

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Оглавление

1. Вопрос 1: Обыкновенное дифференциальное уравнение. Решение, интегральные кривые, общее решение.
2. Вопрос 2: Уравнение в дифференциалах. Поле направлений, леммы об интегральной кривой уравнения.
3. Вопрос 3: Уравнение первообразной. Интеграл уравнения в дифференциалах. Формула общего решения (теорема).
4. Вопрос 4: Уравнение в полных дифференциалах.
5. Вопрос 5: Автономное уравнение. Общее решение. Единственность при наличии особой точки. Дифференциальный признак единственности.
6. Вопрос 6: Уравнение с разделяющимися переменными (теорема о разделении переменных).
7. Вопрос 7: Однородное уравнение (лемма о сведении к уравнению с разделяющимися переменными).
8. Вопрос 8: Постановка задачи Коши. Формулировка локальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Сведение задачи к интегральному уравнению.
9. Вопрос 9: Инвариантность понятия производной. Эквивалентность норм. Определение топологии.
10. Вопрос 10: Операторная норма. Оценка конечных приращений.
11. Вопрос 11: Пространство непрерывных функций. Принцип сжимающих отображений. Приближения Пикара.
12. Вопрос 12: Доказательство локальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши.
13. Вопрос 13: Единственность решения задачи Коши. Локальная единственность. Глобальная единственность.
14. Вопрос 14: Теорема Пеано (формулировка). Ломаная Эйлера. Лемма Арцела - Асколи.
15. Вопрос 15: Доказательство теоремы Пеано.
16. Вопрос 16: Продолжаемость решений. Максимальное продолжение решения. Единственность непродолжаемого решения.
17. Вопрос 17: Продолжаемость до границы области. Пример не продолжаемости на всю ось.
18. Вопрос 18: Лемма Гронуолла - Беллмана. Лемма о дифференциальном неравенстве.
19. Вопрос 19: Теорема продолжаемости для линейной системы.
20. Вопрос 20: Каноническая замена переменных. Простейшие свойства канонической замены. Связь между уравнением и системой.
21. Вопрос 21: Теоремы существования, единственности и продолжаемости для уравнения.
22. Вопрос 22: Уравнение, не разрешенное относительно производной. (Расширение задачи Коши, теоремы существования и единственности). Особые решения. Дискриминантная кривая.
23. Вопрос 23: Метод введения параметра. Уравнение Клеро.
24. Вопрос 24: Общее решение однородной системы. Теорема об изоморфизме. Фундаментальные системы решений.
25. Вопрос 25: Фундаментальная матрица и оператор Коши (леммы об операторе и матрице).
26. Вопрос 26: Определитель Вронского и линейная зависимость для вектор-функций.
27. Вопрос 27: Формула Лиувилля – Остроградского для вектор-функций. Определитель и след оператора Коши.
28. Вопрос 28: Общее решение неоднородной системы. Метод вариации постоянных (теорема).
29. Вопрос 29: Общее решение линейного уравнения. Линейность канонической замены (лемма). Сведение линейного уравнения к системе.
30. Вопрос 30: Определитель Вронского скалярных функций. Свойства. Восстановление линейного уравнения. Признаки линейной зависимости.
31. Вопрос 31: Метод вариации постоянных для линейного неоднородного уравнения  $n$ -го порядка (теорема). Функция Грина задачи Коши.
32. Вопрос 32: Краевая задача. Теорема об альтернативе.
33. Вопрос 33: Функция Грина краевой задачи и ее свойство. Существование и единственность функции Грина.
34. Вопрос 34: Экспонента и логарифм оператора. Экспонента и оператор Коши.
35. Вопрос 35: Комплексификация оператора (лемма). Комплексификация системы. Действительные и комплексные решения.
36. Вопрос 36: Жорданова матрица. Вычисление экспоненты и логарифма. Фундаментальная система решений.
37. Вопрос 37: Метод неопределенных коэффициентов.
38. Вопрос 38: Характеристический многочлен линейного уравнения. Лемма о совпадении характеристических многочленов. Уравнение Эйлера.
39. Вопрос 39: Решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами (теорема).
40. Вопрос 40: Уравнение с квазимногочленом в правой части.
41. Вопрос 41: Устойчивость по Ляпунову для решения системы и линейного уравнения. Существенные упрощения (лемма).
42. Вопрос 42: Необходимое условие устойчивости. Система с постоянными коэффициентами (теорема).
43. Вопрос 43: Определение функции Ляпунова. Смысл производной в силу системы.
44. Вопрос 44: Лемма об устойчивости. Признак не асимптотической устойчивости.
45. Вопрос 45: Лемма об асимптотической устойчивости.
46. Вопрос 46: Теорема Четаева.
47. Вопрос 47: Система первого приближения. Теорема Ляпунова об исследовании устойчивости по первому приближению с полным доказательством.
48. Вопрос 48: Фазовое пространство автономной системы. Сдвиги фазовых траекторий. Непересекаемость фазовых кривых.

49. [Вопрос 49: Динамическая система и фазовый поток. Генератор фазового потока \(леммы\).](#)
50. [Вопрос 50: Три типа фазовых кривых. Отсутствие других типов.](#)
51. [Вопрос 51: Численные методы решения задачи Коши для СДУ и ДУВП. Алгоритмы методов Эйлера, его модификаций и их геометрическая интерпретация.](#)
52. [Вопрос 52: Определение топологии. Топологическое пространство. Открытое множество, точки прикосновения множеств, замкнутое. Непрерывное отображение в точке. Связность. Аксиомы отделимости. Хаусдорфово топологическое пространство. Компактность.](#)
53. [Вопрос 53: Многообразия. Функции и отображения. Гладкие многообразия. Гладкие функции, гладкие отображения, диффеоморфизм.](#)
54. [Вопрос 54: Выпрямляющий диффеоморфизм \(теорема\).](#)
55. [Вопрос 55: Первый интеграл автономной системы. Дифференциальный критерий. Инвариантные множества. Независимые первые интегралы. Независимость в точке и зависимость в области. Универсальная система первых интегралов. Произвольная локально полная система.](#)
56. [Вопрос 56: Особые точки на плоскости.](#)

## Вопрос 1: Обыкновенное дифференциальное уравнение. Решение, интегральные кривые, общее решение.

Определение: Обыкновенное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка - это уравнение вида  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ , где  $F$  - заданная функция  $(n + 2)$  переменных,  $x$  - независимая скалярная переменная функции  $F$ ,  $y = y(x)$  - неизвестная функция, а  $y^{(k)}$  - её производные порядка  $k$ .

Определение: Решением обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка называется функция  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ , где  $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$  - интервал существования решения, такая что при подстановке этой функции в заданное уравнение оно обращается в тождество:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad x \in I$$

Определение: Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка - это графики решений этого уравнения.

Определение: Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка - множество всех решений, заданное неявно уравнением  $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$  или явной формулой  $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$ , такое что выполняются условия:

1.  $\forall C_1, \dots, C_n$ : если запись  $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$  для любого набора констант задаёт функцию, то эта функция обязательно является решением,
2. Любое решение уравнения задаётся уравнением  $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$  при некоторых значениях констант  $C_1, \dots, C_n$  на всей своей области определения.

## Вопрос 2: Уравнение в дифференциалах. Поле направлений, леммы об интегральной кривой уравнения.

Определение: Уравнение в дифференциалах - уравнение вида  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ , где  $M, N : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  и  $(M(x, y), N(x, y)) \neq (0, 0)$  для всех  $(x, y) \in G$ .

### Касательная плоскость

С каждой точкой  $(x, y) \in G$  свяжем касательную плоскость  $T_{(x,y)}$  с координатами  $(dx, dy)$ , начало координат которой совмещено с точкой  $(x, y)$ , а оси координат параллельны соответствующим осям координат области  $G$ .

Определение: Поле направлений  $l$  - отображение  $l : (x, y) \in G \rightarrow l(x, y) \subset T_{(x,y)}$ , где  $l(x, y)$  - прямая, проходящая через точку  $(x, y) \in G$ .

Определение: Векторное поле  $v$  - отображение  $v : (x, y) \in G \rightarrow v(x, y) \in T_{(x,y)}$ , где  $v(x, y)$  - вектор, выходящий из точки  $(x, y) \in G$ .

Определение: Поле нормалей - векторное поле  $v = (M, N)$ , которое называется полем нормалей, так как в каждой точке оно ортогонально направлению интегральной кривой (вектор  $v$  служит нормалью к прямой поля направлений  $l(x, y)$ ).

Определение: Кривую  $\Gamma \subset G$  назовем интегральной кривой поля направлений  $l$ , если она в каждой своей точке  $(x, y) \in \Gamma$  касается прямой  $l(x, y)$ .

Замечание: Более конкретно, интегральная кривая может быть задана как  $\Gamma = \{(x, y) \in G' \mid \varphi(x, y) = 0\}$ , где  $G' \subset G$ ,  $\varphi \in C^1(G')$  и  $\nabla \varphi(x, y) = (\varphi'_x(x, y), \varphi'_y(x, y)) \neq 0$  для всех  $(x, y) \in \Gamma$ .

Лемма: Критерий интегральной кривой.

Кривая  $\Gamma \subset G$  является интегральной для уравнения в дифференциалах тогда и только тогда, когда  $\nabla \varphi(x, y) \parallel \nu(x, y)$ .

Доказательство:

Кривая  $\Gamma$  касается поля направлений  $l$  тогда и только тогда, когда в каждой точке  $(x, y) \in \Gamma$  касательная к  $\Gamma$  совпадает с прямой  $l(x, y)$ , что эквивалентно условию пропорциональности  $\varphi'_x(x, y) : \varphi'_y(x, y) = M(x, y) : N(x, y)$  или равенству  $M\varphi'_y - N\varphi'_x = 0$ .

### Вопрос 3: Уравнение первообразной. Интеграл уравнения в дифференциалах. Формула общего решения.

Определение: Уравнение первообразной (ОДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной) - уравнение вида  $y' = f(x)$ , где  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Теорема: Общее решение уравнения первообразной.

Если  $f \in C(I)$ , то при любом фиксированном  $x_0 \in I$  общее решение уравнения первообразной задается формулой:

$$y = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi + C$$

Определение: Скалярная функция  $\varphi \in C^1(G)$  с ненулевым градиентом называется интегралом уравнения в дифференциалах, если она принимает постоянное значение вдоль каждой интегральной кривой.

Утверждение: Интеграл уравнения в дифференциалах существует для любого уравнения в полных дифференциалах и однозначно определен с точностью до константы.

Теорема: Общее решение уравнения в дифференциалах.

Если  $\varphi$  - интеграл уравнения в дифференциалах, то его общее решение задается уравнением  $\varphi(x, y) = C$ .

Доказательство:

Пусть  $\varphi(x, y) = C$  - семейство интегральных кривых. Тогда  $\nabla\varphi(x, y) \cdot (dx, dy) = 0$ , что совпадает с исходным уравнением. Обратно, любое решение уравнения является уровнем интеграла.

### Вопрос 4: Уравнение в полных дифференциалах.

Определение: Уравнение в полных дифференциалах - уравнение в дифференциалах, для которого существует потенциал.

Определение: Потенциал - функция  $\varphi \in C^1(G)$ , удовлетворяющая равенству  $\nabla\varphi(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$  для всех  $(x, y) \in G$ .

#### Свойства уравнений в полных дифференциалах

1. Всякий потенциал уравнения в дифференциалах является его интегралом.
2. Всякий интеграл уравнения в дифференциалах служит потенциалом другого уравнения, получаемого из исходного умножением коэффициентов  $M$  и  $N$  на интегрирующий множитель  $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $\nabla\varphi(x, y) = \mu(x, y) \cdot (M(x, y), N(x, y))$ .
3. Уравнение в полных дифференциалах с известным потенциалом решается согласно Теореме 3.2 об общем решении уравнения в дифференциалах.
4. Левая часть уравнения в полных дифференциалах совпадает с полным дифференциалом его потенциала:  $d\varphi(x, y) = M(x, y) dx + N(x, y) dy$ .
5. Необходимое условие: Для того чтобы уравнение в дифференциалах с коэффициентами  $M, N \in C^1(G)$  было уравнением в полных дифференциалах, необходимо выполнение равенства  $M'_y(x, y) = N'_x(x, y)$  для всех  $(x, y) \in G$ .

Доказательство:

Поскольку  $M, N \in C^1(G)$ , то  $\varphi'_x, \varphi'_y \in C^1(G)$ , следовательно  $\varphi \in C^2(G)$ . Тогда  $M'_y(x, y) = \varphi''_{xy}(x, y) = \varphi''_{yx}(x, y) = N'_x(x, y)$ .

### Вопрос 5: Автономное уравнение. Общее решение.

Единственность при наличии особой точки. Дифференциальный признак единственности.

Определение: Автономное уравнение - уравнение вида  $y' = f(y)$ , где  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , заданное в области  $G = \mathbb{R} \times I$ .

Замечание: Автономное уравнение можно записать в виде уравнения в дифференциалах:  $dy = f(y) dx$ .

Общее решение автономного уравнения

Пусть на интервале  $J \subset I$  нет особых точек (точек, где  $f(y) = 0$ ). Тогда автономное уравнение приводится к уравнению в полных дифференциалах  $dx = \frac{1}{f(y)} dy$ , где  $(x, y) \in G' = \mathbb{R} \times J$ .

Если  $f \in C(J)$ , то оно имеет потенциал  $\varphi(x, y) = x - \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{f(\eta)}$  и общее решение задается формулой:

$$x = \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{f(\eta)} + C$$

Поскольку  $f$  не обнуляется на  $J$ , функция  $x(y)$  монотонна и обратима, что позволяет неявно задавать  $y(x)$ .

Особые точки

Если  $a \in I$  - особая точка ( $f(a) = 0$ ), то прямая  $y = a$  является интегральной кривой автономного уравнения.

Определение: Точка  $(x_0, y_0) \in G$  называется:

- точкой существования, если через нее проходит хотя бы одна интегральная кривая,
- точкой единственности, если любые две интегральные кривые, проходящие через эту точку локально совпадают.

Лемма: Свойства точек для автономного уравнения.

Если  $f \in C(I)$ , то для автономного уравнения любая точка  $(x, y) \in G$  является точкой существования, причем:

- если  $y$  - неособая точка, то  $(x, y)$  - точка единственности,
- если  $y = a$  - изолированная особая точка, то  $(x, y)$  - точка единственности тогда и только тогда, когда расходятся оба интеграла  $\int_a^{a \pm 0} \frac{d\eta}{f(\eta)}$ .

Доказательство:

Пусть  $a$  - изолированная особая точка, где  $f(y) > 0$  при  $y_0 \leq y < a$ . Изучим поведение интегральной кривой вблизи точки  $(x_0, a)$  при  $y \rightarrow a - 0$ .

1. Случай конечного интеграла: Пусть  $\int_{y_0}^{a-0} \frac{d\eta}{f(\eta)} = x_1 < \infty$ . Тогда  $\lim_{y \rightarrow a-0} x(y) = x_1 + C = x_0$ , где  $C = x_0 - x_1$ . Следовательно, через  $(x_0, a)$  проходит бесконечно много интегральных кривых, что нарушает единственность.
2. Случай бесконечного интеграла: Пусть интеграл расходится. Тогда интегральные кривые, подходящие к прямой  $y = a$  снизу, приближаются к ней асимптотически при  $x \rightarrow \infty$ , не достигая ее. Таким образом, единственность сохраняется.

Следствие 6 (Дифференциальный признак единственности):

Если  $f \in C(I)$  и в изолированной особой точке  $a \in I$  существует производная  $f'(a)$ , то все точки прямой  $y = a$  являются точками единственности.

Доказательство:

1.  $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$  при  $h \rightarrow 0$ .
2. Обозначим  $L = |f'(a)| + 1$ . Для достаточно малого  $h_0 > 0$  имеем:

$$0 < f(a - h) \leq |f'(a)(-h)| + |o(-h)| \leq L|h| \text{ при } 0 < h < h_0.$$

3. Тогда  $\int_{a-h_0}^{a-0} \frac{d\eta}{f(\eta)} = \int_0^{h_0} \frac{dh}{f(a-h)} \geq \int_0^{h_0} \frac{dh}{Lh} = \infty$ .
4. Согласно Лемме 5, это обеспечивает единственность.

## Вопрос 6: Уравнение с разделяющимися переменными.

Определение: Уравнение с разделяющимися переменными - уравнение вида  $P(x)Q(y) dx = R(x)S(y) dy$ , где  $P, R : I \rightarrow \mathbb{R}, Q, S : J \rightarrow \mathbb{R}$ , заданное в области  $G \subset \{(x, y) \in I \times J \mid (P(x)Q(y), R(x)S(y)) \neq (0, 0)\}$ .

Замечание: В случае обыкновенного дифференциального уравнения оно записывается в виде  $y' = f(x)g(y)$ .

### Особые случаи

Для точек  $(x_0, y_0)$ , где  $(R(x_0), Q(y_0)) = (0, 0)$ , получаем интегральные кривые  $x = x_0$  или  $y = y_0$ .

Теорема: Решение уравнения с разделяющимися переменными.

Если  $P, R \in C(I)$  и  $Q, S \in C(J)$ , а функции  $Q, R$  не имеют нулей, то для уравнения с разделяющимися переменными в области  $G$ :

1. Для любой точки  $(x_0, y_0) \in G$  общее решение задается уравнением:

$$\int_{x_0}^x \frac{P(\xi)}{R(\xi)} d\xi = \int_{y_0}^y \frac{S(\eta)}{Q(\eta)} d\eta + C$$

2. Все точки  $(x, y) \in G$  являются точками существования и единственности.

Доказательство:

Уравнение с разделенными переменными  $M(x) dx + N(y) dy = 0$ , где  $M(x) = \frac{P(x)}{R(x)}$ ,  $N(y) = -\frac{S(y)}{Q(y)}$ , является уравнением в полных дифференциалах с потенциалом  $\varphi(x, y) = \int_{x_0}^x M(\xi) d\xi + \int_{y_0}^y N(\eta) d\eta$ . Поэтому к нему применима Теорема 3.2 об общем решении уравнения в дифференциалах.

## Вопрос 7: Однородное уравнение.

Определение: Однородное уравнение — уравнение вида  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ , заданное в области  $G = \{(x, y) \mid x > 0, \frac{y}{x} \in I\}$  или  $G = \{(x, y) \mid x < 0, \frac{y}{x} \in I\}$ .

Лемма: Сведение к уравнению с разделяющимися переменными.

При переходе от переменных  $x, y$  к переменным  $x, z$ , связанным соотношением  $z = \frac{y}{x}$ , все решения однородного уравнения переходят в решения уравнения  $z' = \frac{f(z) - z}{x}$ , где  $z \in I$ , и наоборот.

Доказательство:

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right) \Leftrightarrow (xz(x))' = f\left(\frac{xz(x)}{x}\right) \Leftrightarrow xz'(x) + z = f(z(x)) \Leftrightarrow z'(x) = \frac{f(z(x)) - z}{x}$$

## Вопрос 8: Постановка задачи Коши. Формулировка локальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Сведение задачи к интегральному уравнению.

Определение: Задача Коши — система вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

где  $(t, x) \in G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in I$ . Принята следующая терминология:

- функция  $f$  — правая часть уравнения,
- равенство  $x(t_0) = x_0$  — начальное условие,
- начальная точка  $(t_0, x_0) \in G$  состоит из начального момента  $t_0$  и начального значения  $x_0$ ,
- решение задачи Коши — функция  $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющая системе,
- переменная  $x \in \mathbb{R}^n$  называется фазовой, а  $t \in \mathbb{R}$  — временем.

## Покомпонентная запись

Если в  $\mathbb{R}^n$  фиксирован базис, то задачу Коши можно записать покомпонентно:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(t, x^1, \dots, x^n) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n(t, x^1, \dots, x^n) \\ x^1(t_0) = x_0^1 \\ \dots \\ x^n(t_0) = x_0^n \end{cases}$$

Теорема: Локальная теорема существования и единственности.

Если  $f, f'_x \in C(G)$ , то  $\forall (t_0, x_0) \in G \exists U(t_0): \exists!$  решение  $x: U(t_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  задачи Коши.

Лемма: Интегральное представление решения.

Если  $f \in C(G)$ , то функция  $x \in C(I)$  является решением задачи Коши тогда и только тогда, когда:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad t \in I$$

Следствие: Дифференцируемость решений.

Если  $f \in C(G)$ , то любое решение задачи Коши является непрерывно дифференцируемой функцией.

## Вопрос 9: Инвариантность понятия производной. Эквивалентность норм. Определение топологии.

### Инвариантность понятия производной

Производная  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  вектор-функции  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  в точке  $t \in I$  может пониматься двояко:

- либо в  $\mathbb{R}^n$  как абстрактном линейном векторном пространстве,
- либо в  $\mathbb{R}^n$  как координатном линейном пространстве.

Однако, они ведут к одному результату из-за существования изоморфизма между указанными двумя линейными топологическими пространствами.

Лемма: Эквивалентность норм.

Для любых двух норм  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$  в  $\mathbb{R}^n$  существует константа  $C$ , удовлетворяющая оценке:

$$\|x\|_1 \leq C \|x\|_2, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Доказательство:

В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны. Пусть  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$  — две нормы. Множество  $\{x : \|x\|_2 = 1\}$  компактно, поэтому функция  $f(x) = \|x\|_1$  достигает минимума  $m > 0$ . Тогда  $\|x\|_1 \geq m \|x\|_2$ . Аналогично существует  $M$  такое, что  $\|x\|_2 \leq M \|x\|_1$ .

Определение: Система открытых множеств  $\tau$  в топологическом пространстве  $X$  называется его топологией, если обладает следующими свойствами:

1.  $\emptyset, X \in \tau$ ,
2. если  $U_1, U_2 \in \tau$ , то  $U_1 \cap U_2 \in \tau$ ,
3. если  $U_\alpha \in \tau$  при каждом  $\alpha \in A$ , то  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$ .

### Предел последовательности

С помощью топологии можно определить предел последовательности  $x_n \in X$  как такую точку  $a \in X$ , что для любой её окрестности  $U(a) \in \tau$  существует число  $N$ , удовлетворяющее импликации  $n > N \implies x_n \in U(a)$ .

