

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Физическая модель

Полёт ракеты можно представить как взаимодействие основных сил, каждая из которых играет свою роль в формировании траектории. К ним относятся сила тяги двигателей, сила притяжения Земли и сила аэродинамического сопротивления воздуха. В нашей модели были учтены первые две из них как имеющие наибольшее влияние на скорость ракеты.

Ключевые параметры физической модели, влияющие на движение ракеты:

- **Масса ракеты:** Общая масса ракеты на старте складывается из массы топлива, сухой массы ступеней и массы полезной нагрузки. По мере сгорания топлива масса ракеты уменьшается, что значительно влияет на её ускорение.
- **Удельный импульс двигателей:** отношение тяги двигателя к секундному расходу массы топлива. Этот параметр показывает, насколько эффективно двигатель использует топливо для создания тяги. Удельный импульс определяется для каждой ступени ракеты отдельно.
- **Тяга двигателя:** сила тяги обеспечивает ускорение ракеты и преодоление силы тяжести.

Стоит отметить, что сила тяжести действует на ракету со стороны Земли и равна

$$G = m(t) * g,$$

где g – ускорение свободного падения, $m(t)$ – текущая масса ракеты.

Основные параметры физической модели

Обозначение		Значение для реального корабля	Значение для модели корабля в KSP – используется для расчета			Величина	Единицы измерения в СИ
$m_{общая}$		287000	291289			Стартовая масса	кг
M_0		4725	870			Масса полезной нагрузки	
m_{0i}	m_{01}	197500	202960			Масса заправленной i-й ступени	
	m_{02}	77000	83551				
	m_{03}	12500	3908				
m_{1i}	m_{11}		50960			Масса i-й ступени без топлива	
	m_{12}		17851				
	m_{13}		1308				
I_i	I_1	254 с	на Земле	285,3	2797,8	Удельный импульс двигателя i-й ступени	с $\frac{м}{с}$
			вакуум	310	3040,1		
	I_2	315 с	на Земле	295,3	2895,9		
			вакуум	315	3089,1		
	I_3	326 с	вакуум	355	3481,4		
T_i	T_1	4000000	на Земле	4004000		Тяга двигателя i-й ступени	Н
			вакуум	4350000			
	T_2	940000	на Земле	881100			
			вакуум	940000			
	T_3	55000	55000 (вакуум)				
g		9,81			Местное ускорение свободного падения	$\frac{м}{с^2}$	

Для расчета скорости ракеты использовались следующие формулы:

Искомая величина	Формула	Единицы измерения в СИ
Скорость ракеты	$V = V_{ch} - \Delta V_g$	$\frac{\text{м}}{\text{с}}$
Формула Циолковского для многоступенчатой ракеты (характеристическая скорость ракеты)	$V_{ch} = \sum_{i=1}^N I_i \cdot \ln \left(\frac{M_0 + \sum_{j=i}^N m_{0j}}{M_0 + m_{1i} + \sum_{j=i+1}^N m_{0j}} \right)$	
Гравитационные потери скорости	$\Delta V_g = \int_0^t g \cdot (-\cos(\gamma(t))) dt$	

$\gamma(t)$ - угол между вектором силы тяги двигателя и вектором местного ускорения свободного падения.

Математическая модель

Математическая модель описывает движение ракеты через систему уравнений.

Основные параметры:

Обозначение		Значение	Величина	Единицы измерения в СИ
t		-	Время от старта	с
τ_1		20	Время начала поворота	с
τ_2		200	Время окончания поворота	
N		3	Число ступеней ракеты	
m_i	m_1	1431	Скорость расхода топлива i -й ступени	$\frac{\text{кг}}{\text{с}}$
	m_2	304		
	m_3	16		
$t_{\text{общ}}$		485	Общее время работы ступеней	с
t_i	t_1	106	Время работы i -й ступени	с
	t_2	216		
	t_3	163		
ρ		$\frac{\pi}{180}$	Итоговый угол наклона ракеты к горизонту	рад.
k		$\frac{3}{4}$	Коэффициент для приближенного расчета угла между вектором скорости ракеты и нормалью к горизонту	

Расчеты для каждой ступени ракеты

1. Скорость расхода топлива для каждой ступени:

$$\dot{m}_i = \frac{T_i}{I_i \cdot g}, [I] = c$$

1. Первая ступень:

$$\dot{m}_1 = \frac{4004000}{285,3 \cdot 9.81} \approx \frac{1431 \text{ кг}}{c}$$

