

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Оглавление

1. Вопрос 1: Обыкновенное дифференциальное уравнение. Решение, интегральные кривые, общее решение.
2. Вопрос 2: Уравнение в дифференциалах. Поле направлений, леммы об интегральной кривой уравнения.
3. Вопрос 3: Уравнение первообразной. Интеграл уравнения в дифференциалах. Формула общего решения (теорема).
4. Вопрос 4: Уравнение в полных дифференциалах.
5. Вопрос 5: Автономное уравнение. Общее решение. Единственность при наличии особой точки. Дифференциальный признак единственности.
6. Вопрос 6: Уравнение с разделяющимися переменными (теорема о разделении переменных).
7. Вопрос 7: Однородное уравнение (лемма о сведении к уравнению с разделяющимися переменными).
8. Вопрос 8: Постановка задачи Коши. Формулировка локальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Сведение задачи к интегральному уравнению.
9. Вопрос 9: Инвариантность понятия производной. Эквивалентность норм. Определение топологии.
10. Вопрос 10: Операторная норма. Оценка конечных приращений.
11. Вопрос 11: Пространство непрерывных функций. Принцип сжимающих отображений. Приближения Пикара.
12. Вопрос 12: Доказательство локальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши.
13. Вопрос 13: Единственность решения задачи Коши. Локальная единственность. Глобальная единственность.
14. Вопрос 14: Теорема Пеано (формулировка). Ломаная Эйлера. Лемма Арцела - Асколи.
15. Вопрос 15: Доказательство теоремы Пеано.
16. Вопрос 16: Продолжаемость решений. Максимальное продолжение решения. Единственность непродолжаемого решения.
17. Вопрос 17: Продолжаемость до границы области. Пример не продолжаемости на всю ось.
18. Вопрос 18: Лемма Громуолла - Беллмана. Лемма о дифференциальном неравенстве.
19. Вопрос 19: Теорема продолжаемости для линейной системы.
20. Вопрос 20: Каноническая замена переменных. Простейшие свойства канонической замены. Связь между уравнением и системой.
21. Вопрос 21: Теоремы существования, единственности и продолжаемости для уравнения.
22. Вопрос 22: Уравнение, не разрешенное относительно производной. (Расширение задачи Коши, теоремы существования и единственности). Особые решения. Дискриминантная кривая.
23. Вопрос 23: Метод введения параметра. Уравнение Клеро.
24. Вопрос 24: Общее решение однородной системы. Теорема об изоморфизме. Фундаментальные системы решений.
25. Вопрос 25: Фундаментальная матрица и оператор Коши (леммы об операторе и матрице).
26. Вопрос 26: Определитель Вронского и линейная зависимость для вектор-функций.
27. Вопрос 27: Формула Лиувилля – Остроградского для вектор-функций. Определитель и след оператора Коши.
28. Вопрос 28: Общее решение неоднородной системы. Метод вариации постоянных (теорема).
29. Вопрос 29: Общее решение линейного уравнения. Линейность канонической замены (лемма). Сведение линейного уравнения к системе.
30. Вопрос 30: Определитель Вронского скалярных функций. Свойства. Восстановление линейного уравнения. Признаки линейной зависимости.
31. Вопрос 31: Метод вариации постоянных для линейного неоднородного уравнения n-го порядка (теорема). Функция Грина задачи Коши.
32. Вопрос 32: Краевая задача. Теорема об альтернативе.
33. Вопрос 33: Функция Грина краевой задачи и ее свойство. Существование и единственность функции Грина.
34. Вопрос 34: Экспонента и логарифм оператора. Экспонента и оператор Коши.
35. Вопрос 35: Комплексификация оператора (лемма). Комплексификация системы. Действительные и комплексные решения.
36. Вопрос 36: Жорданова матрица. Вычисление экспоненты и логарифма. Фундаментальная система решений.
37. Вопрос 37: Метод неопределенных коэффициентов.
38. Вопрос 38: Характеристический многочлен линейного уравнения. Лемма о совпадении характеристических многочленов. Уравнение Эйлера.
39. Вопрос 39: Решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами (теорема).
40. Вопрос 40: Уравнение с квазимногочленом в правой части.
41. Вопрос 41: Устойчивость по Ляпунову для решения системы и линейного уравнения. Существенные упрощения (лемма).
42. Вопрос 42: Необходимое условие устойчивости. Система с постоянными коэффициентами (теорема).
43. Вопрос 43: Определение функции Ляпунова. Смысл производной в силу системы.
44. Вопрос 44: Лемма об устойчивости. Признак не асимптотической устойчивости.
45. Вопрос 45: Лемма об асимптотической устойчивости.
46. Вопрос 46: Теорема Четаева.
47. Вопрос 47: Система первого приближения. Теорема Ляпунова об исследовании устойчивости по первому приближению с полным доказательством.
48. Вопрос 48: Фазовое пространство автономной системы. Сдвиги фазовых траекторий. Непересекаемость фазовых кривых.

49. Вопрос 49: Динамическая система и фазовый поток. Генератор фазового потока (леммы).
50. Вопрос 50: Три типа фазовых кривых. Отсутствие других типов.
51. Вопрос 51: Численные методы решения задачи Коши для СДУ и ДУВП. Алгоритмы методов Эйлера, его модификаций и их геометрическая интерпретация.
52. Вопрос 52: Определение топологии. Топологическое пространство. Открытое множество, точки прикосновения множеств, замкнутое. Непрерывное отображение в точке. Связность. Аксиомы отделимости. Хаусдорфово топологическое пространство. Компактность.
53. Вопрос 53: Многообразия. Функции и отображения. Гладкие многообразия. Гладкие функции, гладкие отображения, диффеоморфизм.
54. Вопрос 54: Выпрямляющий диффеоморфизм (теорема).
55. Вопрос 55: Первый интеграл автономной системы. Дифференциальный критерий. Инвариантные множества. Независимые первые интегралы. Независимость в точке и зависимость в области. Универсальная система первых интегралов. Произвольная локально полная система.
56. Вопрос 56: Особые точки на плоскости.

Вопрос 1: Обыкновенное дифференциальное уравнение. Решение, интегральные кривые, общее решение.

Определение: Обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка - это уравнение вида $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, где F - заданная функция $(n+2)$ переменных, x - независимая скалярная переменная функции F , $y = y(x)$ - неизвестная функция, а $y^{(k)}$ - её производные порядка k .

Определение: Решением обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка называется функция $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, где $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ - интервал существования решения, такая что при подстановке этой функции в заданное уравнение оно обращается в тождество:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad x \in I$$

Определение: Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка - это графики решений этого уравнения.

Определение: Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка - множество всех решений, заданное неявно уравнением $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$ или явной формулой $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$, такое что выполняются условия:

1. $\forall C_1, \dots, C_n$: если запись $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$ для любого набора констант задаёт функцию, то эта функция обязательно является решением,
2. Любое решение уравнения задаётся уравнением $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$ при некоторых значениях констант C_1, \dots, C_n на всей своей области определения.

Вопрос 2: Уравнение в дифференциалах. Поле направлений, леммы об интегральной кривой уравнения.

Определение: Уравнение в дифференциалах - уравнение вида $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$, где $M, N : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ и $(M(x, y), N(x, y)) \neq (0, 0)$ для всех $(x, y) \in G$.

Касательная плоскость

С каждой точкой $(x, y) \in G$ связем касательную плоскость $T_{(x,y)}$ с координатами (dx, dy) , начало координат которой совмещено с точкой (x, y) , а оси координат параллельны соответствующим осям координат области G .

Определение: Поле направлений l - отображение $l : (x, y) \in G \rightarrow l(x, y) \subset T_{(x,y)}$, где $l(x, y)$ - прямая, проходящая через точку $(x, y) \in G$.

Определение: Векторное поле v - отображение $v : (x, y) \in G \rightarrow v(x, y) \in T_{(x,y)}$, где $v(x, y)$ - вектор, выходящий из точки $(x, y) \in G$.

Определение: Поле нормалей - векторное поле $v = (M, N)$, которое называется полем нормалей, так как в каждой точке оно ортогонально направлению интегральной кривой (вектор v служит нормалью к прямой поля направлений $l(x, y)$).

Определение: Кривую $\Gamma \subset G$ назовем интегральной кривой поля направлений l , если она в каждой своей точке $(x, y) \in \Gamma$ касается прямой $l(x, y)$.

Замечание: Более конкретно, интегральная кривая может быть задана как $\Gamma = \{(x, y) \in G' \mid \varphi(x, y) = 0\}$, где $G' \subset G$, $\varphi \in C^1(G')$ и $\nabla \varphi(x, y) = (\varphi'_x(x, y), \varphi'_y(x, y)) \neq 0$ для всех $(x, y) \in \Gamma$.

Лемма: Критерий интегральной кривой.

Кривая $\Gamma \subset G$ является интегральной для уравнения в дифференциалах тогда и только тогда, когда $\nabla \varphi(x, y) \parallel v(x, y)$.

Доказательство:

Кривая Γ касается поля направлений l тогда и только тогда, когда в каждой точке $(x, y) \in \Gamma$ касательная к Γ совпадает с прямой $l(x, y)$, что эквивалентно условию пропорциональности $\varphi'_x(x, y) : \varphi'_y(x, y) = M(x, y) : N(x, y)$ или равенству $M\varphi'_y - N\varphi'_x = 0$.

Вопрос 3: Уравнение первообразной. Интеграл уравнения в дифференциалах. Формула общего решения.

Определение: Уравнение первообразной (ОДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной) - уравнение вида $y' = f(x)$, где $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Теорема: Общее решение уравнения первообразной.

Если $f \in C(I)$, то при любом фиксированном $x_0 \in I$ общее решение уравнения первообразной задается формулой:

$$y = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi + C$$

Определение: Скалярная функция $\varphi \in C^1(G)$ с ненулевым градиентом называется интегралом уравнения в дифференциалах, если она принимает постоянное значение вдоль каждой интегральной кривой.

Утверждение: Интеграл уравнения в дифференциалах существует для любого уравнения в полных дифференциалах и однозначно определен с точностью до константы.

Теорема: Общее решение уравнения в дифференциалах.

Если φ - интеграл уравнения в дифференциалах, то его общее решение задается уравнением $\varphi(x, y) = C$.

Доказательство:

Пусть $\varphi(x, y) = C$ - семейство интегральных кривых. Тогда $\nabla\varphi(x, y) \cdot (dx, dy) = 0$, что совпадает с исходным уравнением. Обратно, любое решение уравнения является уровнем интеграла.

Вопрос 4: Уравнение в полных дифференциалах.

Определение: Уравнение в полных дифференциалах - уравнение в дифференциалах, для которого существует потенциал.

Определение: Потенциал - функция $\varphi \in C^1(G)$, удовлетворяющая равенству $\nabla\varphi(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$ для всех $(x, y) \in G$.

Свойства уравнений в полных дифференциалах

1. Всякий потенциал уравнения в дифференциалах является его интегралом.
2. Всякий интеграл уравнения в дифференциалах служит потенциалом другого уравнения, получаемого из исходного умножением коэффициентов M и N на интегрирующий множитель $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}$, где $\nabla\varphi(x, y) = \mu(x, y) \cdot (M(x, y), N(x, y))$.
3. Уравнение в полных дифференциалах с известным потенциалом решается согласно Теореме 3.2 об общем решении уравнения в дифференциалах.
4. Левая часть уравнения в полных дифференциалах совпадает с полным дифференциалом его потенциала: $d\varphi(x, y) = M(x, y) dx + N(x, y) dy$.
5. Необходимое условие: Для того чтобы уравнение в дифференциалах с коэффициентами $M, N \in C^1(G)$ было уравнением в полных дифференциалах, необходимо выполнение равенства $M'_y(x, y) = N'_x(x, y)$ для всех $(x, y) \in G$.

Доказательство:

Поскольку $M, N \in C^1(G)$, то $\varphi'_x, \varphi'_y \in C^1(G)$, следовательно $\varphi \in C^2(G)$. Тогда $M'_y(x, y) = \varphi''_{xy}(x, y) = \varphi''_{yx}(x, y) = N'_x(x, y)$.

Вопрос 5: Автономное уравнение. Общее решение.

Единственность при наличии особой точки. Дифференциальный признак единственности.

Определение: Автономное уравнение - уравнение вида $y' = f(y)$, где $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, заданное в области $G = \mathbb{R} \times I$.

Замечание: Автономное уравнение можно записать в виде уравнения в дифференциалах: $dy = f(y) dx$.

Общее решение автономного уравнения

Пусть на интервале $J \subset I$ нет особых точек (точек, где $f(y) = 0$). Тогда автономное уравнение приводится к уравнению в полных дифференциалах $dx = \frac{1}{f(y)} dy$, где $(x, y) \in G' = \mathbb{R} \times J$.

Если $f \in C(J)$, то оно имеет потенциал $\varphi(x, y) = x - \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{f(\eta)}$ и общее решение задается формулой:

$$x = \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{f(\eta)} + C$$

Поскольку f не обнуляется на J , функция $x(y)$ монотонна и обратима, что позволяет неявно задавать $y(x)$.

Особые точки

Если $a \in I$ - особая точка ($f(a) = 0$), то прямая $y = a$ является интегральной кривой автономного уравнения.

Определение: Точка $(x_0, y_0) \in G$ называется:

- точкой существования, если через нее проходит хотя бы одна интегральная кривая,
- точкой единственности, если любые две интегральные кривые, проходящие через эту точку локально совпадают.

Лемма: Свойства точек для автономного уравнения.

Если $f \in C(I)$, то для автономного уравнения любая точка $(x, y) \in G$ является точкой существования, причем:

- если y - неособая точка, то (x, y) - точка единственности,
- если $y = a$ - изолированная особая точка, то (x, y) - точка единственности тогда и только тогда, когда расходятся оба интеграла $\int_a^{a+0} \frac{d\eta}{f(\eta)}$.

Доказательство:

Пусть a - изолированная особая точка, где $f(y) > 0$ при $y_0 \leq y < a$. Изучим поведение интегральной кривой вблизи точки (x_0, a) при $y \rightarrow a - 0$.

1. Случай конечного интеграла: Пусть $\int_{y_0}^{a-0} \frac{d\eta}{f(\eta)} = x_1 < \infty$. Тогда $\lim_{y \rightarrow a-0} x(y) = x_1 + C = x_0$, где $C = x_0 - x_1$. Следовательно, через (x_0, a) проходит бесконечно много интегральных кривых, что нарушает единственность.
2. Случай бесконечного интеграла: Пусть интеграл расходится. Тогда интегральные кривые, подходящие к прямой $y = a$ снизу, приближаются к ней асимптотически при $x \rightarrow \infty$, не достигая ее. Таким образом, единственность сохраняется.

Следствие 6 (Дифференциальный признак единственности):

Если $f \in C(I)$ и в изолированной особой точке $a \in I$ существует производная $f'(a)$, то все точки прямой $y = a$ являются точками единственности.

Доказательство:

1. $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$ при $h \rightarrow 0$.
2. Обозначим $L = |f'(a)| + 1$. Для достаточно малого $h_0 > 0$ имеем:

$$0 < f(a-h) \leq |f'(a)(-h)| + |o(-h)| \leq L|h| \text{ при } 0 < h < h_0.$$

3. Тогда $\int_{a-h_0}^{a-0} \frac{d\eta}{f(\eta)} = \int_0^{h_0} \frac{dh}{f(a-h)} \geq \int_0^{h_0} \frac{dh}{Lh} = \infty$.

4. Согласно Лемме 5, это обеспечивает единственность.

Вопрос 6: Уравнение с разделяющимися переменными.

Определение: Уравнение с разделяющимися переменными - уравнение вида $P(x)Q(y)dx = R(x)S(y)dy$, где $P, R : I \rightarrow \mathbb{R}, Q, S : J \rightarrow \mathbb{R}$, заданное в области $G \subset \{(x, y) \in I \times J \mid (P(x)Q(y), R(x)S(y)) \neq (0, 0)\}$.

Замечание: В случае обыкновенного дифференциального уравнения оно записывается в виде $y' = f(x)g(y)$.

Особые случаи

Для точек (x_0, y_0) , где $(R(x_0), Q(y_0)) = (0, 0)$, получаем интегральные кривые $x = x_0$ или $y = y_0$.

Теорема: Решение уравнения с разделяющимися переменными.

Если $P, R \in C(I)$ и $Q, S \in C(J)$, а функции Q, R не имеют нулей, то для уравнения с разделяющимися переменными в области G :

1. Для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ общее решение задается уравнением:

$$\int_{x_0}^x \frac{P(\xi)}{R(\xi)} d\xi = \int_{y_0}^y \frac{S(\eta)}{Q(\eta)} d\eta + C$$

2. Все точки $(x, y) \in G$ являются точками существования и единственности.

Доказательство:

Уравнение с разделенными переменными $M(x) dx + N(y) dy = 0$, где $M(x) = \frac{P(x)}{R(x)}$, $N(y) = -\frac{S(y)}{Q(y)}$, является уравнением в полных дифференциалах с потенциалом $\varphi(x, y) = \int_{x_0}^x M(\xi) d\xi + \int_{y_0}^y N(\eta) d\eta$. Поэтому к нему применима Теорема 3.2 об общем решении уравнения в дифференциалах.

Вопрос 7: Однородное уравнение.

Определение: Однородное уравнение — уравнение вида $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, заданное в области $G = \{(x, y) \mid x > 0, \frac{y}{x} \in I\}$ или $G = \{(x, y) \mid x < 0, \frac{y}{x} \in I\}$.

Лемма: Сведение к уравнению с разделяющимися переменными.

При переходе от переменных x, y к переменным x, z , связанным соотношением $z = \frac{y}{x}$, все решения однородного уравнения переходят в решения уравнения $z' = \frac{f(z)-z}{x}$, где $z \in I$, и наоборот.

Доказательство:

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right) \Leftrightarrow (xz(x))' = f\left(\frac{xz(x)}{x}\right) \Leftrightarrow xz'(x) + z = f(z(x)) \Leftrightarrow z'(x) = \frac{f(z(x)) - z}{x}$$

Вопрос 8: Постановка задачи Коши. Формулировка локальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Сведение задачи к интегральному уравнению.

Определение: Задача Коши — система вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

где $(t, x) \in G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$. Принята следующая терминология:

- функция f — правая часть уравнения,
- равенство $x(t_0) = x_0$ — начальное условие,
- начальная точка $(t_0, x_0) \in G$ состоит из начального момента t_0 и начального значения x_0 ,
- решение задачи Коши — функция $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая системе,
- переменная $x \in \mathbb{R}^n$ называется фазовой, а $t \in \mathbb{R}$ — временем.

Покомпонентная запись

Если в \mathbb{R}^n фиксирован базис, то задачу Коши можно записать покомпонентно:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(t, x^1, \dots, x^n) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n(t, x^1, \dots, x^n) \\ x^1(t_0) = x_0^1 \\ \dots \\ x^n(t_0) = x_0^n \end{cases}$$

Теорема: Локальная теорема существования и единственности.

Если $f, f'_x \in C(G)$, то $\forall (t_0, x_0) \in G \exists U(t_0) : \exists!$ решение $x : U(t_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ задачи Коши.

Лемма: Интегральное представление решения.

Если $f \in C(G)$, то функция $x \in C(I)$ является решением задачи Коши тогда и только тогда, когда:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad t \in I$$

Следствие: Дифференцируемость решений.

Если $f \in C(G)$, то любое решение задачи Коши является непрерывно дифференцируемой функцией.

Вопрос 9: Инвариантность понятия производной. Эквивалентность норм. Определение топологии.

Инвариантность понятия производной

Производная $\dot{\mathbf{x}}(t)$ вектор-функции $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ в точке $t \in I$ может пониматься двояко:

- либо в \mathbb{R}^n как абстрактном линейном векторном пространстве,
- либо в \mathbb{R}^n как координатном линейном пространстве.

Однако, они ведут к одному результату из-за существования изоморфизма между указанными двумя линейными топологическими пространствами.

Лемма: Эквивалентность норм.

Для любых двух норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ в \mathbb{R}^n существует константа C , удовлетворяющая оценке:

$$\|x\|_1 \leq C \|x\|_2, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Доказательство:

В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны. Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две нормы. Множество $\{x : \|x\|_2 = 1\}$ компактно, поэтому функция $f(x) = \|x\|_1$ достигает минимума $m > 0$. Тогда $\|x\|_1 \geq m \|x\|_2$. Аналогично существует M такое, что $\|x\|_2 \leq M \|x\|_1$.

Определение: Система открытых множеств τ в топологическом пространстве X называется его топологией, если обладает следующими свойствами:

1. $\emptyset, X \in \tau$,
2. если $U_1, U_2 \in \tau$, то $U_1 \cap U_2 \in \tau$,
3. если $U_\alpha \in \tau$ при каждом $\alpha \in A$, то $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$.

Предел последовательности

С помощью топологии можно определить предел последовательности $x_n \in X$ как такую точку $a \in X$, что для любой её окрестности $U(a) \in \tau$ существует число N , удовлетворяющее импликации $n > N \implies x_n \in U(a)$.

