

Физическая модель

физ. обозначение		значение		величина	Единицы измерения в СИ
$M_{\text{нач}}$		267000		масса до запуска ракеты	кг
M_0		500		масса полезной нагрузки	
m_{0i}	m_{01}	172000		масса 1-й заправленной ступени	
	m_{02}	94000		масса 2-й заправленной ступени	
m_{1i}	m_{11}	13600		масса 1-й ступени без топлива	
	m_{12}	7495		масса 2-й ступени без топлива	
I_i	I_1	на Земле	252	удельный импульс двигателя 1-й ступени	с
		вакуум	308		
	I_2	на Земле	243	удельный импульс двигателя 2-й ступени	
		вакуум	309		
F_{Ti}	F_{T1}	на Земле	3216	тяга двигателя 1-й ступени	кН
		вакуум	3924		
	F_{T2}	на Земле	735,5	тяга двигателя 2-й ступени	
		вакуум	921		
g		9,81		местное ускорение свободного падения	$\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Основные формулы:

Искомая величина	Формула	Единицы измерения в СИ
Скорость ракеты	$V = V_{\phi.\Pi} - \Delta V_g$	$\frac{м}{с}$
Формула Циолковского для многоступенчатой ракеты	$V_{\phi.\Pi} = \sum_{i=1}^N I_i \cdot \ln\left(\frac{M_0 + \sum_{j=i}^N m_{0j}}{M_0 + m_{1i} + \sum_{j=i+1}^N m_{0j}}\right)$	
Гравитационные потери скорости	$\Delta V_g = \int_0^t g(t) \cdot \cos \gamma(t) dt$	

$\gamma(t)$ - угол между вектором силы тяги двигателя и вектором местного ускорения свободного падения.

Вспомогательные физические величины:

физ. обозначение		значение	величина	Единицы измерения в СИ
t_0		295	время от начала полета до конца полета	с
$t_{п1}$			время начала поворота	с
$t_{п2}$			время окончания поворота	с
t_i	t_1	122	время работы 1-й ступени ракеты	с
	t_2	280	время работы 2-й ступени ракеты	с
$t_{общ}$		280	общее время работы ступеней	с
m_i	m_1	1300	скорость расхода топлива 1-й ступени	$\frac{\text{кг}}{\text{с}}$
	m_2	308.5	скорость расхода топлива 2-й ступени	
φ		$\frac{\pi}{180}$	Итоговый угол наклона ракеты к горизонту	рад.
k			экспериментально подобранный коэффициент	

Вспомогательные формулы:

Искомая величина	Формула	Единицы измерения в СИ
Скорость расхода топлива	$m_i = \frac{F_{Ti}}{I_i \cdot g}$	$\frac{\text{кг}}{\text{с}}$
Высота ракеты	$h = \int_0^t V_{HB}$	м
скорость набора высоты	$V_{HB} = \cos(\alpha(t)) V$	$\frac{\text{м}}{\text{с}}$

$\alpha(t)$ – угол между вертикалью и вектором скорости ракеты.

Математическая модель

Скорость расхода топлива

1. Первая ступень:

$$m_1 = \frac{3216 \cdot 10^3}{252 \cdot 9.81} \approx 1300 \frac{\text{кг}}{\text{с}}$$

2. Вторая ступень:

$$m_2 = \frac{735.5 \cdot 10^3}{243 \cdot 9.81} \approx 308.5 \frac{\text{кг}}{\text{с}}$$

Время работы каждой ступени

1. Первая ступень:

$$t_1 = \frac{172000 - 13600}{1300} \approx 122 \text{ с}$$

2. Вторая ступень:

$$t_2 = \frac{94000 - 7495}{308.5} \approx 280 \text{ с}$$

Так как вторая ступень начинает работать с самого старта, то $t_{\text{общ}} = t_2$

Скорость и высота полета

Скорость ракеты вычисляется с помощью этого уравнения:

$$V(t) = V_{\text{ф.ц}}(t) - \Delta V_g(t)$$

где:

$$V_{\text{ф.ц}}(t) = \sum_{i=1}^N (t > \sum_{j=1}^{i-1} t_j) (I_i \cdot \ln \left(\frac{M_0 + \sum_{j=i}^N m_{0j}}{M_0 + \max(m_{1i}, m_{0i} - m_i * (t - \sum_{j=1}^{i-1} t_j)) + \sum_{j=i+1}^N m_{0j}} \right))$$

– характеристическая скорость многоступенчатой ракеты в момент времени t .

$$\Delta V_g(t) = \int_0^t g \cdot (-\cos(\gamma(t))) dt$$

- гравитационные потери скорости к моменту времени t .

Угол $\gamma(t)$ рассчитывается по формуле:

$$\gamma(t) = (t < t_{\text{н1}}) * \pi + (t_{\text{н1}} \leq t \leq t_{\text{н2}}) * \max \left(\frac{\pi}{2} + \varphi, \pi - \frac{\pi}{2} * \frac{t - t_{\text{н1}}}{t_{\text{н2}} - t_{\text{н1}}} \right) + (t > t_{\text{н2}}) * \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right)$$

Таким образом, скорость ракеты в момент времени t равна:

$$V(t) = \sum_{i=1}^N (t > \sum_{j=1}^{i-1} t_j) (I_i \cdot \ln \left(\frac{M_0 + \sum_{j=i}^N m_{0j}}{M_0 + \max(m_{1i}, m_{0i} - m_i * (t - \sum_{j=1}^{i-1} t_j)) + \sum_{j=i+1}^N m_{0j}} \right)) - \int_0^t g \cdot (-\cos(\gamma(t))) dt$$

Высота полета

$$h(t) = \int_0^t V_{\text{HB}}(t) dt$$

где

$$V_{\text{HB}}(t) = \cos(\alpha(t)) V(t)$$

а угол между вертикалью и вектором скорости ракеты равен:

$$\alpha(t) = (t < t_{\text{п1}}) * 0 + (t_{\text{п1}} \leq t \leq t_{\text{п2}}) * k * \frac{\pi}{2} * \frac{t - t_{\text{п1}}}{t_{\text{п2}} - t_{\text{п1}}} + (t > t_{\text{п2}}) * k * \frac{\pi}{2}$$

Итоговая формула для нахождения высоты ракеты в момент времени t:

$$h(t) = \int_0^t \cos(\alpha(t)) V(t) dt$$