Проект по численным методам №2

Бобровникова Василиса

ФКИ, 202

1) Состояние системы в каждый момент времени задается вектором $\vec{u} = (x\ y\ \dot{x}\ \dot{y})^T$

В качестве начальных значений были взяты следующие пять:

1. $(1\ 0\ 0\ \pi)^T$
2. $(1\ 0\ 0\ 2.5)^T$
3. $(1\ 0\ 0\ 4)^T$
4. $(1.7\ 0\ 0\ 1.7)^T$
5. $(3\ 0\ 0\ 1.8)^T$

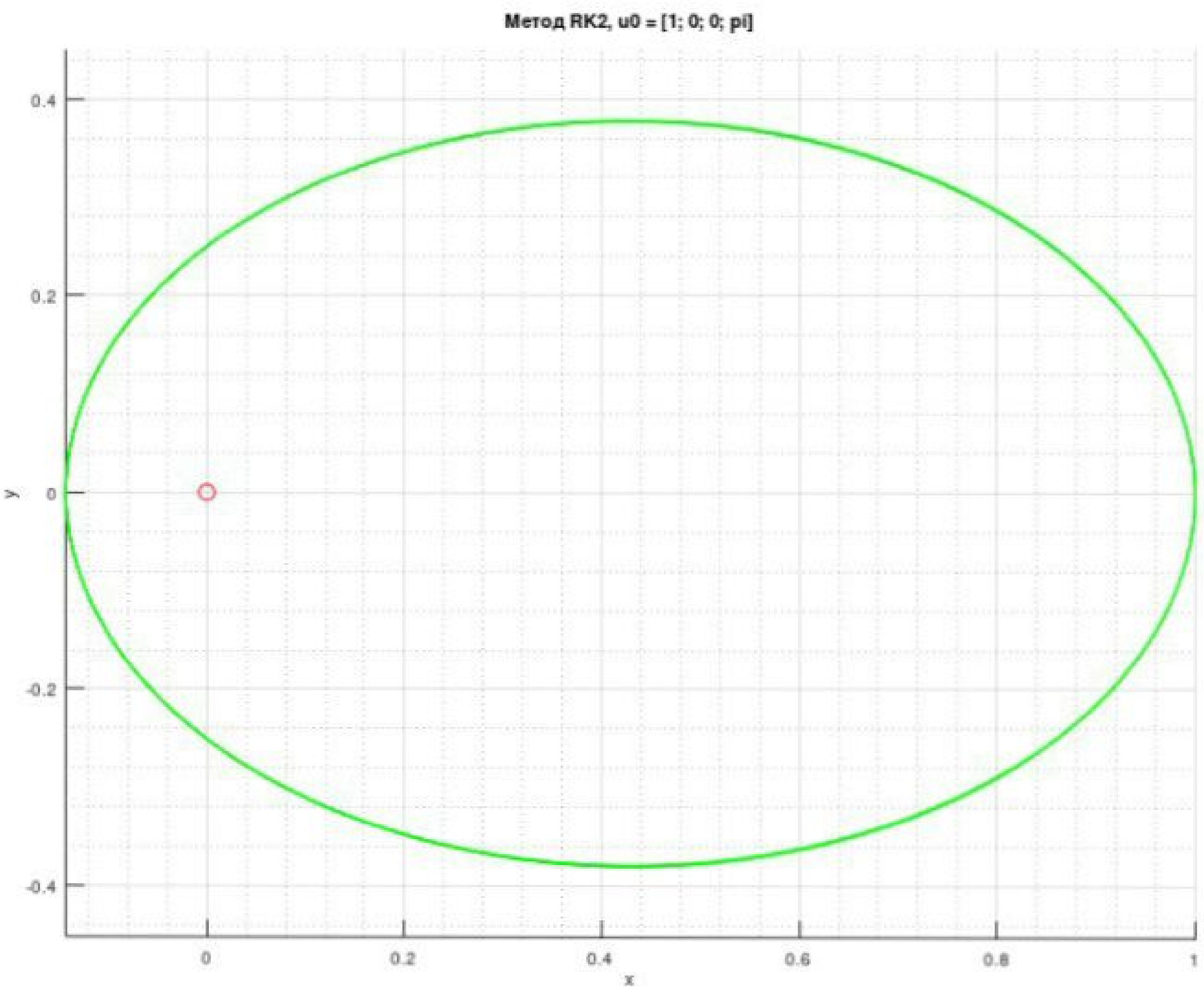
Для моделирования Кеплеровой эллиптической орбиты решаем уравнения второго закона Ньютона:

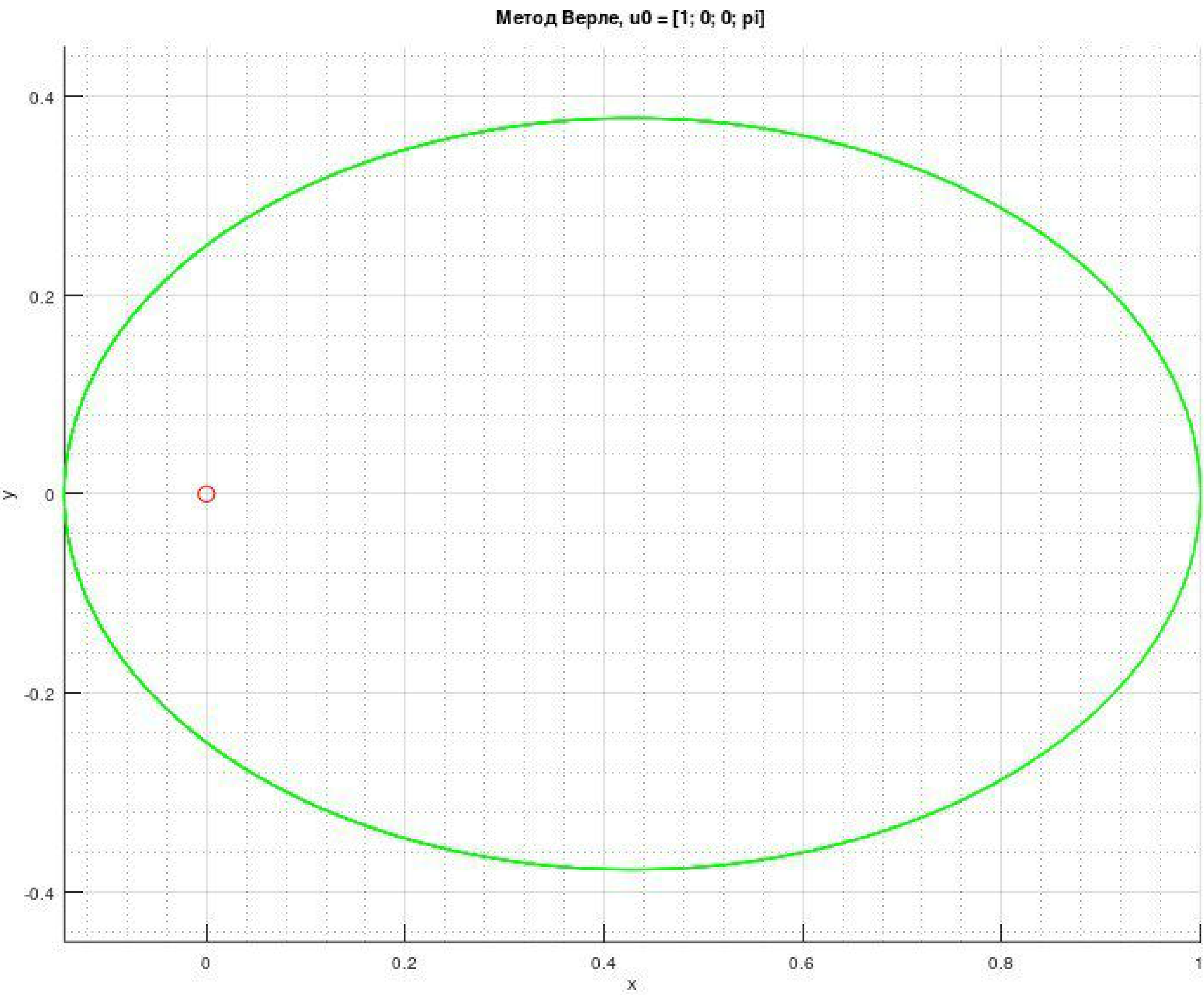
$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{-4\pi^2 x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \\ \ddot{y} = \dfrac{-4\pi^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

