

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИНФОРМАТИКИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

**«КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ  
РЕМАСШТАБИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ  
СЦЕН ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕССОВ  
ПЕРЕНОСА»**

Выполнил студент  
435 группы  
Дейнека Даниил Андреевич

---

подпись студента

Научный руководитель  
к.т.н., доцент Грачёв Е.А.

---

подпись научного руководителя

Допущена к защите <дата>

Зав.кафедрой \_\_\_\_\_  
подпись зав.кафедрой

Москва  
2018 г.

# 1. Введение

В некоторых прикладных областях, таких как геологическая разведка и нефтедобыча, существует проблема предсказания некоторого свойства объекта в пространстве по известной точной информации о его локальной структуре — карте признака. Одной из подзадач данной проблемы является ремасштабирование карт признаков.

При переходе на большие масштабы часто возникает ситуация, когда необходимо сопоставлять несколько карт признаков, чтобы получить одну карту объекта большего размера. Одним из подходов для получения карт является их генерация с помощью нейросетевых методов — в этом случае различные карты признаков получаются независимо друг от друга, из-за чего при их стыковке можно наблюдать резкую границу между ними. В связи с этим данная работа ставит перед собой задачу склейки карт признаков.

# 2. Математическая постановка задачи

Даны две  $n$ -мерных карт признака, которые пересекаются между собой. Каждую карту можно рассматривать как функцию  $n$  переменных, заданной на некоторой области определения. Введём следующие обозначения (см. Рис. 1):

$S$  — замкнутое подмножество  $\mathbb{R}^n$ , область определения одной карты;

$\Omega$  — замкнутое подмножество  $S$ , область пересечения данных карт;

$\delta\Omega$  — граница множества  $\Omega$ ;

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  — скалярная неизвестная функция, определённая на  $\Omega$ ;

$f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  — скалярная известная функция, определённая на  $S$ ;

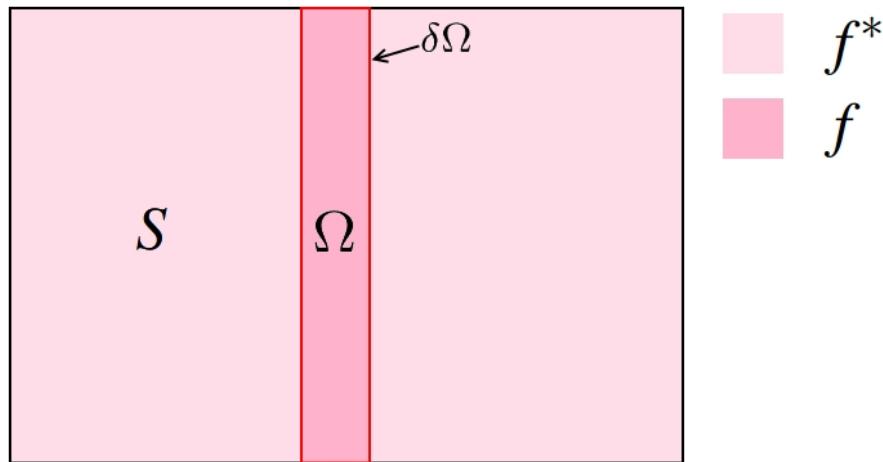


Рис. 1: Интерполяция  $f$  известной функции  $f^*$  в области  $\Omega$ .

