ПЕРВЫЙ ВОПРОС (ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ)

МЕХАНИКА

1. Системы отсчёта. Закон движения материальной точки. Траектория, путь, перемещение. Скорость (мгновенная, средняя) и ускорение (тангенциальное, нормальное, полное) материальной точки. Принцип относительности Галилея.

Система отсчёта — это совокупность тела отсчёта, связанной с ним системы координат и синхронизированных часов. Тело отсчёта — это твёрдое тело или совокупность неподвижных относительно друг друга тел, служащее для определения положения других объектов в пространстве.

Закон движения материальной точки — это функциональная зависимость положения материальной точки от времени: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. В декартовых координатах закон движения задаётся уравнениями:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

Эти уравнения называются **кинематическими уравнениями движения**.

Траектория — это геометрическое место точек в пространстве, через которые проходит движущаяся материальная точка. Траектория может быть прямой линией (прямолинейное движение) или кривой (криволинейное движение).

Путь (обозначается как s) — это длина участка траектории, пройденного материальной точкой за определённый промежуток времени. Путь — всегда положительная скалярная величина. Путь измеряется в единицах длины (метры, сантиметры и т.д.).

Перемещение — это вектор, соединяющий начальное и конечное положения материальной точки:

$$\vec{s} = \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Модуль перемещения может быть меньше пройденного пути при криволинейном движении.

Скорость характеризует быстроту и направление движения:

- **Мгновенная скорость** — это производная радиус-вектора по времени:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Вектор мгновенной скорости всегда направлен по касательной к траектории. Модуль вектора скорости:

$$v = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

- **Средняя скорость** вычисляется как отношение перемещения к интервалу времени:

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Средняя путевая скорость определяется как:

$$v_{cp,path} = \frac{s}{\Delta t}$$

где s — пройденный путь.

Ускорение характеризует скорость изменения скорости. Полное ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Полное ускорение раскладывается на две компоненты:

- **Тангенциальное ускорение** — характеризует изменение величины скорости:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

  направлено по касательной к траектории (параллельно скорости).

- **Нормальное (центростремительное) ускорение** — характеризует изменение направления скорости:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

  направлено по нормали к траектории в сторону центра кривизны, где R — радиус кривизны траектории.

Полное ускорение связано с компонентами соотношением:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Принцип относительности Галилея утверждает, что **законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта**. Инерциальные системы отсчёта движутся относительно друг друга с постоянной скоростью (без ускорения).

При переходе из одной инерциальной системы отсчёта К в другую К', движущуюся с постоянной скоростью $\vec{V}$ относительно К, применяются **преобразования Галилея**:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

$$t' = t$$

Это означает, что ускорения и силы (а значит, и уравнения движения) одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта. Скорости и координаты изменяются, но механические явления протекают одинаково.

---

2. Характеристики движения материальной точки по окружности (угол поворота, угловая скорость, угловое ускорение) и их связь с линейными характеристиками движения. Прямая и обратная задачи кинематики.

Угловые характеристики движения по окружности:

- **Угол поворота** (φ) — это центральный угол, на который поворачивается радиус-вектор точки за время движения. Измеряется в радианах. Если точка прошла дугу длины s, то:

$$\varphi = \frac{s}{R}$$

  где R — радиус окружности.

- **Угловая скорость** (ω) — это производная угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

При равномерном движении по окружности $\omega = \text{const}$. Угловая скорость связана с периодом T и частотой ν:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Единица измерения: рад/с.

- **Угловое ускорение** (β или ε) — это производная угловой скорости по времени:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Единица измерения: рад/с^2.

Связь угловых характеристик с линейными характеристиками:

$$v = \omega R$$

где v — линейная (тангенциальная) скорость.

$$a_\tau = \beta R$$

где a_τ — тангенциальное ускорение (изменение величины скорости).

$$a_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$

где a_n — нормальное (центростремительное) ускорение.

$$s = R\varphi$$

где s — длина пройденной дуги.

Прямая задача кинематики состоит в том, чтобы, зная закон движения $\vec{r}(t)$, найти скорость $\vec{v}(t)$ и ускорение $\vec{a}(t)$. Решается дифференцированием:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Обратная задача кинематики — это определение скорости $\vec{v}(t)$ и положения $\vec{r}(t)$ по известному ускорению $\vec{a}(t)$ и начальным условиям $\vec{r}_0$ и $\vec{v}_0$ при $t = 0$. Решается интегрированием:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t')dt'$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t')dt' = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}_0 dt' + \int_0^t \left(\int_0^{t'} \vec{a}(t'')dt''\right)dt'$$

Для частного случая постоянного ускорения $\vec{a} = \text{const}$:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

---

3. Масса и импульс материальной точки. Силы в механике. Инерциальные и неинерциальные системы отсчёта. Законы Ньютона.

Масса (m) — это мера инертности тела, то есть его сопротивления изменению скорости. Масса — скалярная величина, всегда положительная, не зависит от скорости тела (в классической механике). Единица: килограмм (кг).

Импульс (количество движения) — это векторная физическая величина, определяемая как произведение массы на скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Импульс характеризует количество движения материальной точки. Единица: кг·м/с. В декартовых координатах:

$$\vec{p} = m\vec{v} = m(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k}$$

Силы в механике — это векторные величины, характеризующие взаимодействие между телами. Силы могут быть контактными (трение, упругость) или действующими на расстоянии (гравитационные, электромагнитные).

Инерциальные системы отсчёта — это системы, в которых справедливы законы Ньютона. В инерциальной системе отсчёта свободное тело (не подвергающееся действию сил) либо покоится, либо движется прямолинейно и равномерно. Инерциальные системы движутся друг относительно друга прямолинейно и равномерно (с постоянной скоростью).

Неинерциальные системы отсчёта — это системы, движущиеся с ускорением относительно инерциальной системы. В неинерциальной системе появляются фиктивные (инерционные) силы, обусловленные ускорением системы. Примеры: система отсчёта, связанная с ускоряющимся или вращающимся телом.

Законы Ньютона:

Первый закон Ньютона (закон инерции): Тело остаётся в состоянии покоя или прямолинейного равномерного движения, если сумма действующих на него сил равна нулю:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{const}$$

Этот закон определяет инерциальные системы отсчёта.

Второй закон Ньютона — основной закон динамики: Произведение массы на ускорение равно результирующей силе:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Или в форме, связанной с импульсом:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

При постоянной массе это эквивалентно первой формулировке. В компонентном виде:

$$F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y, \quad F_z = ma_z$$

Третий закон Ньютона (закон действия и противодействия): Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по величине и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Эти силы действуют вдоль одной прямой, соединяющей взаимодействующие тела, и приложены к разным телам, поэтому они не уравновешивают друг друга.

4. Системы материальных точек. Импульс системы материальных точек. Закон сохранения импульса. Теорема о движении центра масс системы материальных точек. Движение тел с переменной массой.

Центр масс (центр инерции) системы материальных точек — это точка, положение которой определяется радиус-вектором:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

где m_i — массы отдельных точек, $\vec{r}_i$ — их радиус-векторы, M — общая масса системы.

В компонентном виде:

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{M}, \quad y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{M}, \quad z_{cm} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

Импульс системы материальных точек определяется как:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

Можно показать, что импульс системы равен:

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$$

где $\vec{v}_{cm}$ — скорость центра масс.

Закон сохранения импульса: Если сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то импульс системы остаётся постоянным:

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = \mathrm{const}$$

Это может быть записано в компонентном виде:

$$p_x = \mathrm{const}, \quad p_y = \mathrm{const}, \quad p_z = \mathrm{const}$$

Закон сохранения импульса выполняется в замкнутых системах (системах без внешних сил) или при отсутствии внешних сил в определённом направлении (например, импульс по одной оси может сохраняться, даже если импульсы по другим осям изменяются).

Теорема о движении центра масс (теорема о движении центра инерции): Центр масс системы движется так же, как материальная точка, имеющая массу, равную массе всей системы, и на которую действует равнодействующая всех внешних сил:

$$\vec{F} = M\vec{a}_{cm}$$

или

$$M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \sum \vec{F}_i$$

Внутренние силы взаимодействия между частями системы не влияют на движение центра масс системы.

Движение тел с переменной массой (уравнение Циалковского): Рассмотрим ракету, выбрасывающую газы. Если в момент времени t масса ракеты m, а в момент $t + dt$ масса стала $m - dm$ (отрицательное dm означает уменьшение массы), то уравнение движения имеет вид:

$$m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt}$$

или

$$mdv = -udm$$

где u — скорость выбрасываемого вещества относительно ракеты (скорость истечения).

Интегрируя это уравнение:

$$\int_{v_0}^{v} dv = -u \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m}$$

$$v - v_0 = -u(\ln m - \ln m_0) = u \ln \frac{m_0}{m}$$

$$v - v_0 = u \ln \frac{m_0}{m}$$

Это **формула Циалковского** (формула Мещерского для безопорного движения).

---

5. Момент силы и момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки и относительно неподвижной оси. Уравнение моментов для материальной точки относительно неподвижной точки и относительно неподвижной оси.

Момент силы относительно неподвижной точки O — это векторная величина, определяемая как векторное произведение:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки приложения силы относительно точки O.

Модуль момента силы:

$$M = rF \sin \alpha = Fd$$

где α — угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$, $d = r \sin \alpha$ — перпендикулярное расстояние от точки O до линии действия силы (плечо силы).

Направление вектора момента определяется по правилу правого винта: если пальцы правой руки загибаются в направлении поворота, вызываемого силой, то большой палец указывает направление вектора $\vec{M}$.

Момент силы относительно оси z — это проекция вектора момента на ось:

$$M_z = ([\vec{r}, \vec{F}])_z$$

Момент импульса (момент количества движения) материальной точки относительно неподвижной точки O:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = [\vec{r}, m\vec{v}]$$

Модуль момента импульса:

$$L = mrv \sin \alpha = mvd$$

где d — перпендикулярное расстояние от точки O до линии скорости.

Момент импульса относительно оси z для вращающегося тела:

$$L_z = I\omega$$

где I — момент инерции тела относительно оси z, ω — угловая скорость вращения.

Уравнение моментов (основное уравнение динамики вращательного движения):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Это утверждение, что скорость изменения момента импульса равна действующему моменту силы. В компонентном виде (для оси z):

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z$$

Уравнение моментов показывает, что момент силы вызывает изменение момента импульса точки.

---

6. Момент инерции абсолютно твёрдого тела относительно неподвижной оси. Теорема Штейнера. Основное уравнение динамики вращательного движения абсолютно твёрдого тела относительно неподвижной оси. Закон сохранения моментов.

Момент инерции тела относительно неподвижной оси — это мера инертности тела при вращательном движении, определяемая как:

$$J = \int r^2 dm = \sum m_i r_i^2$$

где r — перпендикулярное расстояние элемента массы dm от оси вращения.

Момент инерции — скалярная положительная величина. Единица: кг·м².

Примеры момента инерции для однородных тел:

1. **Тонкий стержень массой m и длиной l** относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно стержню:

$$J_{cm} = \frac{1}{12} m l^2$$

2. **Тонкий стержень** относительно оси, проходящей через один конец:

$$J = \frac{1}{3} m l^2$$

3. **Диск (или цилиндр)** массой m и радиусом R относительно оси симметрии:

$$J = \frac{1}{2} m R^2$$

4. **Полый цилиндр** с внешним радиусом R_1 и внутренним радиусом R_2 относительно оси симметрии:

$$J = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$$

5. **Шар** массой m и радиусом R относительно оси, проходящей через центр:

$$J = \frac{2}{5} m R^2$$

Теорема Штейнера (теорема о параллельных осях): Момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$J = J_{cm} + m d^2$$

где J_{cm} — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, d — расстояние между осями, m — масса тела.

Основное уравнение динамики вращательного движения связывает момент силы с угловым ускорением:

$$M = J\beta$$

или в форме, связанной с моментом импульса:

$$\frac{dL}{dt} = M$$

где M — результирующий момент внешних сил, J — момент инерции, β — угловое ускорение, $L = J\omega$ — момент импульса.

В компонентном виде (для оси z):

$$M_z = J_z\beta_z = J_z\frac{d\omega_z}{dt}$$

Закон сохранения момента импульса: Если результирующий момент внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то момент импульса системы остаётся постоянным:

$$\sum \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

или для оси z:

$$M_{z,} = 0 \Rightarrow L_z = J_z\omega_z = \text{const}$$

Закон сохранения момента импульса используется при анализе вращательного движения систем, когда суммарный момент внешних сил равен нулю.

---

7. Работа консервативных и диссипативных сил. Кинетическая, потенциальная энергия материальной точки и твердого тела. Полная механическая энергия. Связь полной механической энергии с работой неконсервативных сил. Закон сохранения механической энергии.

Работа силы — это скалярная физическая величина, характеризующая действие силы при перемещении тела:

$$A = \int_{path} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{path} F\cos\alpha\, ds$$

где α — угол между вектором силы и направлением движения.

Работа может быть положительной, отрицательной или нулевой в зависимости от угла между силой и перемещением.

Консервативные (потенциальные) силы — это силы, работа которых не зависит от пути, а зависит только от начального и конечного положений:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

Работа консервативной силы по замкнутому пути равна нулю. К консервативным силам относятся силы тяготения, упругости, электростатические силы.

Неконсервативные (диссипативные) силы — это силы, работа которых зависит от траектории движения. Примеры: силы трения, сопротивление среды.

Кинетическая энергия — это энергия, обусловленная движением тела:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Для вращающегося твёрдого тела:

$$K = \frac{1}{2}J\omega^2$$

Кинетическая энергия — всегда положительная величина, зависит от выбора системы отсчёта.

Потенциальная энергия — это энергия, обусловленная взаимным положением взаимодействующих тел (или частей тела).

Примеры потенциальной энергии:

1. **Гравитационная потенциальная энергия** в однородном поле тяжести:

$$U_g = mgh$$

где h — высота над выбранным нулевым уровнем.

2. **Упругая потенциальная энергия** пружины:

$$U_e = \frac{1}{2}kx^2$$

где k — жёсткость пружины, x — деформация (растяжение или сжатие).

Связь силы и потенциальной энергии:

$$\vec{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

или в одномерном случае:

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

Теорема о кинетической энергии (работа-энергия):

$$\Delta K = A$$

Изменение кинетической энергии тела равно работе, совершённой всеми действующими на него силами.

Полная механическая энергия:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U$$

Закон сохранения механической энергии: Если на систему действуют только консервативные силы, то полная механическая энергия остаётся постоянной:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U = \mathrm{const}$$

или

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

При наличии неконсервативных сил (трения, сопротивления):

$$E_2 - E_1 = A$$

где A — работа неконсервативных сил.

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

1. Свободные незатухающие гармонические колебания и их характеристики. Математический, пружинный и физический маятники.

Гармонические колебания — это периодические движения, при которых физическая величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \quad \text{или} \quad x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

где: - A — **амплитуда** колебания (максимальное отклонение от положения равновесия), м - ω — **циклическая (круговая) частота**, рад/с - φ — **начальная фаза**, рад (зависит от выбора момента времени) - $(\omega t+\varphi)$ — **фаза** колебания в момент времени t

Период колебания:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Частота колебания:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Скорость при гармоническом колебании:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

Максимальная скорость: $v_{max} = A\omega$

Ускорение:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

Максимальное ускорение: $a_{max} = A\omega^2$

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

или $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Энергия при гармонических колебаниях: - Кинетическая энергия: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi)$ - Потенциальная энергия: $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi)$ - Полная энергия: $E = K + U = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \text{const}$

Математический маятник — это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити длиной l.

Для малых углов отклонения ($\sin\theta \approx \theta$) уравнение движения математического маятника приводит к гармоническим колебаниям с циклической частотой:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Период математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

где g — ускорение свободного падения, l — длина нити.

Пружинный маятник состоит из груза массой m, закреплённого на пружине с жёсткостью k.

Уравнение движения пружинного маятника:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Циклическая частота:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Период пружинного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Физический маятник — это твёрдое тело, колеблющееся вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс.

Уравнение движения физического маятника (для малых углов):

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\sin\theta \approx -mgd\theta$$

где J — момент инерции тела относительно оси колебания, d — расстояние от оси до центра масс.

Циклическая частота:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J}}$$

Период физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}$$

Можно показать, что период физического маятника совпадает с периодом математического маятника эквивалентной длины:

$$L = \frac{J}{md}$$

---

2. Свободные затухающие колебания и их характеристики. Вынужденные колебания. Явление резонанса.

Затухающие колебания возникают, когда на колеблющееся тело действует сила сопротивления, пропорциональная скорости:

$$F = -rv$$

где r — коэффициент сопротивления.

Уравнение движения при наличии сопротивления:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

или $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

где $\gamma = \frac{r}{2m}$ — **коэффициент затухания**.

Решение уравнения затухающих колебаний (при $\gamma < \omega_0$, случай слабого затухания):

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi)$$

где: - A_0 — начальная амплитуда - $A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$ — амплитуда, экспоненциально убывающая со временем - $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ — циклическая частота затухающих колебаний

Логарифмический декремент затухания — это натуральный логарифм отношения амплитуд двух последовательных колебаний, разделённых периодом T:

$$\delta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \gamma T$$

Добротность Q — безразмерная характеристика, показывающая, во сколько раз период затухания больше периода колебания:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

Добротность характеризует качество колеблющейся системы: чем выше Q, тем дольше затухают колебания.

Вынужденные колебания происходят под действием периодической внешней силы:

$$F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$$

Уравнение движения при вынужденных колебаниях:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin(\Omega t)$$

Стационарное решение (после затухания переходного процесса):

$$x(t) = A(\Omega)\sin(\Omega t - \psi)$$

где амплитуда вынужденных колебаний:

$$A(\Omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}$$

и разность фаз:

$$\tan\psi = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Резонанс — это явление, при котором амплитуда вынужденных колебаний достигает максимума. Это происходит при частоте:

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

При слабом затухании ($\gamma \ll \omega_0$):

$$\Omega \approx \omega_0$$

Максимальная амплитуда при резонансе:

$$A_{max} = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0} = \frac{F_0}{r\omega_0}$$

При отсутствии затухания ($\gamma = 0$) амплитуда стремится к бесконечности при $\Omega = \omega_0$.

---

3. Векторное представление гармонических колебаний. Сложение гармонических колебаний одинаковой частоты и направления (метод векторных диаграмм). Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

Метод векторных диаграмм позволяет геометрически представить гармоническое колебание. Гармоническое колебание $x = A\sin(\omega t + \varphi)$ изображается вращающимся вектором длины A, который: - Вращается с угловой скоростью ω (против часовой стрелки) - Составляет с осью абцисс угол $(\omega t + \varphi)$ - Проекция этого вектора на ось ординат даёт мгновенное значение координаты x

Сложение колебаний одной частоты и одного направления:

Если материальная точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях одной и той же частоты:

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

То результирующее колебание также будет гармоническим:

$$x = x_1 + x_2 = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Результирующая амплитуда определяется по правилу сложения векторов (правило параллелограмма):

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Результирующая фаза:

$$\tan\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

Частные случаи: - При $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ (синфазные колебания): $A = A_1 + A_2$ (максимальная амплитуда) - При $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ (противофазные колебания): $A = |A_1 - A_2|$ (минимальная амплитуда) - При $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$ (колебания в квадратуре): $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$

Биения возникают при сложении колебаний близких частот ($\omega_1 \approx \omega_2$):

$$x = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

Амплитуда медленно колеблется с частотой биения: $\omega = |\omega_1 - \omega_2|$

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний:

Если точка участвует в двух колебаниях вдоль перпендикулярных осей:

$$x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$y = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

То траектория движения точки имеет различные формы в зависимости от разности фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$:

- При $\Delta\varphi = 0$ или $\Delta\varphi = \pi$: прямая линия
- При $\Delta\varphi = \pi/2$ или $\Delta\varphi = 3\pi/2$ и $A_1 = A_2$: окружность
- При других значениях $\Delta\varphi$: эллипс

Уравнение траектории (уравнение эллипса):

$$\frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\Delta\varphi) + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2(\Delta\varphi)$$

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

1. Термодинамические параметры. Изопроцессы. Смеси газов, закон Дальтона, Закон Авогадро.