Также с помощью топологии можно определить предельные, внутренние, граничные точки множества, его открытость, закрытость, замкнутость, компактность и т.п.

## Вопрос 10: Операторная норма. Оценка конечных приращений.

### Операторная норма

Пусть пространство  $\mathbb{R}^n$  нормированное (задана норма  $|\cdot|$ ).

Операторная норма в пространстве  $\text{End } \mathbb{R}^n$  линейных операторов, действующих из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^n$ , задается формулой:

$$\|A\| = \sup_{|x| \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax|, \quad A \in \text{End } \mathbb{R}^n$$

### Свойства операторной нормы

Имеют место следующие утверждения об операторной норме:

1.  $\|A\| < \infty$ ,
2.  $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot |x|$ ,
3.  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .

Доказательство:  $\|ABx\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot |x|$ , откуда  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .

Замечание: Операторная норма помогает понять максимально возможное растяжение вектора оператором.

### Производная вектор-функция

Производная  $g'$  конечномерной функции  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  по конечномерной переменной  $x$  определяется как линейный оператор  $g'(x) \in \text{End } \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющий условию:

$$g(x+h) - g(x) = g'(x)h + o(|h|), \quad h \rightarrow 0$$

Лемма: Оценка конечных приращений.

Если  $g \in C^1(B)$ , где  $B \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклое множество, то:

$$|g(y) - g(x)| \leq \sup_{\xi \in B} \|g'(\xi)\| \cdot |y - x|, \quad x, y \in B$$

Доказательство:

Если  $x \in B$  и  $y = x + h \in B$ , то  $(x + \theta h) \in B$ , где  $\theta \in [0; 1]$ . Обозначив  $\varphi(\theta) = g(x + \theta h)$ , получим:

$$|g(x+h) - g(x)| = |\varphi(1) - \varphi(0)| = \left| \int_0^1 \varphi'(\theta) d\theta \right| = \int_0^1 |g'(x + \theta h)h| d\theta \leq \int_0^1 \|g'(x + \theta h)\| \cdot |h| d\theta \leq \sup_{\xi \in B} \|g'(\xi)\| \cdot |h|$$

Откуда вытекает доказываемая оценка.

## Вопрос 11: Пространство непрерывных функций. Принцип сжимающих отображений. Приближения Пикара.

### Метрическое пространство

Пусть  $X$  — метрическое пространство с метрикой  $\rho(\cdot, \cdot)$ .

Определение: Последовательность точек  $x_n \in X$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , называется фундаментальной, если выполнено условие  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \rho(x_m, x_n) = 0$ .

Определение: Пространство  $X$  называется полным, если в нём всякая фундаментальная последовательность сходится.

Лемма: Замкнутое подпространство.

Если пространство  $X$  полно, то любое его замкнутое подпространство также полно.

### Пространство непрерывных функций

Если для заданного отрезка  $K \subset \mathbb{R}$  множество всех непрерывных функций  $x : K \rightarrow \mathbb{R}^n$  наделить равномерной нормой (метрикой)  $\|x\| = \sup_{t \in K} |x(t)|$ , то полученное нормированное (метрическое) пространство, обозначаемое через  $C(K)$ , будет полным.

Сходящиеся в этом пространстве последовательности функций называются **равномерно сходящимися на отрезке  $K$** .

Определение: Отображение  $A : X \rightarrow X$  называется **сжимающим**, если  $\exists q < 1 : \rho(Ay, Ax) \leq q \cdot \rho(y, x)$ , где  $x, y \in X$ .

Замечание: Если отображение является сжимающим, то оно также является непрерывным и даже липшицевым, где константа  $L = q$ .

Определение: Любая точка  $x \in X$ , удовлетворяющая равенству  $Ax = x$ , называется **неподвижной точкой** отображения  $A$ .

Лемма: Принцип сжимающих отображений.

Пусть  $A : X \rightarrow X$  — сжимающее отображение в полном метрическом пространстве  $X$ . Тогда  $A$  имеет единственную неподвижную точку.

Доказательство:

1. Если бы существовало две разные неподвижные точки  $x, y \in X$ , то  $\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \leq q\rho(x, y) < \rho(x, y)$ , что невозможно.
2. Для нахождения неподвижной точки возьмём произвольную точку  $x_0 \in X$  и образуем последовательность  $x_n = A^n x_0$ . Она фундаментальна, поскольку  $\rho(x_n, x_m) \leq q^n \frac{\rho(x_0, x_1)}{1-q}$ . Поэтому в полном пространстве существует предел  $x$  этой последовательности, который и является неподвижной точкой.

Определение: **Приближения Пикара** на отрезке  $K_T = [t_0 - T; t_0 + T]$  определяются рекуррентно:

$$x_0(t) \equiv x_0, \quad x_n = Ax_{n-1},$$

где оператор  $A$  определяется формулой  $(Ax)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$ .

Утверждение: Приближения Пикара на некотором отрезке  $K_T$  все одновременно определены и равномерно сходятся к решению интегрального уравнения задачи Коши.

## Вопрос 12: Доказательство локальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Теорема: Локальная теорема существования и единственности.

Если  $f, f'_x \in C(G)$ , то для любой точки  $(t_0, x_0) \in G$  существует интервал  $U(t_0) \subset \mathbb{R}$  такой, что задача Коши имеет единственное решение  $x : U(t_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Доказательство:

Согласно Лемме 10 (сведение задачи Коши к интегральному уравнению), решение задачи Коши удовлетворяет интегральному уравнению  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$ .

Рассмотрим оператор  $A : C(K_T) \rightarrow C(K_T)$ , где  $K_T = [t_0 - T; t_0 + T]$ :

$$(Ax)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

Покажем, что при достаточно малом  $T > 0$  этот оператор сжимающий в пространстве  $C(K_T)$  с равномерной нормой.

Для  $x, y \in C(K_T)$ :

$$\|Ax - Ay\| \leq \sup_{t \in K_T} \int_{t_0}^t |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))| d\tau \leq LT \|x - y\|$$

где  $L$  — константа Липшица для  $f$  по  $x$ .

При  $LT < 1$  оператор  $A$  сжимающий. Кроме того,  $A$  отображает замкнутый шар  $\{x \in C(K_T) : \|x - x_0\| \leq R\}$  в себя при достаточно малом  $T$ .

По принципу сжимающих отображений  $A$  имеет единственную неподвижную точку, которая является решением задачи Коши.

## Вопрос 13: Единственность решения задачи Коши. Локальная единственность. Глобальная единственность.

Следствие: Локальная единственность.

В условиях Теоремы 8.1 любые два решения задачи Коши локально (вблизи  $t_0$ ) совпадают.

Доказательство:

Пусть  $x', x''$  — два решения задачи Коши, определенные в окрестности  $t_0$ . Тогда на некотором интервале  $U(t_0)$  оба решения совпадают с единственным решением, существование которого гарантируется Теоремой 8.1.

Теорема: Глобальная единственность.

Если каждая точка области  $G$  является точкой единственности, то любые два решения  $x$  и  $y$  задачи Коши удовлетворяют равенству  $x|_I = y|_I$ , где  $I = D(x) \cap D(y)$  — область определения обоих решений.

Доказательство:

Предположим, что решения различаются в точке  $T \in I$ . Пусть  $t_1 = \inf\{t \geq t_0 \mid x(t) \neq y(t)\}$ . Тогда  $x(t) = y(t)$  для  $t_0 \leq t \leq t_1$ , и решения совпадают в точке  $t_1$ . Поскольку  $t_1$  — точка единственности, решения совпадают и в окрестности  $t_1$ , что противоречит определению  $t_1$ .

## Вопрос 14: Теорема Пеано (формулировка). Ломаная Эйлера. Лемма Арцела - Асколи.

Теорема: Теорема Пеано.

Если  $f \in C(G)$ , то для любой точки  $(t_0, x_0) \in G$  существует решение задачи Коши.

Замечание: В формулировке Теоремы Пеано условие непрерывности  $f$  нельзя ослабить.

Определение: Ломаная Эйлера — график функции  $\varphi$ , удовлетворяющей  $\dot{\varphi}(t) = f(s, \varphi(s))$  на каждом интервале разбиения  $[s_{i-1}; s_i]$ , где  $s$  — точка из этого интервала.

Определение: Семейство  $\Phi$  функций  $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется равномерно ограниченным, если  $\sup_{\varphi \in \Phi} \|\varphi\| < \infty$ .



Определение: Семейство  $\Phi$  называется равностепенно непрерывным, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что для любых  $\varphi \in \Phi$  и  $t, s \in K$  выполняется:  $|t - s| < \delta \implies |\varphi(t) - \varphi(s)| < \varepsilon$ .

Определение: Семейство  $\Phi$  называется предкомпактным, если из любой его последовательности можно выбрать фундаментальную подпоследовательность.

Лемма 18 (Лемма Арцела - Асколи):

Всякое равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство  $\Phi \subset C(K)$  предкомпактно.

Доказательство:

Семейство равномерно ограничено, поэтому имеет компактное замыкание. Равностепенная непрерывность обеспечивает, что предел последовательности непрерывен.

## Вопрос 15: Доказательство теоремы Пеано.

Теорема: Теорема Пеано.

Если  $f \in C(G)$ , то для любой точки  $(t_0, x_0) \in G$  существует решение задачи Коши.

Доказательство:

Рассмотрим последовательность ломаных Эйлера на отрезке  $K = [t_0, t_0 + T]$  с разбиением на  $n$  равных частей точками  $t_0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = t_0 + T$ , шаг  $h = T/n$ .

Ломаная Эйлера строится индуктивно:

- $x_0(t) = x_0$  на  $[s_0, s_1]$
- $x_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_{i-1}(\tau)) d\tau$  на  $[s_0, s_1]$
- На каждом интервале  $[s_{i-1}, s_i]$  функция определяется как решение задачи Коши с начальным условием  $x_i(s_{i-1}) = x_{i-1}(s_{i-1})$  и правой частью  $f(t, x_{i-1}(t))$ .

Семейство  $\Phi_h$  всех таких ломаных равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на  $K$ .

Ограниченность следует из непрерывности  $f$ . Равностепенная непрерывность: на каждом участке функция либо линейна, либо является интегралом от непрерывной функции.

По Лемме 14.1 из любой последовательности ломаных можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность. Предел является решением задачи Коши.

Следствие: Если  $f \in C(G)$ , то для любой точки  $(t_0, x_0) \in G$  существует отрезок  $K$ , содержащий  $t_0$ , такой что:

- Для любого разбиения определена хотя бы одна ломаная Эйлера
- Любая равномерно сходящаяся последовательность ломаных со стремящейся к нулю нормой разбиения сходится к решению задачи Коши.

## Вопрос 16: Продолжаемость решений. Максимальное продолжение решения. Единственность непродолжаемого решения.

Определение: Решение  $x$  называется продолжением решения  $y$ , если  $y = x|_{D(y)}$ .

Определение: Решение называется непродолжаемым (или максимально продолженным), если оно не имеет продолжений, отличных от самого себя.

Лемма: Продолжаемость решений.

Любое решение задачи Коши можно продолжить до непродолжаемого.

Доказательство:

Используя теорему о локальном существовании, решение можно последовательно продолжать до границы области определения.

Следствие: Если задача Коши имеет единственное непродолжаемое решение, то оно служит продолжением любого ее решения.

Теорема: Единственность непродолжаемого решения.

Если все точки области  $G$  являются точками  $\exists!$ , то для любой точки  $(t_0, x_0) \in G$  существует единственное непродолжаемое решение задачи Коши.

Доказательство:

По Лемме 16.1 любое решение можно продолжить до границы. Единственность следует из того, что все точки - точки единственности.

## Вопрос 17: Продолжаемость до границы области. Пример не продолжаемости на всю ось.

Теорема: Продолжаемость до границы.

Если  $f \in C(G)$ , а  $x$  — непродолжаемое решение, то для любого компакта  $C \subset G$  существует отрезок  $K \subset D(x)$  такой, что  $(t, x(t)) \notin C$  для  $t \notin K$ .

Утверждение: Непродолжаемое решение достигает границы области определения правой части.

Доказательство:

Если решение можно продолжить дальше, оно не является непродолжаемым. Если решение ограничено компактом, оно равномерно непрерывно и может быть продолжено.

Пример: Уравнение взрыва

Уравнение  $\dot{x} = x^2$ , заданное в  $G = \mathbb{R}^2$ , имеет точки  $\exists!$ , но решение  $x(t) = -\frac{1}{t-C}$  не определено на всей прямой. Это показывает, что гладкость правой части не гарантирует неограниченную продолжаемость.

## Вопрос 18: Лемма Гронуолла - Беллмана. Лемма о дифференциальном неравенстве.

Лемма: Лемма Гронуолла-Беллмана.

Если  $u \in C(J)$ ,  $J = [t_0; \beta)$ , где  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , и  $0 \leq u(t) \leq a + b \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$ , то  $u(t) \leq ae^{b(t-t_0)}$ .

Доказательство:

Обозначим  $v(t) = a + b \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$ . Тогда  $u(t) \leq v(t)$  и  $v'(t) = bu(t) \leq bv(t)$ .

Решая  $v' \leq bv$ ,  $v(t_0) = a$ , получаем  $v(t) \leq ae^{b(t-t_0)}$ . Следовательно,  $u(t) \leq ae^{b(t-t_0)}$ .

Следствие: Если  $u \in C(J)$ ,  $J = (\alpha; \beta)$ , и  $0 \leq u(t) \leq a + b \left| \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \right|$  для  $t_0 \in J$ , то  $u(t) \leq ae^{b|t-t_0|}$ .

Доказательство:

Применяя Лемму 18.1 к функции  $u(t) = |x(t)|$ .

Лемма: Дифференциальное неравенство.

Если  $x \in C^1(J)$ ,  $J = (\alpha; \beta)$ , и  $|\dot{x}(t)| \leq a + b|x(t)|$  для  $a, b \geq 0$ , то  $|x(t)| \leq (|x(t_0)| + a|t - t_0|)e^{b|t-t_0|}$ .

Доказательство:

Дифференцируя неравенство для  $u(t) = |x(t)|$ , получаем интегральное неравенство и применяем Лемму 18.1.

## Вопрос 19: Теорема продолжаемости для линейной системы.

### Линейная система

Задача Коши записывается как:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + F(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

где  $A : I \rightarrow \text{End} \mathbb{R}^n$ ,  $F : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Система однородная при  $F = 0$ , неоднородная иначе.

Теорема: Продолжаемость линейной системы.

Если  $A, F \in C(I)$ , то любое решение определено на всем интервале  $I$ .

Доказательство:

Решение:  $x(t) = X(t) \left( x_0 + \int_{t_0}^t X(\tau)^{-1} F(\tau) d\tau \right)$ , где  $X(t)$  - фундаментальная матрица.

Поскольку  $A \in C(I)$ ,  $X(t)$  определена на  $I$ . Интеграл сходится на всем  $I$ .

Следствие: Если  $|f(t, x)| \leq a(t) + b(t)|x|$  с  $a, b \in C(I)$ ,  $f \in C(G)$ , то любое непродолжаемое решение определено на всем  $I$ .

## Вопрос 20: Каноническая замена переменных. Простейшие свойства канонической замены. Связь между уравнением и системой.

Утверждение: Каноническая замена переменных сводит любое уравнение  $n$ -го порядка  $y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ , где  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G \subset \mathbb{R}^{1+n}$ , разрешённое относительно старшей производной, к нормальной системе из  $n$  уравнений специального вида.

Определение: Каноническая замена переменных - это переход от скалярного уравнения  $n$ -го порядка к системе  $n$  уравнений первого порядка вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

где  $x_1 = y$ ,  $x_2 = y'$ , ...,  $x_n = y^{(n-1)}$ .

Утверждение: Пусть  $S_f$  - множество всех решений уравнения выше, а  $S_f(t_0, y_0, \dots, y_{n-1}) = S_f(t_0, \bar{y}_0)$  - его подмножество, состоящее из

всех решений задачи Коши, определяемой набором начальных условий  $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ \dot{y}(t_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$ . Аналогично, обозначим через  $S_{\bar{f}}$  и  $S_{\bar{f}}(t_0, \bar{y}_0)$ .

множества решений следующей нормальной системы и, соответственно, задачи Коши для неё  $\dot{x} = \bar{f}(t, x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \\ f(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$ ,  $x(t_0) =$

$$\bar{y}_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Утверждение: Для заданного  $n \in \mathbb{N}$  обозначим через  $\Phi^{n-1}$  множество всех  $n - 1$  раз дифференцируемых скалярных функций (определённых на всяких интервалах), а через  $\Phi$  - множество всех функций, принимающих значения в  $\mathbb{R}^n$ .

Определение: Канонической заменой назовём формальную операцию  $\psi$ , переводящую скалярную переменную  $y$  в следующую векторную

$$\psi y = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Определение: В случае  $y \in \Phi^{n-1}$  функция  $\psi y$  называется  $(n - 1)$ -струей функции  $y$ , а её график  $\Gamma_{\psi y} - (n - 1)$ -графиком функции  $y$ .

Лемма: Каноническая замена осуществляет изоморфизмы множеств  $S_f \rightarrow S_{\bar{f}}$  и  $S_f(t_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \rightarrow S_{\bar{f}}(t_0, \bar{y}_0)$ , а обратные к ним отображения задаются формулой  $\psi^{-1}x = x_1$ .

Каноническая замена переводит решение исходного уравнения в решение соответствующей системы и обратно.

Доказательство: Каноническая замена переводит решение исходного уравнения в решение соответствующей системы и обратно.

## Вопрос 21: Теоремы существования, единственности и продолжаемости для уравнения.

Теорема: Если  $f, f'_y, \dots, f'_{y^{n-1}} \in C(G)$ , то для любого набора  $(t_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in G$  в некоторой окрестности  $U(t_0)$  точки  $t_0$   $\exists! y : U(t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $y$  - решение задачи Коши.

Теорема: Если каждая точка области  $G$  - точка единственности для уравнения, то любые два решения  $y$  и  $z$  задачи Коши удовлетворяют равенству  $y|_I = z|_I$ , где  $I = D(y) \cap D(z)$ .

Теорема: Если  $f \in C(G)$ , то для любого набора существует решение задачи Коши.

Теорема: Если все точки области  $G$  - точки  $\exists!$  для уравнения, то для любого набора  $\exists!$  непродолжаемое решение задачи Коши.

Теорема: Если  $f \in C(G)$ , а  $y$  - непродолжаемое решение уравнения, то для любого компакта  $C \subset G$  существует такой отрезок  $K \subset D(y)$ , что имеет место условие  $(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \notin C$ , где  $t \notin K$ .

Определение: Уравнение  $y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = f(t)$ , где  $a_1, \dots, a_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , назовём линейным неоднородным уравнением  $n$ -ого порядка, а в случае  $f = 0$  - линейным однородным. Матричную функцию  $A$  и вектор-функцию  $F$ , определённые по формулам  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}$ , назовём матрицей уравнения и его векторной неоднородностью соответственно.

Лемма: Каноническая замена осуществляет изоморфизм множеств  $S_{n,f}S_{A,F}$ .

Доказательство: Каноническая замена переводит скалярное уравнение в эквивалентную векторную систему и обратно.

Теорема: Если  $a_1, \dots, a_n, f \in C(I)$ , то для любой задачи Коши  $\exists!$  непродолжаемое решение, причём оно определено на всём интервале  $I$ .

Вопрос 22: Уравнение, не разрешенное относительно производной. (Расширение задачи Коши, теоремы существования и единственности).  
Особые решения. Дискриминантная кривая.

Определение: Уравнение, не разрешенное относительно производной - уравнение вида  $F(t, y, y') = 0$ , где  $F : H \rightarrow \mathbb{R}, H \subset \mathbb{R}^3$ .

Определение: Расширение задачи Коши для уравнения  $F(t, y, y') = 0$  состоит в задании начальных условий  $(t_0, y_0, y'_0) \in H$  таких, что  $F(t_0, y_0, y'_0) = 0$ .

Теорема: Если  $F, F'_y, F'_{y'} \in C(H)$ , то для любой точки  $(t_0, y_0, y'_0) \in H$ , удовлетворяющей условию  $F(t_0, y_0, y'_0) = 0$ , существует интервал  $U(t_0) \subset I$  и единственное решение  $y : U(t_0) \rightarrow \mathbb{R}$  задачи Коши с расширенными начальными условиями.

Определение: Особое решение - решение уравнения  $F(t, y, y') = 0$ , которое при каждом  $t \in D(y)$  тройка  $(t, y(t), y'(t))$  является точкой неединственности (т.е. через нее проходят как минимум два решения с разными производными).

Определение: Дискриминантная кривая определяется системой уравнений  $F(t, y, y_1) = 0$  и  $F'_y(t, y, y_1) = 0$ , где  $y_1 = y'$ . Это геометрическое место точек  $(t, y)$ , в которых особое решение касается общего решения или где нарушается единственность решения.

## Вопрос 23: Метод введения параметра. Уравнение Клеро.

Утверждение: Метод введения параметра позволяет свести уравнение, не разрешенное относительно производной, к разрешённому с некоторыми ограничениями.

Утверждение: Пусть уравнение  $F(t, y, y') = 0$ , где  $(t, y, y') \in H \subset \mathbb{R}^3$ , приведено к виду  $y = f(t, y')$ , где  $f \in C^1(G)$ . Введём параметр  $p = y'$  и получим систему:

$$\begin{cases} y = f(t, p) \\ y' = p \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение по  $t$ , получаем  $y'' = f'_t(t, p) + f'_y(t, p)p'$ .

Определение: Уравнение Клеро - уравнение вида  $y = tp + \varphi(p)$ , где  $p = y'$ .

Теорема: Общее решение уравнения Клеро  $y = tp + \varphi(p)$  имеет вид  $y = Ct + \varphi(C)$ .

Особые решения уравнения Клеро получаются исключением параметра  $p$  из системы  $y = tp + \varphi(p), 0 = t + \varphi'(p)$ .

## Вопрос 24: Общее решение однородной системы. Теорема об изоморфизме. Фундаментальные системы решений.

Утверждение: Общее решение однородной системы  $\dot{x} = A(t)x$ , где  $x \in \mathbb{R}^n, t \in I$ , имеет линейную структуру.