Также с помощью топологии можно определить предельные, внутренние, граничные точки множества, его открытость, закрытость, замкнутость, компактность и т.п.

Вопрос 10: Операторная норма. Оценка конечных приращений.

Операторная норма

Пусть пространство \mathbb{R}^n нормированное (задана норма $|\cdot|$).

Операторная норма в пространстве $\text{End } \mathbb{R}^n$ линейных операторов, действующих из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n , задается формулой:

$$\|A\| = \sup_{|x| \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax|, \quad A \in \text{End } \mathbb{R}^n$$

Свойства операторной нормы

Имеют место следующие утверждения об операторной норме:

1. $\|A\| < \infty$,
2. $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot |x|$,
3. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Доказательство: $\|ABx\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot |x|$, откуда $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Замечание: Операторная норма помогает понять максимально возможное растяжение вектора оператором.

Производная вектор-функция

Производная g' конечномерной функции $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ по конечномерной переменной x определяется как линейный оператор $g'(x) \in \text{End } \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условию:

$$g(x+h) - g(x) = g'(x)h + o(|h|), \quad h \rightarrow 0$$

Лемма: Оценка конечных приращений.

Если $g \in C^1(B)$, где $B \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество, то:

$$|g(y) - g(x)| \leq \sup_{\xi \in B} \|g'(\xi)\| \cdot |y - x|, \quad x, y \in B$$

Доказательство:

Если $x \in B$ и $y = x + h \in B$, то $(x + \theta h) \in B$, где $\theta \in [0; 1]$. Обозначив $\varphi(\theta) = g(x + \theta h)$, получим:

$$|g(x+h) - g(x)| = |\varphi(1) - \varphi(0)| = \left| \int_0^1 \varphi'(\theta) d\theta \right| = \int_0^1 |g'(x + \theta h)h| d\theta \leq \int_0^1 \|g'(x + \theta h)\| \cdot |h| d\theta \leq \sup_{\xi \in B} \|g'(\xi)\| \cdot |h|$$

Откуда вытекает доказываемая оценка.

Вопрос 11: Пространство непрерывных функций. Принцип сжимающих отображений. Приближения Пикара.

Метрическое пространство

Пусть X — метрическое пространство с метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$.

Определение: Последовательность точек $x_n \in X$, где $n \in \mathbb{N}$, называется фундаментальной, если выполнено условие $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \rho(x_m, x_n) = 0$.

Определение: Пространство X называется полным, если в нём всякая фундаментальная последовательность сходится.

Лемма: Замкнутое подпространство.

Если пространство X полно, то любое его замкнутое подпространство также полно.

Пространство непрерывных функций

Если для заданного отрезка $K \subset \mathbb{R}$ множество всех непрерывных функций $x : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ наделить равномерной нормой (метрикой) $\|x\| = \sup_{t \in K} |x(t)|$, то полученное нормированное (метрическое) пространство, обозначаемое через $C(K)$, будет полным.

Сходящиеся в этом пространстве последовательности функций называются **равномерно сходящимися на отрезке K** .

Определение: Отображение $A : X \rightarrow X$ называется **сжимающим**, если $\exists q < 1 : \rho(Ay, Ax) \leq q \cdot \rho(y, x)$, где $x, y \in X$.

Замечание: Если отображение является сжимающим, то оно также является непрерывным и даже липшицевым, где константа $L = q$.

Определение: Любая точка $x \in X$, удовлетворяющая равенству $Ax = x$, называется **неподвижной точкой** отображения A .

Лемма: Принцип сжимающих отображений.

Пусть $A : X \rightarrow X$ — сжимающее отображение в полном метрическом пространстве X . Тогда A имеет единственную неподвижную точку.

Доказательство:

1. Если бы существовало две разные неподвижные точки $x, y \in X$, то $\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \leq q\rho(x, y) < \rho(x, y)$, что невозможно.
2. Для нахождения неподвижной точки возьмём произвольную точку $x_0 \in X$ и образуем последовательность $x_n = A^n x_0$. Она фундаментальна, поскольку $\rho(x_n, x_m) \leq q^n \frac{\rho(x_0, x_1)}{1-q}$. Поэтому в полном пространстве существует предел x этой последовательности, который и является неподвижной точкой.

Определение: **Приближения Пикара** на отрезке $K_T = [t_0 - T; t_0 + T]$ определяются рекуррентно:

$$x_0(t) \equiv x_0, \quad x_n = Ax_{n-1},$$

где оператор A определяется формулой $(Ax)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$.

Утверждение: Приближения Пикара на некотором отрезке K_T все одновременно определены и равномерно сходятся к решению интегрального уравнения задачи Коши.

Вопрос 12: Доказательство локальной теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Теорема: Локальная теорема существования и единственности.

Если $f, f'_x \in C(G)$, то для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ существует интервал $U(t_0) \subset \mathbb{R}$ такой, что задача Коши имеет единственное решение $x : U(t_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Доказательство:

Согласно Лемме 10 (сведение задачи Коши к интегральному уравнению), решение задачи Коши удовлетворяет интегральному уравнению $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$.

Рассмотрим оператор $A : C(K_T) \rightarrow C(K_T)$, где $K_T = [t_0 - T; t_0 + T]$:

$$(Ax)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

Покажем, что при достаточно малом $T > 0$ этот оператор сжимающий в пространстве $C(K_T)$ с равномерной нормой.

Для $x, y \in C(K_T)$:

$$\|Ax - Ay\| \leq \sup_{t \in K_T} \int_{t_0}^t |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))| d\tau \leq LT \|x - y\|$$

где L — константа Липшица для f по x .

При $LT < 1$ оператор A сжимающий. Кроме того, A отображает замкнутый шар $\{x \in C(K_T) : \|x - x_0\| \leq R\}$ в себя при достаточно малом T .

По принципу сжимающих отображений A имеет единственную неподвижную точку, которая является решением задачи Коши.

Вопрос 13: Единственность решения задачи Коши. Локальная единственность. Глобальная единственность.

Следствие: Локальная единственность.

В условиях Теоремы 8.1 любые два решения задачи Коши локально (вблизи t_0) совпадают.

Доказательство:

Пусть x', x'' — два решения задачи Коши, определенные в окрестности t_0 . Тогда на некотором интервале $U(t_0)$ оба решения совпадают с единственным решением, существование которого гарантируется Теоремой 8.1.

Теорема: Глобальная единственность.

Если каждая точка области G является точкой единственности, то любые два решения x и y задачи Коши удовлетворяют равенству $x|_I = y|_I$, где $I = D(x) \cap D(y)$ — область определения обоих решений.

Доказательство:

Предположим, что решения различаются в точке $T \in I$. Пусть $t_1 = \inf\{t \geq t_0 \mid x(t) \neq y(t)\}$. Тогда $x(t) = y(t)$ для $t_0 \leq t \leq t_1$, и решения совпадают в точке t_1 . Поскольку t_1 — точка единственности, решения совпадают и в окрестности t_1 , что противоречит определению t_1 .

Вопрос 14: Теорема Пеано (формулировка). Ломаная Эйлера. Лемма Арцела - Асколи.

Теорема: Теорема Пеано.

Если $f \in C(G)$, то для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ существует решение задачи Коши.

Замечание: В формулировке Теоремы Пеано условие непрерывности f нельзя ослабить.

Определение: Ломаная Эйлера — график функции φ , удовлетворяющей $\dot{\varphi}(t) = f(s, \varphi(s))$ на каждом интервале разбиения $[s_{i-1}; s_i]$, где s — точка из этого интервала.

Определение: Семейство Φ функций $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется равномерно ограниченным, если $\sup_{\varphi \in \Phi} \|\varphi\| < \infty$.

Определение: Семейство Φ называется равномерно непрерывным, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что для любых $\varphi \in \Phi$ и $t, s \in K$ выполняется: $|t - s| < \delta \implies |\varphi(t) - \varphi(s)| < \varepsilon$.

Определение: Семейство Φ называется предкомпактным, если из любой его последовательности можно выбрать фундаментальную подпоследовательность.

Лемма 18 (Лемма Арцела - Асколи):

Всякое равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство $\Phi \subset C(K)$ предкомпактно.

Доказательство:

Семейство равномерно ограничено, поэтому имеет компактное замыкание. Равностепенная непрерывность обеспечивает, что предел последовательности непрерывен.

Вопрос 15: Доказательство теоремы Пеано.

Теорема: Теорема Пеано.

Если $f \in C(G)$, то для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ существует решение задачи Коши.

Доказательство:

Рассмотрим последовательность ломаных Эйлера на отрезке $K = [t_0, t_0 + T]$ с разбиением на n равных частей точками $t_0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = t_0 + T$, шаг $h = T/n$.

Ломаная Эйлера строится индуктивно:

- $x_0(t) = x_0$ на $[s_0, s_1]$
- $x_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_{i-1}(\tau)) d\tau$ на $[s_0, s_1]$
- На каждом интервале $[s_{i-1}, s_i]$ функция определяется как решение задачи Коши с начальным условием $x_i(s_{i-1}) = x_{i-1}(s_{i-1})$ и правой частью $f(t, x_{i-1}(t))$.

Семейство Φ_h всех таких ломаных равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на K .

Ограниченност следует из непрерывности f . Равностепенная непрерывность: на каждом участке функция либо линейна, либо является интегралом от непрерывной функции.

По Лемме 14.1 из любой последовательности ломаных можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность. Предел является решением задачи Коши.

Следствие: Если $f \in C(G)$, то для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ существует отрезок K , содержащий t_0 , такой что:

- Для любого разбиения определена хотя бы одна ломаная Эйлера
- Любая равномерно сходящаяся последовательность ломаных со стремящейся к нулю нормой разбиения сходится к решению задачи Коши.

Вопрос 16: Продолжаемость решений. Максимальное продолжение решения. Единственность непродолжаемого решения.

Определение: Решение x называется продолжением решения y , если $y = x|_{D(y)}$.

Определение: Решение называется непродолжаемым (или максимально продолженным), если оно не имеет продолжений, отличных от самого себя.

Лемма: Продолжаемость решений.

Любое решение задачи Коши можно продолжить до непродолжаемого.

Доказательство:

Используя теорему о локальном существовании, решение можно последовательно продолжать до границы области определения.

Следствие: Если задача Коши имеет единственное непродолжаемое решение, то оно служит продолжением любого ее решения.

Теорема: Единственность непродолжаемого решения.

Если все точки области G являются точками $\exists!$, то для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ существует единственное непродолжаемое решение задачи Коши.

Доказательство:

По Лемме 16.1 любое решение можно продолжить до границы. Единственность следует из того, что все точки - точки единственности.

Вопрос 17: Продолжаемость до границы области. Пример не продолжаемости на всю ось.

Теорема: Продолжаемость до границы.

Если $f \in C(G)$, а x — непродолжаемое решение, то для любого компакта $C \subset G$ существует отрезок $K \subset D(x)$ такой, что $(t, x(t)) \notin C$ для $t \notin K$.

Утверждение: Непродолжаемое решение достигает границы области определения правой части.

Доказательство:

Если решение можно продолжить дальше, оно не является непродолжаемым. Если решение ограничено компактом, оно равномерно непрерывно и может быть продолжено.

Пример: Уравнение взрыва

Уравнение $\dot{x} = x^2$, заданное в $G = \mathbb{R}^2$, имеет точки $\exists!$, но решение $x(t) = -\frac{1}{t-C}$ не определено на всей прямой. Это показывает, что гладкость правой части не гарантирует неограниченную продолжаемость.

Вопрос 18: Лемма Гронуолла - Беллмана. Лемма о дифференциальном неравенстве.

Лемма: Лемма Гронуолла-Беллмана.

Если $u \in C(J)$, $J = [t_0; \beta)$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$, и $0 \leq u(t) \leq a + b \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$, то $u(t) \leq ae^{b(t-t_0)}$.

Доказательство:

Обозначим $v(t) = a + b \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$. Тогда $u(t) \leq v(t)$ и $v'(t) = bu(t) \leq bv(t)$.

Решая $v' \leq bv$, $v(t_0) = a$, получаем $v(t) \leq ae^{b(t-t_0)}$. Следовательно, $u(t) \leq ae^{b(t-t_0)}$.

Следствие: Если $u \in C(J)$, $J = (\alpha; \beta)$, и $0 \leq u(t) \leq a + b \left| \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \right|$ для $t_0 \in J$, то $u(t) \leq ae^{b(t-t_0)}$.

Доказательство:

Применяя Лемму 18.1 к функции $u(t) = |x(t)|$.

Лемма: Дифференциальное неравенство.

Если $x \in C^1(J)$, $J = (\alpha, \beta)$, и $|\dot{x}(t)| \leq a + b|x(t)|$ для $a, b \geq 0$, то $|x(t)| \leq (|x(t_0)| + a|t - t_0|)e^{b|t-t_0|}$.

Доказательство:

Дифференцируя неравенство для $u(t) = |x(t)|$, получаем интегральное неравенство и применяем Лемму 18.1.

Вопрос 19: Теорема продолжаемости для линейной системы.

Линейная система

Задача Коши записывается как:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + F(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

где $A : I \rightarrow \text{End}\mathbb{R}^n$, $F : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Система однородная при $F = 0$, неоднородная иначе.

Теорема: Продолжаемость линейной системы.

Если $A, F \in C(I)$, то любое решение определено на всем интервале I .

Доказательство:

Решение: $x(t) = X(t) \left(x_0 + \int_{t_0}^t X(\tau)^{-1} F(\tau) d\tau \right)$, где $X(t)$ - фундаментальная матрица.

Поскольку $A \in C(I)$, $X(t)$ определена на I . Интеграл сходится на всем I .

Следствие: Если $|f(t, x)| \leq a(t) + b(t)|x|$ с $a, b \in C(I)$, $f \in C(G)$, то любое непродолжаемое решение определено на всем I .

Вопрос 20: Каноническая замена переменных. Простейшие свойства канонической замены. Связь между уравнением и системой.

Утверждение: Каноническая замена переменных сводит любое уравнение n -го порядка $y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$, где $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^{1+n}$, разрешённое относительно старшей производной, к нормальной системе из n уравнений специального вида.

Определение: Каноническая замена переменных - это переход от скалярного уравнения n -го порядка к системе n уравнений первого порядка вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

где $x_1 = y$, $x_2 = y'$, ..., $x_n = y^{(n-1)}$.

Утверждение: Пусть S_f - множество всех решений уравнения выше, а $S_f(t_0, y_0, \dots, y_{n-1}) = S_f(t_0, \bar{y}_0)$ - его подмножество, состоящее из

всех решений задачи Коши, определяемой набором начальных условий $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ \dot{y}(t_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$. Аналогично, обозначим через $S_{\bar{y}}$ и $S_{\bar{y}}(t_0, \bar{y}_0)$.

множества решений следующей нормальной системы и, соответственно, задачи Коши для неё $\dot{x} = \bar{f}(t, x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ f(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$, $x(t_0) = \bar{y}_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$.

Утверждение: Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через Φ^{n-1} множество всех $n-1$ раз дифференцируемых скалярных функций (определенных на всяких интервалах), а через Φ - множество всех функций, принимающих значения в \mathbb{R}^n .

Определение: Канонической заменой назовём формальную операцию ψ , переводящую скалярную переменную y в следующую векторную

$$\psi y = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Определение: В случае $y = \Phi^{n-1}$ функция ψy называется $(n-1)$ -струй функции y , а её график $\Gamma_{\psi y}$ - $(n-1)$ -графиком функции y .

Лемма: Каноническая замена осуществляет изоморфизмы множеств $S_f \rightarrow S_{\bar{y}}$ и $S_f(t_0, \bar{y}_0) \rightarrow S_{\bar{y}}(t_0, \bar{y}_0)$, а обратные к ним отображения задаются формулой $\psi^{-1}x = x_1$.

Каноническая замена переводит решение исходного уравнения в решение соответствующей системы и обратно.

Доказательство: Каноническая замена переводит решение исходного уравнения в решение соответствующей системы и обратно.

Вопрос 21: Теоремы существования, единственности и продолжаемости для уравнения.

Теорема: Если $f, f'_y, \dots, f'_{y^{n-1}} \in C(G)$, то для любого набора $(t_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in G$ в некоторой окрестности $U(t_0)$ точки $t_0 \exists! y : U(t_0) \rightarrow \mathbb{R}$, где y - решение задачи Коши.

Теорема: Если каждая точка области G - точка единственности для уравнения, то любые два решения y и z задачи Коши удовлетворяют равенству $y|_I = z|_I$, где $I = D(y) \cap D(z)$.

Теорема: Если $f \in C(G)$, то для любого набора существует решение задачи Коши.

Теорема: Если все точки области G - точки $\exists!$ для уравнения, то для любого набора $\exists!$ непротиворечивое решение задачи Коши.

Теорема: Если $f \in C(G)$, а y - непротиворечивое решение уравнения, то для любого компакта $C \subset G$ существует такой отрезок $K \subset D(y)$, что имеет место условие $(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \notin C$, где $t \notin K$.

Определение: Уравнение $y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = f(t)$, где $a_1, \dots, a_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$, назовём линейным неоднородным уравнением n -ого порядка, а в случае $f = 0$ - линейным однородным. Матричную функцию A и вектор-функцию F , определённые по

формулам $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}$, назовём матрицей уравнения и его векторной неоднородностью соответственно.

Лемма: Каноническая замена осуществляет изоморфизм множеств $S_{n,f}S_{A,F}$.

Доказательство: Каноническая замена переводит скалярное уравнение в эквивалентную векторную систему и обратно.

Теорема: Если $a_1, \dots, a_n, f \in C(I)$, то для любой задачи Коши $\exists!$ непротиворечивое решение, причём оно определено на всём интервале I .

Вопрос 22: Уравнение, не разрешенное относительно производной. (Расширение задачи Коши, теоремы существования и единственности). Особые решения. Дискриминантная кривая.

Определение: Уравнение, не разрешенное относительно производной - уравнение вида $F(t, y, y') = 0$, где $F : H \rightarrow \mathbb{R}$, $H \subset \mathbb{R}^3$.

Определение: Расширение задачи Коши для уравнения $F(t, y, y') = 0$ состоит в задании начальных условий $(t_0, y_0, y'_0) \in H$ таких, что $F(t_0, y_0, y'_0) = 0$.

Теорема: Если $F, F'_y, F'_{y'} \in C(H)$, то для любой точки $(t_0, y_0, y'_0) \in H$, удовлетворяющей условию $F(t_0, y_0, y'_0) = 0$, существует интервал $U(t_0) \subset I$ и единственное решение $y : U(t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ задачи Коши с расширенными начальными условиями.

Определение: Особое решение - решение уравнения $F(t, y, y') = 0$, которое при каждом $t \in D(y)$ тройка $(t, y(t), \dot{y}(t))$ является точкой неединственности (т.е. через неё проходят как минимум два решения с разными производными).

Определение: Дискриминантная кривая определяется системой уравнений $F(t, y, y_1) = 0$ и $F'_y(t, y, y_1) = 0$, где $y_1 = y'$. Это геометрическое место точек (t, y) , в которых особое решение касается общего решения или где нарушается единственность решения.

Вопрос 23: Метод введения параметра. Уравнение Клеро.

Утверждение: Метод введения параметра позволяет свести уравнение, не разрешенное относительно производной, к разрешенному с некоторыми ограничениями.

Утверждение: Пусть уравнение $F(t, y, y') = 0$, где $(t, y, y') \in H \subset \mathbb{R}^3$, приведено к виду $y = f(t, p)$, где $f \in C^1(G)$. Введём параметр $p = y'$ и получим систему:

$$\begin{cases} y = f(t, p) \\ y' = p \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение по t , получаем $y'' = f'_t(t, p) + f'_y(t, p)p'$.

Определение: Уравнение Клеро - уравнение вида $y = tp + \varphi(p)$, где $p = y'$.

Теорема: Общее решение уравнения Клеро $y = tp + \varphi(p)$ имеет вид $y = Ct + \varphi(C)$.

Особые решения уравнения Клеро получаются исключением параметра p из системы $y = tp + \varphi(p)$, $0 = t + \varphi'(p)$.

Вопрос 24: Общее решение однородной системы. Теорема об изоморфизме. Фундаментальные системы решений.

Утверждение: Общее решение однородной системы $\dot{x} = A(t)x$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in I$, имеет линейную структуру.

Утверждение: Для заданного интервала $I \subset \mathbb{R}$ обозначим через $\Phi(I)$ линейное векторное пространство всех функций $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ с линейными операциями $(C_1f_1 + C_2f_2)(t) = C_1f_1(t) + C_2f_2(t)$, где $t \in I$, $C_{1,2} \in \mathbb{R}$. Нулевым вектором в пространстве $\Phi(I)$ является нулевая функция $0(t) = 0 \in \mathbb{R}^n$, где $t \in I$.

Определение: Функции $f_1, \dots, f_k \in \Phi(I)$ называются линейно зависимыми, если некоторая их нетривиальная (т.е. $C_1^2 + \dots + C_k^2 \neq 0$) линейная комбинация равна нулю $C_1 f_1 + \dots + C_k f_k = 0$, и линейно независимыми - в противном случае.