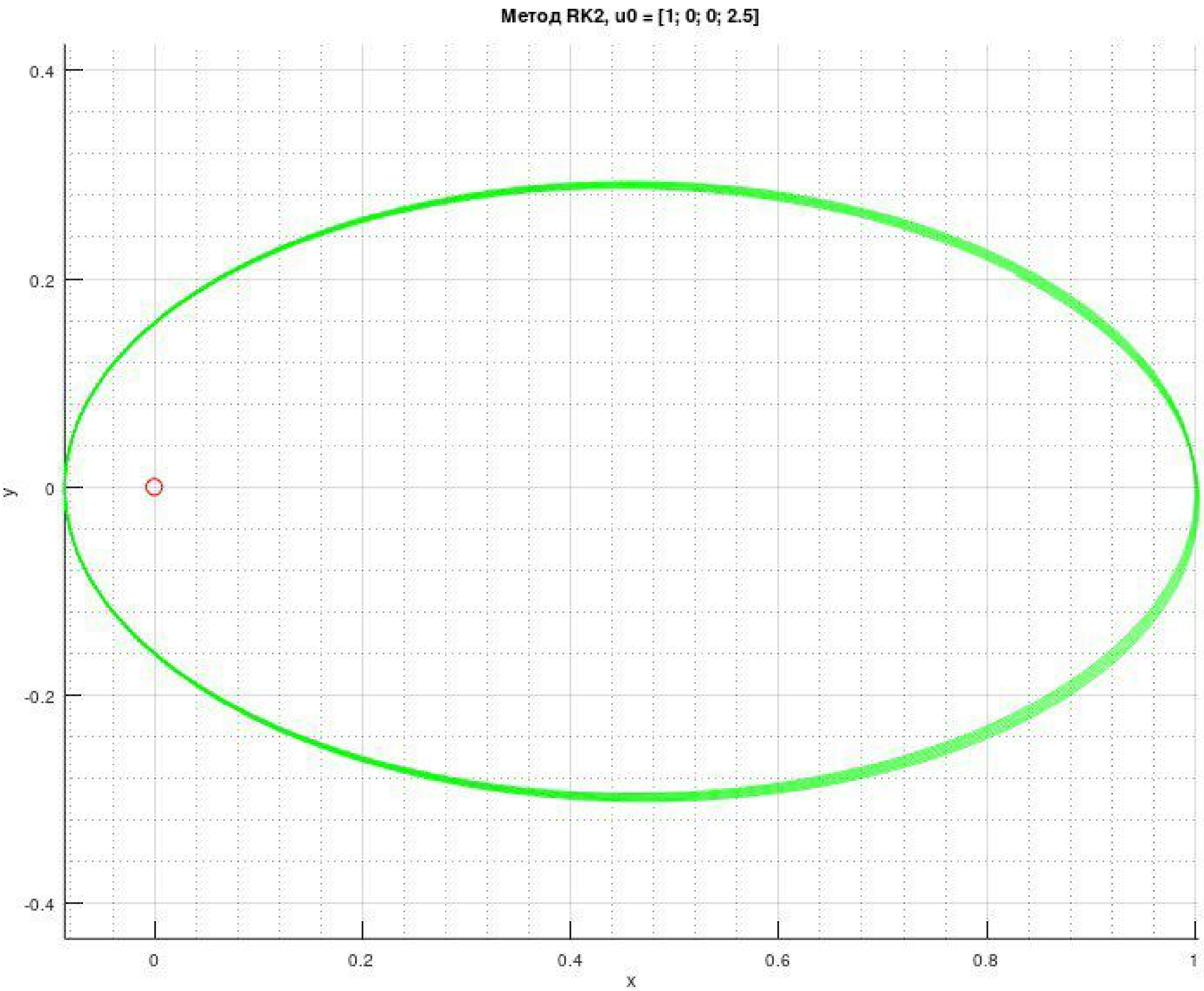
Она равносильна системе первого порядка:

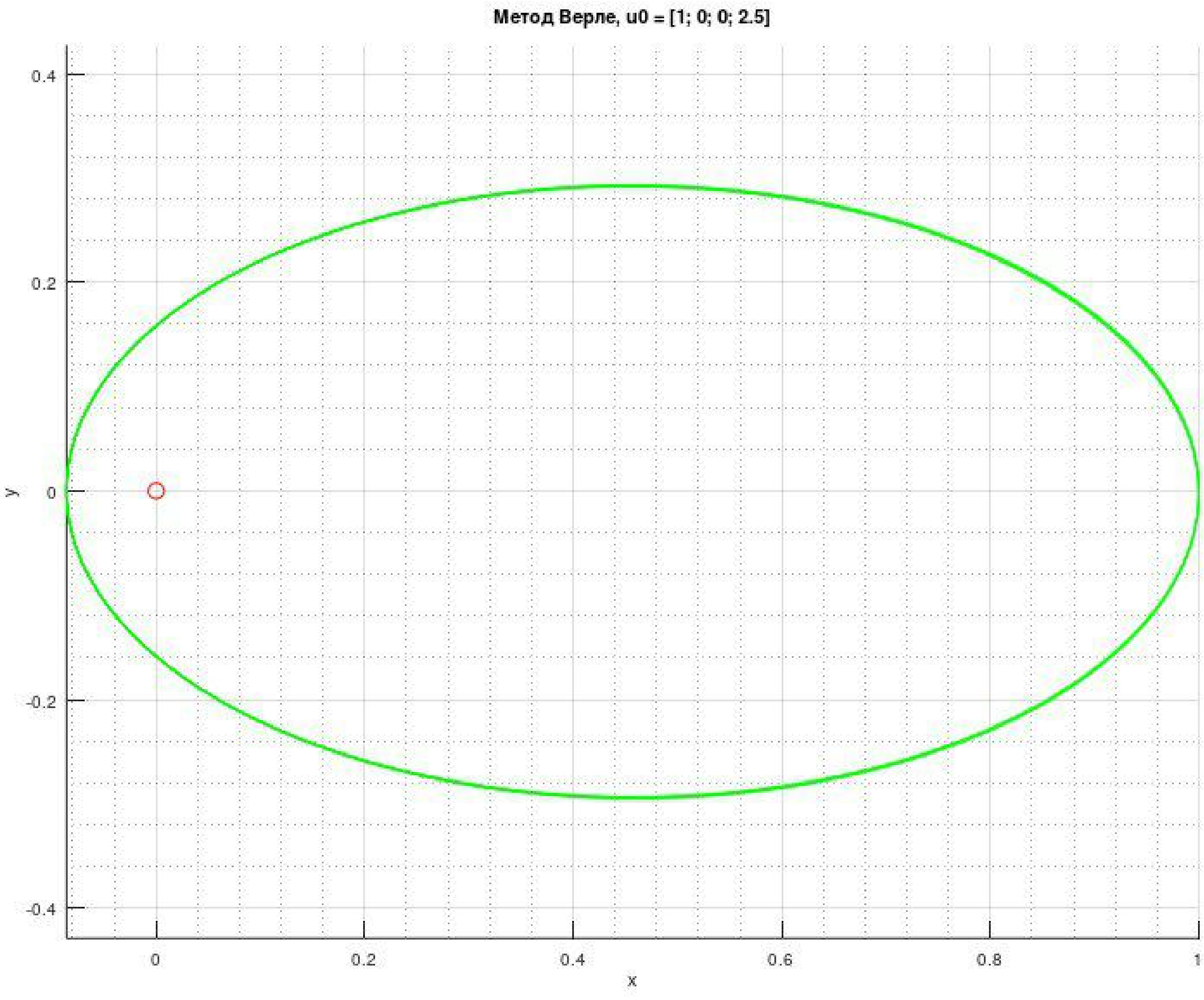
$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, \\ \dot{y} = v_y, \\ \dot{v}_x = \dfrac{-\pi^2 x 4}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \\ \dot{v}_y = \dfrac{-\pi^2 y 4}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \end{cases}$$

Численное решение для значений временного шага $h = 0.0002$ проводилось методами RK2 и Верле со стартом методом Эйлера. Графики полученных орбит:

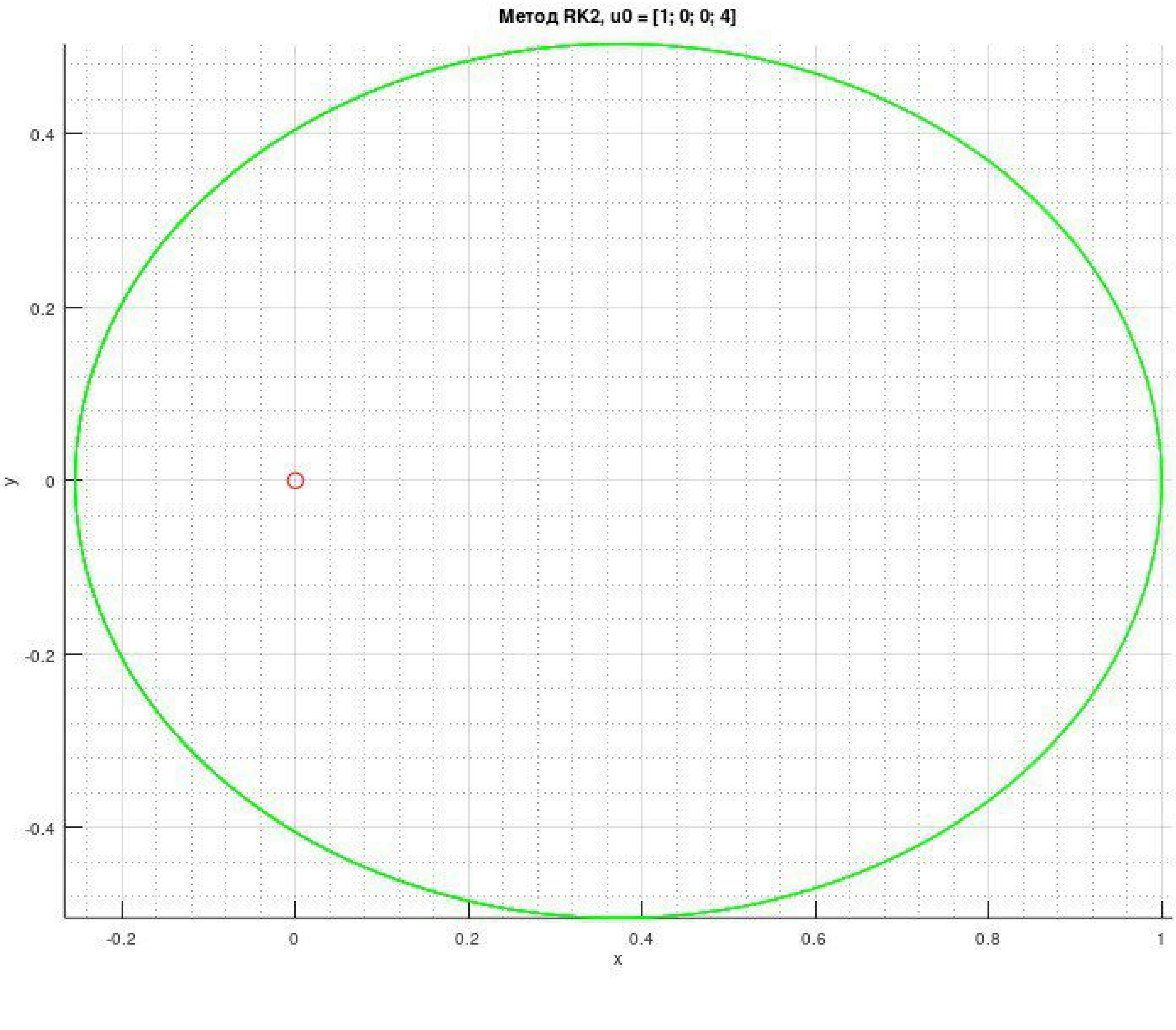

Метод RK2, u0 = [1; 0; 0; pi]
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x

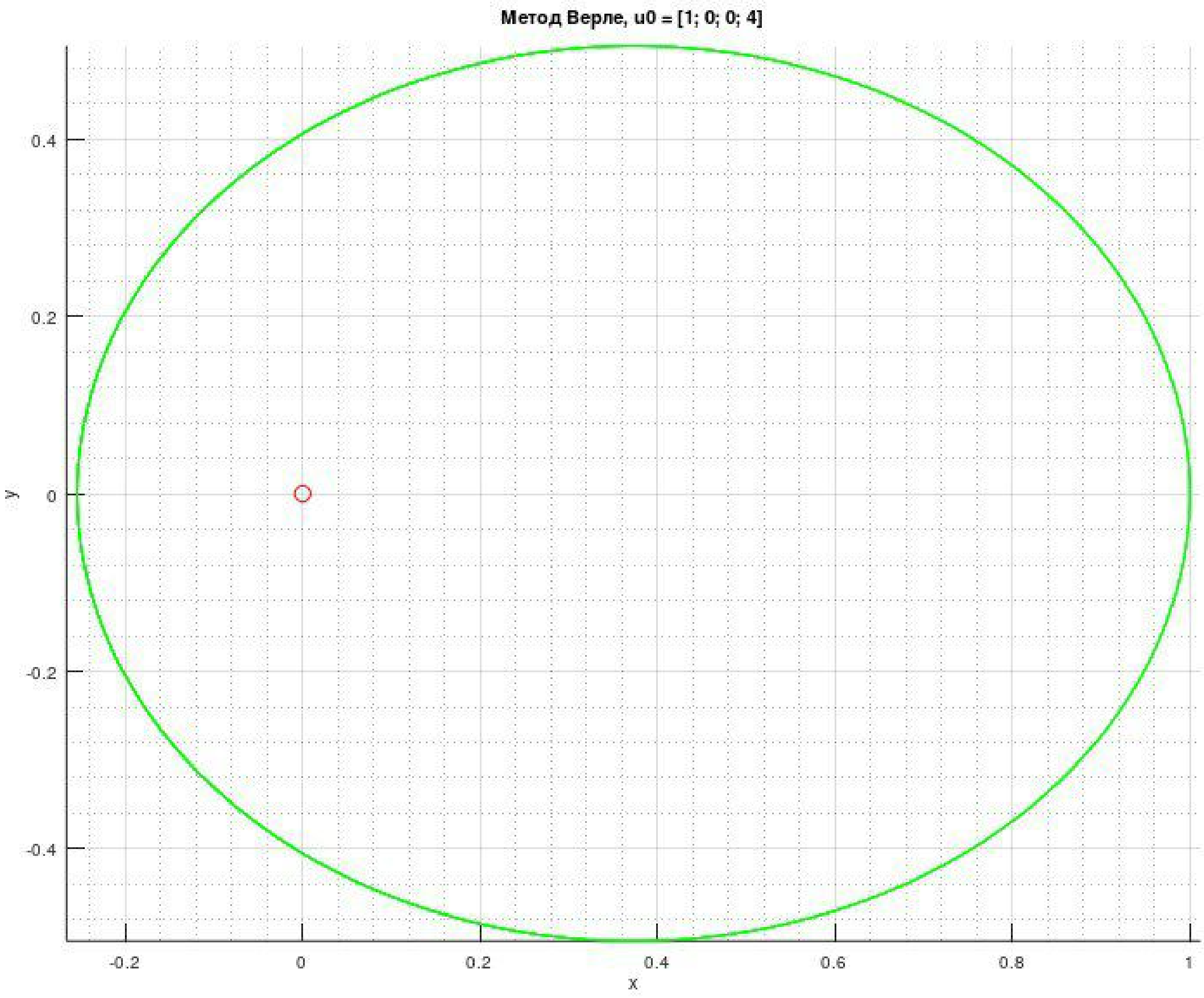

Метод Верле, u0 = [1; 0; 0; pi]
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x


Метод RK2, u0 = [1; 0; 0; 2.5]
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x