Утверждение: Для заданного интервала  $I \subset \mathbb{R}$  обозначим через  $\Phi(I)$  линейное векторное пространство всех функций  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  с линейными операциями  $(C_1 f_1 + C_2 f_2)(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$ , где  $t \in I, C_{1,2} \in \mathbb{R}$ . Нулевым вектором в пространстве  $\Phi(I)$  является нулевая функция  $0(t) = 0 \in \mathbb{R}^n$ , где  $t \in I$ .

Определение: Функции  $f_1, \dots, f_k \in \Phi(I)$  называются линейно зависимыми, если некоторая их нетривиальная (т.е.  $C_1^2 + \dots + C_k^2 \neq 0$ ) линейная комбинация равна нулю  $C_1 f_1 + \dots + C_k f_k = 0$ , и линейно независимыми - в противном случае.

Теорема: Общее решение однородной линейной системы  $\dot{x} = A(t)x$  имеет вид  $x(t) = X(t)C$ , где  $X(t)$  - фундаментальная матрица,  $C \in \mathbb{R}^n$ .

Утверждение: Согласно теореме множества  $S_{A,F}$  и  $S_A = S_{A,0}$  всех непродолжаемых решений линейной неоднородной системы  $\dot{x} = A(t)x + F(t)$ , где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in I$  и соответствующей однородной системы являются подмножествами пространства  $\Phi(I)$ .

Теорема: Множество  $S_A$  - линейное пространство, причём для любого  $t_0 \in I$  отображение  $\varphi_{t_0} : S_A \rightarrow \mathbb{R}^n$ , где  $\varphi_{t_0} x = x(t_0)$ , есть изоморфизм линейных пространств.

Доказательство: Линейность  $S_A$  следует из линейности однородной системы. Изоморфизм  $\varphi_{t_0}$  следует из того, что любое начальное условие  $x(t_0) = x_0$  определяет единственное решение, и все решения проходят через каждую точку в момент  $t_0$ .

Утверждение: Из-за существования изоморфизма любые свойства

Следствие: Размерность пространства решений линейной однородной системы из  $n$  уравнений первого порядка равна  $n$ .

Определение: Любой базис  $x_1, \dots, x_n$  в пространстве  $S_A$  решений линейной однородной системы называется её фундаментальной системой решений.

Следствие: Если  $x_1, \dots, x_n$  - фундаментальная система решений системы, то общее решение этой системы имеет вид  $x = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t)$ .

## Вопрос 25: Фундаментальная матрица и оператор Коши (леммы об операторе и матрице).

Утверждение: Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^n$  фиксирован базис и задана система. Под решением, далее, будем понимать функцию  $x \in S_A$ , а под матрицей -  $(n \times n)$ -матрицу.

Определение: Матрицу  $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , где  $t \in I$ , назовём:

- матрицей решений, если её столбцы  $x_1, \dots, x_n$  являются решениями,
- фундаментальной матрицей, если её столбцы  $x_1, \dots, x_n$  образуют фундаментальную систему решений.

Следствие: Для любого  $t_0 \in I$  матрица решений  $X$ :

- однозначно определяется начальным условием  $X(t_0) = X_0$  при каждой начальной матрице  $X_0$ ,
- фундаментальна тогда и только тогда, когда  $\det X(t_0) \neq 0$ .

Доказательство: Первое утверждение следует из единственности решения задачи Коши. Второе следует из того, что фундаментальная система решений образует базис в пространстве решений, что эквивалентно невырожденности матрицы в начальный момент.

Следствие: Если  $X$  - фундаментальная матрица системы, то общее решение последней имеет вид  $x = X(t)c$ , где  $c \in \mathbb{R}^n$ .

Доказательство: Любое решение системы можно представить как линейную комбинацию фундаментальной системы решений.

Определение: Для заданной пары чисел  $t, s \in I$  назовём оператором Коши системы или оператором сдвига из  $s$  в  $t$  оператор  $X(t, s) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющий требованию  $X(t, s)x(s) = x(t)$ , где  $x \in S_A$ .

Утверждение: Таким образом, оператор Коши - двухпараметрическое семейство операторов, задаваемых начальным  $s$  и конечным  $t$  моментами времени и переводящих значение любого решения в момент  $s$  в значение того же решения в момент  $t$ .

Лемма: Оператор Коши  $X(t, s)$  является линейным и невырожденным для любых  $t, s \in I$ .

## Вопрос 26: Определитель Вронского и линейная зависимость для вектор-функций.

Утверждение: Определитель Вронского и формула Лиувилля-Остроградского для вектор-функций отражает их специфические свойства, связанные с линейной независимостью и объёмом натянутого на них параллелепипеда.

Определение: Определитель Вронского вектор-функций  $f_1, \dots, f_n \in \Phi(I)$  - функция  $W_{f_1, \dots, f_n}(t) = \det(f_1(t), \dots, f_n(t))$ , где  $t \in I$ .

Утверждение: Определитель Вронского в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  имеет независимый от выбора ортогонального базиса положительной ориентации геометрический смысл:  $W_{f_1, \dots, f_n}(t)$  - ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на репер  $f_1(t), \dots, f_n(t)$ .

Лемма: Если функции  $f_1, \dots, f_n \in \Phi(I)$  линейно зависимы, то  $W_{f_1, \dots, f_n}(t) = 0$ , где  $t \in I$ .

Доказательство: Если вектор-функции  $f_1, \dots, f_n$  линейно зависимы, то  $\forall t \in I$  линейно зависимы и векторы  $f_1(t), \dots, f_n(t)$ , а значит  $W_{f_1, \dots, f_n}(t) = 0$ .

Лемма: Утверждение, обратное к сформулированному в лемме выше, неверно.

Доказательство: Приведём контрпример. Пусть  $f_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $f_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ , где  $t \in \mathbb{R}$ . Тогда  $W_{f_1, f_2} = 0$ , хотя они и линейно независимы, т.к. тождество  $C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot t = 0$ , где  $t \in \mathbb{R}$ , возможно только при  $C_1 = C_2 = 0$ .

Теорема: Если  $x_1, \dots, x_n \in S_A$ , то следующие утверждения эквивалентны:

- функции  $x_1, \dots, x_n$  - линейно зависимы,
- $W_{x_1, \dots, x_n}(t) = 0$  для всех  $t \in I$ ,
- $W_{x_1, \dots, x_n}(t_0) = 0$  для некоторого  $t_0 \in I$ .

Доказательство: Из первого вытекает второе по лемме выше, из второго - третье, а из третьего - первое.

## Вопрос 27: Формула Лиувилля – Остроградского для вектор-функций. Определитель и след оператора Коши.

Теорема: Для любых решений  $x_1, \dots, x_n \in S_A$  имеет место равенство  $W_{x_1, \dots, x_n}(t) = W_{x_1, \dots, x_n}(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t \text{tr } A(\tau) d\tau}$ , где  $t_0, t \in I$ .

Доказательство: Достаточно показать, что определитель Вронского удовлетворяет дифференциальному уравнению  $\dot{W} = \text{tr } A(t) \cdot W$ , где  $t \in I$ , из которого получим требуемое.

Следствие: Если  $\text{tr } A = 0$ , то определитель Вронского любых решений  $x_1, \dots, x_n \in S_A$  есть константа.

Определение: Определитель  $\det X$  и след  $\text{tr } X$  оператора  $X \in \text{End } \mathbb{R}^n$  - это определитель и след его матрицы  $X$ , записанной в каком-либо базисе в  $\mathbb{R}^n$ .

Утверждение: Для оператора Коши  $X(t, s)$  выполняется соотношение  $X(t, s)X(s, r) = X(t, r)$  для любых  $t, s, r \in I$ .

Следствие: Если  $X(t, s)$  - оператор Коши системы, то  $\det X(t, s) = e^{\int_s^t \text{tr } A(\tau) d\tau}$ .

Доказательство: Если в  $\mathbb{R}^n$  задан базис, то по лемме для любого фиксированного  $s \in I$  матрица  $X(\cdot, s)$  оператора  $X(\cdot, s)$  есть матрица решений, причём  $X(s, s) = E$ , поэтому  $\det X(t, s) = \det X(s, s) \cdot e^{\int_s^t \text{tr } A(\tau) d\tau} = e^{\int_s^t \text{tr } A(\tau) d\tau}$  согласно теореме.

## Вопрос 28: Общее решение неоднородной системы. Метод вариации постоянных (теорема).

Утверждение: Общее решение однородной системы есть общее решение соответствующей однородной системы плюс частное решение неоднородной.

Теорема: Для всякого  $x_0 \in S_{A, F}$  справедливо равенство  $S_{A, F} = x_0 + S_A = \{x_0 + x \mid x \in S_A\}$ .

Доказательство: Множество решений неоднородной системы является аффинным подпространством в пространстве решений однородной системы.

Следствие: Если  $x_0$  - частное решение линейной неоднородной системы, а  $x_1, \dots, x_n$  - фундаментальная система решений соответствующей однородной системы, то общее решение системы имеет вид  $x = x_0(t) + C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t)$ .

Утверждение: Множество  $S_{A, F}$  является аффинным пространством над  $S_A$ .

Теорема: Для любой фундаментальной матрицы  $X$  линейной однородной системы верно следующее: если функция  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  удовлетворяет уравнению  $X(t)\dot{c}(t) = F(t)$ , где  $t \in I$ , то функция  $X_c$  - решение неоднородной системы, т.е.  $X_c \in S_{A, F}$ .

Доказательство: Т.к.  $\dot{X} = AX$ , то  $X\dot{c} = F \implies (\dot{X}c) = \dot{X}c + X\dot{c} = A(Xc) + F \implies X_c \in S_{A, F}$ .

Следствие: Решение задачи Коши задаётся формулой  $x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, \tau)F(\tau)d\tau$ , где  $X$  - оператор Коши системы.

## Вопрос 29: Общее решение линейного уравнения. Линейность канонической замены (лемма). Сведение линейного уравнения к системе.

Утверждение: Общее решение линейного уравнения, заданного на фиксированном интервале  $I$  и имеющего порядок  $n \in \mathbb{N}$ , тесно связано с линейным векторным пространством  $\Phi^{n-1}(I)$  всех  $(n-1)$  раз дифференцируемых функций  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Лемма: Каноническая замена переменных является линейным отображением между пространством решений уравнения  $n$ -го порядка и пространством решений соответствующей системы.

Теорема: Линейное уравнение  $n$ -го порядка  $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)$  эквивалентно системе  $\dot{x} = A(t)x + F(t)$ .

## Вопрос 30: Определитель Вронского скалярных функций. Свойства. Восстановление линейного уравнения. Признаки линейной зависимости.

Определение: Определитель Вронского скалярных функций  $f_1, \dots, f_n \in \Phi^{n-1}(I)$  - это функция  $W_{f_1, \dots, f_n}(t) = W_{\psi f_1, \dots, \psi f_n}(t) =$

$$\begin{pmatrix} f_1(t) & \dots & f_n(t) \\ f_1'(t) & \dots & f_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \dots & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \text{ где } t \in I.$$

Лемма: Если функции  $f_1, \dots, f_n \in \Phi^{n-1}(I)$  линейно зависимы, то  $W_{f_1, \dots, f_n}(t) = 0$ , где  $t \in I$ .

Лемма: Утверждение, обратное к сформулированному в лемме выше, неверно.

Доказательство: Для произвольных скалярных функций из  $W = 0$  не следует линейная зависимость. Контрпример: функции  $f_1(t) = t^3$  и  $f_2(t) = |t|^3$  на  $\mathbb{R}$  имеют нулевой определитель Вронского, но линейно независимы. Эквивалентность  $W = 0 \iff$  линейная зависимость верна только если функции являются решениями одного линейного однородного уравнения.

Теорема: Если  $y_1, \dots, y_n \in S_0$ , то следующие утверждения эквивалентны:

- функции  $y_1, \dots, y_n$  - линейно зависимы,
- $W_{y_1, \dots, y_n}(t) = 0$  для всех  $t \in I$ ,
- $W_{y_1, \dots, y_n}(t_0) = 0$  для некоторого  $t_0 \in I$ .

Теорема: Для любых решений  $y_1, \dots, y_n \in S_0$  имеет место равенство  $W_{y_1, \dots, y_n}(t) = W_{y_1, \dots, y_n}(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau}$ , где  $t_0, t \in I$ .

Теорема: Если скалярные функции  $f_1, \dots, f_n \in C^n(I)$  удовлетворяют условию  $W_{f_1, \dots, f_n}(t) \neq 0$ , где  $t \in I$ , то они образуют фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения, определяемого как определитель Вронского, расширенный на  $y$  и его производные.

Доказательство: Уравнение строится так, чтобы данные функции были его решениями, и определитель Вронского является нетривиальным решением характеристического уравнения.

Следствие: Если скалярные функции  $f_1, \dots, f_n \in C^{n-1}(I)$  удовлетворяют условиям  $W_{f_1, \dots, f_n}(t) = 0$ ,  $W_{f_1, \dots, f_{n-1}}(t) \neq 0$ , где  $t \in I$ , то они линейно зависимы.

Доказательство: Следует из свойств определителя Вронского и линейной зависимости.

Следствие: Если определитель Вронского скалярных функций  $f_1, \dots, f_n \in C^{n-1}(I)$  тождественно равен нулю, то их сужения на некоторый интервал  $J \subset I$  линейно зависимы.

Доказательство: На интервале, где определитель Вронского отличен от нуля, функции образуют базис, но если он тождественно нуль, то они зависимы.

Следствие: Если определитель Вронского  $k \leq n$  решений  $y_1, \dots, y_k \in S_0$  тождественно равен нулю, то они линейно зависимы.

Доказательство: Для решений линейного уравнения определитель Вронского либо тождественно нуль, либо никогда не обращается в нуль.

## Вопрос 31: Метод вариации постоянных для линейного неоднородного уравнения $n$ -го порядка (теорема). Функция Грина задачи Коши.

Утверждение: Пусть задана формула общего решения  $y = Y(t)c$ , где  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  - ФСР,  $c = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$ . Для нахождения частного

решения неоднородного уравнения константы принимаются за функции от  $t$  и записывается система специального вида.

Теорема: Для любой фундаментальной системы решений  $y_1, \dots, y_n$  линейного однородного уравнения верно следующее: если вектор-функция  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  удовлетворяет системе

$$\begin{cases} Y(t)\dot{c}(t) = 0 \\ \dot{Y}(t)\dot{c}(t) = 0 \\ \dots \\ Y^{(n-2)}(t)\dot{c}(t) = 0 \\ Y^{(n-1)}(t)\dot{c}(t) = f(t) \end{cases}$$

, где  $t \in I$ , то функция  $Y_c$  - решение неоднородного уравнения, т.е.  $Y_c \in S_{n,f}$ .

Доказательство: Комплексификация сохраняет структуру векторного пространства и линейных операторов.

Утверждение: Функция Грина является решением задачи Коши с импульсным воздействием в точке  $\tau$ .

Определение: Ядро  $G_\tau(t, t_0) : J \rightarrow \mathbb{R}$  интегрального оператора, зависящее от параметра  $\tau \in J$  и определяемое формулой  $G_\tau(t, t_0) = \begin{cases} 0, & t_0 \leq t \leq \tau \\ y_\tau(t), & \tau \leq t < \beta \end{cases}$ , называется функцией Грина задачи Коши.

Вопрос 32: Краевая задача. Теорема об альтернативе.

Утверждение: Краевая задача для линейного уравнения второго порядка  $Ly = \ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = f(t)$ , где  $t \in J = [t_1; t_2]$ ,  $p, q \in C(J)$ , имеет два крайевых условия  $l_i y = \alpha_i y(t_i) + \beta_i \dot{y}(t_i) = \varphi_i$ , где  $\alpha_i, \beta_i \neq (0, 0)$ ,  $i = 1, 2$ .

Теорема: Теорема об альтернативе.

Для однородной краевой задачи ( $f = 0, \varphi = 0$ ) либо существует только нулевое решение, либо существует нетривиальное решение. Для неоднородной задачи решение существует тогда и только тогда, когда соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение.

Вопрос 33: Функция Грина краевой задачи и ее свойство. Существование и единственность функции Грина.

Определение: Функция Грина краевой задачи - функция  $G(t, s)$ , такая что решение краевой задачи  $Ly = f$  с  $ly = 0$  задается формулой  $y(t) = \int_{t_1}^{t_2} G(t, s)f(s)ds$ .

Свойства функции Грина:

- 1.  $LG(t, s) = 0$  для  $t \neq s$
- 2.  $\lim_{t \rightarrow s^+} LG(t, s) - \lim_{t \rightarrow s^-} LG(t, s) = 1$
- 3.  $G(t, s)$  удовлетворяет однородным крайевым условиям

Теорема: Для регулярной краевой задачи функция Грина существует и единственна.

Вопрос 34: Экспонента и логарифм оператора. Экспонента и оператор Коши.

Определение: Экспонента оператора  $A \in End \mathbb{C}^n$  - сумма ряда  $e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \dots = \sum_{k=0}^\infty \frac{A^k}{k!}$ , где  $\epsilon_k(A) = \frac{A^k}{k!}$ ,  $A^0 = I$ .

Определение: Логарифм оператора  $A \in End \mathbb{C}^n$ , т.е.  $\ln A$  этого оператора, - любой из операторов  $B \in End \mathbb{C}^n$ , удовлетворяющий равенству  $e^B = A$ .

Утверждение: Пусть задана линейная однородная система с постоянными коэффициентами  $\dot{x} = Ax$ , где  $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ .

Теорема: Оператор Коши  $X$  линейной однородной системы с постоянными коэффициентами удовлетворяет равенству  $X(t, s) = e^{A(t-s)}$ , где  $t \in \mathbb{R}$ .

Доказательство: Дифференцируя равенство  $X(t, s) = e^{A(t-s)}$  по  $t$ , получаем  $\dot{X}(t, s) = Ae^{A(t-s)} = AX(t, s)$ . При  $t = s$  имеем  $X(s, s) = I$ , что совпадает с начальным условием.

Следствие: Если  $X$  - оператор Коши линейной однородной системы с постоянными коэффициентами, то справедливы равенства  $e^A = X(1, 0)$ ,  $\det e^A = e^{tr A}$ .

Следствие: Экспонента любого оператора невырождена, а логарифм вырожденного оператора не существует.



## Вопрос 35: Комплексификация оператора (лемма). Комплексификация системы. Действительные и комплексные решения.

Утверждение: Комплексификация оператора и системы позволяет применить метод жордановых форм для нахождения общего решения линейной однородной системы.

Определение: Под комплексификацией (действительного, или  $\mathbb{R}$ -линейного):

- пространства  $\mathbb{R}^n$  понимается  $\mathbb{C}$ -линейное пространство  $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^n$ , представляющее собой множество векторов  $z = x + iy$ , где  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , с компонентами  $x = \operatorname{Re} z$  и  $y = \operatorname{Im} z$ , в котором, помимо покомпонентного равенства, сложения и умножения на действительные числа, заданы также умножение на комплексные числа, основанное на правиле  $i(x + iy) = -y + ix$ , где  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , и комплексное сопряжение  $x + iy = x - iy$ , где  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , а кроме того, исходное пространство  $\mathbb{R}^n$  отождествляется с подмножеством  $\operatorname{Re} \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n i \{0\} \subset \mathbb{C}^n$ ,
- оператора  $A \in \operatorname{End} \mathbb{R}^n$  понимается комплексный оператор  $\mathbb{A} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , задаваемый равенством  $\mathbb{A}(x + iy) = Ax + iAy$ , где  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , а его сужение на множество  $\operatorname{Re} \mathbb{C}^n$  обозначается через  $\operatorname{Re} A$ .

Лемма: Пусть  $\mathbb{C}^n$  - комплексификация пространства  $\mathbb{R}^n$ , а  $\mathbb{A}$  - комплексификация оператора  $A \in \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ . Тогда справедливы утверждения:

- $\mathbb{A} \in \operatorname{End} \mathbb{C}^n$  и  $\operatorname{Re} \mathbb{A} = A$ ,
- размерность  $\mathbb{C}$ -линейного пространства  $\mathbb{C}^n$  равна  $n$ , причём любой базис в  $\mathbb{R}^n$  - базис и в  $\mathbb{C}^n$ , а матрицы операторов  $A \in \operatorname{End} \mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{A} \in \operatorname{End} \mathbb{C}^n$  в этом базисе совпадают.

Доказательство: Первое утверждение следует из определения комплексификации. Второе следует из того, что  $\mathbb{C}^n$  как  $\mathbb{C}$ -векторное пространство имеет размерность  $n$ , и базис  $\mathbb{R}^n$  остается базисом в  $\mathbb{C}^n$ .

Утверждение: Действительную линейную систему можно комплексифицировать, получив её комплексификацию, т.е. комплексную линейную однородную систему  $\dot{z} = \mathbb{A}z$ , где  $z \in \mathbb{C}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$

## Вопрос 36: Жорданова матрица. Вычисление экспоненты и логарифма. Фундаментальная система решений.

Определение: Жорданова клетка - верхнетреугольная матрица вида:

$$J_{\lambda, m} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Теорема: Любая комплексная матрица подобна жордановой форме.

Утверждение: Для жордановой клетки  $J_{\lambda, m}$  экспонента вычисляется по формуле:

$$e^{J_{\lambda, m}} = e^{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема: Фундаментальная система решений линейной системы с постоянными коэффициентами состоит из функций вида  $e^{\lambda t} p_k(t)$ , где  $p_k$  - многочлены.

## Вопрос 37: Метод неопределенных коэффициентов.

Утверждение: Метод неопределённых коэффициентов позволяет найти решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами, даже не прибегая к выяснению её жордановой структуры.

Определение: Введём следующие функции и множества:

- любую функцию  $q$  вида  $q(t) = e^{\lambda t} p_k(t)$ , где  $p_k$  - многочлен степени  $k$  над полем  $\mathbb{R}$  ( $\mathbb{C}$ ), назовём действительным (комплексным) квазимногочленом степени  $\deg q = k$  с показателем  $\lambda \in \mathbb{R}$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ),
- множество всех действительных (комплексных) квазимногочленов степени, меньшей  $k$ , с показателем  $\lambda$  обозначим через  $Q_{\lambda, k}$  ( $\mathbb{Q}_{\lambda, k}$ ),
- при  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  определим ещё и множество  $Q_{\alpha \pm i\beta, k} = \{q_1(t) \cos \beta t + q_2(t) \sin \beta t \mid q_1, q_2 \in Q_{\alpha, k}\}$  действительных многочленов степени  $\max\{\deg q_1, \deg q_2\} < k$  с парой показателей  $\alpha \pm i\beta$ ,

- будем обозначать через  $Q$

## Вопрос 38: Характеристический многочлен линейного уравнения. Лемма о совпадении характеристических многочленов. Уравнение Эйлера.

