачи и ее свойство. Существование и единственность функции Грина.

Определение: Функция Грина краевой задачи - функция $G(t, s)$, такая что решение краевой задачи $Ly = f$ с $ly = 0$ задается формулой $y(t) = \int_{t_1}^{t_2} G(t, s) f(s) ds$.

Свойства функции Грина:

1. $LG(t, s) = 0$ для $t \neq s$
2. $\lim_{t \to s^+} LG(t, s) - \lim_{t \to s^-} LG(t, s) = 1$
3. $G(t, s)$ удовлетворяет однородным краевым условиям

Теорема: Для регулярной краевой задачи функция Грина существует и единственна.

Вопрос 34: Экспонента и логарифм оператора. Экспонента и оператор Коши.

Определение: Экспонента оператора $A \in End\,\mathbb{C}^n$ - сумма ряда $e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k(A)$, где $\epsilon_k(A) = \frac{A^k}{k!}$, $A^0 = I$.

Определение: Логарифм оператора $A \in End\,\mathbb{C}^n$, т.е. $\ln A$ этого оператора, - любой из операторов $B \in End\,\mathbb{C}^n$, удовлетворяющий равенству $e^B = A$.

Утверждение: Пусть задана линейная однородная система с постоянными коэффициентами $\dot{x} = Ax$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$.

Теорема: Оператор Коши X линейной однородной системы с постоянными коэффициентами удовлетворяет равенству $X(t,s) = e^{A(t-s)}$, где $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство: Дифференцируя равенство $X(t,s) = e^{A(t-s)}$ по t, получаем $\dot{X}(t,s) = Ae^{A(t-s)} = AX(t,s)$. При $t = s$ имеем $X(s,s) = I$, что совпадает с начальным условием.

Следствие: Если X - оператор Коши линейной однородной системы с постоянными коэффициентами, то справедливы равенства $e^A = X(1,0)$, $\det e^A = e^{trA}$.

Следствие: Экспонента любого оператора невырождена, а логарифм вырожденного оператора не существует.

Вопрос 35: Комплексификация оператора (лемма). Комплексификация системы. Действительные и комплексные решения.

Утверждение: Комплексификация оператора и системы позволяет применить метод жордановых форм для нахождения общего решения линейной однородной системы.

Определение: Под комплексификацией (действительного, или $\mathbb{R}$-линейного):

- пространства $\mathbb{R}^n$ понимается $\mathbb{C}$-линейное пространство $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^n$, представляющее собой множество векторов $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}^n$, с компонентами $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$, в котором, помимо покомпонентного равенства, сложения и умножения на действительные числа, заданы также умножение на комплексные числа, основанное на правиле $i(x+iy) = -y + ix$, где $x, y \in \mathbb{R}^n$, и комплексное сопряжение $x + iy = x - iy$, где $x, y \in \mathbb{R}^n$, а кроме того, исходное пространство $\mathbb{R}^n$ отождествляется с подмножеством $\operatorname{Re} \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n i\{0\} \subset \mathbb{C}^n$,
- оператора $A \in \mathrm{End}\mathbb{R}^n$ понимается комплексный оператор $\mathbb{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, задаваемый равенством $\mathbb{A}(x+iy) = Ax + iAy$, где $x, y \in \mathbb{R}^n$, а его сужение на множество $\operatorname{Re} \mathbb{C}^n$ обозначается через $\operatorname{Re} A$.

Лемма: Пусть $\mathbb{C}^n$ - комплексификация пространства $\mathbb{R}^n$, а $\mathbb{A}$ - комплексификация оператора $A \in \mathrm{End}\mathbb{R}^n$. Тогда справедливы утверждения:

1. $\mathbb{A} \in \mathrm{End}\mathbb{C}^n$ и $\operatorname{Re} \mathbb{A} = A$,
2. размерность $\mathbb{C}$-линейного пространства $\mathbb{C}^n$ равна n, причём любой базис в $\mathbb{R}^n$ - базис и в $\mathbb{C}^n$, а матрицы операторов $A \in \mathrm{End}\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{A} \in \mathrm{End}\mathbb{C}^n$ в этом базисе совпадают.

Доказательство: Первое утверждение следует из определения комплексификации. Второе следует из того, что $\mathbb{C}^n$ как $\mathbb{C}$-векторное пространство имеет размерность n, и базис $\mathbb{R}^n$ остается базисом в $\mathbb{C}^n$.

Утверждение: Действительную линейную систему можно комплексифицировать, получив её комплексификацию, т.е. комплексную линейную однородную систему $\dot{z} = \mathbb{A}z$, где $z \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{R}$

Вопрос 36: Жорданова матрица. Вычисление экспоненты и логарифма. Фундаментальная система решений.

Определение: Жорданова клетка - верхнетреугольная матрица вида:

$$J_{\lambda,m} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Теорема: Любая комплексная матрица подобна жордановой форме.