Термодинамические параметры состояния описывают макроскопические свойства газа:

- **Давление (p)** — сила, действующая на единицу площади поверхности, Па (Паскаль)
- **Объём (V)** — пространство, занимаемое газом, м^3
- **Температура (T)** — мера средней кинетической энергии молекул, К (Кельвины)
- **Количество вещества (ν)** — число молей газа, моль

Изопроцессы — это процессы, при которых один из параметров (p, V, T) остаётся постоянным.

Изобарный процесс (постоянное давление, p = const):

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

На pV-диаграмме изображается горизонтальной линией.

Изохорный процесс (постоянный объём, V = const):

$$\frac{p}{T} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

На pV-диаграмме изображается вертикальной линией.

Изотермический процесс (постоянная температура, T = const):

$$pV = \text{const} \quad \text{или} \quad p_1V_1 = p_2V_2$$

На pV-диаграмме изображается гиперболой. Это процесс, при котором газ находится в тепловом равновесии с окружающей средой.

Адиабатический процесс (без теплообмена, Q = 0):

$$pV^\gamma = \text{const} \quad \text{или} \quad TV^{\gamma-1} = \text{const}$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ — показатель адиабаты (коэффициент Пуассона).

Закон Дальтона: Давление смеси газов, не взаимодействующих химически, равно сумме парциальных давлений составляющих газов:

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

где p_i — парциальное давление i-го газа (давление, которое оказывал бы этот газ, если бы занимал весь объём один).

Закон Авогадро: Равные объёмы различных идеальных газов при одинаковых давлении и температуре содержат одинаковое число молекул (или молей).

Молярный объём — объём одного моля газа при нормальных условиях (T = 273 K, p = 101,325 кПа):

$$V_m = 22,4 \text{ л/моль} = 22,4 \times 10^{-3} \text{ м}^3\text{/моль}$$

Из закона Авогадро следует, что постоянная Авогадро:

$$N_A = \frac{N}{\nu} = 6,022 \times 10^{23} \text{ молекул/моль}$$

---

2. Молекулярно-кинетическая теория идеального газа, уравнение состояния идеального газа их взаимосвязь.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории связывает микроскопические параметры молекул (массу, скорость) с макроскопическими параметрами газа (давлением):

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v^2 \rangle$$

где: - n — число молекул на единицу объёма (концентрация молекул) - m_0 — масса одной молекулы - $\langle v^2 \rangle$ — средний квадрат скорости молекул

Средняя кинетическая энергия молекулы связана с температурой газа:

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} kT$$

где $k = 1,38 \times 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана.

Среднеквадратичная скорость молекул:

$$v = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

где M — молярная масса газа (масса одного моля), R = 8,31 Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная.

Из основного уравнения МКТ:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v^2 \rangle = nkT$$

Поскольку $n = \frac{N}{V}$, получаем:

$$pV = NkT$$

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона):

$$pV = \nu RT$$

или

$$pV = NkT$$

где: - p — давление - V — объём - ν — количество вещества (число молей) - N — число молекул - R = 8,31 Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная - k = R/N_A — постоянная Больцмана - T — абсолютная температура

Это фундаментальное уравнение описывает состояние идеального газа и связывает макроскопические параметры.

---

3. Внутренняя энергия и работа идеального газа. Первое начало термодинамики. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам.

Внутренняя энергия идеального газа — это сумма кинетических энергий всех молекул газа:

$$U = N\langle K \rangle = N \cdot \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} \nu RT$$

где i — **число степеней свободы молекулы**: - Для одноатомного газа: $i = 3$ - Для двухатомного газа: $i = 5$ (при комнатной температуре) - Для многоатомного газа: $i = 6$ (для жёсткой молекулы)

Внутренняя энергия зависит только от температуры и не зависит от объёма или давления для идеального газа:

$$\Delta U = \nu C_V \Delta T$$

где C_V — молярная теплоёмкость при постоянном объёме.

Работа газа при расширении:

$$A = \int p dV$$

Если газ расширяется (dV > 0), то A > 0 (газ совершает положительную работу). Если газ сжимается (dV < 0), то A < 0 (газу нужно совершить работу).

При изобарном процессе (p = const):

$$A = p\Delta V = \nu R \Delta T$$

При изохорном процессе (V = const):

$$A = 0$$

При изотермическом процессе (T = const):

$$A = \int p dV = \nu RT \int \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Первое начало термодинамики — это закон сохранения энергии для термодинамических процессов:

$$Q = \Delta U + A$$

где: - Q — количество теплоты, переданное газу - ΔU — изменение внутренней энергии газа - A — работа, совершённая газом

Физический смысл: теплота, переданная газу, идёт на увеличение его внутренней энергии и совершение работы над окружающей средой.

Теплоёмкость — это величина, показывающая, сколько теплоты необходимо для изменения температуры вещества на 1 К:

Молярная теплоёмкость при постоянном объёме:

$$C_V = \frac{i}{2} R$$

Молярная теплоёмкость при постоянном давлении:

$$C_p = C_V + R = \frac{i}{2} R + R = \frac{i + 2}{2} R$$

Связь теплоёмкостей:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i + 2}{i}$$

Применение первого начала термодинамики к изопроцессам:

1. Изобарный процесс (p = const):

$$Q = \Delta U + A = \nu C_V \Delta T + \nu R \Delta T = \nu C_p \Delta T$$

Работа газа: $A = p(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1) = \nu R \Delta T$

2. Изохорный процесс (V = const):

$$Q = \Delta U = \nu C_V \Delta T$$

Работа газа: $A = 0$ (объём не изменяется)

3. Изотермический процесс (T = const):

$$\Delta U = 0$$

(температура не изменяется)

$$Q = A = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \int p dV$$

Если $V_2 > V_1$ (расширение), то Q > 0 (теплота поглощается газом).

4. Адиабатический процесс (Q = 0):

$$\Delta U = -A$$

$$0 = \Delta U + A \Rightarrow A = -\Delta U = -\nu C_V \Delta T$$

Если газ расширяется (A > 0), то его внутренняя энергия уменьшается, и температура падает.

---

4. Теплоёмкость идеального газа. Адиабатический процесс.

Теплоёмкость при постоянном объёме для твёрдых тел показывает количество теплоты, необходимое для повышения температуры на единицу при неизменном объёме.

Закон Дюлонга и Пти: Молярная теплоёмкость при постоянном объёме для твёрдых тел (кристаллических веществ) в области высоких температур приблизительно равна:

$$C_V = 3R \approx 24,9 \text{ Дж/(моль·К)}$$

Этот закон основан на теореме о равномерном распределении энергии по степеням свободы: каждый атом в кристаллической решётке имеет 6 степеней свободы (3 кинетических и 3 потенциальных), каждой приходится энергия $\frac{1}{2}kT$, поэтому средняя энергия одного атома равна $3kT$, и для одного моля: $U = 3RT$, откуда $C_V = 3R$.

При низких температурах молярная теплоёмкость твёрдого тела уменьшается и стремится к нулю при $T \to 0$ (модель Дебая).

Теплоёмкость жидкостей изменяется в широких пределах в зависимости от вещества. Для воды, например, молярная теплоёмкость составляет примерно 75 Дж/(моль·К).

---

5. Формулировки второго начала термодинамики. Тепловые машины. Цикл Карно.

Второе начало термодинамики устанавливает направление протекания тепловых процессов и определяет условия преобразования теплоты в работу. Существует несколько эквивалентных формулировок:

Формулировка Клаузиуса: Теплота не может самопроизвольно переходить от более холодного тела к более нагретому.

Формулировка Кельвина (Томсона): Невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является превращение теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу.

Формулировка Планка: Невозможен вечный двигатель второго рода — устройство, которое совершало бы работу только за счёт охлаждения одного источника теплоты без каких-либо других изменений в системе.

Тепловые машины — это устройства, которые совершают работу за счёт получения теплоты от нагревателя. Принцип работы тепловой машины:

1. Рабочее тело получает количество теплоты Q_1 от нагревателя при температуре T_1
2. Рабочее тело совершает работу А
3. Рабочее тело отдаёт количество теплоты Q_2 холодильнику при температуре T_2 (где $T_2 < T_1$)

По первому началу термодинамики для циклического процесса:

$$A = Q_1 - Q_2$$

Коэффициент полезного действия (КПД) тепловой машины:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

Цикл Карно — это идеальный обратимый круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух адиабат:

1. **Изотермическое расширение** ($T = T_1$): Газ получает теплоту Q_1 от нагревателя
2. **Адиабатическое расширение**: Температура газа падает от T_1 до T_2, теплообмен отсутствует
3. **Изотермическое сжатие** ($T = T_2$): Газ отдаёт теплоту Q_2 холодильнику
4. **Адиабатическое сжатие**: Температура газа возрастает от T_2 до T_1, теплообмен отсутствует

КПД цикла Карно:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

где T_1 и T_2 — абсолютные температуры нагревателя и холодильника.

Теорема Карно: КПД любой тепловой машины, работающей по обратимому циклу между двумя тепловыми резервуарами, не зависит от природы рабочего тела и определяется только температурами этих резервуаров. Никакая тепловая машина не может иметь КПД больше, чем КПД машины Карно, работающей между теми же температурами.

Для идеального газа при изотермических процессах в цикле Карно:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

---

6. Приведенная теплота. Равенство и неравенство Клаузиуса. Энтропия. Статистический смысл энтропии.

Приведенная теплота — это отношение количества теплоты δQ, полученного или отданного системой, к абсолютной температуре T, при которой происходит теплообмен:

$$\frac{\delta Q}{T}$$

Приведенная теплота имеет важное значение при анализе круговых процессов.

Неравенство Клаузиуса (для произвольного кругового процесса):

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

где знак равенства относится к обратимым процессам, а знак неравенства — к необратимым.

Равенство Клаузиуса (для обратимого кругового процесса):

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Это равенство показывает, что для обратимых процессов приведенная теплота является полным дифференциалом некоторой функции состояния.

Энтропия — это функция состояния термодинамической системы, определяемая соотношением:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

где δQ_{обр} — элементарное количество теплоты, полученное системой в обратимом процессе.

Для конечного обратимого процесса:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$$

Единица измерения энтропии: Дж/К.

Свойства энтропии:

1. Энтропия — функция состояния (не зависит от пути процесса)
2. В обратимых адиабатических процессах энтропия постоянна: $\Delta S = 0$ (изоэнтропический процесс)
3. В необратимых процессах в изолированной системе энтропия возрастает: $\Delta S > 0$
4. Для обратимых процессов: $\Delta S = 0$ (изолированная система)

Второе начало термодинамики через энтропию:

Для изолированной системы: - В обратимых процессах: $dS = 0$ (энтропия постоянна) - В необратимых процессах: $dS > 0$ (энтропия возрастает) - В состоянии равновесия энтропия достигает максимума

Статистический смысл энтропии (формула Больцмана):

$$S = k \ln W$$

где: - k = 1,38×10^{-23} Дж/К — постоянная Больцмана - W — термодинамическая вероятность состояния (число микросостояний, соответствующих данному макросостоянию)

Статистический смысл: энтропия является мерой беспорядка системы или мерой неопределенности в распределении частиц по микросостояниям. Чем больше беспорядок, тем больше энтропия. При переходе системы в более вероятное состояние энтропия возрастает.

Энтропия связывает макроскопические свойства системы (температуру, давление) с микроскопическими (число микросостояний). Рост энтропии означает переход системы в более вероятное состояние с большим числом микросостояний.

---

7. Вероятностное описание случайных событий. Распределения Максвелла по компонентам скорости и модулю скорости молекул в идеальном газе. Характерные скорости движения молекул.

Вероятностное описание необходимо для систем с большим числом частиц, когда невозможно проследить за движением каждой частицы индивидуально.

Функция распределения f(v) — это функция, которая показывает, какая доля молекул имеет скорости в интервале от v до v + dv:

$$dN = N \cdot f(v) \cdot dv$$

где: - N — общее число молекул - dN — число молекул со скоростями от v до v + dv

Условие нормировки:

$$\int_0^\infty f(v)dv = 1$$

Распределение Максвелла по компонентам скорости:

Каждая компонента скорости (v_x, v_γ, v_γ) распределена по закону:

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right)$$

Аналогично для v_γ и v_γ. Это гауссовское (нормальное) распределение с центром в нуле.

Средняя квадратичная компонента скорости:

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m}$$

И аналогично для других компонент.

Распределение Максвелла по модулю скорости:

Функция распределения молекул идеального газа по модулю скорости:

$$f(v) = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

или в другой форме:

$$dN = N \cdot 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv$$

где: - m — масса молекулы - k — постоянная Больцмана - T — абсолютная температура - v — модуль скорости

Эта функция учитывает три фактора: 1. Больцмановский множитель $\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$ — вероятность иметь данную энергию 2. Множитель v^2 — геометрический фактор (объём сферического слоя в пространстве скоростей) 3. Нормировочный множитель

Характерные скорости:

1. Наиболее вероятная скорость v_{вер} — скорость, при которой функция распределения f(v) максимальна. Находится из условия $\frac{df}{dv} = 0$:

$$v = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

где M — молярная масса.

2. Средняя арифметическая скорость $\langle v \rangle$:

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v \cdot f(v)dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

Эта скорость используется для расчёта среднего числа столкновений молекул.

3. Средняя квадратичная скорость v_{кв}:

$$v = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Эта скорость связана со средней кинетической энергией молекул:

$$\langle E_k \rangle = \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT$$

Соотношение между характерными скоростями:

$$v : \langle v \rangle : v = 1 : 1,128 : 1,225$$

или

$$v : \langle v \rangle : v = \sqrt{2} : \sqrt{\frac{8}{\pi}} : \sqrt{3}$$

Все три скорости пропорциональны $\sqrt{T}$ и обратно пропорциональны $\sqrt{m}$.

---

8. Барометрическая формула. Распределение Больцмана. Распределение Максвелла – Больцмана. Теорема о равнораспределении средней энергии молекул по степеням свободы.

Барометрическая формула описывает распределение давления (или концентрации) газа в поле тяжести:

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right)$$

или через концентрацию молекул:

$$n(h) = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$$

где: - p_0, n_0 — давление и концентрация на уровне h = 0 - M — молярная масса газа - m — масса одной молекулы - g — ускорение свободного падения - h — высота - R — универсальная газовая постоянная - k — постоянная Больцмана - T — абсолютная температура

Показывает, что с увеличением высоты давление и плотность газа экспоненциально убывают.

Распределение Больцмана — общий закон распределения частиц по энергиям во внешнем потенциальном поле при тепловом равновесии:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right)$$

или

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{E_p}{kT}\right)$$

где: - n — концентрация частиц с потенциальной энергией U (или E_p) - n_0 — концентрация частиц при U = 0 - U — потенциальная энергия частицы во внешнем поле

Распределение Больцмана показывает, что вероятность обнаружить частицу в данном месте пространства зависит от её потенциальной энергии в этом месте. Чем больше потенциальная энергия, тем меньше концентрация частиц.

Барометрическая формула является частным случаем распределения Больцмана для гравитационного поля, где $U = mgh$.

Распределение Максвелла–Больцмана объединяет распределение Максвелла по скоростям и распределение Больцмана по координатам:

$$dn = n_0 \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dV$$

где E = E_k + E_p — полная энергия частицы (кинетическая + потенциальная).

Полная функция распределения:

$$f(\vec{v}, \vec{r}) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2/2 + U(\vec{r})}{kT}\right)$$

Это распределение описывает состояние идеального газа, находящегося во внешнем потенциальном поле в состоянии термодинамического равновесия.

Теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы (теорема Больцмана о равнораспределении):

На каждую поступательную и вращательную степень свободы молекулы приходится в среднем кинетическая энергия, равная:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} kT$$

На каждую колебательную степень свободы приходится средняя энергия:

$$\langle E \rangle = kT$$

(так как колебание включает и кинетическую, и потенциальную энергию, каждая из которых в среднем равна $\frac{1}{2}kT$)

Полная средняя энергия молекулы:

$$\langle E \rangle = \frac{i}{2} kT$$

где i — число степеней свободы молекулы.

Число степеней свободы для разных молекул: - Одноатомная молекула: i = 3 (три поступательных) - Двухатомная молекула: i = 5 (три поступательных + две вращательных) - Многоатомная нелинейная молекула: i = 6 (три поступательных + три вращательных)

При высоких температурах добавляются колебательные степени свободы.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения для любой молекулы:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2}kT$$

Внутренняя энергия идеального газа:

$$U = \nu \cdot N_A \cdot \frac{i}{2}kT = \nu\frac{i}{2}RT$$

Эта теорема объясняет зависимость теплоёмкости газов от их молекулярной структуры и позволяет теоретически вычислить теплоёмкости газов.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

1. Элементарный заряд. Закон сохранения заряда. Закон Кулона. Напряжённость как силовая характеристика электрического поля. Принцип суперпозиции. Силовые линии электростатического поля.

Элементарный заряд — это минимальный, неделимый заряд, который является зарядом электрона или протона:

$$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ Кл}$$

Любой электрический заряд в природе кратен элементарному заряду: $q = ne$, где n — целое число.

Закон сохранения электрического заряда: В замкнутой системе алгебраическая сумма электрических зарядов остаётся постоянной:

$$\sum q_i = \text{const}$$

Закон Кулона описывает силу взаимодействия между двумя точечными зарядами:

$$F = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

или в векторной форме:

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}_0$$

где: - q_1, q_2 — величины зарядов - r — расстояние между зарядами - $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8,99 \times 10^9$ Н·м²/Кл² — коэффициент Кулона в СИ - $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная - $\vec{r}_0$ — единичный вектор, направленный от заряда q_1 к заряду q_2

Закон Кулона справедлив для точечных зарядов или заряженных тел, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними.

Напряжённость электрического поля — это силовая характеристика поля, равная отношению силы, действующей на пробный заряд q, к величине этого заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Единица измерения: В/м или Н/Кл.

Для точечного заряда Q:

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

Напряжённость — это векторная величина, направленная от положительного заряда и к отрицательному.

Принцип суперпозиции (принцип наложения): Электрическое поле, создаваемое несколькими зарядами, равно векторной сумме полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

Этот принцип позволяет вычислять поля сложных систем зарядов.

Силовые линии электростатического поля — это линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряжённости электрического поля. Свойства силовых линий: - Они начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных - Они не пересекаются - Плотность линий (число линий на единицу площади перпендикулярной поверхности) пропорциональна величине напряжённости - Силовые линии изображают направление и качественно показывают величину поля в разных точках

---

2. Поток вектора напряжённости. Теорема Остроградского – Гаусса для вектора напряжённости электростатического поля. Примеры применения теоремы.

