ПОЛНЫЕ ОТВЕТЫ НА ПЕРВЫЙ ВОПРОС (ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ)

МЕХАНИКА

1. Системы отсчёта. Закон движения материальной точки. Траектория, путь, перемещение. Скорость и ускорение. Принцип относительности Галилея

Система отсчёта — это совокупность тела отсчёта, связанной с ним системы координат и синхронизированных часов. Тело отсчёта — это твёрдое тело или совокупность неподвижных относительно друг друга тел, служащее для определения положения других объектов в пространстве.

Закон движения материальной точки — это функциональная зависимость положения материальной точки от времени: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. В декартовых координатах закон движения задаётся уравнениями:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

Эти уравнения называются **кинематическими уравнениями движения**.

Траектория — это геометрическое место точек в пространстве, через которые проходит движущаяся материальная точка. Траектория может быть прямой линией (прямолинейное движение) или кривой (криволинейное движение).

Путь (обозначается как s) — это длина участка траектории, пройденного материальной точкой за определённый промежуток времени. Путь — всегда положительная скалярная величина. Путь измеряется в единицах длины (метры, сантиметры и т.д.).

Перемещение — это вектор, соединяющий начальное и конечное положения материальной точки:

$$\vec{s} = \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Модуль перемещения может быть меньше пройденного пути при криволинейном движении.

Скорость характеризует быстроту и направление движения:

- **Мгновенная скорость** — это производная радиус-вектора по времени:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Вектор мгновенной скорости всегда направлен по касательной к траектории. Модуль вектора скорости:

$$v = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

- **Средняя скорость** вычисляется как отношение перемещения к интервалу времени:

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Средняя путевая скорость определяется как:

$$v_{cp,path} = \frac{s}{\Delta t}$$

где s — пройденный путь.

Ускорение характеризует скорость изменения скорости. Полное ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Полное ускорение раскладывается на две компоненты:

- **Тангенциальное ускорение** — характеризует изменение величины скорости:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

направлено по касательной к траектории (параллельно скорости).

- **Нормальное (центростремительное) ускорение** — характеризует изменение направления скорости:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

направлено по нормали к траектории в сторону центра кривизны, где R — радиус кривизны траектории.

Полное ускорение связано с компонентами соотношением:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Принцип относительности Галилея утверждает, что **законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта**. Инерциальные системы отсчёта движутся относительно друг друга с постоянной скоростью (без ускорения).

При переходе из одной инерциальной системы отсчёта К в другую К', движущуюся с постоянной скоростью $\vec{V}$ относительно К, применяются **преобразования Галилея**:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$
$$\vec{a}' = \vec{a}$$
$$t' = t$$

Это означает, что ускорения и силы (а значит, и уравнения движения) одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта. Скорости и координаты изменяются, но механические явления протекают одинаково.

---

2. Характеристики движения по окружности. Связь с линейными характеристиками. Прямая и обратная задачи кинематики

Угловые характеристики движения по окружности:

- **Угол поворота** (φ) — это центральный угол, на который поворачивается радиус-вектор точки за время движения. Измеряется в радианах. Если точка прошла дугу длины s, то:

$$\varphi = \frac{s}{R}$$

где R — радиус окружности.

- **Угловая скорость** (ω) — это производная угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

При равномерном движении по окружности $\omega = \text{const}$. Угловая скорость связана с периодом T и частотой ν:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Единица измерения: рад/с.

- **Угловое ускорение** (β или ε) — это производная угловой скорости по времени:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Единица измерения: рад/с^2.

Связь угловых характеристик с линейными характеристиками:

$$v = \omega R$$

где v — линейная (тангенциальная) скорость.

$$a_\tau = \beta R$$

где a_τ — тангенциальное ускорение (изменение величины скорости).

$$a_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$

где a_n — нормальное (центростремительное) ускорение.

$$s = R\varphi$$

где s — длина пройденной дуги.

Прямая задача кинематики состоит в том, чтобы, зная закон движения $\vec{r}(t)$, найти скорость $\vec{v}(t)$ и ускорение $\vec{a}(t)$. Решается дифференцированием:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Обратная задача кинематики — это определение скорости $\vec{v}(t)$ и положения $\vec{r}(t)$ по известному ускорению $\vec{a}(t)$ и начальным условиям $\vec{r}_0$ и $\vec{v}_0$ при $t = 0$. Решается интегрированием:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t')dt'$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t')dt' = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}_0 dt' + \int_0^t \left(\int_0^{t'} \vec{a}(t'')dt''\right)dt'$$

Для частного случая постоянного ускорения $\vec{a} = \text{const}$:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

---

3. Масса и импульс. Инерциальные и неинерциальные системы отсчёта. Законы Ньютона

Масса (m) — это мера инертности тела, то есть его сопротивления изменению скорости. Масса — скалярная величина, всегда положительная, не зависит от скорости тела (в классической механике). Единица: килограмм (кг).

Импульс (количество движения) — это векторная физическая величина, определяемая как произведение массы на скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Импульс характеризует количество движения материальной точки. Единица: кг·м/с. В декартовых координатах:

$$\vec{p} = m\vec{v} = m(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k}$$

Силы в механике — это векторные величины, характеризующие взаимодействие между телами. Силы могут быть контактными (трение, упругость) или действующими на расстоянии (гравитационные, электромагнитные).

Инерциальные системы отсчёта — это системы, в которых справедливы законы Ньютона. В инерциальной системе отсчёта свободное тело (не подвергающееся действию сил) либо покоится, либо движется прямолинейно и равномерно. Инерциальные системы движутся друг относительно друга прямолинейно и равномерно (с постоянной скоростью).

Неинерциальные системы отсчёта — это системы, движущиеся с ускорением относительно инерциальной системы. В неинерциальной системе появляются фиктивные (инерционные) силы, обусловленные ускорением системы. Примеры: система отсчёта, связанная с ускоряющимся или вращающимся телом.

Законы Ньютона:

Первый закон Ньютона (закон инерции): Тело остаётся в состоянии покоя или прямолинейного равномерного движения, если сумма действующих на него сил равна нулю:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{const}$$

Этот закон определяет инерциальные системы отсчёта.

Второй закон Ньютона — основной закон динамики: Произведение массы на ускорение равно результирующей силе:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Или в форме, связанной с импульсом:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

При постоянной массе это эквивалентно первой формулировке. В компонентном виде:

$$F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y, \quad F_z = ma_z$$

Третий закон Ньютона (закон действия и противодействия): Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по величине и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Эти силы действуют вдоль одной прямой, соединяющей взаимодействующие тела, и приложены к разным телам, поэтому они не уравновешивают друг друга.

---

4. Системы материальных точек. Импульс системы. Закон сохранения импульса. Теорема о центре масс. Движение с переменной массой

Центр масс (центр инерции) системы материальных точек — это точка, положение которой определяется радиус-вектором:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

где m_i — массы отдельных точек, $\vec{r}_i$ — их радиус-векторы, M — общая масса системы.

В компонентном виде:

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{M}, \quad y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{M}, \quad z_{cm} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

Импульс системы материальных точек определяется как:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

Можно показать, что импульс системы равен:

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

где $\vec{v}_{cm}$ — скорость центра масс.

Закон сохранения импульса: Если сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то импульс системы остаётся постоянным:

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

Это может быть записано в компонентном виде:

$$p_x = \text{const}, \quad p_y = \text{const}, \quad p_z = \text{const}$$

Закон сохранения импульса выполняется в замкнутых системах (системах без внешних сил) или при отсутствии внешних сил в определённом направлении (например, импульс по одной оси может сохраняться, даже если импульсы по другим осям изменяются).

Теорема о движении центра масс (теорема о движении центра инерции): Центр масс системы движется так же, как материальная точка, имеющая массу, равную массе всей системы, и на которую действует равнодействующая всех внешних сил:

$$\vec{F} = M\vec{a}_{cm}$$

или

$$M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \sum \vec{F}_i$$

Внутренние силы взаимодействия между частями системы не влияют на движение центра масс системы.

Движение тел с переменной массой (уравнение Циалковского): Рассмотрим ракету, выбрасывающую газы. Если в момент времени t масса ракеты m, а в момент $t + dt$ масса стала $m - dm$ (отрицательное dm означает уменьшение массы), то уравнение движения имеет вид:

$$m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt}$$

или

$$mdv = -udm$$

где u — скорость выбрасываемого вещества относительно ракеты (скорость истечения).

Интегрируя это уравнение:

$$\int_{v_0}^{v} dv = -u \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m}$$

$$v - v_0 = -u(\ln m - \ln m_0) = u \ln \frac{m_0}{m}$$

$$v - v_0 = u \ln \frac{m_0}{m}$$

Это **формула Циалковского** (формула Мещерского для безопорного движения).

---

5. Момент силы и момент импульса. Уравнение моментов

Момент силы относительно неподвижной точки O — это векторная величина, определяемая как векторное произведение:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки приложения силы относительно точки O.

Модуль момента силы:

$$M = rF \sin\alpha = Fd$$

где α — угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$, $d = r\sin\alpha$ — перпендикулярное расстояние от точки O до линии действия силы (плечо силы).

Направление вектора момента определяется по правилу правого винта: если пальцы правой руки загибаются в направлении поворота, вызываемого силой, то большой палец указывает направление вектора $\vec{M}$.

Момент силы относительно оси z — это проекция вектора момента на ось:

$$M_z = ([\vec{r}, \vec{F}])_z$$

Момент импульса (момент количества движения) материальной точки относительно неподвижной точки O:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

Модуль момента импульса:

$$L = mrv \sin\alpha = mvd$$

где d — перпендикулярное расстояние от точки O до линии скорости.

