ЧАСТЬ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ТИПА (Face Control)

Чтобы понять, с чем вы имеете дело, анализируйте уравнение в следующем порядке:

1. **Это СИСТЕМА?** (наличие фигурных скобок).
   - Вид $\dot{x} = Ax$ или $\dot{x} = Ax + f(t) \to$ **№13 Система линейных уравнений**.
   - Если нужно найти $e^{At} \to$ **№20 Экспонента от матрицы**.
   - Сложная нелинейная система или вид $dx/P = dy/Q = dz/R \to$ **№16 Метод интегрируемых комбинаций**.
2. **Это ОДНО УРАВНЕНИЕ. Какой порядок?** (ищем максимальную производную).
   - **Порядок выше 1-го ($y'', y'''\dots$):**
     - Нет y (только x, y', y'') или нет x (только y, y', y'') $\to$ **№7 Сводящиеся к 1-ому порядку (понижение)**.
     - Линейное с числами перед $y^{(k)} \to$ **№11, 12 Линейное с постоянными коэффициентами**.
     - Перед $y^{(k)}$ стоит x^k (например, x^2y'') $\to$ **№9 Уравнение Эйлера**.
     - Коэффициенты зависят от x (и не Эйлер) $\to$ **№14 Уравнение 2-ого порядка с непостоянными коэффициентами**.
   - **Порядок 1-й (y' или dy, dx):**
     - $y' = f(y/x)$ или все слагаемые одной степени $\to$ **№1 Однородное 1-ого порядка**.
     - $y' + P(x)y = Q(x) \to$ **№2 Линейное 1-ого порядка**.
     - $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ $(n \neq 0, 1) \to$ **№8 Уравнение Бернулли**.
     - $Pdx + Qdy = 0$ и $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x \to$ **№3 Уравнение в полных дифференциалах**.
     - Нельзя выразить y' (оно в синусе, логарифме или степени) $\to$ **№6 Не разрешённое относительно производной**.
3. **Специальные условия:**
   - Дано $y(x_0) = y_0 \to$ **№5 Задача Коши**.
   - Условия в двух точках $y(0) = a, y(1) = b \to$ **№15 Краевая задача**.
   - Слова «исследовать на устойчивость» $\to$ **№17 Устойчивость**.

ЧАСТЬ 2. ПАРАГРАФЫ С РЕШЕНИЕМ И РАЗБОРОМ

1. Однородное 1-ого порядка

Признак: $y' = f(y/x)$ или $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, где M, N — однородные функции одной степени.

Алгоритм:

1. Замена $y = ux$, тогда $y' = u'x + u$
2. Подставляем: $u'x + u = f(u)$
3. Разделяем переменные: $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$
4. Интегрируем обе части
5. Возвращаемся к $y = ux$

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР: Решить $(x^2 + y^2)dx - 2xy\,dy = 0$

Шаг 1. Проверяем однородность: $M = x^2 + y^2$, $N = -2xy$ — обе степени 2. ✓

Шаг 2. Замена $y = ux$, тогда $dy = u\,dx + x\,du$

Шаг 3. Подставляем:

$$(x^2 + u^2x^2)dx - 2x \cdot ux(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$x^2(1 + u^2)dx - 2ux^2(u\,dx + x\,du) = 0$$

Шаг 4. Делим на x^2:

$$(1 + u^2)dx - 2u^2dx - 2ux\,du = 0$$

$$(1-u^2)dx = 2ux\,du$$

Шаг 5. Разделяем переменные:

$$\frac{dx}{x} = \frac{2u\,du}{1-u^2}$$

Шаг 6. Интегрируем:

$$\ln|x| = -\ln|1-u^2| + \ln C$$

$$\ln|x| + \ln|1-u^2| = \ln C$$

$$x(1-u^2) = C$$

Шаг 7. Возвращаемся к y: $u = y/x$

$$x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = C$$

$$\boxed{x^2 - y^2 = Cx}$$

2. Линейное 1-ого порядка

Вид: $y' + P(x)y = Q(x)$

Алгоритм (метод $y = uv$):

1. Подстановка $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$
2. Получаем: $u'v + u(v' + Pv) = Q$
3. Выбираем v так, чтобы $v' + Pv = 0 \to v = e^{-\int P\,dx}$
4. Тогда $u' = \frac{Q}{v} \to u = \int \frac{Q}{v}\,dx + C$
5. Ответ: $y = uv$