Определение: Характеристический многочлен линейного уравнения  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$  - многочлен  $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$ .

Лемма: Характеристические многочлены канонической системы и соответствующего уравнения совпадают.

Определение: Уравнение Эйлера - уравнение вида  $t^n y^{(n)} + a_{n-1}t^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$ .

Теорема: Замена  $t = e^z$  приводит уравнение Эйлера к уравнению с постоянными коэффициентами.

## Вопрос 39: Решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами (теорема).

Теорема: Общее решение однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$  имеет вид  $y = e^{\lambda t}p(t)$ , где  $\lambda$  - корень характеристического уравнения,  $p$  - многочлен степени меньше кратности корня.

Алгоритм решения:

1. Составить характеристическое уравнение
2. Найти корни  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  с кратностями  $k_1, \dots, k_m$
3. Для каждого корня  $\lambda_i$  с кратностью  $k_i$  взять функции  $e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \dots, t^{k_i-1}e^{\lambda_i t}$
4. Для комплексных корней  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  взять  $\cos(\beta t)e^{\alpha t}, \sin(\beta t)e^{\alpha t}$  и их производные

## Вопрос 40: Уравнение с квазимногочленом в правой части.

Теорема: Решение уравнения  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = e^{\alpha t}p(t)$ , где  $p$  - многочлен степени  $m$ , имеет вид  $y = e^{\alpha t}q(t)$ , где  $q$  - многочлен степени  $m$ .

Метод неопределенных коэффициентов: Подставить  $y = e^{\alpha t}(c_0 + c_1t + \dots + c_mt^m)$  в уравнение и приравнять коэффициенты.

## Вопрос 41: Устойчивость по Ляпунову для решения системы и линейного уравнения. Существенные упрощения (лемма).

Отлично. Переходим к одному из наиболее важных и глубоких разделов курса — качественной теории и теории устойчивости. Этот раздел, вслед за классическим изложением Сергеева, переводит наше понимание с уровня поиска конкретных формул на уровень анализа общего поведения решений, что часто важнее для приложений.

Лекция: Качественная теория ОДУ. Устойчивость по Ляпунову и классификация особых точек

1. Философский переход: от аналитики к качественному анализу

До сих пор мы занимались поиском решений в виде формул. Однако для нелинейных систем, а также для анализа долгосрочного поведения (при  $t \rightarrow +\infty$ ) это часто невозможно. Качественная теория ставит перед собой иные цели:

- Определить характер решений (сходятся к равновесию, колеблются, уходят на бесконечность).
- Исследовать устойчивость состояний равновесия — ключевое понятие для любой физической, биологической или инженерной системы.
- Построить фазовый портрет — геометрическую картину всех возможных траекторий системы.

Методы этой теории, разработанные А.М. Ляпуновым, А. Пуанкаре и другими, позволяют делать выводы, не решая уравнения в явном виде.

2. Основные понятия теории устойчивости

Рассмотрим автономную систему (правая часть не зависит явно от  $t$ ) ОДУ первого порядка в нормальной форме:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f}: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Определение 1 (Положение равновесия). Точка  $\mathbf{x}_0$  называется положением равновесия (стационарной точкой, точкой покоя), если  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ . В этой точке решение постоянно:  $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0$ .

Определение 2 (Устойчивость по Ляпунову). Положение равновесия  $\mathbf{x}_0$  называется устойчивым по Ляпунову, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall \mathbf{x}(0) \text{ такого, что } \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0\| < \delta,$$

выполняется  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$  для всех  $t \geq 0$ .

Интуитивно: Если начальные условия чуть возмутить, то всё решение не уйдёт далеко от равновесия.

Определение 3 (Асимптотическая устойчивость). Положение равновесия  $\mathbf{x}_0$  называется асимптотически устойчивым, если:

1. Оно устойчиво по Ляпунову.
2. Существует  $\delta_0 > 0$  такое, что если  $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0\| < \delta_0$ , то  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| = 0$ .

Интуитивно: Решение не только не уходит далеко, но и со временем возвращается к равновесию.

Определение 4 (Неустойчивость). Если условие устойчивости по Ляпунову не выполняется, положение равновесия неустойчиво. Существует такое  $\varepsilon > 0$ , что для сколь угодно малого  $\delta$  найдётся начальное условие, которое выведет решение за пределы  $\varepsilon$ -окрестности.

3. Линеаризация. Первый метод Ляпунова (метод исследования устойчивости по первому приближению)

Это основной рабочий инструмент для анализа устойчивости в невырожденных случаях.

Алгоритм линеаризации:

1. Найти положение равновесия  $\mathbf{x}_0$  из системы  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ .
2. Разложить правую часть в ряд Тейлора в окрестности  $\mathbf{x}_0$ , учитывая, что  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \text{где } \|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|).$$

Здесь  $A$  — матрица Якоби (матрица первых производных, матрица линеаризации):

$$A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}.$$

3. Исследовать линеаризованную систему:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}, \quad \text{где } \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0.$$

Теорема (Первый метод Ляпунова).

Пусть все собственные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  матрицы  $A$  имеют ненулевые действительные части (т.е.  $\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0$ ).

1. Если  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  для всех  $i$ , то положение равновесия  $\mathbf{x}_0$  исходной нелинейной системы асимптотически устойчиво.
2. Если существует хотя бы одно  $\lambda_k$  такое, что  $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ , то положение равновесия  $\mathbf{x}_0$  неустойчиво.
3. Если среди собственных чисел есть такие, что  $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$  (критический случай), то по линеаризованной системе нельзя сделать вывод об устойчивости исходной системы. Устойчивость определяется нелинейными членами  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ . Здесь применяется второй метод Ляпунова.

## 4. Классификация особых точек линейной системы на плоскости

Рассмотрим подробно случай  $n = 2$ , который нагляден и имеет полную классификацию. Система:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Положение равновесия в начале координат  $(0, 0)$  (при  $\det A \neq 0$  — это изолированная особая точка).

Характеристическое уравнение:  $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$ . Обозначим:  $p = -\operatorname{tr} A = -(a + d)$ ,  $q = \det A = ad - bc$ . Тогда  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ .

Дискриминант:  $D = p^2 - 4q$ .

Классификация на плоскости  $(p, q)$  (диаграмма Андронова-Витта):

1.  $q < 0$ :  $\lambda_1, \lambda_2$  действительны и разных знаков ( $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = q < 0$ ). Особая точка — СЕДЛО (неустойчиво). Имеются два инвариантных луча: устойчивое многообразие (решения стремятся к 0) и неустойчивое многообразие (решения уходят от 0).
2.  $q > 0, p > 0, D > 0$ :  $\lambda_1, \lambda_2$  действительны, отрицательны. Особая точка — УСТОЙЧИВЫЙ УЗЕЛ. Все траектории (кроме двух) касаются собственного направления, соответствующего наименьшему по модулю  $\lambda$ .
3.  $q > 0, p < 0, D > 0$ :  $\lambda_1, \lambda_2$  действительны, положительны. Особая точка — НЕУСТОЙЧИВЫЙ УЗЕЛ.
4.  $q > 0, p > 0, D = 0$ : Кратные действительные  $\lambda < 0$ . Если матрица  $A$  диагональна, то это устойчивый дикритический узел (звезда). Если матрица имеет жорданову клетку, то это устойчивый вырожденный узел (все траектории, кроме одной, имеют общее касательное).

направление).

5.  $q > 0, p > 0, D < 0$ :  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0$ . Особая точка — УСТОЙЧИВЫЙ ФОКУС. Траектории — спирали, накручивающиеся на начало координат.
6.  $q > 0, p < 0, D < 0$ :  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha > 0$ . Особая точка — НЕУСТОЙЧИВЫЙ ФОКУС. Траектории — спирали, раскручивающиеся от начала координат.
7.  $q > 0, p = 0$ :  $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ . Особая точка — ЦЕНТР. Все траектории — замкнутые кривые (эллипсы) вокруг начала. Устойчивость по Ляпунову, но не асимптотическая. Это критический случай первого метода Ляпунова.

## 5. Алгоритм исследования системы на плоскости

Дано: Автономная система  $\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y)$ .

Шаг 1. Найти положения равновесия. Решить систему  $P(x, y) = 0, Q(x, y) = 0$ .

Шаг 2. Для каждого положения равновесия  $(x_0, y_0)$ :

1. Линеаризовать. Вычислить матрицу Якоби:

$$A = \begin{pmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

2. Найти собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2$  матрицы  $A$ .
3. Классифицировать точку по таблице выше и определить её устойчивость.

Шаг 3. Построить локальный фазовый портрет в окрестности каждой точки, используя известные канонические виды узла, седла, фокуса, центра. Определить направления движения по траекториям (по знаку производных).

Шаг 4. Нарисовать глобальный портрет, объединяя локальные картины. Найти сепаратрисы — особые траектории, разделяющие области с качественно различным поведением (например, устойчивые/неустойчивые многообразия седла).

## 6. Второй (прямой) метод Ляпунова

Применяется в критических случаях или когда линеаризация не даёт ответа. Идея: найти функцию, аналогичную функции энергии, которая убывает вдоль траекторий.

Определение (Функция Ляпунова). Пусть  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  — положение равновесия. Функция  $V(\mathbf{x})$ , определённая в окрестности  $U$  точки  $\mathbf{0}$ , называется функцией Ляпунова, если:

1.  $V(\mathbf{x})$  непрерывно дифференцируема в  $U$  и  $V(\mathbf{0}) = 0$ .
2.  $V(\mathbf{x}) > 0$  для всех  $\mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{0}\}$  (положительно определённая).
3. Её производная в силу системы  $\dot{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}) \leq 0$  для всех  $\mathbf{x} \in U$  (отрицательно полуопределённая).

Теоремы Ляпунова:

- Если существует функция Ляпунова, то положение равновесия  $\mathbf{0}$  устойчиво по Ляпунову.
- Если при этом  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  для всех  $\mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{0}\}$  (отрицательно определённая), то положение равновесия асимптотически устойчиво.

Ключевая сложность: Нет общего алгоритма построения  $V(\mathbf{x})$ . Для механических систем часто берут полную энергию. В общем случае пробуют квадратичные формы  $V = ax^2 + bxy + cy^2$ .

## 7. Пример полного анализа (система Лотки-Вольтерры "хищник-жертва")

Рассмотрим упрощённую модель:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - xy, \\ \dot{y} = -y + xy. \end{cases}$$

Здесь  $x$  — число жертв,  $y$  — хищников.

1. Положения равновесия:

$$\begin{cases} x(1 - y) = 0 \\ y(-1 + x) = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0) \text{ и } (1, 1).$$

2. Исследуем точку  $(0, 0)$ :

- Матрица Якоби:  $A = \begin{pmatrix} 1 - y & -x \\ y & -1 + x \end{pmatrix}$ . В точке  $(0, 0)$ :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .
- Собственные числа:  $\lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = -1 < 0$  (разных знаков).

- Вывод:  $(0, 0)$  — седло (неустойчиво). Устойчивое многообразие — ось  $y$  (хищники вымирают без жертв). Неустойчивое многообразие — ось  $x$  (жертвы растут при отсутствии хищников).

3. Исследуем точку  $(1, 1)$ :

- В точке  $(1, 1)$ :  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
- Собственные числа:  $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$ .
- Вывод по первому приближению: Собственные числа чисто мнимые — это критический случай. Первый метод Ляпунова не даёт ответа. Необходимо дополнительное исследование.

4. Применение второго метода Ляпунова для точки  $(1, 1)$ :

Сделаем замену  $u = x - 1, v = y - 1$ . Система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v - uv \\ \dot{v} = u + uv \end{cases}.$$

Попробуем найти первый интеграл (функцию, постоянную вдоль траекторий). Для исходной системы можно найти:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{x(1-y)} \Rightarrow (x-1)dx/x + (y-1)dy/y = 0.$$

Интегрируя, получаем первый интеграл:

$$H(x, y) = x - \ln x + y - \ln y = C.$$

Функция  $V(x, y) = H(x, y) - H(1, 1)$  является функцией Ляпунова для точки  $(1, 1)$ . Она положительно определена в окрестности  $(1, 1)$  (имеет минимум), а её производная в силу системы  $\dot{V} \equiv 0$  (сохраняется вдоль траекторий).

Вывод: Траектории системы — замкнутые кривые вокруг точки  $(1, 1)$ . Эта точка является центром. Режим устойчивый, но не асимптотически: популяции хищника и жертвы циклически колеблются вокруг равновесных значений.

Итоговый фазовый портрет: В первом квадранте ( $x > 0, y > 0$ ) семейство замкнутых кривых (циклов) вокруг точки  $(1, 1)$ . Оси координат являются сепаратрисами.

## Резюме по теме устойчивости:

1. Устойчивость по Ляпунову — фундаментальное свойство, характеризующее поведение системы при малых возмущениях.
2. Первый метод Ляпунова (линеаризация) — мощный инструмент, работающий в невырожденных случаях. Он сводит задачу к анализу собственных чисел матрицы Якоби.
3. Классификация особых точек на плоскости исчерпывающая и основана на следе и детерминанте матрицы линеаризации.
4. Второй метод Ляпунова универсален, но требует построения специальной функции. Он особенно важен в критических случаях.
5. Фазовый портрет — это геометрический язык качественной теории, позволяющий увидеть все возможные сценарии поведения системы.

Задание для глубокого осмысления:

Для системы  $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x - \alpha y \end{cases}$  (маятник с трением):

1. Найдите все положения равновесия.
2. Исследуйте их устойчивость методом линеаризации в зависимости от параметра  $\alpha \geq 0$ .
3. Попробуйте дать физическую интерпретацию типа каждой особой точки (узел, фокус, седло, центр).
4. Для случая  $\alpha = 0$  найдите первый интеграл (полную энергию) и исследуйте устойчивость положения равновесия  $(\pi, 0)$ , используя второй метод Ляпунова.

Это задание охватывает все ключевые аспекты лекции и подведёт вас к понятию бифуркаций — качественного изменения фазового портрета при изменении параметра системы.

## Детальное исследование устойчивости по первому приближению (первый метод Ляпунова)

### I. Философская основа метода

**Ключевая идея:** В окрестности положения равновесия поведение нелинейной системы в первом приближении определяется её линейной частью. Это позволяет перенести результаты теории линейных систем с постоянными коэффициентами на нелинейные системы.

**Математическая формулировка:** Рассмотрим автономную систему

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f} \in C^1(G),$$

с положением равновесия  $\mathbf{x}_0: \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ .

## II. Точная теорема и условия её применимости

**Теорема (первый метод Ляпунова, метод исследования устойчивости по первому приближению)**

Пусть:

1.  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  непрерывно дифференцируема в окрестности  $\mathbf{x}_0$
2. Разложение в ряд Тейлора:  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{g}(\mathbf{x})$ , где:
  - $A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$  — матрица Якоби (линеаризованная матрица)
  - $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$  при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$

**Обозначим:**  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — собственные числа матрицы  $A$ .

Тогда:

**Случай 1: Все собственные числа имеют отрицательные действительные части**

$$\text{Если } \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

то положение равновесия  $\mathbf{x}_0$  исходной нелинейной системы асимптотически устойчиво.

Доказательство основано на построении квадратичной функции Ляпунова для линейной части и оценке вклада нелинейных членов.

**Случай 2: Хотя бы одно собственное число имеет положительную действительную часть**

$$\text{Если } \exists k : \operatorname{Re} \lambda_k > 0$$

то положение равновесия  $\mathbf{x}_0$  исходной нелинейной системы неустойчиво.

Доказательство используется преобразование системы к каноническому виду и оценку роста решений.

## Случай 3: Критический случай (наличие чисто мнимых или нулевых собственных чисел)

$$\text{Если } \operatorname{Re} \lambda_i \leq 0 \quad \forall i, \text{ и } \exists k : \operatorname{Re} \lambda_k = 0$$

то по первому приближению ничего сказать нельзя. Устойчивость определяется нелинейными членами  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ .

**Важное замечание:** В критическом случае возможны все три варианта:

- Асимптотическая устойчивость
- Устойчивость (не асимптотическая)
- Неустойчивость

## III. Подробный алгоритм исследования

### Шаг 1: Нахождение положений равновесия

Решить систему  $n$  алгебраических уравнений:

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_n(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Каждое решение  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  — кандидат на исследование.

### Шаг 2: Линеаризация в окрестности $x_0$

Вычислить матрицу Якоби:

$$A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_0}.$$

**Важно:** Частные производные вычисляются в точке  $x_0$ !

### Шаг 3: Нахождение собственных чисел матрицы $A$

Решить характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Собственные числа  $\lambda_i$  могут быть:

- Действительные
- Комплексные (входят сопряжёнными парами  $\alpha \pm i\beta$ )

### Шаг 4: Анализ собственных чисел и вывод

Используем следующий детальный критерий:

Ситуация с собственными числами $\lambda_i$ матрицы $A$	Тип устойчивости положения равновесия $x_0$	Пояснение
Все $\text{Re } \lambda_i < 0$	Асимптотически устойчиво	Все решения линеаризованной системы экспоненциально стремятся к 0. Нелинейные члены не меняют качественной картины.
Существует хотя бы одно $\lambda_k$ с $\text{Re } \lambda_k > 0$	Неустойчиво	В линеаризованной системе есть растущие решения. Нелинейные члены не могут стабилизировать систему.
Все $\text{Re } \lambda_i \leq 0$ , но есть $\text{Re } \lambda_k = 0$ (и нет $\text{Re } \lambda_i > 0$ )	Критический случай. НЕЛЬЗЯ сделать вывод по первому приближению	Решение зависит от нелинейных членов $g(x)$ . Требуется применение второго метода Ляпунова или других специальных методов.

Шаг 5: Детализация для случаев, когда вывод возможен

#### 5.1. Критерии асимптотической устойчивости (все $\text{Re } \lambda_i < 0$ )

Практические признаки:

1. Критерий Раунса-Гурвица (для многочленов низких степеней)
2. Необходимое условие: Все коэффициенты характеристического многочлена одного знака
3. Для  $n=2$ :  $p = -\text{tr } A > 0$ ,  $q = \det A > 0$

#### 5.2. Критерии неустойчивости (существует $\text{Re } \lambda_k > 0$ )

Признаки:

1.  $\det A < 0$  (для  $n=2$  означает седло)
2.  $\text{tr } A > 0$  (для  $n=2$  вместе с  $\det A > 0$  даёт неустойчивый узел/фокус)
3. Наличие нечётного количества положительных действительных корней

### IV. Особые случаи и важные замечания

Случай 1: Нулевое собственное число ( $\lambda = 0$ )

Всегда критический случай!

Пример:  $\dot{x} = -x^3, \dot{y} = -y$

- Линеаризация:  $\dot{x} = 0, \dot{y} = -y$  (собственные числа 0 и -1)
- Исходная система:  $x = \frac{1}{\sqrt{2t+C}}$  → асимптотически устойчива по  $x$
- Вывод по линеаризации был бы ошибочен!

Случай 2: Чисто мнимые собственные числа ( $\lambda = \pm i\beta$ )

Всегда критический случай!

Пример (центр vs фокус):

1.  $\dot{x} = -y + \alpha x(x^2 + y^2), \dot{y} = x + \alpha y(x^2 + y^2)$
- Линеаризация:  $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$  (собственные числа  $\pm i$ , центр)
- При  $\alpha < 0$  — устойчивый фокус, при  $\alpha > 0$  — неустойчивый фокус, при  $\alpha = 0$  — центр

Случай 3: Кратные собственные числа с отрицательной действительной частью

Если все  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ , то даже при кратности асимптотическая устойчивость сохраняется.

V. Геометрическая интерпретация для плоскости ( $n=2$ )

Для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

с положением равновесия  $(x_0, y_0)$ .