Утверждение: Для жордановой клетки $J_{\lambda,m}$ экспонента вычисляется по формуле:

$$e^{J_{\lambda,m}} = e^{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема: Фундаментальная система решений линейной системы с постоянными коэффициентами состоит из функций вида $e^{\lambda t}p_k(t)$, где p_k - многочлены.

Вопрос 37: Метод неопределенных коэффициентов.

Утверждение: Метод неопределённых коэффициентов позволяет найти решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами, даже не прибегая к выяснению её жордановой структуры.

Определение: Введём следующие функции и множества:

- любую функцию q вида $q(t) = e^{\lambda t}p_k(t)$, где p_k - многочлен степени k над полем $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), назовём действительным (комплексным) квазимногочленом степени $\deg q = k$ с показателем $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$),
- множество всех действительных (комплексных) квазимногочленов степени, меньшей k, с показателем λ обозначим через $Q_{\lambda,k}$ ($\mathbb{Q}_{\lambda,k}$),
- при $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ определим ещё и множество $Q_{\alpha \pm i\beta,k} = \{q_1(t)\cos\beta t + q_2(t)\sin\beta t \mid q_1, q_2 \in Q_{\alpha,k}\}$ действительных многочленов степени $\max\{\deg q_1, \deg q_2\} < k$ с парой показателей $\alpha \pm i\beta$,
- будем обозначать через Q

Вопрос 38: Характеристический многочлен линейного уравнения. Лемма о совпадении характеристических многочленов. Уравнение Эйлера.

Определение: Характеристический многочлен линейного уравнения $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$ - многочлен $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$.

Лемма: Характеристические многочлены канонической системы и соответствующего уравнения совпадают.

Определение: Уравнение Эйлера - уравнение вида $t^n y^{(n)} + a_{n-1}t^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$.

Теорема: Замена $t = e^z$ приводит уравнение Эйлера к уравнению с постоянными коэффициентами.

Вопрос 39: Решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами (теорема).

Теорема: Общее решение однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$ имеет вид $y = e^{\lambda t}p(t)$, где λ - корень характеристического уравнения, p - многочлен степени меньше кратности корня.

Алгоритм решения:

1. Составить характеристическое уравнение
2. Найти корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ с кратностями $k_1, \dots, k_m$
3. Для каждого корня λ_i с кратностью k_i взять функции $e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \dots, t^{k_i - 1}e^{\lambda_i t}$
4. Для комплексных корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$ взять $\cos(\beta t)e^{\alpha t}$, $\sin(\beta t)e^{\alpha t}$ и их производные

Вопрос 40: Уравнение с квазимногочленом в правой части.

Теорема: Решение уравнения $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = e^{\alpha t}p(t)$, где p - многочлен степени m, имеет вид $y = e^{\alpha t}q(t)$, где q - многочлен степени m.

Метод неопределенных коэффициентов: Подставить $y = e^{\alpha t}(c_0 + c_1 t + \cdots + c_m t^m)$ в уравнение и приравнять коэффициенты.

Вопрос 41: Устойчивость по Ляпунову для решения системы и линейного уравнения. Существенные упрощения (лемма).

1. Основные определения

Рассмотрим автономную систему ОДУ:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f} : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Определение (Положение равновесия). Точка $\mathbf{x}_0$ называется положением равновесия, если $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

Определение (Устойчивость по Ляпунову). Положение равновесия $\mathbf{x}_0$ устойчиво по Ляпунову, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Определение (Асимптотическая устойчивость). Положение равновесия $\mathbf{x}_0$ асимптотически устойчиво, если оно устойчиво по Ляпунову и $\exists \delta_0 > 0$: $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0\| < \delta_0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| = 0$.

Определение (Неустойчивость). Если условие устойчивости не выполняется — положение равновесия неустойчиво.

2. Первый метод Ляпунова (линеаризация)

Алгоритм: Разложить $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в ряд Тейлора в окрестности $\mathbf{x}_0$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|),$$

где $A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$ — матрица Якоби.

Теорема (Первый метод Ляпунова). Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы A. Тогда:

1. Если $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ для всех i → положение равновесия **асимптотически устойчиво**.
2. Если $\exists \lambda_k : \operatorname{Re}\lambda_k > 0$ → положение равновесия **неустойчиво**.
3. Если $\exists \lambda_k : \operatorname{Re}\lambda_k = 0$ (и нет положительных) → **критический случай**, по линеаризации нельзя определить устойчивость.

3. Существенные упрощения для плоскости (n=2)

Для системы $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ вводим: $p = -\operatorname{tr} A$, $q = \det A$, $D = p^2 - 4q$.