Теорема: Общее решение однородной линейной системы $\dot{x} = A(t)x$ имеет вид $x(t) = X(t)C$, где $X(t)$ - фундаментальная матрица, $C \in \mathbb{R}^n$.

Утверждение: Согласно теореме множества $S_{A,F}$ и $S_A = S_{A,0}$ всех непродолжаемых решений линейной неоднородной системы $\dot{x} = A(t)x + F(t)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in I$ и соответствующей однородной системы являются подмножествами пространства $\Phi(I)$.

Теорема: Множество S_A - линейное пространство, причём для любого $t_0 \in I$ отображение $\varphi_{t_0} : S_A \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $\varphi_{t_0}x = x(t_0)$, есть изоморфизм линейных пространств.

Доказательство: Линейность S_A следует из линейности однородной системы. Изоморфизм φ_{t_0} следует из того, что любое начальное условие $x(t_0) = x_0$ определяет единственное решение, и все решения проходят через каждую точку в момент t_0 .

Утверждение: Из-за существования изоморфизма любые свойства

Следствие: Размерность пространства решений линейной однородной системы из n уравнений первого порядка равна n .

Определение: Любой базис x_1, \dots, x_n в пространстве S_A решений линейной однородной системы называется её фундаментальной системой решений.

Следствие: Если x_1, \dots, x_n - фундаментальная система решений системы, то общее решение этой системы имеет вид $x = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t)$.

Вопрос 25: Фундаментальная матрица и оператор Коши (леммы об операторе и матрице).

Утверждение: Пусть в пространстве \mathbb{R}^n фиксирован базис и задана система. Под решением, далее, будем понимать функцию $x \in S_A$, а под матрицей - $(n \times n)$ -матрицу.

Определение: Матрицу $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, где $t \in I$, назовём:

- матрицей решений, если её столбцы x_1, \dots, x_n являются решениями,
- фундаментальной матрицей, если её столбцы x_1, \dots, x_n образуют фундаментальную систему решений.

Следствие: Для любого $t_0 \in I$ матрица решений X :

- однозначно определяется начальным условием $X(t_0) = X_0$ при каждой начальной матрице X_0 ,
- фундаментальна тогда и только тогда, когда $\det X(t_0) \neq 0$.

Доказательство: Первое утверждение следует из единственности решения задачи Коши. Второе следует из того, что фундаментальная система решений образует базис в пространстве решений, что эквивалентно невырожденности матрицы в начальный момент.

Следствие: Если X - фундаментальная матрица системы, то общее решение последней имеет вид $x = X(t)c$, где $c \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство: Любое решение системы можно представить как линейную комбинацию фундаментальной системы решений.

Определение: Для заданной пары чисел $t, s \in I$ назовём оператором Коши системы или оператором сдвига из s в t оператор $X(t,s) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий требованию $X(t,s)x(s) = x(t)$, где $x \in S_A$.

Утверждение: Таким образом, оператор Коши - двухпараметрическое семейство операторов, задаваемых начальным s и конечным t моментами времени и переводящих значение любого решения в момент s в значение того же решения в момент t .

Лемма: Оператор Коши $X(t,s)$ является линейным и невырожденным для любых $t, s \in I$.

Вопрос 26: Определитель Вронского и линейная зависимость для вектор-функций.

Утверждение: Определитель Вронского и формула Лиувилля-Остроградского для вектор-функций отражает их специфические свойства, связанные с линейной независимостью и объёмом натянутого на них параллелепипеда.

Определение: Определитель Вронского вектор-функций $f_1, \dots, f_n \in \Phi(I)$ - функция $W_{f_1, \dots, f_n}(t) = \det(f_1(t), \dots, f_n(t))$, где $t \in I$.

Утверждение: Определитель Вронского в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n имеет независимый от выбора ортогонального базиса положительной ориентации геометрический смысл: $W_{f_1, \dots, f_n}(t)$ - ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на векторы $f_1(t), \dots, f_n(t)$.

Лемма: Если функции $f_1, \dots, f_n \in \Phi(I)$ линейно зависимы, то $W_{f_1, \dots, f_n}(t) = 0$, где $t \in I$.

Доказательство: Если вектор-функции f_1, \dots, f_n линейно зависимы, то $\forall t \in I$ линейно зависимы и векторы $f_1(t), \dots, f_n(t)$, а значит $W_{f_1, \dots, f_n}(t) = 0$.

Лемма: Утверждение, обратное к сформулированному в лемме выше, неверно.

Доказательство: Приведём контрпример. Пусть $f_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, где $t \in \mathbb{R}$. Тогда $W_{f_1, f_2} = 0$, хотя они и линейно независимы, т.к. тождество $C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot t = 0$, где $t \in \mathbb{R}$, возможно только при $C_1 = C_2 = 0$.

Теорема: Если $x_1, \dots, x_n \in S_A$, то следующие утверждения эквивалентны:

- функции x_1, \dots, x_n - линейно зависимы,
- $W_{x_1, \dots, x_n}(t) = 0$ для всех $t \in I$,
- $W_{x_1, \dots, x_n}(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in I$.

Доказательство: Из первого вытекает второе по лемме выше, из второго - третье, а из третьего - первое.

Вопрос 27: Формула Лиувилля – Остроградского для вектор-функций. Определитель и след оператора Коши.

Теорема: Для любых решений $x_1, \dots, x_n \in S_A$ имеет место равенство $W_{x_1, \dots, x_n}(t) = W_{x_1, \dots, x_n}(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(\tau) d\tau}$, где $t_0, t \in I$.

Доказательство: Достаточно показать, что определитель Вронского удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{W} = \operatorname{tr} A(t) \cdot W$, где $t \in I$, из которого получим требуемое.

Следствие: Если $\operatorname{tr} A = 0$, то определитель Вронского любых решений $x_1, \dots, x_n \in S_A$ есть константа.

Определение: Определитель $\det X$ и след $\operatorname{tr} X$ оператора $X \in End\mathbb{R}^n$ - это определитель и след его матрицы X , записанной в каком-либо базисе в \mathbb{R}^n .

Утверждение: Для оператора Коши $X(t, s)$ выполняется соотношение $X(t, s)X(s, r) = X(t, r)$ для любых $t, s, r \in I$.

Следствие: Если $X(t, s)$ - оператор Коши системы, то $\det X(t, s) = e^{\int_s^t \operatorname{tr} A(\tau) d\tau}$.

Доказательство: Если в \mathbb{R}^n задан базис, то по лемме для любого фиксированного $s \in I$ матрица $X(\cdot, s)$ оператора $X(\cdot, s)$ есть матрица решений, причём $X(s, s) = E$, поэтому $\det X(t, s) = \det X(s, s) \cdot e^{\int_s^t \operatorname{tr} A(\tau) d\tau} = e^{\int_s^t \operatorname{tr} A(\tau) d\tau}$ согласно теореме.

Вопрос 28: Общее решение неоднородной системы. Метод вариации постоянных (теорема).

Утверждение: Общее решение однородной системы есть общее решение соответствующей однородной системы плюс частное решение неоднородной.

Теорема: Для всякого $x_0 \in S_{A,F}$ справедливо равенство $S_{A,F} = x_0 + S_A = \{x_0 + x \mid x \in S_A\}$.

Доказательство: Множество решений неоднородной системы является аффинным подпространством в пространстве решений однородной системы.

Следствие: Если x_0 - частное решение линейной неоднородной системы, а x_1, \dots, x_n - фундаментальная система решений соответствующей однородной системы, то общее решение системы имеет вид $x = x_0(t) + C_1x_1(t) + \dots + C_nx_n(t)$.

Утверждение: Множество $S_{A,F}$ является аффинным пространством над S_A .

Теорема: Для любой фундаментальной матрицы X линейной однородной системы верно следующее: если функция $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет уравнению $X(t)\dot{c}(t) = F(t)$, где $t \in I$, то функция X_c - решение неоднородной системы, т.е. $X_c \in S_{A,F}$.

Доказательство: Т.к. $\dot{X} = AX$, то $X\dot{c} = F \implies (\dot{X}c) = \dot{X}c + X\dot{c} = A(Xc) + F \implies X_c \in S_{A,F}$.

Следствие: Решение задачи Коши задаётся формулой $x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, \tau)F(\tau)d\tau$, где X - оператор Коши системы.

Вопрос 29: Общее решение линейного уравнения. Линейность канонической замены (лемма). Сведение линейного уравнения к системе.

Утверждение: Общее решение линейного уравнения, заданного на фиксированном интервале I и имеющего порядок $n \in \mathbb{N}$, тесно связано с линейным векторным пространством $\Phi^{n-1}(I)$ всех $(n - 1)$ раз дифференцируемых функций $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Лемма: Каноническая замена переменных является линейным отображением между пространством решений уравнения n -го порядка и пространством решений соответствующей системы.

Теорема: Линейное уравнение n -го порядка $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)$ эквивалентно системе $\dot{x} = A(t)x + F(t)$.

Вопрос 30: Определитель Вронского скалярных функций. Свойства. Восстановление линейного уравнения. Признаки линейной зависимости.

Определение: Определитель Вронского скалярных функций $f_1, \dots, f_n \in \Phi^{n-1}(I)$ - это функция $W_{f_1, \dots, f_n}(t) = W_{\psi f_1, \dots, \psi f_n}(t) =$

$$\begin{pmatrix} f_1(t) & \dots & f_n(t) \\ \dot{f}_1(t) & \dots & \dot{f}_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \dots & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \text{ где } t \in I.$$

Лемма: Если функции $f_1, \dots, f_n \in \Phi^{n-1}(I)$ линейно зависимы, то $W_{f_1, \dots, f_n}(t) = 0$, где $t \in I$.

Лемма: Утверждение, обратное к сформулированному в лемме выше, неверно.

Доказательство: Для произвольных скалярных функций из $W = 0$ не следует линейная зависимость. Контрпример: функции $f_1(t) = t^3$ и $f_2(t) = |t|^3$ на \mathbb{R} имеют нулевой определитель Вронского, но линейно независимы. Эквивалентность $W = 0 \iff$ линейная зависимость верна только если функции являются решениями одного линейного однородного уравнения.

Теорема: Если $y_1, \dots, y_n \in S_0$, то следующие утверждения эквивалентны:

- функции y_1, \dots, y_n - линейно зависимы,
- $W_{y_1, \dots, y_n}(t) = 0$ для всех $t \in I$,
- $W_{y_1, \dots, y_n}(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in I$.

Теорема: Для любых решений $y_1, \dots, y_n \in S_0$ имеет место равенство $W_{y_1, \dots, y_n}(t) = W_{y_1, \dots, y_n}(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau}$, где $t_0, t \in I$.

Теорема: Если скалярные функции $f_1, \dots, f_n \in C^n(I)$ удовлетворяют условию $W_{f_1, \dots, f_n}(t) \neq 0$, где $t \in I$, то они образуют фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения, определяемого как определитель Вронского, расширенный на y и его производные.

Доказательство: Уравнение строится так, чтобы данные функции были его решениями, и определитель Вронского является нетривиальным решением характеристического уравнения.

Следствие: Если скалярные функции $f_1, \dots, f_n \in C^{n-1}(I)$ удовлетворяют условиям $W_{f_1, \dots, f_n}(t) = 0$, $W_{f_1, \dots, f_{n-1}}(t) \neq 0$, где $t \in I$, то они линейно зависимы.

Доказательство: Следует из свойств определителя Вронского и линейной зависимости.

Следствие: Если определитель Вронского скалярных функций $f_1, \dots, f_n \in C^{n-1}(I)$ тождественно равен нулю, то их сужения на некоторый интервал $J \subset I$ линейно зависимы.

Доказательство: На интервале, где определитель Вронского отличен от нуля, функции образуют базис, но если он тождественно нуль, то они зависимы.

Следствие: Если определитель Вронского $k \leq n$ решений $y_1, \dots, y_k \in S_0$ тождественно равен нулю, то они линейно зависимы.

Доказательство: Для решений линейного уравнения определитель Вронского либо тождественно нуль, либо никогда не обращается в нуль.

Вопрос 31: Метод вариации постоянных для линейного неоднородного уравнения n -го порядка (теорема). Функция Грина задачи Коши.

Утверждение: Пусть задана формула общего решения $y = Y(t)c$, где $Y = (y_1, \dots, y_n)$ - ФСР, $c = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$. Для нахождения частного решения неоднородного уравнения константы принимаются за функции от t и записывается система специального вида.

Теорема: Для любой фундаментальной системы решений y_1, \dots, y_n линейного однородного уравнения верно следующее: если вектор-функция $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} Y(t)\dot{c}(t) = 0 \\ \dot{Y}(t)\dot{c}(t) = 0 \\ \dots \\ Y^{(n-2)}(t)\dot{c}(t) = 0 \\ Y^{(n-1)}(t)\dot{c}(t) = f(t) \end{cases}$$

, где $t \in I$, то функция Y_c - решение неоднородного уравнения, т.е. $Y_c \in S_{n,f}$.

Доказательство: Комплексификация сохраняет структуру векторного пространства и линейных операторов.

Утверждение: Функция Грина является решением задачи Коши с импульсным воздействием в точке τ .

Определение: Ядро $G_\tau(t, t_0) : J \rightarrow \mathbb{R}$ интегрального оператора, зависящее от параметра $\tau \in J$ и определяемое формулой $G_\tau(t, t_0) = \begin{cases} 0, & t_0 \leq t \leq \tau \\ y_\tau(t), & \tau \leq t < \beta \end{cases}$, называется функцией Грина задачи Коши.

Вопрос 32: Краевая задача. Теорема об альтернативе.

Утверждение: Краевая задача для линейного уравнения второго порядка $Ly = \ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = f(t)$, где $t \in J = [t_1; t_2]$, $p, q \in C(J)$, имеет два краевых условия $l_i y = \alpha_i y(t_i) + \beta_i \dot{y}(t_i) = \varphi_i$, где $\alpha_i, \beta_i \neq (0, 0)$, $i = 1, 2$.

Теорема: Теорема об альтернативе.

Для однородной краевой задачи ($f = 0, \varphi = 0$) либо существует только нулевое решение, либо существует нетривиальное решение. Для неоднородной задачи решение существует тогда и только тогда, когда соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение.

Вопрос 33: Функция Грина краевой задачи и ее свойство. Существование и единственность функции Грина.

Определение: Функция Грина краевой задачи - функция $G(t, s)$, такая что решение краевой задачи $Ly = f$ с $ly = 0$ задается формулой $y(t) = \int_{t_1}^{t_2} G(t, s)f(s)ds$.

Свойства функции Грина:

1. $LG(t, s) = 0$ для $t \neq s$
2. $\lim_{t \rightarrow s^+} LG(t, s) - \lim_{t \rightarrow s^-} LG(t, s) = 1$
3. $G(t, s)$ удовлетворяет однородным краевым условиям

Теорема: Для регулярной краевой задачи функция Грина существует и единственна.

Вопрос 34: Экспонента и логарифм оператора. Экспонента и оператор Коши.

Определение: Экспонента оператора $A \in End \mathbb{C}^n$ - сумма ряда $e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k(A)$, где $\epsilon_k(A) = \frac{A^k}{k!}$, $A^0 = I$.

Определение: Логарифм оператора $A \in End \mathbb{C}^n$, т.е. $\ln A$ этого оператора, - любой из операторов $B \in End \mathbb{C}^n$, удовлетворяющий равенству $e^B = A$.

Утверждение: Пусть задана линейная однородная система с постоянными коэффициентами $\dot{x} = Ax$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$.

Теорема: Оператор Коши X линейной однородной системы с постоянными коэффициентами удовлетворяет равенству $X(t, s) = e^{A(t-s)}$, где $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство: Дифференцируя равенство $X(t, s) = e^{A(t-s)}$ по t , получаем $\dot{X}(t, s) = Ae^{A(t-s)} = AX(t, s)$. При $t = s$ имеем $X(s, s) = I$, что совпадает с начальным условием.

Следствие: Если X - оператор Коши линейной однородной системы с постоянными коэффициентами, то справедливы равенства $e^A = X(1, 0)$, $\det e^A = e^{tr A}$.

Следствие: Экспонента любого оператора невырождена, а логарифм вырожденного оператора не существует.

Вопрос 35: Комплексификация оператора (лемма). Комплексификация системы. Действительные и комплексные решения.

Утверждение: Комплексификация оператора и системы позволяет применить метод жордановых форм для нахождения общего решения линейной однородной системы.

Определение: Под комплексификацией (действительного, или \mathbb{R} -линейного):

- пространства \mathbb{R}^n понимается \mathbb{C} -линейное пространство $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n i\mathbb{R}^n$, представляющее собой множество векторов $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}^n$, с компонентами $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$, в котором, помимо покомпонентного равенства, сложения и умножения на действительные числа, заданы также умножение на комплексные числа, основанное на правиле $i(x + iy) = -y + ix$, где $x, y \in \mathbb{R}^n$, и комплексное сопряжение $x + iy = x - iy$, где $x, y \in \mathbb{R}^n$, а кроме того, исходное пространство \mathbb{R}^n отождествляется с подмножеством $\operatorname{Re} \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n i\{0\} \subset \mathbb{C}^n$,
- оператора $A \in \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ понимается комплексный оператор $\mathbb{A} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, задаваемый равенством $\mathbb{A}(x + iy) = Ax + iAy$, где $x, y \in \mathbb{R}^n$, а его сужение на множество $\operatorname{Re} \mathbb{C}^n$ обозначается через $\operatorname{Re} A$.

Лемма: Пусть \mathbb{C}^n - комплексификация пространства \mathbb{R}^n , а \mathbb{A} - комплексификация оператора $A \in \operatorname{End}\mathbb{R}^n$. Тогда справедливы утверждения:

- $\mathbb{A} \in \operatorname{End}\mathbb{C}^n$ и $\operatorname{Re} \mathbb{A} = A$,
- размерность \mathbb{C} -линейного пространства \mathbb{C}^n равна n , причём любой базис в \mathbb{R}^n - базис и в \mathbb{C}^n , а матрицы операторов $A \in \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{A} \in \operatorname{End}\mathbb{C}^n$ в этом базисе совпадают.

Доказательство: Первое утверждение следует из определения комплексификации. Второе следует из того, что \mathbb{C}^n как \mathbb{C} -векторное пространство имеет размерность n , и базис \mathbb{R}^n остается базисом в \mathbb{C}^n .

Утверждение: Действительную линейную систему можно комплексифицировать, получив её комплексификацию, т.е. комплексную линейную однородную систему $\dot{z} = \mathbb{A}z$, где $z \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{R}$

Вопрос 36: Жорданова матрица. Вычисление экспоненты и логарифма. Фундаментальная система решений.

Определение: Жорданова клетка - верхнетреугольная матрица вида:

$$J_{\lambda,m} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Теорема: Любая комплексная матрица подобна жордановой форме.

Утверждение: Для жордановой клетки $J_{\lambda,m}$ экспонента вычисляется по формуле:

$$e^{J_{\lambda,m}} = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема: Фундаментальная система решений линейной системы с постоянными коэффициентами состоит из функций вида $e^{\lambda t} p_k(t)$, где p_k - многочлены.

Вопрос 37: Метод неопределённых коэффициентов.

Утверждение: Метод неопределённых коэффициентов позволяет найти решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами, даже не прибегая к выяснению её жордановой структуры.

Определение: Введём следующие функции и множества:

- любую функцию q вида $q(t) = e^{\lambda t} p_k(t)$, где p_k - многочлен степени k над полем \mathbb{R} (\mathbb{C}), назовём действительным (комплексным) квазимногочленом степени $\deg q = k$ с показателем $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$),
- множество всех действительных (комплексных) квазимногочленов степени, меньшей k , с показателем λ обозначим через $Q_{\lambda,k}$ ($\mathbb{Q}_{\lambda,k}$),
- при $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ определим ещё и множество $Q_{\alpha \pm i\beta, k} = \{q_1(t) \cos \beta t + q_2(t) \sin \beta t \mid q_1, q_2 \in Q_{\alpha, k}\}$ действительных многочленов степени $\max\{\deg q_1, \deg q_2\} < k$ с парой показателей $\alpha \pm i\beta$,

- будем обозначать через Q

Вопрос 38: Характеристический многочлен линейного уравнения. Лемма о совпадении характеристических многочленов. Уравнение Эйлера.

Определение: Характеристический многочлен линейного уравнения $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$ - многочлен $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$.

Лемма: Характеристические многочлены канонической системы и соответствующего уравнения совпадают.

Определение: Уравнение Эйлера - уравнение вида $t^n y^{(n)} + a_{n-1}t^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$.

Теорема: Замена $t = e^z$ приводит уравнение Эйлера к уравнению с постоянными коэффициентами.

Вопрос 39: Решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами (теорема).

Теорема: Общее решение однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$ имеет вид $y = e^{\lambda t}p(t)$, где λ - корень характеристического уравнения, p - многочлен степени меньше кратности корня.