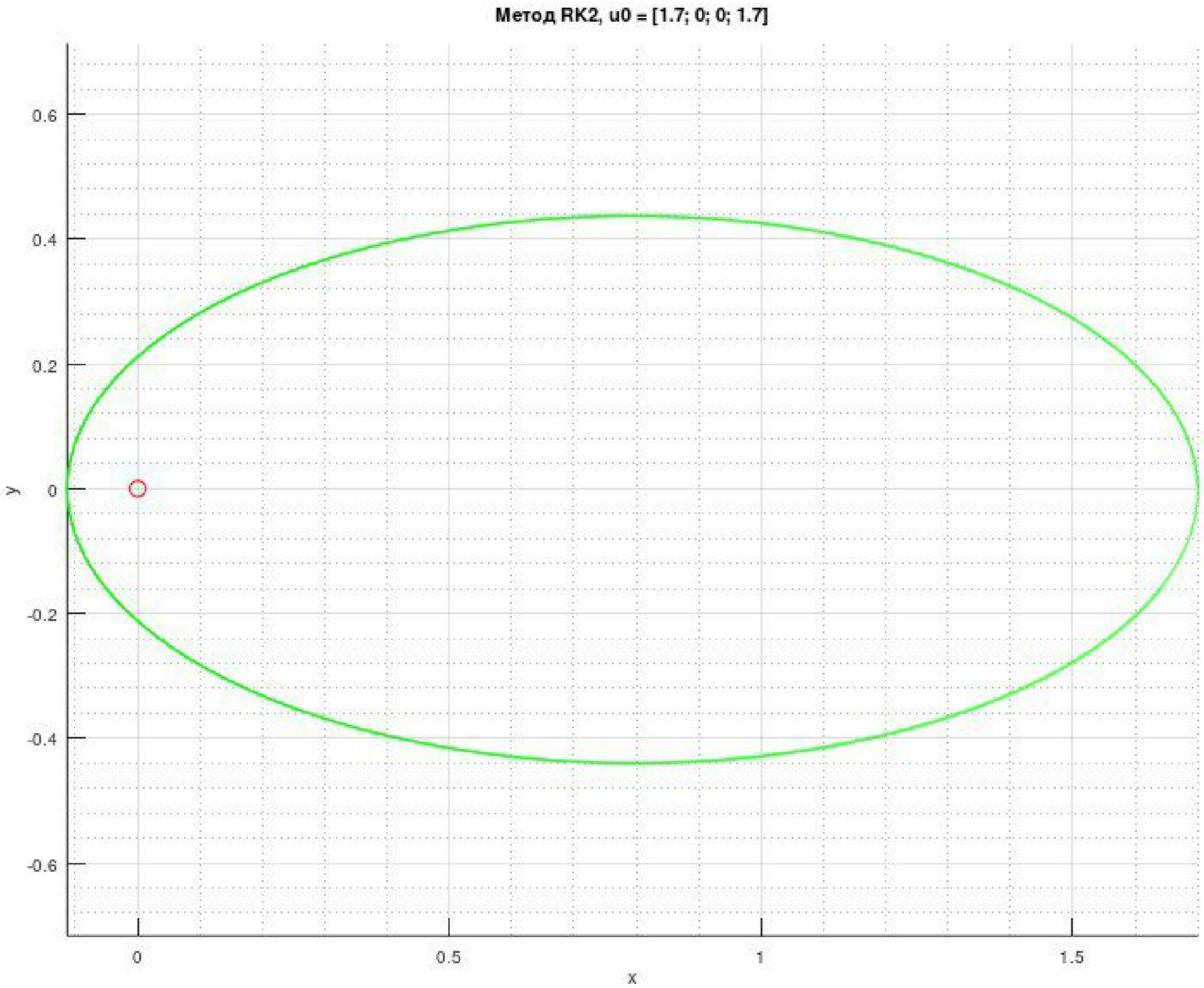


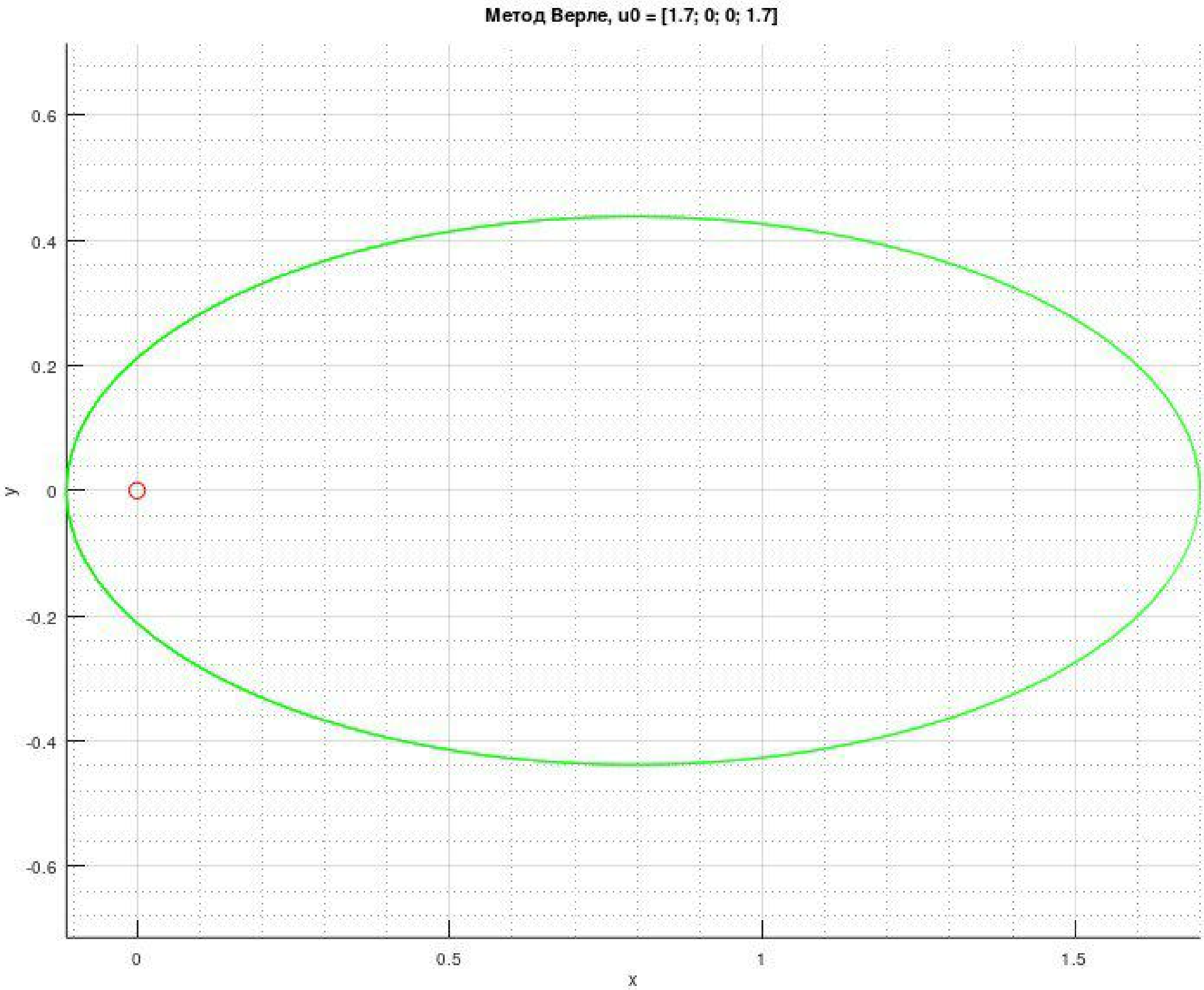
Метод Верле, u0 = [1; 0; 0; 2.5]
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
y
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x

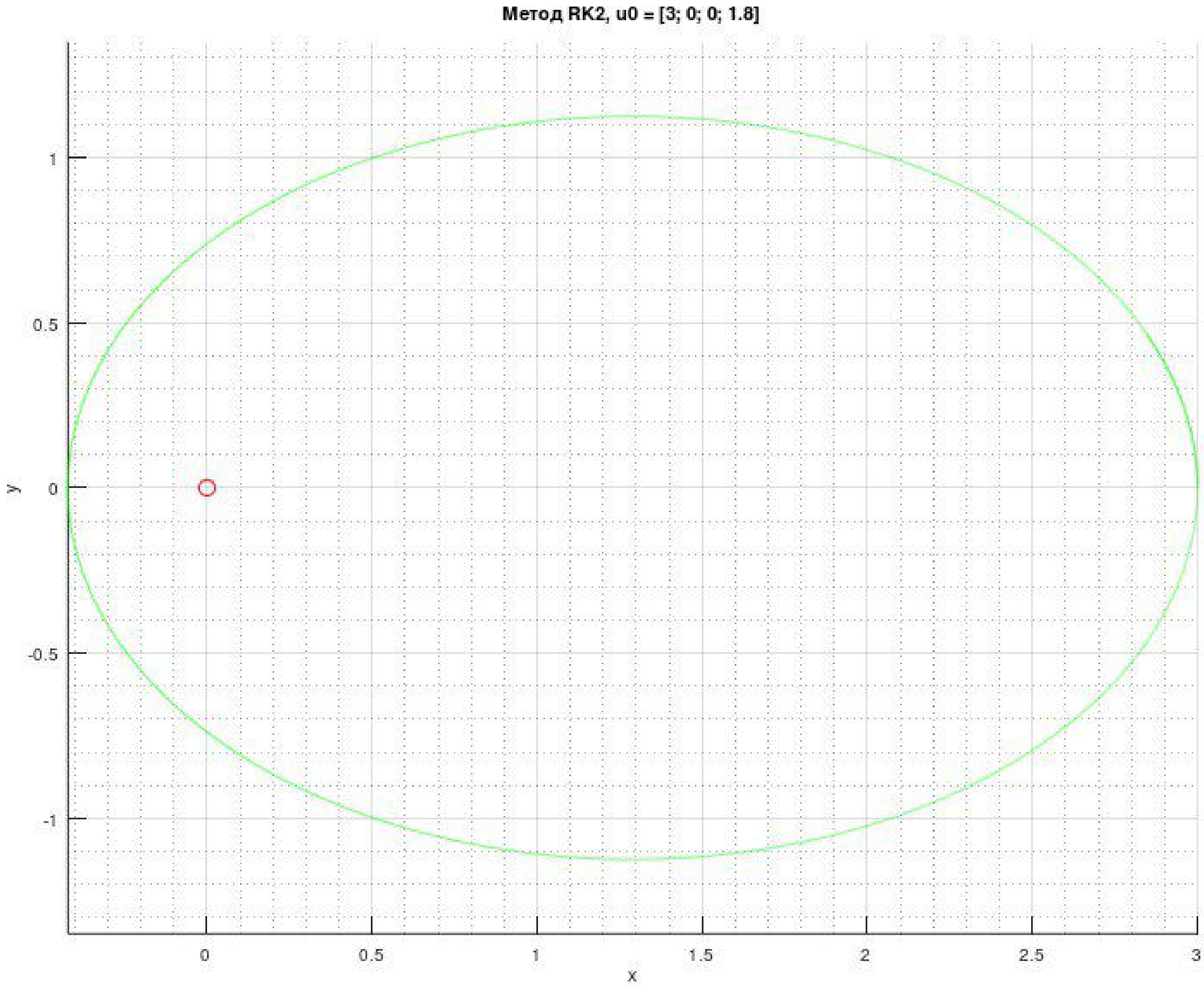

Метод RK2, u0 = [1; 0; 0; 4]
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
y
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x