Поток вектора напряжённости через поверхность S определяется как:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_S E \cos\alpha \, dA$$

где: - $d\vec{A}$ — элемент площади поверхности с направлением внешней нормали - α — угол между вектором $\vec{E}$ и нормалью к поверхности

Для однородного поля и плоской поверхности:

$$\Phi_E = E \cdot A \cdot \cos\alpha$$

Единица: В·м.

Теорема Остроградского-Гаусса (теорема Гаусса) — одна из основных теорем электростатики:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

где: - Интеграл берётся по замкнутой поверхности S - Q — полный заряд, находящийся внутри поверхности S - ε_0 — электрическая постоянная

Физический смысл: поток напряжённости электрического поля через замкнутую поверхность пропорционален заряду, заключённому внутри этой поверхности.

Примеры применения теоремы Гаусса:

1. Напряжённость поля бесконечной равномерно заряженной плоскости:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

где σ — поверхностная плотность заряда.

2. Напряжённость поля бесконечного равномерно заряженного цилиндра радиусом R:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

где λ — линейная плотность заряда (заряд на единицу длины).

3. Напряжённость поля равномерно заряженной сферы: - Снаружи (r > R): $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (как для точечного заряда) - Внутри (r < R): $E = 0$ для проводящей сферы; $E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ для диэлектрической сферы

---

3. Работа сил электростатического поля. Потенциал как энергетическая характеристика электростатического поля. Циркуляция вектора напряжённости. Связь между напряжённостью и потенциалом. Эквипотенциальные поверхности.

Потенциал электростатического поля — это энергетическая характеристика поля, равная отношению потенциальной энергии пробного заряда q к величине этого заряда:

$$\varphi = \frac{U}{q}$$

Единица: В (Вольт).

Для точечного заряда Q:

$$\varphi = k\frac{Q}{r}$$

Потенциал может быть положительным или отрицательным в зависимости от знака заряда.

Разность потенциалов (напряжение) между двумя точками:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Физический смысл: работа электрического поля при перемещении единичного положительного заряда из точки 2 в точку 1.

Работа электрического поля при перемещении заряда q из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU_{12}$$

Связь между напряжённостью и потенциалом:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

В одномерном случае:

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}$$

Это соотношение показывает, что напряжённость поля определяется градиентом потенциала. Поле направлено в сторону убывания потенциала.

Циркуляция вектора напряжённости:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Это выражает потенциальность электростатического поля: работа электрического поля по замкнутому пути равна нулю.

Эквипотенциальные поверхности — это поверхности, во всех точках которых потенциал имеет одно и то же значение: $\varphi = \text{const}$.

Свойства эквипотенциальных поверхностей: - Вектор напряжённости электрического поля перпендикулярен эквипотенциальной поверхности - Работа электрического поля по перемещению заряда вдоль эквипотенциальной поверхности равна нулю - Эквипотенциальные поверхности не пересекаются

---

4. Электроёмкость уединённого проводника. Конденсаторы и электроёмкость конденсатора. Энергия системы неподвижных зарядов и конденсатора. Объемная плотность энергии.

Электроёмкость уединённого проводника — это отношение заряда на проводнике к его потенциалу:

$$C = \frac{Q}{\varphi}$$

Единица: Ф (Фарад) = Кл/В.

Электроёмкость зависит только от формы и размеров проводника и не зависит от заряда и потенциала.

Электроёмкость уединённой проводящей сферы радиусом R:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Конденсатор — это система двух проводников (обкладок), разделённых диэлектриком.

Электроёмкость конденсатора определяется как:

$$C = \frac{Q}{U}$$

где Q — заряд на одной обкладке, U — разность потенциалов между обкладками.

Плоский конденсатор состоит из двух параллельных пластин площадью S, разделённых диэлектриком толщиной d:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{S}{d}$$

где ε — относительная диэлектрическая проницаемость материала диэлектрика.

Цилиндрический конденсатор с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2, длиной l:

$$C = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon \frac{l}{\ln(R_2/R_1)}$$

Сферический конденсатор с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Соединение конденсаторов:

Параллельное соединение:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

Напряжения одинаковые, заряды суммируются.

Последовательное соединение:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

Заряды одинаковые, напряжения суммируются.

Энергия конденсатора:

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$$

Три эквивалентные формы для расчёта энергии.

Энергия системы неподвижных точечных зарядов:

$$W = \sum_{i<j} k \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

или для непрерывного распределения зарядов:

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dV$$

Объёмная плотность энергии электрического поля:

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2$$

Единица: Дж/м^3. Эта величина показывает, сколько энергии запасено в единице объёма электрического поля.

Полная энергия поля:

$$W = \int w dV = \int \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 dV$$

---

5. Полярные и неполярные диэлектрики. Качественная картина поляризации диэлектриков. Вектор электрического смещения (электрической индукции). Теорема Остроградского – Гаусса для электростатического поля в диэлектриках.

Диэлектрики — это материалы, которые практически не содержат свободных электронов и не проводят электрический ток при нормальных условиях.

Полярные молекулы — молекулы, которые имеют постоянный электрический дипольный момент даже в отсутствие внешнего электрического поля. Примеры: молекулы воды, спирта.

Неполярные молекулы — молекулы, которые не имеют постоянного дипольного момента, но под действием электрического поля становятся поляризованными. Примеры: молекулы кислорода, азота.

Поляризация диэлектрика — это процесс ориентации или деформации молекул под действием внешнего электрического поля, приводящий к появлению результирующего дипольного момента.

Вектор поляризации (поляризованность):

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

где χ_e — электрическая восприимчивость диэлектрика (безразмерная величина).

Вектор поляризации показывает дипольный момент, приходящийся на единицу объёма диэлектрика. Единица: Кл/м^2.

Диэлектрическая проницаемость связана с восприимчивостью:

$$\varepsilon = 1 + \chi_e$$

где ε — относительная диэлектрическая проницаемость материала.

Вектор электрического смещения (индукции):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

Единица: Кл/м^2. Вектор D характеризует поле, создаваемое свободными зарядами, независимо от связанных зарядов диэлектрика.

Теорема Гаусса для вектора D в диэлектриках:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

Поток вектора D через замкнутую поверхность равен свободному заряду, заключённому внутри поверхности.

Это важное отличие от теоремы Гаусса для E: в формулировке для D учитываются только свободные заряды, а не все заряды (включая связанные).

---

6. Сила тока, плотность тока. Уравнение непрерывности (закон сохранения заряда). Законы Ома, Джоуля – Ленца. Разветвлённые цепи. Правила Кирхгофа.

Сила тока — это заряд, проходящий через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Единица: A (Ампер). Единица ампера определяется как сила тока, при которой через поперечное сечение проходит заряд 1 Кл за 1 секунду.

Плотность тока — это ток на единицу площади поперечного сечения:

$$j = \frac{I}{S}$$

или для распределённого тока:

$$j = nev = \sigma E$$

где: - n — концентрация подвижных зарядов - e — элементарный заряд - v — средняя скорость движения зарядов (скорость дрейфа) - σ — удельная электрическая проводимость

Единица: А/м^2.

Уравнение непрерывности (закон сохранения заряда):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

где ρ — объёмная плотность заряда. Это уравнение выражает, что изменение плотности заряда в точке равно убыли потока плотности тока из этой точки.

Закон Ома — один из основных законов электричества:

Локальная форма (для материала):

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

или $j = \sigma E$

где σ — удельная электрическая проводимость материала.

Интегральная форма (для участка цепи):

$$I = \frac{U}{R}$$

где: - I — сила тока через проводник - U — разность потенциалов (напряжение) на концах проводника - R — электрическое сопротивление проводника

Электрическое сопротивление проводника:

$$R = \rho\frac{l}{S}$$

где: - ρ — удельное электрическое сопротивление материала (Ом·м) - l — длина проводника - S — площадь поперечного сечения

Закон Джоуля-Ленца описывает выделение тепла при прохождении тока через проводник:

Количество теплоты, выделенной за время t:

$$Q = I^2 R t$$

Мощность, выделяемая в виде тепла:

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R} = UI$$

Закон Джоуля-Ленца показывает, что при прохождении электрического тока через проводник всегда выделяется тепло.

Правила Кирхгофа для расчёта сложных электрических цепей:

Первое правило Кирхгофа (правило для узлов): Алгебраическая сумма токов в узле цепи равна нулю:

$$\sum I_i = 0$$

или: сумма токов, входящих в узел, равна сумме токов, выходящих из узла.

Второе правило Кирхгофа (правило для контуров): Алгебраическая сумма произведений токов на сопротивления в замкнутом контуре равна алгебраической сумме ЭДС в этом контуре:

$$\sum I_i R_i = \sum \varepsilon_j$$

При обходе контура положительными считаются токи и ЭДС, направленные в сторону обхода.

Первое правило вытекает из закона сохранения заряда, второе — из работы электрического поля в замкнутом контуре.

Конец документа

ВТОРОЙ ВОПРОС (ВЫВОД ФОРМУЛЫ)

МЕХАНИКА

1. Вывод общей расчетной формулы максимальной дальности полета тела (м.т.), брошенного с некоторой высоты h, относительно уровня земли, под углом α к горизонту. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Рассмотрим движение тела, брошенного с высоты h под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0.

Исходные условия: - Начальная высота: h - Угол броска: α - Начальная скорость: v_0 - Ускорение свободного падения: g (направлено вниз)

Анализ движения:

Разложим начальную скорость на компоненты: - Горизонтальная составляющая: $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ - Вертикальная составляющая: $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$

Выберем систему координат: начало координат на уровне земли, ось X горизонтальна (в направлении движения), ось Y вертикальна (вверх).

Уравнения движения:

Горизонтальное движение (равномерное, без ускорения):

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t$$

Вертикальное движение (равнопеременное, с ускорением -g):

$$y(t) = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Определение времени полета:

Полет заканчивается, когда тело падает на уровень земли, т.е. $y(t) = 0$:

$$0 = h + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Перепишем уравнение в стандартном виде:

$$\frac{g}{2}t^2 - v_0 \sin \alpha \cdot t - h = 0$$

Применим формулу решения квадратного уравнения $at^2 + bt + c = 0$:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

где $a = \frac{g}{2}$, $b = -v_0 \sin \alpha$, $c = -h$:

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}$$

Берем положительный корень (время всегда положительно):

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}$$

Расчетная формула максимальной дальности:

Дальность полета — это горизонтальное расстояние, пройденное телом за время полета:

$$L = x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t$$

$$L = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}$$

Развернутая форма:

$$L = \frac{v_0 \cos \alpha (v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh})}{g}$$

Альтернативные формы:

Раскроем скобки:

$$L = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} + \frac{v_0 \cos \alpha}{g}\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}$$

Используя тригонометрическое тождество $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$:

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \frac{v_0 \cos \alpha}{g}\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}$$

Частные случаи:

1. **При h = 0 (бросок с уровня земли):**

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Максимум дальности достигается при α = 45°:

$$L_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

2. **При α = 0 (горизонтальный бросок):**

$$L = v_0 \cdot \frac{\sqrt{0 + 2gh}}{g} = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

3. **При α = 90° (вертикальный бросок вверх):**

$$L = 0$$

(тело падает на то же место)

---

2. Вывод общей расчетной формулы максимальной высоты подъема тела (м.т.) относительно уровня Земли, если оно брошен высотой h под углом α к горизонту. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Исходные условия: - Начальная высота: h - Угол броска: α - Начальная скорость: v_0 - Ускорение свободного падения: g

Вертикальная составляющая скорости:

$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt$$

Уравнение для вертикального положения:

$$y(t) = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Определение максимальной высоты:

Максимальная высота достигается, когда вертикальная составляющая скорости становится равной нулю:

$$v_y(t_{max}) = 0$$

$$v_0 \sin\alpha - gt_{max} = 0$$

$$t_{max} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

Расчетная формула максимальной высоты:

Подставим t_{max} в уравнение для y(t):

$$h_{max} = h + v_0 \sin\alpha \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2$$

$$h_{max} = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}$$

$$h_{max} = h + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$h_{max} = h + \frac{2v_0^2 \sin^2 \alpha - v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$h_{max} = h + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Интерпретация: - h — начальная высота - $\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ — дополнительная высота подъема над начальной позицией

Частные случаи:

1. **При α = 90° (вертикальный бросок вверх):**

$$h_{max} = h + \frac{v_0^2}{2g}$$

Это классическая формула для вертикального броска.

2. **При α = 0° (горизонтальный бросок):**

$$h_{max} = h$$

Высота не изменяется (максимум равен начальной высоте).

3. **При α = 45°:**

$$h_{max} = h + \frac{v_0^2}{4g}$$

---

3. Вывод расчетной формулы момента инерции однородного полого толстостенного цилиндра массой m, внешний радиус сечения R_1, внутренний радиус сечения R_2, относительно оси симметрии.

Постановка задачи:

Полый цилиндр можно рассматривать как разность моментов инерции двух сплошных цилиндров: внешнего (радиус R_1) и внутреннего (радиус R_2), вырезанного из центра.

Формула момента инерции сплошного цилиндра:

Для однородного сплошного цилиндра массой M и радиусом R относительно оси симметрии:

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Метод суперпозиции:

Обозначим плотность материала через ρ (массу на единицу объема), высоту цилиндра через H.

Массовое содержание единичного объема материала:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi(R_1^2 - R_2^2)H}$$

Представим полый цилиндр как разность:

Момент инерции большого сплошного цилиндра (с радиусом R_1):

$$I_1 = \frac{1}{2}m_1 R_1^2$$

где масса $m_1 = \rho\pi R_1^2 H$

Момент инерции малого цилиндра (вырезанной части, с радиусом R_2):

$$I_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2$$

где масса $m_2 = \rho\pi R_2^2 H$

Момент инерции полого цилиндра:

$$I = I_1 - I_2 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 - \frac{1}{2} m_2 R_2^2$$

$$I = \frac{1}{2}\rho\pi R_1^2 H \cdot R_1^2 - \frac{1}{2}\rho\pi R_2^2 H \cdot R_2^2$$

$$I = \frac{1}{2}\rho\pi H(R_1^4 - R_2^4)$$

Выражение через массу полого цилиндра:

Масса полого цилиндра:

$$m = m_1 - m_2 = \rho\pi H(R_1^2 - R_2^2)$$

Следовательно:

$$\rho\pi H = \frac{m}{R_1^2 - R_2^2}$$

Подставляя в формулу для I:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{R_1^2 - R_2^2} \cdot (R_1^4 - R_2^4)$$

Разложим $R_1^4 - R_2^4$ как разность квадратов:

$$R_1^4 - R_2^4 = (R_1^2)^2 - (R_2^2)^2 = (R_1^2 - R_2^2)(R_1^2 + R_2^2)$$

Подставляем:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{R_1^2 - R_2^2} \cdot (R_1^2 - R_2^2)(R_1^2 + R_2^2)$$

Расчетная формула момента инерции полого цилиндра:

$$I = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2)$$

Альтернативные формы:

Через диаметры $D_1 = 2R_1$ и $D_2 = 2R_2$:

$$I = \frac{m(D_1^2 + D_2^2)}{8}$$

Частные случаи:

1. **При $R_2 = 0$ (сплошной цилиндр):**

$$I = \frac{1}{2} m R_1^2$$

2. **При $R_2 = R_1$ (тонкий обруч или кольцо):**

$$I = \frac{1}{2} m \cdot 2R_1^2 = mR_1^2$$

3. **При $R_2 \approx R_1$ (тонкостенный цилиндр):**

$$I \approx m\bar{R}^2$$

где $\bar{R} = \frac{R_1+R_2}{2}$ — средний радиус.

---

4. Вывод расчетной формулы момента инерции однородного шара массой m, внешний радиус сечения R_1, внутренний радиус сечения R_2, относительно оси, проходящей через его цент.

Постановка задачи:

Полый шар рассматривается как разность двух сплошных шаров: большого (радиус R_1) и малого (радиус R_2), вырезанного из центра.

Формула момента инерции сплошного шара:

Для однородного сплошного шара массой M и радиусом R относительно оси, проходящей через центр:

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

Метод суперпозиции:

Обозначим плотность материала через ρ.

Момент инерции большого сплошного шара (с радиусом R_1):

$$I_1 = \frac{2}{5}m_1R_1^2$$

где масса $m_1 = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3$

Момент инерции малого шара (вырезанной части, с радиусом R_2):

$$I_2 = \frac{2}{5}m_2R_2^2$$

где масса $m_2 = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_2^3$

Момент инерции полого шара:

$$I = I_1 - I_2 = \frac{2}{5}m_1R_1^2 - \frac{2}{5}m_2R_2^2$$

$$I = \frac{2}{5}\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3 \cdot R_1^2 - \frac{2}{5}\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_2^3 \cdot R_2^2$$

$$I = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}\pi\rho(R_1^5 - R_2^5)$$

$$I = \frac{8\pi\rho}{15}(R_1^5 - R_2^5)$$

Выражение через массу полого шара:

Масса полого шара:

$$m = m_1 - m_2 = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi(R_1^3 - R_2^3)$$

Отсюда:

$$\rho = \frac{3m}{4\pi(R_1^3 - R_2^3)}$$

Подставляем в формулу для I:

$$I = \frac{8\pi}{15} \cdot \frac{3m}{4\pi(R_1^3 - R_2^3)} \cdot (R_1^5 - R_2^5)$$

$$I = \frac{8 \cdot 3m(R_1^5 - R_2^5)}{15 \cdot 4(R_1^3 - R_2^3)}$$

$$I = \frac{2m(R_1^5 - R_2^5)}{5(R_1^3 - R_2^3)}$$

Упрощение выражения:

Используем разложение:

$$R_1^5 - R_2^5 = (R_1 - R_2)(R_1^4 + R_1^3 R_2 + R_1^2 R_2^2 + R_1 R_2^3 + R_2^4)$$

$$R_1^3 - R_2^3 = (R_1 - R_2)(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)$$

После сокращения $(R_1 - R_2)$:

$$I = \frac{2m}{5} \cdot \frac{R_1^4 + R_1^3 R_2 + R_1^2 R_2^2 + R_1 R_2^3 + R_2^4}{R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2}$$

Альтернативная форма (более практичная):

Для полого шара можно использовать приблизительное выражение, которое часто встречается в литературе:

$$I = \frac{2}{5} m \cdot \frac{R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2}{R_1 + R_2 + \dots}$$

Но более точная и часто используемая форма:

$$I = \frac{2m(R_1^5 - R_2^5)}{5(R_1^3 - R_2^3)}$$

Частные случаи:

1. **При $R_2 = 0$ (сплошной шар):**

$$I = \frac{2}{5} m R_1^2$$

2. **При $R_2 \to R_1$ (тонкостенная сферическая оболочка):**

Используя правило Лопиталя или разложение в ряд Тейлора для близких радиусов:

$$I \to \frac{2}{3} m R_1^2$$

3. **При $R_2 = \frac{R_1}{2}$:**

Численный расчет дает значение между $\frac{2}{5} m R_1^2$ и $\frac{2}{3} m R_1^2$.

---

5. Вывод расчетной формулы момента инерции однородного сплошного стержня массой m, длиной l, относительно оси, проходящей через один из его концов.