Классификация особых точек:

Условие	Тип точки	Устойчивость
$q < 0$	Седло	Неустойчиво
$q > 0, p > 0, D > 0$	Устойчивый узел	Асимпт. устойчиво
$q > 0, p > 0, D < 0$	Устойчивый фокус	Асимпт. устойчиво
$q > 0, p < 0, D > 0$	Неустойчивый узел	Неустойчиво
$q > 0, p < 0, D < 0$	Неустойчивый фокус	Неустойчиво
$q > 0, p = 0$	Центр	Критический случай
$q = 0$	—	Критический случай

4. Лемма об упрощении (сведение к исследованию линейной части)

Лемма (об устойчивости по первому приближению). Пусть система имеет вид $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$, где $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| = o(\|\mathbf{x}\|)$ при $\mathbf{x} \to 0$. Тогда:

- Если все собственные числа A имеют отрицательные действительные части, то нулевое решение нелинейной системы асимптотически устойчиво.
- Если хотя бы одно собственное число имеет положительную действительную часть, то нулевое решение неустойчиво.

Смысл: Нелинейные члены $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ малы вблизи равновесия и не влияют на характер устойчивости в невырожденных случаях.

5. Пример: маятник с трением

Система: $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\sin x - \alpha y$, $\alpha \geq 0$.

Точка $(0, 0)$**:** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}$, $p = \alpha$, $q = 1 > 0$.

- При $\alpha > 0$: асимптотически устойчиво (фокус или узел).
- При $\alpha = 0$: критический случай (центр).

Точка $(\pi, 0)$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$, $q = -1 < 0 \to$ **седло** (неустойчиво) при любом α.

Вопрос 42: Необходимое условие устойчивости. Система с постоянными коэффициентами (теорема).

Лемма 141: Для устойчивости (асимптотической) линейной системы $\dot{x} = A(t)x + F(t)$ или линейного уравнения $y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = f(t)$, где $A, F, a_1, \ldots, a_n, f \in C(I)$, $\mathbb{R}^+ \subset I$, необходимо выполнение соотношения $\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)d\tau < \infty$ ($\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)d\tau = -\infty$) или, соответственно, соотношения $\inf_{t\in\mathbb{R}^+} \int_{t_0}^{t} a_1(\tau)d\tau > -\infty$ ($\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} a_1(\tau)d\tau = \infty$).

Доказательство: Если интеграл расходится, то определитель Вронского решений неограничен, что противоречит устойчивости.

Теорема: Линейная система с постоянным оператором:

- асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда действительные части всех его собственных значений отрицательны,
- устойчива тогда и только тогда, когда действительные части всех его собственных значений отрицательны или равны нулю, причём последним отвечают жордановы клетки только первого порядка.

Доказательство: Следует из свойств экспоненты матрицы и жордановой формы.

Вопрос 43: Определение функции Ляпунова. Смысл производной в силу системы.

Определение: Функция Ляпунова - это функция $v : U(0) \to \mathbb{R}$, определённая в какой-либо окрестности $U(0) \subset \mathbb{R}^n$ точки 0 и призванная подтвердить факт устойчивости, асимптотической устойчивости или неустойчивости нулевого решения, составляет основу второго метода Ляпунова.

Определение: Производной в силу системы $\dot{x} = f(t, x)$, где $f, f'_x \in C(G)$, $(t, x) \in G \supset \mathbb{R}^+ \times U(0)$, имеющей нулевое решение, благодаря равенству $f(., 0) = 0$, функции v в точке x в момент t называется выражение $\dot{v}_t(x) = v'(x)f(t, x) = v'_{x_1}(x)f_1(t, x) + \cdots + v'_{x_n}(x)f_n(t, x)$ (последнее равенство предполагает наличие базиса в $\mathbb{R}^n$).

Определение: Функцией Ляпунова для системы называется любая функция $v \in C^1(U(0))$, положительно определённая ($v(x) > 0$ при $x \neq 0$, $v(0) = 0$), такая что её производная в силу системы имеет определённый знак.

Вопрос 44: Лемма об устойчивости. Признак не асимптотической устойчивости.

Лемма: Пусть для системы существует функция Ляпунова $v \in C^1(U(0))$, удовлетворяющая при всех $x \in \dot{U}(0)$ и $t \in \mathbb{R}^+$ условиям:

1. $v(x) > 0$ при $x \neq 0$ (положительно определённая),
2. $\dot{v}_t(x) \leq 0$.

Тогда нулевое решение этой системы устойчиво по Ляпунову.

Доказательство: Функция Ляпунова является интегралом движения, что обеспечивает устойчивость.

Лемма: Пусть для системы существует функция Ляпунова $v \in C^1(U(0))$, удовлетворяющая при всех $x \in \dot{U}(0)$ и $t \in \mathbb{R}^+$ условиям:

1. $v(x) > 0$ при $x \neq 0$ (положительно определённая),
2. $\dot{v}_t(x) = 0$.

Тогда устойчивость нулевого решения этой системы не является асимптотической.

Доказательство: Если производная тождественно равна нулю, то функция постоянна на решениях, что предотвращает асимптотическую сходимость.

Вопрос 45: Лемма об асимптотической устойчивости.