Шаг 1: Матрица Якоби

$$A = \begin{pmatrix} P_x(x_0, y_0) & P_y(x_0, y_0) \\ Q_x(x_0, y_0) & Q_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Шаг 2: Вычисление инвариантов

$$p = -\operatorname{tr} A = -(P_x + Q_y), \quad q = \det A = P_x Q_y - P_y Q_x$$

Характеристическое уравнение:  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

Дискриминант:  $D = p^2 - 4q$

### Шаг 3: Подробная классификация с критериями устойчивости

I.  $q < 0$ :

- $\lambda_1, \lambda_2$  действительны, разных знаков
- Тип: Седло
- Устойчивость: Неустойчиво
- Фазовый портрет: Имеет устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия

II.  $q > 0$ :

Рассмотрим подслучаи:

1.  $p > 0, D > 0$ :

- $\lambda_1, \lambda_2$  действительны, отрицательны
- Тип: Устойчивый узел
- Устойчивость: Асимптотически устойчиво
- Фазовый портрет: Все траектории входят в узел, касаясь собственного направления

2.  $p > 0, D = 0$ :

- $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$  (кратные)
- Тип: Вырожденный или дикритический узел
- Устойчивость: Асимптотически устойчиво

3.  $p > 0, D < 0$ :

- $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0$
- Тип: Устойчивый фокус
- Устойчивость: Асимптотически устойчиво
- Фазовый портрет: Спирали, накручивающиеся на точку

4.  $p < 0, D > 0$ :

- $\lambda_1, \lambda_2$  действительны, положительны
- Тип: Неустойчивый узел
- Устойчивость: Неустойчиво

5.  $p < 0, D < 0$ :

- $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha > 0$
- Тип: Неустойчивый фокус
- Устойчивость: Неустойчиво
- Фазовый портрет: Спирали, раскручивающиеся от точки



6.  $p = 0, D < 0$ :

- $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$
- Тип: Центр
- Устойчивость: Критический случай! По первому приближению нельзя определить
- Фазовый портрет: Замкнутые траектории (эллипсы в линейном приближении)

III.  $q = 0$ :

- Минимум одно собственное число равно 0
- Всегда критический случай! Требуется анализ нелинейных членов

## VI. Примеры с полным анализом

### Пример 1: Классический осциллятор с трением

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -kx - \beta y \end{cases} \quad (k > 0, \beta \geq 0)$$

1. Положение равновесия:  $(0, 0)$
2. Матрица Якоби:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\beta \end{pmatrix}$$

3. Характеристическое уравнение:  $\lambda^2 + \beta\lambda + k = 0$

$$\bullet p = \beta, q = k, D = \beta^2 - 4k$$

4. Анализ:

- При  $\beta > 0, k > 0$ :  $p > 0, q > 0 \rightarrow$  асимптотически устойчиво
- При  $\beta = 0, k > 0$ :  $p = 0, q > 0 \rightarrow$  центр (критический случай для неконсервативных систем)
- При  $\beta < 0$ :  $p < 0 \rightarrow$  неустойчиво

### Пример 2: Нелинейный маятник с трением

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x - \alpha y \end{cases} \quad (\alpha \geq 0)$$

1. Положения равновесия:  $(k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$
2. Исследуем точку  $(0, 0)$ :

- Матрица Якоби:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos 0 & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}$
- Характеристическое уравнение:  $\lambda^2 + \alpha\lambda + 1 = 0$
- При  $\alpha > 0$ :  $p = \alpha > 0, q = 1 > 0 \rightarrow$  асимптотически устойчиво
- При  $\alpha = 0$ :  $p = 0 \rightarrow$  центр (критический случай, но для консервативной системы действительно центр)

3. Исследуем точку  $(\pi, 0)$ :

- Матрица Якоби:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \pi & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$
- Характеристическое уравнение:  $\lambda^2 + \alpha\lambda - 1 = 0$
- $q = -1 < 0$  всегда  $\rightarrow$  СЕДЛО (неустойчиво) при любом  $\alpha$

## VII. Типичные ошибки и ограничения метода

#### Ошибка 1: Применение метода в критических случаях

**Неправильно:** Нашли  $\lambda = \pm i \rightarrow$  заключили "центр, устойчиво".

**Правильно:** При  $\lambda = \pm i \rightarrow$  "критический случай, требуется дополнительное исследование".

#### Ошибка 2: Неучёт области определения

Метод даёт только локальную устойчивость в малой окрестности  $x_0$ .

#### Ошибка 3: Неверное вычисление матрицы Якоби

Производные должны вычисляться строго в точке равновесия.

#### Ошибка 4: Смешение устойчивости и асимптотической устойчивости

Центр — устойчив, но не асимптотически. Узел/фокус с  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  — асимптотически устойчив.

#### VIII. Практический алгоритм-памятка

Алгоритм исследования устойчивости по первому приближению:

1. Найти положения равновесия:  
Решить  $f(x) = 0$
2. Для каждой точки  $x_0$ :
  - а) Вычислить матрицу якоби  $A = f'(x_0)$
  - б) Найти собственные числа  $\lambda_1$  матрицы  $A$
3. Проанализировать  $\lambda_1$ :

Если все  $\operatorname{Re}(\lambda_1) < 0$ :

Вывод: "Асимптотически устойчиво"

Если существует  $\lambda_k$ :  $\operatorname{Re}(\lambda_k) > 0$ :

Вывод: "Неустойчиво"

Иначе (есть  $\operatorname{Re}(\lambda_1) = 0$ , но нет  $\operatorname{Re}(\lambda_1) > 0$ ):

Вывод: "Критический случай. По первому приближению нельзя определить. Требуется второй метод Ляпунова или анализ нелинейных членов."

4. Для плоскости ( $n=2$ ) использовать быстрый критерий:  
 $p = -\operatorname{tr}(A)$ ,  $q = \det(A)$

$q < 0 \rightarrow$  Седло (неуст.)

$q > 0$ ,  $p > 0$ ,  $D > 0 \rightarrow$  Уст. узел (асимп. уст.)

$q > 0$ ,  $p > 0$ ,  $D < 0 \rightarrow$  Уст. фокус (асимп. уст.)

$q > 0$ ,  $p < 0 \rightarrow$  Неуст. узел/фокус

$q > 0$ ,  $p = 0 \rightarrow$  Центр (критич. случай!)

$q = 0 \rightarrow$  Критич. случай!

#### IX. Связь с другими разделами теории

1. Со вторым методом Ляпунова: Первый метод — частный случай, когда в качестве функции Ляпунова можно взять квадратичную форму.
2. С теорией бифуркаций: При изменении параметров системы собственные числа могут пересекать мнимую ось, что приводит к бифуркациям (например, бифуркация Андронова-Хопфа).
3. С численными методами: Условие устойчивости явного метода Эйлера  $|1 + h\lambda| < 1$  аналогично условию  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  для непрерывной системы.

Важнейший вывод: Первый метод Ляпунова — мощный, но требующий аккуратности инструмент. Он работает "почти всегда", кроме тонких критических случаев, где нелинейные эффекты становятся определяющими.

Утверждение: Определение устойчивости предполагает, что фиксирована система  $\dot{x} = f(t, x)$ , где  $(t, x) \in G \subset \mathbb{R}^{1+n}$ , с исходным решением  $x_0(\cdot)$ , а кроме того, фиксирован начальный момент  $t_0 \in \mathbb{R}$ , причём область определения  $D(x_0)$  исходного решения содержит луч  $\mathbb{R}^+ = [t_0; \infty)$ .

Утверждение:

## Вопрос 42: Необходимое условие устойчивости. Система с постоянными коэффициентами (теорема).

Лемма 141: Для устойчивости (асимптотической) линейной системы  $\dot{x} = A(t)x + F(t)$  или линейного уравнения  $y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = f(t)$ , где  $A, F, a_1, \dots, a_n, f \in C(I)$ ,  $\mathbb{R}^+ \subset I$ , необходимо выполнение соотношения  $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(\tau) d\tau < \infty$  ( $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(\tau) d\tau = -\infty$ ) или, соответственно, соотношения  $\inf_{t \in \mathbb{R}^+} \int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau > -\infty$  ( $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau = \infty$ ).

Доказательство: Если интеграл расходится, то определитель Вронского решений неограничен, что противоречит устойчивости.

Теорема: Линейная система с постоянным оператором:

- асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда действительные части всех его собственных значений отрицательны,
- устойчива тогда и только тогда, когда действительные части всех его собственных значений отрицательны или равны нулю, причём последним отвечают жордановы клетки только первого порядка.

Доказательство: Следует из свойств экспоненты матрицы и жордановой формы.

## Вопрос 43: Определение функции Ляпунова. Смысл производной в силу системы.

Определение: Функция Ляпунова - это функция  $v : U(0) \rightarrow \mathbb{R}$ , определённая в какой-либо окрестности  $U(0) \subset \mathbb{R}^n$  точки 0 и призванная подтвердить факт устойчивости, асимптотической устойчивости или неустойчивости нулевого решения, составляет основу второго метода Ляпунова.

Определение: Производной в силу системы  $\dot{x} = f(t, x)$ , где  $f, f'_x \in C(G)$ ,  $(t, x) \in G \supset \mathbb{R}^+ \times U(0)$ , имеющей нулевое решение, благодаря равенству  $f(\cdot, 0) = 0$ , функции  $v$  в точке  $x$  в момент  $t$  называется выражение  $\dot{v}_t(x) = v'(x)f(t, x) = v'_{x_1}(x)f_1(t, x) + \dots + v'_{x_n}(x)f_n(t, x)$  (последнее равенство предполагает наличие базиса в  $\mathbb{R}^n$ ).

Определение: Функцией Ляпунова для системы называется любая функция  $v \in C^1(U(0))$ , положительно определённая ( $v(x) > 0$  при  $x \neq 0$ ,  $v(0) = 0$ ), такая что её производная в силу системы имеет определённый знак.

## Вопрос 44: Лемма об устойчивости. Признак не асимптотической устойчивости.

Лемма: Пусть для системы существует функция Ляпунова  $v \in C^1(U(0))$ , удовлетворяющая при всех  $x \in \dot{U}(0)$  и  $t \in \mathbb{R}^+$  условиям:

1.  $v(x) > 0$  при  $x \neq 0$  (положительно определённая),
2.  $\dot{v}_t(x) \leq 0$ .

Тогда нулевое решение этой системы устойчиво по Ляпунову.

Доказательство: Функция Ляпунова является интегралом движения, что обеспечивает устойчивость.

Лемма: Пусть для системы существует функция Ляпунова  $v \in C^1(U(0))$ , удовлетворяющая при всех  $x \in \dot{U}(0)$  и  $t \in \mathbb{R}^+$  условиям:

1.  $v(x) > 0$  при  $x \neq 0$  (положительно определённая),
2.  $\dot{v}_t(x) = 0$ .

Тогда устойчивость нулевого решения этой системы не является асимптотической.

Доказательство: Если производная тождественно равна нулю, то функция постоянна на решениях, что предотвращает асимптотическую сходимость.

## Вопрос 45: Лемма об асимптотической устойчивости.

Лемма: Пусть для системы существует функция Ляпунова  $v \in C^1(U(0))$ , удовлетворяющая при всех  $x \in \dot{U}(0)$  и  $t \in \mathbb{R}^+$  условиям:

1.  $v(x) > 0$  при  $x \neq 0$  (положительно определённая),
2.  $\dot{v}_t(x) \leq w(x) < 0$  для некоторой функции  $w \in C(\dot{U}(0))$ .

Тогда нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво.

Доказательство: Функция  $v(x)$  является убывающей вдоль решений, что обеспечивает сходимость к нулю.

## Вопрос 46: Теорема Четаева.

Теорема: Теорема Четаева.

Пусть для системы существует область  $V \subset \mathbb{R}^n$ , примыкающая к началу координат ( $0 \in \partial V$ ), такая что в этой области  $v(x) > 0$ , а на границе области внутри окрестности  $v(x) = 0$ , и функция Четаева  $v \in C(V) \cap C^1(V)$ , удовлетворяющая условию

$$0. 0 \in \partial V, v(x)|_{x \in \partial V \cap U(0)} = 0,$$

а при всех  $x \in V \cap U(0)$  и  $t \in \mathbb{R}^+$  - условиям:

1.  $v(x) > 0$ ,
2.  $\dot{v}_t(x) \geq w(x) > 0$  для некоторой функции  $w \in C(V \cap U(0))$ .

Тогда нулевое решение этой системы неустойчиво.

Доказательство: Функция Четаева растёт вдоль решений, что приводит к выходу из области устойчивости.

## Вопрос 47: Система первого приближения. Теорема Ляпунова об исследовании устойчивости по первому приближению с полным доказательством.

Утверждение: Система первого приближения получается из исходной системы  $\dot{x} = Ax + F(t, x)$ , где  $F, F'_x \in C(G)$ ,  $G \supset \mathbb{R}^+ \times U(0)$  при условии  $\|F(\cdot, x)\|_{\mathbb{R}^+} = o(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , путём её линеаризации, в результате которой остаётся система  $\dot{x} = Ax$ , где  $t \in \mathbb{R}^+$ .

Теорема: Теорема Ляпунова об исследовании устойчивости по первому приближению.

Если действительные части всех собственных значений оператора  $A$  отрицательны, то нулевое решение системы с условием асимптотически устойчиво, а если хотя бы одна из них положительна - то неустойчиво.

Доказательство: Для линейных систем устойчивость определяется собственными значениями. Нелинейные возмущения сохраняют тип устойчивости в окрестности равновесия.

## Вопрос 48: Фазовое пространство автономной системы. Сдвиги фазовых траекторий. Непересекаемость фазовых кривых.

Утверждение: Фазовое пространство автономной системы  $\dot{x} = f(x)$ , где  $x \in G \subset \mathbb{R}^n$ , есть область  $G$ . Множество всех непродолжаемых решений этой системы будем обозначать через  $S_f(G)$ .

Лемма: Для любого решения  $x$  системы и для любой константы  $C \in \mathbb{R}$  функция  $x_C(t) = x(t + C)$ , где  $t \in \mathbb{R}$ , есть также решение этой системы.

Доказательство: Подстановка в уравнение показывает, что сдвиг по времени сохраняет решение.

Лемма: Если  $f \in C^1(G)$  и фазовые кривые решений  $x, y \in S_f(G)$  имеют общую точку  $x(t_0) = y(s_0)$ , то эти фазовые траектории с точностью до сдвига времени совпадают:  $x(t + t_0) = y(t + s_0)$ , где  $t \in \mathbb{R}$ .

Доказательство: По теореме единственности решения с общими начальными условиями совпадают.

## Вопрос 49: Динамическая система и фазовый поток. Генератор фазового потока (леммы).

Определение: Пусть на топологическом пространстве  $G$  задано семейство отображений  $F^t : G \rightarrow G$ , где  $t \in \mathbb{R}$ . Назовём семейство  $F$ :

- динамической системой, если выполнены три условия:
  - i.  $F^0 = I$  - тождественность на  $G$  начального отображения,
  - ii.  $F^{t+s} = F^t \circ F^s$ , где  $t, s \in \mathbb{R}$ , - аддитивность по времени,
  - iii.  $F \in C(\mathbb{R} \times G)$  - непрерывность функции  $F$  по паре  $(t, x)$ ;
- фазовым потоком, если динамическая система  $F$  удовлетворяет, сверх того, условиям  $F^t, (F^t) \in C^1(G)$ , где  $t \in \mathbb{R}$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$ ;
- каскадом, если параметр  $t$  в семействе с самого начала ограничен лишь целыми значениями.

Определение: Орбитой точки  $x \in G$  называется траектория или кривая  $F(x) = \{F^t(x) \mid t \in \mathbb{R}(\mathbb{Z})\}$ .

Лемма: Если  $f \in C^1(G)$ , то отображение Коши задаёт на множестве  $G$  фазовый поток  $F$ .

Доказательство: Отображение Коши удовлетворяет групповому свойству и непрерывно дифференцируемо.

Лемма: У любого фазового потока  $F$  существует единственный генератор  $f = (F^t)'|_{t=0} \in C^1(G)$ , который к тому же удовлетворяет равенству  $(F^t)' \circ f = f \circ F^t$ , где  $t \in \mathbb{R}$ .

Доказательство: Генератор получается дифференцированием потока по времени в нуле.

## Вопрос 50: Три типа фазовых кривых. Отсутствие других типов.

Определение: Фазовую кривую (траекторию)  $E(x)$  назовём:

- незамкнутой, если  $x(t + s) \neq x(t)$ , где  $t \in \mathbb{R}$ ,  $s > 0$ ,
- замкнутой, или циклом, если для некоторого числа  $T > 0$ , называемого периодом цикла, выполнено условие
- неподвижной точкой, или точкой покоя, если  $x(t) = x_0$ , где  $t \in \mathbb{R}$ .

Теорема: Для автономной системы  $\dot{x} = f(x)$ , где  $f \in C^1(G)$ , фазовая траектория любого решения  $x \in S_f(G)$  может быть только одного из трёх типов, перечисленных в определении.

Доказательство: По теореме о продолжаемости решения либо ограничены компактом, либо уходят на бесконечность, либо являются равновесными точками.

## Вопрос 51: Численные методы решения задачи Коши для СДУ и ДУВП. Алгоритмы методов Эйлера, его модификаций и их геометрическая интерпретация.

Примечание: Данный раздел содержит информацию из внешнего источника, так как в предоставленных фрагментах учебника Сергеева материал по численным методам отсутствует. Текст соответствует общепринятому курсу ОДУ.

КР2:

1. 575 - 581 +
2. 549 - 574 +
3. 796 - 810 +
4. 899 - 906 + 971 - 978
5. последняя лекция!

Отлично. Мы переходим от качественного анализа к практическому инструменту, без которого немыслима современная прикладная математика, — к численным методам. Важно понимать, что эти методы не заменяют теорию, а являются её логическим продолжением и и приложением, когда аналитическое решение найти невозможно или не нужно.

## Лекция: Численные методы решения задачи Коши. От ломаных Эйлера до разностных схем

### 1. Философия численного решения: зачем, когда и с какой точностью?

Теорема Коши-Пикара гарантирует существование и единственность решения задачи Коши. Но часто это решение не выражается в элементарных функциях (например, для уравнения  $\dot{x} = t^2 + x^2$ ). Даже если выражение найдено (через специальные функции, ряды), оно может быть непригодно для быстрых вычислений.

Цель численного метода: Построить приближённое решение — таблицу значений  $y_k \approx y(t_k)$  в заданных точках  $t_0 < t_1 < \dots < t_N$  — и сделать это эффективно, устойчиво и с контролируемой погрешностью.

Ключевые вопросы любого метода:

1. Аппроксимация: Как точно разностная схема приближает исходное ДУ?
2. Устойчивость: Маленькие ошибки (округления, начальные данные) не нарастают катастрофически?
3. Сходимость: При стремлении шага сетки к нулю приближённое решение стремится к точному?

Эти вопросы — прямое продолжение теории, изложенной у Сергеева.

### 2. Постановка задачи и основная идея

Дано: Задача Коши для ОДУ первого порядка (основная формулировка, к которой сводятся системы):

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0, T].$$

Вводим равномерную сетку:  $t_k = t_0 + k \cdot h$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ ,  $h = \frac{T-t_0}{N}$  — шаг сетки.

Искомое: Вектор  $\{y_k\}_{k=0}^N$ , где  $y_k \approx y(t_k)$ .

Геометрическая идея (восходящая к Эйлера): Интегральная кривая заменяется ломаной Эйлера. Каждое звено ломаной строится по направлению поля, заданного правой частью  $f(t, y)$  в начальной точке звена.

### 3. Явный (прямой) метод Эйлера. Геометрическая интерпретация, вывод, анализ.

#### Алгоритм:

1. Полагаем  $y_0$  (дано).
2. Для  $k = 0, 1, \dots, N - 1$  вычисляем:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k).$$

Вывод 1 (Геометрический): На отрезке  $[t_k, t_{k+1}]$  интегральную кривую заменяем отрезком прямой (касательной) с угловым коэффициентом  $f(t_k, y_k)$ . Это следует непосредственно из геометрического смысла производной  $y'(t_k)$ .

Вывод 2 (Аналитический, из разложения Тейлора):

Предположим, точное решение  $y(t)$  — гладкое. Разложим его в ряд Тейлора в точке  $t_k$ :

$$y(t_{k+1}) = y(t_k + h) = y(t_k) + h \cdot y'(t_k) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_k), \quad \xi_k \in [t_k, t_{k+1}].$$

Но по уравнению  $y'(t_k) = f(t_k, y(t_k))$ . Отбрасывая член порядка  $h^2$ , получаем:

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + h \cdot f(t_k, y(t_k)).$$

Заменяя  $y(t_k)$  на найденное приближение  $y_k$ , приходим к формуле Эйлера.

Анализ погрешности (локальной и глобальной):

- Локальная погрешность (погрешность на одном шаге): Это ошибка, которая возникает, если начать шаг с точного значения. Из вывода видно, что она имеет порядок  $O(h^2)$ :  $\delta_k = |y(t_{k+1}) - (y(t_k) + hf(t_k, y(t_k)))| \leq M_2 \frac{h^2}{2}$ , где  $M_2 = \max |y''(t)|$ .
- Глобальная погрешность:  $E_k = |y(t_k) - y_k|$ . Это накопленная ошибка после  $k$  шагов. Для явного метода Эйлера при выполнении условия Липшица  $|f(t, u) - f(t, v)| \leq L|u - v|$  можно доказать оценку:  $E_k \leq \frac{\lambda M_2}{2L}(e^{L(T-t_0)} - 1)$ .

Ключевой вывод: Глобальная погрешность явного метода Эйлера имеет первый порядок точности, т.е.  $E_N = O(h)$ . Уменьшая шаг в 10 раз, мы ожидаем уменьшения ошибки примерно в 10 раз.

Недостатки явного метода Эйлера:

- Низкая точность. Для достижения приемлемой точности требуется очень мелкий шаг.
  - Условная устойчивость. Для жестких уравнений (где характерные времена процессов сильно разнятся) метод требует нереально малого шага из соображений устойчивости, а не точности. Рассмотрим модельное уравнение:  $\dot{y} = -\lambda y, \lambda > 0$ .
- Точное решение:  $y(t) = y_0 e^{-\lambda t}$  (устойчиво, стремится к 0).
  - Применяем метод Эйлера:  $y_{k+1} = y_k + h(-\lambda y_k) = (1 - \lambda h)y_k$ .

Чтобы решение численной схемы не росло (было устойчивым), необходимо  $|1 - \lambda h| < 1$ , т.е.  $h < \frac{2}{\lambda}$ . Это условие устойчивости. При  $\lambda \gg 1$  шаг становится крайне малым.

4. Неявный метод Эйлера. Устойчивость для жестких задач.

Алгоритм:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_{k+1}, y_{k+1}).$$

Особенность: Значение  $y_{k+1}$  входит и в левую, и в правую часть. Это уравнение (часто нелинейное) необходимо решать на каждом шаге относительно  $y_{k+1}$  (например, методом Ньютона). Отсюда название — неявный.

Вывод (Интегральный, через левую прямоугольную формулу):

Проинтегрируем уравнение  $\dot{y} = f(t, y)$  на отрезке  $[t_k, t_{k+1}]$ :

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, y(\tau))d\tau.$$

Аппроксимируем интеграл по методу **правых** прямоугольников:  $\int_{t_k}^{t_{k+1}} g(\tau)d\tau \approx h \cdot g(t_{k+1})$ . Получаем формулу неявного метода.

Анализ устойчивости для тестового уравнения:

Для  $\hat{y} = -\lambda y$ :  $y_{k+1} = y_k + h(-\lambda y_{k+1}) \Rightarrow y_{k+1} = \frac{y_k}{1+\lambda h}$ .

Множитель перехода  $\frac{1}{1+\lambda h} < 1$  при любом  $h > 0$ . **Вывод:** Неявный метод Эйлера **абсолютно устойчив** для этого уравнения. Нет ограничений на шаг по соображениям устойчивости, только по точности. Это главное преимущество для жестких систем.

5. Усовершенствованный (модифицированный) метод Эйлера. Методы Рунге-Кутты 2-го порядка.

Явный метод Эйлера использует информацию о поле направлений только в начале шага. Идея улучшения — усреднить производную.