Момент импульса относительно оси z для вращающегося тела:

$$L_z = I\omega$$

где I — момент инерции тела относительно оси z, ω — угловая скорость вращения.

Уравнение моментов (основное уравнение динамики вращательного движения):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Это утверждение, что скорость изменения момента импульса равна действующему моменту силы. В компонентном виде (для оси z):

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z$$

Уравнение моментов показывает, что момент силы вызывает изменение момента импульса точки.

---

6. Момент инерции. Теорема Штейнера. Основное уравнение динамики вращения. Закон сохранения момента импульса

Момент инерции тела относительно неподвижной оси — это мера инертности тела при вращательном движении, определяемая как:

$$J = \int r^2 dm = \sum m_i r_i^2$$

где r — перпендикулярное расстояние элемента массы dm от оси вращения.

Момент инерции — скалярная положительная величина. Единица: кг·м².

Примеры момента инерции для однородных тел:

1. **Тонкий стержень массой m и длиной l** относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно стержню:

$$J_{cm} = \frac{1}{12} m l^2$$

2. **Тонкий стержень** относительно оси, проходящей через один конец:

$$J = \frac{1}{3} m l^2$$

3. **Диск (или цилиндр)** массой m и радиусом R относительно оси симметрии:

$$J = \frac{1}{2} m R^2$$

4. **Полый цилиндр** с внешним радиусом R_1 и внутренним радиусом R_2 относительно оси симметрии:

$$J = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$$

5. **Шар** массой m и радиусом R относительно оси, проходящей через центр:

$$J = \frac{2}{5} m R^2$$

Теорема Штейнера (теорема о параллельных осях): Момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$J = J_{cm} + m d^2$$

где J_{cm} — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, d — расстояние между осями, m — масса тела.

Основное уравнение динамики вращательного движения связывает момент силы с угловым ускорением:

$$M = J\beta$$

или в форме, связанной с моментом импульса:

$$\frac{dL}{dt} = M$$

где M — результирующий момент внешних сил, J — момент инерции, β — угловое ускорение, $L = J\omega$ — момент импульса.

В компонентном виде (для оси z):

$$M_z = J_z \beta_z = J_z \frac{d\omega_z}{dt}$$

Закон сохранения момента импульса: Если результирующий момент внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то момент импульса системы остаётся постоянным:

$$\sum \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

или для оси z:

$$M_{z,} = 0 \Rightarrow L_z = J_z \omega_z = \text{const}$$

Закон сохранения момента импульса используется при анализе вращательного движения систем, когда суммарный момент внешних сил равен нулю.

---

7. Работа сил. Кинетическая и потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии

Работа силы — это скалярная физическая величина, характеризующая действие силы при перемещении тела:

$$A = \int_{path} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{path} F \cos\alpha \, ds$$

где α — угол между вектором силы и направлением движения.

Работа может быть положительной, отрицательной или нулевой в зависимости от угла между силой и перемещением.

Консервативные (потенциальные) силы — это силы, работа которых не зависит от пути, а зависит только от начального и конечного положений:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

Работа консервативной силы по замкнутому пути равна нулю. К консервативным силам относятся силы тяготения, упругости, электростатические силы.

Неконсервативные (диссипативные) силы — это силы, работа которых зависит от траектории движения. Примеры: силы трения, сопротивление среды.

Кинетическая энергия — это энергия, обусловленная движением тела:

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

Для вращающегося твёрдого тела:

$$K = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Кинетическая энергия — всегда положительная величина, зависит от выбора системы отсчёта.

Потенциальная энергия — это энергия, обусловленная взаимным положением взаимодействующих тел (или частей тела).

Примеры потенциальной энергии:

1. **Гравитационная потенциальная энергия** в однородном поле тяжести:

$$U_g = mgh$$

где h — высота над выбранным нулевым уровнем.

2. **Упругая потенциальная энергия** пружины:

$$U_e = \frac{1}{2} k x^2$$

где k — жёсткость пружины, x — деформация (растяжение или сжатие).

Связь силы и потенциальной энергии:

$$\vec{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

или в одномерном случае:

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

Теорема о кинетической энергии (работа-энергия):

$$\Delta K = A$$

Изменение кинетической энергии тела равно работе, совершённой всеми действующими на него силами.

Полная механическая энергия:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U$$

Закон сохранения механической энергии: Если на систему действуют только консервативные силы, то полная механическая энергия остаётся постоянной:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U = \text{const}$$

или

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

При наличии неконсервативных сил (трения, сопротивления):

$$E_2 - E_1 = A$$

где A — работа неконсервативных сил.

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

1. Свободные незатухающие гармонические колебания. Математический, пружинный и физический маятники

Гармонические колебания — это периодические движения, при которых физическая величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \quad \text{или} \quad x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

где: - A — **амплитуда** колебания (максимальное отклонение от положения равновесия), м - ω — **циклическая (круговая) частота**, рад/с - φ — **начальная фаза**, рад (зависит от выбора момента времени) - $(\omega t + \varphi)$ — **фаза** колебания в момент времени t

Период колебания:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Частота колебания:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Скорость при гармоническом колебании:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

Максимальная скорость: $v_{max} = A\omega$

Ускорение:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

Максимальное ускорение: $a_{max} = A\omega^2$

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

или $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Энергия при гармонических колебаниях: - Кинетическая энергия: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi)$ - Потенциальная энергия: $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi)$ - Полная энергия: $E = K + U = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \text{const}$

Математический маятник — это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити длиной l.

Для малых углов отклонения ($\sin\theta \approx \theta$) уравнение движения математического маятника приводит к гармоническим колебаниям с циклической частотой:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Период математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

где g — ускорение свободного падения, l — длина нити.

Пружинный маятник состоит из груза массой m, закреплённого на пружине с жёсткостью k.

Уравнение движения пружинного маятника:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Циклическая частота:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Период пружинного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Физический маятник — это твёрдое тело, колеблющееся вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс.

Уравнение движения физического маятника (для малых углов):

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\sin\theta \approx -mgd\theta$$

где J — момент инерции тела относительно оси колебания, d — расстояние от оси до центра масс.

Циклическая частота:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J}}$$

Период физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}$$

Можно показать, что период физического маятника совпадает с периодом математического маятника эквивалентной длины:

$$L = \frac{J}{md}$$

---

2. Затухающие колебания. Вынужденные колебания и резонанс

Затухающие колебания возникают, когда на колеблющееся тело действует сила сопротивления, пропорциональная скорости:

$$F = -rv$$

где r — коэффициент сопротивления.

Уравнение движения при наличии сопротивления:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

или $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

где $\gamma = \frac{r}{2m}$ — **коэффициент затухания**.

Решение уравнения затухающих колебаний (при $\gamma < \omega_0$, случай слабого затухания):

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi)$$

где: - A_0 — начальная амплитуда - $A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$ — амплитуда, экспоненциально убывающая со временем - $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ — циклическая частота затухающих колебаний

Логарифмический декремент затухания — это натуральный логарифм отношения амплитуд двух последовательных колебаний, разделённых периодом T:

$$\delta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \gamma T$$

Добротность Q — безразмерная характеристика, показывающая, во сколько раз период затухания больше периода колебания:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

Добротность характеризует качество колеблющейся системы: чем выше Q, тем дольше затухают колебания.

Вынужденные колебания происходят под действием периодической внешней силы:

$$F(t) = F_0\sin(\Omega t)$$

Уравнение движения при вынужденных колебаниях:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = F_0\sin(\Omega t)$$

Стационарное решение (после затухания переходного процесса):

$$x(t) = A(\Omega)\sin(\Omega t - \psi)$$

где амплитуда вынужденных колебаний:

$$A(\Omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}$$

и разность фаз:

$$\tan\psi = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Резонанс — это явление, при котором амплитуда вынужденных колебаний достигает максимума. Это происходит при частоте:

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

При слабом затухании ($\gamma \ll \omega_0$):

$$\Omega \approx \omega_0$$

Максимальная амплитуда при резонансе:

$$A_{max} = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0} = \frac{F_0}{r\omega_0}$$

При отсутствии затухания ($\gamma = 0$) амплитуда стремится к бесконечности при $\Omega = \omega_0$.

---

3. Векторное представление гармонических колебаний. Сложение колебаний

Метод векторных диаграмм позволяет геометрически представить гармоническое колебание. Гармоническое колебание $x = A\sin(\omega t + \varphi)$ изображается вращающимся вектором длины А, который: - Вращается с угловой скоростью ω (против часовой стрелки) - Составляет с осью абцисс угол $(\omega t + \varphi)$ - Проекция этого вектора на ось ординат даёт мгновенное значение координаты x

Сложение колебаний одной частоты и одного направления:

Если материальная точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях одной и той же частоты:

$$x_1 = A_1\sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\sin(\omega t + \varphi_2)$$

То результирующее колебание также будет гармоническим:

$$x = x_1 + x_2 = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Результирующая амплитуда определяется по правилу сложения векторов (правило параллелограмма):

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Результирующая фаза:

$$\tan\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

Частные случаи: - При $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ (синфазные колебания): $A = A_1 + A_2$ (максимальная амплитуда) - При $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ (противофазные колебания): $A = |A_1 - A_2|$ (минимальная амплитуда) - При $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$ (колебания в квадратуре): $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$

Биения возникают при сложении колебаний близких частот ($\omega_1 \approx \omega_2$):

$$x = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

Амплитуда медленно колеблется с частотой биения: $\omega = |\omega_1 - \omega_2|$

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний:

Если точка участвует в двух колебаниях вдоль перпендикулярных осей:

$$x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$y = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

То траектория движения точки имеет различные формы в зависимости от разности фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$:

- При $\Delta\varphi = 0$ или $\Delta\varphi = \pi$: прямая линия
- При $\Delta\varphi = \pi/2$ или $\Delta\varphi = 3\pi/2$ и $A_1 = A_2$: окружность
- При других значениях $\Delta\varphi$: эллипс

Уравнение траектории (уравнение эллипса):

$$\frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\Delta\varphi) + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2(\Delta\varphi)$$

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

1. Термодинамические параметры. Изопроцессы. Закон Дальтона. Закон Авогадро

Термодинамические параметры состояния описывают макроскопические свойства газа:

- **Давление (p)** — сила, действующая на единицу площади поверхности, Па (Паскаль)
- **Объём (V)** — пространство, занимаемое газом, м^3
- **Температура (T)** — мера средней кинетической энергии молекул, К (Кельвины)
- **Количество вещества (ν)** — число молей газа, моль

Изопроцессы — это процессы, при которых один из параметров (p, V, T) остаётся постоянным.

