Проект №3: уравнения с частными производными

Бобровникова Василиса, ФКИ, 202.

Вариант 6.

1. Постановка задачи

Дана краевая задача:

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} + u_x - (2t - x^2)u, \\ u(x,0) = x, & \text{- начальное условие} \\ u(0,t) = 0, & \text{- однородное условие Дирихле в левом конце} \\ u_x(1,t) = 1. & \text{- неоднородное условие Неймана в правом} \end{cases}$$

Нужно решить ее, используя неявную схему.

2. Неявная схема

Запишем разностное уравнение

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = k\,\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h} - (2t_i - x_i^2)\,u_i^{n+1}$$

Обозначим $2t_i - x_i^2$ за b_i, $\frac{\Delta t k}{h^2}$ за λ. Выразим u_i^n:

$$u_i^n = u_i^{n+1} - \lambda u_{i+1}^{n+1} + 2\lambda u_i^{n+1} - \lambda u_{i-1}^{n+1} - \frac{\Delta t}{h} u_{i+1}^{n+1} + \frac{\Delta t}{h} u_i^{n+1} + \Delta t b u_i^{n+1}$$

Приведем подобные слагаемые:

$$u_i^n = \underbrace{(-\lambda)}_{\alpha} \cdot u_{i-1}^{n+1} + \underbrace{\left(1 + 2\lambda + \frac{\Delta t}{h} + \Delta t b_i\right)}_{\beta_i} \cdot u_i^{n+1} + \underbrace{\left(-\lambda - \frac{\Delta t}{h}\right)}_{\gamma} \cdot u_{i+1}^{n+1}$$

Переход на следующий шаг по времени имеет вид:

$$B u^{n+1} = u^n$$

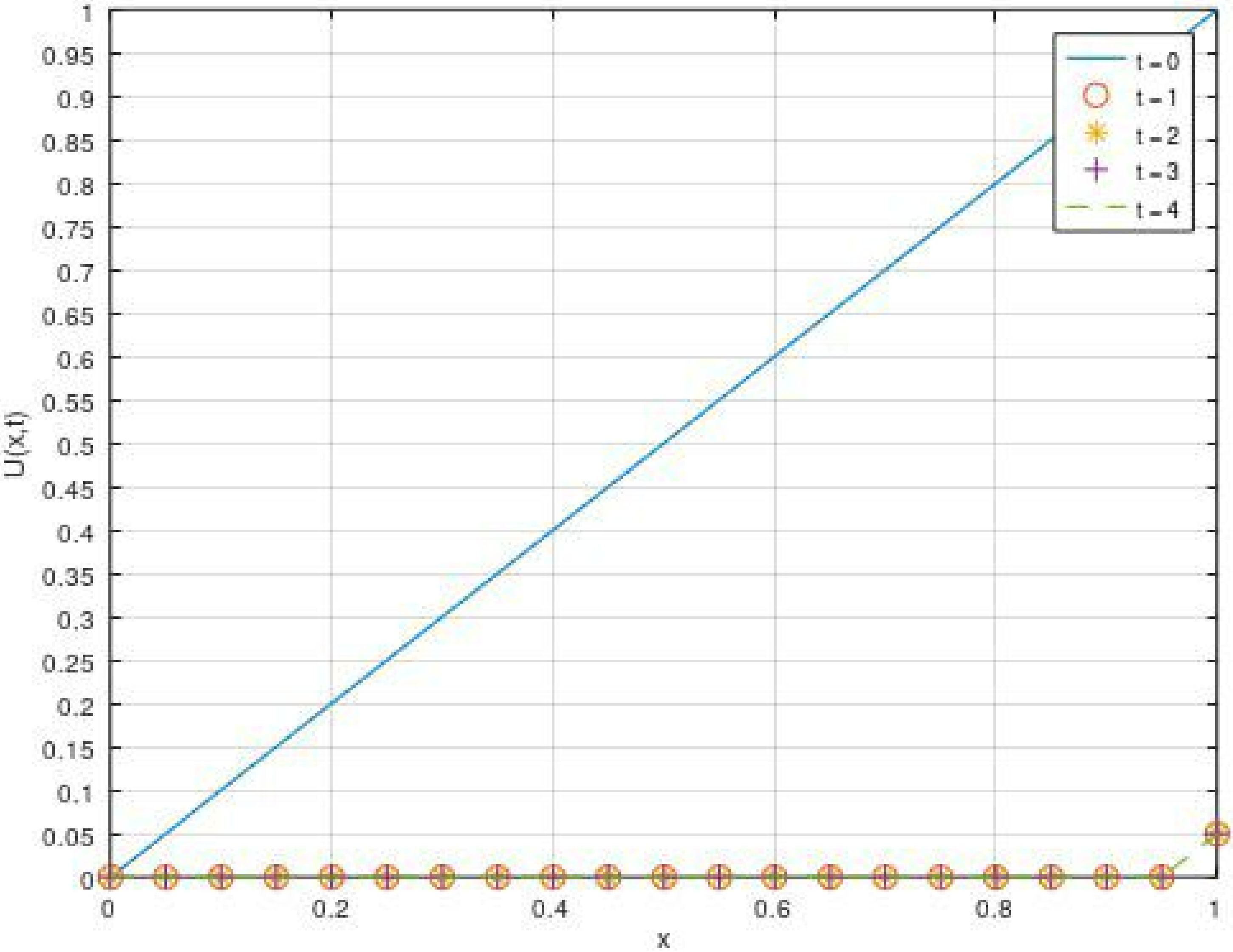
Матрица B трехдиагональна

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma & & 0 \\ \alpha & \beta_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ 0 & & \alpha & \beta_n \end{pmatrix}$$