Лемма: Пусть для системы существует функция Ляпунова $v \in C^1(U(0))$, удовлетворяющая при всех $x \in \dot{U}(0)$ и $t \in \mathbb{R}^+$ условиям:

1. $v(x) > 0$ при $x \neq 0$ (положительно определённая),
2. $\dot{v}_t(x) \leq w(x) < 0$ для некоторой функции $w \in C(\dot{U}(0))$.

Тогда нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво.

Доказательство: Функция $v(x)$ является убывающей вдоль решений, что обеспечивает сходимость к нулю.

Вопрос 46: Теорема Четаева.

Теорема: Теорема Четаева.

Пусть для системы существует область $V \subset \mathbb{R}^n$, примыкающая к началу координат $(0 \in \partial V)$, такая что в этой области $v(x) > 0$, а на границе области внутри окрестности $v(x) = 0$, и функция Четаева $v \in C(V) \cap C^1(V)$, удовлетворяющая условию

0. $0 \in \partial V, v(x)|_{x \in \partial V \cap U(0)} = 0,$

а при всех $x \in V \cap U(0)$ и $t \in \mathbb{R}^+$ - условиям:

1. $v(x) > 0,$
2. $\dot{v}_t(x) \geq w(x) > 0$ для некоторой функции $w \in C(V \cap U(0))$.

Тогда нулевое решение этой системы неустойчиво.

Доказательство: Функция Четаева растет вдоль решений, что приводит к выходу из области устойчивости.

Вопрос 47: Система первого приближения. Теорема Ляпунова об исследовании устойчивости по первому приближению с полным доказательством.

Утверждение: Система первого приближения получается из исходной системы $\dot{x} = Ax + F(t, x)$, где $F, F'_x \in C(G)$, $G \supset \mathbb{R}^+ \times U(0)$ при условии $||F(\cdot, x)||_{\mathbb{R}^+} = o(x)$ при $x \to 0$, путём её линеаризации, в результате которой остаётся система $\dot{x} = Ax$, где $t \in \mathbb{R}^+$.

Теорема: Теорема Ляпунова об исследовании устойчивости по первому приближению.

Если действительные части всех собственных значений оператора A отрицательны, то нулевое решение системы с условием асимптотически устойчиво, а если хотя бы одна из них положительна - то неустойчиво.

Доказательство: Для линейных систем устойчивость определяется собственными значениями. Нелинейные возмущения сохраняют тип устойчивости в окрестности равновесия.

Вопрос 48: Фазовое пространство автономной системы. Сдвиги фазовых тракторий. Непересекаемость фазовых кривых.

Утверждение: Фазовое пространство автономной системы $\dot{x} = f(x)$, где $x \in G \subset \mathbb{R}^n$, есть область G. Множество всех непродолжаемых решений этой системы будем обозначать через $S_f(G)$.

Лемма: Для любого решения x системы и для любой константы $C \in \mathbb{R}$ функция $x_C(t) = x(t + C)$, где $t \in \mathbb{R}$, есть также решение этой системы.

Доказательство: Подстановка в уравнение показывает, что сдвиг по времени сохраняет решение.

Лемма: Если $f \in C^1(G)$ и фазовые кривые решений $x, y \in S_f(G)$ имеют общую точку $x(t_0) = y(s_0)$, то эти фазовые траектории с точностью до сдвига времени совпадают: $x(t + t_0) = y(t + s_0)$, где $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство: По теореме единственности решения с общими начальными условиями совпадают.

Вопрос 49: Динамическая система и фазовый поток. Генератор фазового потока (леммы).

Определение: Пусть на топологическом пространстве G задано семейство отображений $F^t : G \to G$, где $t \in \mathbb{R}$. Назовём семейство F:

- динамической системой, если выполнены три условия:
  i. $F^0 = I$ - тождественность на G начального отображения,
  ii. $F^{t+s} = F^t \circ F^s$, где $t, s \in \mathbb{R}$, - аддитивность по времени,
  iii. $F \in C(\mathbb{R} \times G)$ - непрерывность функции F по паре (t, x);
- фазовым потоком, если динамическая система F удовлетворяет, сверх того, условиям $F^t, (F^t) \in C^1(G)$, где $t \in \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^n$;

- каскадом, если параметр t в семействе с самого начала ограничен лишь целыми значениями.

Определение: Орбитой точки $x \in G$ называется траектория или кривая $F(x) = \{F^t(x) \mid t \in \mathbb{R}\ (\mathbb{Z})\}$.

Лемма: Если $f \in C^1(G)$, то отображение Коши задаёт на множестве G фазовый поток F.

Доказательство: Отображение Коши удовлетворяет групповому свойству и непрерывно дифференцируемо.

Лемма: У любого фазового потока F существует единственный генератор $f = (F^t)|_{t=0} \in C^1(G)$, который к тому же удовлетворяет равенству $(F^t)' \circ f = f \circ F^t$, где $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство: Генератор получается дифференцированием потока по времени в нуле.

Вопрос 50: Три типа фазовых кривых. Отсутствие других типов.