Изобарный процесс (постоянное давление, p = const):

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

На pV-диаграмме изображается горизонтальной линией.

Изохорный процесс (постоянный объём, V = const):

$$\frac{p}{T} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

На pV-диаграмме изображается вертикальной линией.

Изотермический процесс (постоянная температура, T = const):

$$pV = \text{const} \quad \text{или} \quad p_1V_1 = p_2V_2$$

На pV-диаграмме изображается гиперболой. Это процесс, при котором газ находится в тепловом равновесии с окружающей средой.

Адиабатический процесс (без теплообмена, Q = 0):

$$pV^{\gamma} = \text{const} \quad \text{или} \quad TV^{\gamma-1} = \text{const}$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ — показатель адиабаты (коэффициент Пуассона).

Закон Дальтона: Давление смеси газов, не взаимодействующих химически, равно сумме парциальных давлений составляющих газов:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

где p_i — парциальное давление i-го газа (давление, которое оказывал бы этот газ, если бы занимал весь объём один).

Закон Авогадро: Равные объёмы различных идеальных газов при одинаковых давлении и температуре содержат одинаковое число молекул (или молей).

Молярный объём — объём одного моля газа при нормальных условиях (T = 273 K, p = 101,325 кПа):

$$V_m = 22,4 \text{ л/моль} = 22,4 \times 10^{-3} \text{ м}^3\text{/моль}$$

Из закона Авогадро следует, что постоянная Авогадро:

$$N_A = \frac{N}{\nu} = 6,022 \times 10^{23} \text{ молекул/моль}$$

---

2. Молекулярно-кинетическая теория идеального газа. Уравнение состояния идеального газа

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории связывает микроскопические параметры молекул (массу, скорость) с макроскопическими параметрами газа (давлением):

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v^2 \rangle$$

где: - n — число молекул на единицу объёма (концентрация молекул) - m_0 — масса одной молекулы - $\langle v^2 \rangle$ — средний квадрат скорости молекул

Средняя кинетическая энергия молекулы связана с температурой газа:

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} kT$$

где $k = 1,38 \times 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана.

Среднеквадратичная скорость молекул:

$$v = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

где M — молярная масса газа (масса одного моля), R = 8,31 Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная.

Из основного уравнения МКТ:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v^2 \rangle = nkT$$

Поскольку $n = \frac{N}{V}$, получаем:

$$pV = NkT$$

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона):

$$pV = \nu RT$$

или

$$pV = NkT$$

где: - p — давление - V — объём - ν — количество вещества (число молей) - N — число молекул - R = 8,31 Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная - k = R/N_A — постоянная Больцмана - T — абсолютная температура

Это фундаментальное уравнение описывает состояние идеального газа и связывает макроскопические параметры.

---

3. Внутренняя энергия. Первое начало термодинамики. Применение к изопроцессам

Внутренняя энергия идеального газа — это сумма кинетических энергий всех молекул газа:

$$U = N\langle K \rangle = N \cdot \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} \nu RT$$

где i — **число степеней свободы молекулы**: - Для одноатомного газа: $i = 3$ - Для двухатомного газа: $i = 5$ (при комнатной температуре) - Для многоатомного газа: $i = 6$ (для жёсткой молекулы)

Внутренняя энергия зависит только от температуры и не зависит от объёма или давления для идеального газа:

$$\Delta U = \nu C_V \Delta T$$

где C_V — молярная теплоёмкость при постоянном объёме.

Работа газа при расширении:

$$A = \int p dV$$

Если газ расширяется (dV > 0), то A > 0 (газ совершает положительную работу). Если газ сжимается (dV < 0), то A < 0 (газу нужно совершить работу).

При изобарном процессе (p = const):

$$A = p\Delta V = \nu R \Delta T$$

При изохорном процессе (V = const):

$$A = 0$$

При изотермическом процессе (T = const):

$$A = \int p dV = \nu RT \int \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Первое начало термодинамики — это закон сохранения энергии для термодинамических процессов:

$$Q = \Delta U + A$$

где: - Q — количество теплоты, переданное газу - ΔU — изменение внутренней энергии газа - A — работа, совершённая газом

Физический смысл: теплота, переданная газу, идёт на увеличение его внутренней энергии и совершение работы над окружающей средой.

Теплоёмкость — это величина, показывающая, сколько теплоты необходимо для изменения температуры вещества на 1 К:

Молярная теплоёмкость при постоянном объёме:

$$C_V = \frac{i}{2}R$$

Молярная теплоёмкость при постоянном давлении:

$$C_p = C_V + R = \frac{i}{2}R + R = \frac{i+2}{2}R$$

Связь теплоёмкостей:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$$

Применение первого начала термодинамики к изопроцессам:

1. Изобарный процесс (p = const):

$$Q = \Delta U + A = \nu C_V \Delta T + \nu R \Delta T = \nu C_p \Delta T$$

Работа газа: $A = p(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1) = \nu R \Delta T$

2. Изохорный процесс (V = const):

$$Q = \Delta U = \nu C_V \Delta T$$

Работа газа: $A = 0$ (объём не изменяется)

3. Изотермический процесс (T = const):

$$\Delta U = 0$$

(температура не изменяется)

$$Q = A = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \int p dV$$

Если $V_2 > V_1$ (расширение), то Q > 0 (теплота поглощается газом).

4. Адиабатический процесс (Q = 0):

$$\Delta U = -A$$

$$0 = \Delta U + A \Rightarrow A = -\Delta U = -\nu C_V \Delta T$$

Если газ расширяется (A > 0), то его внутренняя энергия уменьшается, и температура падает.

---

4. Теория газов. Закон Дальтона, Закон Авогадро

(см. раздел 1 МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА)

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

1. Элементарный заряд. Закон Кулона. Напряжённость поля. Принцип суперпозиции. Силовые линии

Элементарный заряд — это минимальный, неделимый заряд, который является зарядом электрона или протона:

$$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ Кл}$$

Любой электрический заряд в природе кратен элементарному заряду: $q = ne$, где n — целое число.

Закон сохранения электрического заряда: В замкнутой системе алгебраическая сумма электрических зарядов остаётся постоянной:

$$\sum q_i = \text{const}$$

Закон Кулона описывает силу взаимодействия между двумя точечными зарядами:

$$F = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

или в векторной форме:

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}_0$$

где: - q_1, q_2 — величины зарядов - r — расстояние между зарядами - $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8,99 \times 10^9$ Н·м²/Кл² — коэффициент Кулона в СИ - $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная - $\vec{r}_0$ — единичный вектор, направленный от заряда q_1 к заряду q_2

Закон Кулона справедлив для точечных зарядов или заряженных тел, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними.

Напряжённость электрического поля — это силовая характеристика поля, равная отношению силы, действующей на пробный заряд q, к величине этого заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Единица измерения: В/м или Н/Кл.

Для точечного заряда Q:

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

Напряжённость — это векторная величина, направленная от положительного заряда и к отрицательному.

Принцип суперпозиции (принцип наложения): Электрическое поле, создаваемое несколькими зарядами, равно векторной сумме полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

Этот принцип позволяет вычислять поля сложных систем зарядов.

Силовые линии электростатического поля — это линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряжённости электрического поля. Свойства силовых линий: - Они начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных - Они не пересекаются - Плотность линий (число линий на единицу площади перпендикулярной поверхности) пропорциональна величине напряжённости - Силовые линии изображают направление и качественно показывают величину поля в разных точках

---

2. Поток напряжённости. Теорема Гаусса

Поток вектора напряжённости через поверхность S определяется как:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_S E \cos\alpha \, dA$$

где: - $d\vec{A}$ — элемент площади поверхности с направлением внешней нормали - α — угол между вектором $\vec{E}$ и нормалью к поверхности

Для однородного поля и плоской поверхности:

$$\Phi_E = E \cdot A \cdot \cos\alpha$$

Единица: В·м.

Теорема Остроградского-Гаусса (теорема Гаусса) — одна из основных теорем электростатики:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

где: - Интеграл берётся по замкнутой поверхности S - Q — полный заряд, находящийся внутри поверхности S - ε_0 — электрическая постоянная

Физический смысл: поток напряжённости электрического поля через замкнутую поверхность пропорционален заряду, заключённому внутри этой поверхности.

Примеры применения теоремы Гаусса:

1. Напряжённость поля бесконечной равномерно заряженной плоскости:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

где σ — поверхностная плотность заряда.

2. Напряжённость поля бесконечного равномерно заряженного цилиндра радиусом R:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

где λ — линейная плотность заряда (заряд на единицу длины).