Формула общего решения:

$$y = e^{-\int P\,dx}\left(\int Q \cdot e^{\int P\,dx}\,dx + C\right)$$

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР: Решить $y' - \frac{2y}{x} = x^2$

Шаг 1. Определяем: $P(x) = -\frac{2}{x}$, $Q(x) = x^2$

Шаг 2. Находим v:

$$v' + Pv = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -P\,dx = \frac{2}{x}dx$$

$$\ln v = 2\ln x \Rightarrow v = x^2$$

Шаг 3. Находим u:

$$u'v = Q \Rightarrow u' \cdot x^2 = x^2 \Rightarrow u' = 1$$

$$u = x + C$$

Шаг 4. Ответ:

$$y = uv = (x + C) \cdot x^2 = \boxed{x^3 + Cx^2}$$

Проверка: $y' = 3x^2 + 2Cx$, $\frac{2y}{x} = 2x^2 + 2Cx$
$y' - \frac{2y}{x} = 3x^2 + 2Cx - 2x^2 - 2Cx = x^2$ ✓

3. Уравнение в полных дифференциалах

Признак: $Pdx + Qdy = 0$, где $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Алгоритм:

1. Проверить условие полного дифференциала
2. Искать потенциал $U(x, y)$: $U = \int P\, dx + \varphi(y)$
3. Дифференцировать по y: $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$
4. Найти $\varphi'(y)$ и проинтегрировать
5. Ответ: $U(x, y) = C$

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР: Решить $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$

Шаг 1. Проверяем условие:

$$P = 3x^2 + 6xy^2, \quad Q = 6x^2y + 4y^3$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy \quad ✓$$

Шаг 2. Ищем потенциал U:

$$U = \int P\, dx = \int (3x^2 + 6xy^2)dx = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)$$

Шаг 3. Дифференцируем по y и приравниваем к Q:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3$$

$$\varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4$$

Шаг 4. Ответ:

$$\boxed{x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C}$$

4. Интегрирующий множитель

Суть: Если уравнение не в полных дифференциалах, умножаем на μ, чтобы стало.

Алгоритм:

1. Вычислить $\frac{P'_y - Q'_x}{Q}$. Если зависит только от x:

$$\mu = e^{\int \frac{P'_y - Q'_x}{Q}\, dx}$$

2. Вычислить $\frac{Q'_x - P'_y}{P}$. Если зависит только от y:

$$\mu = e^{\int \frac{Q'_x - P'_y}{P}\,dy}$$

3. Умножить уравнение на μ и решить как тип №3

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР: Решить $(xy+1)dx + x(x+4y-2)dy = 0$

Шаг 1. Проверяем: $P = xy+1$, $Q = x^2+4xy-2x$

$$P'_y = x, \quad Q'_x = 2x+4y-2$$

$$P'_y \neq Q'_x$$

— не в полных дифференциалах.

Шаг 2. Пробуем найти $\mu(x)$:

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{x-2x-4y+2}{x^2+4xy-2x} = \frac{-x-4y+2}{x(x+4y-2)} = \frac{-(x+4y-2)}{x(x+4y-2)} = -\frac{1}{x}$$

Зависит только от x! ✓

Шаг 3. Находим множитель:

$$\mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

Шаг 4. Умножаем уравнение на $\mu = 1/x$:

$$\left(y + \frac{1}{x}\right)dx + (x+4y-2)dy = 0$$

Шаг 5. Проверяем: $\tilde{P}'_y = 1$, $\tilde{Q}'_x = 1$ ✓

Шаг 6. Ищем потенциал:

$$U = \int \tilde{Q}\,dy = \int (x+4y-2)dy = xy + 2y^2 - 2y + \psi(x)$$

$$U'_x = y + \psi'(x) = y + \frac{1}{x} \Rightarrow \psi(x) = \ln|x|$$

Шаг 7. Ответ:

$$\boxed{xy + 2y^2 - 2y + \ln|x| = C}$$

5. Задача Коши

Алгоритм:

1. Найти общее решение $y = f(x, C)$
2. Подставить $y(x_0) = y_0$
3. Найти конкретное C
4. Записать частное решение

Теорема существования и единственности:
Если $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ непрерывны в окрестности (x_0, y_0), то ∃! решение задачи Коши.