Алгоритм решения:

- Составить характеристическое уравнение
- Найти корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ с кратностями k_1, \dots, k_m
- Для каждого корня λ_i с кратностью k_i взять функции $e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \dots, t^{k_i-1}e^{\lambda_i t}$
- Для комплексных корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$ взять $\cos(\beta t)e^{\alpha t}, \sin(\beta t)e^{\alpha t}$ и их производные

Вопрос 40: Уравнение с квазимногочленом в правой части.

Теорема: Решение уравнения $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = e^{\alpha t}p(t)$, где p - многочлен степени m , имеет вид $y = e^{\alpha t}q(t)$, где q - многочлен степени m .

Метод неопределенных коэффициентов: Подставить $y = e^{\alpha t}(c_0 + c_1t + \dots + c_mt^m)$ в уравнение и приравнять коэффициенты.

Вопрос 41: Устойчивость по Ляпунову для решения системы и линейного уравнения. Существенные упрощения (лемма).

Отлично. Переходим к одному из наиболее важных и глубоких разделов курса — качественной теории и теории устойчивости. Этот раздел, вслед за классическим изложением Сергеева, переводит наше понимание с уровня поиска конкретных формул на уровень анализа общего поведения решений, что часто важнее для приложений.

Лекция: Качественная теория ОДУ. Устойчивость по Ляпунову и классификация особых точек

- Философский переход: от аналитики к качественному анализу

До сих пор мы занимались поиском решений в виде формул. Однако для нелинейных систем, а также для анализа долгосрочного поведения (при $t \rightarrow +\infty$) это часто невозможно. Качественная теория ставит перед собой иные цели:

- Определить характер решений (сходятся к равновесию, колеблются, уходят на бесконечность).
- Исследовать устойчивость состояний равновесия — ключевое понятие для любой физической, биологической или инженерной системы.
- Построить фазовый портрет — геометрическую картину всех возможных траекторий системы.

Методы этой теории, разработанные А.М. Ляпуновым, А. Пуанкаре и другими, позволяют делать выводы, не решая уравнения в явном виде.

- Основные понятия теории устойчивости

Рассмотрим автономную систему (правая часть не зависит явно от t) ОДУ первого порядка в нормальной форме:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Определение 1 (Положение равновесия). Точка x_0 называется положением равновесия (стационарной точкой, точкой покоя), если $f(x_0) = 0$. В этой точке решение постоянно: $x(t) \equiv x_0$.

Определение 2 (Устойчивость по Ляпунову). Положение равновесия x_0 называется устойчивым по Ляпунову, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall \mathbf{x}(0) \text{ такого, что } \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0\| < \delta,$$

выполняется $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$ для всех $t \geq 0$.

Интуитивно: Если начальные условия чуть возмутить, то всё решение не уйдёт далеко от равновесия.

Определение 3 (Асимптотическая устойчивость). Положение равновесия \mathbf{x}_0 называется асимптотически устойчивым, если:

1. Оно устойчиво по Ляпунову.
2. Существует $\delta_0 > 0$ такое, что если $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0\| < \delta_0$, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| = 0$.

Интуитивно: Решение не только не уходит далеко, но и со временем возвращается к равновесию.

Определение 4 (Неустойчивость). Если условие устойчивости по Ляпунову не выполняется, положение равновесия неустойчиво. Существует такое $\varepsilon > 0$, что для сколь угодно малого δ найдётся начальное условие, которое выведет решение за пределы ε -окрестности.

3. Линеаризация. Первый метод Ляпунова (метод исследования устойчивости по первому приближению)

Это основной рабочий инструмент для анализа устойчивости в невырожденных случаях.

Алгоритм линеаризации:

1. Найти положение равновесия \mathbf{x}_0 из системы $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.
2. Разложить правую часть в ряд Тейлора в окрестности \mathbf{x}_0 , учитывая, что $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \text{где } \|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|).$$

Здесь A — матрица Якоби (матрица первых производных, матрица линеаризации):

$$A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}.$$

3. Исследовать линеаризованную систему:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}, \quad \text{где } \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0.$$

Теорема (Первый метод Ляпунова).

Пусть все собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы A имеют ненулевые действительные части (т.е. $\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0$).

1. Если $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ для всех i , то положение равновесия \mathbf{x}_0 исходной нелинейной системы асимптотически устойчиво.
2. Если существует хотя бы одно λ_k такое, что $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$, то положение равновесия \mathbf{x}_0 неустойчиво.
3. Если среди собственных чисел есть такие, что $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ (критический случай), то по линеаризованной системе нельзя сделать вывод об устойчивости исходной системы. Устойчивость определяется нелинейными членами $g(\mathbf{x})$. Здесь применяется второй метод Ляпунова.

4. Классификация особых точек линейной системы на плоскости

Рассмотрим подробно случай $n = 2$, который нагляден и имеет полную классификацию. Система:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Положение равновесия в начале координат $(0, 0)$ (при $\det A \neq 0$ — это изолированная особая точка).

Характеристическое уравнение: $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$. Обозначим: $p = -\operatorname{tr} A = -(a+d)$, $q = \det A = ad - bc$. Тогда $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

Дискриминант: $D = p^2 - 4q$.

Классификация на плоскости (p, q) (диаграмма Андронова-Витта):

1. $q < 0$: λ_1, λ_2 действительны и разных знаков ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 = q < 0$). Особая точка — СЕДЛО (неустойчиво). Имеются два инвариантных луча: устойчивое многообразие (решения стремятся к 0) и неустойчивое многообразие (решения уходят от 0).
2. $q > 0, p > 0, D > 0$: λ_1, λ_2 действительны, отрицательны. Особая точка — УСТОЙЧИВЫЙ УЗЕЛ. Все траектории (кроме двух) касаются собственного направления, соответствующего наименьшему по модулю λ .
3. $q > 0, p < 0, D > 0$: λ_1, λ_2 действительны, положительны. Особая точка — НЕУСТОЙЧИВЫЙ УЗЕЛ.
4. $q > 0, p > 0, D = 0$: Кратные действительные $\lambda < 0$. Если матрица A диагональна, то это устойчивый дикритический узел (звезда). Если матрица имеет жорданову клетку, то это устойчивый вырожденный узел (все траектории, кроме одной, имеют общее касательное

направление).

5. $q > 0, p > 0, D < 0: \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0$. Особая точка — УСТОЙЧИВЫЙ ФОКУС. Траектории — спирали, накручивающиеся на начало координат.
6. $q > 0, p < 0, D < 0: \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha > 0$. Особая точка — НЕУСТОЙЧИВЫЙ ФОКУС. Траектории — спирали, раскручивающиеся от начала координат.
7. $q > 0, p = 0: \lambda_{1,2} = \pm i\beta$. Особая точка — ЦЕНТР. Все траектории — замкнутые кривые (эллипсы) вокруг начала. Устойчивость по Ляпунову, но не асимптотическая. Это критический случай первого метода Ляпунова.

5. Алгоритм исследования системы на плоскости

Дано: Автономная система $\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y)$.

Шаг 1. Найти положения равновесия. Решить систему $P(x, y) = 0, Q(x, y) = 0$.

Шаг 2. Для каждого положения равновесия (x_0, y_0) :

1. Линеаризовать. Вычислить матрицу Якоби:

$$A = \begin{pmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

2. Найти собственные числа λ_1, λ_2 матрицы A .

3. Классифицировать точку по таблице выше и определить её устойчивость.

Шаг 3. Построить локальный фазовый портрет в окрестности каждой точки, используя известные канонические виды узла, седла, фокуса, центра. Определить направления движения по траекториям (по знаку производных).

Шаг 4. Нарисовать глобальный портрет, объединяя локальные картины. Найти сепаратрисы — особые траектории, разделяющие области с качественно различным поведением (например, устойчивые/неустойчивые многообразия седла).

6. Второй (прямой) метод Ляпунова

Применяется в критических случаях или когда линеаризация не даёт ответа. Идея: найти функцию, аналогичную функции энергии, которая убывает вдоль траекторий.

Определение (Функция Ляпунова). Пусть $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ — положение равновесия. Функция $V(\mathbf{x})$, определённая в окрестности U точки $\mathbf{0}$, называется функцией Ляпунова, если:

1. $V(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируема в U и $V(\mathbf{0}) = 0$.
2. $V(\mathbf{x}) > 0$ для всех $\mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{0}\}$ (положительно определённая).
3. Её производная в силу системы $\dot{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}) \leq 0$ для всех $\mathbf{x} \in U$ (отрицательно полуопределённая).

Теоремы Ляпунова:

- Если существует функция Ляпунова, то положение равновесия $\mathbf{0}$ устойчиво по Ляпунову.
- Если при этом $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ для всех $\mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{0}\}$ (отрицательно определённая), то положение равновесия асимптотически устойчиво.

Ключевая сложность: Нет общего алгоритма построения $V(\mathbf{x})$. Для механических систем часто берут полную энергию. В общем случае пробуют квадратичные формы $V = ax^2 + bxy + cy^2$.

7. Пример полного анализа (система Лотки-Вольтерры "хищник-жертва")

Рассмотрим упрощённую модель:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - xy, \\ \dot{y} = -y + xy. \end{cases}$$

Здесь x — число жертв, y — хищников.

1. Положения равновесия:

$$\begin{cases} x(1-y) = 0 \\ y(-1+x) = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0) \text{ и } (1, 1).$$

2. Исследуем точку $(0, 0)$:

- Матрица Якоби: $A = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ y & -1+x \end{pmatrix}$. В точке $(0, 0)$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- Собственные числа: $\lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = -1 < 0$ (разных знаков).

- Вывод: $(0, 0)$ — седло (неустойчиво). Устойчивое многообразие — ось y (хищники вымирают без жертв). Неустойчивое многообразие — ось x (жертвы растут при отсутствии хищников).

3. Исследуем точку $(1, 1)$:

- В точке $(1, 1)$: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Собственные числа: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$.
- Вывод по первому приближению: Собственные числа чисто мнимые — это критический случай. Первый метод Ляпунова не даёт ответа. Необходимо дополнительное исследование.

4. Применение второго метода Ляпунова для точки $(1, 1)$:

Сделаем замену $u = x - 1, v = y - 1$. Система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{u} = -v - uv \\ \dot{v} = u + uv \end{cases}.$$

Попробуем найти первый интеграл (функцию, постоянную вдоль траекторий). Для исходной системы можно найти:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{x(1-y)} \Rightarrow (x-1)dx/x + (y-1)dy/y = 0.$$

Интегрируя, получаем первый интеграл:

$$H(x, y) = x - \ln x + y - \ln y = C.$$

Функция $V(x, y) = H(x, y) - H(1, 1)$ является функцией Ляпунова для точки $(1, 1)$. Она положительно определена в окрестности $(1, 1)$ (имеет минимум), а её производная в силу системы $\dot{V} \equiv 0$ (сохраняется вдоль траекторий).

Вывод: Траектории системы — замкнутые кривые вокруг точки $(1, 1)$. Эта точка является центром. Режим устойчивый, но не асимптотически: популяции хищника и жертвы циклически колеблются вокруг равновесных значений.

Итоговый фазовый портрет: В первом квадранте ($x > 0, y > 0$) семейство замкнутых кривых (циклов) вокруг точки $(1, 1)$. Оси координат являются сепаратрисами.

Резюме по теме устойчивости:

1. Устойчивость по Ляпунову — фундаментальное свойство, характеризующее поведение системы при малых возмущениях.
2. Первый метод Ляпунова (линеаризация) — мощный инструмент, работающий в невырожденных случаях. Он сводит задачу к анализу собственных чисел матрицы Якоби.
3. Классификация особых точек на плоскости исчерпывающа и основана на следе и детерминанте матрицы линеаризации.
4. Второй метод Ляпунова универсален, но требует построения специальной функции. Он особенно важен в критических случаях.
5. Фазовый портрет — это геометрический язык качественной теории, позволяющий увидеть все возможные сценарии поведения системы.

Задание для глубокого осмысливания:

Для системы $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x - \alpha y \end{cases}$ (маятник с трением):

1. Найдите все положения равновесия.
2. Исследуйте их устойчивость методом линеаризации в зависимости от параметра $\alpha \geq 0$.
3. Попробуйте дать физическую интерпретацию типа каждой особой точки (узел, фокус, седло, центр).
4. Для случая $\alpha = 0$ найдите первый интеграл (полную энергию) и исследуйте устойчивость положения равновесия $(\pi, 0)$, используя второй метод Ляпунова.

Это задание охватывает все ключевые аспекты лекции и подведёт вас к понятию бифуркаций — качественного изменения фазового портрета при изменении параметра системы.

Детальное исследование устойчивости по первому приближению (первый метод Ляпунова)

I. Философская основа метода

Ключевая идея: В окрестности положения равновесия поведение нелинейной системы в первом приближении определяется её линейной частью. Это позволяет перенести результаты теории линейных систем с постоянными коэффициентами на нелинейные системы.

Математическая формулировка: Рассмотрим автономную систему

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f} \in C^1(G),$$

с положением равновесия \mathbf{x}_0 : $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

II. Точная теорема и условия её применимости

Теорема (первый метод Ляпунова, метод исследования устойчивости по первому приближению)

Пусть:

1. $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируема в окрестности \mathbf{x}_0
2. Разложение в ряд Тейлора: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{g}(\mathbf{x})$, где:
 - $A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$ — матрица Якоби (линеаризованная матрица)
 - $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$ при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$

Обозначим: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы A .

Тогда:

Случай 1: Все собственные числа имеют отрицательные действительные части

$$\text{Если } \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

то положение равновесия \mathbf{x}_0 исходной нелинейной системы асимптотически устойчиво.

Доказательство основано на построении квадратичной функции Ляпунова для линейной части и оценке вклада нелинейных членов.

Случай 2: Хотя бы одно собственное число имеет положительную действительную часть

$$\text{Если } \exists k : \operatorname{Re} \lambda_k > 0$$

то положение равновесия \mathbf{x}_0 исходной нелинейной системы неустойчиво.

Доказательство используется преобразование системы к каноническому виду и оценка роста решений.

Случай 3: Критический случай (наличие чисто мнимых или нулевых собственных чисел)

$$\text{Если } \operatorname{Re} \lambda_i \leq 0 \quad \forall i, \text{ и } \exists k : \operatorname{Re} \lambda_k = 0$$

то по первому приближению ничего сказать нельзя. Устойчивость определяется нелинейными членами $\mathbf{g}(\mathbf{x})$.

Важное замечание: В критическом случае возможны все три варианта:

- Асимптотическая устойчивость
- Устойчивость (не асимптотическая)
- Неустойчивость

III. Подробный алгоритм исследования

Шаг 1: Нахождение положений равновесия

Решить систему n алгебраических уравнений:

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_n(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Каждое решение $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ — кандидат на исследование.

Шаг 2: Линеаризация в окрестности \mathbf{x}_0

Вычислить матрицу Якоби:

$$A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=\mathbf{x}_0}.$$

Важно: Частные производные вычисляются в точке \mathbf{x}_0 !

Шаг 3: Нахождение собственных чисел матрицы A

Решить характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Собственные числа λ_i могут быть:

- Действительные
- Комплексные (входят сопряжёнными парами $\alpha \pm i\beta$)

Шаг 4: Анализ собственных чисел и вывод

Используем следующий детальный критерий:

Ситуация с собственными числами λ_i матрицы A	Тип устойчивости положения равновесия x_0	Пояснение
Все $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$	Асимптотически устойчиво	Все решения линеаризованной системы экспоненциально стремятся к 0. Нелинейные члены не меняют качественной картины.
Существует хотя бы одно λ_k с $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$	Неустойчиво	В линеаризованной системе есть растущие решения. Нелинейные члены не могут стабилизировать систему.
Все $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$, но есть $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$ (и нет $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$)	Критический случай. НЕЛЬЗЯ сделать вывод по первому приближению	Решение зависит от нелинейных членов $g(x)$. Требуется применение второго метода Ляпунова или других специальных методов.

Шаг 5: Детализация для случаев, когда вывод возможен

5.1. Критерии асимптотической устойчивости (все $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$)

Практические признаки:

1. Критерий Раусса-Гурвица (для многочленов низких степеней)
2. Необходимое условие: Все коэффициенты характеристического многочлена одного знака
3. Для $n=2$: $p = -\operatorname{tr} A > 0$, $q = \det A > 0$

5.2. Критерии неустойчивости (существует $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$)

Признаки:

1. $\det A < 0$ (для $n=2$ означает седло)
2. $\operatorname{tr} A > 0$ (для $n=2$ вместе с $\det A > 0$ даёт неустойчивый узел/фокус)
3. Наличие нечётного количества положительных действительных корней

IV. Особые случаи и важные замечания

Случай 1: Нулевое собственное число ($\lambda = 0$)

Всегда критический случай!

Пример: $\dot{x} = -x^3$, $\dot{y} = -y$

- Линеаризация: $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = -y$ (собственные числа 0 и -1)
- Исходная система: $x = \frac{1}{\sqrt{2t+C}}$ → асимптотически устойчива по x
- Вывод по линеаризации был бы ошибочен!

Случай 2: Чисто мнимые собственные числа ($\lambda = \pm i\beta$)

Всегда критический случай!

Пример (центр vs фокус):

$$1. \dot{x} = -y + \alpha x(x^2 + y^2), \dot{y} = x + \alpha y(x^2 + y^2)$$

- Линеаризация: $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$ (собственные числа $\pm i$, центр)
- При $\alpha < 0$ — устойчивый фокус, при $\alpha > 0$ — неустойчивый фокус, при $\alpha = 0$ — центр

Случай 3: Кратные собственные числа с отрицательной действительной частью

Если все $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, то даже при кратности асимптотическая устойчивость сохраняется.

V. Геометрическая интерпретация для плоскости ($n=2$)

Для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

с положением равновесия (x_0, y_0) .

Шаг 1: Матрица Якоби

$$A = \begin{pmatrix} P_x(x_0, y_0) & P_y(x_0, y_0) \\ Q_x(x_0, y_0) & Q_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Шаг 2: Вычисление инвариантов

$$p = -\operatorname{tr} A = -(P_x + Q_y), \quad q = \det A = P_x Q_y - P_y Q_x$$

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

Дискриминант: $D = p^2 - 4q$

Шаг 3: Подробная классификация с критериями устойчивости

I. $q < 0$:

- λ_1, λ_2 действительны, разных знаков
- Тип: Седло
- Устойчивость: Неустойчиво
- Фазовый портрет: Имеет устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия

II. $q > 0$:

Рассмотрим подслучаи:

1. $p > 0, D > 0$:

- λ_1, λ_2 действительны, отрицательны
- Тип: Устойчивый узел
- Устойчивость: Асимптотически устойчиво
- Фазовый портрет: Все траектории входят в узел, касаясь собственного направления

2. $p > 0, D = 0$:

- $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ (кратные)
- Тип: Вырожденный или дикритический узел
- Устойчивость: Асимптотически устойчиво

3. $p > 0, D < 0$:

- $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0$
- Тип: Устойчивый фокус
- Устойчивость: Асимптотически устойчиво
- Фазовый портрет: Спирали, накручивающиеся на точку

4. $p < 0, D > 0$:

- λ_1, λ_2 действительны, положительны
- Тип: Неустойчивый узел
- Устойчивость: Неустойчиво

5. $p < 0, D < 0$:

- $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha > 0$
- Тип: Неустойчивый фокус
- Устойчивость: Неустойчиво
- Фазовый портрет: Спирали, раскручивающиеся от точки

6. $p = 0, D < 0$:

- $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$
- Тип: Центр
- Устойчивость: Критический случай! По первому приближению нельзя определить
- Фазовый портрет: Замкнутые траектории (эллипсы в линейном приближении)

III. $q = 0$:

- Минимум одно собственное число равно 0
- Всегда критический случай! Требуется анализ нелинейных членов

VI. Примеры с полным анализом

Пример 1: Классический осциллятор с трением

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -kx - \beta y \quad (k > 0, \beta \geq 0) \end{cases}$$

1. Положение равновесия: $(0, 0)$

2. Матрица Якоби:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\beta \end{pmatrix}$$

3. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + \beta\lambda + k = 0$

- $p = \beta, q = k, D = \beta^2 - 4k$

4. Анализ:

- При $\beta > 0, k > 0: p > 0, q > 0 \rightarrow$ асимптотически устойчиво
- При $\beta = 0, k > 0: p = 0, q > 0 \rightarrow$ центр (критический случай для неконсервативных систем)
- При $\beta < 0: p < 0 \rightarrow$ неустойчиво

Пример 2: Нелинейный маятник с трением

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x - \alpha y \quad (\alpha \geq 0) \end{cases}$$

1. Положения равновесия: $(k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$

2. Исследуем точку $(0, 0)$:

- Матрица Якоби: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos 0 & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}$
- Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + \alpha\lambda + 1 = 0$
- При $\alpha > 0: p = \alpha > 0, q = 1 > 0 \rightarrow$ асимптотически устойчиво
- При $\alpha = 0: p = 0 \rightarrow$ центр (критический случай, но для консервативной системы действительно центр)

3. Исследуем точку $(\pi, 0)$:

- Матрица Якоби: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \pi & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$
- Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + \alpha\lambda - 1 = 0$
- $q = -1 < 0$ всегда \rightarrow СЕДЛО (неустойчиво) при любом α

VII. Типичные ошибки и ограничения метода

Ошибка 1: Применение метода в критических случаях

Неправильно: Нашли $\lambda = \pm i \rightarrow$ заключили "центр, устойчиво".