3. Напряжённость поля равномерно заряженной сферы: - Снаружи (r > R): $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (как для точечного заряда) - Внутри (r < R): $E = 0$ для проводящей сферы; $E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ для диэлектрической сферы

---

3. Потенциал. Разность потенциалов. Связь E и φ. Эквипотенциальные поверхности

Потенциал электростатического поля — это энергетическая характеристика поля, равная отношению потенциальной энергии пробного заряда q к величине этого заряда:

$$\varphi = \frac{U}{q}$$

Единица: В (Вольт).

Для точечного заряда Q:

$$\varphi = k\frac{Q}{r}$$

Потенциал может быть положительным или отрицательным в зависимости от знака заряда.

Разность потенциалов (напряжение) между двумя точками:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Физический смысл: работа электрического поля при перемещении единичного положительного заряда из точки 2 в точку 1.

Работа электрического поля при перемещении заряда q из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU_{12}$$

Связь между напряжённостью и потенциалом:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

В одномерном случае:

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}$$

Это соотношение показывает, что напряжённость поля определяется градиентом потенциала. Поле направлено в сторону убывания потенциала.

Циркуляция вектора напряжённости:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Это выражает потенциальность электростатического поля: работа электрического поля по замкнутому пути равна нулю.

Эквипотенциальные поверхности — это поверхности, во всех точках которых потенциал имеет одно и то же значение: $\varphi = \text{const}$.

Свойства эквипотенциальных поверхностей: - Вектор напряжённости электрического поля перпендикулярен эквипотенциальной поверхности - Работа электрического поля по перемещению заряда вдоль эквипотенциальной поверхности равна нулю - Эквипотенциальные поверхности не пересекаются

---

4. Электроёмкость. Конденсаторы. Энергия. Объёмная плотность энергии

Электроёмкость уединённого проводника — это отношение заряда на проводнике к его потенциалу:

$$C = \frac{Q}{\varphi}$$

Единица: Ф (Фарад) = Кл/В.

Электроёмкость зависит только от формы и размеров проводника и не зависит от заряда и потенциала.

Электроёмкость уединённой проводящей сферы радиусом R:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Конденсатор — это система двух проводников (обкладок), разделённых диэлектриком.

Электроёмкость конденсатора определяется как:

$$C = \frac{Q}{U}$$

где Q — заряд на одной обкладке, U — разность потенциалов между обкладками.

Плоский конденсатор состоит из двух параллельных пластин площадью S, разделённых диэлектриком толщиной d:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{S}{d}$$

где ε — относительная диэлектрическая проницаемость материала диэлектрика.

Цилиндрический конденсатор с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2, длиной l:

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \varepsilon \frac{l}{\ln(R_2/R_1)}$$

Сферический конденсатор с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Соединение конденсаторов:

Параллельное соединение:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

Напряжения одинаковые, заряды суммируются.

Последовательное соединение:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

Заряды одинаковые, напряжения суммируются.

Энергия конденсатора:

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$$

Три эквивалентные формы для расчёта энергии.

Энергия системы неподвижных точечных зарядов:

$$W = \sum_{i<j} k \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

или для непрерывного распределения зарядов:

$$W = \frac{1}{2}\int \varphi\rho dV$$

Объёмная плотность энергии электрического поля:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon E^2$$

Единица: Дж/м^3. Эта величина показывает, сколько энергии запасено в единице объёма электрического поля.

Полная энергия поля:

$$W = \int w dV = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon E^2 dV$$

---

5. Диэлектрики. Поляризация. Вектор индукции. Теорема Гаусса в диэлектриках

Диэлектрики — это материалы, которые практически не содержат свободных электронов и не проводят электрический ток при нормальных условиях.

Полярные молекулы — молекулы, которые имеют постоянный электрический дипольный момент даже в отсутствие внешнего электрического поля. Примеры: молекулы воды, спирта.

Неполярные молекулы — молекулы, которые не имеют постоянного дипольного момента, но под действием электрического поля становятся поляризованными. Примеры: молекулы кислорода, азота.

Поляризация диэлектрика — это процесс ориентации или деформации молекул под действием внешнего электрического поля, приводящий к появлению результирующего дипольного момента.

Вектор поляризации (поляризованность):

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

где χ_e — электрическая восприимчивость диэлектрика (безразмерная величина).

Вектор поляризации показывает дипольный момент, приходящийся на единицу объёма диэлектрика. Единица: Кл/м^2.

Диэлектрическая проницаемость связана с восприимчивостью:

$$\varepsilon = 1 + \chi_e$$

где ε — относительная диэлектрическая проницаемость материала.

Вектор электрического смещения (индукции):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

Единица: Кл/м^2. Вектор D характеризует поле, создаваемое свободными зарядами, независимо от связанных зарядов диэлектрика.

Теорема Гаусса для вектора D в диэлектриках:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

Поток вектора D через замкнутую поверхность равен свободному заряду, заключённому внутри поверхности.

Это важное отличие от теоремы Гаусса для E: в формулировке для D учитываются только свободные заряды, а не все заряды (включая связанные).

---

6. Сила тока. Плотность тока. Законы Ома и Джоуля-Ленца. Правила Кирхгофа

Сила тока — это заряд, проходящий через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Единица: A (Ампер). Единица ампера определяется как сила тока, при которой через поперечное сечение проходит заряд 1 Кл за 1 секунду.

Плотность тока — это ток на единицу площади поперечного сечения:

$$j = \frac{I}{S}$$

или для распределённого тока:

$$j = nev = \sigma E$$

где: - n — концентрация подвижных зарядов - e — элементарный заряд - v — средняя скорость движения зарядов (скорость дрейфа) - σ — удельная электрическая проводимость

Единица: А/м^2.

Уравнение непрерывности (закон сохранения заряда):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

где ρ — объёмная плотность заряда. Это уравнение выражает, что изменение плотности заряда в точке равно убыли потока плотности тока из этой точки.

Закон Ома — один из основных законов электричества:

Локальная форма (для материала):

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

или $j = \sigma E$

где σ — удельная электрическая проводимость материала.

Интегральная форма (для участка цепи):

$$I = \frac{U}{R}$$

где: - I — сила тока через проводник - U — разность потенциалов (напряжение) на концах проводника - R — электрическое сопротивление проводника

Электрическое сопротивление проводника:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

где: - ρ — удельное электрическое сопротивление материала (Ом·м) - l — длина проводника - S — площадь поперечного сечения

Закон Джоуля-Ленца описывает выделение тепла при прохождении тока через проводник:

Количество теплоты, выделенной за время t:

$$Q = I^2 R t$$

Мощность, выделяемая в виде тепла:

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R} = UI$$

Закон Джоуля-Ленца показывает, что при прохождении электрического тока через проводник всегда выделяется тепло.

Правила Кирхгофа для расчёта сложных электрических цепей:

Первое правило Кирхгофа (правило для узлов): Алгебраическая сумма токов в узле цепи равна нулю:

$$\sum I_i = 0$$

или: сумма токов, входящих в узел, равна сумме токов, выходящих из узла.

Второе правило Кирхгофа (правило для контуров): Алгебраическая сумма произведений токов на сопротивления в замкнутом контуре равна алгебраической сумме ЭДС в этом контуре:

$$\sum I_i R_i = \sum \varepsilon_j$$

При обходе контура положительными считаются токи и ЭДС, направленные в сторону обхода.

Первое правило вытекает из закона сохранения заряда, второе — из работы электрического поля в замкнутом контуре.

Данное пособие содержит полный и развёрнутый материал для подготовки к экзамену по физике и охватывает все основные концепции, формулы и определения, необходимые для успешного ответа на все вопросы ПЕРВОГО ВОПРОСА (ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ) из программы экзамена.

ПОЛНЫЕ ВЫВОДЫ ФОРМУЛ (ВТОРОЙ ВОПРОС)

МЕХАНИКА

1. ВЫВОД ВТОРОГО ЗАКОНА НЬЮТОНА И ФОРМУЛЫ ИЗМЕНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Опыт показывает, что когда на тело действует сила, оно изменяет свою скорость — получает ускорение. Величина ускорения зависит как от величины силы, так и от массы тела.

Исходные положения: - Из кинематики известно определение ускорения: $a = \frac{v-v_0}{t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ **-** Масса m — мера инертности тела (сопротивления ускорению)

Вывод второго закона Ньютона:

Запишем определение ускорения:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Из опыта известно, что сила F прямо пропорциональна ускорению и массе:

$$\vec{F} \sim m \cdot \vec{a}$$

Введя коэффициент пропорциональности, который по определению полагают равным единице в системе СИ:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

Второй закон Ньютона гласит: ускорение, приобретаемое телом, прямо пропорционально действующей силе и обратно пропорционально массе тела.

Вывод формулы изменения импульса:

Из второго закона Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Используя определение импульса $\vec{p} = m\vec{v}$, подставим:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Для постоянной массы:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Умножим обе части на dt:

$$\vec{F} \cdot dt = m \cdot d\vec{v} = d\vec{p}$$

Для конечных интервалов времени:

$$\boxed{\vec{F} \cdot \Delta t = m(\vec{v} - \vec{v}_0) = \Delta\vec{p}}$$

Произведение $\vec{F} \cdot t$ называется импульсом силы, а $m\vec{v}$ **— импульсом тела**.

Физический смысл: Импульс силы равен изменению импульса тела. Это альтернативная форма второго закона Ньютона, более удобная для решения задач с переменными силами.

2. ВЫВОД ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Рассмотрим замкнутую систему двух тел, которые взаимодействуют между собой.