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР: Решить $y' = 2xy$, $y(0) = 3$

Шаг 1. Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

Шаг 2. Интегрируем:

$$\ln|y| = x^2 + C_1$$

$$y = Ce^{x^2}$$

(общее решение)

Шаг 3. Подставляем $y(0) = 3$:

$$3 = C \cdot e^0 = C$$

Шаг 4. Ответ:

$$\boxed{y = 3e^{x^2}}$$

6. Не разрешённое относительно производной

Вид: $F(x, y, y') = 0$

Алгоритм (параметризация):

1. Ввести параметр $p = y'$
2. Если можно выразить $y = f(x, p)$:
   - Дифференцируем по x: $\frac{dy}{dx} = p$
   - Получаем $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} = p$
   - Решаем относительно $p(x)$
3. Ответ в параметрическом виде: $\{x = x(p), y = y(p)\}$

Уравнение Клеро: $y = xy' + \varphi(y')$

- Общее решение: $y = Cx + \varphi(C)$ (семейство прямых)
- Особое решение: из системы $\{y = xp + \varphi(p), 0 = x + \varphi'(p)\}$ — исключить p

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР: Решить $y = xy' - (y')^2$ (уравнение Клеро)

Шаг 1. Это уравнение Клеро с $\varphi(p) = -p^2$

Шаг 2. Общее решение — заменяем y' на C:

$$\boxed{y = Cx - C^2}$$

(семейство прямых)

Шаг 3. Особое решение — из системы:

$$\begin{cases} y = xp - p^2 \\ 0 = x - 2p \end{cases}$$

Из второго: $p = x/2$. Подставляем в первое:

$$y = x \cdot \frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}$$

Ответ: Особое решение: $\boxed{y = \frac{x^2}{4}}$ (парабола — огибающая семейства прямых)

7. Сводящиеся к 1-ому порядку (понижение)

Тип 1: Нет y — только x, y', y''

- Замена: $p = y'(x)$, тогда $y'' = p'$
- Получаем уравнение 1-го порядка относительно $p(x)$
- Затем $y = \int p\,dx$

Тип 2: Нет x — только y, y', y''

- Замена: $p = y'$ как функция y
- Тогда $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$
- Получаем уравнение 1-го порядка относительно $p(y)$
- Затем $x = \int \frac{dy}{p(y)}$

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР (тип 1): Решить $xy'' = y' + x^2$

Шаг 1. Замена $p = y'$, тогда $y'' = p'$:

$$xp' = p + x^2$$

Шаг 2. Это линейное относительно p: $p' - \frac{p}{x} = x$

Шаг 3. Решаем (см. §2): $P = -1/x, Q = x$

$$v = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$$

$$u' \cdot x = x \Rightarrow u' = 1 \Rightarrow u = x + C_1$$

$$p = (x + C_1) \cdot x = x^2 + C_1x$$

Шаг 4. Возвращаемся к y:

$$y = \int p\,dx = \int (x^2 + C_1x)dx = \boxed{\frac{x^3}{3} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2}$$

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР (тип 2): Решить $yy'' = (y')^2 + (y')^3$

Шаг 1. Замена $p = y'$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$:

$$y \cdot p\frac{dp}{dy} = p^2 + p^3$$

Шаг 2. Делим на p (если $p \neq 0$):

$$y\frac{dp}{dy} = p + p^2$$

Шаг 3. Разделяем переменные:

$$\frac{dp}{p(1+p)} = \frac{dy}{y}$$

Шаг 4. Раскладываем левую часть:

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{1+p}\right)dp = \frac{dy}{y}$$

$$\ln|p| - \ln|1+p| = \ln|y| + \ln C_1$$

$$\frac{p}{1+p} = C_1 y$$

Шаг 5. Выражаем p: $p = C_1 y(1+p)$, $p(1 - C_1 y) = C_1 y$

$$p = \frac{C_1 y}{1 - C_1 y} = \frac{dy}{dx}$$

Шаг 6. Разделяем:

$$\frac{1 - C_1 y}{C_1 y} dy = dx$$

$$\left(\frac{1}{C_1 y} - 1\right) dy = dx$$

$$\frac{1}{C_1} \ln|y| - y = x + C_2$$

Ответ: $\boxed{\frac{1}{C_1} \ln|y| - y = x + C_2}$ (неявно)

8. Уравнение Бернулли

Вид: $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, где $n \neq 0, 1$

Алгоритм:

1. Разделить на y^n: $y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x)$
2. Замена: $z = y^{1-n}$, тогда $z' = (1-n)y^{-n}y'$
3. Получаем линейное: $\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x)$
4. Или: $z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$
5. Решаем как тип №2, возвращаемся к y

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР: Решить $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^2$

Шаг 1. Это Бернулли с $n = 2$, $P = 1/x$, $Q = x^2$

Шаг 2. Делим на y^2:

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x} y^{-1} = x^2$$

Шаг 3. Замена $z = y^{-1}$, тогда $z' = -y^{-2}y'$:

$$-z' + \frac{z}{x} = x^2$$

$$z' - \frac{z}{x} = -x^2$$

Шаг 4. Решаем линейное: $P = -1/x$, $Q = -x^2$

$$v = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$$

$$u'x = -x^2 \Rightarrow u' = -x \Rightarrow u = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$z = \left(-\frac{x^2}{2} + C\right) x = -\frac{x^3}{2} + Cx$$

Шаг 5. Возвращаемся к y: $z = 1/y$

$$\frac{1}{y} = Cx - \frac{x^3}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{Cx - \frac{x^3}{2}} = \frac{2}{2Cx - x^3}}$$

9. Уравнение Эйлера

Вид: $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$

Алгоритм:

1. Замена: $x = e^t$ (или $t = \ln|x|$ для $x > 0$)
2. Производные преобразуются:
   - $xy' = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$
   - $x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y}$
   - $x^3 y''' = \dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}$
3. Получаем уравнение с постоянными коэффициентами относительно t
4. Решаем как тип №11, возвращаемся к x

Характеристическое уравнение: для $x^2 y'' + axy' + by = 0$:

$$\lambda(\lambda - 1) + a\lambda + b = 0$$

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР: Решить $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

Шаг 1. Замена $x = e^t$:

- $xy' = \dot{y}$
- $x^2 y'' = \ddot{y} - \dot{y}$

Шаг 2. Подставляем:

$$(\ddot{y} - \dot{y}) - 2\dot{y} + 2y = 0$$

$$\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$$

Шаг 3. Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

Шаг 4. Общее решение по t:

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$$

Шаг 5. Возвращаемся к x: $e^t = x$, $e^{2t} = x^2$

$$\boxed{y = C_1 x + C_2 x^2}$$

10. Интересная замена

Признак: В уравнении есть $ax + by + c$ под функцией.

Алгоритм:

1. Замена: $z = ax + by + c$
2. Тогда $z' = a + by'$, откуда $y' = \frac{z'-a}{b}$
3. Подставляем и получаем уравнение с разделяющимися переменными

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР: Решить $y' = \sin^2(x - y)$

Шаг 1. Замена $z = x - y$, тогда $z' = 1 - y'$, $y' = 1 - z'$

Шаг 2. Подставляем:

$$1 - z' = \sin^2 z$$

$$z' = 1 - \sin^2 z = \cos^2 z$$

Шаг 3. Разделяем переменные:

$$\frac{dz}{\cos^2 z} = dx$$

$$\int \sec^2 z \, dz = \int dx$$

$$\tan z = x + C$$

Шаг 4. Возвращаемся к y:

$$\tan(x - y) = x + C$$

$$\boxed{x - y = \arctan(x + C)}$$

11. Линейное уравнение с постоянными коэффициентами (однородное)

Вид: $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$

Алгоритм:

1. Составить характеристическое уравнение: $a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$
2. Найти корни λ_i и их кратности
3. Построить ФСР:

Корень	Решения
λ простой действительный	$e^{\lambda x}$

Корень	Решения
λ кратности k действительный	$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$
$\alpha \pm i\beta$ простые	$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x$
$\alpha \pm i\beta$ кратности k	$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots$

4. Общее решение: $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР: Решить $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

Шаг 1. Характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^3 = 0$$

Шаг 2. Корень $\lambda = 1$ кратности 3

Шаг 3. ФСР: e^x, xe^x, x^2e^x

Шаг 4. Ответ:

$$\boxed{y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x}$$

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР: Решить $y'' + 2y' + 5y = 0$