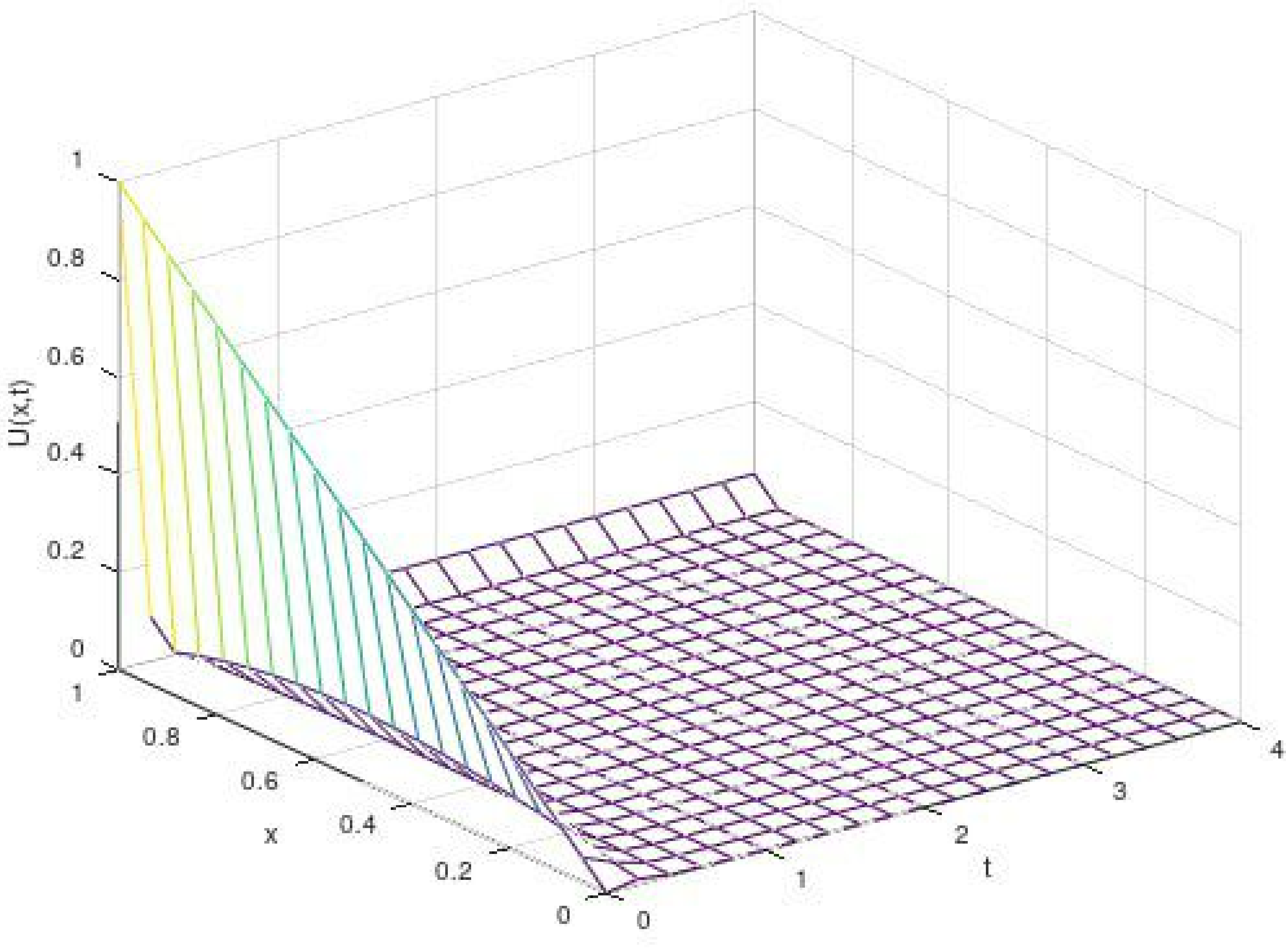
Тогда $\boxed{u^n = B^{-1} u^{n+1}}$

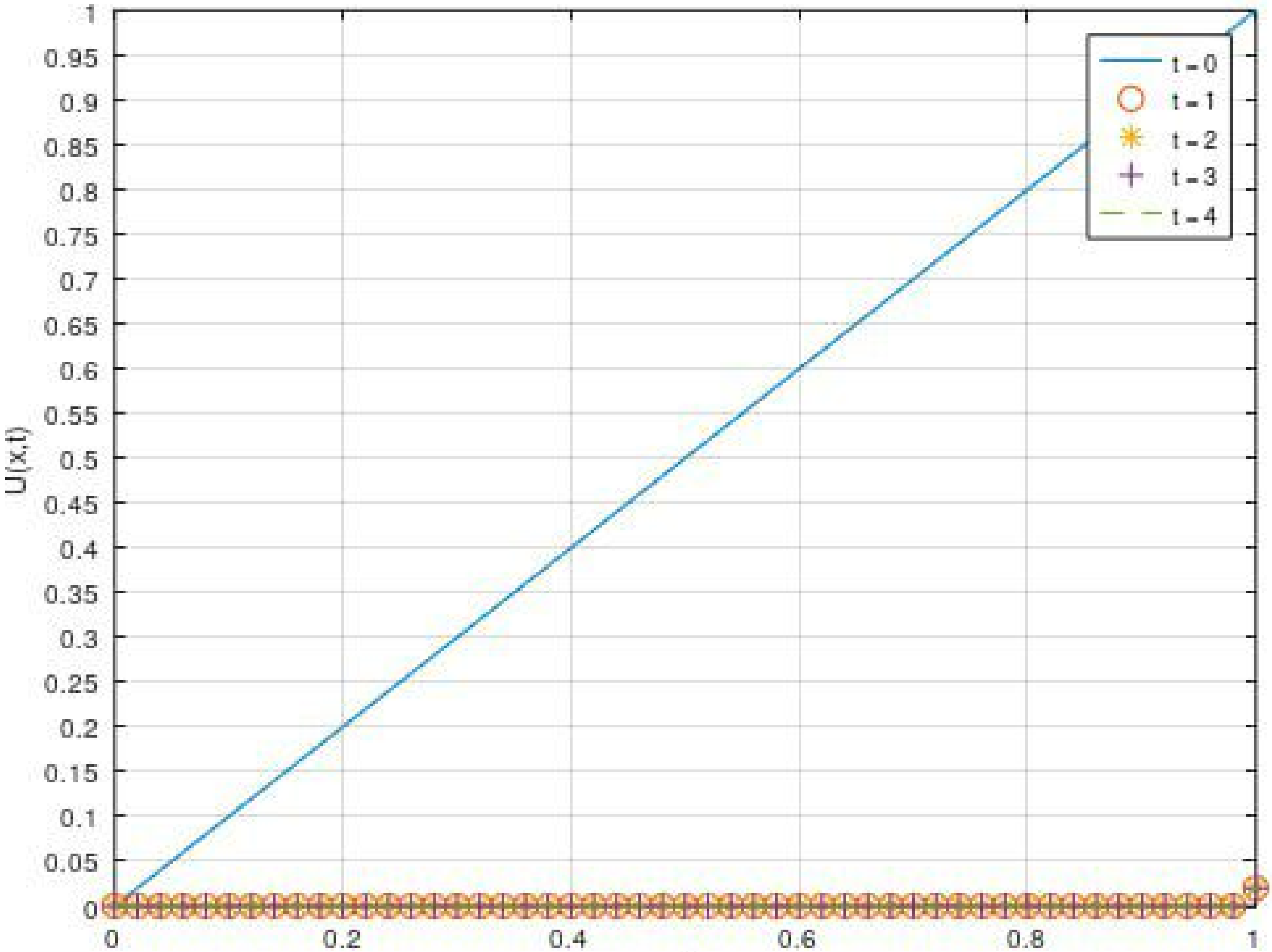
3. Графики решение

При $N = 20$ и $N = 50$ получили соответственно:

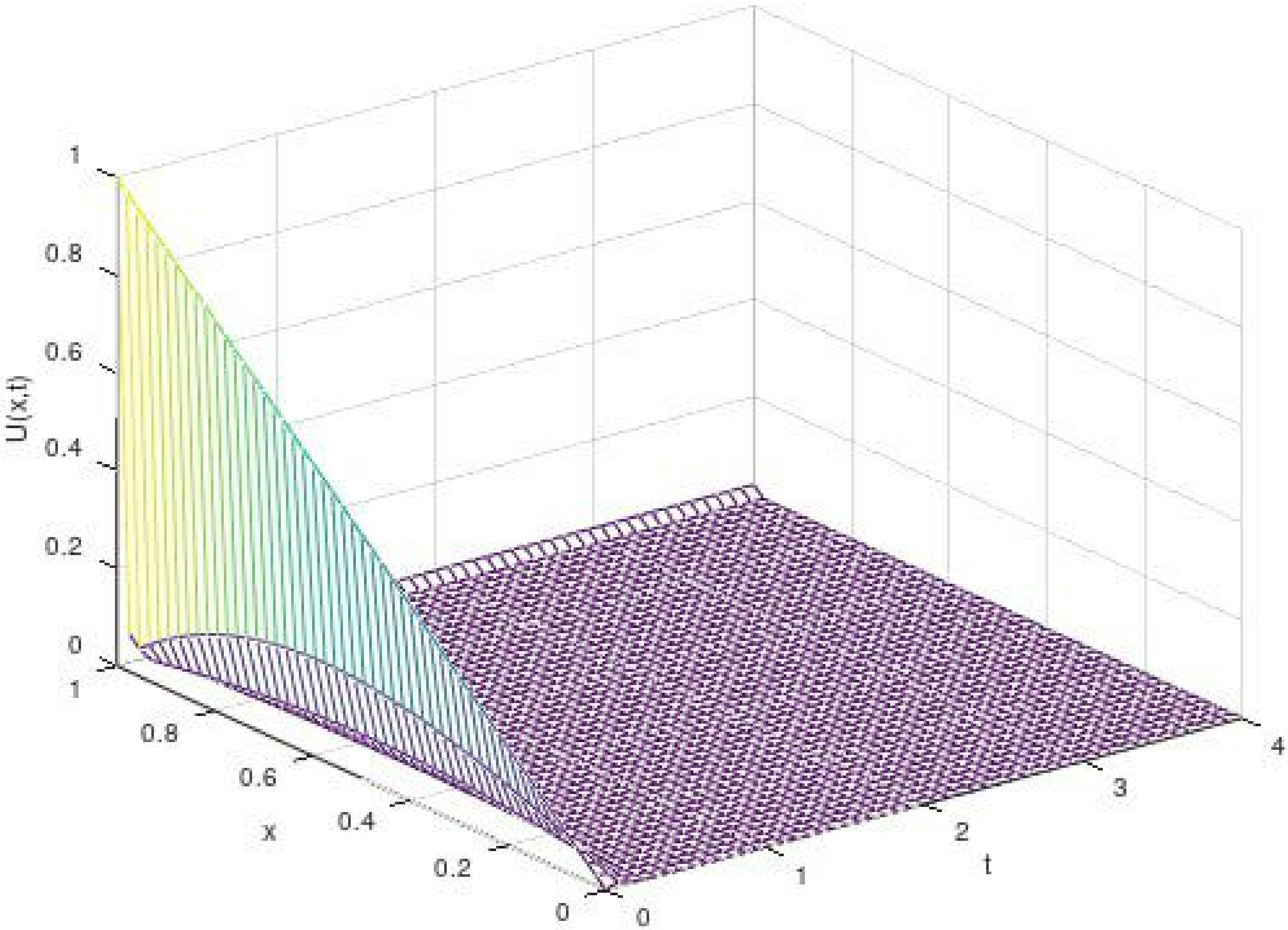


U(x,t)
x
t = 0
t = 1
t = 2
t = 3
t = 4


U(x,t)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
0.8
0.6
x
0.4
0.2
0
0
1
2
t
3
4



t = 0
t = 1
t = 2
t = 3
t = 4
U(x,t)
x
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
0.55
0.6
0.65
0.7
0.75
0.8
0.85
0.9
0.95
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


U(x,t)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
x
0
1
2
3
4
t

• При $t=0$ получили график $u(x,0)=x \Rightarrow$ начальное условие выполнено.

• При $x=0$ $u(0,t)=0$

С учетом дискретизации второе краевое условие примет вид: $(u^n_{N_x+1} - u^n_{N_x})/h = 1 \Rightarrow u(1,t) = u(1-h,t)+h$, что тоже выполнено на графиках.

Таким образом, тепло, полученное в начальный момент времени, растекается всё более равномерно по всей длине и постепенно сходит на нет, что видно на графиках при $t = 1, 2, 3, 4$. Основной вклад теперь вносит краевое условие.