Постановка задачи:

Стержень однородный, его плотность постоянна. Нужно найти момент инерции относительно оси, которая проходит через один конец стержня и перпендикулярна его длине.

Начальные параметры: - Масса стержня: m - Длина стержня: l - Линейная плотность (масса на единицу длины): $\lambda = \frac{m}{l}$

Вывод через интегрирование:

Выберем координатную систему так, чтобы начало координат находилось на оси вращения, а ось X направлена вдоль стержня.

Рассмотрим элементарный участок стержня длиной dx на расстоянии x от оси вращения.

Масса этого элементарного участка:

$$dm = \lambda\, dx = \frac{m}{l} dx$$

Момент инерции этого элементарного участка относительно оси (используя определение $dI = x^2 dm$):

$$dI = x^2\, dm = x^2 \cdot \frac{m}{l} dx$$

Интегрируем по всей длине стержня (от x = 0 до x = l):

$$I = \int_0^l dI = \int_0^l x^2 \cdot \frac{m}{l} dx = \frac{m}{l} \int_0^l x^2 dx$$

$$I = \frac{m}{l} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{m}{l} \cdot \frac{l^3}{3}$$

$$I = \frac{m}{l} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

Расчетная формула момента инерции стержня относительно конца:

$$I = \frac{1}{3} ml^2$$

Проверка с помощью теоремы Штейнера:

Известно, что момент инерции однородного стержня относительно его центра масс (оси, проходящей через середину стержня):

$$I_{cm} = \frac{1}{12} ml^2$$

Расстояние от конца стержня до центра масс:

$$d = \frac{l}{2}$$

По теореме Штейнера (теорема о параллельных осях):

$$I = I_{cm} + md^2$$

$$I = \frac{1}{12} ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$I = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2$$

$$I = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{3}{12}ml^2 = \frac{4}{12}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

Результаты совпадают, формула верна!

Альтернативная форма через диаметр сечения:

Если стержень имеет диаметр D (тонкий стержень), то эта формула остается той же.

Частные случаи:

1. **Момент инерции относительно центра масс:**

$$I_{cm} = \frac{1}{12}ml^2$$

2. **Момент инерции относительно точки на расстоянии a от конца:**

$$I = \frac{1}{3}m(l-a)^2 + ma^2 = \frac{1}{3}m(l^2 - 2al + a^2) + ma^2$$

$$I = \frac{1}{3}ml^2 - \frac{2}{3}mal + \frac{1}{3}ma^2 + ma^2 = \frac{1}{3}ml^2 - \frac{2}{3}mal + \frac{4}{3}ma^2$$

Более просто: если расстояние от некоторой точки до конца l:

$$I = \frac{1}{3}ml'^2$$

---

6. Вывод расчетной формулы момента инерции однородного сплошного стержня массой m, длиной l, относительно оси, проходящей через его центр.

Постановка задачи:

Стержень однородный, найти момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс (середину) стержня и перпендикулярной его длине.

Начальные параметры: - Масса стержня: m - Длина стержня: l - Линейная плотность: $\lambda = \frac{m}{l}$

Вывод через интегрирование:

Выберем начало координат в центре стержня (в точке с координатой $x = 0$).

Стержень простирается от $x = -\frac{l}{2}$ до $x = +\frac{l}{2}$.

Рассмотрим элементарный участок длиной dx на расстоянии x от оси вращения.

Масса элементарного участка:

$$dm = \lambda\, dx = \frac{m}{l}dx$$

Момент инерции элементарного участка:

$$dI = x^2\, dm = x^2 \cdot \frac{m}{l}dx$$

Интегрируем по всей длине стержня:

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \cdot \frac{m}{l}dx = \frac{m}{l}\int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx$$

Вычислим интеграл (используя четность подынтегральной функции):

$$I = \frac{m}{l} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-l/2}^{l/2}$$

$$I = \frac{m}{l} \cdot \left(\frac{(l/2)^3}{3} - \frac{(-l/2)^3}{3}\right)$$

$$I = \frac{m}{l} \cdot \left(\frac{l^3/8}{3} + \frac{l^3/8}{3}\right)$$

$$I = \frac{m}{l} \cdot \frac{2l^3/8}{3} = \frac{m}{l} \cdot \frac{l^3}{12}$$

$$I = \frac{ml^2}{12}$$

Расчетная формула момента инерции стержня относительно центра:

$$I = \frac{1}{12}ml^2$$

Альтернативное получение (через момент инерции от конца):

Известно, что момент инерции стержня относительно конца:

$$I = \frac{1}{3}ml^2$$

По теореме Штейнера:

$$I = I_{center} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{3}ml^2 = I_{center} + \frac{1}{4}ml^2$$

$$I_{center} = \frac{1}{3}ml^2 - \frac{1}{4}ml^2 = \frac{4ml^2 - 3ml^2}{12} = \frac{1}{12}ml^2$$

Связь с другими осями вращения:

1. **Относительно оси на расстоянии a от центра (параллельной центральной оси):**

$$I(a) = \frac{1}{12}ml^2 + ma^2$$

2. **Относительно конца:**

$$I(end) = \frac{1}{12}ml^2 + m(l/2)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

3. **Относительно оси на расстоянии l/4 от центра:**

$$I(l/4) = \frac{1}{12}ml^2 + m(l/4)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{16}ml^2 = \frac{7}{48}ml^2$$

Физический смысл:

Формула $I_{center} = \frac{1}{12}ml^2$ показывает, что сопротивление стержня вращению относительно его центра меньше, чем относительно концов, так как при вращении вокруг центра части стержня находятся в среднем ближе к оси.

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

7. Вывод формулы периода математического маятника, находящегося в движущейся системе относительно земли с ускорением а.

Постановка задачи:

Математический маятник находится в неинерциальной системе отсчета, движущейся с постоянным ускорением a (например, в лифте). Необходимо найти период колебаний маятника в этой системе.

Анализ в неинерциальной системе:

В неинерциальной системе (движущейся с ускорением a) появляется дополнительная фиктивная (инерционная) сила, действующая на маятник:

$$\vec{F} = -m\vec{a}$$

направленная в сторону, противоположную ускорению системы.

Эта сила имеет величину $F = ma$ и постоянно действует на массу маятника.

Эффективное ускорение свободного падения:

Суммарное ускорение, действующее на маятник, складывается из обычного ускорения свободного падения и ускорения движущейся системы.

Если система ускоряется **вверх** с ускорением a (например, лифт разгоняется вверх):

$$g_{eff} = g + a$$

Если система ускоряется **вниз** с ускорением a (например, лифт разгоняется вниз):

$$g_{eff} = g - a$$

В общем случае, для вектора ускорения системы $\vec{a}$:

$$g_{eff} = \sqrt{g^2 + a^2 + 2ga\cos\theta}$$

где θ — угол между $\vec{g}$ и $\vec{a}$.

Для вертикального ускорения (когда $\vec{a}$ параллельно или антипараллельно $\vec{g}$):

$$g_{eff} = |g \pm a|$$

Уравнение движения маятника:

Для малых углов отклонения φ от вертикали, уравнение движения в неинерциальной системе:

$$m\ell\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg_{eff}\sin\varphi \approx -mg_{eff}\varphi$$

где ℓ — длина нити маятника.

Упрощаем:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g_{eff}}{\ell}\varphi = 0$$

Это уравнение гармонического колебания вида $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0$.

Циклическая частота:

Циклическая частота колебаний в движущейся системе:

$$\omega = \sqrt{\frac{g_{eff}}{\ell}}$$

Период колебаний:

Период связан с циклической частотой соотношением $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{eff}}}$$

Расчетная формула периода для различных случаев:

1. При ускорении вверх:

$$T_{up} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g + a}}$$

2. При ускорении вниз:

$$T_{down} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g - a}}$$

3. Общая форма (с алгебраическим знаком):

Если положительное направление соответствует вверху, то:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g + a}}$$

где $a > 0$ при ускорении вверх, $a < 0$ при ускорении вниз.

4. При горизонтальном ускорении:

Если система ускоряется горизонтально с ускорением a_h, то эффективное ускорение:

$$g_{eff} = \sqrt{g^2 + a_h^2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{g^2 + a_h^2}}}$$

Численные примеры:

1. В лифте, ускоряющемся вверх с $a = g/2$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g + g/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{3g/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}} = T_0\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.816T_0$$

где $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ — период маятника на неподвижной земле.

2. В лифте, ускоряющемся вниз с $a = g/4$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g - g/4}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{3g/4}} = 2\pi\sqrt{\frac{4\ell}{3g}} = T_0\sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1.155T_0$$

Предельные случаи:

1. При $a = 0$ (система покоится):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = T_0$$

2. При $a \to g$ (система падает свободно):

$$T \to \infty$$

Маятник перестает колебаться, так как маятник и система находятся в состоянии невесомости.

---

8. Вывод формулы периода физического маятника в форме стержня длиной массой m, длиной l, подвешенного в точке на расстоянии x от конца.

Постановка задачи:

Физический маятник — это твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси. В данном случае это стержень массой m и длиной l, закрепленный на оси, находящейся на расстоянии d от центра масс.

Основные параметры: - Масса стержня: m **-** Длина стержня: l **-** Расстояние от оси вращения до центра масс: d **-** Момент инерции относительно оси вращения: I

Уравнение движения физического маятника:

Уравнение вращательного движения для твердого тела:

$$\tau = I\beta$$

где τ — момент силы, I — момент инерции, β — угловое ускорение.

Момент силы тяжести относительно оси вращения:

$$\tau = -mgd\sin\varphi$$

где φ — угол отклонения от вертикали. Знак минус указывает на восстанавливающий характер момента.

Для малых углов отклонения $\sin\varphi \approx \varphi$:

$$\tau = -mgd\varphi$$

Дифференциальное уравнение:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgd\varphi$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\varphi = 0$$

Это уравнение гармонического колебания с циклической частотой:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

Период физического маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Применение к стержню:

Для стержня длины l, закрепленного на расстоянии d от центра масс:

Момент инерции стержня относительно его центра масс:

$$I_{cm} = \frac{1}{12}ml^2$$

По теореме Штейнера, момент инерции относительно оси вращения:

$$I = I_{cm} + md^2 = \frac{1}{12}ml^2 + md^2$$

Расчетная формула периода стержня:

Подставляем в формулу периода:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}ml^2 + md^2}{mgd}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2/12 + d^2}{gd}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2 + 12d^2}{12gd}}$$

Альтернативные формы:

1. **Через момент инерции I:**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

2. **Через параметры стержня:**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2 + 12d^2}{12gd}}$$

Частные случаи:

1. **Стержень закреплен на конце** ($d = l/2$):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2 + 12(l/2)^2}{12g(l/2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{l^2 + 3l^2}{6gl}} = 2\pi\sqrt{\frac{4l^2}{6gl}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$$

2. **Стержень закреплен в центре масс** ($d \to 0$):

$$T \to \infty$$

Период становится бесконечным, так как нет восстанавливающего момента.

3. **Стержень закреплен очень близко к центру** ($d \ll l$):

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l^2/12}{gd}} = 2\pi\sqrt{\frac{l^2}{12gd}}$$

Концепция приведенной длины:

Период физического маятника можно записать как:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

где приведенная длина:

$$L = \frac{I}{md} = \frac{l^2/12 + d^2}{d} = \frac{l^2}{12d} + d$$

---

9. Вывод уравнения резонансной частоты для пружинного маятника для вынужденных колебаний, если известен декремент затухания δ.

Постановка задачи:

Пружинный маятник (груз на пружине) находится под действием периодической вынуждающей силы. Нужно найти частоту, при которой амплитуда колебаний достигает максимума (резонансная частота).

Исходные параметры: - Масса груза: m - Жесткость пружины: k - Коэффициент сопротивления среды: r (или коэффициент затухания $\beta = r/(2m)$) - Вынуждающая сила: $F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$

Уравнение движения вынужденного осциллятора:

Уравнение имеет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin(\Omega t)$$

или в форме с коэффициентом затухания:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)$$

где: - $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ — собственная частота маятника - $\beta = r/(2m)$ — коэффициент затухания

Амплитуда вынужденных колебаний:

В установившемся режиме (после затухания переходного процесса), решение уравнения имеет вид:

$$x(t) = A(\Omega)\sin(\Omega t - \psi)$$

Амплитуда как функция частоты вынуждающей силы:

$$A(\Omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}}$$

или в альтернативной форме:

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (r\Omega)^2}}$$

Условие резонанса:

Резонанс происходит при частоте, при которой амплитуда A достигает максимума.

Для поиска максимума амплитуды, найдем минимум знаменателя (подкоренного выражения):

$$f(\Omega) = (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2$$

Берем производную по Ω и приравниваем к нулю:

$$\frac{df}{d\Omega} = 2(\omega_0^2 - \Omega^2)(-2\Omega) + 2(2\beta\Omega)(2\beta)$$

$$\frac{df}{d\Omega} = -4\Omega(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\beta^2\Omega$$

$$\frac{df}{d\Omega} = \Omega[-4(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\beta^2]$$

Для $\Omega \neq 0$:

$$-4(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\beta^2 = 0$$

$$-4\omega_0^2 + 4\Omega^2 + 8\beta^2 = 0$$

$$4\Omega^2 = 4\omega_0^2 - 8\beta^2$$

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$$

Расчетная формула резонансной частоты:

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Альтернативные формы выражения:

1. **Через собственную частоту и коэффициент затухания:**

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - 2\left(\frac{r}{2m}\right)^2}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2}}$$

2. **Через логарифмический декремент затухания:**

Если δ — логарифмический декремент:

$$\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4\pi^2}}$$

3. **Через добротность Q:**

Если $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$ — добротность системы:

$$\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Максимальная амплитуда при резонансе:

Подставляя Ω в формулу для амплитуды:

$$A_{max} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$

или

$$A_{max} = \frac{F_0}{r\Omega}$$

Частные случаи:

1. **При отсутствии затухания** ($\beta = 0$ или $r = 0$):

$$\Omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Амплитуда стремится к бесконечности при точном совпадении частот.

2. **При слабом затухании** ($\beta \ll \omega_0$):

$$\Omega \approx \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\beta^2}{2\omega_0^2}\right) \approx \omega_0$$

Резонансная частота практически совпадает с собственной частотой.

3. **При сильном затухании** ($\beta > \omega_0/\sqrt{2}$):

Максимума амплитуды как функции Ω не существует в классическом смысле. Амплитуда монотонно убывает с ростом Ω.

---

10. Вывод общего уравнения для расчета неизвестного сопротивления в мосте Уитстона (схема представлена на рис.), где R_1 и R_2 являются единым проводником из металла с известной длиной l и диаметром D. Учесть, что вольтметр покажет U=0 В.

Постановка задачи:

Мост Уитстона — это четырехплечий мост для измерения электрического сопротивления. Нужно найти формулу для расчета неизвестного сопротивления.

Схема моста Уитстона:

Мост состоит из четырех резисторов, расположенных в кольцо: - R_1 — первое известное сопротивление - R_2 — второе известное сопротивление - R_3 — третье известное сопротивление (часто переменное) - R_x — неизвестное сопротивление

Через мост пропускается ток от источника напряжения.

Условие баланса моста:

Мост считается сбалансированным, когда потенциалы в промежуточных узлах моста (между R_1 и R_3, и между R_2 и R_x) одинаковы. В этом случае ток через гальванометр (прибор, измеряющий разность потенциалов) равен нулю.

Вывод формулы:

Обозначим напряжение на моста через U, ток в левом плече (через R_1 и R_3) через I_1, ток в правом плече (через R_2 и R_x) через I_2.

При равновесии потенциалы в промежуточных точках одинаковы, то есть:

$$V_1 = V_2$$

где V_1 — потенциал в точке между R_1 и R_3, V_2 — потенциал в точке между R_2 и R_x.

Используя закон Ома для каждого плеча:

На левом плече (через последовательно соединенные R_1 и R_3):

$$U = I_1 R_1 + I_1 R_3 = I_1(R_1 + R_3)$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_3}$$

На правом плече (через последовательно соединенные R_2 и R_x):

$$U = I_2 R_2 + I_2 R_x = I_2(R_2 + R_x)$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2 + R_x}$$

Потенциал в точке между R_1 и R_3:

$$V_1 = I_1 R_3 = \frac{U \cdot R_3}{R_1 + R_3}$$

Потенциал в точке между R_2 и R_x:

$$V_2 = I_2 R_x = \frac{U \cdot R_x}{R_2 + R_x}$$

Условие баланса:

При равновесии $V_1 = V_2$:

$$\frac{U \cdot R_3}{R_1 + R_3} = \frac{U \cdot R_x}{R_2 + R_x}$$

Сокращаем U:

$$\frac{R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_x}{R_2 + R_x}$$

Перекрестно умножаем:

$$R_3(R_2 + R_x) = R_x(R_1 + R_3)$$

$$R_3 R_2 + R_3 R_x = R_x R_1 + R_x R_3$$

$$R_3 R_2 = R_x R_1$$

Расчетная формула для неизвестного сопротивления:

$$R_x = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}$$

Альтернативные формы:

В зависимости от расположения резисторов, формула может быть переписана как:

$$R_x = R_3 \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

или

$$R_1 \cdot R_x = R_2 \cdot R_3$$

Практическое применение:

Для использования моста: 1. Включают три известных сопротивления R_1, R_2, R_3. 2. Последовательно варьируют R_3 до тех пор, пока гальванометр не покажет нулевой ток. 3. При этом условии $R_x = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}$.

Точность измерения:

Точность определения R_x зависит от: - Точности известных сопротивлений R_1, R_2 - Точности измерения R_3 - Чувствительности гальванометра

Чем более чувствительный гальванометр, тем точнее можно уравновесить мост, тем точнее будет результат.

---

11. Вывод уравнения резонансной частоты для пружинного маятника для вынужденных колебаний.

[Этот вопрос уже был рассмотрен в вопросе 9 МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ. Формула резонансной частоты для пружинного маятника:]

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2}}$$

где: - k — жесткость пружины - m — масса груза - r — коэффициент сопротивления - $\beta = r/(2m)$ — коэффициент затухания

При отсутствии затухания ($r = 0$):

$$\Omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

---

12. Вывод уравнения Циалковского с учетом действия поля силы тяжести, на примере реактивной ракеты, взлетающей вертикально вверх.

Постановка задачи:

Реактивный аппарат (ракета) движется вертикально вверх в поле земного притяжения, выбрасывая газы со скоростью u относительно аппарата. Нужно вывести уравнение для определения скорости ракеты как функции её массы.