Одной из интерполяций функции  $f$  в области  $\Omega$  является мембранный интерполя-

ция, определённая как решение задачи минимизации [1]

$$\min_f \int \int_{\Omega} |\nabla f - \mathbf{v}|^2 \quad (1)$$

с учётом граничных условий Дирихле

$$f|_{\delta\Omega} = f_{\delta\Omega}^*, \quad (2)$$

где  $\mathbf{v}$  — так называемый вектор *направлений*, который в данном случае выбирается равным градиенту одного из изображений [2]

Поставленная задача является  $n$ -мерной вариационной задачей первого порядка. Рассмотрим обобщённый случай такой задачи:

$$\begin{cases} J(f) = \int_{\Omega} L(x_1, \dots, x_n, f, f_{x_1}, \dots, f_{x_n}) dx_1 \dots dx_n \\ f = g, (x_1, \dots, x_n) \in \delta\Omega \\ \tilde{f} = \arg \min_f J(f), \end{cases} \quad (3)$$

где  $f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  и  $g$  — некоторая непрерывная функция.

Согласно [3], если функция  $f$  является решением многомерной обобщённой вариационной задачи, то она также удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа на  $\Omega$ :

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_{f_{x_i}}}{\partial x_i} = 0, \quad (4)$$

где  $L_{f_{x_i}} = \frac{\partial L}{\partial f_{x_i}}$ .

При  $n = 2$  соответственно получаем:

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{\partial L_{f_x}}{\partial x} - \frac{\partial L_{f_y}}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Вернёмся к исходной задаче. Подынтегральная функция

$$L = |\nabla f - \mathbf{v}|^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} - v_{x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} - v_{x_2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} - v_{x_n} \right)^2 = \quad (6)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} - v_{x_i} \right)^2 \quad (7)$$

Вычислим соответствующие частные производные:

$$L_f = \frac{\partial L}{\partial f} = 0 \quad (8)$$

$$L_{f_{x_i}} = \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)} = 2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} - v_{x_i} \right) \quad (9)$$

Тогда уравнение Эйлера-Лагранжа (5) примет вид:

$$-2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} - v_{x_1} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} - v_{x_2} \right) - \dots - 2 \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} - v_{x_n} \right) = 0 \quad (10)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) f - \left( \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v_{x_n}}{\partial x_n} \right) = 0 \quad (11)$$

Вводя оператор Лапласа

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

и оператор дивергенции

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_{x_i}}{\partial x_i}$$

и учитывая полученное соотношение, исходную задачу (1)-(2) можно привести к виду:

$$\Delta f = \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (12)$$

$$f|_{\delta\Omega} = f_{\delta\Omega}^* \quad (13)$$

Задача (12)-(13) является уравнением Пуассона с граничными условиями Дирихле.

### 3. Приближение методом конечных разностей

Вариационная задача (1)-(2) и соответствующее ей уравнение Пуассона (12) с граничными условиями Дирихле (13) могут быть дискретизированы и решены методом конечных разностей.

Пусть  $S, \Omega$  — множества, состоящие из конечного числа точек, определённые на бесконечной дискретной сетке. Отметим, что  $S$  может включать все точки карты признака или только часть их них. Для каждого пикселя  $p \in S$  определим  $2n$  направлений минимизации. Обозначим через  $N_p$  множество ближайших соседей по этим направлениям из множества  $S$ , число которых ограничено  $2n$ , а также через  $\langle p, q \rangle$  обозначим пару точек, где  $q \in N_p$ . Граница  $\Omega$  есть  $\delta\Omega = \{p \in S \setminus \Omega : N_p \cap \Omega \neq \emptyset\}$ .  $f_p$  — значение  $f$  в точке  $p$ . Тогда задача сводится к расчёту набора интенсивностей  $f|_{\Omega} = \{f_p, p \in \Omega\}$ .

Для дискретизации задачи (1)-(2) воспользуемся односторонней аппроксимацией градиента по каждому из направлений минимизации. После подстановки получаем:

$$\begin{cases} \min_{f|_{\Omega}} \sum_{\langle p, q \rangle \cap \Omega \neq \emptyset} (f_p - f_q - v_{pq})^2 \\ f_p = f_q^*, \forall p \in \delta\Omega, \end{cases} \quad (14)$$

где  $v_{pq}$  — проекция  $\mathbf{v} \left( \frac{p+q}{2} \right)$  на направление  $(p, q)$ .