Определение: Фазовую кривую (траекторию) $E(x)$ назовём:

- незамкнутой, если $x(t+s) \neq x(t)$, где $t \in \mathbb{R}$, $s > 0$,
- замкнутой, или циклом, если для некоторого числа $T > 0$, называемого периодом цикла, выполнено условие
- неподвижной точкой, или точкой покоя, если $x(t) = x_0$, где $t \in \mathbb{R}$.

Теорема: Для автономной системы $\dot{x} = f(x)$, где $f \in C^1(G)$, фазовая траектория любого решения $x \in S_f(G)$ может быть только одного из трёх типов, перечисленных в определении.

Доказательство: По теореме о продолжаемости решения либо ограничены компактом, либо уходят на бесконечность, либо являются равновесными точками.

Вопрос 51: Численные методы решения задачи Коши для СДУ и ДУВП. Алгоритмы методов Эйлера, его модификаций и их геометрическая интерпретация.

Примечание: Данный раздел содержит информацию из внешнего источника, так как в предоставленных фрагментах учебника Сергеева материал по численным методам отсутствует. Текст соответствует общепринятому курсу ОДУ.

КР2:

1. 575 - 581 +
2. 549 - 574 +
3. 796 - 810 +
4. 899 - 906 + 971 - 978
5. последняя лекция!

Отлично. Мы переходим от качественного анализа к практическому инструменту, без которого немыслима современная прикладная математика, — к численным методам. Важно понимать, что эти методы не заменяют теорию, а являются её логическим продолжением и приложением, когда аналитическое решение найти невозможно или не нужно.

Лекция: Численные методы решения задачи Коши. От ломаных Эйлера до разностных схем

1. Философия численного решения: зачем, когда и с какой точностью?

Теорема Коши-Пикара гарантирует существование и единственность решения задачи Коши. Но часто это решение не выражается в элементарных функциях (например, для уравнения $\dot{x} = t^2 + x^2$). Даже если выражение найдено (через специальные функции, ряды), оно может быть непригодно для быстрых вычислений.

Цель численного метода: Построить приближённое решение — таблицу значений $y_k \approx y(t_k)$ в заданных точках $t_0 < t_1 < \ldots < t_N$ — и сделать это эффективно, устойчиво и с контролируемой погрешностью.

Ключевые вопросы любого метода:

1. Аппроксимация: Как точно разностная схема приближает исходное ДУ?
2. Устойчивость: Маленькие ошибки (округления, начальные данные) не нарастают катастрофически?
3. Сходимость: При стремлении шага сетки к нулю приближённое решение стремится к точному?

Эти вопросы — прямое продолжение теории, изложенной у Сергеева.

2. Постановка задачи и основная идея

Дано: Задача Коши для ОДУ первого порядка (основная формулировка, к которой сводятся системы):

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0, T].$$

Вводим равномерную сетку: $t_k = t_0 + k \cdot h$, $k = 0, 1, \ldots, N$, $h = \frac{T - t_0}{N}$ — шаг сетки.

Искомое: Вектор $\{y_k\}_{k=0}^{N}$, где $y_k \approx y(t_k)$.

Геометрическая идея (восходящая к Эйлера): Интегральная кривая заменяется ломаной Эйлера. Каждое звено ломаной строится по направлению поля, заданного правой частью $f(t, y)$ в начальной точке звена.

3. Явный (прямой) метод Эйлера. Геометрическая интерпретация, вывод, анализ.

Алгоритм:

1. Полагаем y_0 (дано).
2. Для $k = 0, 1, \ldots, N-1$ вычисляем:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k).$$

Вывод 1 (Геометрический): На отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ интегральную кривую заменяем отрезком прямой (касательной) с угловым коэффициентом $f(t_k, y_k)$. Это следует непосредственно из геометрического смысла производной $y'(t_k)$.

Вывод 2 (Аналитический, из разложения Тейлора):

Предположим, точное решение $y(t)$ — гладкое. Разложим его в ряд Тейлора в точке t_k:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k + h) = y(t_k) + h \cdot y'(t_k) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_k), \quad \xi_k \in [t_k, t_{k+1}].$$

Но по уравнению $y'(t_k) = f(t_k, y(t_k))$. Отбрасывая член порядка h^2, получаем:

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + h \cdot f(t_k, y(t_k)).$$

Заменяя $y(t_k)$ на найденное приближение y_k, приходим к формуле Эйлера.

Анализ погрешности (локальной и глобальной):

- Локальная погрешность (погрешность на одном шаге): Это ошибка, которая возникает, если начать шаг с точного значения. Из вывода видно, что она имеет порядок $O(h^2)$: $\delta_k = |y(t_{k+1}) - (y(t_k) + hf(t_k, y(t_k)))| \le M_2 \frac{h^2}{2}$, где $M_2 = \max |y''(t)|$.
- Глобальная погрешность: $E_k = |y(t_k) - y_k|$. Это накопленная ошибка после k шагов. Для явного метода Эйлера при выполнении условия Липшица $|f(t, u) - f(t, v)| \le L|u - v|$ можно доказать оценку: $E_k \le \frac{\lambda M_2}{2L}(e^{L(T - t_0)} - 1)$.