Исходные параметры: - Начальная масса ракеты: m_0 - Текущая масса ракеты в момент времени t: $m(t)$ - Скорость выброса газов относительно ракеты: u (постоянна) - Ускорение свободного падения: g (постоянно, направлено вниз) - Скорость ракеты: $v(t)$ (положительна вверх)

Уравнение импульсов (без учета гравитации):

Без учета гравитации, для реактивной системы переменной массы, уравнение Мещерского имеет вид:

$$m\frac{dv}{dt} = u\frac{dm}{dt} + F$$

где отрицательный знак перед dm (масса уменьшается):

$$\frac{dm}{dt} < 0$$

Поэтому:

$$m\frac{dv}{dt} = -u\left|\frac{dm}{dt}\right|$$

или, с учетом знака:

$$mdv = -u\,dm$$

Учет гравитации:

При движении в поле тяжести, помимо реактивной силы, действует сила гравитации:

$$m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt} - mg$$

Так как масса уменьшается ($dm < 0$):

$$m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt} - mg$$

$$mdv = -u\,dm - mg\,dt$$

или

$$mdv + mg\,dt = -u\,dm$$

Разделение переменных:

Разделим обе части на m:

$$dv + g\,dt = -u\frac{dm}{m}$$

Интегрирование:

Интегрируем обе части по времени от момента запуска ($t = 0, m = m_0, v = 0$) до момента времени t ($m = m(t)$, $v = v(t)$):

$$\int_0^v dv + \int_0^t g\,dt = -u\int_{m_0}^{m(t)} \frac{dm}{m}$$

$$v + gt = -u[\ln m(t) - \ln m_0]$$

$$v + gt = -u\ln\frac{m(t)}{m_0}$$

$$v + gt = u\ln\frac{m_0}{m(t)}$$

Расчетная формула (уравнение Циолковского с гравитацией):

$$v(t) = u\ln\frac{m_0}{m(t)} - gt$$

или в виде:

$$v = v - gt$$

где $v = u\ln\frac{m_0}{m}$ — скорость согласно идеальной формуле Циолковского (без гравитации).

Физический смысл:

Реальная скорость ракеты уменьшается на величину gt по сравнению с идеальной скоростью Циолковского из-за действия гравитации.

Определение высоты полета:

Высота полета ракеты определяется интегрированием скорости:

$$h(t) = \int_0^t v\,dt = \int_0^t \left(u \ln \frac{m_0}{m(t)} - gt\right) dt$$

Эта зависимость более сложная и зависит от закона изменения массы $m(t)$.

Частный случай: постоянная скорость выброса гелия (постоянная тяга):

Если гелий выбрасывается с постоянной скоростью u и постоянным расходом, то:

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha$$

где α — постоянный расход массы.

Интегрируя:

$$m(t) = m_0 - \alpha t$$

Подставляя в формулу для v(t):

$$v(t) = u \ln \frac{m_0}{m_0 - \alpha t} - gt$$

Во время работы двигателя ($0 < t < t_{burn}$, где $t_{burn} = m_0/\alpha$):

$$v(t_{burn}) = u \ln \frac{m_0}{m_f} - g t_{burn}$$

где m_f — остаточная (конечная) масса ракеты.

Максимальная высота:

Максимальная высота ракеты достигается при $v = 0$:

$$0 = u \ln \frac{m_0}{m_{max}} - g t_{max}$$

$$g t_{max} = u \ln \frac{m_0}{m_{max}}$$

$$t_{max} = \frac{u}{g} \ln \frac{m_0}{m_{max}}$$

Подставляя это время в уравнение для высоты, получаем максимальную высоту полета.

Энергетический подход:

Полная энергия ракеты складывается из: 1. Кинетической энергии: $K = \frac{1}{2}mv^2$ 2. Потенциальной энергии: $U = mgh$ 3. Энергии выброса газов

Закон сохранения энергии в этом случае более сложный, так как система с переменной массой не является замкнутой.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА:

1. Вывод уравнения молекулярно-кинетической теории с помощью уравнения состояния идеального газа.

Исходные положения:

- Идеальный газ состоит из большого числа молекул, движущихся хаотически
- Молекулы взаимодействуют только при упругих соударениях
- Размеры молекул пренебрежимо малы по сравнению с расстояниями между ними

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона): $pV = \nu RT$

где: - p — давление
- V — объём
- ν — количество вещества (число молей)
- R = 8,31 Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная
- T — абсолютная температура

Связь с числом молекул: Число молекул N связано с количеством вещества: $N = \nu N_A$ где $N_A = 6,022 \times 10^{23}$ моль^{-1} — постоянная Авогадро. Подставляя $\nu = N/N_A$: $pV = \frac{N}{N_A} RT$

Постоянная Больцмана: $k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \times 10^{-23}$ Дж/К

Тогда: $pV = NkT$

Концентрация молекул: $n = \frac{N}{V}$ Получаем: $p = nkT$ **Связь с кинетической энергией молекул:** Из молекулярно-кинетической теории, давление связано со средней кинетической энергией поступательного движения молекул: $p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v^2 \rangle$ где:

- m_0 — масса одной молекулы
- $\langle v^2 \rangle$ — среднее значение квадрата скорости

Приравнивая два выражения для давления: $nkT = \frac{1}{3} n m_0 \langle v^2 \rangle$ $kT = \frac{1}{3} m_0 \langle v^2 \rangle$ **Основное уравнение молекулярно-кинетической теории:**

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы: $\langle E_k \rangle = \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} kT$ Давление газа можно выразить через среднюю кинетическую энергию: $p = \frac{2}{3} n \langle E_k \rangle$ Это основное уравнение МКТ, связывающее макроскопический параметр (давление) с микроскопическими (концентрация и средняя энергия молекул).

2. Вывод расчетной формулы наиболее вероятной скорости из распределения Максвелла (распределения молекул по скоростям).

Дано распределение Максвелла:

$$F(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$$

где: - m_0 — масса молекулы - k — постоянная Больцмана - T — абсолютная температура - v — скорость молекулы

Наиболее вероятная скорость — это скорость, при которой функция распределения F(v) достигает максимума.

Условие экстремума:

$$\frac{dF(v)}{dv} = 0$$

Вычисление производной:

Обозначим $A = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}$ — константа.

$$F(v) = Av^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$$

Применяем правило произведения:

$$\frac{dF}{dv} = A\frac{d}{dv}\left(v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}\right)$$

$$\frac{dF}{dv} = A\left(2v \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} + v^2 \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot \left(-\frac{m_0 \cdot 2v}{2kT}\right)\right)$$

$$\frac{dF}{dv} = Ae^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}\left(2v - v^2 \cdot \frac{m_0 v}{kT}\right)$$

$$\frac{dF}{dv} = Ave^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}\left(2 - \frac{m_0 v^2}{kT}\right)$$

Приравниваем к нулю:

$$Ave^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}\left(2 - \frac{m_0 v^2}{kT}\right) = 0$$

Решения: 1. v = 0 (минимум, не имеет физического смысла) 2. $e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} = 0$ (v → ∞, асимптотическое поведение) 3. $2 - \frac{m_0 v^2}{kT} = 0$ — наш случай

Из третьего уравнения:

$$\frac{m_0 v^2}{kT} = 2$$

$$v^2 = \frac{2kT}{m_0}$$

$$v = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}$$

Через молярную массу:

Учитывая, что $m_0 = M/N_A$ и $R = kN_A$:

$$v = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

Ответ:

$$v = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

---

3. Вывод расчетной формулы средней квадратичной скорости из распределения Максвелла (распределения молекул по скоростям).

Дано распределение Максвелла:

$$F(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$$

Средняя квадратичная скорость определяется как:

$$v = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$$

где $\langle v^2 \rangle$ — среднее значение квадрата скорости.

Вычисление среднего квадрата скорости:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 \cdot F(v) dv$$

Подставляем F(v):

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 \cdot 4\pi v^2 \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv$$

$$\langle v^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^4 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv$$

Замена переменной:

Обозначим $\beta = \frac{m_0}{2kT}$, тогда:

$$\langle v^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^4 e^{-\beta v^2} dv$$

Табличный интеграл:

$$\int_0^\infty v^4 e^{-\beta v^2} dv = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\beta^{5/2}}$$

Подстановка:

$$\langle v^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{8\beta^{5/2}}$$

$$\langle v^2 \rangle = 4\pi \cdot \frac{\beta^{3/2}}{\pi^{3/2}} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{8\beta^{5/2}}$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{4\pi}{\pi^{3/2}} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \cdot \frac{1}{\beta}$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{4\sqrt{\pi}}{\pi} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \cdot \frac{1}{\beta}$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{12\pi}{8\pi} \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{3}{2\beta}$$

Возвращаемся к исходным переменным:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} \cdot \frac{2kT}{m_0} = \frac{3kT}{m_0}$$

Средняя квадратичная скорость:

$$v = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$$

Через молярную массу:

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Связь с температурой через среднюю кинетическую энергию:

$$\langle E_k \rangle = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{3}{2} kT$$

Ответ:

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

---

4. Вывод формулы изменения энтропии для процесса, проходящего по закону Бойля-Мариотта.

Закон Бойля-Мариотта (изотермический процесс):

$$pV = \text{const}, \quad T = \text{const}$$

Определение изменения энтропии:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$$

Первое начало термодинамики:

$$\delta Q = dU + \delta A$$

где: - dU — изменение внутренней энергии - δA = pdV — элементарная работа

Для изотермического процесса:

Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры:

$$U = \nu C_V T$$

При T = const:

$$dU = 0$$

Следовательно:

$$\delta Q = pdV$$

Изменение энтропии:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{pdV}{T}$$

Из уравнения состояния идеального газа:

$$pV = \nu RT$$

$$p = \frac{\nu RT}{V}$$

При T = const:

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{TV} dV = \nu R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Через давление:

Из pV = const следует $p_1 V_1 = p_2 V_2$, откуда $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$:

$$\Delta S = \nu R \ln \frac{p_1}{p_2} = -\nu R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Физический смысл:

При изотермическом расширении ($V_2 > V_1$) энтропия возрастает ($\Delta S > 0$), что соответствует увеличению беспорядка в системе.

Ответ:

$$\Delta S = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu R \ln \frac{p_1}{p_2}$$

---

5. Вывод формулы изменения энтропии для процесса, проходящего по закону Шарля.

Закон Шарля (изохорный процесс):

$$V = \text{const}, \quad \frac{p}{T} = \text{const}$$

Первое начало термодинамики:

$$\delta Q = dU + \delta A$$

Для изохорного процесса:

При V = const работа газа:

$$\delta A = pdV = 0$$

Следовательно:

$$\delta Q = dU$$

Изменение внутренней энергии:

$$dU = \nu C_V dT$$

где C_V — молярная теплоёмкость при постоянном объёме.

Изменение энтропии:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\nu C_V dT}{T}$$

$$\Delta S = \nu C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T}$$

$$\Delta S = \nu C_V \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Через давление:

Из закона Шарля $\frac{p}{T} = \text{const}$ следует $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$, откуда $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}$:

$$\Delta S = \nu C_V \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Для идеального газа:

$C_V = \frac{i}{2}R$, где i — число степеней свободы молекулы.

Физический смысл:

При нагревании газа при постоянном объёме ($T_2 > T_1$) энтропия возрастает, так как увеличивается хаотичность движения молекул.

Ответ:

$$\Delta S = \nu C_V \ln \frac{T_2}{T_1} = \nu C_V \ln \frac{p_2}{p_1}$$

---

6. Вывод формулы изменения энтропии для процесса, проходящего по закону Гей-Люссака.

Закон Гей-Люссака (изобарный процесс):

$$p = \text{const}, \quad \frac{V}{T} = \text{const}$$

Первое начало термодинамики:

$$\delta Q = dU + \delta A$$

где: - $dU = \nu C_V dT$ — изменение внутренней энергии - $\delta A = pdV$ — элементарная работа

Для изобарного процесса:

$$\delta Q = \nu C_V dT + pdV$$

Из уравнения состояния при p = const:

$$pV = \nu RT$$

$$pdV = \nu RdT$$

Подставляем:

$$\delta Q = \nu C_V dT + \nu RdT = \nu(C_V + R)dT$$

Используя соотношение $C_p = C_V + R$:

$$\delta Q = \nu C_p dT$$

Изменение энтропии:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\nu C_p dT}{T}$$

$$\Delta S = \nu C_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T}$$

$$\Delta S = \nu C_p \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Через объём:

Из закона Гей-Люссака $\frac{V}{T} = \text{const}$ следует $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$, откуда $\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1}$:

$$\Delta S = \nu C_p \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Для идеального газа:

$C_p = \frac{i+2}{2}R$, где i — число степеней свободы молекулы.

Также: $C_p = \gamma C_V$, где $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ — показатель адиабаты (коэффициент Пуассона).

Физический смысл:

При изобарном нагревании газа ($T_2 > T_1$) и его расширении ($V_2 > V_1$) энтропия возрастает больше, чем при изохорном нагревании, так как добавляется вклад от работы расширения.

Ответ:

$$\Delta S = \nu C_p \ln\frac{T_2}{T_1} = \nu C_p \ln\frac{V_2}{V_1}$$

---

7. Вывод уравнения работы адиабатного процесса с использованием коэффициента Пуассона.

Адиабатный процесс:

$$\delta Q = 0$$

Первое начало термодинамики:

$$\delta Q = dU + \delta A$$

При $\delta Q = 0$:

$$dU + \delta A = 0$$

$$\delta A = -dU$$

Работа через изменение внутренней энергии:

Для идеального газа:

$$U = \nu C_V T$$

$$dU = \nu C_V dT$$

Следовательно:

$$\delta A = -\nu C_V dT$$

Интегрируя от состояния 1 до состояния 2:

$$A = -\nu C_V(T_2 - T_1) = \nu C_V(T_1 - T_2)$$

$$A = -\nu C_V \Delta T$$

Выражение через давление и объём:

Используем уравнение адиабаты (уравнение Пуассона):

$$pV^\gamma = \text{const}$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ — показатель адиабаты (коэффициент Пуассона).

Из уравнения состояния:

$$pV = \nu RT$$

$$T = \frac{pV}{\nu R}$$

Подставляем в выражение для работы:

$$A = \nu C_V\left(\frac{p_1V_1}{\nu R} - \frac{p_2V_2}{\nu R}\right) = \frac{C_V}{R}(p_1V_1 - p_2V_2)$$

Связь между C_V и γ:

Из $C_p = C_V + R$ и $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$:

$$C_p = \gamma C_V$$
$$\gamma C_V = C_V + R$$
$$C_V(\gamma - 1) = R$$
$$\frac{C_V}{R} = \frac{1}{\gamma - 1}$$

Окончательная формула для работы:

$$A = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1}$$

или

$$A = \frac{1}{\gamma - 1}(p_1V_1 - p_2V_2) = \frac{\nu R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}$$

Через начальные и конечные параметры:

Используя уравнения адиабаты: - $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ - $p^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{const}$

можно выразить работу только через начальные и конечные состояния.

Физический смысл:

При адиабатическом расширении ($V_2 > V_1$) работа положительна ($A > 0$), и она совершается за счёт уменьшения внутренней энергии, что приводит к охлаждению газа.

Ответ:

$$A = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{\gamma - 1} = -\nu C_V(T_2 - T_1) = \nu C_V(T_1 - T_2)$$

---

8. Вывод уравнения максимального КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно.

Цикл Карно состоит из четырёх процессов: 1. Изотермическое расширение при температуре T_1 (получение теплоты Q_1) 2. Адиабатическое расширение (охлаждение от T_1 до T_2) 3. Изотермическое сжатие при температуре T_2 (отдача теплоты Q_2) 4. Адиабатическое сжатие (нагревание от T_2 до T_1)

Теплоты в изотермических процессах:

Процесс 1 (изотермическое расширение, $T = T_1$):

$$Q_1 = A_1 = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Процесс 3 (изотермическое сжатие, $T = T_2$):

$$Q_2 = |A_3| = \nu RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$$

(по модулю, так как теплота отдаётся)

Связь объёмов через адиабаты:

Для адиабатного процесса:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}$$

Процесс 2 (адиабата):

$$T_1V_2^{\gamma-1} = T_2V_3^{\gamma-1}$$

Процесс 4 (адиабата):

$$T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$$

Делим первое уравнение на второе:

$$\frac{V_2^{\gamma-1}}{V_4^{\gamma-1}} = \frac{V_3^{\gamma-1}}{V_1^{\gamma-1}}$$

$$\left(\frac{V_2}{V_4}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

$$\frac{V_2}{V_4} = \frac{V_3}{V_1}$$

Откуда:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

Отношение теплот:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}{\nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}} = \frac{T_1}{T_2}$$

(так как логарифмы равны)

КПД тепловой машины:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

Подставляем отношение теплот:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

или

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Физический смысл:

- КПД цикла Карно зависит только от температур нагревателя и холодильника
- Это максимально возможный КПД для любой тепловой машины, работающей между двумя температурами
- КПД < 1 всегда, так как $T_2 > 0$
- Для увеличения КПД нужно либо повышать T_1, либо понижать T_2

Ответ:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

---

9. Вывод уравнения максимального КПД холодильной машины, работающей по циклу Карно.

Холодильная машина — это тепловая машина, работающая в обратном цикле. Она отнимает теплоту Q_2 от холодильника при температуре T_2 и отдаёт теплоту Q_1 нагревателю при температуре T_1 ($T_1 > T_2$), затрачивая при этом работу A.

Для холодильной машины важна не эффективность преобразования теплоты в работу, а эффективность переноса теплоты.

Холодильный коэффициент (КПД холодильной машины):

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{A}$$

где: - Q_2 — теплота, отнятая от холодильника - A — затраченная работа

Из первого начала термодинамики для циклического процесса:

$$A = Q_1 - Q_2$$

где Q_1 — теплота, переданная нагревателю.

Выражение для холодильного коэффициента:

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

Для обратного цикла Карно:

Из вывода для прямого цикла Карно мы получили:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Это соотношение справедливо и для обратимого обратного цикла.

Откуда:

$$Q_1 = Q_2 \frac{T_1}{T_2}$$

Подставляем в формулу холодильного коэффициента:

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{Q_2 \frac{T_1}{T_2} - Q_2} = \frac{Q_2}{Q_2\left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right)}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1} = \frac{1}{\frac{T_1 - T_2}{T_2}}$$

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

Физический смысл:

- Холодильный коэффициент может быть больше единицы ($\varepsilon > 1$), что означает, что количество отведённой теплоты больше затраченной работы
- Чем меньше разность температур (T_1 - T_2), тем выше эффективность холодильной машины
- При $T_1 \rightarrow T_2$ холодильный коэффициент стремится к бесконечности (идеальный случай)
- Это максимально возможное значение для любой холодильной машины, работающей между температурами T_1 и T_2

Альтернативная форма через КПД теплового двигателя:

$$\varepsilon = \frac{1}{\eta} - 1 = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

Ответ:

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{Q_2}{A}$$

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

1. Вывод расчетной формулы напряженности поля бесконечной равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ по теореме Остроградского-Гаусса.

Дано: - Бесконечная равномерно заряженная плоскость **-** Поверхностная плотность заряда σ = Q/S

Теорема Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Выбор поверхности Гаусса:

Выбираем цилиндр с осью, перпендикулярной плоскости, с основаниями площадью S на равных расстояниях по обе стороны от плоскости.

Симметрия поля:

По симметрии, поле направлено перпендикулярно плоскости и имеет одинаковую величину на равных расстояниях от плоскости.

Вычисление потока:

Поток вектора напряжённости через замкнутую поверхность цилиндра складывается из: 1. Потока через два основания (площадь каждого S) 2. Потока через боковую поверхность (равен нулю, так как $\vec{E} \perp d\vec{A}$ на боковой поверхности)

Для оснований: $\vec{E} \parallel d\vec{A}$, поэтому $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA$

$$\Phi_E = E \cdot S + E \cdot S = 2ES$$

Заряд внутри поверхности:

Заряд, охватываемый поверхностью Гаусса:

$$Q = \sigma \cdot S$$

Применение теоремы Гаусса:

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$2E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

С учётом диэлектрика с проницаемостью ε:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon}$$

Физический смысл:

Напряжённость поля бесконечной заряженной плоскости не зависит от расстояния до плоскости (однородное поле).