Правильно: При $\lambda = \pm i \rightarrow$ "критический случай, требуется дополнительное исследование".

Ошибка 2: Неучёт области определения

Метод даёт только локальную устойчивость в малой окрестности x_0 .

Ошибка 3: Неверное вычисление матрицы Якоби

Производные должны вычисляться строго в точке равновесия.

Ошибка 4: Смешение устойчивости и асимптотической устойчивости

Центр — устойчив, но не асимптотически. Узел/фокус с $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ — асимптотически устойчив.

VIII. Практический алгоритм-памятка

Алгоритм исследования устойчивости по первому приближению:

1. Найти положения равновесия:

Решить $f(x) = 0$

2. Для каждой точки x_0 :

а) Вычислить матрицу якоби $A = f'(x_0)$

б) Найти собственные числа λ_1 матрицы A

3. Проанализировать λ_1 :

Если все $\operatorname{Re}(\lambda_1) < 0$:

Вывод: "Асимптотически устойчиво"

Если существует λ_k : $\operatorname{Re}(\lambda_k) > 0$:

Вывод: "Неустойчиво"

Иначе (есть $\operatorname{Re}(\lambda_1) = 0$, но нет $\operatorname{Re}(\lambda_1) > 0$):

Вывод: "Критический случай. По первому приближению нельзя определить. Требуется второй метод Ляпунова или анализ нелинейных членов."

4. Для плоскости ($n=2$) использовать быстрый критерий:

$$p = -\operatorname{tr}(A), q = \det(A)$$

$q < 0 \rightarrow$ Седло (неуст.)

$q > 0, p > 0, D > 0 \rightarrow$ Уст. узел (асимп. уст.)

$q > 0, p > 0, D < 0 \rightarrow$ Уст. фокус (асимп. уст.)

$q > 0, p < 0 \rightarrow$ Неуст. узел/фокус

$q > 0, p = 0 \rightarrow$ Центр (критич. случай!)

$q = 0 \rightarrow$ Критич. случай!

IX. Связь с другими разделами теории

1. Со вторым методом Ляпунова: Первый метод — частный случай, когда в качестве функции Ляпунова можно взять квадратичную форму.

2. С теорией бифуркаций: При изменении параметров системы собственные числа могут пересекать мнимую ось, что приводит к бифуркациям (например, бифуркация Андронова-Хопфа).

3. С численными методами: Условие устойчивости явного метода Эйлера $|1 + h\lambda| < 1$ аналогично условию $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ для непрерывной системы.

Важнейший вывод: Первый метод Ляпунова — мощный, но требующий аккуратности инструмент. Он работает "почти всегда", кроме тонких критических случаев, где нелинейные эффекты становятся определяющими.

Утверждение: Определение устойчивости предполагает, что фиксирована система $\dot{x} = f(t, x)$, где $(t, x) \in G \subset \mathbb{R}^{1+n}$, с исходным решением $x_0(\cdot)$, а кроме того, фиксирован начальный момент $t_0 \in \mathbb{R}$, причём область определения $D(x_0)$ исходного решения содержит луч $\mathbb{R}^+ = [t_0; \infty)$.

Утверждение:

Вопрос 42: Необходимое условие устойчивости. Система с постоянными коэффициентами (теорема).

Лемма 141: Для устойчивости (асимптотической) линейной системы $\dot{x} = A(t)x + F(t)$ или линейного уравнения $y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = f(t)$, где $A, F, a_1, \dots, a_n, f \in C(I), \mathbb{R}^+ \subset I$, необходимо выполнение соотношения $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(\tau) d\tau < \infty$ ($\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(\tau) d\tau = -\infty$) или, соответственно, соотношения $\inf_{t \in \mathbb{R}^+} \int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau > -\infty$ ($\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau = \infty$).

Доказательство: Если интеграл расходится, то определитель Вронского решения неограничен, что противоречит устойчивости.

Теорема: Линейная система с постоянным оператором:

- асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда действительные части всех его собственных значений отрицательны,
- устойчива тогда и только тогда, когда действительные части всех его собственных значений отрицательны или равны нулю, причём последним отвечают жордановы клетки только первого порядка.

Доказательство: Следует из свойств экспоненты матрицы и жордановой формы.

Вопрос 43: Определение функции Ляпунова. Смысл производной в силу системы.

Определение: Функция Ляпунова - это функция $v : U(0) \rightarrow \mathbb{R}$, определённая в какой-либо окрестности $U(0) \subset \mathbb{R}^n$ точки 0 и призванная подтвердить факт устойчивости, асимптотической устойчивости или неустойчивости нулевого решения, составляет основу второго метода Ляпунова.

Определение: Производной в силу системы $\dot{x} = f(t, x)$, где $f, f'_x \in C(G)$, $(t, x) \in G \supset \mathbb{R}^+ \times U(0)$, имеющей нулевое решение, благодаря равенству $f(., 0) = 0$, функции v в точке x в момент t называется выражение $\dot{v}_t(x) = v'(x)f(t, x) = v'_{x_1}(x)f_1(t, x) + \dots + v'_{x_n}(x)f_n(t, x)$ (последнее равенство предполагает наличие базиса в \mathbb{R}^n).

Определение: Функцией Ляпунова для системы называется любая функция $v \in C^1(U(0))$, положительно определённая ($v(x) > 0$ при $x \neq 0$, $v(0) = 0$), такая что её производная в силу системы имеет определённый знак.

Вопрос 44: Лемма об устойчивости. Признак не асимптотической устойчивости.

Лемма: Пусть для системы существует функция Ляпунова $v \in C^1(U(0))$, удовлетворяющая при всех $x \in U(0)$ и $t \in \mathbb{R}^+$ условиям:

1. $v(x) > 0$ при $x \neq 0$ (положительно определённая),
2. $\dot{v}_t(x) \leq 0$.

Тогда нулевое решение этой системы устойчиво по Ляпунову.

Доказательство: Функция Ляпунова является интегралом движения, что обеспечивает устойчивость.

Лемма: Пусть для системы существует функция Ляпунова $v \in C^1(U(0))$, удовлетворяющая при всех $x \in U(0)$ и $t \in \mathbb{R}^+$ условиям:

1. $v(x) > 0$ при $x \neq 0$ (положительно определённая),
2. $\dot{v}_t(x) = 0$.

Тогда устойчивость нулевого решения этой системы не является асимптотической.

Доказательство: Если производная тождественно равна нулю, то функция постоянна на решениях, что предотвращает асимптотическую сходимость.

Вопрос 45: Лемма об асимптотической устойчивости.

Лемма: Пусть для системы существует функция Ляпунова $v \in C^1(U(0))$, удовлетворяющая при всех $x \in U(0)$ и $t \in \mathbb{R}^+$ условиям:

1. $v(x) > 0$ при $x \neq 0$ (положительно определённая),
2. $\dot{v}_t(x) \leq w(x) < 0$ для некоторой функции $w \in C(\dot{U}(0))$.

Тогда нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво.

Доказательство: Функция $v(x)$ является убывающей вдоль решений, что обеспечивает сходимость к нулю.

Вопрос 46: Теорема Четаева.

Теорема: Теорема Четаева.

Пусть для системы существует область $V \subset \mathbb{R}^n$, примыкающая к началу координат ($0 \in \partial V$), такая что в этой области $v(x) > 0$, а на границе области внутри окрестности $v(x) = 0$, и функция Четаева $v \in C(V) \cap C^1(V)$, удовлетворяющая условию

$$0.0 \in \partial V, v(x)|_{x \in \partial V \cap U(0)} = 0,$$

а при всех $x \in V \cap U(0)$ и $t \in \mathbb{R}^+$ - условиям:

1. $v(x) > 0$,
2. $\dot{v}_t(x) \geq w(x) > 0$ для некоторой функции $w \in C(V \cap U(0))$.

Тогда нулевое решение этой системы неустойчиво.

Доказательство: Функция Четаева растет вдоль решений, что приводит к выходу из области устойчивости.

Вопрос 47: Система первого приближения. Теорема Ляпунова об исследовании устойчивости по первому приближению с полным доказательством.

Утверждение: Система первого приближения получается из исходной системы $\dot{x} = Ax + F(t, x)$, где $F, F'_x \in C(G)$, $G \supset \mathbb{R}^+ \times U(0)$ при условии $\|F(\cdot, x)\|_{\mathbb{R}^+} = o(x)$ при $x \rightarrow 0$, путём её линеаризации, в результате которой остаётся система $\dot{x} = Ax$, где $t \in \mathbb{R}^+$.

Теорема: Теорема Ляпунова об исследовании устойчивости по первому приближению.

Если действительные части всех собственных значений оператора A отрицательны, то нулевое решение системы с условием асимптотически устойчиво, а если хотя бы одна из них положительна - то неустойчиво.

Доказательство: Для линейных систем устойчивость определяется собственными значениями. Нелинейные возмущения сохраняют тип устойчивости в окрестности равновесия.

Вопрос 48: Фазовое пространство автономной системы. Сдвиги фазовых траекторий. Непересекаемость фазовых кривых.

Утверждение: Фазовое пространство автономной системы $\dot{x} = f(x)$, где $x \in G \subset \mathbb{R}^n$, есть область G . Множество всех непродолжаемых решений этой системы будем обозначать через $S_f(G)$.

Лемма: Для любого решения x системы и для любой константы $C \in \mathbb{R}$ функция $x_C(t) = x(t + C)$, где $t \in \mathbb{R}$, есть также решение этой системы.

Доказательство: Подстановка в уравнение показывает, что сдвиг по времени сохраняет решение.

Лемма: Если $f \in C^1(G)$ и фазовые кривые решений $x, y \in S_f(G)$ имеют общую точку $x(t_0) = y(s_0)$, то эти фазовые траектории с точностью до сдвига времени совпадают: $x(t + t_0) = y(t + s_0)$, где $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство: По теореме единственности решения с общими начальными условиями совпадают.

Вопрос 49: Динамическая система и фазовый поток. Генератор фазового потока (леммы).

Определение: Пусть на топологическом пространстве G задано семейство отображений $F^t : G \rightarrow G$, где $t \in \mathbb{R}$. Назовём семейство F :

- динамической системой, если выполнены три условия:
 - i. $F^0 = I$ - тождественность на G начального отображения,
 - ii. $F^{t+s} = F^t \circ F^s$, где $t, s \in \mathbb{R}$, - аддитивность по времени,
 - iii. $F \in C(\mathbb{R} \times G)$ - непрерывность функции F по паре (t, x) ;
- фазовым потоком, если динамическая система F удовлетворяет, сверх того, условиям $F^t, (F^t) \in C^1(G)$, где $t \in \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$;
- каскадом, если параметр t в семействе с самого начала ограничен лишь целыми значениями.

Определение: Орбитой точки $x \in G$ называется траектория или кривая $F(x) = \{F^t(x) \mid t \in \mathbb{R} (\mathbb{Z})\}$.

Лемма: Если $f \in C^1(G)$, то отображение Коши задаёт на множестве G фазовый поток F .

Доказательство: Отображение Коши удовлетворяет групповому свойству и непрерывно дифференцируемо.

Лемма: У любого фазового потока F существует единственный генератор $f = (F^t)|_{t=0} \in C^1(G)$, который к тому же удовлетворяет равенству $(F^t)' \circ f = f \circ F^t$, где $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство: Генератор получается дифференцированием потока по времени в нуле.

Вопрос 50: Три типа фазовых кривых. Отсутствие других типов.

Определение: Фазовую кривую (траекторию) $E(x)$ назовём:

- незамкнутой, если $x(t + s) \neq x(t)$, где $t \in \mathbb{R}, s > 0$,
- замкнутой, или циклом, если для некоторого числа $T > 0$, называемого периодом цикла, выполнено условие
- неподвижной точкой, или точкой покоя, если $x(t) = x_0$, где $t \in \mathbb{R}$.

Теорема: Для автономной системы $\dot{x} = f(x)$, где $f \in C^1(G)$, фазовая траектория любого решения $x \in S_f(G)$ может быть только одного из трёх типов, перечисленных в определении.

Доказательство: По теореме о продолжаемости решения либо ограничены компактом, либо уходят на бесконечность, либо являются равновесными точками.

Вопрос 51: Численные методы решения задачи Коши для СДУ и ДУВП. Алгоритмы методов Эйлера, его модификаций и их геометрическая интерпретация.

Примечание: Данный раздел содержит информацию из внешнего источника, так как в предоставленных фрагментах учебника Сергеева материал по численным методам отсутствует. Текст соответствует общепринятым курсу ОДУ.

КР2:

1. 575 - 581 +
2. 549 - 574 +
3. 796 - 810 +
4. 899 - 906 + 971 - 978
5. последняя лекция!

Отлично. Мы переходим от качественного анализа к практическому инструменту, без которого немыслима современная прикладная математика, — к численным методам. Важно понимать, что эти методы не заменяют теорию, а являются её логическим продолжением и приложением, когда аналитическое решение найти невозможно или не нужно.

Лекция: Численные методы решения задачи Коши. От ломаных Эйлера до разностных схем

1. Философия численного решения: зачем, когда и с какой точностью?

Теорема Коши-Пикара гарантирует существование и единственность решения задачи Коши. Но часто это решение не выражается в элементарных функциях (например, для уравнения $\dot{x} = t^2 + x^2$). Даже если выражение найдено (через специальные функции, ряды), оно может быть непригодно для быстрых вычислений.

Цель численного метода: Построить приближённое решение — таблицу значений $y_k \approx y(t_k)$ в заданных точках $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ — и сделать это эффективно, устойчиво и с контролируемой погрешностью.

Ключевые вопросы любого метода:

1. Аппроксимация: Как точно разностная схема приближает исходное ДУ?
2. Устойчивость: Маленькие ошибки (округления, начальные данные) не нарастают катастрофически?
3. Сходимость: При стремлении шага сетки к нулю приближённое решение стремится к точному?

Эти вопросы — прямое продолжение теории, изложенной у Сергеева.

2. Постановка задачи и основная идея

Дано: Задача Коши для ОДУ первого порядка (основная формулировка, к которой сводятся системы):

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0, T].$$

Вводим равномерную сетку: $t_k = t_0 + k \cdot h$, $k = 0, 1, \dots, N$, $h = \frac{T-t_0}{N}$ — шаг сетки.

Искомое: Вектор $\{y_k\}_{k=0}^N$, где $y_k \approx y(t_k)$.

Геометрическая идея (восходящая к Эйлеру): Интегральная кривая заменяется ломаной Эйлера. Каждое звено ломаной строится по направлению поля, заданного правой частью $f(t, y)$ в начальной точке звена.

3. Явный (прямой) метод Эйлера. Геометрическая интерпретация, вывод, анализ.

Алгоритм:

1. Полагаем y_0 (дано).
2. Для $k = 0, 1, \dots, N - 1$ вычисляем:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k).$$

Вывод 1 (Геометрический): На отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ интегральную кривую заменяют отрезком прямой (касательной) с угловым коэффициентом $f(t_k, y_k)$. Это следует непосредственно из геометрического смысла производной $y'(t_k)$.

Вывод 2 (Аналитический, из разложения Тейлора):

Предположим, точное решение $y(t)$ — гладкое. Разложим его в ряд Тейлора в точке t_k :

$$y(t_{k+1}) = y(t_k + h) = y(t_k) + h \cdot y'(t_k) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_k), \quad \xi_k \in [t_k, t_{k+1}].$$

Но по уравнению $y'(t_k) = f(t_k, y(t_k))$. Отбрасывая член порядка h^2 , получаем:

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + h \cdot f(t_k, y(t_k)).$$

Заменяя $y(t_k)$ на найденное приближение y_k , приходим к формуле Эйлера.

Анализ погрешности (локальной и глобальной):

- Локальная погрешность (погрешность на одном шаге): Это ошибка, которая возникает, если начать шаг с точного значения. Из вывода видно, что она имеет порядок $O(h^2)$: $\delta_k = |y(t_{k+1}) - (y(t_k) + h f(t_k, y(t_k)))| \leq M_2 \frac{h^2}{2}$, где $M_2 = \max |y''(t)|$.
- Глобальная погрешность: $E_k = |y(t_k) - y_k|$. Это накопленная ошибка после k шагов. Для явного метода Эйлера при выполнении условия Липшица $|f(t, u) - f(t, v)| \leq L|u - v|$ можно доказать оценку: $E_k \leq \frac{\lambda M_2}{2L} (e^{L(T-t_0)} - 1)$.

Ключевой вывод: Глобальная погрешность явного метода Эйлера имеет первый порядок точности, т.е. $E_N = O(h)$. Уменьшая шаг в 10 раз, мы ожидаем уменьшения ошибки примерно в 10 раз.

Недостатки явного метода Эйлера:

- Низкая точность. Для достижения приемлемой точности требуется очень мелкий шаг.
 - Условная устойчивость. Для жестких уравнений (где характерные времена процессов сильно разнятся) метод требует нереально малого шага из соображений устойчивости, а не точности. Рассмотрим модельное уравнение: $\dot{y} = -\lambda y$, $\lambda > 0$.
- Точное решение: $y(t) = y_0 e^{-\lambda t}$ (устойчиво, стремится к 0).
 - Применяем метод Эйлера: $y_{k+1} = y_k + h(-\lambda y_k) = (1 - \lambda h)y_k$.

Чтобы решение численной схемы не росло (было устойчивым), необходимо $|1 - \lambda h| < 1$, т.е. $h < \frac{2}{\lambda}$. Это условие устойчивости. При $\lambda \gg 1$ шаг становится крайне малым.

4. Неявный метод Эйлера. Устойчивость для жестких задач.

Алгоритм:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_{k+1}, y_{k+1}).$$

Особенность: Значение y_{k+1} входит и в левую, и в правую часть. Это уравнение (часто нелинейное) необходимо решать на каждом шаге относительно y_{k+1} (например, методом Ньютона). Отсюда название — неявный.

Вывод (Интегральный, через левую прямоугольную формулу):

Проинтегрируем уравнение $\dot{y} = f(t, y)$ на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$:

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, y(\tau)) d\tau.$$

Аппроксимируем интеграл по методу **правых** прямоугольников: $\int_{t_k}^{t_{k+1}} g(\tau) d\tau \approx h \cdot g(t_{k+1})$. Получаем формулу неявного метода.

Анализ устойчивости для тестового уравнения:

Для $\hat{y} = -\lambda y$: $y_{k+1} = y_k + h(-\lambda y_{k+1}) \Rightarrow y_{k+1} = \frac{y_k}{1 + \lambda h}$.

Множитель перехода $\frac{1}{1 + \lambda h} < 1$ при любом $h > 0$. **Вывод:** Неявный метод Эйлера **абсолютно устойчив** для этого уравнения. Нет ограничений на шаг по соображениям устойчивости, только по точности. Это главное преимущество для жестких систем.

5. Усовершенствованный (модифицированный) метод Эйлера. Методы Рунге-Кутты 2-го порядка.

Явный метод Эйлера использует информацию о поле направлений только в начале шага. Идея улучшения — усреднить производную.

Метод Эйлера-Коши (прогноз-коррекция):

1. Прогноз (явный шаг Эйлера): $\tilde{y}_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k)$.
2. Коррекция (усреднение): $y_{k+1} = y_k + h \cdot \frac{f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})}{2}$.

Геометрическая интерпретация: Сначала делаем пробный шаг по направлению в начальной точке, вычисляем поле направлений в этой пробной точке, а затем идём по среднему направлению.

Вывод (через формулу трапеций):

Проинтегрируем уравнение: $y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, y(\tau)) d\tau$.

Аппроксимируем интеграл по формуле трапеций: $\int_{t_k}^{t_{k+1}} g(\tau) d\tau \approx h \cdot \frac{g(t_k) + g(t_{k+1})}{2}$.

Получаем: $y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + \frac{h}{2}[f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))]$.

Это неявная схема трапеций. Чтобы сделать её явной, заменяем $y(t_{k+1})$ в правой части на прогноз по Эйлеру. Так мы приходим к явному методу Эйлера-Коши.

Погрешность: Локальная погрешность $O(h^3)$, глобальная $O(h^2)$ — метод второго порядка. Это значительное улучшение.

Общий вид метода Рунге-Кутты 2-го порядка:

$$\begin{cases} k_1 = h f(t_k, y_k), \\ k_2 = h f(t_k + \alpha h, y_k + \beta k_1), \\ y_{k+1} = y_k + a k_1 + b k_2. \end{cases}$$

Подбором параметров α, β, a, b можно получить различные методы. При $\alpha = \beta = 1, a = b = 1/2$ — это метод Эйлера-Коши. При $\alpha = \beta = 1/2, a = 0, b = 1$ — метод усовершенствованного Эйлера (средняя точка): $y_{k+1} = y_k + h f(t_k + h/2, y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k))$.