Ключевой вывод: Глобальная погрешность явного метода Эйлера имеет первый порядок точности, т.е. $E_N = O(h)$. Уменьшая шаг в 10 раз, мы ожидаем уменьшения ошибки примерно в 10 раз.

Недостатки явного метода Эйлера:

1. Низкая точность. Для достижения приемлемой точности требуется очень мелкий шаг.
2. Условная устойчивость. Для жестких уравнений (где характерные времена процессов сильно разнятся) метод требует нереально малого шага из соображений устойчивости, а не точности. Рассмотрим модельное уравнение: $\dot{y} = -\lambda y, \lambda > 0$.

- Точное решение: $y(t) = y_0 e^{-\lambda t}$ (устойчиво, стремится к 0).
- Применяем метод Эйлера: $y_{k+1} = y_k + h(-\lambda y_k) = (1 - \lambda h) y_k$.

Чтобы решение численной схемы не росло (было устойчивым), необходимо $|1 - \lambda h| < 1$, т.е. $h < \frac{2}{\lambda}$. Это условие устойчивости. При $\lambda \gg 1$ шаг становится крайне малым.

4. Неявный метод Эйлера. Устойчивость для жестких задач.

Алгоритм:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_{k+1}, y_{k+1}).$$

Особенность: Значение y_{k+1} входит и в левую, и в правую часть. Это уравнение (часто нелинейное) необходимо решать на каждом шаге относительно y_{k+1} (например, методом Ньютона). Отсюда название — неявный.

Вывод (Интегральный, через левую прямоугольную формулу):

Проинтегрируем уравнение $\dot{y} = f(t, y)$ на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$:

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, y(\tau)) d\tau.$$

Аппроксимируем интеграл по методу **правых** прямоугольников: $\int_{t_k}^{t_{k+1}} g(\tau)d\tau \approx h \cdot g(t_{k+1})$. Получаем формулу неявного метода.

Анализ устойчивости для тестового уравнения:

Для $\hat{y} = -\lambda y$: $y_{k+1} = y_k + h(-\lambda y_{k+1}) \Rightarrow y_{k+1} = \frac{y_k}{1+\lambda h}$.

Множитель перехода $\frac{1}{1+\lambda h} < 1$ при любом $h > 0$. **Вывод**: Неявный метод Эйлера **абсолютно устойчив** для этого уравнения. Нет ограничений на шаг по соображениям устойчивости, только по точности. Это главное преимущество для жестких систем.

5. Усовершенствованный (модифицированный) метод Эйлера. Методы Рунге-Кутты 2-го порядка.

Явный метод Эйлера использует информацию о поле направлений только в начале шага. Идея улучшения — усреднить производную.

Метод Эйлера-Коши (прогноз-коррекция):

1. Прогноз (явный шаг Эйлера): $\tilde{y}_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k)$.
2. Коррекция (усреднение): $y_{k+1} = y_k + h \cdot \frac{f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})}{2}$.

Геометрическая интерпретация: Сначала делаем пробный шаг по направлению в начальной точке, вычисляем поле направлений в этой пробной точке, а затем идём по среднему направлению.

Вывод (через формулу трапеций):

Проинтегрируем уравнение: $y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, y(\tau))d\tau$.

Аппроксимируем интеграл по формуле трапеций: $\int_{t_k}^{t_{k+1}} g(\tau)d\tau \approx h \cdot \frac{g(t_k)+g(t_{k+1})}{2}$.

Получаем: $y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + \frac{h}{2}[f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))]$.

Это неявная схема трапеций. Чтобы сделать её явной, заменяем $y(t_{k+1})$ в правой части на прогноз по Эйлеру. Так мы приходим к явному методу Эйлера-Коши.

Погрешность: Локальная погрешность $O(h^3)$, глобальная $O(h^2)$ — метод второго порядка. Это значительное улучшение.

Общий вид метода Рунге-Кутты 2-го порядка:

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_k, y_k), \\ k_2 = hf(t_k + \alpha h, y_k + \beta k_1), \\ y_{k+1} = y_k + ak_1 + bk_2. \end{cases}$$

Подбором параметров α, β, a, b можно получить различные методы. При $\alpha = \beta = 1$, $a = b = 1/2$ — это метод Эйлера-Коши. При $\alpha = \beta = 1/2$, $a = 0$, $b = 1$ — метод усовершенствованного Эйлера (средняя точка): $y_{k+1} = y_k + hf(t_k + h/2, y_k + \frac{h}{2}f(t_k, y_k))$.

6. Классический метод Рунге-Кутты 4-го порядка (RK4)

Наиболее популярный на практике метод баланса точности и вычислительных затрат.

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_k, y_k), \\ k_2 = hf(t_k + h/2, y_k + k_1/2), \\ k_3 = hf(t_k + h/2, y_k + k_2/2), \\ k_4 = hf(t_k + h, y_k + k_3), \\ y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{cases}$$

Порядок точности: Глобальная погрешность $O(h^4)$. Для большинства задач обеспечивает хорошую точность при умеренном шаге.

