ЧАСТЬ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ТИПА (Face Control)

Чтобы понять, с чем вы имеете дело, анализируйте уравнение в следующем порядке:

1. **Это СИСТЕМА?** (наличие фигурных скобок).
   - Вид $\dot{x} = Ax$ или $\dot{x} = Ax + f(t) \to$ **№13 Система линейных уравнений**.
   - Если нужно найти $e^{At} \to$ **№20 Экспонента от матрицы**.
   - Сложная нелинейная система или вид $dx/P = dy/Q = dz/R \to$ **№16 Метод интегрируемых комбинаций**.
2. **Это ОДНО УРАВНЕНИЕ. Какой порядок?** (ищем максимальную производную).
   - **Порядок выше 1-го ($y'', y''' \dots$):**
     - Нет y (только x, y', y'') или нет x (только y, y', y'') $\to$ **№7 Сводящиеся к 1-ому порядку (понижение)**.
     - Линейное с числами перед $y^{(k)} \to$ **№11, 12 Линейное с постоянными коэффициентами**.
     - Перед $y^{(k)}$ стоит x^k (например, x^2y'') $\to$ **№9 Уравнение Эйлера**.
     - Коэффициенты зависят от x (и не Эйлер) $\to$ **№14 Уравнение 2-ого порядка с непостоянными коэффициентами**.
   - **Порядок 1-й (y' или dy, dx):**
     - $y' = f(y/x)$ или все слагаемые одной степени $\to$ **№1 Однородное 1-ого порядка**.
     - $y' + P(x)y = Q(x) \to$ **№2 Линейное 1-ого порядка**.
     - $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ $(n \neq 0, 1) \to$ **№8 Уравнение Бернулли**.
     - $Pdx + Qdy = 0$ и $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x \to$ **№3 Уравнение в полных дифференциалах**.
     - Нельзя выразить y' (оно в синусе, логарифме или степени) $\to$ **№6 Не разрешённое относительно производной**.
3. **Специальные условия:**
   - Дано $y(x_0) = y_0 \to$ **№5 Задача Коши**.
   - Условия в двух точках $y(0) = a, y(1) = b \to$ **№15 Краевая задача**.
   - Слова «исследовать на устойчивость» $\to$ **№17 Устойчивость**.

ЧАСТЬ 2. ПАРАГРАФЫ С РЕШЕНИЕМ И РАЗБОРОМ

1. Однородное 1-ого порядка

Признак: $y' = f(y/x)$ или $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, где M, N — однородные функции одной степени.

Алгоритм:

1. Замена $y = ux$, тогда $y' = u'x + u$
2. Подставляем: $u'x + u = f(u)$
3. Разделяем переменные: $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$
4. Интегрируем обе части
5. Возвращаемся к $y = ux$

Пример: $y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$

- Замена $u = y/x$: $u'x + u = u + \tan u$
- $u'x = \tan u \to \cos u\, du = \frac{dx}{x}$
- Ответ: $\sin(y/x) = C|x|$

2. Линейное 1-ого порядка

Вид: $y' + P(x)y = Q(x)$

Алгоритм (метод $y = uv$):

1. Подстановка $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$
2. Получаем: $u'v + u(v' + Pv) = Q$
3. Выбираем v так, чтобы $v' + Pv = 0 \to v = e^{-\int P\,dx}$
4. Тогда $u' = \frac{Q}{v} \to u = \int \frac{Q}{v}\,dx + C$

5. Ответ: $y = uv$

Формула общего решения:

$$y = e^{-\int P\,dx} \left(\int Q \cdot e^{\int P\,dx}\,dx + C \right)$$

Пример: $y' + \frac{y}{x} = x^2$

- $P = 1/x, Q = x^2$
- $e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$
- $y = \frac{1}{x} \left(\int x^2 \cdot x\,dx + C \right) = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}$

3. Уравнение в полных дифференциалах

Признак: $Pdx + Qdy = 0$, где $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Алгоритм:

1. Проверить условие полного дифференциала
2. Искать потенциал $U(x, y)$: $U = \int P\,dx + \varphi(y)$
3. Дифференцировать по y: $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$
4. Найти $\varphi'(y)$ и проинтегрировать
5. Ответ: $U(x, y) = C$

Пример: $(2xy + 3)dx + (x^2 + 4y)dy = 0$

- Проверка: $P'_y = 2x$, $Q'_x = 2x$ ✓
- $U = \int(2xy + 3)dx = x^2y + 3x + \varphi(y)$
- $U'_y = x^2 + \varphi'(y) = x^2 + 4y \to \varphi(y) = 2y^2$
- Ответ: $x^2y + 3x + 2y^2 = C$

4. Интегрирующий множитель

Суть: Если уравнение не в полных дифференциалах, умножаем на μ, чтобы стало.