**Метод Эйлера-Коши (прогноз-коррекция):**

1. Прогноз (явный шаг Эйлера):  $\tilde{y}_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k)$ .
2. Коррекция (усреднение):  $y_{k+1} = y_k + h \cdot \frac{f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})}{2}$ .

**Геометрическая интерпретация:** Сначала делаем пробный шаг по направлению в начальной точке, вычисляем поле направлений в этой пробной точке, а затем идём по среднему направлению.

**Вывод (через формулу трапеций):**

Проинтегрируем уравнение:  $y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, y(\tau)) d\tau$ .

Аппроксимируем интеграл по формуле трапеций:  $\int_{t_k}^{t_{k+1}} g(\tau) d\tau \approx h \cdot \frac{g(t_k) + g(t_{k+1})}{2}$ .

Получаем:  $y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + \frac{h}{2} [f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))]$ .

Это неявная схема трапеций. Чтобы сделать её явной, заменяем  $y(t_{k+1})$  в правой части на прогноз по Эйлера. Так мы приходим к явному методу Эйлера-Коши.

**Погрешность:** Локальная погрешность  $O(h^3)$ , глобальная  $O(h^2)$  — метод второго порядка. Это значительное улучшение.

**Общий вид метода Рунге-Кутты 2-го порядка:**

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_k, y_k), \\ k_2 = hf(t_k + \alpha h, y_k + \beta k_1), \\ y_{k+1} = y_k + ak_1 + bk_2. \end{cases}$$

Подбором параметров  $\alpha, \beta, a, b$  можно получить различные методы. При  $\alpha = \beta = 1, a = b = 1/2$  — это метод Эйлера-Коши. При  $\alpha = \beta = 1/2, a = 0, b = 1$  — метод усовершенствованного Эйлера (средняя точка):  $y_{k+1} = y_k + hf(t_k + h/2, y_k + \frac{h}{2}f(t_k, y_k))$ .

## 6. Классический метод Рунге-Кутты 4-го порядка (RK4)

Наиболее популярный на практике метод баланса точности и вычислительных затрат.

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_k, y_k), \\ k_2 = hf(t_k + h/2, y_k + k_1/2), \\ k_3 = hf(t_k + h/2, y_k + k_2/2), \\ k_4 = hf(t_k + h, y_k + k_3), \\ y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{cases}$$

**Порядок точности:** Глобальная погрешность  $O(h^4)$ . Для большинства задач обеспечивает хорошую точность при умеренном шаге.

## 7. Численное решение систем ОДУ (СОДУ)

Все методы обобщаются на системы **покоординатно**.

Пусть дана система:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

**Явный метод Эйлера для системы:**

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k).$$

**Метод Рунге-Кутты 4-го порядка для системы:** Все  $k_i$  становятся векторами, формулы остаются прежними. Это одно из ключевых преимуществ методов Рунге-Кутты.

## 8. Численное решение ДУВП (уравнений в частных производных) для задачи Коши. Метод прямых.

Подход к решению УрЧП, сводящий его к системе ОДУ. Рассмотрим на примере уравнения теплопроводности на отрезке:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, x) = u_0(x), \quad t > 0, \quad x \in [0, L].$$

1. Дискретизация по пространственной переменной: Вводим сетку по  $x$ :  $x_j = j \cdot \Delta x, j = 0, \dots, M$ .
2. Аппроксимация производной по  $x$ : Заменяем вторую производную разностным отношением (например, по трехточечному шаблону):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x_j) \approx \frac{U_{j-1}(t) - 2U_j(t) + U_{j+1}(t)}{(\Delta x)^2},$$

где  $U_j(t) \approx u(t, x_j)$  — искомая функция в точке  $x_j$ , зависящая уже только от времени.

3. Получение системы ОДУ (метод прямых): Для каждого внутреннего узла  $j = 1, \dots, M - 1$  получаем ОДУ:

$$\frac{dU_j}{dt} = \frac{a^2}{(\Delta x)^2}(U_{j-1}(t) - 2U_j(t) + U_{j+1}(t)).$$

Для граничных узлов  $j = 0$  и  $j = M$  используем граничные условия (например,  $U_0(t) = 0, U_M(t) = 0$ ).

4. Решение системы ОДУ: Получили систему из  $(M - 1)$  линейных ОДУ первого порядка. К ней можно применить любой из рассмотренных выше методов (Эйлера, Рунге-Кутты).

**Важно:** Это лишь одна из многих возможных схем (здесь — явная). Существуют также неявные и полунеявные схемы (Кранка-Николсон), которые устойчивы при любом шаге по времени, но требуют решения СЛАУ на каждом шаге.

## Резюме и сравнительная таблица методов

Метод	Формула (ОДУ)	Порядок точности	Устойчивость	Сложность	Применение
Явный Эйлер	$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$	1-й (O(h))	Условная	Низкая	Учебные задачи, некритичные расчеты
Неявный Эйлер	$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$	1-й (O(h))	Абсолютная	Средняя (решение ур-я)	Жесткие системы, устойчивость важнее точности
Модиф. Эйлер (RK2)	$y_{k+1} = y_k + hf(t_k + h/2, y_k + \frac{h}{2}f(t_k, y_k))$	2-й (O(h^2))	Условная	Средняя	Универсальный метод для многих задач
Рунге-Кутты 4 (RK4)	См. выше с $k_1, k_2, k_3, k_4$	4-й (O(h^4))	Условная	Высокая (4 вызова f)	Стандарт для нежестких задач, высокая точность
Метод прямых	Сведение УрЧП к системе ОДУ	Зависит от схем	Зависит от схем	Высокая	Решение УрЧП параболического/гиперболического типа

## Общий алгоритм выбора метода:

- Проанализируйте задачу: возможно ли аналитическое решение? Нужна ли высокая точность?
- Оцените жесткость системы (если есть быстро и медленно затухающие компоненты).
- Если система нежесткая и нужна высокая точность — используйте RK4.
- Если система жесткая — используйте неявные методы (неявный Эйлер, методы Гира) или специализированные решатели.
- Всегда проводите тестовые расчеты, уменьшая шаг в 2 раза и оценивая изменение результата (оценка погрешности методом Рунге).

## Задание для закрепления и программирования:

Рассмотрите задачу Коши для уравнения Ван дер Поля (модель нелинейного осциллятора):

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x, \end{cases} \quad \mu > 0.$$

с начальными условиями  $x(0) = 2, y(0) = 0$ .

- Аналитически: Докажите, что решение существует и единственно при любом  $t$ .
- Численно (предлагается реализовать в любой среде):
  - Реализуйте явный метод Эйлера, метод Эйлера-Коши (RK2) и классический RK4.
  - Для  $\mu = 1$  и  $t \in [0, 20]$  постройте на одном графике три численных решения  $x(t)$  с шагом  $h = 0.1$ . Сравните их.
  - Исследуйте устойчивость явного метода Эйлера: начните увеличивать шаг  $h$  (0.5, 1.0, 2.0). При каком  $h$  решение теряет физический смысл (становится неустойчивым)?
  - Постройте фазовые портреты  $(x(t), y(t))$ , полученные разными методами с  $h = 0.01$ . Какой метод быстрее сходится к предельному циклу?
- Качественный анализ: Сравните полученные численные результаты с тем, что предсказывает теория для системы Ван дер Поля (наличие устойчивого предельного цикла).

Это задание объединит все аспекты: теоретические основы, численные методы, анализ устойчивости и качественное поведение, что полностью соответствует духу нашего курса.



Утверждение: Дана задача Коши вида  $\begin{cases} y' = f(t, x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Утверждение: Все численные методы заключаются в поиске аппроксимации (некоторого приближенного решения).

Утверждение: Для использования численного метода решения задачи Коши требуется выделить некоторый отрезок  $[x_0; X]$ , на котором мы хотим найти решение.

Утверждение: Для применения метода Эйлера требуется ввести шаг  $h = \frac{X-x_0}{n}$ , где  $n$  - число разбиений отрезка. Применив для каждой точки разбиения рекуррентную формулу  $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$ , нарисует прямые в промежутках  $[x_i; x_{i+1}]$ , которые и будут итоговым графиком нашего решения.

Доказательство: Мы можем получить приближённое значение функции в точке приближённо с помощью формулы Тейлора  $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \text{остаточный член}$ . Мы

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}(x_{i+1} - x_i) + \dots + \frac{y^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n$$
$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Метод Эйлера

Дана задача Коши

Введём рекуррентную формулу

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

## Вопрос 52: Определение топологии. Топологическое пространство. Открытое множество, точки прикосновения множеств, замкнутое. Непрерывное отображение в точке. Связность. Аксиомы отделимости. Хаусдорфово топологическое пространство. Компактность.

Определение: Топология на множестве  $X$  - семейство  $\tau$  подмножеств  $X$ , удовлетворяющее аксиомам:

1.  $\emptyset, X \in \tau$
2. Объединение любого семейства множеств из  $\tau$  принадлежит  $\tau$
3. Пересечение конечного числа множеств из  $\tau$  принадлежит  $\tau$

Определение: Топологическое пространство - пара  $(X, \tau)$ .

Определение: Множество  $U \subset X$  называется открытым, если  $U \in \tau$ .

Определение: Точка  $x$  называется точкой прикосновения множества  $A \subset X$ , если любая окрестность  $x$  содержит точку из  $A$ .

Определение: Множество  $F \subset X$  называется замкнутым, если его дополнение открыто.

Определение: Отображение  $f: X \rightarrow Y$  непрерывно в точке  $x_0$ , если для любой окрестности  $V$  точки  $f(x_0)$  существует окрестность  $U$  точки  $x_0$  такая, что  $f(U) \subset V$ .

Определение: Топологическое пространство называется связным, если оно не представимо в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств.

Аксиомы отделимости:

- $T_1$ : Любые две различные точки можно отделить замкнутыми множествами
- $T_2$  (Хаусдорфово): Любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности

Определение: Компактное множество - множество, из любого покрытия которого открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

## Вопрос 53: Многообразия. Функции и отображения. Гладкие многообразия. Гладкие функции, гладкие отображения, диффеоморфизм.

Определение:  $n$ -мерное многообразие - топологическое пространство  $M$ , каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому множеству в  $\mathbb{R}^n$ .

Определение: Гладкое многообразие - многообразие с атласом гладких карт.

Определение: Гладкая функция  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  - функция, гладкая в локальных координатах.

Определение: Гладкое отображение  $f : M \rightarrow N$  между гладкими многообразиями - отображение, гладкое в локальных координатах.

Определение: Дiffeоморфизм - гладкое отображение, имеющее гладкое обратное.

## Вопрос 54: Выпрямляющий диффеоморфизм (теорема).

Теорема: Выпрямляющий диффеоморфизм.

Пусть  $M$  - гладкое многообразие,  $\gamma : I \rightarrow M$  - гладкая кривая. Тогда существует диффеоморфизм  $\varphi : I \rightarrow \gamma(I)$ , такой что  $\varphi(0) = \gamma(0)$  и  $D\varphi(t) \cdot \frac{d}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}(t)$ .

Следствие: Локально любая гладкая кривая может быть выпрямлена.

## Вопрос 55: Первый интеграл автономной системы. Дифференциальный критерий. Инвариантные множества. Независимые первые интегралы. Независимость в точке и зависимость в области. Универсальная система первых интегралов. Произвольная локально полная система.

Определение: Первый интеграл автономной системы  $\dot{x} = f(x)$  - функция  $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ , постоянная на решениях системы.

Дифференциальный критерий: Функция  $H$  является первым интегралом тогда и только тогда, когда  $H'(x)f(x) = 0$  для всех  $x \in U$ .

Определение: Инвариантное множество - множество, все решения, начинающиеся в котором, остаются в нём.

Определение: Первые интегралы  $H_1, \dots, H_k$  называются независимыми в точке  $x_0$ , если градиенты  $\nabla H_1, \dots, \nabla H_k$  линейно независимы в  $x_0$ .

Определение: Универсальная система первых интегралов - максимальная система независимых первых интегралов.

Вопрос 56: Особые точки на плоскости.

Определение: Особая точка (точка покоя) системы  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  - точка  $x_0$ , где  $f(x_0) = 0$ .

Классификация особых точек:

- Узел: решения приближаются по касательным к собственным векторам
- Седло: решения удаляются по одной прямой и приближаются по другой
- Фокус: решения приближаются/удаляются по спирали
- Центр: замкнутые траектории вокруг точки
- Вырожденный узел: особый случай узла

Теорема: Тип особой точки определяется собственными значениями линеаризованной системы.

Методы решений ДУ

Уравнение изоклин

Определение: Изоклина - линия на фазовой плоскости, вдоль которой угловой коэффициент касательных к интегральным кривым постоянен.

Уравнение изоклин:  $\frac{dy}{dx} = k$ , где  $k$  - константа.

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение: Уравнения с разделяющимися переменными - уравнения вида  $y' = f(x)g(y)$  или  $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$ .

Утверждение: Для решения уравнения требуется "разделить" переменные по дифференциалам и проинтегрировать их.

1.  $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$
2.  $f(x)dx + g(y)dy = 0$
3.  $\int_{x_0}^x f(x)dx + \int_{y_0}^y g(y)dy = C$

Однородные уравнения

Определение: Функция  $M(x, y)$  называется однородной функцией степени  $n$ , если для всех  $k > 0$  имеем  $M(kx, ky) = k^n M(x, y)$ .

Определение: Однородные уравнения - уравнения вида  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$  или  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ , где  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  - однородные функции одной и той же степени.

Утверждение: Однородное уравнение решается заменой  $t = \frac{y}{x}$ .

Утверждение: Уравнение вида  $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$  приводится к однородному следующим образом:

1. Если у прямых  $a_1x + b_1y + c_1$  и  $a_2x + b_2y + c_2$  есть точка пересечения  $(x_0, y_0)$ , то производим замену
2. Если у прямых нет пересечения, то производим замену

Утверждение: Иногда уравнение можно привести к однородному, используя замену  $y = z^m$ , подставив которую в уравнению можно найти конкретное значение  $m$  требуемой замены.

Линейные уравнения 1-го порядка

Определение: Линейные уравнения 1-го порядка - уравнения вида  $y' + a(x)y = b(x)$ .

Утверждение: Решается линейное уравнение 1-го порядка следующим образом:

1. Решаем линейное однородное уравнение вида  $y' + a(x)y = 0$ .
2. Константу  $C$  приравниваем к функции от независимой переменной.
3. Выражаем семейство решений относительно искомой функции и подставляем её в первоначальное уравнение (с учётом того, что  $C$  теперь функция!).
4. Решаем до финала.

Замечание: Иногда полезно поменять искомую функцию и независимую переменную местами.

Утверждение: Для решения уравнения Бернулли, т.е. уравнения вида  $y' + a(x)y = b(x)y^n$ , где  $n \neq 1$  нужно разделить на  $y^n$  обе части и сделать замену  $z = \frac{1}{y^{n-1}}$ . Получим линейное уравнение 1-го порядка.

Утверждение: Для решения уравнения Риккати, т.е. уравнения вида  $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$  нужно найти одно частное решение  $y_1(x)$  и произвести замену  $y = y_1(x) + z$ . Получим уравнение Бернулли.

Замечание: В общем случае уравнение Риккати не решается в квадратурах.

## Уравнения в полных дифференциалах

Определение: Уравнения в полных дифференциалах - уравнения вида  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ , где его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции  $F(x, y)$ . То есть должно выполняться  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ .

Утверждение: Решается уравнение в полных дифференциалах следующим образом:

1. Ищем интеграл  $F = \int M(x, y)dx = \dots + \varphi(y)$ .
2. Производим дифференцирование  $F'_y = N(x, y)$  и находим  $\varphi(y)$ .
3. Подставляем  $\varphi(y)$  выше.

Замечание: Аналогичный порядок действий может быть для  $N(x, y)$ .

Определение: Интегрирующим множителем для уравнения  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  называется такая функция  $\mu(x, y) \neq 0$ , после умножения на которую уравнение превращается в уравнение в полных дифференциалах.

Утверждение: Интегрирующий множитель существует при непрерывности частных производных и их не обращении в нуль одновременно.

Утверждение: Методы отыскания интегрирующего множителя:

1. Если  $\frac{M'_y - N'_x}{N} = \varphi(x)$ , то  $\mu = e^{\int \varphi(x)dx}$
2. Если  $\frac{N'_x - M'_y}{M} = \psi(y)$ , то  $\mu = e^{\int \psi(y)dy}$
3. Метод подстановки для специальных случаев

## Уравнения, не разрешённые относительно производной

Утверждение: Уравнения вида  $F(x, y, y') = 0$  можно решать следующими методами:

1. Разрешить уравнение относительно производной  $y'$ , т.е. составить уравнение вида  $y' = f(x, y)$
2. Решить методом введения параметра

## Уравнения, допускающие понижения порядка

Утверждение: Если в уравнение не входит искомая функция  $y$ , т.е. оно имеет вид  $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ , то порядок уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных, входящих в уравнение, т.е. сделав замену  $y^{(k)} = z$ .

Утверждение: Если в уравнение не входит независимое переменное  $x$ , т.е. уравнение имеет вид  $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ , то порядок уравнения можно понизить, взяв за новое независимое переменное  $y$ , а за неизвестную функцию  $y' = p(y)$ .

Утверждение: Если уравнение однородно относительно  $y$  и его производных, т.е. не меняется при одновременной замене  $y, y', y'', \dots$  на  $ky, ky', ky'', \dots$ , то порядок уравнения понижается подстановкой  $y' = yz$ , где  $z$  - новая неизвестная функция.

Утверждение: Порядок уравнения можно

Утверждение: Порядок уравнения можно понизить, если преобразовать уравнение к такому виду, чтобы обе его части являлись полными производными по  $x$  от каких-нибудь функций.

## Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Определение: Уравнения с постоянными коэффициентами - уравнения вида  $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ .

Утверждение: Уравнения с постоянными коэффициентами решается следующим образом:

1. Составляем характеристическое уравнение  $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ .
2. Находим все корни характеристического уравнения и их кратности.
3. Записываем общее решение в виде суммы слагаемых вида:

- $C_i e^{\lambda_i x}$  для простого вещественного корня  $\lambda_i$ .
- $(C_{m+1} + C_{m+2}x + C_{m+3}x^2 + \dots + C_{m+k}x^{k-1})e^{\lambda x}$  для каждого вещественного кратного корня  $\lambda$  кратности  $k$ .
- $C_{m+1}e^{\alpha x} \cos \beta x + C_{m+2}e^{\alpha x} \sin \beta x$  для каждой пары комплексных сопряжённых простых корней  $\lambda = \alpha \pm \beta i$ .
- $(C_{m+1} + C_{m+2}x + C_{m+3}x^2 + \dots + C_{m+k}x^{k-1})$

Утверждение: Для линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и с правой частью, состоящей из сумм и произведений функций  $b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ ,  $e^{\alpha x}$ ,  $\cos \beta x$ ,  $\sin \beta x$ , частное решение можно искать методом неопределённых коэффициентов.

Определение: Линейные неоднородные уравнения - уравнения вида  $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$ .

Утверждение: Линейные неоднородные уравнения с любой правой частью  $f(x)$  решаются методом вариации постоянных. Для

## Линейные уравнения с переменными коэффициентами

## Краевые задачи

Для отыскания решения краевой задачи  $a_0 y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ ,  $x_0 \leq x \leq x_1$ ,  $\alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0$ ,  $\gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0$ .

## Линейные системы с постоянными коэффициентами

## Устойчивость

Особые

### Метод вариации постоянных ЛНДУ 2 порядка

Вид ЛНДУ с спец ПЧ

Линейная однородная система 3 на 3

Исследование по первому приближение, определение устойчивости с рисунком

Отлично. Переходим к детальному изложению центральной темы курса, следуя строгому и фундаментальному подходу учебника Сергеева. Тема разделяется на два крупных блока: линейные уравнения высшего порядка и линейные системы первого порядка.

**Лекция: Линейные дифференциальные уравнения и системы: теория и методы решения**

## 1. Философия и структура теории

Линейные уравнения образуют наиболее завершённый и важный класс ДУ. Их теория базируется на линейной алгебре и анализе и предоставляет полный арсенал методов для построения общего решения. Ключевой принцип — принцип суперпозиции, который является следствием линейности оператора.

## Основные объекты изучения:

1. Линейное уравнение  $n$ -го порядка.
2. Линейная система  $n$  уравнений первого порядка.

Между ними существует полная эквивалентность: любое линейное уравнение  $n$ -го порядка можно записать как линейную систему  $n$  уравнений первого порядка, и наоборот (хотя последнее не всегда просто). Это позволяет использовать единые теоретические конструкции.

## 2. Линейные уравнения $n$ -го порядка: фундаментальная теория

### Общий вид:

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = f(t), \quad (1)$$

где  $a_i(t), f(t) \in C(I)$ . Если  $f(t) \equiv 0$ , уравнение однородное (ЛОДУ), иначе — неоднородное (ЛНДУ).

### Теорема 1 (Структура общего решения ЛНДУ).

Общее решение  $y_{\text{ор}}(t)$  уравнения (1) имеет вид:

$$y_{\text{ор}}(t) = y_{\text{оо}}(t) + y_{\text{чн}}(t),$$

где  $y_{\text{оо}}(t)$  — общее решение соответствующего однородного уравнения  $L[y] = 0$ , а  $y_{\text{чн}}(t)$  — любое частное решение неоднородного уравнения.

### Теорема 2 (Структура общего решения ЛОДУ).

Множество решений однородного уравнения  $L[y] = 0$  образует  $n$ -мерное линейное пространство. Это означает, что существуют  $n$  линейно независимых решений  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  (фундаментальная система решений, ФСР), таких, что любое решение представляется в виде:

$$y_{\text{он}}(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \dots + C_n y_n(t), \quad C_i \in \mathbb{R}.$$

### Критерий линейной независимости: определитель Вронского.

Для набора функций  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  определитель Вронского:

$$W(t) = W[y_1, \dots, y_n](t) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

- Если функции линейно зависимы на  $I$ , то  $W(t) \equiv 0$  на  $I$ .
- Если они являются решениями ЛОДУ, то верно и обратное:  $W(t) \equiv 0 \iff$  решения линейно зависимы. Более того, для решений ЛОДУ справедлива формула Лиувилля-Остроградского:

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp \left( - \int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau \right).$$

Следовательно,  $W(t)$  либо тождественно ноль, либо нигде не обращается в ноль.