Дискретизация задачи (12) использует аппроксимацию оператора Лапласа по схеме "крест":

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x+h, y) - 2f(x, y) + f(x-h, y)}{h^2} = \Lambda_x f \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f(x, y+h) - 2f(x, y) + f(x, y-h)}{h^2} = \Lambda_y f, \quad (16)$$

где шаг сетки  $h = 1$  по обоим направлениям, т.к. он соответствует расстоянию между пикселями.  $\Delta = \Lambda_x + \Lambda_y$ .

## 4. Склейка двумерных карт признаков

Результат работы алгоритма для двумерных карт признаков представлен на Рис. 2a-2b.

На Рис.2a изображены две карты признаков, расположенные рядом друг с другом с небольшим наложением одной поверх второй. Область пересечения обозначена красным цветом. Границу раздела двух изображений можно видеть невооружённым глазом.

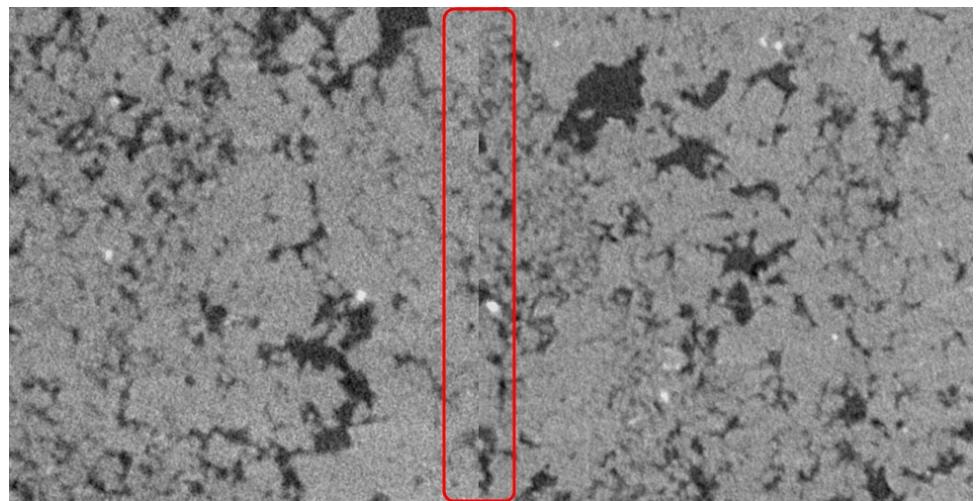
На Рис.2b изображены те же самые карты признаков, но в области их пересечения был применён алгоритм сглаживания. Как можно видеть, граница раздела двух изображений была полностью стёрта. В результате мы имеем одну карту признака области большего размера, полученную из двух карт областей меньшего размера.

## 5. Склейка трёхмерных карт признаков

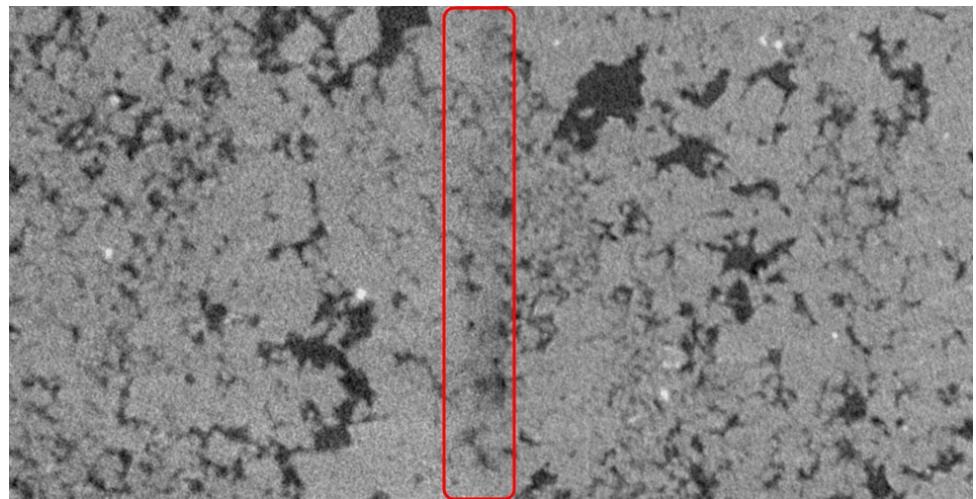
Предложенный алгоритм также может быть обобщён на трёхмерные карты признаков. Формулы (1)-(13) справедливы и в том случае, когда области  $S$  и  $\Omega$  являются подмножествами  $R^3$ , а функции  $f$  и  $f^*$  определены на соответствующих трёхмерных областях. Отличия от соответствующей двумерной задачи возникают лишь на этапе её дискретизации и решении численными методами, учёт которых не представляет из себя существенной трудности.