Ответ:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

---

2. Вывод расчетной формулы напряженности поля системы из двух коаксиальных цилиндров радиусами R_1 и R_2 (R_1<R_2), в точке, находящейся на расстоянии r>R_2 относительно общей оси.

Дано: - Два коаксиальных цилиндра с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) **-** Линейная плотность заряда на цилиндрах: λ_1 и λ_2 **-** Точка наблюдения на расстоянии $r > R_2$ от оси

Теорема Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Выбор поверхности Гаусса:

Выбираем цилиндрическую поверхность радиусом r и высотой h, коаксиальную с заданными цилиндрами.

Симметрия поля:

По симметрии, поле направлено радиально и зависит только от расстояния r от оси.

Вычисление потока:

Поток через боковую поверхность цилиндра:

$$\Phi_E = E \cdot 2\pi r h$$

(потоки через основания равны нулю, так как $\vec{E} \perp d\vec{A}$)

Заряд внутри поверхности:

Полный заряд внутри поверхности Гаусса:

$$Q = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot h$$

где λ_1 и λ_2 — линейные плотности зарядов на цилиндрах.

Применение теоремы Гаусса:

$$E \cdot 2\pi r h = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) h}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Если цилиндры заряжены противоположно ($\lambda_2 = -\lambda_1$):

$$E = 0$$

(поле снаружи системы отсутствует)

Если на внешнем цилиндре нет заряда ($\lambda_2 = 0$):

$$E = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Физический смысл:

При $r > R_2$ поле определяется полным зарядом обоих цилиндров и убывает обратно пропорционально расстоянию от оси.

Ответ:

$$E = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}, \quad r > R_2$$

---

3. Вывод расчетной формулы напряженности поля системы из двух коаксиальных шаров радиусами R_1 и R_2 ($R_1<R_2$), в точке, находящейся на расстоянии $R_1<r<R_2$ относительно центра.

Дано: - Два концентрических шара с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) - Заряды на шарах: Q_1 и Q_2 - Точка наблюдения на расстоянии $R_1 < r < R_2$ от центра

Теорема Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Выбор поверхности Гаусса:

Выбираем сферическую поверхность радиусом r (где $R_1 < r < R_2$), концентрическую с заданными шарами.

Симметрия поля:

По симметрии, поле имеет сферическую симметрию и направлено радиально от центра (или к центру для отрицательного заряда).

Вычисление потока:

Для сферической поверхности:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot 4\pi r^2$$

(так как E = const на сфере радиусом r и $\vec{E} \parallel d\vec{A}$)

Заряд внутри поверхности:

В области $R_1 < r < R_2$ внутри поверхности Гаусса находится только заряд внутреннего шара:

$$Q = Q_1$$

(заряд внешнего шара Q_2 находится на его поверхности при $r = R_2$, т.е. вне нашей поверхности)

Применение теоремы Гаусса:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

или через коэффициент $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$:

$$E = k\frac{Q_1}{r^2}$$

С учётом диэлектрика:

Если между шарами находится диэлектрик с проницаемостью ε:

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$$

Физический смысл:

В области между шарами поле определяется только зарядом внутреннего шара и убывает обратно пропорционально квадрату расстояния (как поле точечного заряда).

Ответ:

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k\frac{Q_1}{r^2}, \quad R_1 < r < R_2$$

---

4. Вывод расчетной формулы разности потенциалов поля двух плоскостей площадью S, расположенных на расстоянии d и равномерно заряженных с поверхностными плотностями σ_1 и σ_2 ($|\sigma_1|>|\sigma_2|$).

Дано: - Две параллельные плоскости площадью S на расстоянии d - Поверхностные плотности зарядов: σ_1 и σ_2

Напряжённость поля от одной заряженной плоскости:

По теореме Гаусса (см. вывод в задаче 1):

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Принцип суперпозиции:

Результирующее поле между плоскостями есть векторная сумма полей от каждой плоскости.

Случай 1: Плоскости заряжены разноимённо ($\sigma_1 = +\sigma$, $\sigma_2 = -\sigma$):

Между плоскостями поля складываются:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1 + |\sigma_2|}{2\varepsilon_0}$$

Случай 2: Плоскости заряжены одноимённо:

Поля вычитаются:

$$E = \left|\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right| = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2\varepsilon_0}$$

Разность потенциалов:

Связь между напряжённостью и разностью потенциалов:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Для однородного поля между плоскостями:

$$\Delta\varphi = E \cdot d$$

Общий случай ($|\sigma_1| > |\sigma_2|$):

$$\Delta\varphi = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2\varepsilon_0} \cdot d$$

или

$$\Delta\varphi = \frac{d}{2\varepsilon_0}|\sigma_1 - \sigma_2|$$

Для конденсатора ($\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$):

$$\Delta\varphi = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

Физический смысл:

Разность потенциалов пропорциональна расстоянию между плоскостями и разности поверхностных плотностей зарядов.

Ответ:

$$\Delta\varphi = \frac{d}{2\varepsilon_0}|\sigma_1 - \sigma_2|$$

Для конденсатора с $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = -\sigma$:

$$\Delta\varphi = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

---

5. Вывод расчетной формулы потенциала поля внутри однородного шара диэлектрической проницаемостью ε, радиусом R с равномерно распределенным зарядом объемной плотностью ρ в точке, находящейся на расстоянии 0<r<R относительно центра.

Дано: **-** Однородный шар радиусом R **-** Объёмная плотность заряда ρ = Q/V **-** Диэлектрическая проницаемость ε **-** Точка наблюдения на расстоянии r < R от центра

Шаг 1: Напряжённость поля внутри шара

Используем теорему Гаусса с сферической поверхностью радиусом r < R:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$

Заряд внутри сферы радиусом r:

$$Q = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

Поток через поверхность:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0 \varepsilon}$$

Шаг 2: Потенциал через напряжённость

Связь между потенциалом и напряжённостью:

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Интегрируем от ∞ до r по двум участкам: 1. От ∞ до R (снаружи шара) 2. От R до r (внутри шара)

Снаружи шара (r' > R):

$$E(r') = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r'^2} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r'^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 \varepsilon r'^2}$$

Потенциал от ∞ до R:

$$\varphi_1 = -\int_{\infty}^{R} E(r')dr' = \int_{R}^{\infty} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 \varepsilon r'^2} dr' = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 \varepsilon} \cdot \frac{1}{R} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0 \varepsilon}$$

Потенциал от R до r:

$$\varphi_2 = -\int_{R}^{r} E(r')dr' = -\int_{R}^{r} \frac{\rho r'}{3\varepsilon_0 \varepsilon} dr' = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0 \varepsilon} \cdot \frac{r^2 - R^2}{2}$$

$$\varphi_2 = \frac{\rho(R^2 - r^2)}{6\varepsilon_0 \varepsilon}$$

Полный потенциал в точке r:

$$\varphi(r) = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0 \varepsilon} + \frac{\rho(R^2 - r^2)}{6\varepsilon_0 \varepsilon}$$

$$\varphi(r) = \frac{2\rho R^2 + \rho R^2 - \rho r^2}{6\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\rho(3R^2 - r^2)}{6\varepsilon_0 \varepsilon}$$

Через полный заряд шара Q:

$$Q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

$$\varphi(r) = \frac{3Q(3R^2 - r^2)}{6\varepsilon_0\varepsilon \cdot 4\pi R^3} = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R^3}$$

Ответ:

$$\varphi(r) = \frac{\rho(3R^2 - r^2)}{6\varepsilon_0\varepsilon}, \quad 0 < r < R$$

или через полный заряд:

$$\varphi(r) = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R^3}$$

---

6. Вывод расчетной формулы электроемкости уединенной сферы радиусом R, помещенной в жидкость с диэлектрической проницаемостью ε.

Дано: - Уединённая сфера радиусом R **-** Диэлектрическая проницаемость среды ε

Определение электроёмкости:

Электроёмкость уединённого проводника:

$$C = \frac{Q}{\varphi}$$

где: **-** Q — заряд проводника **-** φ — потенциал проводника

Потенциал заряженной сферы:

Для равномерно заряженной сферы радиусом R с зарядом Q, находящейся в среде с диэлектрической проницаемостью ε, потенциал на её поверхности (r = R):

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$$

Это следует из того, что потенциал точечного заряда в среде:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$$

При r = R получаем потенциал поверхности сферы.

Электроёмкость:

$$C = \frac{Q}{\varphi} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$$

В вакууме (ε = 1):

$$C_0 = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Связь ёмкостей:

$$C = \varepsilon C_0$$

Диэлектрик увеличивает ёмкость в ε раз.

Численный коэффициент:

Используя $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$:

$$C = \frac{R}{k\varepsilon^{-1}} = \frac{\varepsilon R}{k}$$

или

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R \approx 1,11 \times 10^{-10}\varepsilon R\ (\Phi)$$

при R в метрах.

Физический смысл:

Электроёмкость сферы прямо пропорциональна её радиусу и диэлектрической проницаемости среды.

Ответ:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$$

В вакууме:

$$C_0 = 4\pi\varepsilon_0 R$$

---

7. Вывод уравнения для расчета напряжения, подаваемого на обкладки цилиндрического конденсатора радиусом R, высотой h с учетом диэлектрика толщиной d.

Дано: - Цилиндрический конденсатор - Внутренний радиус R_1, внешний радиус R_2 - Высота h - Между обкладками диэлектрик с проницаемостью ε на толщине d

Примечание: Формулировка задачи неполная. Предположим: - Внутренний радиус R_1 = R - Внешний радиус R_2 = R + d - Диэлектрик заполняет всё пространство между обкладками

Напряжённость поля в цилиндрическом конденсаторе:

Для цилиндрического конденсатора с линейной плотностью заряда λ на расстоянии r от оси:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$$

Разность потенциалов (напряжение):

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = \int_{R}^{R+d} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}dr$$

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_{R}^{R+d}\frac{dr}{r}$$

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{R+d}{R}$$

Связь λ с полным зарядом Q:

Линейная плотность заряда:

$$\lambda = \frac{Q}{h}$$

Подставляем:

$$U = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon h}\ln\frac{R+d}{R}$$

Через ёмкость:

Электроёмкость цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon h}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

Откуда:

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q \ln \frac{R+d}{R}}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon h}$$

Если задан заряд на единицу длины (поверхностная плотность σ):

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi Rh}$$

$$Q = 2\pi Rh\sigma$$

$$U = \frac{2\pi Rh\sigma}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon h} \ln \frac{R+d}{R} = \frac{R\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} \ln \frac{R+d}{R}$$

Ответ:

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \ln \frac{R+d}{R}$$

где λ — линейная плотность заряда на обкладках, или через полный заряд:

$$U = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon h} \ln \frac{R+d}{R}$$

---

8. Вывод уравнения для расчета изменения энергии плоского воздушного конденсатора подключенного к постоянному напряжению U с обкладками в форме дисков радиусами R, расстояние между которыми изменяется от d_1 до d_2.

Дано: - Плоский конденсатор с обкладками-дисками радиусом R - Напряжение U = const (конденсатор подключен к источнику) - Расстояние между обкладками изменяется от d_1 до d_2 - Воздух между обкладками ($\varepsilon \approx 1$)

Электроёмкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{d}$$

где $S = \pi R^2$ — площадь обкладки.

Энергия конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2}$$

При постоянном напряжении:

Начальная ёмкость:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{d_1}$$

Конечная ёмкость:

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{d_2}$$

Начальная энергия:

$$W_1 = \frac{C_1 U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 U^2}{2d_1}$$

Конечная энергия:

$$W_2 = \frac{C_2 U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 U^2}{2d_2}$$

Изменение энергии:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 U^2}{2}\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right)$$

$$\Delta W = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 U^2}{2} \cdot \frac{d_1 - d_2}{d_1 d_2}$$

Анализ:

1. **Если $d_2 > d_1$ (обкладки раздвигаются):**
   - Ёмкость уменьшается: $C_2 < C_1$
   - Энергия уменьшается: $\Delta W < 0$
   - Заряд уменьшается: $Q = CU$
2. **Если $d_2 < d_1$ (обкладки сближаются):**
   - Ёмкость увеличивается: $C_2 > C_1$
   - Энергия увеличивается: $\Delta W > 0$
   - Заряд увеличивается

Работа источника напряжения:

Источник совершает работу по изменению заряда:

$$A = U\Delta Q = U(Q_2 - Q_1) = U^2(C_2 - C_1)$$

Эта работа расходуется на: 1. Изменение энергии конденсатора: ΔW 2. Работу против сил притяжения обкладок

Ответ:

$$\Delta W = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 U^2}{2}\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right) = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 U^2 (d_1 - d_2)}{2 d_1 d_2}$$

---

9. Вывод общего уравнения для расчета ЭДС с внутренним сопротивлением r, подключаемого последовательно к трем параллельно соединенным резисторам R_1, R_2, R_3.

Дано: - Источник ЭДС = $\mathcal{E}$ с внутренним сопротивлением r - Три резистора R_1, R_2, R_3 соединены параллельно - Вся система соединена последовательно

Эквивалентное сопротивление параллельных резисторов:

Для трёх параллельно соединённых резисторов:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

Полное сопротивление цепи:

Источник с внутренним сопротивлением r соединён последовательно с параллельными резисторами:

$$R = r + R = r + \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

Закон Ома для полной цепи:

$$\mathcal{E} = I \cdot R$$

где I — сила тока в цепи.

$$\mathcal{E} = I\left(r + \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}\right)$$

Сила тока в цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R} = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}}$$

Упрощаем:

$$I = \frac{\mathcal{E}(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)}{r(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3) + R_1R_2R_3}$$

Напряжение на внешней цепи:

$$U = \mathcal{E} - Ir$$

или

$$U = I \cdot R = \frac{\mathcal{E} \cdot R}{r + R}$$

Если требуется найти ЭДС по известным параметрам:

$$\mathcal{E} = I(r + R) = Ir + U$$

где U — напряжение на параллельных резисторах.

Ответ:

Сила тока в цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}}$$

или в развёрнутом виде:

$$I = \frac{\mathcal{E}(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)}{r(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3) + R_1R_2R_3}$$

ЭДС через измеренные параметры:

$$\mathcal{E} = U + Ir$$

где U — напряжение на внешней цепи, I — ток в цепи.

---

10. Вывод общего уравнения для расчета неизвестного сопротивления в мосте Уитстона, где R_1 и R_2 являются единым проводником из металла с известной длиной l и диаметром D. Учесть, что вольтметр покажет U=0 В.

Условие равновесия моста Уитстона:

При равновесии моста (показание вольтметра U = 0):

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_x}$$

где: - R_1, R_2 — известные сопротивления (части проволоки) - R_3 — известное сопротивление - R_x — неизвестное сопротивление

Сопротивление проводника:

Сопротивление однородного проводника длиной l и площадью сечения S:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

где ρ — удельное сопротивление материала.

Для проводника с круглым сечением диаметром D:

$$S = \pi \frac{D^2}{4}$$

$$R = \rho \frac{l}{\pi D^2/4} = \frac{4\rho l}{\pi D^2}$$

Для единого проводника:

Если R_1 и R_2 — части одного проводника длиной l_1 и l_2 соответственно:

$$R_1 = \frac{4\rho l_1}{\pi D^2}$$

$$R_2 = \frac{4\rho l_2}{\pi D^2}$$

Отношение сопротивлений:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

Из условия равновесия моста:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{R_3}{R_x}$$

Неизвестное сопротивление:

$$R_x = R_3 \cdot \frac{l_2}{l_1}$$

Если известна полная длина проводника $l = l_1 + l_2$:

Пусть l_1 соответствует положению скользящего контакта от начала. Тогда $l_2 = l - l_1$:

$$R_x = R_3 \cdot \frac{l - l_1}{l_1}$$

Через сопротивления проводника:

Если нужно учесть полное сопротивление проводника:

$$R = \frac{4\rho l}{\pi D^2}$$

$$R_1 = R \cdot \frac{l_1}{l}$$

$$R_2 = R \cdot \frac{l_2}{l}$$

Но для нахождения R_x это не нужно, так как проводник однородный.

Ответ:

$$R_x = R_3 \cdot \frac{l_2}{l_1}$$

где l_1 и l_2 — длины частей проводника, соответствующих R_1 и R_2.

Если l_1 — длина от начала до точки контакта, l — полная длина:

$$R_x = R_3 \cdot \frac{l - l_1}{l_1}$$

---

11. Вывод общего уравнения для расчета тепловыделения на участке проводника длиной l и площадью поперечного сечения S, находящегося под напряжением U за 1/24 долю периода полного обращения Земли вокруг оси.

Дано: - Проводник длиной l и площадью сечения S - Напряжение на проводнике U - Время t = T/24, где T = 24 часа — период обращения Земли

Закон Джоуля-Ленца:

Количество теплоты, выделяющейся в проводнике при прохождении тока:

$$Q = I^2 R t$$

где: - I — сила тока - R — сопротивление проводника - t — время

Сопротивление проводника:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

где ρ — удельное сопротивление материала проводника.

Сила тока через напряжение:

По закону Ома:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{US}{\rho l}$$

Выражение для теплоты через напряжение:

Подставляем в закон Джоуля-Ленца:

$$Q = \frac{U^2}{R} t = \frac{U^2}{\rho l / S} t = \frac{U^2 S}{\rho l} t$$

или через R:

$$Q = \frac{U^2 t}{R} = \frac{U^2 S t}{\rho l}$$

Время:

1/24 периода обращения Земли:

$$t = \frac{T}{24} = \frac{24\text{ ч}}{24} = 1\text{ час} = 3600\text{ с}$$

Окончательная формула:

$$Q = \frac{U^2 S}{\rho l} \cdot \frac{T}{24}$$

В СИ (T = 86400 с):

$$Q = \frac{U^2 S}{\rho l} \cdot 3600\text{ (Дж)}$$

Мощность тепловыделения:

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{U^2 S}{\rho l} = \frac{U^2}{R}$$

Через проводимость:

Проводимость проводника:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

Тогда:

$$Q = \frac{U^2 S \sigma t}{l}$$

Ответ:

$$Q = \frac{U^2 S t}{\rho l}$$

где t = 3600 с (1 час), или в общем виде:

$$Q = \frac{U^2 S T}{24 \rho l}$$

где T = 86400 с (24 часа).

---

12. Вывод уравнения плотности тока через пластину площадью S в зависимости от ее толщины h, зная разность потенциалов Δφ на торцах пластины.

Дано: - Пластина площадью S и толщиной h - Разность потенциалов на торцах Δφ

Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

где: - j — плотность тока - σ — удельная проводимость материала - E — напряжённость электрического поля

Связь напряжённости с разностью потенциалов:

Для однородного поля в пластине толщиной h:

$$E = \frac{\Delta\varphi}{h}$$

(напряжённость направлена вдоль толщины пластины)

Плотность тока:

$$j = \sigma E = \sigma \frac{\Delta\varphi}{h}$$

Через удельное сопротивление:

Используя связь σ = 1/ρ:

$$j = \frac{\Delta\varphi}{\rho h}$$

Сила тока через пластину:

$$I = j \cdot S = \frac{\sigma S \Delta\varphi}{h}$$

Сопротивление пластины:

$$R = \rho \frac{h}{S}$$

Проверка через закон Ома:

$$I = \frac{\Delta\varphi}{R} = \frac{\Delta\varphi}{\rho h/S} = \frac{\sigma S \Delta\varphi}{h}$$

Это согласуется с j·S.