Шаг 1. Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

Шаг 2. Комплексные корни: $\alpha = -1, \beta = 2$

Шаг 3. ФСР: $e^{-x}\cos 2x$, $e^{-x}\sin 2x$

Шаг 4. Ответ:

$$\boxed{y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)}$$

12. Неоднородное линейное с постоянными коэффициентами

Вид: $a_0y^{(n)} + \ldots + a_ny = f(x)$

Общее решение: $y_{\text{общ}} = y_{\text{одн}} + y_{\text{частн}}$

Метод подбора (специальная правая часть):

Правая часть $f(x)$	Вид частного решения
$P_m(x)$ — многочлен степени m	$x^s \cdot Q_m(x)$
$e^{\alpha x}$	$x^s \cdot Ae^{\alpha x}$
$e^{\alpha x}P_m(x)$	$x^s \cdot e^{\alpha x}Q_m(x)$

Правая часть $f(x)$	Вид частного решения
$\cos\beta x$ или $\sin\beta x$	$x^s(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$
$e^{\alpha x}(P_m\cos\beta x + Q_l\sin\beta x)$	$x^s e^{\alpha x}(\tilde{P}_k\cos\beta x + \tilde{Q}_k\sin\beta x)$

где s — кратность числа α (или $\alpha \pm i\beta$) как корня характеристического уравнения, $k = \max(m, l)$.

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР: Решить $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$

Шаг 1. Решаем однородное: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

$$y_{\text{одн}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Шаг 2. Правая часть e^{3x}: $\alpha = 3$ не корень $\to s = 0$
Ищем $y_{\text{ч}} = Ae^{3x}$

Шаг 3. Подставляем:

$$y'_{\text{ч}} = 3Ae^{3x}, \quad y''_{\text{ч}} = 9Ae^{3x}$$

$$9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} = e^{3x}$$

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Шаг 4. Ответ:

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}}$$

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР (резонанс): Решить $y'' - 2y' + y = e^x$

Шаг 1. Однородное: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$

$$\lambda = 1 \text{ кратности } 2$$

$$y_{\text{одн}} = (C_1 + C_2 x)e^x$$

Шаг 2. Правая часть e^x: $\alpha = 1$ — корень кратности 2 $\to s = 2$
Ищем $y_{\text{ч}} = Ax^2 e^x$

Шаг 3. Вычисляем производные:

$$y'_{\text{ч}} = A(2x + x^2)e^x$$

$$y''_{\text{ч}} = A(2 + 4x + x^2)e^x$$

Шаг 4. Подставляем:

$$A(2 + 4x + x^2)e^x - 2A(2x + x^2)e^x + Ax^2 e^x = e^x$$

$$A(2 + 4x + x^2 - 4x - 2x^2 + x^2)e^x = e^x$$

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Шаг 5. Ответ:

$$\boxed{y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{x^2}{2}e^x}$$

Метод вариации постоянных (любая правая часть):

1. Найти ФСР $y_1, \ldots, y_n$ однородного уравнения
2. Искать $y_{\text{ч}} = C_1(x)y_1 + \ldots + C_n(x)y_n$
3. Решить систему:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x)/a_0 \end{cases}$$

4. Проинтегрировать C_i'

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР (вариация): Решить $y'' + y = \tan x$

Шаг 1. Однородное: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

$$y_{\text{одн}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Шаг 2. ФСР: $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$

Шаг 3. Система для вариации:

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \tan x \end{cases}$$

Шаг 4. Из первого: $C_1' = -C_2' \tan x$. Подставляем во второе:

$$C_2' \tan x \sin x + C_2' \cos x = \tan x$$

$$C_2' \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x \right) = \tan x$$

$$C_2' \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x \Rightarrow C_2' = \sin x$$

Шаг 5. Находим C_1':

$$C_1' = -\sin x \cdot \tan x = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos x - \sec x$$

Шаг 6. Интегрируем:

$$C_2 = -\cos x$$

$$C_1 = \sin x - \ln|\sec x + \tan x|$$

Шаг 7. Частное решение:

$$y_ч = (\sin x - \ln|\sec x + \tan x|)\cos x - \cos x \sin x$$

$$y_ч = -\cos x \ln|\sec x + \tan x|$$

Шаг 8. Ответ:

$$\boxed{y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln|\sec x + \tan x|}$$

13. Система линейных уравнений

Вид: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ (однородная) или $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$ (неоднородная)

Алгоритм для однородной с постоянной A:

1. Найти собственные числа: $\det(A - \lambda I) = 0$
2. Для каждого λ найти собственный вектор: $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$
3. Построить решения:

Собственное число	Решение
λ простое действительное	$\mathbf{x} = e^{\lambda t}\mathbf{v}$
$\lambda = \alpha \pm i\beta$	$\mathbf{x}_1 = e^{\alpha t}(\mathbf{u}\cos\beta t - \mathbf{w}\sin\beta t)$
	$\mathbf{x}_2 = e^{\alpha t}(\mathbf{u}\sin\beta t + \mathbf{w}\cos\beta t)$
λ кратное (недостаток векторов)	Искать присоединённые: $(A - \lambda I)\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_0$

4. Общее решение: $\mathbf{x} = C_1\mathbf{x}_1 + C_2\mathbf{x}_2 + \dots$

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР (разные действительные корни):

$$\dot{x} = 3x + y, \quad \dot{y} = x + 3y$$

Шаг 1. Матрица: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Шаг 2. Характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$$

Шаг 3. Собственные векторы:

Для $\lambda_1 = 2$: $(A - 2I)\mathbf{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Для $\lambda_2 = 4$: $(A - 4I)\mathbf{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Шаг 4. Ответ:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР (комплексные корни):

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x$$

Шаг 1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Шаг 2. $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

Шаг 3. Для $\lambda = i$: $(A - iI)\mathbf{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0$$

$$-iv_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -iv_1$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{w}}$$

Шаг 4. Здесь $\alpha = 0$, $\beta = 1$:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{u} \cos t - \mathbf{w} \sin t = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{u} \sin t + \mathbf{w} \cos t = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

Шаг 5. Ответ:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}}$$

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР (кратный корень с присоединённым вектором):

$$\dot{x} = 3x - y, \quad \dot{y} = x + y$$

Шаг 1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Шаг 2. $\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(1 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$

$$\lambda = 2 \text{ кратности } 2$$

Шаг 3. Собственный вектор: $(A - 2I)\mathbf{v} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{h}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Только один вектор! Нужен присоединённый.

Шаг 4. Присоединённый вектор: $(A - 2I)\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h_1 - h_2 = 1 \Rightarrow \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(или любой другой)

Шаг 5. Два решения:

$$\mathbf{x}_1 = e^{2t}\mathbf{h}_0 = e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2 = e^{2t}(t\mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_1) = e^{2t}\begin{pmatrix}t+1\\t\end{pmatrix}$$

Шаг 6. Ответ:

$$\boxed{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = C_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix}t+1\\t\end{pmatrix}}$$

Для неоднородной (метод вариации):

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)\mathbf{f}(\tau)\,d\tau$$

14. Уравнение 2-ого порядка с непостоянными коэффициентами

Вид: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

Если известно одно решение y_1 однородного:

Формула Лиувилля-Остроградского:

$$y_2 = y_1\int\frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}\,dx$$

Алгоритм:

1. Угадать частное решение y_1 однородного
2. Найти y_2 по формуле выше
3. Общее однородное: $y_{\text{одн}} = C_1y_1 + C_2y_2$
4. Для неоднородного — вариация постоянных

Подсказки для угадывания y_1: Пробовать $y_1 = x^n$, $y_1 = e^{ax}$, $y_1 = \sin x$, $y_1 = \cos x$

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР: Решить $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, зная что $y_1 = x$ — решение.

Шаг 1. Проверяем $y_1 = x$: $y_1' = 1$, $y_1'' = 0$

$$x^2\cdot 0 - 2x\cdot 1 + 2x = 0$$

✓

Шаг 2. Приводим к стандартному виду, делим на x^2:

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$$

$$p(x) = -\frac{2}{x}$$

Шаг 3. Применяем формулу:

$$y_2 = x\int \frac{e^{-\int(-2/x)dx}}{x^2}dx = x\int \frac{e^{2\ln x}}{x^2}dx = x\int \frac{x^2}{x^2}dx = x\int dx = x\cdot x = x^2$$

Шаг 4. Ответ:

$$\boxed{y = C_1x + C_2x^2}$$

15. Краевая задача

Вид: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, $y(a) = A$, $y(b) = B$

Функция Грина $G(x,s)$:

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)\,ds$$

Построение функции Грина:

1. Найти $y_1(x)$ — решение однородного с $y_1(a) = 0$
2. Найти $y_2(x)$ — решение однородного с $y_2(b) = 0$
3. Вычислить вронскиан $W = y_1y_2' - y_1'y_2$
4. Функция Грина:

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(s)}{W(s)}, & a \le x \le s \\ \frac{y_1(s)y_2(x)}{W(s)}, & s \le x \le b \end{cases}$$

Теорема об альтернативе: Краевая задача либо имеет единственное решение, либо однородная задача имеет ненулевое решение.