6. Классический метод Рунге-Кутты 4-го порядка (RK4)

Наиболее популярный на практике метод баланса точности и вычислительных затрат.

$$\begin{cases} k_1 = h f(t_k, y_k), \\ k_2 = h f(t_k + h/2, y_k + k_1/2), \\ k_3 = h f(t_k + h/2, y_k + k_2/2), \\ k_4 = h f(t_k + h, y_k + k_3), \\ y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{cases}$$

Порядок точности: Глобальная погрешность $O(h^4)$. Для большинства задач обеспечивает хорошую точность при умеренном шаге.

7. Численное решение систем ОДУ (СОДУ)

Все методы обобщаются на системы **покоординатно**.

Пусть дана система:

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m.$$

Явный метод Эйлера для системы:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h \cdot \mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}_k).$$

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка для системы: Все k_i становятся векторами, формулы остаются прежними. Это одно из ключевых преимуществ методов Рунге-Кутты.

8. Численное решение ДУВП (уравнений в частных производных) для задачи Коши. Метод прямых.

Подход к решению УрЧП, сводящий его к системе ОДУ. Рассмотрим на примере уравнения теплопроводности на отрезке:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, x) = u_0(x), \quad t > 0, \quad x \in [0, L].$$

1. Дискретизация по пространственной переменной: Вводим сетку по x : $x_j = j \cdot \Delta x, j = 0, \dots, M$.
2. Аппроксимация производной по x : Заменяем вторую производную разностным отношением (например, по трехточечному шаблону):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x_j) \approx \frac{U_{j-1}(t) - 2U_j(t) + U_{j+1}(t)}{(\Delta x)^2},$$

где $U_j(t) \approx u(t, x_j)$ — искомая функция в точке x_j , зависящая уже только от времени.

3. Получение системы ОДУ (метод прямых): Для каждого внутреннего узла $j = 1, \dots, M - 1$ получаем ОДУ:

$$\frac{dU_j}{dt} = \frac{a^2}{(\Delta x)^2} (U_{j-1}(t) - 2U_j(t) + U_{j+1}(t)).$$

Для граничных узлов $j = 0$ и $j = M$ используем граничные условия (например, $U_0(t) = 0, U_M(t) = 0$).

4. Решение системы ОДУ: Получили систему из $(M - 1)$ линейных ОДУ первого порядка. К ней можно применить любой из рассмотренных выше методов (Эйлера, Рунге-Кутты).

Важно: Это лишь одна из многих возможных схем (здесь — явная). Существуют также неявные и полуяявные схемы (Кранка-Николсон), которые устойчивы при любом шаге по времени, но требуют решения СЛАУ на каждом шаге.

Резюме и сравнительная таблица методов

Метод	Формула (ОДУ)	Порядок точности	Устойчивость	Сложность	Применение
Явный Эйлер	$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$	1-й ($O(h)$)	Условная	Низкая	Учебные задачи, некритичные расчеты
Неявный Эйлер	$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$	1-й ($O(h)$)	Абсолютная	Средняя (решение ур-я)	Жесткие системы, устойчивость важнее точности
Модиф. Эйлер (RK2)	$y_{k+1} = y_k + hf(t_k + h/2, y_k + \frac{h}{2}f(t_k, y_k))$	2-й ($O(h^2)$)	Условная	Средняя	Универсальный метод для многих задач
Рунге-Кутты 4 (RK4)	См. выше с k_1, k_2, k_3, k_4	4-й ($O(h^4)$)	Условная	Высокая (4 вызова f)	Стандарт для нежестких задач, высокая точность
Метод прямых	Сведение УрЧП к системе ОДУ	Зависит от схем	Зависит от схем	Высокая	Решение УрЧП параболического/гиперболического типа

Общий алгоритм выбора метода:

- Проанализируйте задачу: возможно ли аналитическое решение? Нужна ли высокая точность?
- Оцените жесткость системы (если есть быстро и медленно затухающие компоненты).
- Если система нежесткая и нужна высокая точность — используйте RK4.
- Если система жесткая — используйте неявные методы (неявный Эйлер, методы Гира) или специализированные решатели.
- Всегда проводите тестовые расчеты, уменьшая шаг в 2 раза и оценивая изменение результата (оценка погрешности методом Рунге).

Задание для закрепления и программирования:

Рассмотрите задачу Коши для уравнения Ван дер Поля (модель нелинейного осциллятора):

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x, \quad \mu > 0. \end{cases}$$

с начальными условиями $x(0) = 2, y(0) = 0$.

- Аналитически: Докажите, что решение существует и единственno при любом t .
- Численно (предлагается реализовать в любой среде):
 - Реализуйте явный метод Эйлера, метод Эйлера-Коши (RK2) и классический RK4.
 - Для $\mu = 1$ и $t \in [0, 20]$ постройте на одном графике три численных решения $x(t)$ с шагом $h = 0.1$. Сравните их.
 - Исследуйте устойчивость явного метода Эйлера: начните увеличивать шаг h (0.5, 1.0, 2.0). При каком h решение теряет физический смысл (становится неустойчивым)?
 - Постройте фазовые портреты $(x(t), y(t))$, полученные разными методами с $h = 0.01$. Какой метод быстрее сходится к предельному циклу?
- Качественный анализ: Сравните полученные численные результаты с тем, что предсказывает теория для системы Ван дер Поля (наличие устойчивого предельного цикла).

Это задание объединит все аспекты: теоретические основы, численные методы, анализ устойчивости и качественное поведение, что полностью соответствует духу нашего курса.

Утверждение: Данна задача Коши вида $\begin{cases} y' = f(t, x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Утверждение: Все численные методы заключаются в поиске аппроксимации (некоторого приближенного решения).

Утверждение: Для использования численного метода решения задачи Коши требуется выделить некоторый отрезок $[x_0; X]$, на котором мы хотим найти решение.

Утверждение: Для применения метода Эйлера требуется ввести шаг $h = \frac{X - x_0}{n}$, где n - число разбиений отрезка. Применив для каждой точки разбиения рекуррентную формулу $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$, нарисуем прямые в промежутках $[x_i; x_{i+1}]$, которые и будут итоговым графиком нашего решения.

Доказательство: Мы можем получить приближённое значение функции в точке приближённо с помощью формулы Тейлора $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \text{остаточный член}$. Мы

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!}(x_{i+1} - x_i) + \dots + \frac{y^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n$$

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Метод Эйлера

Дана задача Коши

Введём рекуррентную формулу

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Вопрос 52: Определение топологии. Топологическое пространство. Открытое множество, точки прикосновения множеств, замкнутое. Непрерывное отображение в точке. Связность. Аксиомы отделимости. Хаусдорфово топологическое пространство. Компактность.

Определение: Топология на множестве X - семейство τ подмножеств X , удовлетворяющее аксиомам:

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. Объединение любого семейства множеств из τ принадлежит τ
3. Пересечение конечного числа множеств из τ принадлежит τ

Определение: Топологическое пространство - пара (X, τ) .

Определение: Множество $U \subset X$ называется открытым, если $U \in \tau$.

Определение: Точка x называется точкой прикосновения множества $A \subset X$, если любая окрестность x содержит точку из A .

Определение: Множество $F \subset X$ называется замкнутым, если его дополнение открыто.

Определение: Отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно в точке x_0 , если для любой окрестности V точки $f(x_0)$ существует окрестность U точки x_0 такая, что $f(U) \subset V$.

Определение: Топологическое пространство называется связным, если оно не представимо в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств.

Аксиомы отделимости:

- T_1 : Любые две различные точки можно отделить замкнутыми множествами
- T_2 (Хаусдорфово): Любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности

Определение: Компактное множество - множество, из любого покрытия которого открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Вопрос 53: Многообразия. Функции и отображения. Гладкие многообразия. Гладкие функции, гладкие отображения, диффеоморфизмы.

Определение: n -мерное многообразие - топологическое пространство M , каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому множеству в \mathbb{R}^n .

Определение: Гладкое многообразие - многообразие с атласом гладких карт.

Определение: Гладкая функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ - функция, гладкая в локальных координатах.

Определение: Гладкое отображение $f : M \rightarrow N$ между гладкими многообразиями - отображение, гладкое в локальных координатах.

Определение: Диффеоморфизм - гладкое отображение, имеющее гладкое обратное.

Вопрос 54: Выпрямляющий диффеоморфизм (теорема).

Теорема: Выпрямляющий диффеоморфизм.

Пусть M - гладкое многообразие, $\gamma : I \rightarrow M$ - гладкая кривая. Тогда существует диффеоморфизм $\varphi : I \rightarrow \gamma(I)$, такой что $\varphi(0) = \gamma(0)$ и $D\varphi(t) \cdot \frac{d}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}(t)$.

Следствие: Локально любая гладкая кривая может быть выпрямлена.

Вопрос 55: Первый интеграл автономной системы. Дифференциальный критерий. Инвариантные множества. Независимые первые интегралы. Независимость в точке и зависимость в области. Универсальная система первых интегралов. Произвольная локально полная система.

Определение: Первый интеграл автономной системы $\dot{x} = f(x)$ - функция $H : U \rightarrow \mathbb{R}$, постоянная на решениях системы.

Дифференциальный критерий: Функция H является первым интегралом тогда и только тогда, когда $H'(x)f(x) = 0$ для всех $x \in U$.

Определение: Инвариантное множество - множество, все решения, начинающиеся в котором, остаются в нём.

Определение: Первые интегралы H_1, \dots, H_k называются независимыми в точке x_0 , если градиенты $\nabla H_1, \dots, \nabla H_k$ линейно независимы в x_0 .

Определение: Универсальная система первых интегралов - максимальная система независимых первых интегралов.

Вопрос 56: Особые точки на плоскости.

Определение: Особая точка (точка покоя) системы $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$ - точка x_0 , где $f(x_0) = 0$.

Классификация особых точек:

- Узел: решения приближаются по касательным к собственным векторам
- Седло: решения удаляются по одной прямой и приближаются по другой
- Фокус: решения приближаются/удаляются по спирали
- Центр: замкнутые траектории вокруг точки
- Вырожденный узел: особый случай узла

Теорема: Тип особой точки определяется собственными значениями линеаризованной системы.

Методы решений ДУ

Уравнение изоклин

Определение: Изоклина - линия на фазовой плоскости, вдоль которой угловой коэффициент касательных к интегральным кривым постоянен.

Уравнение изоклин: $\frac{dy}{dx} = k$, где k - константа.

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение: Уравнения с разделяющимися переменными - уравнения вида $y' = f(x)g(y)$ или $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$.

Утверждение: Для решения уравнения требуется "разделить" переменные по дифференциалам и проинтегрировать их.

1. $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$
2. $f(x)dx + g(y)dy = 0$
3. $\int_{x_0}^x f(x)dx + \int_{y_0}^y g(y)dy = C$

Однородные уравнения

Определение: Функция $M(x, y)$ называется однородной функцией степени n , если для всех $k > 0$ имеем $M(kx, ky) = k^n M(x, y)$.

Определение: Однородные уравнения - уравнения вида $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ или $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ - однородные функции одной и той же степени.

Утверждение: Однородное уравнение решается заменой $t = \frac{y}{x}$.

Утверждение: Уравнение вида $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ приводится к однородному следующим образом:

1. Если у прямых $a_1x + b_1y + c_1$ и $a_2x + b_2y + c_2$ есть точка пересечения (x_0, y_0) , то производим замену
2. Если у прямых нет пересечения, то производим замену

Утверждение: Иногда уравнение можно привести к однородному, используя замену $y = z^m$, подставив которую в уравнению можно найти конкретное значение m требуемой замены.

Линейные уравнения 1-го порядка

Определение: Линейные уравнения 1-го порядка - уравнения вида $y' + a(x)y = b(x)$.

Утверждение: Решается линейное уравнение 1-го порядка следующим образом:

1. Решаем линейное однородное уравнение вида $y' + a(x)y = 0$.
2. Константу C приравниваем к функции от независимой переменной.
3. Выражаем семейство решений относительно искомой функции и подставляем её в первоначальное уравнение (с учётом того, что C теперь функция!).
4. Решаем до финала.

Замечание: Иногда полезно поменять искомую функцию и независимую переменную местами.

Утверждение: Для решения уравнения Бернулли, т.е. уравнения вида $y' + a(x)y = b(x)y^n$, где $n \neq 1$ нужно разделить на y^n обе части и сделать замену $z = \frac{1}{y^{n-1}}$. Получим линейное уравнение 1-го порядка.

Утверждение: Для решения уравнения Риккати, т.е. уравнения вида $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$ нужно найти одно частное решение $y_1(x)$ и произвести замену $y = y_1(x) + z$. Получим уравнение Бернулли.

Замечание: В общем случае уравнение Риккати не решается в квадратурах.

Уравнения в полных дифференциалах

Определение: Уравнения в полных дифференциалах - уравнения вида $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, где его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$. То есть должно выполняться $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Утверждение: Решается уравнение в полных дифференциалах следующим образом:

1. Ищем интеграл $F = \int M(x, y)dx = \dots + \varphi(y)$.
2. Производим дифференцирование $F'_y = N(x, y)$ и находим $\varphi(y)$.
3. Подставляем $\varphi(y)$ выше.

Замечание: Аналогичный порядок действий может быть для $N(x, y)$.

Определение: Интегрирующим множителем для уравнения $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ называется такая функция $\mu(x, y) \neq 0$, после умножения на которую уравнение превращается в уравнение в полных дифференциалах.

Утверждение: Интегрирующий множитель существует при непрерывности частных производных и их не обращении в нуль одновременно.

Утверждение: Методы отыскания интегрирующего множителя:

1. Если $\frac{M'_y - N'_x}{N} = \varphi(x)$, то $\mu = e^{\int \varphi(x)dx}$
2. Если $\frac{N'_x - M'_y}{M} = \psi(y)$, то $\mu = e^{\int \psi(y)dy}$
3. Метод подстановки для специальных случаев

Уравнения, не разрешённые относительно производной

Утверждение: Уравнения вида $F(x, y, y') = 0$ можно решать следующими методами:

1. Разрешить уравнение относительно производной y' , т.е. составить уравнение вида $y' = f(x, y)$
2. Решить методом введения параметра

Уравнения, допускающие понижения порядка

Утверждение: Если в уравнение не входит искомая функция y , т.е. оно имеет вид $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$, то порядок уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных, входящих в уравнение, т.е. сделав замену $y^{(k)} = z$.

Утверждение: Если в уравнение не входит независимое переменное x , т.е. уравнение имеет вид $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, то порядок уравнения можно понизить, взяв за новое независимое переменное y , а за неизвестную функцию $y' = p(y)$.

Утверждение: Если уравнение однородно относительно y и его производных, т.е. не меняется при одновременной замене y, y', y'', \dots на ky, ky', ky'', \dots , то порядок уравнения понижается подстановкой $y' = yz$, где z - новая неизвестная функция.

Утверждение: Порядок уравнения можно

Утверждение: Порядок уравнения можно понизить, если преобразовать уравнение к такому виду, чтобы обе его части являлись полными производными по x от каких-нибудь функций.

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Определение: Уравнения с постоянными коэффициентами - уравнения вида $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$.

Утверждение: Уравнения с постоянными коэффициентами решается следующим образом:

1. Составляем характеристическое уравнение $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$.

2. Находим все корни характеристического уравнения и их кратности.

3. Записываем общее решение в виде суммы слагаемых вида:

- $C_i e^{\lambda_i x}$ для простого вещественного корня λ_i .
- $(C_{m+1} + C_{m+2}x + C_{m+3}x^2 + \dots + C_{m+k}x^{k-1})e^{\lambda x}$ для каждого вещественного кратного корня λ кратности k .
- $C_{m+1}e^{\alpha x} \cos \beta x + C_{m+2}e^{\alpha x} \sin \beta x$ для каждой пары комплексных сопряжённых простых корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$.
- $(C_{m+1} + C_{m+2}x + C_{m+3}x^2 + \dots + C_{m+k}x^{k-1})$

Утверждение: Для линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и с правой частью, состоящей из сумм и произведений функций $b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$, $e^{\alpha x}$, $\cos \beta x$, $\sin \beta x$, частное решение можно искать методом неопределённых коэффициентов.

Определение: Линейные неоднородные уравнения - уравнения вида $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = f(x)$.

Утверждение: Линейные неоднородные уравнения с любой правой частью $f(x)$ решаются методом вариации постоянных. Для

Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Краевые задачи

Для отыскания решения краевой задачи $a_0y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$, $x_0 \leq x \leq x_1$, $\alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0$, $\gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0$.

Линейные системы с постоянными коэффициентами

Устойчивость

Особые

Метод вариации постоянных ЛНДУ 2 порядка

Вид ЛНДУ с спец ПЧ

Линейная однородная система 3 на 3

Исследование по первому приближению, определение устойчивости с рисунком

Отлично. Переходим к детальному изложению центральной темы курса, следуя строгому и фундаментальному подходу учебника Сергеева. Тема разделяется на два крупных блока: линейные уравнения высшего порядка и линейные системы первого порядка.

Лекция: Линейные дифференциальные уравнения и системы: теория и методы решения

1. Философия и структура теории

Линейные уравнения образуют наиболее завершённый и важный класс ДУ. Их теория базируется на линейной алгебре и анализе и предоставляет полный арсенал методов для построения общего решения. Ключевой принцип — принцип суперпозиции, который является следствием линейности оператора.

Основные объекты изучения:

1. Линейное уравнение n-го порядка.
2. Линейная система n уравнений первого порядка.

Между ними существует полная эквивалентность: любое линейное уравнение n-го порядка можно записать как линейную систему n уравнений первого порядка, и наоборот (хотя последнее не всегда просто). Это позволяет использовать единые теоретические конструкции.

2. Линейные уравнения n-го порядка: фундаментальная теория

Общий вид:

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = f(t), \quad (1)$$

где $a_i(t), f(t) \in C(I)$. Если $f(t) \equiv 0$, уравнение однородное (ЛОДУ), иначе — неоднородное (ЛНДУ).

Теорема 1 (Структура общего решения ЛНДУ).

Общее решение $y_{\text{оп}}(t)$ уравнения (1) имеет вид:

$$y_{\text{оп}}(t) = y_{\text{оо}}(t) + y_{\text{чн}}(t),$$

где $y_{\text{оо}}(t)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения $L[y] = 0$, а $y_{\text{чн}}(t)$ — любое частное решение неоднородного уравнения.

Теорема 2 (Структура общего решения ЛОДУ).

Множество решений однородного уравнения $L[y] = 0$ образует n-мерное линейное пространство. Это означает, что существуют n линейно независимых решений $y_1(t), \dots, y_n(t)$ (фундаментальная система решений, ФСР), таких, что любое решение представляется в виде:

$$y_{\text{ои}}(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + \dots + C_ny_n(t), \quad C_i \in \mathbb{R}.$$

Критерий линейной независимости: определитель Вронского.

Для набора функций $y_1(t), \dots, y_n(t)$ определитель Вронского:

$$W(t) = W[y_1, \dots, y_n](t) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

- Если функции линейно зависимы на I, то $W(t) \equiv 0$ на I.
- Если они являются решениями ЛОДУ, то верно и обратное: $W(t) \equiv 0 \iff$ решения линейно зависимы. Более того, для решений ЛОДУ справедлива формула Лиувилля-Остроградского:

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp \left(- \int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau \right).$$

Следовательно, $W(t)$ либо тождественно ноль, либо нигде не обращается в нуль.

3. Методы решения ЛОДУ с постоянными коэффициентами

Уравнение: $y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}y' + p_ny = 0$, где $p_i \in \mathbb{R}$.

Алгоритм (основан на поиске решений вида $y = e^{\lambda t}$):

1. Составить характеристическое уравнение:

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0.$$

2. Для каждого корня λ кратности k построить k линейно независимых решений:

- Действительный корень λ кратности k: $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}$.
- Пара комплексно-сопряжённых корней $\alpha \pm i\beta$ кратности k: Даёт 2k действительных решений:

$$e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t, te^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{k-1}e^{\alpha t} \cos \beta t, t^{k-1}e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

3. Общее решение — линейная комбинация всех построенных решений.

Пример: $y''' - 3y' + 2y = 0$. Хар. уравнение: $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$. Корни: $\lambda_1 = 1$ (кратности 1), $\lambda_2 = -2$ (кратности 1). Общее решение: $y = C_1e^t + C_2e^{-2t}$.

4. Методы решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами

A. Метод неопределённых коэффициентов (для специальной правой части).

Применим, когда $f(t)$ — квазиполином: $f(t) = e^{\alpha t}[P_m(t) \cos \beta t + Q_l(t) \sin \beta t]$, где P_m, Q_l — многочлены степеней m и l .

Алгоритм:

1. Записать число $s = \alpha + i\beta$.
2. Определить кратность r числа s как корня характеристического уравнения ($r = 0$, если не корень).
3. Частное решение искать в виде:

$$y_{\text{чи}} = t^r e^{\alpha t} [\tilde{P}_k(t) \cos \beta t + \tilde{Q}_k(t) \sin \beta t],$$

где $k = \max(m, l)$, а \tilde{P}_k, \tilde{Q}_k — многочлены степени k с неопределенными коэффициентами.