Зависимость от толщины:

Плотность тока **обратно пропорциональна толщине** пластины при постоянной разности потенциалов:

$$j \propto \frac{1}{h}$$

При увеличении толщины: - Напряжённость поля уменьшается: E ~ 1/h - Плотность тока уменьшается: j ~ 1/h - Полный ток также уменьшается: I ~ 1/h

Физический смысл:

При фиксированной разности потенциалов увеличение толщины пластины эквивалентно увеличению сопротивления, что приводит к уменьшению плотности тока.

Ответ:

$$j = \frac{\sigma\Delta\varphi}{h} = \frac{\Delta\varphi}{\rho h}$$

где: - σ — удельная проводимость материала - ρ — удельное сопротивление материала (ρ = 1/σ) - h — толщина пластины - Δφ — разность потенциалов на торцах

ТРЕТИЙ ВОПРОС (ЗАДАЧА) - ПОЛНЫЕ РЕШЕНИЯ

МЕХАНИКА

Задача 1. Из одного и того же места начали равноускорено двигаться в одном направлении две точки, причем вторая начала свое движение через 2 с после первой. Первая точка двигалась с начальной скоростью v1=1 м/с и ускорением a1=2 м/с^2, вторая — с начальной скоростью v2=10 м/с и ускорением a2=1 м/с^2. Через сколько времени и на каком расстоянии от исходного положения вторая точка догонит первую?

Решение:

Уравнение движения первой точки: $x_1 = v_1 t + \frac{1}{2} a_1 t^2 = 1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^2 = t + t^2$

Вторая точка начинает движение через 2 с, поэтому её уравнение для времени $t' = t - 2$ (где $t > 2$): $x_2 = v_2 t' + \frac{1}{2} a_2 t'^2 = 10(t-2) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (t-2)^2$

$x_2 = 10(t-2) + 0.5(t-2)^2 = 10t - 20 + 0.5(t^2 - 4t + 4)$

$x_2 = 10t - 20 + 0.5t^2 - 2t + 2 = 0.5t^2 + 8t - 18$

Вторая точка догонит первую, когда $x_1 = x_2$:

$t + t^2 = 0.5t^2 + 8t - 18$

$t^2 - 0.5t^2 + t - 8t + 18 = 0$

$0.5t^2 - 7t + 18 = 0$

$t^2 - 14t + 36 = 0$

$D = 196 - 144 = 52 = 4 \cdot 13$

$t = \frac{14 \pm 2\sqrt{13}}{2} = 7 \pm \sqrt{13}$

$t_1 = 7 - \sqrt{13} \approx 3.39$ с (физически невозможно, т.к. вторая точка начинает движение в момент $t = 2$ с)

$t_2 = 7 + \sqrt{13} \approx 10.61$ с

Время после начала движения второй точки: $t' = 10.61 - 2 = 8.61$ с

Расстояние от исходного положения: $x = 10.61 + 10.61^2 \approx 10.61 + 112.58 \approx 123.19$ м

или $x = 0.5 \cdot 10.61^2 + 8 \cdot 10.61 - 18 \approx 56.26 + 84.88 - 18 \approx 123.14$ м

Ответ: Через $t' \approx 8.6$ с после начала движения второй точки (или через $t \approx 10.6$ с от начала движения первой), на расстоянии $x \approx 123$ м.

Задача 2. Миномет установлен под углом α=60° к горизонту на крыше здания, высота которого h=40 м. Начальная скорость v_0 мины равна 50 м/с. Требуется: 1) написать кинематические уравнения движения и уравнения траектории и начертить эту траекторию с соблюдением масштаба; 2) определить время τ полета мины, максимальную высоту H ее подъема, горизонтальную дальность s полета, скорость v в момент падения мины на землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение:

1) Кинематические уравнения и траектория:

Начальные скорости:

$v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 50 \cdot \cos 60° = 50 \cdot 0.5 = 25$ м/с

$v_{0y} = v_0 \sin\alpha = 50 \cdot \sin 60° = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 43.30$ м/с

Кинематические уравнения:

$x = v_{0x} t = 25t$

$y = h + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = 40 + 43.30t - 5t^2$

$v_x = v_{0x} = 25$ м/с

$v_y = v_{0y} - gt = 43.30 - 10t$ м/с

Уравнение траектории (исключаем время): $t = \frac{x}{25}$

$y = 40 + 43.30 \cdot \frac{x}{25} - 5 \cdot \left(\frac{x}{25}\right)^2$

$y = 40 + 1.732x - 0.008x^2$

2) Основные параметры полета:

Время полета τ:

Мина падает на землю, когда $y = 0$: $0 = 40 + 43.30\tau - 5\tau^2$

$5\tau^2 - 43.30\tau - 40 = 0$

$\tau^2 - 8.66\tau - 8 = 0$

$\tau = \frac{8.66 + \sqrt{75 + 32}}{2} = \frac{8.66 + \sqrt{107}}{2} = \frac{8.66 + 10.34}{2} \approx 9.5$ с

Максимальная высота подъёма H:

Максимум достигается, когда $v_y = 0$: $0 = 43.30 - 10t_{max}$

$t_{max} = 4.33$ с

$H = 40 + 43.30 \cdot 4.33 - 5 \cdot 4.33^2 = 40 + 187.39 - 93.64 \approx 133.75$ м

(Максимальная высота над землей)

Горизонтальная дальность s:

$s = v_{0x} \cdot \tau = 25 \cdot 9.5 \approx 237.5$ м

Скорость при падении:

$v_x = 25$ м/с (постоянна)

$v_y = 43.30 - 10 \cdot 9.5 = 43.30 - 95 = -51.70$ м/с

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{625 + 2672.89} = \sqrt{3297.89} \approx 57.43$ м/с

Угол падения: $\tan\theta = \frac{|v_y|}{v_x} = \frac{51.70}{25} = 2.068, \theta \approx 64.3°$ к горизонту

Ответ: - Время полета: $\tau \approx 9.5$ с - Максимальная высота: $H \approx 133.75$ м (над землей) или ≈ 93.75 м (над крышей здания) - Горизонтальная дальность: $s \approx 237.5$ м - Скорость при падении: $v \approx 57.4$ м/с под углом $\approx 64.3°$ к горизонту

Задача 3. Велосипедное колесо вращается с частотой n=5 c^{-1}. Под действием сил трения оно остановилось через интервал времени Δt=1 мин. Определить угловое ускорение ε и число N оборотов, которое сделает колесо за это время.

Решение:

Начальная угловая скорость: $\omega_0 = 2\pi n = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$ рад/с ≈ 31.42 рад/с

Конечная угловая скорость: $\omega = 0$ рад/с

Время: $\Delta t = 60$ с

Угловое ускорение (замедление): $\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} = \frac{0 - 10\pi}{60} = -\frac{10\pi}{60} = -\frac{\pi}{6}$ рад/с^2

$\varepsilon \approx -0.524$ рад/с^2 (величина углового ускорения)

Угловое перемещение: $\phi = \omega_0 \Delta t + \frac{1}{2}\varepsilon(\Delta t)^2 = 10\pi \cdot 60 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 3600$

$\phi = 600\pi - 300\pi = 300\pi$ рад

Число оборотов: $N = \frac{\phi}{2\pi} = \frac{300\pi}{2\pi} = 150$ оборотов

Или через среднюю угловую скорость: $N = \frac{n \cdot \Delta t}{2} = \frac{5 \cdot 60}{2} = 150$ оборотов

Ответ: - Угловое ускорение: $\varepsilon = -0.524$ рад/с^2 (модуль: 0.524 рад/с^2) - Число оборотов: $N = 150$ оборотов

Задача 4. На гладком столе лежит брусок массой m=4 кг. К бруску привязаны два шнура, перекинутые через неподвижные блоки, прикрепленные к противоположным краям стола. К концам шнуров подвешены гири, массы которых m_1=1 кг и m_2=2 кг. Найти ускорение a, с которым движется брусок, и силу натяжения T каждого из шнуров. Массой блоков и трением пренебречь.

Решение:

Обозначим ускорения гирь как a_1 и a_2 (положительное направление - вверх), а ускорение бруска как a (положительное направление - в сторону более тяжелой гири).

Из условия нерастяжимости нитей: $a_1 = a$ и $a_2 = a$ (брусок движется в сторону более тяжелой гири, а обе гири движутся с одинаковым ускорением, но в противоположных вертикальных направлениях относительно своих положений).

Уточнение: гиря массой $m_2 = 2$ кг тяжелее, она будет опускаться, гиря массой $m_1 = 1$ кг будет подниматься.

Для гири m_1 (поднимается): $T_1 - m_1 g = m_1 a \to T_1 = m_1(g + a)$

Для гири m_2 (опускается): $m_2 g - T_2 = m_2 a \to T_2 = m_2(g - a)$

Для бруска (движется в сторону более тяжелой гири): $T_2 - T_1 = ma$

$m_2(g - a) - m_1(g + a) = ma$

$m_2 g - m_2 a - m_1 g - m_1 a = ma$

$(m_2 - m_1)g = a(m + m_1 + m_2)$

$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m + m_1 + m_2} = \frac{(2-1)\cdot 10}{4+1+2} = \frac{10}{7} \approx 1.43$ м/с^2

Силы натяжения: $T_1 = m_1(g + a) = 1 \cdot (10 + \frac{10}{7}) = 10 + 1.43 = \frac{80}{7} \approx 11.43$ Н

$T_2 = m_2(g - a) = 2 \cdot (10 - \frac{10}{7}) = 2 \cdot \frac{60}{7} = \frac{120}{7} \approx 17.14$ Н

Ответ: - Ускорение бруска: $a = 1.43$ м/с^2 - Сила натяжения шнура со стороны гири m_1: $T_1 \approx 11.43$ Н - Сила натяжения шнура со стороны гири m_2: $T_2 \approx 17.14$ Н

Задача 5. Два груза массами m_1=10 кг и m_2=15 кг подвешены на нитях длиной l=2 м так, что грузы соприкасаются между собой. Меньший груз был отклонен на угол φ=60° и выпущен. Определить высоту h, на которую поднимутся оба груза после удара. Удар грузов считать неупругим.

Решение:

Этап 1: Падение первого груза

При падении первый груз (масса $m_1 = 10$ кг) опускается на высоту: $\Delta h = l - l\cos\varphi = l(1 - \cos 60°) = 2(1 - 0.5) = 1$ м

По закону сохранения энергии скорость первого груза перед ударом: $m_1 g \Delta h = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$

$v_1 = \sqrt{2g\Delta h} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1} = \sqrt{20} \approx 4.47$ м/с

Этап 2: Неупругое столкновение

По закону сохранения импульса (второй груз в покое): $m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v$

$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{10 \cdot 4.47}{10+15} = \frac{44.7}{25} = 1.788$ м/с

Этап 3: Подъем обоих грузов

По закону сохранения энергии после удара: $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = (m_1 + m_2)gh$

$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{1.788^2}{2\cdot 10} = \frac{3.2}{20} = 0.16$ м

Или более точно: $v^2 = \left(\frac{10\sqrt{20}}{25}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{20}}{5}\right)^2 = \frac{4\cdot 20}{25} = \frac{80}{25} = 3.2$ м^2/с^2

$h = \frac{3.2}{20} = 0.16$ м

Ответ: Высота подъема обоих грузов после удара: $h = 0.16$ м = 16 см

Задача 6. На цилиндр намотана тонкая гибкая нерастяжимая лента, массой которой по сравнению с массой цилиндра можно пренебречь. Свободный конец ленты прикрепили к кронштейну и предоставили цилиндру опускаться под действием силы тяжести. Определить линейное ускорение а оси цилиндра, если цилиндр: 1) сплошной; 2) полый тонкостенный.

Решение:

Обозначим массу цилиндра как M, радиус как R, ускорение центра масс как a, угловое ускорение как β.

Из условия нерастяжимости ленты: $a = \beta R$

Для сплошного цилиндра:

Момент инерции: $I_1 = \frac{1}{2}MR^2$

Уравнение второго закона Ньютона для поступательного движения: $Mg - T = Ma$ ... (1)

Уравнение второго закона Ньютона для вращательного движения: $TR = I_1\beta = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R} = \frac{1}{2}MRa$ ... (2)

Из уравнения (2): $T = \frac{1}{2}Ma$

Подставляем в уравнение (1): $Mg - \frac{1}{2}Ma = Ma$

$Mg = \frac{3}{2}Ma$

$a_1 = \frac{2}{3}g \approx 6.67$ м/с^2

Для полого тонкостенного цилиндра:

Момент инерции: $I_2 = MR^2$

Уравнение для поступательного движения: $Mg - T = Ma$ ... (3)

Уравнение для вращательного движения: $TR = I_2\beta = MR^2 \cdot \frac{a}{R} = MRa$ ... (4)

Из уравнения (4): $T = Ma$

Подставляем в уравнение (3): $Mg - Ma = Ma$

$Mg = 2Ma$

$a_2 = \frac{1}{2}g = 5$ м/с^2

Ответ: - Для сплошного цилиндра: $a_1 = \frac{2}{3}g \approx 6.67$ м/с^2 - Для полого тонкостенного цилиндра: $a_2 = \frac{1}{2}g = 5$ м/с^2

Задача 7. Человек стоит на скамье Жуковского и ловит рукой мяч массой m=0,4 кг, летящий в горизонтальном направлении со скоростью v=20 м/с. Траектория мяча проходит на расстоянии r=0,8 м от вертикальной оси вращения скамьи. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться скамья Жуковского с человеком, поммавшим мяч, если суммарный момент инерции J человека и скамьи равен 6 кг·м^2?

Решение:

Задача использует закон сохранения момента импульса (момента количества движения).

Начальный момент импульса мяча относительно оси скамьи: $L = mvr = 0.4 \cdot 20 \cdot 0.8 = 6.4$ кг·м^2/с

После поймания мяча система (человек + скамья + мяч) начинает вращаться с угловой скоростью ω.

По закону сохранения момента импульса: $mvr = (J + mr^2)\omega$

где mr^2 - момент инерции мяча относительно оси вращения.

$\omega = \frac{mvr}{J+mr^2} = \frac{0.4 \cdot 20 \cdot 0.8}{6+0.4 \cdot 0.8^2}$

$\omega = \frac{6.4}{6+0.4\cdot0.64} = \frac{6.4}{6+0.256} = \frac{6.4}{6.256} \approx 1.023$ рад/с

Если пренебречь моментом инерции мяча (так как $mr^2 \ll J$):

$\omega \approx \frac{mvr}{J} = \frac{6.4}{6} \approx 1.067$ рад/с

Ответ: Угловая скорость вращения скамьи: $\omega \approx 1.02$ - 1.07 рад/с (в зависимости от учета момента инерции мяча)

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Задача 8. Колебания точки происходят по закону x=A cos(ωt+φ). В некоторый момент времени смещение x точки равно 5 см, ее скорость v=20 см/с и ускорение a=-80 см/с². Найти амплитуду A, угловую частоту ω, период T колебаний и фазу (ωt+φ) в рассматриваемый момент времени.

Решение:

Дано: $x = 5$ см = 0.05 м, $v = 20$ см/с = 0.2 м/с, $a = -80$ см/с^2 = -0.8 м/с^2

Уравнения движения при гармонических колебаниях:

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$

Нахождение угловой частоты:

Из связи ускорения и смещения: $\omega^2 = -\frac{a}{x} = -\frac{-0.8}{0.05} = 16$ рад^2/с^2

$\omega = 4$ рад/с

Нахождение амплитуды:

$A^2 = x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = 0.05^2 + \frac{0.2^2}{16} = 0.0025 + \frac{0.04}{16} = 0.0025 + 0.0025 = 0.005$

$A = \sqrt{0.005} \approx 0.0707$ м = 7.07 см

Или: $A = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}}$

Нахождение фазы:

$\cos(\omega t + \varphi) = \frac{x}{A} = \frac{0.05}{0.0707} \approx 0.707$

$\sin(\omega t + \varphi) = -\frac{v}{A\omega} = -\frac{0.2}{0.0707\cdot4} = -\frac{0.2}{0.2828} \approx -0.707$

Так как $\cos(\omega t + \varphi) > 0$ и $\sin(\omega t + \varphi) < 0$, фаза находится в четвёртом квадранте:

$\omega t + \varphi = -45° = -\frac{\pi}{4}$ рад = -0.785 рад

или $\omega t + \varphi = 315° = \frac{7\pi}{4}$ рад

Нахождение периода:

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \approx 1.571$ с

Ответ: - Амплитуда: $A \approx 7.07$ см - Угловая частота: $\omega = 4$ рад/с - Период: $T = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$ с - Фаза: $(\omega t + \varphi) = -45°$ или 315° (или $-\pi/4$ или $7\pi/4$ радиан)

Задача 9. К спиральной пружине подвесили грузик, в результате чего пружина растянулась на x=9 см. Каков будет период T колебаний грузика, если его немного оттянуть вниз и затем отпустить?

Решение:

При подвешивании грузика к пружине достигается равновесие: $kx = mg$

где k - жесткость пружины, $x = 0.09$ м - растяжение.

Период колебаний математического маятника и колебаний на пружине: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Из условия равновесия: $\frac{m}{k} = \frac{x}{g}$

Следовательно: $T = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.09}{10}} = 2\pi\sqrt{0.009}$

$T = 2\pi \cdot 0.0949 \approx 0.596$ с

Или более точно: $T = 2\pi\sqrt{\frac{9\times10^{-2}}{10}} = 2\pi\sqrt{9\times10^{-3}} = 2\pi \cdot 3 \times 10^{-1.5}$

$T = 2\pi \cdot 0.03 \cdot \sqrt{10} = 0.06\pi\sqrt{10} \approx 0.596$ с

Ответ: Период колебаний грузика: $T = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}} \approx 0.60$ с

Задача 10. Гиря массой m=500 г подвешена к спиральной пружине жесткостью k=20 Н/м и совершает упругие колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент колебаний θ=0,004. Определить число N полных колебаний, которые должна совершить гиря, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в n=2 раза. За какое время t произойдет это уменьшение?

Решение:

Логарифмический декремент определяется как: $\theta = \ln\frac{A_i}{A_{i+1}} = \delta T$

где δ - коэффициент затухания, T - период колебаний.

Нахождение периода:

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0.5}} = \sqrt{40} \approx 6.32$ рад/с

$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{6.32} \approx 0.994$ с

Нахождение коэффициента затухания:

$\delta = \frac{\theta}{T} = \frac{0.004}{0.994} \approx 0.00402$ с$^{-1}$

Уменьшение амплитуды:

При затухающих колебаниях амплитуда уменьшается по закону: $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$

Если амплитуда уменьшилась в $n = 2$ раза: $\frac{A_0}{A_0 e^{-\delta t}} = 2$

$e^{\delta t} = 2$

$\delta t = \ln 2 = 0.693$

$t = \frac{\ln 2}{\delta} = \frac{0.693}{0.00402} \approx 172.4$ с

Число колебаний:

$N = \frac{t}{T} = \frac{172.4}{0.994} \approx 173.5$ колебаний

Или через логарифмический декремент: $N = \frac{\ln n}{\theta} = \frac{\ln 2}{0.004} = \frac{0.693}{0.004} = 173.25$ колебаний

Ответ: - Число полных колебаний: $N \approx 173$ колебаний - Время уменьшения амплитуды в 2 раза: $t \approx 172$ с

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Задача 1. Одна треть молекул азота массой m=10 г распалась на атомы. Определить полное число N частиц, находящихся в газе.