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР: Решить $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 1$

Шаг 1. Общее решение однородного:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x$$

Шаг 2. Применяем краевые условия:

- $y(0) = C_1 = 0$
- $y(\pi/2) = C_2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow C_2 = 1$

Шаг 3. Ответ:

$$\boxed{y = \sin x}$$

16. Метод интегрируемых комбинаций

Вид: Симметрическая система $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$

Алгоритм:

1. Подбираем множители (α, β, γ) такие, что:

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0$$

2. Тогда $\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz = 0$ — полный дифференциал
3. Интегрируем: $U_1(x,y,z) = C_1$ — первый интеграл
4. Повторяем для второй комбинации: $U_2(x,y,z) = C_2$
5. Ответ: $\{U_1 = C_1, U_2 = C_2\}$
   Частые приёмы:

- $(1,1,1)$: $dx + dy + dz = d(x+y+z)$

- (x, y, z): $x\,dx + y\,dy + z\,dz = \frac{1}{2}d(x^2 + y^2 + z^2)$
- Сложение/вычитание дробей

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР: Решить $\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}$

Шаг 1. Пробуем множители $(1, 1, 1)$:

$$1 \cdot (y - z) + 1 \cdot (z - x) + 1 \cdot (x - y) = 0$$

✓

Значит $dx + dy + dz = 0$, откуда $d(x + y + z) = 0$

$$\boxed{x + y + z = C_1}$$

Шаг 2. Пробуем множители (x, y, z):

$$x(y - z) + y(z - x) + z(x - y) = xy - xz + yz - xy + zx - zy = 0$$

✓

Значит $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$, откуда $d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = C_2}$$

Ответ: Интегральные кривые — пересечение плоскости и сферы.

17. Устойчивость

Система: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, положение равновесия $\mathbf{x}_0$: $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$

Первый метод Ляпунова (линеаризация):

1. Вычислить матрицу Якоби: $A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$
2. Найти собственные числа λ_i матрицы A
3. Критерий:
   - $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ **для всех** → асимптотически устойчиво
   - $\exists \operatorname{Re}\lambda_k > 0$ → неустойчиво
   - $\exists \operatorname{Re}\lambda_k = 0$ (и нет положительных) → критический случай

Для системы на плоскости: $p = -\operatorname{tr} A$, $q = \det A$, $D = p^2 - 4q$

Условие	Тип точки	Устойчивость
$q < 0$	Седло	Неустойчиво
$q > 0, p > 0, D > 0$	Устойчивый узел	Асимптотически
$q > 0, p > 0, D < 0$	Устойчивый фокус	Асимптотически
$q > 0, p < 0$	Неустойчивый узел/фокус	Неустойчиво
$q > 0, p = 0$	Центр	Критический случай

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР: Исследовать устойчивость $\dot{x} = x - xy$, $\dot{y} = -y + xy$

Шаг 1. Находим положения равновесия:

$$\begin{cases} x(1 - y) = 0 \\ y(-1 + x) = 0 \end{cases}$$

Точки: $(0,0)$ и $(1,1)$

Шаг 2. Матрица Якоби:

$$A = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ y & -1+x \end{pmatrix}$$

Шаг 3. Для точки $(0,0)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 > 0, \quad \lambda_2 = -1 < 0$$

$$\boxed{\text{Седло — неустойчиво}}$$

Шаг 4. Для точки $(1,1)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

$$\operatorname{Re}\lambda = 0$$

$$\boxed{\text{Центр — критический случай (устойчиво, но не асимптотически)}}$$

18. Особые точки

Классификация по собственным числам λ_1, λ_2:

Собственные числа	Тип точки	Фазовый портрет
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Неустойчивый узел	Траектории уходят
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Устойчивый узел	Траектории приходят
$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$	Седло	Гиперболы
$\lambda = \alpha \pm i\beta, \alpha > 0$	Неустойчивый фокус	Спираль наружу
$\lambda = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0$	Устойчивый фокус	Спираль внутрь
$\lambda = \pm i\beta$	Центр	Замкнутые орбиты
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, один вектор	Вырожденный узел	Параболы