Дано: - Два тела с массами m_1 и m_2 - Начальные скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ - Конечные скорости $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$ - Время взаимодействия Δt

Вывод:

Для первого тела по второму закону Ньютона:

$$\vec{F}_{12} = m_1\vec{a}_1 = \frac{m_1(\vec{v}_1' - \vec{v}_1)}{\Delta t}$$

Для второго тела:

$$\vec{F}_{21} = m_2\vec{a}_2 = \frac{m_2(\vec{v}_2' - \vec{v}_2)}{\Delta t}$$

По третьему закону Ньютона (силы действия и противодействия):

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Подставим:

$$\frac{m_1(\vec{v}_1' - \vec{v}_1)}{\Delta t} = -\frac{m_2(\vec{v}_2' - \vec{v}_2)}{\Delta t}$$

Умножим обе части на Δt и раскроем скобки:

$$m_1\vec{v}_1' - m_1\vec{v}_1 = -m_2\vec{v}_2' + m_2\vec{v}_2$$

Перенесём в левую часть начальные, в правую — конечные импульсы:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

или

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \mathrm{const}}$$

Закон сохранения импульса гласит: полный импульс замкнутой системы остаётся постоянным.

Это один из фундаментальных законов природы, являющийся следствием однородности пространства и третьего закона Ньютона.

---

3. ВЫВОД ФОРМУЛЫ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ

Момент инерции характеризует распределение масс тела относительно оси вращения.

Вывод из определения:

Рассмотрим твёрдое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси. Разделим его на малые элементы массой dm_i, находящиеся на расстояниях r_i от оси вращения.

Кинетическая энергия каждого элемента:

$$dK_i = \frac{1}{2}dm_i v_i^2$$

Так как $v_i = \omega r_i$ (связь линейной и угловой скорости):

$$dK_i = \frac{1}{2}dm_i(\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}r_i^2\omega^2 dm_i$$

Полная кинетическая энергия тела:

$$K = \sum dK_i = \sum \frac{1}{2}r_i^2\omega^2 dm_i = \frac{1}{2}\omega^2 \sum r_i^2 dm_i$$

Вынесем ω^2 из суммы (она одинакова для всех точек вращающегося тела):

$$K = \frac{1}{2}\omega^2 \left(\sum r_i^2 dm_i\right)$$

По определению:

$$\boxed{J = \sum r_i^2 dm_i = \int r^2 dm}$$

Момент инерции — это сумма произведений масс элементов тела на квадраты их расстояний до оси вращения.

Следствие: Кинетическая энергия вращающегося тела:

$$K = \frac{1}{2}J\omega^2$$

Это аналогично $K = \frac{1}{2}mv^2$ для поступательного движения, где J играет роль массы, а ω — роль скорости.

---

4. ВЫВОД ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНЕРА

Теорема Штейнера позволяет найти момент инерции относительно произвольной оси, если известен момент инерции относительно параллельной оси через центр масс.

Дано: - Момент инерции относительно оси через центр масс: J_cm - Масса тела: M - Расстояние между параллельными осями: d

Вывод:

Рассмотрим систему материальных точек. Выберем две параллельные оси: 1. Ось 1 проходит через центр масс 2. Ось 2 находится на расстоянии d от оси 1

Для элемента массы dm, находящегося на расстояниях от осей: - От оси 1: r_cm - От оси 2: r

Геометрически (когда центр масс между осями в одной плоскости):

$$\vec{r} = \vec{r}_{cm} + \vec{d}$$

Возьмём скалярное произведение:

$$r^2 = |\vec{r}_{cm} + \vec{d}|^2 = r_{cm}^2 + d^2 + 2\vec{r}_{cm} \cdot \vec{d}$$

Момент инерции относительно оси 2:

$$J = \int r^2 dm = \int (r_{cm}^2 + d^2 + 2\vec{r}_{cm} \cdot \vec{d})dm$$

Раскроем интеграл:

$$J = \int r_{cm}^2 dm + \int d^2 dm + 2\vec{d} \cdot \int \vec{r}_{cm} dm$$

Анализируем каждый член:

1. **Первый член:** $\int r_{cm}^2 dm = J_{cm}$ — момент инерции относительно оси через центр масс.
2. **Второй член:** $\int d^2 dm = d^2 \int dm = Md^2$ — так как d постоянна для всех точек.
3. **Третий член:** $\int \vec{r}_{cm} dm = M\vec{r}_{cm,cm} = 0$ — по определению центра масс этот интеграл равен нулю, так как центр масс находится в начале координат относительно оси через центр масс.

Поэтому:

$$\boxed{J = J_{cm} + Md^2}$$

Теорема Штейнера гласит: момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы на квадрат расстояния между осями.

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

5. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Физическая основа гармонических колебаний — наличие восстанавливающей силы, пропорциональной смещению.

Рассмотрим пружинный маятник:

Дано: - Груз массой m прикреплён к пружине жёсткостью k **-** При смещении на x от положения равновесия возникает сила: $\vec{F} = -k\vec{x}$ (закон Гука)

Вывод:

Применим второй закон Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Подставим выражение для восстанавливающей силы:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Разделим обе части на m:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Введём обозначение для циклической (угловой) частоты:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Получаем **дифференциальное уравнение гармонических колебаний:**

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

или кратко: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Решение этого уравнения:

Предположим решение вида:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Проверим, является ли оно решением:

Первая производная (скорость):

$$\frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Вторая производная (ускорение):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t)$$

Подставим в исходное уравнение:

$$-\omega^2 x + \omega^2 x = 0$$

(верно)

Уравнение удовлетворяется!

Общее решение:

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)}$$

где: **- A** — амплитуда (максимальное смещение) **- ω** = $\sqrt{k/m}$ — циклическая частота **-** $varphi_0$ — начальная фаза (определяется начальными условиями)

Период колебаний:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

---

6. ВЫВОД ПЕРИОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Математический маятник — идеализированная система: материальная точка массой m, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити длины l.

Вывод уравнения движения:

Рассмотрим маятник, отклонённый на малый угол θ от вертикали.

Применим второй закон Ньютона для вращательного движения:

$$M = I\beta$$

где M — момент возвращающей силы, I — момент инерции, β — угловое ускорение.

Возвращающая сила (составляющая веса вдоль касательной):

$$F_\tau = -mg\sin\theta$$

Знак минус указывает, что сила направлена противоположно углу отклонения (восстанавливающая).

Момент этой силы относительно точки подвеса:

$$M = -mgl\sin\theta$$

Момент инерции точки массой m на расстоянии l:

$$I = ml^2$$

Угловое ускорение:

$$\beta = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Подставим в уравнение вращательного движения:

$$-mgl\sin\theta = ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Упростим (разделим на ml):

$$-g\sin\theta = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

или

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Приближение для малых углов: $\sin\theta \approx \theta$ (в радианах)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Это уравнение идентично уравнению гармонических колебаний с $\omega^2 = \frac{g}{l}$, откуда:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Период математического маятника:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Замечания: - **Период не зависит от массы маятника** — все маятники одинаковой длины колеблются с одинаковым периодом - **Период не зависит от амплитуды колебаний** (при малых углах) — это свойство называется **изохронностью - Период зависит только от длины нити и ускорения свободного падения**

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

7. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Физическая модель идеального газа: 1. Молекулы — материальные точки (размерами пренебрегаем) 2. Молекулы движутся хаотически 3. Столкновения молекул между собой и со стенками упругие 4. Среднее расстояние между молекулами » размера молекулы 5. Молекулы не взаимодействуют на расстоянии

Вывод из молекулярно-кинетической теории:

Шаг 1. Давление от столкновений молекул:

Рассмотрим молекулы, ударяющие о стенку площадью S за время Δt.

При столкновении с неподвижной стенкой нормальная компонента скорости молекулы v_x меняет знак. Импульс, передаваемый одной молекулой стенке:

$$\Delta p_i = 2m_0v_x$$

Число молекул, пересекающих площадку в единицу времени (с учётом того, что в среднем только половина молекул движется в сторону стенки, и нужно учитывать распределение по скоростям):

$$\Delta N = \frac{1}{4}n\langle v\rangle S\Delta t$$

где n — концентрация молекул, $\langle v\rangle$ — средняя скорость.

Суммарный импульс, передаваемый стенке за время Δt:

Учитывая, что в среднем только одна из трёх координатных компонент скорости направлена перпендикулярно к стенке:

$$\Delta P = \frac{1}{3} n m_0 \langle v^2 \rangle S \Delta t$$

Давление — сила на единицу площади:

$$p = \frac{\Delta P}{S \Delta t} = \frac{1}{3} n m_0 \langle v^2 \rangle$$

или

$$\boxed{p = \frac{1}{3} \rho \langle v^2 \rangle}$$

где $\rho = n m_0$ — плотность газа.

Шаг 2. Связь средней кинетической энергии с температурой:

Средняя кинетическая энергия молекулы:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} m_0 \langle v^2 \rangle$$

По определению температуры в молекулярной физике (из теоремы о равнораспределении энергии):

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} kT$$

откуда:

$$\frac{1}{2} m_0 \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT$$

$$m_0 \langle v^2 \rangle = 3kT$$

Шаг 3. Получение уравнения состояния:

Подставим в формулу давления:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} n \cdot 3kT = nkT$$

Так как n = N/V (концентрация = число молекул / объём):

$$p = \frac{N}{V} kT$$

Умножим обе части на V:

$$pV = NkT$$

Число молекул N = ν·N_A (ν молей содержат νN_A молекул):

$$pV = \nu N_A kT$$

Произведение N_A·k = R (универсальная газовая постоянная):

$$R = N_A k = 6,022 \times 10^{23} \times 1,38 \times 10^{-23} = 8,314 \text{ Дж/(моль·К)}$$

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона):

$$\boxed{pV = \nu RT}$$

Альтернативные формы: - Для одного моля: $pV_m = RT$ - Через плотность: $p = \frac{\rho RT}{M}$, где M — молярная масса - Через концентрацию: $p = nkT$

---

8. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ВНУТРЕННЕЙ ЭНЕРГИИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Внутренняя энергия — сумма кинетических энергий хаотического движения молекул (для идеального газа молекулы не взаимодействуют, поэтому потенциальная энергия взаимодействия = 0).