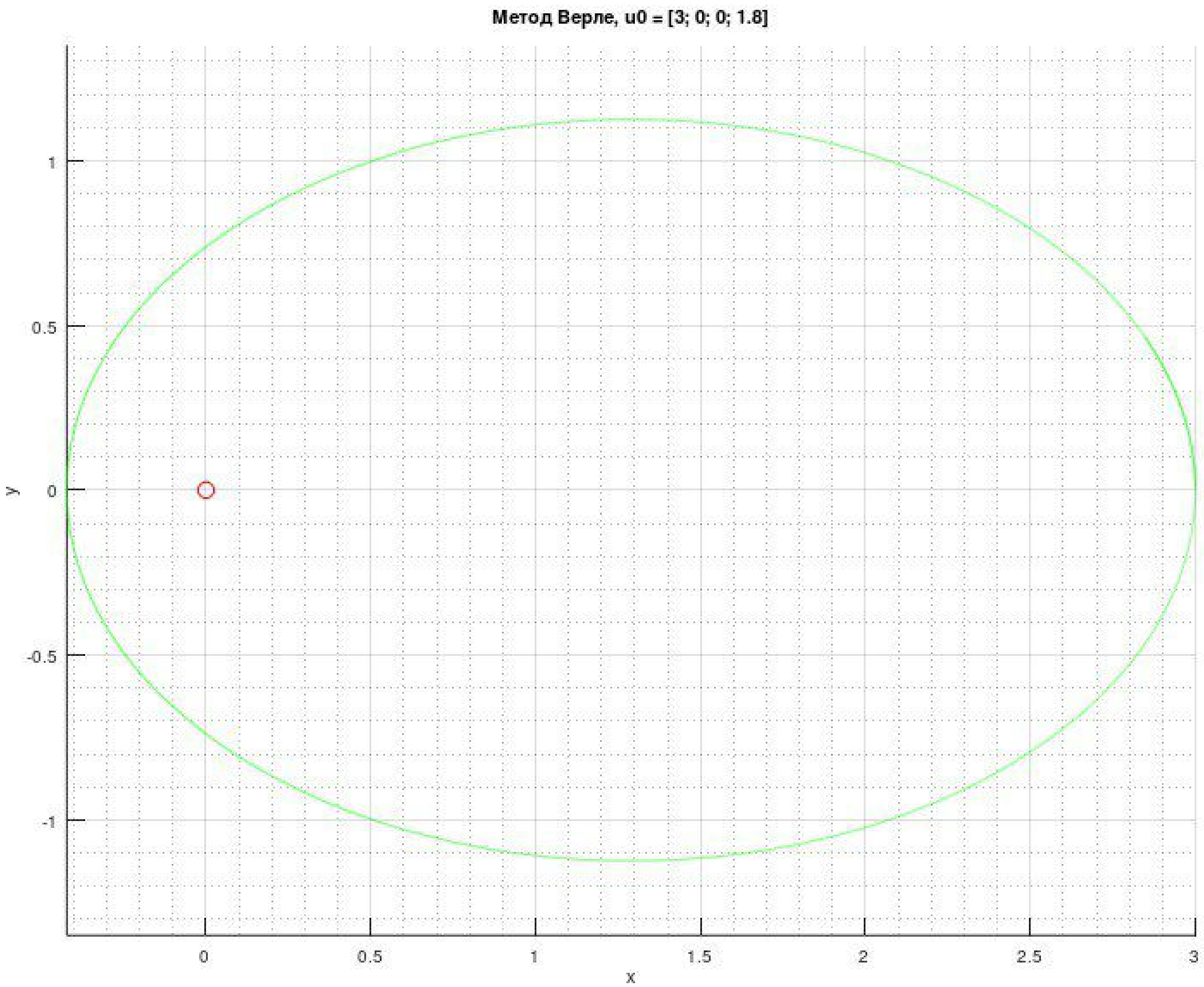
Метод Верле, u0 = [1; 0; 0; 4]
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
y
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x


Метод RK2, u0 = [1.7; 0; 0; 1.7]
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
y
0
0.5
1
1.5
x


Метод Верле, u0 = [1.7; 0; 0; 1.7]
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
y
0
0.5
1
1.5
x

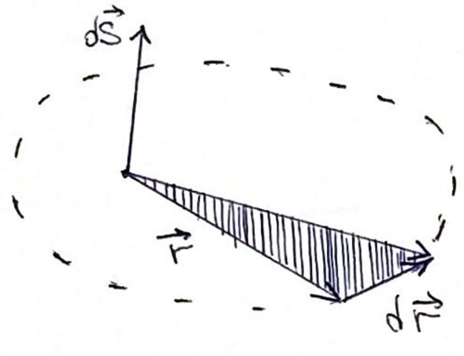


Метод RK2, u0 = [3; 0; 0; 1.8]
1
0.5
0
-0.5
-1
y
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
x


Метод Верле, u0 = [3; 0; 0; 1.8]
1
0.5
0
-0.5
-1
y
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
x

На графике „Метод RK2, $u_0 = (1\ 0\ 0\ 2.5)^T$" видно смещение орбиты с каждым периодом, что говорит о меньшей устойчивости метода RK2 в сравнении с Верле.

2) Проверим второй закон Кеплера. Он гласит: „За равные промежутки времени радиус-вектор планеты очерчивает равные площади".



Секторная площадь:

$$d\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{r}, d\vec{r}] = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{v}\,dt]$$

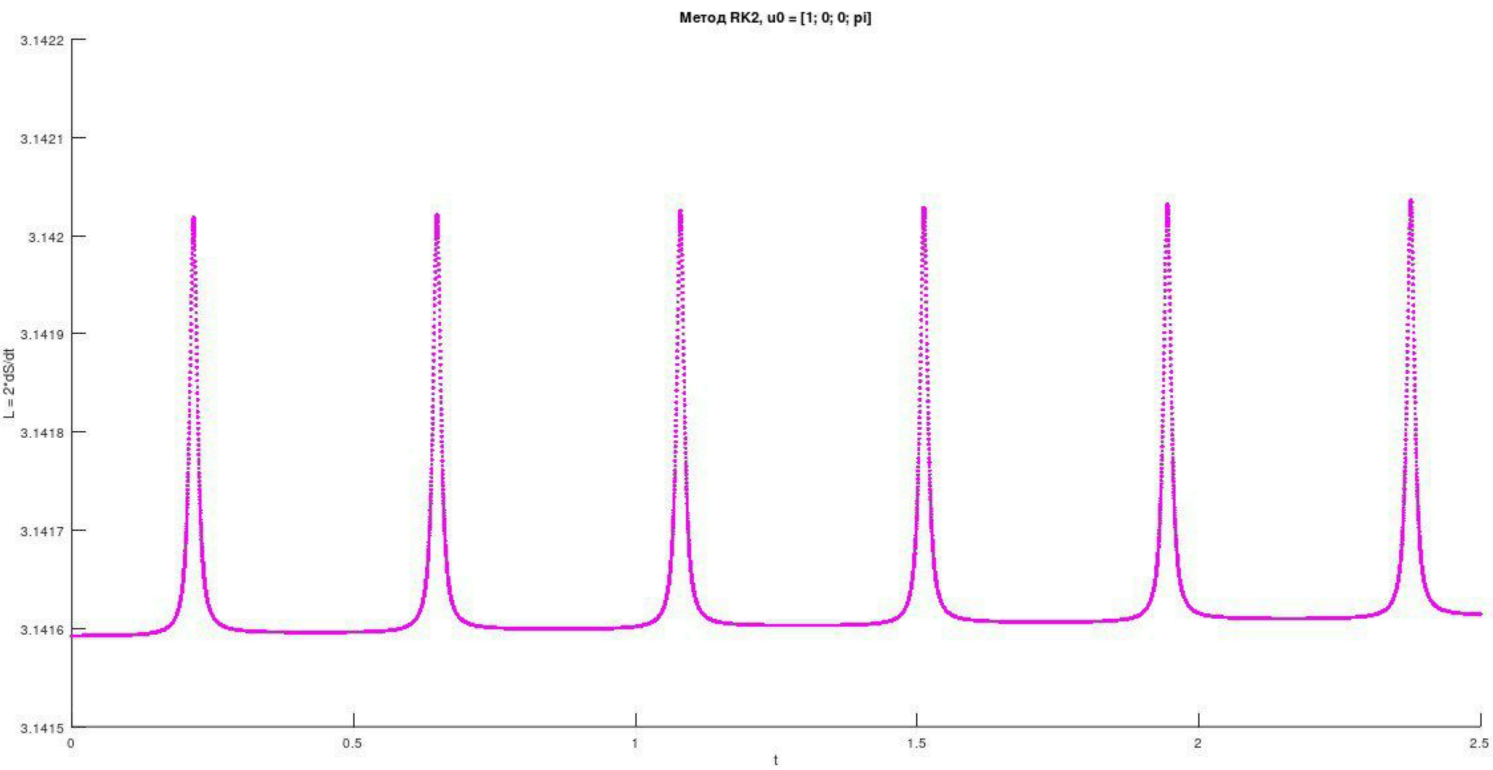
Секторная скорость:

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{v}]$$

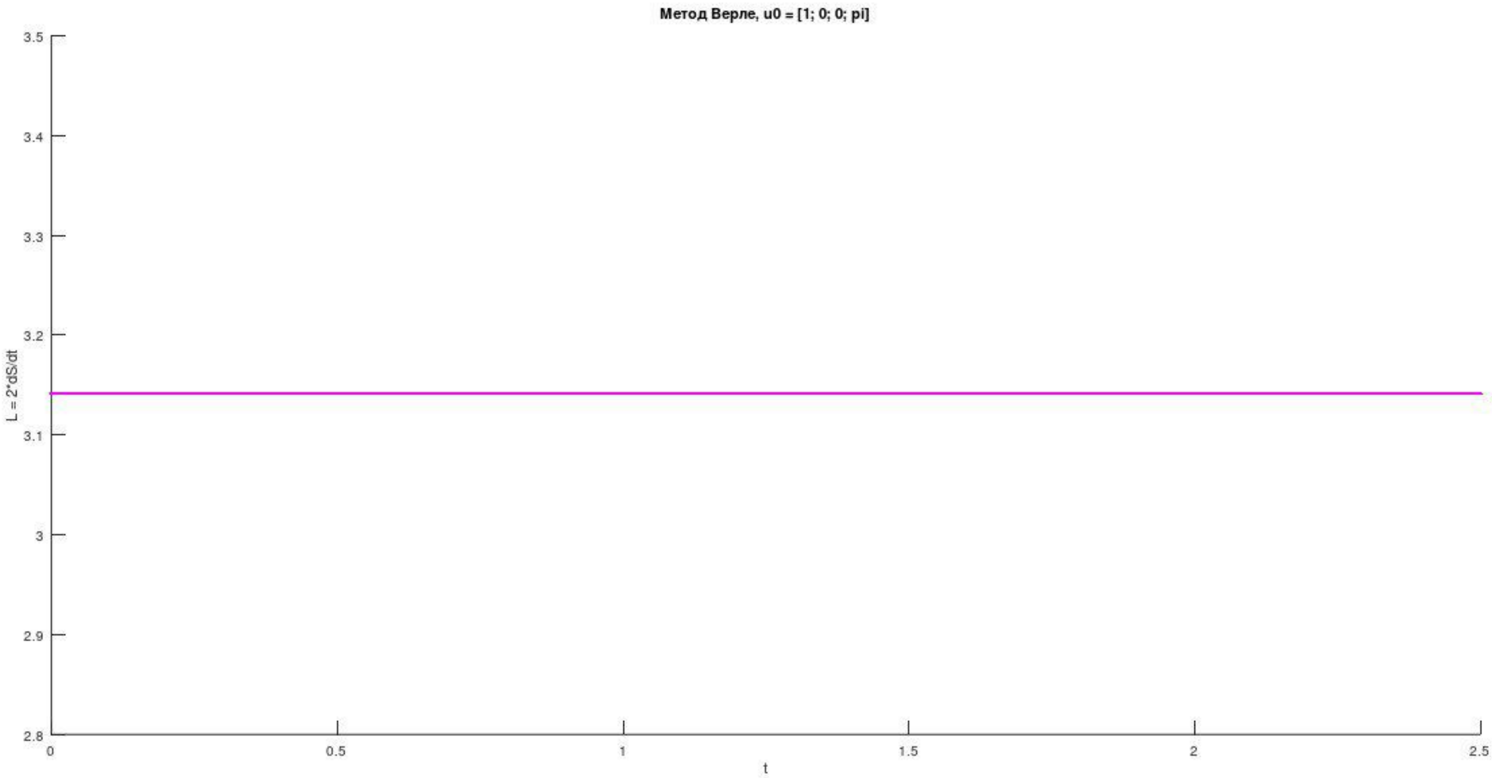
То есть второй закон Кеплера – закон сохранения модуля секторной скорости. Проверим, что для построенных орбит $|[\vec{r}, \vec{v}]| = const$. Так как $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$, то $|[\vec{r}, \vec{v}]| = \begin{vmatrix} x & y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$.

Введем функцию $L = x \cdot v_y - y v_x = u(1) \cdot u(4) - u(2) \cdot u(3)$.

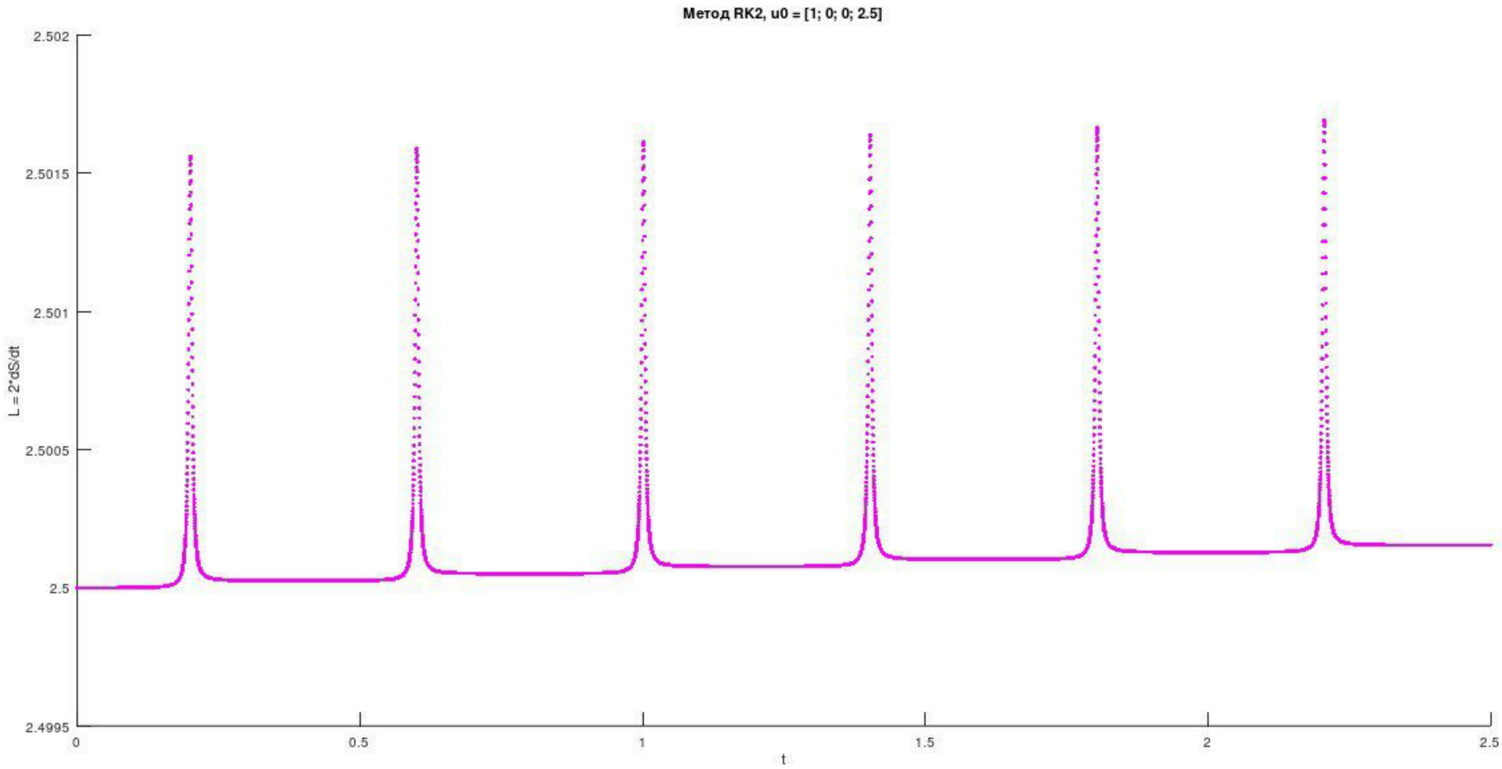
Графики зависимости L от времени t:



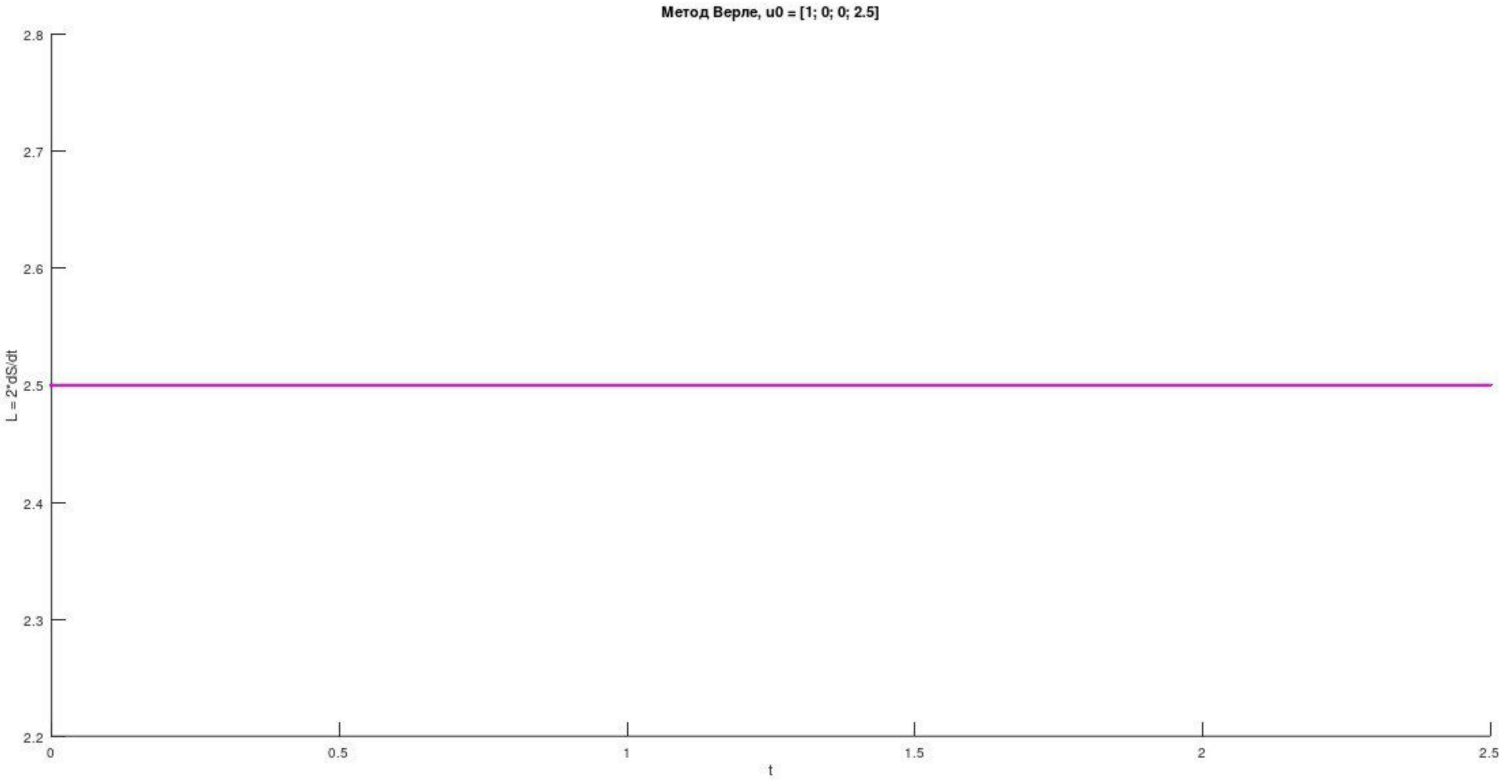
Метод RK2, u0 = [1; 0; 0; pi]
3.1422
3.1421
3.142
3.1419
3.1418
3.1417
3.1416
3.1415
L = 2*dS/dt
0
0.5
1
1.5
2
2.5
t

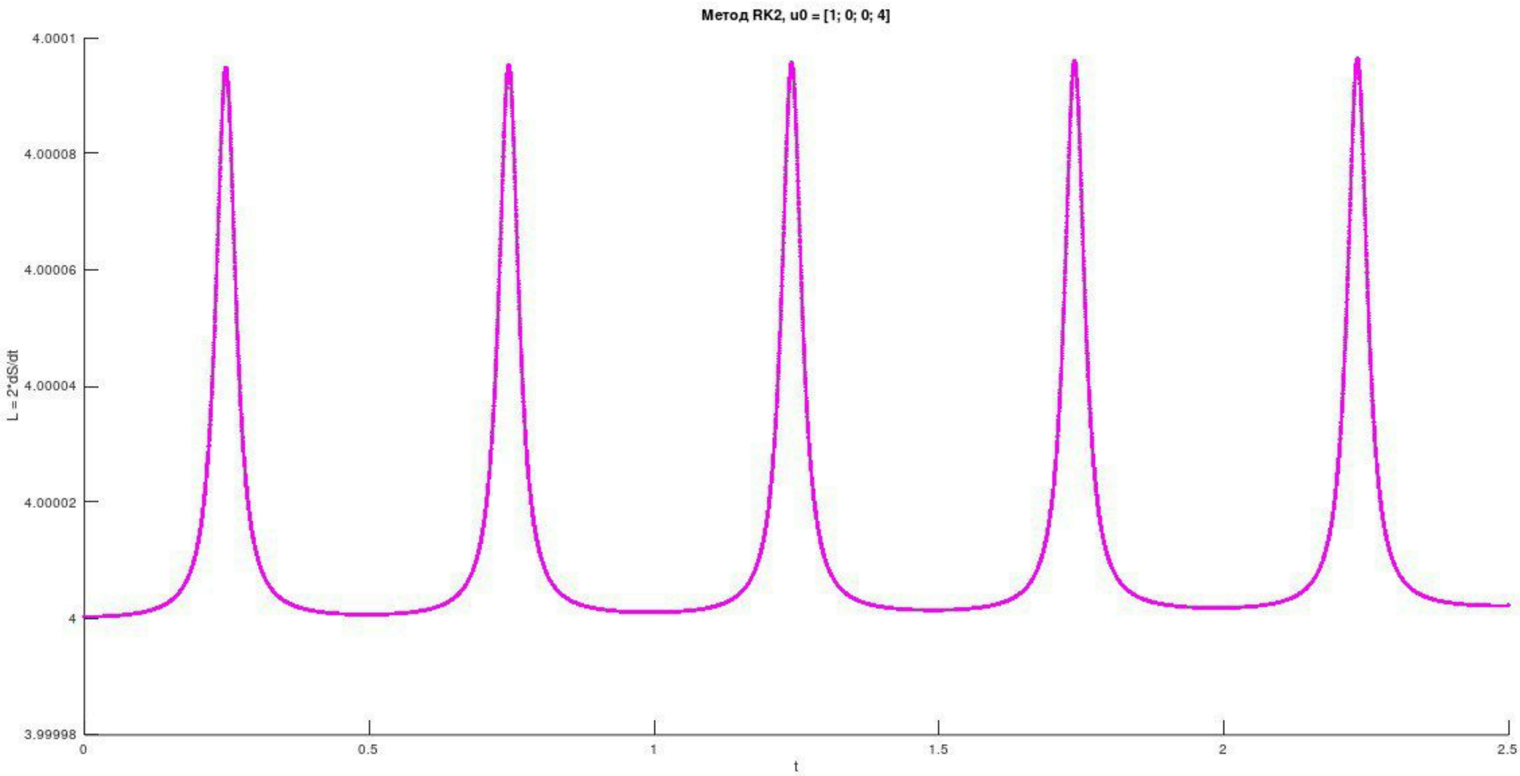


Метод Верле, u0 = [1; 0; 0; pi]
L = 2*dS/dt
3.5
3.4
3.3
3.2
3.1
3
2.9
2.8
0
0.5
1
1.5
2
2.5
t

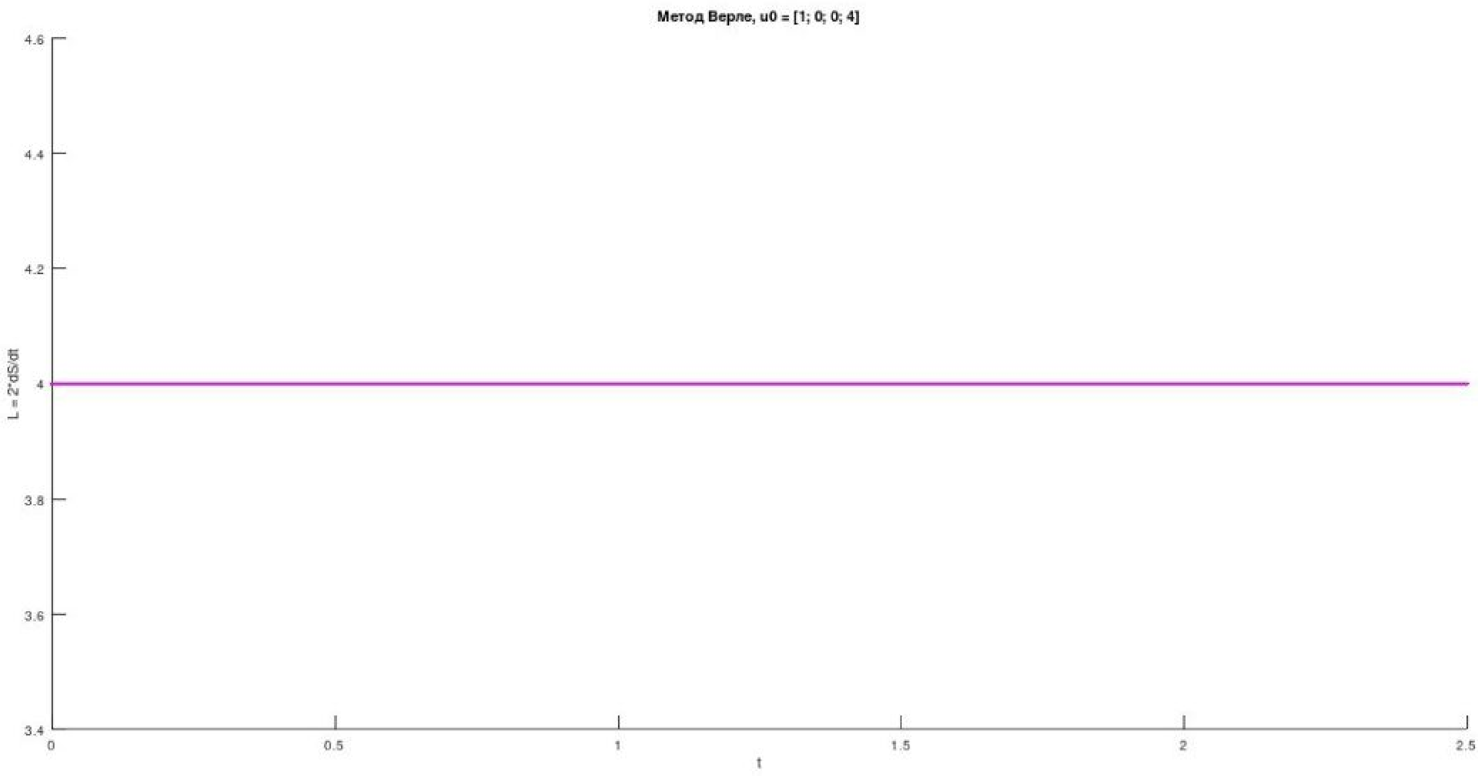


Метод RK2, u0 = [1; 0; 0; 2.5]
2.502
2.5015
2.501
2.5005
2.5
2.4995
L = 2*dS/dt
0
0.5
1
1.5
2
2.5
t