Алгоритм:

1. Вычислить $\frac{P'_y - Q'_x}{Q}$. Если зависит только от x:

$$\mu = e^{\int \frac{P'_y - Q'_x}{Q}\,dx}$$

2. Вычислить $\frac{Q'_x - P'_y}{P}$. Если зависит только от y:

$$\mu = e^{\int \frac{Q'_x - P'_y}{P}\,dy}$$

3. Умножить уравнение на μ и решить как тип №3

Частные случаи:

- $\mu = x^n y^m$ — подбор по виду уравнения
- $\mu = \mu(x)$ или $\mu = \mu(y)$ — по формулам выше

5. Задача Коши

Алгоритм:

1. Найти общее решение $y = f(x, C)$
2. Подставить $y(x_0) = y_0$

3. Найти конкретное C
4. Записать частное решение

Теорема существования и единственности:
Если $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны в окрестности (x_0, y_0), то ∃! решение задачи Коши.

6. Не разрешённое относительно производной

Вид: $F(x, y, y') = 0$

Алгоритм (параметризация):

1. Ввести параметр $p = y'$
2. Если можно выразить $y = f(x, p)$:
   - Дифференцируем по x: $\frac{dy}{dx} = p$
   - Получаем $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} = p$
   - Решаем относительно $p(x)$
3. Ответ в параметрическом виде: $\{x = x(p), y = y(p)\}$

Уравнение Клеро: $y = xy' + \varphi(y')$

- Общее решение: $y = Cx + \varphi(C)$ (семейство прямых)
- Особое решение: из системы $\{y = xp + \varphi(p), 0 = x + \varphi'(p)\}$ — исключить p

7. Сводящиеся к 1-ому порядку (понижение)

Тип 1: Нет y — только x, y', y''

- Замена: $p = y'(x)$, тогда $y'' = p'$
- Получаем уравнение 1-го порядка относительно $p(x)$
- Затем $y = \int p \, dx$

Тип 2: Нет x — только y, y', y''

- Замена: $p = y'$ как функция y
- Тогда $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$
- Получаем уравнение 1-го порядка относительно $p(y)$
- Затем $x = \int \frac{dy}{p(y)}$

Пример (тип 2): $yy'' = (y')^2$

- Замена: $y'' = p\frac{dp}{dy}$
- $y \cdot p\frac{dp}{dy} = p^2 \to \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$
- $\ln|p| = \ln|y| + C_1 \to p = C_1 y$
- $\frac{dy}{dx} = C_1 y \to y = C_2 e^{C_1 x}$

8. Уравнение Бернулли

Вид: $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, где $n \neq 0, 1$

Алгоритм:

1. Разделить на y^n: $y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x)$
2. Замена: $z = y^{1-n}$, тогда $z' = (1-n)y^{-n}y'$
3. Получаем линейное: $\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x)$
4. Или: $z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$
5. Решаем как тип №2, возвращаемся к y

Пример: $y' + y = xy^3$

- $n = 3$, делим на y^3: $y^{-3}y' + y^{-2} = x$
- Замена $z = y^{-2}$, $z' = -2y^{-3}y'$
- $-\frac{z'}{2} + z = x \to z' - 2z = -2x$
- Решаем линейное...

9. Уравнение Эйлера

Вид: $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$

Алгоритм:

1. Замена: $x = e^t$ (или $t = \ln|x|$ для $x > 0$)
2. Производные преобразуются:
   - $xy' = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$
   - $x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y}$
   - $x^3 y''' = \dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}$
3. Получаем уравнение с постоянными коэффициентами относительно t
4. Решаем как тип №11, возвращаемся к x

Характеристическое уравнение: для $x^2 y'' + axy' + by = 0$:

$$\lambda(\lambda - 1) + a\lambda + b = 0$$

10. Интересная замена

Признак: В уравнении есть $ax + by + c$ под функцией.