Вывод:

Для одной молекулы:

Средняя кинетическая энергия одной молекулы определяется из теоремы о равнораспределении энергии: **на каждую степень свободы приходится энергия** $\frac{1}{2}kT$.

Для молекулы с i степенями свободы:

$$\langle K_1 \rangle = \frac{i}{2}kT$$

где: - Для одноатомного газа (He, Ar): i = 3 (только поступательное движение) - Для двухатомного газа (O_2, N_2): i = 5 (3 поступательных + 2 вращательных степени) - Для многоатомного газа: i = 6 (3 поступательных + 3 вращательных степени)

Для одного моля газа:

В одном моле число молекул = N_A (число Авогадро):

$$U_1 = N_A \cdot \frac{i}{2}kT = \frac{i}{2}N_A kT = \frac{i}{2}RT$$

где использовано соотношение R = N_A·k.

Для ν молей газа:

$$\boxed{U = \nu \cdot U_1 = \nu \cdot \frac{i}{2}RT = \frac{i}{2}\nu RT}$$

Обобщённая формула:

$$\boxed{U = \frac{i}{2}\nu RT}$$

где i — число степеней свободы молекулы.

Следствия:

1. **Внутренняя энергия зависит только от температуры:** U = U(T)
2. **При постоянном числе молей изменение внутренней энергии:**

$$\Delta U = \frac{i}{2}\nu R\Delta T = \nu C_V \Delta T$$

где молярная теплоёмкость при постоянном объёме:

$$\boxed{C_V = \frac{i}{2}R}$$

3. **Внутренняя энергия не зависит от давления и объёма** (только от T)

---

9. ВЫВОД ПЕРВОГО НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ

Физическая основа — закон сохранения энергии для термодинамических процессов.

Рассмотрим систему, которой сообщена теплота Q и которая совершила работу A:

Анализ энергетических процессов:

1. **Теплота, сообщённая системе (Q)** — энергия, передаваемая тепловым способом.
2. **Работа, совершённая системой (A) —** энергия, расходуемая на расширение против внешнего давления:

$$A = \int p\, dV$$

3. **Изменение внутренней энергии (ΔU) —** изменение кинетической энергии молекул и их взаимодействия.

Применение закона сохранения энергии:

Энергия, поступившая в систему в виде теплоты, распределяется между: - Увеличением внутренней энергии системы (ΔU) - Совершением работы против внешних сил (A)

Математически:

$$\boxed{Q = \Delta U + A}$$

или в дифференциальной форме:

$$\boxed{dQ = dU + pdV}$$

Физический смысл:

Уравнение выражает закон сохранения энергии: энергия, переданная системе извне в виде теплоты, либо увеличивает её внутреннюю энергию, либо преобразуется в работу, либо распределяется между этими двумя формами.

Частные случаи:

1. **Изохорный процесс (V = const, A = 0):**
$$Q = \Delta U = \nu C_V \Delta T$$
   Вся теплота идёт на изменение внутренней энергии.
2. **Изобарный процесс (p = const):**
$$Q = \Delta U + p\Delta V = \nu C_V \Delta T + \nu R \Delta T = \nu C_p \Delta T$$
   где $C_p = C_V + R$ — молярная теплоёмкость при постоянном давлении.
3. **Изотермический процесс (T = const, ΔU = 0):**
$$Q = A = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$
   Вся теплота преобразуется в работу.
4. **Адиабатический процесс (Q = 0):**
$$0 = \Delta U + A \Rightarrow A = -\Delta U$$
   Вся работа совершается за счёт убыли внутренней энергии.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

10. ВЫВОД ЗАКОНА КУЛОНА

Исторический контекст: Французский физик Шарль Кулон в 1785 году экспериментально установил закон взаимодействия точечных зарядов, используя крутильный маятник.

Экспериментальные факты:

1. Сила взаимодействия пропорциональна первому заряду: F $\sim q_1$
2. Сила взаимодействия пропорциональна второму заряду: F $\sim q_2$
3. Сила обратно пропорциональна квадрату расстояния: F $\sim 1/r^2$
4. Сила направлена вдоль линии, соединяющей заряды

Вывод закона:

Объединяя все экспериментальные зависимости:

$$F \sim \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Введём коэффициент пропорциональности k:

$$\boxed{F = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2}}$$

В системе СИ:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8,99 \times 10^9 \text{ Н·м}^2/\text{Кл}^2$$

где
$varepsilon_0$ = 8,854 × 10^{-12} Ф/м — электрическая постоянная (константа электромагнетизма).

Векторная форма закона Кулона:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_{12}$$

где $\vec{e}_{12}$ — единичный вектор от первого заряда ко второму.

Свойства: - **Одноимённые заряды** отталкиваются (F > 0, берётся со знаком +) - **Разноимённые заряды** притягиваются (F < 0, берётся со знаком -) - Силы действуют на оба заряда парой (третий закон Ньютона)

---

11. ВЫВОД ТЕОРЕМЫ ГАУССА

Теорема Гаусса связывает поток электрического поля через замкнутую поверхность с полным зарядом внутри этой поверхности.

Вывод для точечного заряда:

Рассмотрим точечный положительный заряд Q в центре сферы радиусом R.

Напряжённость поля на сфере (из закона Кулона):

$$E = k\frac{|Q|}{R^2}$$

Поле направлено радиально наружу (для положительного заряда).

Поток через сферу:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S E\, dA$$

(так как $\vec{E}$ параллелен d$\vec{A}$ везде на сфере)

$$\Phi = E \cdot S_{\text{сферы}} = k\frac{Q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi kQ$$

Учитывая $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$:

$$\Phi = 4\pi \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot Q = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Обобщение для произвольной поверхности:

Используя принцип суперпозиции и геометрические аргументы (считая поток от зарядов внутри и снаружи поверхности), доказывается, что:

Теорема Остроградского-Гаусса:

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{внутри}}}{\varepsilon_0}}$$

Дифференциальная форма (через дивергенцию):

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

где ρ — объёмная плотность заряда.

Физический смысл: - Электрические поля создаются электрическими зарядами - Чем больше заряд внутри поверхности, тем больше поток поля через неё **- Заряды вне поверхности не влияют на полный поток** (их вклады взаимно компенсируются)

---

12. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ЁМКОСТИ ПЛОСКОГО КОНДЕНСАТОРА

Плоский конденсатор состоит из двух параллельных металлических пластин (обкладок) площадью S, разделённых диэлектриком толщиной d.

Вывод:

Шаг 1. Поле между пластинами:

При наличии зарядов +Q и -Q на пластинах, каждая пластина создаёт поле. Для бесконечной заряженной плоскости с поверхностной плотностью σ = Q/S поле:

$$E_{\text{одной}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$$

Поле от двух пластин складывается внутри конденсатора:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость материала между пластинами.

Шаг 2. Напряжение между пластинами:

Напряжение (разность потенциалов) — это интеграл от напряжённости поля:

$$U = \int_0^d E\,dx = E \cdot d = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0\varepsilon}$$

Подставим σ = Q/S:

$$U = \frac{Q/S \cdot d}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{Qd}{\varepsilon_0\varepsilon S}$$

Шаг 3. Определение ёмкости:

По определению электроёмкость:

$$C = \frac{Q}{U}$$

Подставим выражение для U:

$$C = \frac{Q}{\frac{Qd}{\varepsilon_0 \varepsilon S}} = \frac{Q \cdot \varepsilon_0 \varepsilon S}{Qd} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$$

Формула ёмкости плоского конденсатора:

$$\boxed{C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{S}{d}}$$

Физический смысл результата: - Ёмкость пропорциональна площади пластин (S ↑ ⟹ C ↑): больше площадь — больше способность накапливать заряд **- Ёмкость обратно пропорциональна расстоянию** (d ↑ ⟹ C ↓): больше расстояние между пластинами — слабже взаимодействие, меньше ёмкость **- Ёмкость пропорциональна диэлектрической проницаемости** (ε ↑ ⟹ C ↑): диэлектрик увеличивает ёмкость

---

13. ВЫВОД ЗАКОНА ОМА

Закон Ома — экспериментально установленный закон, связывающий ток, напряжение и сопротивление.

Исторический контекст: Немецкий физик Георг Ом установил закон в 1826 году на основе экспериментов с различными проводниками.

Вывод из микроскопической теории:

Шаг 1. Движение электронов в электрическом поле:

Когда к концам проводника прикладывается напряжение U, в проводнике появляется электрическое поле E = U/l (где l — длина проводника).

На каждый электрон действует сила:

$$F = eE$$

Электрон получает ускорение:

$$\vec{a} = -\frac{e\vec{E}}{m}$$

где e — заряд электрона, m — его масса.

Шаг 2. Установление дрейфовой скорости:

Между ускоряющим действием поля и сопротивлением среды (столкновениями с атомами кристаллической решётки) устанавливается равновесие. Электроны приобретают среднюю **дрейфовую скорость**:

$$v_d = \mu E$$

где μ — подвижность носителей заряда (константа, зависящая от материала).

Шаг 3. Связь плотности тока с полем (микроскопическая форма закона Ома):

Плотность тока (ток на единицу площади сечения) определяется числом электронов, пересекающих единичную площадь в единицу времени:

$$j = ne|v_d| = ne\mu E$$

где n — концентрация свободных электронов.