Решение:

Молярная масса азота: $M_{N_2} = 28$ г/моль

Начальное число молекул азота: $N_0 = \frac{m}{M_{N_2}} \cdot N_A = \frac{10}{28} \cdot 6.022 \times 10^{23} \approx 2.15 \times 10^{23}$

После распада одной трети молекул:

Оставшихся молекул N_2: $\frac{2}{3}N_0$

Распалось молекул: $\frac{1}{3}N_0 \rightarrow$ образовалось атомов: $\frac{2}{3}N_0$

Полное число частиц: $N = \frac{2}{3}N_0 + \frac{2}{3}N_0 = \frac{4}{3}N_0$

$N = \frac{4}{3} \cdot 2.15 \times 10^{23} \approx 2.87 \times 10^{23}$

Или: $N = \frac{4}{3} \cdot \frac{m}{M_{N_2}} \cdot N_A = \frac{4}{3} \cdot \frac{10}{28} \cdot 6.022 \times 10^{23}$

$N = \frac{40}{84} \cdot 6.022 \times 10^{23} \approx 2.87 \times 10^{23}$

Ответ: Полное число частиц: $N \approx 2.87 \times 10^{23}$ частиц

Задача 2. Колба вместимостью V=300 см^3, закрытая пробкой с краном, содержит разреженный воздух. Для измерения давления в колбе горлышко колбы погрузили в воду на незначительную глубину и открыли кран, в результате чего в колбу вошла вода массой m=292 г. Определить первоначальное давление p в колбе, если атмосферное давление p_0 = 100 кПа.

Решение:

Объем колбы: $V = 300$ см^3 = 3×10^{-4} м^3

Плотность воды: $\rho = 1000$ кг/м^3

Объем воды, вошедшей в колбу: $V = \frac{m}{\rho} = \frac{0.292}{1000} = 2.92 \times 10^{-4}$ м^3

Объем воздуха в колбе после открытия крана: $V' = V - V = 3 \times 10^{-4} - 2.92 \times 10^{-4} = 0.08 \times 10^{-4}$ м^3

Исходно в колбе был воздух под давлением p с объемом V.

После открытия крана воздух в колбе находится под давлением p_0 (атмосферным) с объемом V'.

По закону Бойля-Мариотта (при постоянной температуре): $p \cdot V = p_0 \cdot V'$

$p = p_0 \cdot \frac{V'}{V} = 100 \cdot \frac{0.08 \times 10^{-4}}{3 \times 10^{-4}} = 100 \cdot \frac{0.08}{3} = 100 \cdot \frac{2.67}{100}$

$p = 100 \cdot \frac{0.08}{3} \approx 2.67$ кПа

Ответ: Первоначальное давление в колбе: $p \approx 2.67$ кПа (или 8/3 кПа)

Задача 3. Найти плотность ρ газовой смеси водорода и кислорода, если их массовые доли w_1 и w_2 равны соответственно 1/9 и 8/9. Давление p смеси равно 100 кПа, температура T=300 К.

Решение:

Молярные массы:

Водород: $M_1 = 2$ г/моль

Кислород: $M_2 = 32$ г/моль

Массовые доли: $w_1 = 1/9, w_2 = 8/9$

Средняя молярная масса смеси: $M = \frac{1}{w_1/M_1 + w_2/M_2}$

$\frac{w_1}{M_1} + \frac{w_2}{M_2} = \frac{1/9}{2} + \frac{8/9}{32} = \frac{1}{18} + \frac{8}{288} = \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{2+1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

$M = 12$ г/моль = 0.012 кг/моль

Плотность газа (из уравнения состояния идеального газа): $p = \rho \frac{RT}{M}$

$\rho = \frac{pM}{RT} = \frac{100000 \cdot 0.012}{8.314 \cdot 300} = \frac{1200}{2494.2} \approx 0.481$ кг/м^3

Ответ: Плотность газовой смеси: $\rho \approx 0.48$ кг/м^3

Задача 4. Колба вместимостью V=4 л содержит некоторый газ массой m=0,6 г под давлением p=200 кПа. Определить среднюю квадратичную скорость ⟨vкв⟩ молекул газа.

Решение:

Объем: $V = 4$ л = 4×10^{-3} м^3

Масса газа: $m = 0.6$ г = 6×10^{-4} кг

Давление: $p = 200$ кПа = 2×10^5 Па

Плотность газа: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{6\times10^{-4}}{4\times10^{-3}} = 0.15$ кг/м^3

Средняя квадратичная скорость молекул связана с давлением соотношением: $p = \frac{1}{3}\rho\langle v^2\rangle$

$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3\times2\times10^5}{0.15}}$

$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{6\times10^5}{0.15}} = \sqrt{4\times10^6} = 2000$ м/с

Ответ: Средняя квадратичная скорость молекул газа: $\langle v\rangle = 2000$ м/с

Задача 5. Найти показатель адиабаты γ для смеси газов, содержащей гелий массой m_1=10 г и водород массой m_2=4 г.

Решение:

Молярные массы:

Гелий: $M_1 = 4$ г/моль (одноатомный газ)

Водород: $M_2 = 2$ г/моль (двухатомный газ)

Число молей:

Гелия: $n_1 = \frac{m_1}{M_1} = \frac{10}{4} = 2.5$ моль

Водорода: $n_2 = \frac{m_2}{M_2} = \frac{4}{2} = 2$ моль

Для одноатомного газа (гелий): $C_{V1} = \frac{3}{2}R$, $C_{p1} = \frac{5}{2}R$

Для двухатомного газа (водород): $C_{V2} = \frac{5}{2}R$, $C_{p2} = \frac{7}{2}R$

Суммарные теплоемкости: $C_V = n_1C_{V1} + n_2C_{V2} = 2.5 \cdot \frac{3}{2}R + 2 \cdot \frac{5}{2}R = 3.75R + 5R = 8.75R$

$C_p = n_1C_{p1} + n_2C_{p2} = 2.5 \cdot \frac{5}{2}R + 2 \cdot \frac{7}{2}R = 6.25R + 7R = 13.25R$

Показатель адиабаты: $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{13.25R}{8.75R} = \frac{13.25}{8.75} = \frac{53}{35} \approx 1.514$

Или: $\gamma = \frac{13.25}{8.75} = 1.514$

Ответ: Показатель адиабаты для смеси: $\gamma \approx 1.51$

Задача 6. Смешали воду массой m_1=5 кг при температуре T_1=280 К с водой массой m_2=8 кг при температуре T_2=350 К. Найти температуру θ смеси и изменение ΔS энтропии, происходящее при смешивании.

Решение:

Нахождение температуры смеси:

По закону сохранения энергии (без потерь тепла): $m_1c(T_1 - \theta) = m_2c(\theta - T_2)$

где c - удельная теплоемкость воды (одинакова для обеих порций).

$m_1(T_1 - \theta) = m_2(\theta - T_2)$

$m_1T_1 - m_1\theta = m_2\theta - m_2T_2$

$(m_1 + m_2)\theta = m_1T_1 + m_2T_2$

$\theta = \frac{m_1T_1 + m_2T_2}{m_1 + m_2} = \frac{5 \cdot 280 + 8 \cdot 350}{5+8} = \frac{1400+2800}{13} = \frac{4200}{13} \approx 323.1$ К

Нахождение изменения энтропии:

Изменение энтропии при нагреве/охлаждении: $\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = mc\int_{T_i}^{\theta} \frac{dT}{T} = mc\ln\frac{\theta}{T_i}$

Полное изменение энтропии системы: $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = m_1c\ln\frac{\theta}{T_1} + m_2c\ln\frac{\theta}{T_2}$

$\Delta S = c(m_1\ln\frac{323.1}{280} + m_2\ln\frac{323.1}{350})$

$\Delta S = c(m_1\ln 1.154 + m_2\ln 0.923)$

$\Delta S = c(5 \cdot 0.143 + 8 \cdot (-0.081))$

$\Delta S = c(0.715 - 0.648) = 0.067c$

Удельная теплоемкость воды: $c = 4186$ Дж/(кг·К)

$\Delta S = 0.067 \cdot 4186 \approx 280.5$ Дж/К

Или более точно: $\Delta S = 5 \cdot 4186 \cdot \ln\frac{323.1}{280} + 8 \cdot 4186 \cdot \ln\frac{323.1}{350}$

$\Delta S = 20930 \cdot 0.1431 + 33488 \cdot (-0.0808)$

$\Delta S = 2996 - 2707 \approx 289$ Дж/К

Ответ: - Температура смеси: $\theta \approx 323.1$ К (или $49.95°C$) - Изменение энтропии: $\Delta S \approx 280 - 290$ Дж/К

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

Задача 1. Полусфера несет заряд, равномерно распределенный с поверхностной плотностью σ=1 нКл/м². Найти напряженность E электрического поля в геометрическом центре полусферы.

Решение:

Рассмотрим полусферу радиусом R с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 1$ нКл/м² = 10^{-9} Кл/м².

Выделим элемент площади на полусфере в виде кольца, образованного пересечением полусферы плоскостью, проходящей через ось симметрии под углом θ от вертикали.

Элемент площади: $dS = 2\pi R \sin\theta \cdot R d\theta = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$

Заряд элемента: $dq = \sigma dS = 2\pi R^2 \sigma \sin\theta d\theta$

Расстояние от элемента до центра полусферы: $r = R$

Напряженность, создаваемая элементом: $dE = k\frac{dq}{R^2} = k\frac{2\pi R^2 \sigma \sin\theta d\theta}{R^2} = 2\pi k\sigma \sin\theta d\theta$

Продольная компонента (направленная вдоль оси): $dE_z = dE\cos\theta = 2\pi k\sigma \sin\theta\cos\theta d\theta = \pi k\sigma \sin(2\theta) d\theta$

Полная напряженность в центре (интегрирование от $\theta = 0$ до $\theta = \pi/2$): $E = \int_0^{\pi/2} \pi k\sigma \sin(2\theta) d\theta = \pi k\sigma[-\frac{1}{2}\cos(2\theta)]_0^{\pi/2}$

$E = \frac{\pi k\sigma}{2}[-\cos(\pi) + \cos(0)] = \frac{\pi k\sigma}{2}[1 + 1] = \pi k\sigma$

где $k = 8.99 \times 10^9$ Н·м²/Кл²

$E = \pi \cdot 8.99 \times 10^9 \cdot 10^{-9} = \pi \cdot 8.99 \approx 28.25$ В/м

Ответ: Напряженность электрического поля в центре полусферы: $E \approx 28.3$ В/м

Задача 2. Электрическое поле создано положительным точечным зарядом. Потенциал φ поля в точке, удаленной от заряда на r=12 см, равен 24 В. Определить значение и направление градиента потенциала в этой точке.

Решение:

Для точечного заряда q потенциал: $\varphi = k\frac{q}{r}$

Из условия: $\varphi(r = 0.12) = 24$ В

Градиент потенциала связан с напряженностью электрического поля: $\vec{E} = -\nabla\varphi$

Для сферически симметричного поля: $E = -\frac{d\varphi}{dr}$

Для потенциала точечного заряда: $E = -\frac{d}{dr}(k\frac{q}{r}) = k\frac{q}{r^2}$

Напряженность в точке на расстоянии $r = 0.12$ м: $E = k\frac{q}{r^2}$

Из условия $\varphi = k\frac{q}{r} = 24$ В при $r = 0.12$ м: $k \cdot q = 24 \cdot 0.12 = 2.88$ В·м

Следовательно: $E = \frac{kq}{r^2} = \frac{2.88}{0.12^2} = \frac{2.88}{0.0144} = 200$ В/м

Модуль градиента потенциала: $\left|\frac{d\varphi}{dr}\right| = 200$ В/м

Направление: Градиент потенциала направлен в сторону убывания потенциала, то есть радиально от заряда (в направлении от заряда к точке).

Ответ: - Значение градиента потенциала: 200 В/м - Направление: радиально от точечного заряда (в направлении от заряда наружу)

Задача 3. Расстояние d между пластинами плоского конденсатора равно 1,33 м, площадь S пластин равна 20 см². В пространстве между пластинами конденсатора находятся два слоя диэлектриков: слюды толщиной d_1=0,7 мм и эбонита толщиной d_2=0,3 мм. Определить электроемкость C конденсатора.

Решение:

Данные:

Расстояние между пластинами: $d = 1.33$ м

Площадь пластин: $S = 20$ см^2 = 20×10^{-4} м^2 = 2×10^{-3} м^2

Толщина слюды: $d_1 = 0.7$ мм = 0.7×10^{-3} м

Толщина эбонита: $d_2 = 0.3$ мм = 0.3×10^{-3} м

Диэлектрические проницаемости:

Слюда: $\varepsilon_1 \approx 6$

Эбонит: $\varepsilon_2 \approx 3$

Примечание: Общее расстояние $d_1 + d_2 = 1$ мм, что намного меньше расстояния $d = 1.33$ м между пластинами. Это означает, что основное расстояние между пластинами заполнено воздухом (вакуумом).

Конденсатор состоит из трёх последовательных слоёв:

Воздух/вакуум толщиной $d_0 = 1.33 - 0.001 = 1.329$ м

Слюда толщиной $d_1 = 0.7 \times 10^{-3}$ м с $\varepsilon_1 = 6$

Эбонит толщиной $d_2 = 0.3 \times 10^{-3}$ м с $\varepsilon_2 = 3$

Для последовательного соединения конденсаторов: $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

где $C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_0}$ - емкость воздушного зазора

$C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{S}{d_1}$ - емкость слюды

$C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{S}{d_2}$ - емкость эбонита

$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ Ф/м

$\frac{1}{C} = \frac{d_0}{\varepsilon_0 S} + \frac{d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}$

$\frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\left(d_0 + \frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)$

$\frac{1}{C} = \frac{1}{8.854 \times 10^{-12} \times 2 \times 10^{-3}}\left(1.329 + \frac{0.7 \times 10^{-3}}{6} + \frac{0.3 \times 10^{-3}}{3}\right)$

$\frac{1}{C} = \frac{1}{1.77 \times 10^{-14}}\left(1.329 + 0.117 \times 10^{-3} + 0.1 \times 10^{-3}\right)$

$\frac{1}{C} = \frac{1}{1.77 \times 10^{-14}} \cdot 1.329217 \approx 7.51 \times 10^{13}$

$C \approx 1.33 \times 10^{-14}$ Ф = 13.3 пФ

Ответ: Электроемкость конденсатора: $C \approx 1.33 \times 10^{-14}$ Ф или 13.3 пФ

Задача 4. Напряжение U на шинах электростанции равно 6,6 кВ. Потребитель находится на расстоянии l=10 км. Определить площадь S сечения медного провода, который следует взять для устройства двухпроводной линии передачи, если сила тока I в линии равна 20 А и потери напряжения в проводах не должны превышать 3%.

Решение:

Допустимые потери напряжения: $\Delta U = 0.03 \times U = 0.03 \times 6600 = 198$ В

Сопротивление провода на единицу длины для двухпроводной линии: $R = \rho \frac{2l}{S}$

где ρ - удельное сопротивление меди ($\rho = 1.7 \times 10^{-8}$ Ом·м), l - расстояние, S - площадь сечения.

Падение напряжения в проводах: $\Delta U = I \cdot R = I \cdot \rho \frac{2l}{S}$

$\Delta U = 20 \cdot 1.7 \times 10^{-8} \cdot \frac{2 \times 10000}{S}$

$198 = 20 \cdot 1.7 \times 10^{-8} \cdot \frac{20000}{S}$

$198 = \frac{20 \times 1.7 \times 10^{-8} \times 20000}{S}$

$198 = \frac{6.8 \times 10^{-3}}{S}$

$S = \frac{6.8 \times 10^{-3}}{198} = 3.43 \times 10^{-5}$ м^2 = 0.343 см^2

Или более аккуратно: $S = \frac{I \cdot \rho \cdot 2l}{\Delta U} = \frac{20 \cdot 1.7 \times 10^{-8} \cdot 2 \times 10^4}{198}$

$S = \frac{6.8 \times 10^{-3}}{198} \approx 3.43 \times 10^{-5}$ м^2 ≈ 0.343 см^2

Ответ: Площадь сечения медного провода: $S \approx 0.34$ см^2 или 3.4×10^{-5} м^2

Задача 5. При силе тока I_1=3 А во внешней цепи батареи аккумуляторов выделяется мощность P_1=18 Вт, при силе тока I_2=1 А – соответственно P_2=10 Вт. Определить ЭДС ξ и внутреннее сопротивление r батареи.

Решение:

Мощность, выделяемая во внешней цепи (на внешнем сопротивлении): $P = I^2 R = I(\xi - Ir) = I\xi - I^2 r$

Составим систему уравнений для двух случаев:

При $I_1 = 3$ А: $P_1 = I_1 \xi - I_1^2 r$ $18 = 3\xi - 9r$ ... (1)

При $I_2 = 1$ А: $P_2 = I_2 \xi - I_2^2 r$ $10 = \xi - r$ ... (2)

Из уравнения (2): $\xi = 10 + r$

Подставим в уравнение (1): $18 = 3(10 + r) - 9r = 30 + 3r - 9r = 30 - 6r$

$6r = 30 - 18 = 12$

$r = 2$ Ом

$\xi = 10 + 2 = 12$ В

Проверка:

При $I_1 = 3$ А: $P_1 = 3 \cdot 12 - 9 \cdot 2 = 36 - 18 = 18$ Вт ✓

При $I_2 = 1$ А: $P_2 = 1 \cdot 12 - 1 \cdot 2 = 12 - 2 = 10$ Вт ✓

Ответ: - ЭДС батареи: $\xi = 12$ В - Внутреннее сопротивление: $r = 2$ Ом

Задача 6. Сила тока в проводнике сопротивлением r=100 Ом равномерно нарастает от I_0=0 до Imax=10 А в течение времени τ=30 с. Определить количество теплоты Q, выделившееся за это время в проводнике.

Решение:

Сила тока растет линейно: $I(t) = I_0 + \frac{I_{max} - I_0}{\tau}t = \frac{10}{30}t = \frac{1}{3}t$ А

Мощность, выделяемая в проводнике: $P(t) = I^2(t) \cdot r = \left(\frac{1}{3}t\right)^2 \cdot 100 = \frac{100t^2}{9}$ Вт

Количество теплоты: $Q = \int_0^{\tau} P(t)dt = \int_0^{30} \frac{100t^2}{9}dt = \frac{100}{9}\int_0^{30} t^2 dt$

$Q = \frac{100}{9} \cdot \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{30} = \frac{100}{9} \cdot \frac{27000}{3} = \frac{100}{9} \cdot 9000 = 100000$ Дж = 100 кДж

Или используя среднее значение мощности: $P = \frac{1}{2}I_{max}^2 \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 100 = 5000$ Вт

$Q = P \cdot \tau = 5000 \cdot 30 = 150000$ Дж

Примечание: При линейном возрастании тока от 0 до максимума: $Q = \frac{1}{3}I_{max}^2 r\tau = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 100 \cdot 30 = 100000$ Дж

Ответ: Количество выделившейся теплоты: $Q = 100$ кДж или 10^5 Дж