Алгоритм:

1. Замена: $z = ax + by + c$
2. Тогда $z' = a + by'$, откуда $y' = \frac{z' - a}{b}$
3. Подставляем и получаем уравнение с разделяющимися переменными

Пример: $y' = (x + y)^2$

- Замена $z = x + y$, $z' = 1 + y'$, $y' = z' - 1$
- $z' - 1 = z^2 \to \frac{dz}{z^2 + 1} = dx$
- $\arctan z = x + C \to \arctan(x + y) = x + C$

11. Линейное уравнение с постоянными коэффициентами (однородное)

Вид: $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$

Алгоритм:

1. Составить характеристическое уравнение: $a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$
2. Найти корни λ_i и их кратности
3. Построить ФСР:

Корень	Решения
λ простой действительный	$e^{\lambda x}$
λ кратности k действительный	$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$
$\alpha \pm i\beta$ простые	$e^{\alpha x} \cos \beta x,\ e^{\alpha x} \sin \beta x$
$\alpha \pm i\beta$ кратности k	$e^{\alpha x} \cos \beta x,\ e^{\alpha x} \sin \beta x,\ xe^{\alpha x} \cos \beta x, \ldots$

4. Общее решение: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$

12. Неоднородное линейное с постоянными коэффициентами

Вид: $a_0 y^{(n)} + \ldots + a_n y = f(x)$

Общее решение: $y_{\text{общ}} = y_{\text{одн}} + y_{\text{частн}}$

Метод подбора (специальная правая часть):

Правая часть $f(x)$	Вид частного решения
$P_m(x)$ — многочлен степени m	$x^s \cdot Q_m(x)$
$e^{\alpha x}$	$x^s \cdot Ae^{\alpha x}$
$e^{\alpha x} P_m(x)$	$x^s \cdot e^{\alpha x} Q_m(x)$
$\cos \beta x$ или $\sin \beta x$	$x^s(A\cos \beta x + B \sin \beta x)$
$e^{\alpha x}(P_m \cos \beta x + Q_l \sin \beta x)$	$x^s e^{\alpha x}(\tilde{P}_k \cos \beta x + \tilde{Q}_k \sin \beta x)$

где s — кратность числа α (или $\alpha \pm i\beta$) как корня характеристического уравнения, $k = \max(m, l)$.

Метод вариации постоянных (любая правая часть):

1. Найти ФСР $y_1, \ldots, y_n$ однородного уравнения
2. Искать $y_{\text{ч}} = C_1(x) y_1 + \ldots + C_n(x) y_n$
3. Решить систему:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x)/a_0 \end{cases}$$

4. Проинтегрировать C_i'

13. Система линейных уравнений

Вид: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ (однородная) или $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$ (неоднородная)

Алгоритм для однородной с постоянной A:

1. Найти собственные числа: $\det(A - \lambda I) = 0$
2. Для каждого λ найти собственный вектор: $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$
3. Построить решения:

Собственное число	Решение
λ простое действительное	$\mathbf{x} = e^{\lambda t}\mathbf{v}$
$\lambda = \alpha \pm i\beta$	$\mathbf{x}_1 = e^{\alpha t}(\mathbf{u}\cos \beta t - \mathbf{w} \sin \beta t)$
	$\mathbf{x}_2 = e^{\alpha t}(\mathbf{u}\sin \beta t + \mathbf{w} \cos \beta t)$
λ кратное (недостаток векторов)	Искать присоединённые: $(A - \lambda I)\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_0$

4. Общее решение: $\mathbf{x} = C_1 \mathbf{x}_1 + C_2 \mathbf{x}_2 + \ldots$

Для неоднородной (метод вариации):

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)\, d\tau$$

14. Уравнение 2-ого порядка с непостоянными коэффициентами

Вид: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

Если известно одно решение y_1 однородного:

Формула Лиувилля-Остроградского:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}\,dx$$

Алгоритм:

1. Угадать частное решение y_1 однородного
2. Найти y_2 по формуле выше
3. Общее однородное: $y_{\text{одн}} = C_1 y_1 + C_2 y_2$
4. Для неоднородного — вариация постоянных

Подсказки для угадывания y_1: Пробовать $y_1 = x^n$, $y_1 = e^{ax}$, $y_1 = \sin x$, $y_1 = \cos x$

15. Краевая задача

Вид: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, $y(a) = A$, $y(b) = B$

Функция Грина $G(x, s)$:

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)\,ds$$

Построение функции Грина:

1. Найти $y_1(x)$ — решение однородного с $y_1(a) = 0$
2. Найти $y_2(x)$ — решение однородного с $y_2(b) = 0$
3. Вычислить вронскиан $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$
4. Функция Грина:

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(s)}{W(s)}, & a \le x \le s \\ \frac{y_1(s)y_2(x)}{W(s)}, & s \le x \le b \end{cases}$$

Теорема об альтернативе: Краевая задача либо имеет единственное решение, либо однородная задача имеет ненулевое решение.