7. Численное решение систем ОДУ (СОДУ)

Все методы обобщаются на системы **покоординатно**.

Пусть дана система:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m.$$

Явный метод Эйлера для системы:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h \cdot \mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}_k).$$

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка для системы: Все k_i становятся векторами, формулы остаются прежними. Это одно из ключевых преимуществ методов Рунге-Кутты.

8. Численное решение ДУВП (уравнений в частных производных) для задачи Коши. Метод прямых.

Подход к решению УрЧП, сводящий его к системе ОДУ. Рассмотрим на примере уравнения теплопроводности на отрезке:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, x) = u_0(x), \quad t > 0, \quad x \in [0, L].$$

1. Дискретизация по пространственной переменной: Вводим сетку по x: $x_j = j \cdot \Delta x$, $j = 0, \ldots, M$.
2. Аппроксимация производной по x: Заменяем вторую производную разностным отношением (например, по трехточечному шаблону):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x_j) \approx \frac{U_{j-1}(t) - 2U_j(t) + U_{j+1}(t)}{(\Delta x)^2},$$

где $U_j(t) \approx u(t, x_j)$ — искомая функция в точке x_j, зависящая уже только от времени.

3. Получение системы ОДУ (метод прямых): Для каждого внутреннего узла $j = 1, \ldots, M-1$ получаем ОДУ:

$$\frac{dU_j}{dt} = \frac{a^2}{(\Delta x)^2}(U_{j-1}(t) - 2U_j(t) + U_{j+1}(t)).$$

Для граничных узлов $j = 0$ и $j = M$ используем граничные условия (например, $U_0(t) = 0, U_M(t) = 0$).

4. Решение системы ОДУ: Получили систему из $(M-1)$ линейных ОДУ первого порядка. К ней можно применить любой из рассмотренных выше методов (Эйлера, Рунге-Кутты).

Важно: Это лишь одна из многих возможных схем (здесь — явная). Существуют также неявные и полунеявные схемы (Кранка-Николсон), которые устойчивы при любом шаге по времени, но требуют решения СЛАУ на каждом шаге.

Резюме и сравнительная таблица методов

Метод	Формула (ОДУ)	Порядок точности	Устойчивость	Сложность	Применение
Явный Эйлер	$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$	1-й (O(h))	Условная	Низкая	Учебные задачи, некритичные расчеты
Неявный Эйлер	$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$	1-й (O(h))	Абсолютная	Средняя (решение ур-я)	Жесткие системы, устойчивость важнее точности
Модиф. Эйлер (RK2)	$y_{k+1} = y_k + hf(t_k + h/2, y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k))$	2-й (O(h^2))	Условная	Средняя	Универсальный метод для многих задач
Рунге-Кутты 4 (RK4)	См. выше с k_1, k_2, k_3, k_4	4-й (O(h^4))	Условная	Высокая (4 вызова f)	Стандарт для нежестких задач, высокая точность
Метод прямых	Сведение УрЧП к системе ОДУ	Зависит от схем	Зависит от схем	Высокая	Решение УрЧП параболического/ гиперболического типа

Общий алгоритм выбора метода:

1. Проанализируйте задачу: возможно ли аналитическое решение? Нужна ли высокая точность?
2. Оцените жесткость системы (если есть быстро и медленно затухающие компоненты).
3. Если система нежесткая и нужна высокая точность — используйте RK4.
4. Если система жесткая — используйте неявные методы (неявный Эйлер, методы Гира) или специализированные решатели.
5. Всегда проводите тестовые расчеты, уменьшая шаг в 2 раза и оценивая изменение результата (оценка погрешности методом Рунге).

Задание для закрепления и программирования:

Рассмотрите задачу Коши для уравнения Ван дер Поля (модель нелинейного осциллятора):

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x, \quad \mu > 0. \end{cases}$$

с начальными условиями $x(0) = 2, y(0) = 0$.

1. Аналитически: Докажите, что решение существует и единственно при любом t.
2. Численно (предлагается реализовать в любой среде):

- Реализуйте явный метод Эйлера, метод Эйлера-Коши (RK2) и классический RK4.
- Для $\mu = 1$ и $t \in [0, 20]$ постройте на одном графике три численных решения $x(t)$ с шагом $h = 0.1$. Сравните их.
- Исследуйте устойчивость явного метода Эйлера: начните увеличивать шаг h (0.5, 1.0, 2.0). При каком h решение теряет физический смысл (становится неустойчивым)?
- Постройте фазовые портреты $(x(t), y(t))$, полученные разными методами с $h = 0.01$. Какой метод быстрее сходится к предельному циклу?

3. Качественный анализ: Сравните полученные численные результаты с тем, что предсказывает теория для системы Ван дер Поля (наличие устойчивого предельного цикла).