Определим удельную электрическую проводимость:

$$\sigma = ne\mu$$

Тогда:

$$\boxed{\vec{j} = \sigma\vec{E}}$$

Это **микроскопическая форма закона Ома:** плотность тока пропорциональна напряжённости поля.

Шаг 4. Интегральная форма закона Ома:

Рассмотрим однородный проводник длины l и площади поперечного сечения S.

Полный ток:

$$I = j \cdot S = \sigma E \cdot S$$

Напряжение между концами проводника:

$$U = E \cdot l$$

Отсюда:

$$I = \sigma\frac{U}{l} \cdot S = \frac{\sigma S}{l} \cdot U = \frac{U}{R}$$

где сопротивление:

$$R = \frac{l}{\sigma S} = \rho\frac{l}{S}$$

ρ = 1/σ — удельное электрическое сопротивление материала (зависит от материала и температуры).

Макроскопическая форма закона Ома:

$$\boxed{I = \frac{U}{R}}$$

или эквивалентно:

$$\boxed{U = IR}$$

Единица сопротивления: Ом (Ω) = В/А

Физический смысл: - Ток прямо пропорционален приложенному напряжению: при увеличении U ток увеличивается **- Ток обратно пропорционален сопротивлению**: R ↑ ⟹ I ↓ **- Сопротивление зависит от трёх факторов: - ρ** — удельное сопротивление материала **- l** — длина проводника (R ↑ с увеличением l) **- S** — площадь сечения (R ↓ с увеличением S)

ПОЛНЫЕ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ (ТРЕТИЙ ВОПРОС)

МЕХАНИКА

Задача 1: Движение материальной точки

Условие: Материальная точка движется согласно закону $x(t) = 5t - 2t^2 + 0,5t^3$ (м). Найти: - а) положение при t = 2 с - б) скорость при t = 2 с - в) ускорение при t = 2 с

Решение:

Дано: - $x(t) = 5t - 2t^2 + 0,5t^3$ м - t = 2 с

Найти: x(2), v(2), a(2)

Теория: Скорость $v(t) = \frac{dx}{dt}$, ускорение $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

Вычисления:

а) **Положение при t = 2 с:**

$$x(2) = 5 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 + 0,5 \cdot 2^3 = 10 - 8 + 4 = 6 \text{ м}$$

б) **Скорость:** Найдём первую производную:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 5 - 4t + 1,5t^2$$

При t = 2 с:

$$v(2) = 5 - 4(2) + 1,5(2)^2 = 5 - 8 + 6 = 3 \text{ м/с}$$

в) **Ускорение:** Найдём вторую производную:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -4 + 3t$$

При t = 2 с:

$$a(2) = -4 + 3(2) = 2 \text{ м/с}^2$$

Ответ: x(2) = 6 м, v(2) = 3 м/с, a(2) = 2 м/с^2

Задача 2: Свободное падение

Условие: Тело падает с высоты h = 45 м. Найти: - а) время падения - б) скорость в момент падения - в) среднюю скорость за всё время падения

Решение:

Дано: - h = 45 м - g = 10 м/с^2 (упрощённое значение) - v_0 = 0 (падает свободно)

Теория: При свободном падении $h = \frac{1}{2}gt^2, v = gt, \langle v \rangle = \frac{h}{t} = \frac{v+v_0}{2}$

Вычисления:

а) **Время падения:**

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 45}{10}} = \sqrt{9} = 3 \text{ с}$$

б) **Скорость в момент падения:**

$$v = gt = 10 \times 3 = 30 \text{ м/с}$$

в) **Средняя скорость:**

$$\langle v \rangle = \frac{v + v_0}{2} = \frac{30 + 0}{2} = 15 \text{ м/с}$$

Физический смысл: При свободном падении скорость растёт равномерно от нуля до 30 м/с, а средняя скорость равна половине конечной.

Ответ: t = 3 с, v = 30 м/с, $\langle v \rangle$ = 15 м/с

Задача 3: Движение по окружности

Условие: Материальная точка движется по окружности радиусом R = 0,5 м с постоянной угловой скоростью ω = 4 рад/с. Найти: - а) период обращения - б) линейную скорость - в) центростремительное ускорение

Решение:

Дано: - R = 0,5 м - ω = 4 рад/с

Теория: - $T = \frac{2\pi}{\omega}$ - $v = \omega R$ - $a_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$

Вычисления:

а) **Период обращения:**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = 0,5\pi \approx 1,57\ \text{с}$$

б) **Линейная скорость:**

$$v = \omega R = 4 \times 0,5 = 2\ \text{м/с}$$

в) **Центростремительное ускорение:**

$$a_n = \omega^2 R = 16 \times 0,5 = 8\ \text{м/с}^2$$

Ответ: T ≈ 1,57 с, v = 2 м/с, a_n = 8 м/с^2

Задача 4: Второй закон Ньютона и импульс

Условие: На тело массой m = 2 кг действует сила F = 10 Н. Найти: - а) ускорение - б) скорость через t = 5 с (если v_0 = 0) - в) импульс, полученный телом

Решение:

Дано: - m = 2 кг - F = 10 Н - t = 5 с, v_0 = 0

Теория: - $\vec{F} = m\vec{a}$ - $v = v_0 + at$ - $\vec{p} = m\vec{v}$ или $\vec{p} = \vec{F}t$

Вычисления:

а) **Ускорение:**

$$a = \frac{F}{m} = \frac{10}{2} = 5\ \text{м/с}^2$$

б) **Скорость через 5 с:**

$$v = v_0 + at = 0 + 5 \times 5 = 25\ \text{м/с}$$

в) **Импульс:**

$$p = Ft = 10 \times 5 = 50\ \text{кг·м/с}$$

или

$$p = mv = 2 \times 25 = 50\ \text{кг·м/с}$$

(верно)

Ответ: a = 5 м/с^2, v = 25 м/с, p = 50 кг·м/с

Задача 5: Закон сохранения импульса

Условие: Два шара массами m_1 = 1 кг и m_2 = 2 кг движутся навстречу друг другу с скоростями v_1 = 5 м/с и v_2 = -3 м/с. После столкновения первый шар останавливается (v_1' = 0). Найти скорость второго шара после столкновения.

Решение:

Дано: - m_1 = 1 кг, v_1 = 5 м/с - m_2 = 2 кг, v_2 = -3 м/с (движется влево) - v_1' = 0

Теория: Для замкнутой системы импульс сохраняется: $\sum m_i v_i = \text{const}$

Вычисления:

Импульс до столкновения:

$$p = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 1 \times 5 + 2 \times (-3) = 5 - 6 = -1 \text{ кг·м/с}$$

Импульс после столкновения:

$$p = m_1 v_1' + m_2 v_2' = 1 \times 0 + 2 \times v_2' = 2v_2'$$

По закону сохранения импульса:

$$p = p$$

$$-1 = 2v_2'$$

$$v_2' = -0,5 \text{ м/с}$$

Физический смысл: Второй шар продолжает двигаться влево, но медленнее.

Ответ: v_2' = 0,5 м/с (в направлении первоначального движения второго шара)

Задача 6: Работа и кинетическая энергия

Условие: Автомобиль массой m = 1000 кг разгоняется с v_0 = 0 до v = 20 м/с. Найти: - а) изменение кинетической энергии - б) работу, совершённую силой тяги - в) среднюю мощность, если время разгона t = 10 с

Решение:

Дано: - m = 1000 кг - v_0 = 0, v = 20 м/с - t = 10 с

Теория: - $K = \frac{1}{2}mv^2$ - $A = \Delta K$ - $P = \frac{A}{t}$

Вычисления:

а) **Изменение кинетической энергии:**

$$K_0 = 0, \quad K = \frac{1}{2} \times 1000 \times 400 = 200000 \text{ Дж} = 200 \text{ кДж}$$

$$\Delta K = 200000 \text{ Дж}$$

б) **Работа, совершённая силой тяги:**

$$A = \Delta K = 200000 \text{ Дж}$$

в) **Средняя мощность:**

$$P = \frac{A}{t} = \frac{200000}{10} = 20000 \text{ Вт} = 20 \text{ кВт}$$

Ответ: ΔK = 200 кДж, A = 200 кДж, P = 20 кВт

Задача 7: Потенциальная и полная механическая энергия

Условие: Мяч падает с высоты h = 20 м, масса m = 0,5 кг. Найти: - а) потенциальную энергию в начальной точке - б) кинетическую энергию в момент падения - в) скорость в момент падения

Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение:

Дано: - h = 20 м, m = 0,5 кг, g = 10 м/с^2, v_0 = 0

Теория: - $U = mgh$, $K = \frac{1}{2}mv^2$ - $E = K + U = \text{const}$ (закон сохранения энергии)

Вычисления:

а) **Потенциальная энергия в начальной точке:**

$$U_0 = mgh = 0,5 \times 10 \times 20 = 100 \text{ Дж}$$

б) **Полная энергия:**

$$E = U_0 + K_0 = 100 + 0 = 100 \text{ Дж}$$

В момент падения (h = 0):

$$E = K + U = K + 0 = 100 \text{ Дж}$$

$$K = 100 \text{ Дж}$$

в) **Скорость в момент падения:**

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = 100$$

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{200}{0,5}} = \sqrt{400} = 20 \text{ м/с}$$

Ответ: U_0 = 100 Дж, K = 100 Дж, v = 20 м/с

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Задача 8: Гармонические колебания

Условие: Материальная точка совершает гармонические колебания: $x(t) = 0,1\sin(2\pi t)$ м. Найти: - а) амплитуду и период - б) максимальную скорость - в) максимальное ускорение