## 3. Методы решения ЛОДУ с постоянными коэффициентами

Уравнение:  $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$ , где  $p_i \in \mathbb{R}$ .

Алгоритм (основан на поиске решений вида  $y = e^{\lambda t}$ ):

1. Составить характеристическое уравнение:

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0.$$

2. Для каждого корня  $\lambda$  кратности  $k$  построить  $k$  линейно независимых решений:

- Действительный корень  $\lambda$  кратности  $k$ :  $e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}$ .
- Пара комплексно-сопряжённых корней  $\alpha \pm i\beta$  кратности  $k$ : Даёт  $2k$  действительных решений:

$$e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t, t e^{\alpha t} \cos \beta t, t e^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \cos \beta t, t^{k-1} e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

3. Общее решение — линейная комбинация всех построенных решений.

Пример:  $y''' - 3y' + 2y = 0$ . Хар. уравнение:  $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$ . Корни:  $\lambda_1 = 1$  (кратности 1),  $\lambda_2 = -2$  (кратности 1). Общее решение:  $y = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$ .

## 4. Методы решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами

### А. Метод неопределённых коэффициентов (для специальной правой части).

Применим, когда  $f(t)$  — квазиполином:  $f(t) = e^{\alpha t}[P_m(t) \cos \beta t + Q_l(t) \sin \beta t]$ , где  $P_m, Q_l$  — многочлены степеней  $m$  и  $l$ .

Алгоритм:

1. Записать число  $s = \alpha + i\beta$ .
2. Определить кратность  $r$  числа  $s$  как корня характеристического уравнения ( $r = 0$ , если не корень).
3. Частное решение искать в виде:

$$y_{\text{чи}} = t^r e^{\alpha t} [\tilde{P}_k(t) \cos \beta t + \tilde{Q}_k(t) \sin \beta t],$$

где  $k = \max(m, l)$ , а  $\tilde{P}_k, \tilde{Q}_k$  — многочлены степени  $k$  с неопределёнными коэффициентами.

4. Подставить  $y_{\text{чи}}$  в исходное уравнение, приравнять коэффициенты при одинаковых функциях и найти неизвестные коэффициенты.

Пример:  $y'' + y = t \sin t$ . Здесь  $f(t) = t \sin t = e^{0 \cdot t}[0 \cdot \cos t + t \cdot \sin t]$ , так что  $\alpha = 0, \beta = 1, s = i$ . Хар. уравнение:  $\lambda^2 + 1 = 0$ , корни  $\pm i$ . Число  $s = i$  — корень кратности  $r = 1$ . Степень многочленов:  $k = \max(0, 1) = 1$ . Ищем:  $y_{\text{чи}} = t^1 e^{0 \cdot t}[(At + B) \cos t + (Ct + D) \sin t] = t[(At + B) \cos t + (Ct + D) \sin t]$ . Подстановка и приравнивание даст  $A, B, C, D$ .

### Б. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Универсальный метод для любой непрерывной  $f(t)$ .

Алгоритм:

1. Найти ФСР  $y_1, \dots, y_n$  соответствующего ЛОДУ и записать  $y_{00} = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$ .
2. Искать частное решение в виде  $y_{\text{чи}} = C_1(t) y_1 + \dots + C_n(t) y_n$ , где  $C_i(t)$  — новые неизвестные функции.
3. Для их определения составляется система линейных алгебраических уравнений относительно производных  $C'_i(t)$ :

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_n y_n = 0, \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_n y'_n = 0, \\ \dots \\ C'_1 y_1^{(n-2)} + C'_2 y_2^{(n-2)} + \dots + C'_n y_n^{(n-2)} = 0, \\ C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)} = f(t). \end{cases}$$

Определитель этой системы — это  $W(t) \neq 0$ , поэтому решение существует и единственно.

4. Найти  $C'_i(t)$  и проинтегрировать:  $C_i(t) = \int C'_i(t) dt$ .

Пример:  $y'' + y = \tan t$ . ФСР:  $y_1 = \cos t, y_2 = \sin t$ . Ищем  $y_{\text{чи}} = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t$ . Система:

$$\begin{cases} C'_1 \cos t + C'_2 \sin t = 0, \\ -C'_1 \sin t + C'_2 \cos t = \tan t. \end{cases}$$

Решая, находим  $C'_1 = -\sin t \tan t = \cos t - \sec t, C'_2 = \sin t$ . Интегрируем:  $C_1 = \sin t - \ln |\sec t + \tan t|, C_2 = -\cos t$ . Частное решение:  $y_{\text{чи}} = (\sin t - \ln |\sec t + \tan t|) \cos t + (-\cos t) \sin t = -\cos t \ln |\sec t + \tan t|$ .

## 5. Линейные системы первого порядка: общая теория

Нормальная форма:  $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$ , где  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, A(t) - n \times n$ -матрица,  $\mathbf{f}(t)$  — вектор-столбец. Если  $\mathbf{f} \equiv 0$  — однородная система.

Теорема 3 (Структура общего решения). Аналогична случаю одного уравнения:

$$\mathbf{x}_{\text{ои}}(t) = \mathbf{x}_{\text{оо}}(t) + \mathbf{x}_{\text{ин}}(t).$$

Теорема 4 (Однородная система). Решения образуют  $n$ -мерное линейное пространство. Фундаментальная матрица  $\Phi(t)$  — это матрица, столбцы которой образуют ФСР. Общее решение:  $\mathbf{x}_{\text{оо}}(t) = \Phi(t)\mathbf{C}$ , где  $\mathbf{C}$  — вектор произвольных постоянных. Определитель  $\det \Phi(t) = W(t)$  — вронскиан, подчиняется формуле Лиувилля:  $W(t) = W(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^t \text{tr } A(\tau) d\tau \right)$ .

## 6. Методы решения систем с постоянной матрицей

### А. Однородная система: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$

Алгоритм (поиск Фундаментальной матрицы):

1. Найти собственные числа  $\lambda_i$  и собственные векторы  $\mathbf{v}_i$  матрицы  $A$ .
2. Случай простых (некратных) собственных чисел:

- Действительные  $\lambda$ : решение  $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$ .
- Комплексные  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{u} \pm i\mathbf{w}$ : два действительных решения  $\mathbf{x}_1 = e^{\alpha t}(\mathbf{u} \cos \beta t - \mathbf{w} \sin \beta t)$ ,  $\mathbf{x}_2 = e^{\alpha t}(\mathbf{u} \sin \beta t + \mathbf{w} \cos \beta t)$ .

### 3. Случай кратных собственных чисел (метод Жордановой формы):

Для собственного числа  $\lambda$  кратности  $k$ , если не хватает собственных векторов, ищутся присоединённые векторы. Решение, соответствующее жордановой клетке размера  $m$ , имеет вид:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \left[ \mathbf{h}_0 + t\mathbf{h}_1 + \frac{t^2}{2!}\mathbf{h}_2 + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\mathbf{h}_{m-1} \right],$$

где  $(A - \lambda I)\mathbf{h}_0 = 0$  (собств. вектор),  $(A - \lambda I)\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_0$ , и т.д.

Пример:  $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ . Хар. уравнение:  $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(4 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$ . Корень  $\lambda = 3$  кратности 2.

Находим собственный вектор:  $(A - 3I)\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = (1, 1)^T$ . Только один вектор. Ищем присоединённый:  $(A - 3I)\mathbf{h}_1 = \mathbf{v}$ . Решаем  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Одно из решений:  $\mathbf{h}_1 = (0, 1)^T$ . Тогда ФСР:  $\mathbf{x}_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_2(t) = e^{3t} \left( t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^{3t} \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}$ .

## Б. Неоднородная система: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$

### 1. Метод вариации постоянных (универсальный).

Если  $\Phi(t)$  — фундаментальная матрица однородной системы, то общее решение неоднородной:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{C}(t), \quad \text{где } \mathbf{C}'(t) = \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t).$$

Интегрируя, получаем:  $\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt$ . При начальном условии  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  получаем формулу Коши:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau.$$

## 2. Метод неопределённых коэффициентов (для специальной $\mathbf{f}(t)$ )

Аналогичен методу для одного уравнения. Если  $\mathbf{f}(t) = e^{\alpha t}[\mathbf{P}_m(t) \cos \beta t + \mathbf{Q}_l(t) \sin \beta t]$ , где  $\mathbf{P}_m, \mathbf{Q}_l$  — вектор-многочлены, то частное решение ищется в виде, аналогичном скалярному случаю, с учётом кратности числа  $s = \alpha + i\beta$  как собственного значения матрицы  $A$ .

## 7. Алгоритм выбора метода решения: схема-памятка

Дано: Линейное ДУ или система.

#### 1. Классифицировать:

- Уравнение  $n$ -го порядка или система?
- Постоянные или переменные коэффициенты?
- Однородное или неоднородное?

#### 2. Для однородных задач с постоянными коэффициентами:

- Уравнение: Решить характеристическое уравнение, построить ФСР.
- Система: Найти собственные числа и векторы матрицы  $A$ , построить ФСР.

#### 3. Для неоднородных задач с постоянными коэффициентами:

- Если правая часть — квазиполином (экспонента, синус, косинус, многочлен, их произведение) → Метод неопределённых коэффициентов.
- Иначе, или если метод неопределённых коэффициентов громоздок → Метод вариации постоянных.

#### 4. Для задач с переменными коэффициентами:

- Частные случаи (эйлера, Чебышева и др.) решаются специальными подстановками.
- В общем случае: либо искать ФСР в конкретном виде (если повезёт), либо использовать метод вариации постоянных, если известна ФСР соответствующая.

## 8. Важные частные случаи и связь с приложениями

Уравнение Эйлера:  $t^n y^{(n)} + a_1 t^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} t y' + a_n y = 0$ . Решается заменой  $t = e^x$  (для  $t > 0$ ) или  $t = -e^x$  (для  $t < 0$ ), которая сводит его к уравнению с постоянными коэффициентами относительно  $x$ .

**Приложения:**

- **Колебания:** Уравнение  $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = F(t)$  описывает вынужденные колебания осциллятора с трением. Его решение показывает переходные процессы, установившийся режим, резонанс.
- **Электрические цепи:** Система линейных уравнений, вытекающая из законов Кирхгофа (RLC-цепь).
- **Модели взаимодействия:** Линейные системы типа "хищник-жертва" с постоянными коэффициентами (модель Лотки-Вольтерры в линейном приближении).

**Резюме по теме:**

1. **Структура общего решения** линейной неоднородной задачи всегда: Общее однородное + Частное неоднородное.
2. Решение однородной задачи сводится к поиску **фундаментальной системы решений (ФСР)** — базиса в  $n$ -мерном пространстве решений.
3. Для **постоянных коэффициентов** ФСР строится алгебраически через характеристическое уравнение и собственные числа/векторы.
4. Для **неоднородной задачи** есть два основных метода:
  - **Метод неопределённых коэффициентов** — эффективен для специальных правых частей, но требует аккуратности при резонансе.
  - **Метод вариации постоянных** — универсален, основан на известной ФСР однородного уравнения.
5. **Системы** решаются аналогично, но с использованием матричного аппарата. Метод вариации для систем приводит к изящной формуле Коши.

**Задание для комплексного закрепления:**

1. **Теория:** Докажите, что если функции  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  имеют на интервале  $(a, b)$  отличный от нуля вронскиан, то они линейно независимы. Верно ли обратное для произвольных функций? Приведите контрпример.
2. **Практика (уравнение):** Решите задачу Коши:  $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ .

**Указание:** Сначала найдите общее решение однородного уравнения, затем примените метод вариации постоянных для нахождения частного решения. Интегралы можно оставить в виде первообразных.

3. **Практика (система):** Найдите общее решение системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + e^t, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 + t. \end{cases}$$

Указание: Найдите ФСР однородной системы, затем для неоднородной примените метод неопределённых коэффициентов, разбив правую часть на два слагаемых:  $(e^t, 0)^T$  и  $(0, t)^T$ .

4. **Исследование:** Для системы из пункта 3 постройте фазовый портрет соответствующей однородной системы. К какому типу относится особая точка  $(0, 0)$ ? Исследуйте её устойчивость.

Выполнение этих заданий потребует применения всей суммы знаний по теме и глубоко закрепит материал.

## Лекция: Линейные системы дифференциальных уравнений. Полная теория и методология

### Часть 1: Фундаментальная теория. Пространство решений.

Рассмотрим нормальную линейную систему первого порядка:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in I, \quad (1)$$

где  $A(t)$  —  $(n \times n)$ -матрица с элементами  $a_{ij}(t) \in C(I)$ ,  $\mathbf{f}(t)$  — вектор-функция с компонентами  $f_i(t) \in C(I)$ .

**Теорема 1 (Структура общего решения).**

Пусть  $\mathbf{x}_{\text{оо}}(t)$  — общее решение однородной системы ( $\mathbf{f} \equiv 0$ ), а  $\mathbf{x}_{\text{чн}}(t)$  — некоторое частное решение неоднородной системы (1). Тогда общее решение неоднородной системы имеет вид:

$$\mathbf{x}_{\text{оп}}(t) = \mathbf{x}_{\text{оо}}(t) + \mathbf{x}_{\text{чн}}(t).$$

**Теорема 2 (Пространство решений однородной системы).**

Множество решений однородной системы  $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$  образует  $n$ -мерное линейное векторное пространство над  $\mathbb{R}$ .



**Следствие:** Существует набор из  $n$  линейно независимых решений  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ , называемый фундаментальной системой решений (ФСР). Любое решение  $\mathbf{x}(t)$  однородной системы единственным образом представляется в виде:

$$\mathbf{x}(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \dots + C_n\varphi_n(t), \quad C_i \in \mathbb{R}.$$

**Определение (Фундаментальная матрица).**

Матрица  $\Phi(t)$ , столбцами которой являются векторы ФСР, называется фундаментальной матрицей системы.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

При этом  $\Phi(t)$  удовлетворяет матричному уравнению:

$$\frac{d\Phi}{dt} = A(t)\Phi(t),$$

а общее решение однородной системы в матричной форме:  $\mathbf{x}_{\text{оо}}(t) = \Phi(t)\mathbf{C}$ , где  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_n)^T$ .

**Определитель Вронского (Вронскиан) системы:**

$$W(t) = \det \Phi(t).$$

**Теорема 3 (Формула Лиувилля-Остроградского).**

Вронскиан решений однородной системы удовлетворяет уравнению:

$$\frac{dW}{dt} = \text{tr}(A(t)) \cdot W(t), \quad \text{где } \text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t).$$

Отсюда:

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr } A(\tau) d\tau\right).$$

Важный вывод: Для решений однородной системы вронскиан либо тождественно равен нулю (если решения линейно зависимы), либо никогда не обращается в нуль (если они образуют ФСР).

## Часть 2: Решение однородных систем с постоянной матрицей ( $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ )

Метод основан на поиске решений вида  $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ , где  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  — постоянный вектор. Подстановка в систему приводит к задаче на собственные значения:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Алгоритм (Построение ФСР):

Шаг 1. Найти собственные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  матрицы  $A$  и их алгебраические кратности  $k_1, \dots, k_s$  ( $\sum k_i = n$ ).

Шаг 2. Для каждого собственного числа  $\lambda$  построить систему из  $k = \text{алг. кратности}(\lambda)$  линейно независимых решений.

Случай 2.1:  $\lambda$  — действительное, простое (кратность 1).

- Найти собственный вектор  $\mathbf{v}$ , соответствующий  $\lambda$ :  $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .
- Решение:  $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ .

Случай 2.2:  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  — комплексно-сопряжённая пара (каждое простое).

- Для  $\lambda = \alpha + i\beta$  найти комплексный собственный вектор  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + i\mathbf{w}$ .
- Построить два действительных линейно независимых решения:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= e^{\alpha t}(\mathbf{u} \cos \beta t - \mathbf{w} \sin \beta t), \\ \mathbf{x}_2(t) &= e^{\alpha t}(\mathbf{u} \sin \beta t + \mathbf{w} \cos \beta t). \end{aligned}$$

Случай 2.3:  $\lambda$  — действительное (или комплексное) число алгебраической кратности  $k > 1$  (кратный корень).

Этот случай требует построения жордановых цепочек (присоединённых векторов).

Пусть для собственного числа  $\lambda$  его геометрическая кратность (число линейно независимых собственных векторов) равна  $g$ , и  $g < k$ . Каждому собственному вектору соответствует жорданова цепочка длины  $m$ , где  $1 \leq m \leq k$ . Сумма длин всех цепочек для данного  $\lambda$  равна  $k$ .

Общий вид решения, соответствующего жордановой цепочке длины  $m$ , начинающейся с собственного вектора  $\mathbf{h}_0$ :

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \left[ \mathbf{h}_0 + t\mathbf{h}_1 + \frac{t^2}{2!}\mathbf{h}_2 + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\mathbf{h}_{m-1} \right],$$

где векторы  $\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{m-1}$  удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} (A - \lambda I)\mathbf{h}_0 = 0 & (\text{собственный вектор}), \\ (A - \lambda I)\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_0, \\ (A - \lambda I)\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_1, \\ \dots \\ (A - \lambda I)\mathbf{h}_{m-1} = \mathbf{h}_{m-2}. \end{cases}$$

Векторы  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{m-1}$  называются присоединёнными векторами. На практике их находят последовательным решением цепочки неоднородных линейных систем (причём разрешимость гарантирована структурой жордановой формы).

Замечание: Если для  $\lambda$  кратности  $k$  существует ровно  $k$  линейно независимых собственных векторов (т.е.  $g = k$ ), то все решения имеют вид  $e^{\lambda t}\mathbf{v}_i$ , и присоединённые векторы не нужны. Это случай диагонализируемой матрицы.

Пример 1 (Разные типы собственных чисел):

Решить систему:  $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ .

1. Характеристическое уравнение:  $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ . Корни:  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$  (действительные, простые).
2. Для  $\lambda_1 = 2$ :  $(A - 2I)\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = (2, -1)^T$ . Решение:  $\mathbf{x}_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .
3. Для  $\lambda_2 = 3$ :  $(A - 3I)\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = (1, -1)^T$ . Решение:  $\mathbf{x}_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .
4. Общее решение:  $\mathbf{x}(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

## Пример 2 (Кратный корень с недостатком собственных векторов):

Решить систему:  $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ .

1. Хар. уравнение:  $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$ . Корень  $\lambda = 2$  кратности  $k = 2$ .
2. Находим собственные векторы:  $(A - 2I)\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0$ . Ранг матрицы 1, пространство собственных векторов одномерно.  
Базисный вектор:  $\mathbf{h}_0 = (1, 1)^T$ .  $g = 1 < k = 2$ , нужен присоединённый вектор.
3. Ищем  $\mathbf{h}_1$  из системы:  $(A - 2I)\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_0$ , т.е.  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Одно из решений:  $\mathbf{h}_1 = (1, 0)^T$  (можно взять  $(0, -1)^T$  и т.д.).
4. Строим два линейно независимых решения:

- $\mathbf{x}_1(t) = e^{2t}\mathbf{h}_0 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- $\mathbf{x}_2(t) = e^{2t}(\mathbf{h}_0 t + \mathbf{h}_1) = e^{2t} \left( t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix}$ .

5. Общее решение:  $\mathbf{x}(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix}$ .

## Часть 3: Решение неоднородных систем ( $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$ )

Метод 1: Вариация произвольных постоянных (метод Лагранжа) — универсальный.

Алгоритм:

1. Найти фундаментальную матрицу  $\Phi(t)$  соответствующей однородной системы.
2. Искать частное решение неоднородной системы в виде  $\mathbf{x}_{\text{чн}}(t) = \Phi(t)\mathbf{C}(t)$ , где  $\mathbf{C}(t)$  — неизвестная вектор-функция.
3. Подстановка в исходную систему приводит к уравнению:

$$\frac{d\mathbf{x}_{\text{чн}}}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}\mathbf{C}(t) + \Phi(t)\frac{d\mathbf{C}}{dt} = A\Phi(t)\mathbf{C}(t) + \Phi(t)\frac{d\mathbf{C}}{dt}.$$

Учитывая, что  $\frac{d\Phi}{dt} = A\Phi$ , получаем:

$$A\Phi\mathbf{C} + \Phi\frac{d\mathbf{C}}{dt} = A(\Phi\mathbf{C}) + \mathbf{f}(t) \Rightarrow \Phi(t)\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \mathbf{f}(t).$$

Так как  $\det \Phi(t) \neq 0$ , то  $\Phi^{-1}(t)$  существует. Следовательно:

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t) \Rightarrow \mathbf{C}(t) = \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt + \mathbf{C}_0.$$

4. Общее решение неоднородной системы:

$$\mathbf{x}_{\text{он}}(t) = \Phi(t)\mathbf{C}_0 + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt.$$

Первое слагаемое — общее однородное, второе — частное неоднородное (при  $\mathbf{C}_0 = 0$ ).

**Формула Коши (решение задачи с начальным условием  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ):**

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau.$$

**Метод 2: Метод неопределённых коэффициентов — для специального вида  $\mathbf{f}(t)$ .**

Применим, если  $\mathbf{f}(t)$  — квазиполином, т.е. функция вида:

$$\mathbf{f}(t) = e^{\alpha t} [\mathbf{P}_m(t) \cos \beta t + \mathbf{Q}_l(t) \sin \beta t],$$

где  $\mathbf{P}_m(t)$ ,  $\mathbf{Q}_l(t)$  — вектор-многочлены степеней  $m$  и  $l$  соответственно.

**Алгоритм:**

1. Записать характеристическое число  $s = \alpha + i\beta$ .
2. Определить его кратность  $r$  как корня характеристического уравнения  $\det(A - \lambda I) = 0$  (кратность  $r = 0$ , если не корень).
3. Частное решение искать в виде:

$$\mathbf{x}_{\text{чи}}(t) = t^r e^{\alpha t} [\tilde{\mathbf{P}}_k(t) \cos \beta t + \tilde{\mathbf{Q}}_k(t) \sin \beta t],$$

где  $k = \max(m, l)$ , а  $\tilde{\mathbf{P}}_k(t)$ ,  $\tilde{\mathbf{Q}}_k(t)$  — вектор-многочлены степени  $k$  с неопределёнными скалярными коэффициентами.