4. Подставить $y_{\text{чи}}$ в исходное уравнение, приравнять коэффициенты при одинаковых функциях и найти неизвестные коэффициенты.

Пример: $y'' + y = t \sin t$. Здесь $f(t) = t \sin t = e^{0 \cdot t}[0 \cdot \cos t + t \cdot \sin t]$, так что $\alpha = 0, \beta = 1, s = i$. Хар. уравнение: $\lambda^2 + 1 = 0$, корни $\pm i$. Число $s = i$ — корень кратности $r = 1$. Степень многочленов: $k = \max(0, 1) = 1$. Ищем: $y_{\text{чи}} = t^1 e^{0 \cdot t} [(At + B) \cos t + (Ct + D) \sin t] = t[(At + B) \cos t + (Ct + D) \sin t]$. Подстановка и приравнивание даст A, B, C, D .

B. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Универсальный метод для любой непрерывной $f(t)$.

Алгоритм:

1. Найти ФСР y_1, \dots, y_n соответствующего ЛОДУ и записать $y_{00} = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$.
2. Искать частное решение в виде $y_{\text{чи}} = C_1(t)y_1 + \dots + C_n(t)y_n$, где $C_i(t)$ — новые неизвестные функции.
3. Для их определения составляется система линейных алгебраических уравнений относительно производных $C'_i(t)$:

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_n y_n = 0, \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_n y'_n = 0, \\ \dots \\ C'_1 y_1^{(n-2)} + C'_2 y_2^{(n-2)} + \dots + C'_n y_n^{(n-2)} = 0, \\ C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)} = f(t). \end{cases}$$

Определитель этой системы — это $W(t) \neq 0$, поэтому решение существует и единственno.

4. Найти $C'_i(t)$ и проинтегрировать: $C_i(t) = \int C'_i(t) dt$.

Пример: $y'' + y = \tan t$. ФСР: $y_1 = \cos t, y_2 = \sin t$. Ищем $y_{\text{чи}} = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t$. Система:

$$\begin{cases} C'_1 \cos t + C'_2 \sin t = 0, \\ -C'_1 \sin t + C'_2 \cos t = \tan t. \end{cases}$$

Решая, находим $C'_1 = -\sin t \tan t = \cos t - \sec t, C'_2 = \sin t$. Интегрируем: $C_1 = \sin t - \ln |\sec t + \tan t|, C_2 = -\cos t$. Частное решение: $y_{\text{чи}} = (\sin t - \ln |\sec t + \tan t|) \cos t + (-\cos t) \sin t = -\cos t \ln |\sec t + \tan t|$.

5. Линейные системы первого порядка: общая теория

Нормальная форма: $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$, где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, A(t) — n \times n$ -матрица, $\mathbf{f}(t)$ — вектор-столбец. Если $\mathbf{f} \equiv 0$ — однородная система.

Теорема 3 (Структура общего решения). Аналогична случаю одного уравнения:

$$\mathbf{x}_{\text{ou}}(t) = \mathbf{x}_{\text{oo}}(t) + \mathbf{x}_{\text{un}}(t).$$

Теорема 4 (Однородная система). Решения образуют n -мерное линейное пространство. Фундаментальная матрица $\Phi(t)$ — это матрица, столбцы которой образуют ФСР. Общее решение: $\mathbf{x}_{\text{oo}}(t) = \Phi(t)\mathbf{C}$, где \mathbf{C} — вектор произвольных постоянных. Определитель $\det \Phi(t) = W(t)$ — вронсиан, подчиняется формуле Лиувилля: $W(t) = W(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \text{tr } A(\tau) d\tau \right)$.

6. Методы решения систем с постоянной матрицей

A. Однородная система: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$

Алгоритм (поиск Фундаментальной матрицы):

1. Найти собственные числа λ_i и собственные векторы \mathbf{v}_i матрицы A .
2. Случай простых (некратных) собственных чисел:

- Действительные λ : решение $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$.
- Комплексные $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\mathbf{v} = \mathbf{u} \pm i\mathbf{w}$: два действительных решения $\mathbf{x}_1 = e^{\alpha t}(\mathbf{u} \cos \beta t - \mathbf{w} \sin \beta t)$, $\mathbf{x}_2 = e^{\alpha t}(\mathbf{u} \sin \beta t + \mathbf{w} \cos \beta t)$.

3. Случай кратных собственных чисел (метод Жордановой формы):

Для собственного числа λ кратности k , если не хватает собственных векторов, ищутся присоединённые векторы. Решение, соответствующее жордановой клетке размера m , имеет вид:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \left[\mathbf{h}_0 + t\mathbf{h}_1 + \frac{t^2}{2!}\mathbf{h}_2 + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\mathbf{h}_{m-1} \right],$$

где $(A - \lambda I)\mathbf{h}_0 = 0$ (собств. вектор), $(A - \lambda I)\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_0$, и т.д.

Пример: $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$. Хар. уравнение: $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(4 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$. Корень $\lambda = 3$ кратности 2.

Находим собственный вектор: $(A - 3I)\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = (1, 1)^T$. Только один вектор. Ищем присоединённый: $(A - 3I)\mathbf{h}_1 = \mathbf{v}$. Решаем $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Одно из решений: $\mathbf{h}_1 = (0, 1)^T$. Тогда ФСР: $\mathbf{x}_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2(t) = e^{3t} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^{3t} \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}$.

Б. Неоднородная система: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$

1. Метод вариации постоянных (универсальный).

Если $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица однородной системы, то общее решение неоднородной:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{C}(t), \quad \text{где } \mathbf{C}'(t) = \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t).$$

Интегрируя, получаем: $\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt$. При начальном условии $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ получаем формулу Коши:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau.$$

2. Метод неопределённых коэффициентов (для специальной $\mathbf{f}(t)$)

Аналогичен методу для одного уравнения. Если $\mathbf{f}(t) = e^{\alpha t}[\mathbf{P}_m(t) \cos \beta t + \mathbf{Q}_l(t) \sin \beta t]$, где $\mathbf{P}_m, \mathbf{Q}_l$ — вектор-многочлены, то частное решение ищется в виде, аналогичном скалярному случаю, с учётом кратности числа $s = \alpha + i\beta$ как собственного значения матрицы A .

7. Алгоритм выбора метода решения: схема-памятка

Дано: Линейное ДУ или система.

1. Классифицировать:

- Уравнение n-го порядка или система?
- Постоянные или переменные коэффициенты?
- Однородное или неоднородное?

2. Для однородных задач с постоянными коэффициентами:

- Уравнение: Решить характеристическое уравнение, построить ФСР.
- Система: Найти собственные числа и векторы матрицы A, построить ФСР.

3. Для неоднородных задач с постоянными коэффициентами:

- Если правая часть — квазиполином (экспонента, синус, косинус, многочлен, их произведение) \rightarrow Метод неопределённых коэффициентов.
- Иначе, или если метод неопределённых коэффициентов громоздок \rightarrow Метод вариации постоянных.

4. Для задач с переменными коэффициентами:

- Частные случаи (эйлера, Чебышева и др.) решаются специальными подстановками.
- В общем случае: либо искать ФСР в конкретном виде (если повезёт), либо использовать метод вариации постоянных, если известна ФСР соответствующая.

8. Важные частные случаи и связь с приложениями

Уравнение Эйлера: $t^n y^{(n)} + a_1 t^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} t y' + a_n y = 0$. Решается заменой $t = e^x$ (для $t > 0$) или $t = -e^x$ (для $t < 0$), которая сводит его к уравнению с постоянными коэффициентами относительно x .

Приложения:

- **Колебания:** Уравнение $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = F(t)$ описывает вынужденные колебания осциллятора с трением. Его решение показывает переходные процессы, установившийся режим, резонанс.
- **Электрические цепи:** Система линейных уравнений, вытекающая из законов Кирхгофа (RLC-цепь).
- **Модели взаимодействия:** Линейные системы типа "хищник-жертва" с постоянными коэффициентами (модель Лотки-Вольтерры в линейном приближении).

Резюме по теме:

1. **Структура общего решения** линейной неоднородной задачи всегда: Общее однородное + Частное неоднородное.
2. Решение однородной задачи сводится к поиску **фундаментальной системы решений (ФСР)** — базиса в n -мерном пространстве решений.
3. Для **постоянных коэффициентов** ФСР строится алгебраически через характеристическое уравнение и собственные числа/векторы.
4. Для **неоднородной задачи** есть два основных метода:
 - **Метод неопределённых коэффициентов** — эффективен для специальных правых частей, но требует аккуратности при резонансе.
 - **Метод вариации постоянных** — универсален, основан на известной ФСР однородного уравнения.
5. **Системы** решаются аналогично, но с использованием матричного аппарата. Метод вариации для систем приводит к изящной формуле Коши.

Задание для комплексного закрепления:

1. **Теория:** Докажите, что если функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ имеют на интервале (a, b) отличный от нуля вронскиан, то они линейно независимы. Верно ли обратное для произвольных функций? Приведите контрпример.
2. **Практика (уравнение):** Решите задачу Коши: $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Указание: Сначала найдите общее решение однородного уравнения, затем примените метод вариации постоянных для нахождения частного решения. Интегралы можно оставить в виде первообразных.

3. **Практика (система):** Найдите общее решение системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + e^t, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 + t. \end{cases}$$

Указание: Найдите ФСР однородной системы, затем для неоднородной примените метод неопределённых коэффициентов, разбив правую часть на два слагаемых: $(e^t, 0)^T$ и $(0, t)^T$.

4. Исследование: Для системы из пункта 3 постройте фазовый портрет соответствующей однородной системы. К какому типу относится особая точка $(0, 0)$? Исследуйте её устойчивость.

Выполнение этих заданий потребует применения всей суммы знаний по теме и глубоко закрепит материал.

Лекция: Линейные системы дифференциальных уравнений. Полная теория и методология

Часть 1: Фундаментальная теория. Пространство решений.

Рассмотрим нормальную линейную систему первого порядка:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in I, \tag{1}$$

где $A(t)$ — $(n \times n)$ -матрица с элементами $a_{ij}(t) \in C(I)$, $\mathbf{f}(t)$ — вектор-функция с компонентами $f_i(t) \in C(I)$.

Теорема 1 (Структура общего решения).

Пусть $\mathbf{x}_{\text{оо}}(t)$ — общее решение однородной системы ($\mathbf{f} \equiv 0$), а $\mathbf{x}_{\text{чн}}(t)$ — некоторое частное решение неоднородной системы (1). Тогда общее решение неоднородной системы имеет вид:

$$\mathbf{x}_{\text{оп}}(t) = \mathbf{x}_{\text{оо}}(t) + \mathbf{x}_{\text{чн}}(t).$$

Теорема 2 (Пространство решений однородной системы).

Множество решений однородной системы $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ образует n -мерное линейное векторное пространство над \mathbb{R} .

Следствие: Существует набор из n линейно независимых решений $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$, называемый фундаментальной системой решений (ФСР). Любое решение $\mathbf{x}(t)$ однородной системы единственным образом представляется в виде:

$$\mathbf{x}(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \dots + C_n\varphi_n(t), \quad C_i \in \mathbb{R}.$$

Определение (Фундаментальная матрица).

Матрица $\Phi(t)$, столбцами которой являются векторы ФСР, называется фундаментальной матрицей системы.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

При этом $\Phi(t)$ удовлетворяет матричному уравнению:

$$\frac{d\Phi}{dt} = A(t)\Phi(t),$$

а общее решение однородной системы в матричной форме: $\mathbf{x}_{\text{общ}}(t) = \Phi(t)\mathbf{C}$, где $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_n)^T$.

Определитель Вронского (Вронскиан) системы:

$$W(t) = \det \Phi(t).$$

Теорема 3 (Формула Лиувилля-Остроградского).

Вронскиан решений однородной системы удовлетворяет уравнению:

$$\frac{dW}{dt} = \text{tr}(A(t)) \cdot W(t), \quad \text{где } \text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t).$$

Отсюда:

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t \text{tr } A(\tau) d\tau \right).$$

Важный вывод: Для решений однородной системы вронскиан либо тождественно равен нулю (если решения линейно зависимы), либо никогда не обращается в нуль (если они образуют ФСР).

Часть 2: Решение однородных систем с постоянной матрицей ($\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$)

Метод основан на поиске решений вида $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$, где $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ — постоянный вектор. Подстановка в систему приводит к задаче на собственные значения:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Алгоритм (Построение ФСР):

Шаг 1. Найти собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ матрицы A и их алгебраические кратности k_1, \dots, k_s ($\sum k_i = n$).

Шаг 2. Для каждого собственного числа λ построить систему из $k = \text{алг. кратности}(\lambda)$ линейно независимых решений.

Случай 2.1: λ — действительное, простое (кратность 1).

- Найти собственный вектор \mathbf{v} , соответствующий λ : $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$.
- Решение: $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$.

Случай 2.2: $\lambda = \alpha \pm i\beta$ — комплексно-сопряжённая пара (каждое простое).

- Для $\lambda = \alpha + i\beta$ найти комплексный собственный вектор $\mathbf{v} = \mathbf{u} + i\mathbf{w}$.
- Построить два действительных линейно независимых решения:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= e^{\alpha t}(\mathbf{u} \cos \beta t - \mathbf{w} \sin \beta t), \\ \mathbf{x}_2(t) &= e^{\alpha t}(\mathbf{u} \sin \beta t + \mathbf{w} \cos \beta t). \end{aligned}$$

Случай 2.3: λ — действительное (или комплексное) число алгебраической кратности $k > 1$ (кратный корень).

Этот случай требует построения жордановых цепочек (присоединённых векторов).

Пусть для собственного числа λ его геометрическая кратность (число линейно независимых собственных векторов) равна g , и $g < k$. Каждому собственному вектору соответствует жорданова цепочка длины m , где $1 \leq m \leq k$. Сумма длин всех цепочек для данного λ равна k .

Общий вид решения, соответствующего жордановой цепочке длины m , начинающейся с собственного вектора \mathbf{h}_0 :

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \left[\mathbf{h}_0 + t\mathbf{h}_1 + \frac{t^2}{2!}\mathbf{h}_2 + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\mathbf{h}_{m-1} \right],$$

где векторы $\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{m-1}$ удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} (A - \lambda I)\mathbf{h}_0 = 0 & (\text{собственный вектор}), \\ (A - \lambda I)\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_0, \\ (A - \lambda I)\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_1, \\ \dots \\ (A - \lambda I)\mathbf{h}_{m-1} = \mathbf{h}_{m-2}. \end{cases}$$

Векторы $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{m-1}$ называются присоединёнными векторами. На практике их находят последовательным решением цепочки неоднородных линейных систем (причём разрешимость гарантирована структурой жордановой формы).

Замечание: Если для λ кратности k существует ровно k линейно независимых собственных векторов (т.е. $g = k$), то все решения имеют вид $e^{\lambda t} \mathbf{v}_i$, и присоединённые векторы не нужны. Это случай диагонализируемой матрицы.

Пример 1 (Разные типы собственных чисел):

Решить систему: $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$.

1. Характеристическое уравнение: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Корни: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ (действительные, простые).
2. Для $\lambda_1 = 2$: $(A - 2I)\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = (2, -1)^T$. Решение: $\mathbf{x}_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
3. Для $\lambda_2 = 3$: $(A - 3I)\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = (1, -1)^T$. Решение: $\mathbf{x}_2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
4. Общее решение: $\mathbf{x}(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Пример 2 (Кратный корень с недостатком собственных векторов):

Решить систему: $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$.

1. Хар. уравнение: $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$. Корень $\lambda = 2$ кратности $k = 2$.
2. Находим собственные векторы: $(A - 2I)\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0$. Ранг матрицы 1, пространство собственных векторов одномерно.
- Базисный вектор: $\mathbf{h}_0 = (1, 1)^T$. $g = 1 < k = 2$, нужен присоединённый вектор.
3. Ищем \mathbf{h}_1 из системы: $(A - 2I)\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_0$, т.е. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Одно из решений: $\mathbf{h}_1 = (1, 0)^T$ (можно взять $(0, -1)^T$ и т.д.).
4. Строим два линейно независимых решения:

- $\mathbf{x}_1(t) = e^{2t} \mathbf{h}_0 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $\mathbf{x}_2(t) = e^{2t}(\mathbf{h}_0 t + \mathbf{h}_1) = e^{2t} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix}$.

5. Общее решение: $\mathbf{x}(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix}$.

Часть 3: Решение неоднородных систем ($\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$)

Метод 1: Вариация произвольных постоянных (метод Лагранжа) — универсальный.

Алгоритм:

1. Найти фундаментальную матрицу $\Phi(t)$ соответствующей однородной системы.
2. Искать частное решение неоднородной системы в виде $\mathbf{x}_{\text{чн}}(t) = \Phi(t)\mathbf{C}(t)$, где $\mathbf{C}(t)$ — неизвестная вектор-функция.
3. Подстановка в исходную систему приводит к уравнению:

$$\frac{d\mathbf{x}_{\text{чн}}}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} \mathbf{C}(t) + \Phi(t) \frac{d\mathbf{C}}{dt} = A\Phi(t)\mathbf{C}(t) + \Phi(t) \frac{d\mathbf{C}}{dt}.$$

Учитывая, что $\frac{d\Phi}{dt} = A\Phi$, получаем:

$$A\Phi\mathbf{C} + \Phi \frac{d\mathbf{C}}{dt} = A(\Phi\mathbf{C}) + \mathbf{f}(t) \quad \Rightarrow \quad \Phi(t) \frac{d\mathbf{C}}{dt} = \mathbf{f}(t).$$

Так как $\det \Phi(t) \neq 0$, то $\Phi^{-1}(t)$ существует. Следовательно:

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}(t) = \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt + \mathbf{C}_0.$$

4. Общее решение неоднородной системы:

$$\mathbf{x}_{\text{он}}(t) = \Phi(t)\mathbf{C}_0 + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt.$$

Первое слагаемое — общее однородное, второе — частное неоднородное (при $\mathbf{C}_0 = 0$).

Формула Коши (решение задачи с начальным условием $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$):

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau.$$

Метод 2: Метод неопределённых коэффициентов — для специального вида $\mathbf{f}(t)$.

Применим, если $\mathbf{f}(t)$ — квазиполином, т.е. функция вида:

$$\mathbf{f}(t) = e^{\alpha t} [\mathbf{P}_m(t) \cos \beta t + \mathbf{Q}_l(t) \sin \beta t],$$

где $\mathbf{P}_m(t), \mathbf{Q}_l(t)$ — вектор-многочлены степеней m и l соответственно.

Алгоритм:

1. Записать характеристическое число $s = \alpha + i\beta$.
2. Определить его кратность r как корня характеристического уравнения $\det(A - \lambda I) = 0$ (кратность $r = 0$, если не корень).
3. Частное решение искать в виде:

$$\mathbf{x}_{\text{чи}}(t) = t^r e^{\alpha t} [\tilde{\mathbf{P}}_k(t) \cos \beta t + \tilde{\mathbf{Q}}_k(t) \sin \beta t],$$

где $k = \max(m, l)$, а $\tilde{\mathbf{P}}_k(t), \tilde{\mathbf{Q}}_k(t)$ — вектор-многочлены степени k с неопределенными скалярными коэффициентами.

Например, для $k = 1$: $\tilde{\mathbf{P}}_1(t) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 t$, $\tilde{\mathbf{Q}}_1(t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 t$, где $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i$ — неизвестные векторы-столбцы.

4. Подставить $\mathbf{x}_{\text{чи}}(t)$ и его производную в исходную систему. Используя линейную независимость функций $e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t$ и т.д., получить систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов векторов $\tilde{\mathbf{P}}_k$ и $\tilde{\mathbf{Q}}_k$.
5. Решить эту систему и найти коэффициенты.

Пример 3 (Метод неопределённых коэффициентов):

Решить систему: $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Однородная часть. Хар. уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, корни $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$.

- $\lambda_1 = -1$: собств. вектор $\mathbf{v}_1 = (1, -2)^T$.
- $\lambda_2 = 3$: собств. вектор $\mathbf{v}_2 = (1, 2)^T$.
- ФМ: $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -2e^{-t} & 2e^{3t} \end{pmatrix}$, общее однородное: $\mathbf{x}_{\text{он}} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Правая часть $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Здесь $\alpha = 1, \beta = 0, s = 1$. Степени многочленов: $m = 0, l = 0, k = 0$.