На Рис.3a-3b представлен результат работы алгоритма для трёхмерных карт признаков.

На рисунках изображены три различных среза карт признаков, так что видна внутренняя часть областей. Как мы видим на Рис.3a, в области пересечения можно наблюдать чётко выделенную границу раздела двух карт признаков. Однако в результате сглаживания (Рис.3b) граница раздела исчезает и становится незаметной, причём как на поверхности, так и внутри карты. Таким образом, в результате мы имеем одну карту признака области большего размера, полученную из двух карт трёхмерных областей меньшего размера.

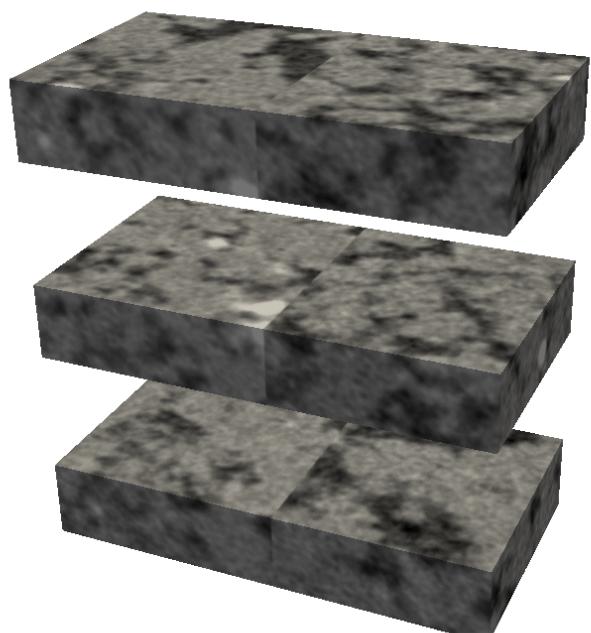


(a)



(b)

Рис. 2: Изображения, полученные путём а) — наложения без сглаживания; б) — наложения со сглаживанием.



(a)



(b)

Рис. 3: Срезы трёхмерных карт признаков, полученные путём а) — наложения без сглаживания; б) — наложения со сглаживанием.

## **6. Заключение**

В результате данной работы был разработан инструмент, позволяющий сопоставлять несколько карт признаков (двух- или трёхмерных), чтобы получить одну карту объекта большего размера.

В дальнейшем, имея данный инструмент, можно будет приступить непосредственно к решению проблемы ремасштабирования карт признаков.

## **Список литературы**

- [1] P. Perez, M. Gangnet, and A. Blake, Poisson image editing, ACM Transactions on Graphics, 22 (2003), p. 313.
- [2] J. Matías Di Martino, Gabriele Facciolo, and Enric Meinhardt-Llopis, Poisson Image Editing, Image Processing On Line, 6 (2016), pp. 300–325.
- [3] E. Z. Nonlinear functional analysis and its applications: Variational methods and optimization. — Springer, 1985. — P. 662.