16. Метод интегрируемых комбинаций

Вид: Симметрическая система $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$

Алгоритм:

1. Подбираем множители (α, β, γ) такие, что:

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0$$

2. Тогда $\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz = 0$ — полный дифференциал
3. Интегрируем: $U_1(x, y, z) = C_1$ — первый интеграл
4. Повторяем для второй комбинации: $U_2(x, y, z) = C_2$
5. Ответ: $\{U_1 = C_1, U_2 = C_2\}$

Частые приёмы:

- $(1, 1, 1)$: $dx + dy + dz = d(x + y + z)$
- (x, y, z): $x\,dx + y\,dy + z\,dz = \frac{1}{2}d(x^2 + y^2 + z^2)$
- Сложение/вычитание дробей

17. Устойчивость

Система: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, положение равновесия $\mathbf{x}_0$: $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$

Первый метод Ляпунова (линеаризация):

1. Вычислить матрицу Якоби: $A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$
2. Найти собственные числа λ_i матрицы A
3. Критерий:
   - $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ **для всех** → асимптотически устойчиво
   - $\exists \operatorname{Re}\lambda_k > 0$ → неустойчиво
   - $\exists \operatorname{Re}\lambda_k = 0$ (и нет положительных) → критический случай

Для системы на плоскости: $p = -\operatorname{tr} A$, $q = \det A$, $D = p^2 - 4q$

Условие	Тип точки	Устойчивость
$q < 0$	Седло	Неустойчиво
$q > 0, p > 0, D > 0$	Устойчивый узел	Асимптотически
$q > 0, p > 0, D < 0$	Устойчивый фокус	Асимптотически
$q > 0, p < 0$	Неустойчивый узел/фокус	Неустойчиво
$q > 0, p = 0$	Центр	Критический случай

18. Особые точки

Классификация по собственным числам λ_1, λ_2:

Собственные числа	Тип точки	Фазовый портрет
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Неустойчивый узел	Траектории уходят
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Устойчивый узел	Траектории приходят
$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$	Седло	Гиперболы
$\lambda = \alpha \pm i\beta, \alpha > 0$	Неустойчивый фокус	Спираль наружу
$\lambda = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0$	Устойчивый фокус	Спираль внутрь
$\lambda = \pm i\beta$	Центр	Замкнутые орбиты
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, один вектор	Вырожденный узел	Параболы

19. Особые решения

Определение: Решение, через каждую точку которого проходит другое решение (нарушение единственности).

Алгоритм (p-дискриминанта):

1. Из уравнения $F(x, y, y') = 0$ и условия $F'_{y'}(x, y, y') = 0$
2. Исключить y'
3. Проверить, что результат — решение исходного уравнения

Алгоритм (C-дискриминанта):

1. Из общего решения $\Phi(x, y, C) = 0$ и условия $\Phi'_C(x, y, C) = 0$
2. Исключить C
3. Проверить, что результат — решение

Пример (уравнение Клеро): $y = xy' + (y')^2$

- Общее решение: $y = Cx + C^2$ (прямые)
- $\Phi'_C = x + 2C = 0 \to C = -x/2$
- Особое решение: $y = -\frac{x^2}{4}$ (парабола — огибающая)

20. Экспонента от матрицы

Определение: $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$

Связь с системой: Если $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, то $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$

Вычисление для диагонализируемой $A = SDS^{-1}$:

$$e^{At} = Se^{Dt}S^{-1}, \quad e^{Dt} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$$

Метод расщепления (для жордановой клетки):

Если $A = \lambda I + N$, где N — нильпотентная ($N^k = 0$):

$$e^{At} = e^{\lambda t}(I + Nt + \frac{N^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{N^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!})$$

Для жордановой клетки 2×2: $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для жордановой клетки 3×3: $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства:

- $\det e^{At} = e^{t \operatorname{tr} A}$
- $e^{A+B} = e^A e^B$ только если $AB = BA$
- $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

Аналогия для понимания: Дифференциальные уравнения — это **математический детектив**. Ваша задача в «Face Control» — опознать преступника по «особым приметам» (степень y, наличие x, вид правой части), а затем применить к нему строго определенную «статью» (алгоритм) из этого кодекса.