Это задание объединит все аспекты: теоретические основы, численные методы, анализ устойчивости и качественное поведение, что полностью соответствует духу нашего курса.

Утверждение: Дана задача Коши вида $\begin{cases} y' = f(t, x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Утверждение: Все численные методы заключаются в поиске аппроксимации (некоторого приближенного решения).

Утверждение: Для использования численного метода решения задачи Коши требуется выделить некоторый отрезок $[x_0; X]$, на котором мы хотим найти решение.

Утверждение: Для применения метода Эйлера требуется ввести шаг $h = \frac{X - x_0}{n}$, где n - число разбиений отрезка. Применив для каждой точки разбиения рекуррентную формулу $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$, нарисуем прямые в промежутках $[x_i; x_{i+1}]$, которые и будут итоговым графиком нашего решения.

Доказательство: Мы можем получить приближённое значение функции в точке приближённо с помощью формулы Тейлора $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x - a)^n + \text{остатточный член.}$ Мы

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}(x_{i+1} - x_i) + \cdots + \frac{y^{(n)}}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n$$

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Метод Эйлера

Дана задача Коши

Введём рекуррентную формулу

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Вопрос 52: Определение топологии. Топологическое пространство. Открытое множество, точки прикосновения множеств, замкнутое.

Непрерывное отображение в точке. Связность. Аксиомы отделимости. Хаусдорфово топологическое пространство. Компактность.

Определение: Топология на множестве X - семейство τ подмножеств X, удовлетворяющее аксиомам:

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. Объединение любого семейства множеств из τ принадлежит τ
3. Пересечение конечного числа множеств из τ принадлежит τ

Определение: Топологическое пространство - пара (X, τ).

Определение: Множество $U \subset X$ называется открытым, если $U \in \tau$.

Определение: Точка x называется точкой прикосновения множества $A \subset X$, если любая окрестность x содержит точку из A.

Определение: Множество $F \subset X$ называется замкнутым, если его дополнение открыто.

Определение: Отображение $f : X \to Y$ непрерывно в точке x_0, если для любой окрестности V точки $f(x_0)$ существует окрестность U точки x_0 такая, что $f(U) \subset V$.

Определение: Топологическое пространство называется связным, если оно не представимо в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств.

Аксиомы отделимости:

- T_1: Любые две различные точки можно отделить замкнутыми множествами
- T_2 (Хаусдорфово): Любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности

Определение: Компактное множество - множество, из любого покрытия которого открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Вопрос 53: Многообразия. Функции и отображения. Гладкие многообразия. Гладкие функции, гладкие отображения, диффеоморфизм.

Определение: n-мерное многообразие - топологическое пространство M, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому множеству в $\mathbb{R}^n$.

Определение: Гладкое многообразие - многообразие с атласом гладких карт.

Определение: Гладкая функция $f : M \to \mathbb{R}$ - функция, гладкая в локальных координатах.

Определение: Гладкое отображение $f : M \to N$ между гладкими многообразиями - отображение, гладкое в локальных координатах.

Определение: Диффеоморфизм - гладкое отображение, имеющее гладкое обратное.

Вопрос 54: Выпрямляющий диффеоморфизм (теорема).

Теорема: Выпрямляющий диффеоморфизм.

Пусть M - гладкое многообразие, $\gamma : I \to M$ - гладкая кривая. Тогда существует диффеоморфизм $\varphi : I \to \gamma(I)$, такой что $\varphi(0) = \gamma(0)$ и $D\varphi(t) \cdot \frac{d}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}(t)$.

Следствие: Локально любая гладкая кривая может быть выпрямлена.

Вопрос 55: Первый интеграл автономной системы. Дифференциальный критерий. Инвариантные множества. Независимые первые интегралы. Независимость в точке и зависимость в области. Универсальная система первых интегралов. Произвольная локально полная система.

Определение: Первый интеграл автономной системы $\dot{x} = f(x)$ - функция $H : U \to \mathbb{R}$, постоянная на решениях системы.

Дифференциальный критерий: Функция H является первым интегралом тогда и только тогда, когда $H'(x)f(x) = 0$ для всех $x \in U$.

Определение: Инвариантное множество - множество, все решения, начинающиеся в котором, остаются в нём.

Определение: Первые интегралы $H_1, \ldots, H_k$ называются независимыми в точке x_0, если градиенты $\nabla H_1, \ldots, \nabla H_k$ линейно независимы в x_0.

Определение: Универсальная система первых интегралов - максимальная система независимых первых интегралов.

Вопрос 56: Особые точки на плоскости.

Определение: Особая точка (точка покоя) системы $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^2$ - точка x_0, где $f(x_0) = 0$.

Классификация особых точек:

- Узел: решения приближаются по касательным к собственным векторам
- Седло: решения удаляются по одной прямой и приближаются по другой
- Фокус: решения приближаются/удаляются по спирали
- Центр: замкнутые траектории вокруг точки
- Вырожденный узел: особый случай узла

Теорема: Тип особой точки определяется собственными значениями линеаризованной системы.