Число $s = 1$ не является корнем характеристического уравнения ($r = 0$). Ищем частное решение в виде:

$$\mathbf{x}_{\text{чи}}(t) = e^t \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \text{const.}$$

3. Подставляем в систему: $\frac{d}{dt}(e^t \mathbf{a}) = e^t \mathbf{a} = A(e^t \mathbf{a}) + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$. Сокращаем $e^t \neq 0$:

$$\mathbf{a} = A\mathbf{a} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} a_1 = a_1 + a_2 + 1, \\ a_2 = 4a_1 + a_2 + 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = a_2 + 1, \\ 0 = 4a_1. \end{cases} \Rightarrow a_2 = -1, \quad a_1 = 0.$$

4. Итак, $\mathbf{x}_{\text{чи}}(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$5. \text{ Общее решение: } \mathbf{x}(t) = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Часть 4: Связь с уравнениями высшего порядка

Любое линейное уравнение n -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = f(t)$$

эквивалентно системе n уравнений первого порядка с помощью стандартной замены:

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad \dots, \quad x_n = y^{(n-1)}.$$

Тогда:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \cdots - a_1(t)x_n + f(t). \end{array} \right.$$

Матрица этой системы — матрица Фробениуса (相伴矩阵). Для уравнения с постоянными коэффициентами её характеристическое уравнение совпадает с характеристическим уравнением исходного уравнения. Это даёт ещё один способ решения систем специального вида.

Резюме и общий алгоритм действий

При получении линейной системы:

1. Классифицируйте: однородная/неоднородная, постоянные/переменные коэффициенты.
2. Для однородной системы с постоянной матрицей A :
 - Найдите собственные числа λ_i матрицы A .
 - Для каждого λ_i постройте соответствующее число линейно независимых решений, учитывая его алгебраическую и геометрическую кратность. Используйте жордановы цепочки для кратных корней.
 - Общее решение — линейная комбинация построенных решений.
3. Для неоднородной системы с постоянной матрицей A :
 - Если $f(t)$ — квазиполином, используйте метод неопределённых коэффициентов (быстрее).
 - Если $f(t)$ имеет произвольный вид или метод неопределённых коэффициентов сложен, используйте метод вариации постоянных (формулу Коши). Для этого предварительно найдите ФМ $\Phi(t)$ однородной системы.
4. Для систем с переменными коэффициентами: в общем случае метод вариации постоянных — основной инструмент, но требуется знать ФСР однородной системы, что является отдельной сложной задачей.

Пример 4 (Комплексная задача, объединяющая методы):

Решить задачу Коши:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cos t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение по шагам:

1. Однородная система: $\dot{\mathbf{x}}_h = A\mathbf{x}_h$.
- Хар. уравнение: $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm i$.
- Для $\lambda = -1 + i$ находим собственный вектор: $(A - (-1 + i)I)\mathbf{v} = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1-i)v_1 + v_2 = 0.$$

$$\text{Берём } \mathbf{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} + i\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}}.$$

- Два действительных решения:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(t) &= e^{-t}(\mathbf{u} \cos t - \mathbf{w} \sin t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_2(t) &= e^{-t}(\mathbf{u} \sin t + \mathbf{w} \cos t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\sin t + \cos t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

- Фундаментальная матрица:

$$\Phi(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\cos t - \sin t & -\sin t + \cos t \end{pmatrix}.$$

Проверим вронсиан: $\det \Phi(t) = e^{-2t}[(\cos t)(-\sin t + \cos t) - (\sin t)(-\cos t - \sin t)] = e^{-2t}(\cos^2 t + \sin^2 t) = e^{-2t} \neq 0$.

- Общее однородное: $\mathbf{x}_h(t) = \Phi(t)\mathbf{C}$.

$$2. \text{ Частное решение неоднородной системы. Правая часть: } \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cos t \end{pmatrix} = e^{0 \cdot t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t \right].$$

- $\alpha = 0, \beta = 1$, характеристическое число $s = i$.
- Проверим, является ли $s = i$ корнем характеристического уравнения: $\lambda = i$. Подставляем: $i^2 + 2i + 2 = -1 + 2i + 2 = 1 + 2i \neq 0$. Значит, не является ($r = 0$).
- Степени многочленов: $m = 0, l = 0, k = 0$. Ищем решение в виде:

$$\mathbf{x}_{\text{ЧИ}}(t) = \mathbf{a} \cos t + \mathbf{b} \sin t, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

- Находим производную: $\dot{\mathbf{x}}_{\text{ЧИ}} = -\mathbf{a} \sin t + \mathbf{b} \cos t$.
 - Подставляем в систему $\dot{\mathbf{x}}_{\text{ЧИ}} = A\mathbf{x}_{\text{ЧИ}} + \mathbf{f}(t)$:
- ```
$$
\mathbf{a} \sin t + \mathbf{b} \cos t = A(\mathbf{a} \cos t + \mathbf{b} \sin t) + \binom{0}{2} \cos t.
$$

```
- Приравниваем коэффициенты при  $\cos t$  и  $\sin t$  отдельно:

```
$$
\begin{aligned}
&\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} \sin t + \mathbf{b} \cos t = A(\mathbf{a} \cos t + \mathbf{b} \sin t) + \binom{0}{2} \cos t \\
\mathbf{a} = A \mathbf{b} + \binom{0}{2} \cos t \\
\mathbf{a} = A \mathbf{b} + \binom{0}{2} \sin t
\end{array} \right. \\
&\left. \begin{array}{l} \mathbf{a} = A \mathbf{b} + \binom{0}{2} \cos t \\
\mathbf{a} = A \mathbf{b} + \binom{0}{2} \sin t
\end{array} \right\}
\end{aligned}

```

- Распишем покомпонентно (система 4 уравнения):

Из первого векторного уравнения ( $\mathbf{b} = A\mathbf{a} + (0, 2)^T$ ):

$$\begin{cases} b_1 = a_2 \\ b_2 = -2a_1 - 2a_2 + 2 \end{cases}$$

Из второго ( $-\mathbf{a} = A\mathbf{b}$ ):

```
$$
\begin{aligned}
&\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} = A \mathbf{b} + \binom{0}{2} \cos t \\
\mathbf{a} = A \mathbf{b} + \binom{0}{2} \sin t
\end{array} \right. \\
&\left. \begin{array}{l} \mathbf{a} = A \mathbf{b} + \binom{0}{2} \cos t \\
\mathbf{a} = A \mathbf{b} + \binom{0}{2} \sin t
\end{array} \right\}
\end{aligned}

```

- Решаем: из  $b_1 = a_2$  и  $-a_2 = -2b_1 - 2b_2 \Rightarrow a_2 = 2b_1 + 2b_2 = 2a_2 + 2b_2 \Rightarrow -a_2 = 2b_2 \Rightarrow b_2 = -a_2/2$ .

Из  $-a_1 = b_2 = -a_2/2 \Rightarrow a_1 = a_2/2$ .

Подставляем  $b_2 = -a_2/2$  в  $b_2 = -2a_1 - 2a_2 + 2: -\frac{a_2}{2} = -2\left(\frac{a_2}{2}\right) - 2a_2 + 2 = -a_2 - 2a_2 + 2 = -3a_2 + 2$ .

Получаем:  $-\frac{a_2}{2} = -3a_2 + 2 \Rightarrow -\frac{a_2}{2} + 3a_2 = 2 \Rightarrow \frac{5}{2}a_2 = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{4}{5}$ .

Тогда  $a_1 = \frac{a_2}{2} = \frac{2}{5}$ ,  $b_1 = a_2 = \frac{4}{5}$ ,  $b_2 = -\frac{a_2}{2} = -\frac{2}{5}$ .

- Итак:  $\mathbf{x}_{\text{ЧИ}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \sin t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \cos t + 4 \sin t \\ 4 \cos t - 2 \sin t \end{pmatrix}$ .

- Общее решение неоднородной системы:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{C} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \cos t + 4 \sin t \\ 4 \cos t - 2 \sin t \end{pmatrix}.$$

4. Находим  $\mathbf{C}$  из начального условия  $\mathbf{x}(0) = (1, 0)^T$ :

$$\mathbf{x}(0) = \Phi(0)\mathbf{C} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Phi(0) = e^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}.$$

Решаем:  $C_1 = 3/5$ ,  $-C_1 + C_2 = -4/5 \Rightarrow -3/5 + C_2 = -4/5 \Rightarrow C_2 = -1/5$ .

Итак,  $\mathbf{C} = (3/5, -1/5)^T$ .

5. Окончательное решение задачи Коши:

Подставляем  $\mathbf{C}$  в общее решение:

$$\mathbf{x}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\cos t - \sin t & -\sin t + \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \cos t + 4 \sin t \\ 4 \cos t - 2 \sin t \end{pmatrix}.$$

После умножения и сложения получаем явный ответ (здесь его можно оставить в компактной форме или упростить).

Этот пример демонстрирует полный цикл работы с линейной системой: от построения ФСР однородной системы через комплексные собственные числа до применения метода неопределённых коэффициентов и удовлетворения начальным условиям.

## Полный алгоритмический справочник по курсу дифференциальных уравнений

### I. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

A. Линейные уравнения n-го порядка

Общий вид:  $y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = f(t)$

Алгоритм 1: Решение однородного уравнения (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами

1. Составить характеристическое уравнение:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

2. Найти корни  $\lambda_i$  и их кратности  $k_i$

3. Построить ФСР:

- Простой действительный корень  $\lambda$ :  $e^{\lambda t}$
- Действительный корень  $\lambda$  кратности  $k$ :  $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}$
- Простые комплексные  $\alpha \pm i\beta$ :  $e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t$
- Кратные комплексные  $\alpha \pm i\beta$  кратности  $k$ :  $e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t, te^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{k-1}e^{\alpha t} \cos \beta t, t^{k-1}e^{\alpha t} \sin \beta t$

4. Общее решение:  $y_{\text{оо}}(t) = C_1y_1(t) + \dots + C_ny_n(t)$

Алгоритм 2: Решение неоднородного уравнения (ЛНДУ) — метод неопределённых коэффициентов

Применим для:  $f(t) = e^{\alpha t}[P_m(t) \cos \beta t + Q_l(t) \sin \beta t]$

1. Определить число  $s = \alpha + i\beta$

2. Найти кратность  $r$  корня  $s$  в характеристическом уравнении ( $r = 0$  если не корень)

3. Искать частное решение:

$$y_{\text{чн}}(t) = t^r e^{\alpha t} [\tilde{P}_k(t) \cos \beta t + \tilde{Q}_k(t) \sin \beta t]$$

где  $k = \max(m, l)$ ,  $\tilde{P}_k, \tilde{Q}_k$  — многочлены степени  $k$  с неопределенными коэффициентами

4. Подставить в уравнение → приравнять коэффициенты → найти коэффициенты

5. Общее решение:  $y_{\text{оп}}(t) = y_{\text{оо}}(t) + y_{\text{чн}}(t)$

Алгоритм 3: Метод вариации постоянных (универсальный)

1. Найти ФСР  $y_1, \dots, y_n$  однородного уравнения

2. Искать решение в виде:  $y_{\text{чн}}(t) = C_1(t)y_1(t) + \dots + C_n(t)y_n(t)$

3. Решить систему для  $C'_i(t)$ :

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + \dots + C'_n y_n = 0 \\ C'_1 y'_1 + \dots + C'_n y'_n = 0 \\ \vdots \\ C'_1 y_1^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)} = f(t) \end{cases}$$

4. Проинтегрировать  $C'_i(t)$

Б. Линейные системы первого порядка

Общий вид:  $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Алгоритм 4: Решение однородной системы с постоянной матрицей

1. Найти собственные числа  $\lambda_i$  матрицы  $A$

2. Для каждого  $\lambda$  построить решения:

Случай А: Простой действительный  $\lambda$

- Найти собственный вектор  $\mathbf{v}: (A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$
- Решение:  $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$

Случай В: Простые комплексные  $\lambda = \alpha \pm i\beta$

- Для  $\lambda = \alpha + i\beta$  найти комплексный собственный вектор  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + i\mathbf{w}$
- Два действительных решения:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= e^{\alpha t}(\mathbf{u} \cos \beta t - \mathbf{w} \sin \beta t) \\ \mathbf{x}_2 &= e^{\alpha t}(\mathbf{u} \sin \beta t + \mathbf{w} \cos \beta t) \end{aligned}$$

Случай С: Кратный корень  $\lambda$  кратности  $k$

- Найти собственные и присоединённые векторы из цепочки:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)\mathbf{h}_0 &= 0 \text{ (собственный)} \\ (A - \lambda I)\mathbf{h}_1 &= \mathbf{h}_0 \text{ (присоединённый)} \end{aligned}$$

- ...
- Решение:  $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}[\mathbf{h}_0 + t\mathbf{h}_1 + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\mathbf{h}_{m-1}]$

3. Общее решение:  $\mathbf{x}_{\text{общ}}(t) = \Phi(t)\mathbf{C}$ , где  $\Phi(t)$  — фундаментальная матрица

## Алгоритм 5: Решение неоднородной системы — метод вариации постоянных

1. Найти фундаментальную матрицу  $\Phi(t)$  однородной системы

2. Частное решение:  $\mathbf{x}_{\text{ЧМ}}(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt$

3. Формула Коши (с начальным условием  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ):

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau$$

## Алгоритм 6: Метод неопределённых коэффициентов для систем

Применим для:  $\mathbf{f}(t) = e^{\alpha t}[\mathbf{P}_m(t) \cos \beta t + \mathbf{Q}_l(t) \sin \beta t]$

1. Определить  $s = \alpha + i\beta$  и его кратность  $r$  как собственного числа матрицы  $A$

2. Искать частное решение:

$$\mathbf{x}_{\text{ЧМ}}(t) = t^r e^{\alpha t}[\hat{\mathbf{P}}_k(t) \cos \beta t + \hat{\mathbf{Q}}_k(t) \sin \beta t]$$

где  $k = \max(m, l)$ ,  $\hat{\mathbf{P}}_k$ ,  $\hat{\mathbf{Q}}_k$  — вектор-многочлены степени  $k$

3. Подставить в систему → решить линейную систему для коэффициентов

## II. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ И ОСОБЫХ ТОЧЕК

### A. Основные определения

Автономная система:  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Положение равновесия:  $\mathbf{x}_0$  такое, что  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$

Устойчивость по Ляпунову:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon \forall t \geq 0$$

Асимптотическая устойчивость: устойчивость +  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| = 0$

### Алгоритм 7: Исследование устойчивости (первый метод Ляпунова)

1. Найти положения равновесия:  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$

2. Вычислить матрицу Якоби:

$$A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}_0}$$

3. Найти собственные числа  $\lambda_i$  матрицы  $A$

4. Критерий:

- Если  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  для всех  $i \rightarrow$  асимптотически устойчиво
- Если  $\exists \lambda_k : \operatorname{Re} \lambda_k > 0 \rightarrow$  неустойчиво
- Если  $\exists \lambda_i : \operatorname{Re} \lambda_i = 0$  (критический случай)  $\rightarrow$  требуется второй метод Ляпунова

### Алгоритм 8: Классификация особых точек на плоскости (n=2)

Для системы:  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ ,  $\det A \neq 0$

Обозначения:  $p = -\operatorname{tr} A$ ,  $q = \det A$ ,  $D = p^2 - 4q$

1. Вычислить  $p, q, D$

2. Классификация:

| Условия               | Тип точки         | Устойчивость             |
|-----------------------|-------------------|--------------------------|
| $q < 0$               | Седло             | Неустойчиво              |
| $q > 0, p > 0, D > 0$ | Устойчивый узел   | Асимптотически устойчиво |
| $q > 0, p < 0, D > 0$ | Неустойчивый узел | Неустойчиво              |

| Условия               | Тип точки                      | Устойчивость                  |
|-----------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| $q > 0, p > 0, D < 0$ | Устойчивый фокус               | Асимптотически устойчиво      |
| $q > 0, p < 0, D < 0$ | Неустойчивый фокус             | Неустойчиво                   |
| $q > 0, p = 0$        | Центр                          | Устойчиво (не асимптотически) |
| $q > 0, p > 0, D = 0$ | Дикритический/вырожденный узел | Асимптотически устойчиво      |

### Алгоритм 9: Второй метод Ляпунова (прямой метод)

Используется в критических случаях

1. Найти функцию Ляпунова  $V(\mathbf{x})$  такую, что:

- $V(\mathbf{x}) > 0$  при  $\mathbf{x} \neq 0$ ,  $V(0) = 0$
- $\dot{V}(\mathbf{x}) = \nabla V \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0$  (в силу системы)

2. Критерии:

- Если такая  $V$  существует  $\rightarrow$  устойчиво
- Если  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  при  $\mathbf{x} \neq 0 \rightarrow$  асимптотически устойчиво
- Если  $\ddot{V}(\mathbf{x}) > 0 \rightarrow$  неустойчиво

## III. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Постановка задачи:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0, T]$$

Сетка:  $t_k = t_0 + kh$ ,  $h = \frac{T-t_0}{N}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$

## Алгоритм 10: Явный метод Эйлера

$$y[\theta] = y\theta$$

for  $k = \theta$  to  $N - 1$ :

$$y[k + 1] = y[k] + h * f(t[k], y[k])$$

Точность:  $O(h)$

Устойчивость: Условная. Для  $y' = \lambda y$ :  $|1 + h\lambda| < 1$

## Алгоритм 11: Неявный метод Эйлера

$$y[\theta] = y\theta$$

for  $k = \theta$  to  $N - 1$ :

$$\text{Решить уравнение: } y[k + 1] = y[k] + h * f(t[k + 1], y[k + 1])$$

(Итерационно или методом Ньютона)

Точность:  $O(h)$

Устойчивость: Абсолютная (для  $\lambda < 0$  устойчив при любом  $h > 0$ )

## Алгоритм 12: Модифицированный метод Эйлера (RK2)

Вариант 1 — средняя точка:

$$y[\theta] = y\theta$$

for  $k = \theta$  to  $N - 1$ :

$$k1 = h * f(t[k], y[k])$$

$$y[k + 1] = y[k] + h * f(t[k] + h/2, y[k] + k1/2)$$

Вариант 2 — Эйлер-Коши (прогноз-коррекция):

$$y[0] = y0$$

for  $k = 0$  to  $N-1$ :

$$y\_pred = y[k] + h * f(t[k], y[k]) \text{### Прогноз}$$

$$y[k+1] = y[k] + h/2 * (f(t[k], y[k]) +$$

$$f(t[k+1], y\_pred)) \text{### Коррекция}$$

Точность:  $O(h^2)$

## Алгоритм 13: Метод Рунге-Кутты 4-го порядка (RK4)

$$y[0] = y0$$

for  $k = 0$  to  $N-1$ :

$$k1 = h * f(t[k], y[k])$$

$$k2 = h * f(t[k] + h/2, y[k] + k1/2)$$

$$k3 = h * f(t[k] + h/2, y[k] + k2/2)$$

$$k4 = h * f(t[k] + h, y[k] + k3)$$

$$y[k+1] = y[k] + (k1 + 2k2 + 2k3 + k4)/6$$

Точность:  $O(h^4)$

## Алгоритм 14: Численное решение систем ОДУ

Для системы:  $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$

Метод Эйлера для систем:

$\mathbf{y}[0] = \mathbf{y}_0$

for  $k = 0$  to  $N-1$ :

$\mathbf{y}[k+1] = \mathbf{y}[k] + h * \mathbf{f}(t[k], \mathbf{y}[k])$

(все операции — покомпонентно)

Метод RK4 для систем:  $k_1, k_2, k_3, k_4$  — векторы, формулы те же.

## IV. БЫСТРАЯ ШПАРГАЛКА ПО ВЫБОРУ МЕТОДА

Для аналитического решения:

| Тип задачи                               | Метод                                         |
|------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| ЛОДУ с постоянными коэффициентами        | Характеристическое уравнение                  |
| ЛНДУ с квазиполиномиальной правой частью | Метод неопределённых коэффициентов            |
| ЛНДУ с произвольной правой частью        | Метод вариации постоянных                     |
| Система с постоянной матрицей            | Собственные числа и векторы                   |
| Система с переменными коэффициентами     | Метод вариации постоянных (если известна ФСР) |

Для анализа устойчивости:

1. Найти положения равновесия
2. Линеаризовать → матрица Якоби
3. Собственные числа → критерий устойчивости
4. Для плоскости → классификация по  $p, q, D$

Для численного решения:

| Ситуация                            | Рекомендуемый метод          |
|-------------------------------------|------------------------------|
| Учебные задачи, простота            | Явный метод Эйлера           |
| Жесткие системы                     | Неявный метод Эйлера         |
| Баланс точности и простоты          | RK2 (модифицированный Эйлер) |
| Высокая точность, нежесткие системы | RK4                          |

## Проверка численного метода:

1. Уменьшить шаг  $h$  в 2 раза
2. Сравнить решения → оценить погрешность
3. Проверить устойчивость (решение не должно "взрываться")

## Ключевые формулы для запоминания:

1. Характеристическое уравнение:  $\det(A - \lambda I) = 0$
2. Формула Лиувилля:  $W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr } A(\tau) d\tau\right)$
3. Формула Коши:  $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau$
4. Классификация на плоскости:  $p = -\text{tr } A, q = \det A$
5. Условие устойчивости явного Эйлера:  $|1 + h\lambda| < 1$

Этот справочник содержит все необходимые алгоритмы для решения основных задач курса дифференциальных уравнений. Каждый алгоритм представлен в виде пошаговой инструкции, которую можно непосредственно применять на практике.