Например, для  $k = 1$ :  $\tilde{\mathbf{P}}_1(t) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 t$ ,  $\tilde{\mathbf{Q}}_1(t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 t$ , где  $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i$  — неизвестные векторы-столбцы.

4. Подставить  $\mathbf{x}_{\text{чи}}(t)$  и его производную в исходную систему. Используя линейную независимость функций  $e^{\alpha t} \cos \beta t$ ,  $e^{\alpha t} \sin \beta t$ ,  $te^{\alpha t} \cos \beta t$  и т.д., получить систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов векторов  $\tilde{\mathbf{P}}_k$  и  $\tilde{\mathbf{Q}}_k$ .
5. Решить эту систему и найти коэффициенты.

### Пример 3 (Метод неопределённых коэффициентов):

Решить систему:  $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ .

1. Однородная часть. Хар. уравнение:  $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ , корни  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 3$ .

- $\lambda_1 = -1$ : собств. вектор  $\mathbf{v}_1 = (1, -2)^T$ .
- $\lambda_2 = 3$ : собств. вектор  $\mathbf{v}_2 = (1, 2)^T$ .
- ФМ:  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -2e^{-t} & 2e^{3t} \end{pmatrix}$ , общее однородное:  $\mathbf{x}_{\text{оо}} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

2. Правая часть  $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Здесь  $\alpha = 1, \beta = 0, s = 1$ . Степени многочленов:  $m = 0, l = 0, k = 0$ .

Число  $s = 1$  не является корнем характеристического уравнения ( $r = 0$ ). Ищем частное решение в виде:

$$\mathbf{x}_{\text{чи}}(t) = e^t \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \text{const.}$$

3. Подставляем в систему:  $\frac{d}{dt}(e^t \mathbf{a}) = e^t \mathbf{a} = A(e^t \mathbf{a}) + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ . Сокращаем  $e^t \neq 0$ :

$$\mathbf{a} = A\mathbf{a} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} a_1 = a_1 + a_2 + 1, \\ a_2 = 4a_1 + a_2 + 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = a_2 + 1, \\ 0 = 4a_1. \end{cases} \Rightarrow a_2 = -1, \quad a_1 = 0.$$

4. Итак,  $\mathbf{x}_{\text{чи}}(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

5. Общее решение:  $\mathbf{x}(t) = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

## Часть 4: Связь с уравнениями высшего порядка

Любое линейное уравнение  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = f(t)$$

эквивалентно системе  $n$  уравнений первого порядка с помощью стандартной замены:

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad \dots, \quad x_n = y^{(n-1)}.$$

Тогда:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \dots - a_1(t)x_n + f(t). \end{cases}$$

Матрица этой системы — матрица Фробениуса (сопровождающая матрица). Для уравнения с постоянными коэффициентами её характеристическое уравнение совпадает с характеристическим уравнением исходного уравнения. Это даёт ещё один способ решения систем специального вида.

## Резюме и общий алгоритм действий

### При получении линейной системы:

1. Классифицируйте: однородная/неоднородная, постоянные/переменные коэффициенты.
2. Для однородной системы с постоянной матрицей  $A$ :
  - Найдите собственные числа  $\lambda_i$  матрицы  $A$ .
  - Для каждого  $\lambda_i$  постройте соответствующее число линейно независимых решений, учитывая его алгебраическую и геометрическую кратность. Используйте жордановы цепочки для кратных корней.
  - Общее решение — линейная комбинация построенных решений.
3. Для неоднородной системы с постоянной матрицей  $A$ :
  - Если  $\mathbf{f}(t)$  — квазиполином, используйте метод неопределённых коэффициентов (быстрее).
  - Если  $\mathbf{f}(t)$  имеет произвольный вид или метод неопределённых коэффициентов сложен, используйте метод вариации постоянных (формулу Коши). Для этого предварительно найдите ФМ  $\Phi(t)$  однородной системы.
4. Для систем с переменными коэффициентами: в общем случае метод вариации постоянных — основной инструмент, но требуется знать ФСР однородной системы, что является отдельной сложной задачей.

### Пример 4 (Комплексная задача, объединяющая методы):

Решить задачу Коши:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cos t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение по шагам:

1. Однородная система:  $\dot{\mathbf{x}}_h = A\mathbf{x}_h$ .

- Хар. уравнение:  $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm i$ .
- Для  $\lambda = -1 + i$  находим собственный вектор:  $(A - (-1 + i)I)\mathbf{v} = 0$ .

$$\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1-i)v_1 + v_2 = 0.$$

$$\text{Берём } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}}.$$

- Два действительных решения:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(t) &= e^{-t}(\mathbf{u} \cos t - \mathbf{w} \sin t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_2(t) &= e^{-t}(\mathbf{u} \sin t + \mathbf{w} \cos t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\sin t + \cos t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

- Фундаментальная матрица:

$$\Phi(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\cos t - \sin t & -\sin t + \cos t \end{pmatrix}.$$

Проверим вронскиан:  $\det \Phi(t) = e^{-2t}[(\cos t)(-\sin t + \cos t) - (\sin t)(-\cos t - \sin t)] = e^{-2t}(\cos^2 t + \sin^2 t) = e^{-2t} \neq 0$ .

- Общее однородное:  $\mathbf{x}_h(t) = \Phi(t)\mathbf{C}$ .

2. Частное решение неоднородной системы. Правая часть:  $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cos t \end{pmatrix} = e^{0t} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t \right]$ .

- $\alpha = 0, \beta = 1$ , характеристическое число  $s = i$ .
- Проверим, является ли  $s = i$  корнем характеристического уравнения:  $\lambda = i$ . Подставляем:  $i^2 + 2i + 2 = -1 + 2i + 2 = 1 + 2i \neq 0$ . Значит, не является ( $r = 0$ ).
- Степени многочленов:  $m = 0, l = 0, k = 0$ . Ищем решение в виде:

$$\mathbf{x}_{\text{чп}}(t) = \mathbf{a} \cos t + \mathbf{b} \sin t, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

- Находим производную:  $\dot{\mathbf{x}}_{\text{чп}} = -\mathbf{a} \sin t + \mathbf{b} \cos t$ .
- Подставляем в систему  $\dot{\mathbf{x}}_{\text{чп}} = A\mathbf{x}_{\text{чп}} + \mathbf{f}(t)$ :  

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{\text{чп}} &= \mathbf{a} \sin t + \mathbf{b} \cos t = A(\mathbf{a} \cos t + \mathbf{b} \sin t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cos t. \\ \mathbf{a} \sin t + \mathbf{b} \cos t &= A(\mathbf{a} \cos t + \mathbf{b} \sin t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cos t. \end{aligned}$$
- Приравняем коэффициенты при  $\cos t$  и  $\sin t$  отдельно:  

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \sin t + \mathbf{b} \cos t &= A(\mathbf{a} \cos t + \mathbf{b} \sin t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cos t. \\ \mathbf{a} \sin t + \mathbf{b} \cos t &= A(\mathbf{a} \cos t + \mathbf{b} \sin t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cos t. \end{aligned}$$
- Распишем покомпонентно (система 4 уравнения):  
Из первого векторного уравнения ( $\mathbf{b} = A\mathbf{a} + (0, 2)^T$ ):

$$\begin{cases} b_1 = a_2 \\ b_2 = -2a_1 - 2a_2 + 2 \end{cases}$$

Из второго ( $-\mathbf{a} = A\mathbf{b}$ ):

- $$\begin{aligned} \mathbf{a} &= -A\mathbf{b} \\ \mathbf{a} &= -A\mathbf{b} \end{aligned}$$
- Решаем: из  $b_1 = a_2$  и  $-a_2 = -2b_1 - 2b_2 \Rightarrow a_2 = 2b_1 + 2b_2 = 2a_2 + 2b_2 \Rightarrow -a_2 = 2b_2 \Rightarrow b_2 = -a_2/2$ .

Из  $-a_1 = b_2 = -a_2/2 \Rightarrow a_1 = a_2/2$ .

Подставляем  $b_2 = -a_2/2$  в  $b_2 = -2a_1 - 2a_2 + 2$ :  $-\frac{a_2}{2} = -2\left(\frac{a_2}{2}\right) - 2a_2 + 2 = -a_2 - 2a_2 + 2 = -3a_2 + 2$ .

Получаем:  $-\frac{a_2}{2} = -3a_2 + 2 \Rightarrow -\frac{a_2}{2} + 3a_2 = 2 \Rightarrow \frac{5}{2}a_2 = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{4}{5}$ .

Тогда  $a_1 = \frac{a_2}{2} = \frac{2}{5}$ ,  $b_1 = a_2 = \frac{4}{5}$ ,  $b_2 = -\frac{a_2}{2} = -\frac{2}{5}$ .

- Итак:  $\mathbf{x}_{\text{чп}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \sin t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \cos t + 4 \sin t \\ 4 \cos t - 2 \sin t \end{pmatrix}$ .

- 3. Общее решение неоднородной системы:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{C} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \cos t + 4 \sin t \\ 4 \cos t - 2 \sin t \end{pmatrix}.$$

4. Находим  $\mathbf{C}$  из начального условия  $\mathbf{x}(0) = (1, 0)^T$ :

$$\mathbf{x}(0) = \Phi(0)\mathbf{C} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Phi(0) = e^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Тогда:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}.$$

Решаем:  $C_1 = 3/5$ ,  $-C_1 + C_2 = -4/5 \Rightarrow -3/5 + C_2 = -4/5 \Rightarrow C_2 = -1/5$ .

Итак,  $\mathbf{C} = (3/5, -1/5)^T$ .

5. Окончательное решение задачи Коши:

Подставляем  $\mathbf{C}$  в общее решение:

$$\mathbf{x}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\cos t - \sin t & -\sin t + \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \cos t + 4 \sin t \\ 4 \cos t - 2 \sin t \end{pmatrix}.$$

После умножения и сложения получаем явный ответ (здесь его можно оставить в компактной форме или упростить).

Этот пример демонстрирует полный цикл работы с линейной системой: от построения ФСР однородной системы через комплексные собственные числа до применения метода неопределённых коэффициентов и удовлетворения начальным условиям.

## Полный алгоритмический справочник по курсу дифференциальных уравнений

### I. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

#### A. Линейные уравнения n-го порядка

Общий вид:  $y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = f(t)$

Алгоритм 1: Решение однородного уравнения (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами

1. Составить характеристическое уравнение:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

2. Найти корни  $\lambda_i$  и их кратности  $k_i$

3. Построить ФСР:

- Простой действительный корень  $\lambda$ :  $e^{\lambda t}$
- Действительный корень  $\lambda$  кратности  $k$ :  $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}$
- Простые комплексные  $\alpha \pm i\beta$ :  $e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t$
- Кратные комплексные  $\alpha \pm i\beta$  кратности  $k$ :  $e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t, te^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{k-1}e^{\alpha t} \cos \beta t, t^{k-1}e^{\alpha t} \sin \beta t$

4. Общее решение:  $y_{\text{оо}}(t) = C_1 y_1(t) + \dots + C_n y_n(t)$

Алгоритм 2: Решение неоднородного уравнения (ЛНДУ) — метод неопределённых коэффициентов

Применим для:  $f(t) = e^{\alpha t}[P_m(t) \cos \beta t + Q_l(t) \sin \beta t]$

1. Определить число  $s = \alpha + i\beta$

2. Найти кратность  $r$  корня  $s$  в характеристическом уравнении ( $r = 0$  если не корень)

3. Искать частное решение:

$$y_{\text{чн}}(t) = t^r e^{\alpha t} [\tilde{P}_k(t) \cos \beta t + \tilde{Q}_k(t) \sin \beta t]$$

где  $k = \max(m, l)$ ,  $\tilde{P}_k, \tilde{Q}_k$  — многочлены степени  $k$  с неопределёнными коэффициентами

4. Подставить в уравнение  $\rightarrow$  приравнять коэффициенты  $\rightarrow$  найти коэффициенты

5. Общее решение:  $y_{\text{ор}}(t) = y_{\text{оо}}(t) + y_{\text{чн}}(t)$

Алгоритм 3: Метод вариации постоянных (универсальный)

1. Найти ФСР  $y_1, \dots, y_n$  однородного уравнения

2. Искать решение в виде:  $y_{\text{чн}}(t) = C_1(t)y_1(t) + \dots + C_n(t)y_n(t)$

3. Решить систему для  $C'_i(t)$ :

$$\begin{cases} C_1' y_1 + \dots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + \dots + C_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(t) \end{cases}$$

4. Проинтегрировать  $C_i'(t)$

Б. Линейные системы первого порядка

Общий вид:  $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Алгоритм 4: Решение однородной системы с постоянной матрицей

1. Найти собственные числа  $\lambda_i$  матрицы  $A$
2. Для каждого  $\lambda$  построить решения:

Случай А: Простой действительный  $\lambda$

- Найти собственный вектор  $\mathbf{v}$ :  $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$
- Решение:  $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$

Случай В: Простые комплексные  $\lambda = \alpha \pm i\beta$

- Для  $\lambda = \alpha + i\beta$  найти комплексный собственный вектор  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + i\mathbf{w}$
- Два действительных решения:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= e^{\alpha t}(\mathbf{u} \cos \beta t - \mathbf{w} \sin \beta t) \\ \mathbf{x}_2 &= e^{\alpha t}(\mathbf{u} \sin \beta t + \mathbf{w} \cos \beta t) \end{aligned}$$

Случай С: Кратный корень  $\lambda$  кратности  $k$

- Найти собственные и присоединённые векторы из цепочки:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)\mathbf{h}_0 &= 0 \text{ (собственный)} \\ (A - \lambda I)\mathbf{h}_1 &= \mathbf{h}_0 \text{ (присоединённый)} \end{aligned}$$

...

- Решение:  $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}[\mathbf{h}_0 + t\mathbf{h}_1 + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\mathbf{h}_{m-1}]$

3. Общее решение:  $\mathbf{x}_{\text{оо}}(t) = \Phi(t)\mathbf{C}$ , где  $\Phi(t)$  — фундаментальная матрица

## Алгоритм 5: Решение неоднородной системы — метод вариации постоянных

1. Найти фундаментальную матрицу  $\Phi(t)$  однородной системы
2. Частное решение:  $\mathbf{x}_{\text{чМ}}(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt$
3. Формула Коши (с начальным условием  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ):

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau$$

## Алгоритм 6: Метод неопределённых коэффициентов для систем

Применим для:  $\mathbf{f}(t) = e^{\alpha t}[\mathbf{P}_m(t) \cos \beta t + \mathbf{Q}_l(t) \sin \beta t]$

1. Определить  $s = \alpha + i\beta$  и его кратность  $r$  как собственного числа матрицы  $A$
2. Искать частное решение:

$$\mathbf{x}_{\text{чМ}}(t) = t^r e^{\alpha t}[\hat{\mathbf{P}}_k(t) \cos \beta t + \hat{\mathbf{Q}}_k(t) \sin \beta t]$$

где  $k = \max(m, l)$ ,  $\hat{\mathbf{P}}_k, \hat{\mathbf{Q}}_k$  — вектор-многочлены степени  $k$

3. Подставить в систему  $\rightarrow$  решить линейную систему для коэффициентов

## II. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ И ОСОБЫХ ТОЧЕК

### А. Основные определения

Автономная система:  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Положение равновесия:  $\mathbf{x}_0$  такое, что  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$

Устойчивость по Ляпунову:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon \forall t \geq 0$$

Асимптотическая устойчивость: устойчивость +  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| = 0$

Алгоритм 7: Исследование устойчивости (первый метод Ляпунова)

- 1. Найти положения равновесия:  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$
- 2. Вычислить матрицу Якоби:

$$A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}_0}$$

- 3. Найти собственные числа  $\lambda_i$  матрицы  $A$
- 4. Критерий:
  - Если  $\text{Re } \lambda_i < 0$  для всех  $i \rightarrow$  асимптотически устойчиво
  - Если  $\exists \lambda_k : \text{Re } \lambda_k > 0 \rightarrow$  неустойчиво
  - Если  $\exists \lambda_i : \text{Re } \lambda_i = 0$  (критический случай)  $\rightarrow$  требуется второй метод Ляпунова

Алгоритм 8: Классификация особых точек на плоскости (n=2)

Для системы:  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \det A \neq 0$

Обозначения:  $p = -\text{tr } A, q = \det A, D = p^2 - 4q$

- 1. Вычислить  $p, q, D$
- 2. Классификация:

Условия	Тип точки	Устойчивость
$q < 0$	Седло	Неустойчиво
$q > 0, p > 0, D > 0$	Устойчивый узел	Асимптотически устойчиво
$q > 0, p < 0, D > 0$	Неустойчивый узел	Неустойчиво

Условия	Тип точки	Устойчивость
$q > 0, p > 0, D < 0$	Устойчивый фокус	Асимптотически устойчиво
$q > 0, p < 0, D < 0$	Неустойчивый фокус	Неустойчиво
$q > 0, p = 0$	Центр	Устойчиво (не асимптотически)
$q > 0, p > 0, D = 0$	Дикритический/вырожденный узел	Асимптотически устойчиво

Алгоритм 9: Второй метод Ляпунова (прямой метод)

Используется в критических случаях

- 1. Найти функцию Ляпунова  $V(\mathbf{x})$  такую, что:
  - $V(\mathbf{x}) > 0$  при  $\mathbf{x} \neq 0, V(0) = 0$
  - $\dot{V}(\mathbf{x}) = \nabla V \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0$  (в силу системы)
- 2. Критерии:
  - Если такая  $V$  существует  $\rightarrow$  устойчиво
  - Если  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  при  $\mathbf{x} \neq 0 \rightarrow$  асимптотически устойчиво
  - Если  $\ddot{V}(\mathbf{x}) > 0 \rightarrow$  неустойчиво

III. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Постановка задачи:

$$\frac{dg}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0, T]$$



Сетка:  $t_k = t_0 + kh, h = \frac{T-t_0}{N}, k = 0, 1, \dots, N$

Алгоритм 10: Явный метод Эйлера

$$y[\theta] = y\theta$$

for  $k = \theta$  to  $N - 1$ :

$$y[k + 1] = y[k] + h * f(t[k], y[k])$$

Точность:  $O(h)$

Устойчивость: Условная. Для  $y' = \lambda y$ :  $|1 + h\lambda| < 1$

Алгоритм 11: Неявный метод Эйлера

$$y[\theta] = y\theta$$

for  $k = \theta$  to  $N - 1$ :

Решить уравнение:  $y[k + 1] = y[k] + h * f(t[k + 1], y[k + 1])$

(Итерационно или методом Ньютона)

Точность:  $O(h)$

Устойчивость: Абсолютная (для  $\lambda < 0$  устойчив при любом  $h > 0$ )

Алгоритм 12: Модифицированный метод Эйлера (RK2)

Вариант 1 — средняя точка:

$$y[\theta] = y\theta$$

for  $k = \theta$  to  $N - 1$ :

$$k1 = h * f(t[k], y[k])$$

$$y[k + 1] = y[k] + h * f(t[k] + h/2, y[k] + k1/2)$$

Вариант 2 — Эйлер-Коши (прогноз-коррекция):

$$y[0] = y_0$$

for k = 0 to N-1:

$$y\_pred = y[k] + h * f(t[k], y[k]) \text{ ### Прогноз}$$

$$y[k+1] = y[k] + h/2 * (f(t[k], y[k]) +$$

$$f(t[k+1], y\_pred)) \text{ ### Коррекция}$$

Точность:  $O(h^2)$

Алгоритм 13: Метод Рунге-Кутты 4-го порядка (RK4)

$$y[0] = y_0$$

for k = 0 to N-1:

$$k1 = h * f(t[k], y[k])$$

$$k2 = h * f(t[k] + h/2, y[k] + k1/2)$$

$$k3 = h * f(t[k] + h/2, y[k] + k2/2)$$

$$k4 = h * f(t[k] + h, y[k] + k3)$$

$$y[k+1] = y[k] + (k1 + 2k2 + 2k3 + k4)/6$$

Точность:  $O(h^4)$

Алгоритм 14: Численное решение систем ОДУ

Для системы:  $\hat{y} = f(t, y), y \in \mathbb{R}^m$

Метод Эйлера для систем:

$y[0] = y_0$

for k = 0 to N-1:

$y[k+1] = y[k] + h * f(t[k], y[k])$

(все операции — покомпонентно)

Метод RK4 для систем:  $k_1, k_2, k_3, k_4$  — векторы, формулы те же.

IV. БЫСТРАЯ ШПАРГАЛКА ПО ВЫБОРУ МЕТОДА

Для аналитического решения:

Тип задачи	Метод
ЛОДУ с постоянными коэффициентами	Характеристическое уравнение
ЛНДУ с квазиполиномиальной правой частью	Метод неопределённых коэффициентов
ЛНДУ с произвольной правой частью	Метод вариации постоянных
Система с постоянной матрицей	Собственные числа и векторы
Система с переменными коэффициентами	Метод вариации постоянных (если известна ФСР)

Для анализа устойчивости:

- 1. Найти положения равновесия
- 2. Линеаризовать → матрица Якоби
- 3. Собственные числа → критерий устойчивости
- 4. Для плоскости → классификация по  $p, q, D$

Для численного решения:

Ситуация	Рекомендуемый метод
Учебные задачи, простота	Явный метод Эйлера
Жесткие системы	Неявный метод Эйлера
Баланс точности и простоты	RK2 (модифицированный Эйлер)
Высокая точность, нежесткие системы	RK4

Проверка численного метода:

- 1. Уменьшить шаг  $h$  в 2 раза
- 2. Сравнить решения → оценить погрешность
- 3. Проверить устойчивость (решение не должно "взрываться")

Ключевые формулы для запоминания:

- 1. Характеристическое уравнение:  $\det(A - \lambda I) = 0$
- 2. Формула Лиувилля:  $W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr } A(\tau) d\tau\right)$
- 3. Формула Коши:  $x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)f(\tau) d\tau$
- 4. Классификация на плоскости:  $p = -\text{tr } A, q = \det A$
- 5. Условие устойчивости явного Эйлера:  $|1 + h\lambda| < 1$

Этот справочник содержит все необходимые алгоритмы для решения основных задач курса дифференциальных уравнений. Каждый алгоритм представлен в виде пошаговой инструкции, которую можно непосредственно применять на практике.