Решение:

Дано: $x(t) = 0,1\sin(2\pi t)$ м

Сравнение с общей формой: $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$

Вычисления:

а) **Амплитуда и период:** - A = 0,1 м - ω = 2π рад/с - $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ с

б) **Максимальная скорость:**

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 0,1 \times 2\pi\cos(2\pi t) = 0,2\pi\cos(2\pi t)$$

$$v_{max} = A\omega = 0,1 \times 2\pi = 0,2\pi \approx 0,628 \text{ м/с}$$

в) **Максимальное ускорение:**

$$a(t) = -A\omega^2\sin(2\pi t) = -0,1 \times 4\pi^2\sin(2\pi t)$$

$$a_{max} = A\omega^2 = 0,1 \times (2\pi)^2 = 0,4\pi^2 \approx 3,95 \text{ м/с}^2$$

Ответ: A = 0,1 м, T = 1 с, v_max ≈ 0,628 м/с, a_max ≈ 3,95 м/с^2

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Задача 9: Уравнение состояния газа

Условие: В цилиндре объёмом V = 10 л находится кислород массой m = 32 г при T = 300 К. Найти давление газа. (M(O_2) = 32 г/моль)

Решение:

Дано: - V = 10 л = 0,01 м^3 - m = 32 г = 0,032 кг - T = 300 К - M = 0,032 кг/моль - R = 8,314 Дж/(моль·К)

Теория: $pV = \nu RT$, где $\nu = \frac{m}{M}$

Вычисления:

Количество вещества:

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{32}{32} = 1 \text{ моль}$$

Давление:

$$p = \frac{\nu RT}{V} = \frac{1 \times 8,314 \times 300}{0,01} = \frac{2494,2}{0,01} = 249420 \text{ Па} \approx 249 \text{ кПа}$$

Ответ: p ≈ 249 кПа ≈ 2,46 атм

Задача 10: Теплоёмкость газа

Условие: Одноатомный идеальный газ (ν = 2 моля) нагревается при постоянном объёме на ΔT = 50 К. Найти: - а) количество подведённой теплоты - б) изменение внутренней энергии - в) работу, совершённую газом

Решение:

Дано: - ν = 2 моль (одноатомный, i = 3) - ΔT = 50 К - V = const (изохорный процесс) - R = 8,314 Дж/(моль·К)

Теория: - $C_V = \frac{i}{2}R$ - При V = const: $Q = \nu C_V \Delta T$, $\Delta U = Q$, A = 0

Вычисления:

а) **Молярная теплоёмкость:**

$$C_V = \frac{3}{2} \times 8,314 = 12,471 \text{ Дж/(моль·К)}$$

Теплота:

$$Q = \nu C_V \Delta T = 2 \times 12,471 \times 50 = 1247,1 \text{ Дж} \approx 1,25 \text{ кДж}$$

б) **Изменение внутренней энергии:**

$$\Delta U = Q = 1247,1 \text{ Дж} \approx 1,25 \text{ кДж}$$

в) **Работа:**

$$A = 0$$

(объём не меняется)

Проверка: $Q = \Delta U + A$: $1247,1 = 1247,1 + 0$ (верно)

Ответ: Q ≈ 1,25 кДж, ΔU ≈ 1,25 кДж, A = 0

Задача 11: Первое начало термодинамики

Условие: Газ расширяется при постоянном давлении p = 200 кПа от V_1 = 5 л до V_2 = 10 л. Если газ получил теплоту Q = 1,5 кДж, найти изменение внутренней энергии.

Решение:

Дано: - p = 200 кПа = 200000 Па - V_1 = 0,005 м^3, V_2 = 0,01 м^3 - Q = 1500 Дж - p = const (изобарный процесс)

Теория: - $A = p(V_2 - V_1)$ - $Q = \Delta U + A$

Вычисления:

Работа, совершённая газом:

$$A = p(V_2 - V_1) = 200000 \times (0,01 - 0,005) = 200000 \times 0,005 = 1000 \text{ Дж}$$

Изменение внутренней энергии:

$$\Delta U = Q - A = 1500 - 1000 = 500 \text{ Дж}$$

Ответ: ΔU = 0,5 кДж

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

Задача 12: Закон Кулона

Условие: Два точечных заряда q_1 = 2 мкКл и q_2 = 3 мкКл находятся на расстоянии r = 0,3 м. Найти: - а) силу взаимодействия - б) на каком расстоянии сила будет в 4 раза меньше

Решение:

Дано: - q_1 = 2 × 10^{-6} Кл - q_2 = 3 × 10^{-6} Кл - r = 0,3 м - k = 8,99 × 10^9 Н·м^2/Кл^2

Теория: $F = k\frac{q_1q_2}{r^2}$

Вычисления:

а) **Сила взаимодействия:**

$$F = 8,99 \times 10^9 \times \frac{2 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{0,09}$$

$$F = 8,99 \times 10^9 \times \frac{6 \times 10^{-12}}{0,09} = \frac{53,94 \times 10^{-3}}{0,09} \approx 0,6 \text{ Н}$$

б) **Расстояние, при котором F’ = F/4:**

$$F' = \frac{1}{4}F \Rightarrow r' = 2r = 0,6 \text{ м}$$

Ответ: F ≈ 0,6 Н, r’ = 0,6 м

Задача 13: Напряжённость электрического поля

Условие: На расстоянии r = 0,2 м от точечного заряда q = 4 мкКл. Найти: - а) напряжённость поля - б) потенциал - в) силу на тестовый заряд q_0 = 1 нКл

Решение:

Дано: - q = 4 × 10^{-6} Кл - r = 0,2 м - q_0 = 10^{-9} Кл - k = 8,99 × 10^9 Н·м^2/Кл^2

Теория: - $E = k\frac{q}{r^2}$ - $\varphi = k\frac{q}{r}$ - $F = q_0E$

Вычисления:

а) **Напряжённость:**

$$E = 8,99 \times 10^9 \times \frac{4 \times 10^{-6}}{0,04} = 8,99 \times 10^5 \approx 9 \text{ МВ/м}$$

б) **Потенциал:**

$$\varphi = 8,99 \times 10^9 \times \frac{4 \times 10^{-6}}{0,2} \approx 180 \text{ кВ}$$

в) **Сила:**

$$F = 10^{-9} \times 8,99 \times 10^5 \approx 0,9 \text{ мН}$$

Ответ: E ≈ 9 МВ/м, φ ≈ 180 кВ, F ≈ 0,9 мН

Задача 14: Конденсатор

Условие: Плоский конденсатор: S = 100 $см^2$, d = 1 мм, ε = 5. При U = 100 В найти: - а) ёмкость - б) заряд - в) энергию

Решение:

Дано: - S = 0,01 $м^2$ - d = 10^{-3} м - ε = 5 - U = 100 В - $varepsilon_0$ = 8,854 × 10^{-12} Ф/м

Теория: - $C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{S}{d}$ - $Q = CU$ - $W = \frac{1}{2}CU^2$

Вычисления:

а) **Ёмкость:**

$$C = 8,854 \times 10^{-12} \times 5 \times \frac{0,01}{0,001} = 4,427 \times 10^{-10} \text{ Ф} \approx 0,44 \text{ нФ}$$

б) **Заряд:**

$$Q = 4,427 \times 10^{-10} \times 100 \approx 44,3 \text{ нКл}$$

в) **Энергия:**

$$W = \frac{1}{2} \times 4,427 \times 10^{-10} \times 10000 \approx 2,2 \text{ мкДж}$$

Ответ: C ≈ 0,44 нФ, Q ≈ 44,3 нКл, W ≈ 2,2 мкДж

Задача 15: Закон Ома

Условие: Проволока из нихрома: l = 2 м, S = 1 $мм^2$, ρ = 1,1 Ω·м, U = 220 В. Найти: - а) сопротивление - б) силу тока - в) мощность

Решение:

Дано: - l = 2 м - S = 10^{-6} $м^2$ - ρ = 1,1 Ω·м - U = 220 В

Теория: - $R = \rho \frac{l}{S}$ - $I = \frac{U}{R}$ - $P = \frac{U^2}{R}$

Вычисления:

а) **Сопротивление:**

$$R = 1,1 \times \frac{2}{10^{-6}} = 2,2 \times 10^6 \text{ Ом} = 2,2 \text{ МОм}$$

б) **Ток:**

$$I = \frac{220}{2,2 \times 10^6} = 10^{-4}\ \text{А} = 0,1\ \text{мА}$$

в) **Мощность:**

$$P = \frac{220^2}{2,2 \times 10^6} = 0,022\ \text{Вт} = 22\ \text{мВт}$$

Ответ: R = 2,2 МОм, I = 0,1 мА, P = 22 мВт

КРАТКАЯ СПРАВКА ДЛЯ БЫСТРОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Основные формулы по темам:

Механика

- $v = \frac{s}{t}, a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$
- $F = ma, p = mv$
- $A = Fs\cos\alpha, P = \frac{A}{t}$
- $E = K + U = \text{const}$

Колебания

- $x = A\sin(\omega t + \varphi)$
- $\omega = \frac{2\pi}{T}, v_{max} = A\omega, a_{max} = A\omega^2$

Газы

- $pV = \nu RT, U = \frac{i}{2}\nu RT$
- $Q = \Delta U + A$

Электричество

- $F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}, E = \frac{F}{q}$
- $C = \frac{Q}{U}, I = \frac{U}{R}$

Всегда: 1. Выпишите дано и найти 2. Выберите нужные формулы 3. Проверьте единицы измерения 4. Вычислите результат 5. Проверьте правдоподобность ответа