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР: Классифицировать особую точку $\dot{x} = 2x + y$, $\dot{y} = 3x + 4y$

Шаг 1. Матрица: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Шаг 2. $p = -\operatorname{tr} A = -6$, $q = \det A = 8 - 3 = 5$

Шаг 3. Проверяем: $q = 5 > 0$, $p = -6 < 0$

$$D = p^2 - 4q = 36 - 20 = 16 > 0$$

Шаг 4. По таблице: $q > 0$, $p < 0$, $D > 0$ → **Неустойчивый узел**

Проверка: $\lambda = \frac{6 \pm 4}{2}$: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$ — оба положительные ✓

$$\boxed{\text{Неустойчивый узел}}$$

19. Особые решения

Определение: Решение, через каждую точку которого проходит другое решение (нарушение единственности).

Алгоритм (p-дискриминанта):

1. Из уравнения $F(x, y, y') = 0$ и условия $F'_{y'}(x, y, y') = 0$
2. Исключить y'
3. Проверить, что результат — решение исходного уравнения

Алгоритм (C-дискриминанта):

1. Из общего решения $\Phi(x, y, C) = 0$ и условия $\Phi'_C(x, y, C) = 0$
2. Исключить C
3. Проверить, что результат — решение

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР: Найти особое решение $(y')^2 - 4y = 0$

Шаг 1. Записываем $F(x, y, p) = p^2 - 4y = 0$

Шаг 2. Условие для особого: $F'_p = 2p = 0 \Rightarrow p = 0$

Шаг 3. Подставляем $p = 0$ в F: $0 - 4y = 0 \Rightarrow y = 0$

Шаг 4. Проверяем: $y = 0$ даёт $y' = 0$, подставляем в уравнение:

$$0 - 0 = 0$$

✓

Шаг 5. Находим общее решение для проверки:

$$p^2 = 4y \Rightarrow p = \pm 2\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \pm dx \Rightarrow \sqrt{y} = \pm(x + C)$$

$$y = (x + C)^2$$

— семейство парабол

Шаг 6. Ответ: $\boxed{y = 0}$ — особое решение (касается всех парабол в вершине)

20. Экспонента от матрицы

Определение: $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \ldots$

Связь с системой: Если $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, то $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$

Вычисление для диагонализируемой $A = SDS^{-1}$:

$$e^{At} = Se^{Dt}S^{-1}, \quad e^{Dt} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$$

Метод расщепления (для жордановой клетки):

Если $A = \lambda I + N$, где N — нильпотентная ($N^k = 0$):

$$e^{At} = e^{\lambda t}(I + Nt + \frac{N^2t^2}{2!} + \dots + \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!})$$

Для жордановой клетки 2×2: $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для жордановой клетки 3×3: $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР: Вычислить e^{At} для $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Шаг 1. Это жорданова клетка с $\lambda = 1$

Шаг 2. Представляем $A = I + N$:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаг 3. Проверяем: $N^2 = 0$ — нильпотентная

Шаг 4. По формуле:

$$e^{At} = e^t(I + Nt) = e^t \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Шаг 5. Ответ:

$$\boxed{e^{At} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

ПОЛНЫЙ ПРИМЕР: Вычислить e^{At} для $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Шаг 1. Собственные числа: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

Шаг 2. Это матрица поворота! Используем формулу Эйлера.

Шаг 3. Заметим, что $A^2 = -I$, $A^3 = -A$, $A^4 = I$

Шаг 4. Разложение:

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$$

$$= I + At - \frac{t^2}{2!}I - \frac{t^3}{3!}A + \frac{t^4}{4!}I + \dots$$

$$= I\left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots\right) + A\left(t - \frac{t^3}{3!} + \dots\right)$$

$$= I\cos t + A\sin t$$

Шаг 5. Ответ:

$$\boxed{e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}}$$

Свойства:

- $\det e^{At} = e^{t\,\mathrm{tr}\,A}$
- $e^{A+B} = e^A e^B$ только если $AB = BA$
- $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

Аналогия для понимания: Дифференциальные уравнения — это **математический детектив**. Ваша задача в «Face Control» — опознать преступника по «особым приметам» (степень y, наличие x, вид правой части), а затем применить к нему строго определенную «статью» (алгоритм) из этого кодекса.