2. Вторая ступень:

$$\dot{m}_2 = \frac{940000}{315 \cdot 9.81} \approx \frac{304 \text{ кг}}{c}$$

3. Третья ступень:

$$\dot{m}_3 = \frac{55000}{355 \cdot 9.81} \approx \frac{16 \text{ кг}}{c}$$

2. Время работы каждой ступени:

$$t_i = \frac{m_{0i} - m_{1i}}{\dot{m}_i}$$

1. Первая ступень:

$$t_1 = \frac{202960 - 50960}{1431} \approx 106 \text{ с}$$

2. Вторая ступень:

$$t_2 = \frac{83551 - 17851}{304} \approx 216 \text{ с}$$

3. Третья ступень:

$$t_3 = \frac{3908 - 1308}{16} \approx 163 \text{ с}$$

Общее время работы ступеней:

$$t_{\text{общ}} = t_1 + t_2 + t_3 = 106 + 216 + 163 = 485 \text{ с}$$

Формулы для расчета скорости и высоты ракеты

Для описания движения ракеты используются следующие основные формулы:

1. **Скорость ракеты** рассчитывается с помощью следующего уравнения:

$$V(t) = V_{ch}(t) - \Delta V_g(t)$$

где

$$V_{ch}(t) = \sum_{i=1}^N (t > \sum_{j=1}^{i-1} t_j) (I_i \cdot \ln \left(\frac{M_0 + \sum_{j=i}^N m_{0j}}{M_0 + \max(m_{1i}, m_{0i} - m_i * (t - \sum_{j=1}^{i-1} t_j)) + \sum_{j=i+1}^N m_{0j}} \right))$$

- характеристическая скорость многоступенчатой ракеты в момент времени t ,

$$\Delta V_g(t) = \int_0^t g \cdot (-\cos(\gamma(t))) dt$$

- гравитационные потери скорости к моменту времени t .

При этом угол $\gamma(t)$ между вектором силы тяги двигателя и вектором местного ускорения свободного падения рассчитывается по формуле

$$\gamma(t) = (t < \tau_1) * \pi + (\tau_1 \leq t \leq \tau_2) * \max \left(\frac{\pi}{2} + \rho, \pi - \frac{\pi}{2} * \frac{t - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \right) + (t > \tau_2) * \left(\frac{\pi}{2} + \rho \right)$$

Таким образом, скорость ракеты в момент времени t равна:

$$V(t) = \sum_{i=1}^N (t > \sum_{j=1}^{i-1} t_j) (I_i \cdot \ln \left(\frac{M_0 + \sum_{j=i}^N m_{0j}}{M_0 + \max(m_{1i}, m_{0i} - m_i * (t - \sum_{j=1}^{i-1} t_j)) + \sum_{j=i+1}^N m_{0j}} \right)) - \int_0^t g \cdot (-\cos(\gamma(t))) dt$$

2. **Высота ракеты** определяется как интеграл скорости набора высоты ракетой:

$$h(t) = \int_0^t V_h(t) dt$$

где

$$V_h(t) = \cos(\alpha(t)) V(t)$$

$$\alpha(t) = (t < \tau_1) * 0 + (\tau_1 \leq t \leq \tau_2) * k * \frac{\pi}{2} * \frac{t - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} + (t > \tau_2) * k * \frac{\pi}{2}$$

—угол между вертикалью и вектором скорости \vec{V} ракеты.

Таким образом, высота ракеты в момент времени t равна:

$$h(t) = \int_0^t \cos(\alpha(t)) V(t) dt$$

3. Произведение расчетов

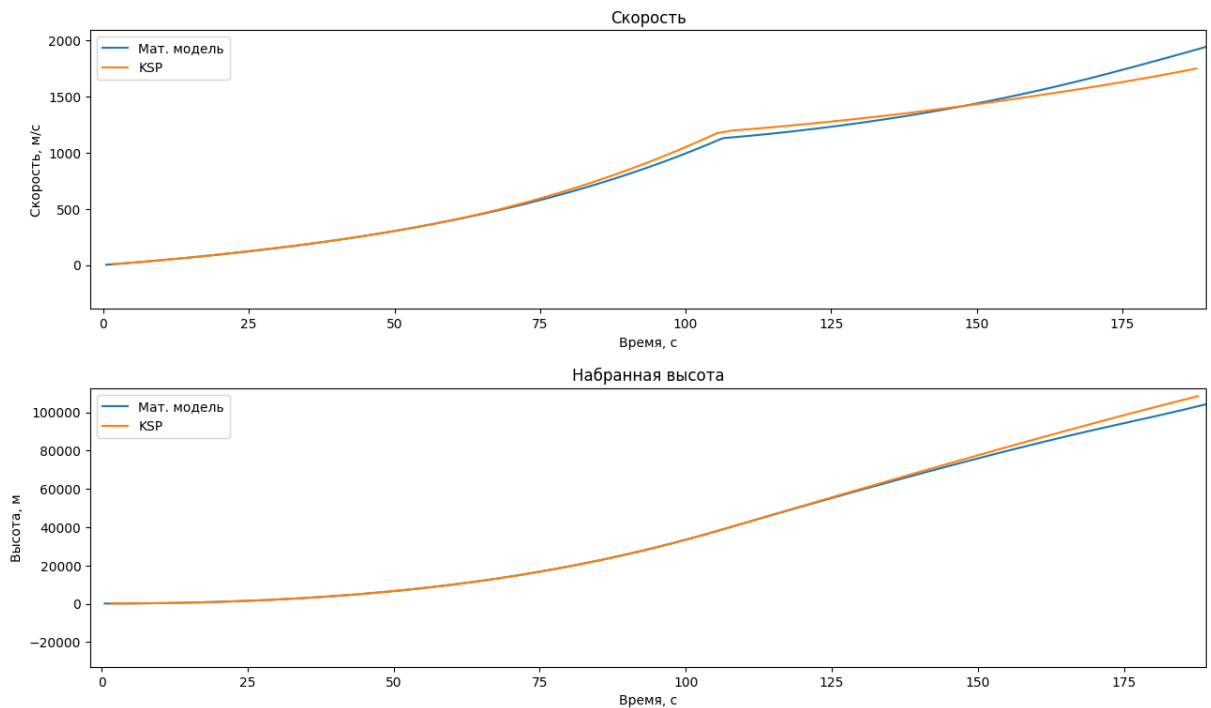


Рисунок 1 Изменение скорости и высоты ракеты в зависимости от времени

Величина	Математическая модель	Моделирование в KSP
Время	188 с	
Скорость	1922 м/с	1749 м/с
Высота	103389 м	108462 м

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

1. Анализ графиков

Графики отражают скорость и высоту ракеты на промежутке времени от старта до достижения апогея 230 км (189 с). За это время успела отработать первая ступень (106 с) и большая часть второй ступени.

Полученные графики отражают ожидаемую динамику её полета:

- График скорости демонстрирует плавный рост в течение всей работы двигателей. С течением времени прирост скорости увеличивается, кроме момента отделения первой ступени, так как масса ракеты становится меньше, а тяга не уменьшается.
- График высоты показывает ее постоянное увеличение, а также ускорение набора высоты на первых ≈ 125 секундах полета. По мере разворота ракеты в горизонтальное положение темп увеличения высоты уменьшается.

Моделирование подтверждает, что основные параметры ракеты (тяга, удельный импульс и масса) согласуются с ожидаемой траекторией движения.

2. Абсолютная и относительная погрешности

Абсолютная погрешность

Абсолютная погрешность рассчитывается как:

$$\Delta_{\text{абс}} = |x_{\text{моделирование}} - x_{\text{теория}}|$$

Относительная погрешность

Относительная погрешность рассчитывается как:

$$\Delta_{\text{отн}} = \frac{\Delta_{\text{абс}}}{x_{\text{моделирование}}} \cdot 100\%$$

Погрешность в вычислениях скорости:

$$\Delta_{\text{абс}} = |1749 - 1922| = 173 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$$

$$\Delta_{\text{отн}} = \frac{173}{1749} \cdot 100\% \approx 9,9\%$$

Погрешность в вычислениях высоты:

$$\Delta_{\text{абс}} = |108462 - 103389| = 5073 \text{ (м)}$$

$$\Delta_{\text{отн}} = \frac{5073}{108462} \cdot 100\% \approx 4,7\%$$