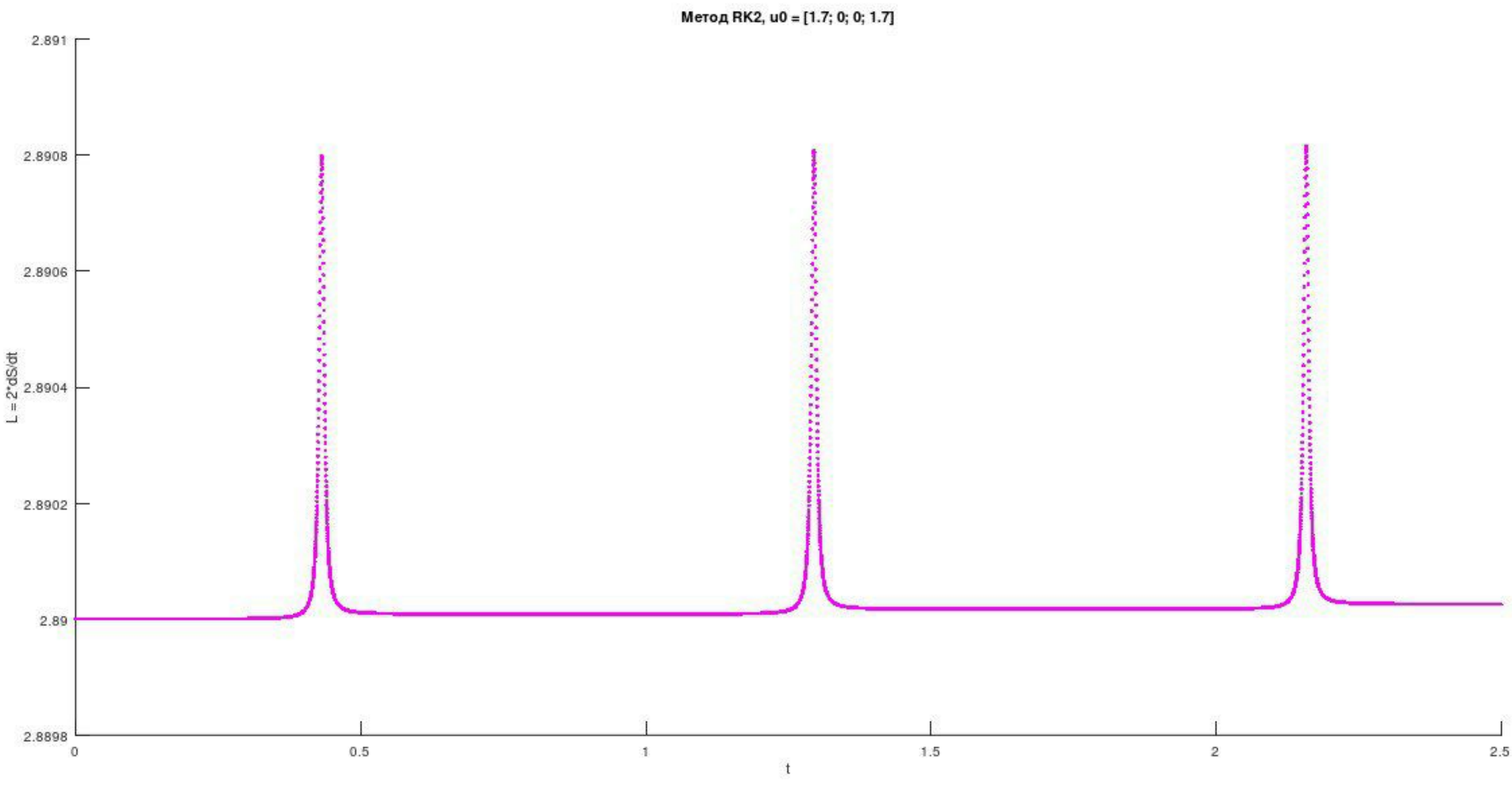

Метод Верле, u0 = [1; 0; 0; 2.5]
2.8
2.7
2.6
2.5
2.4
2.3
2.2
L = 2*dS/dt
0
0.5
1
1.5
2
2.5
t

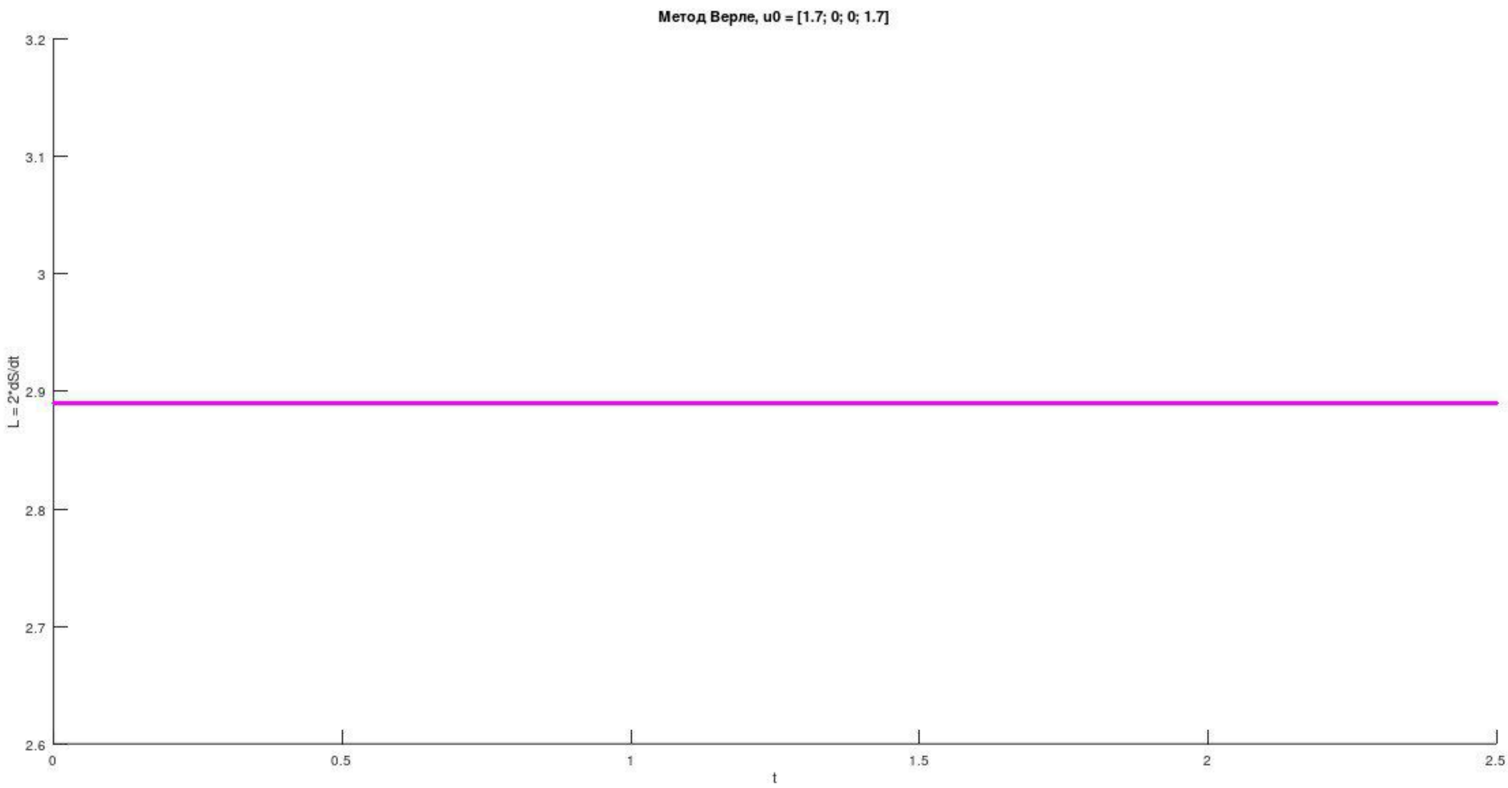


Метод RK2, u0 = [1; 0; 0; 4]
4.0001
4.00008
4.00006
4.00004
4.00002
4
3.99998
L = 2*dS/dt
0
0.5
1
1.5
2
2.5
t

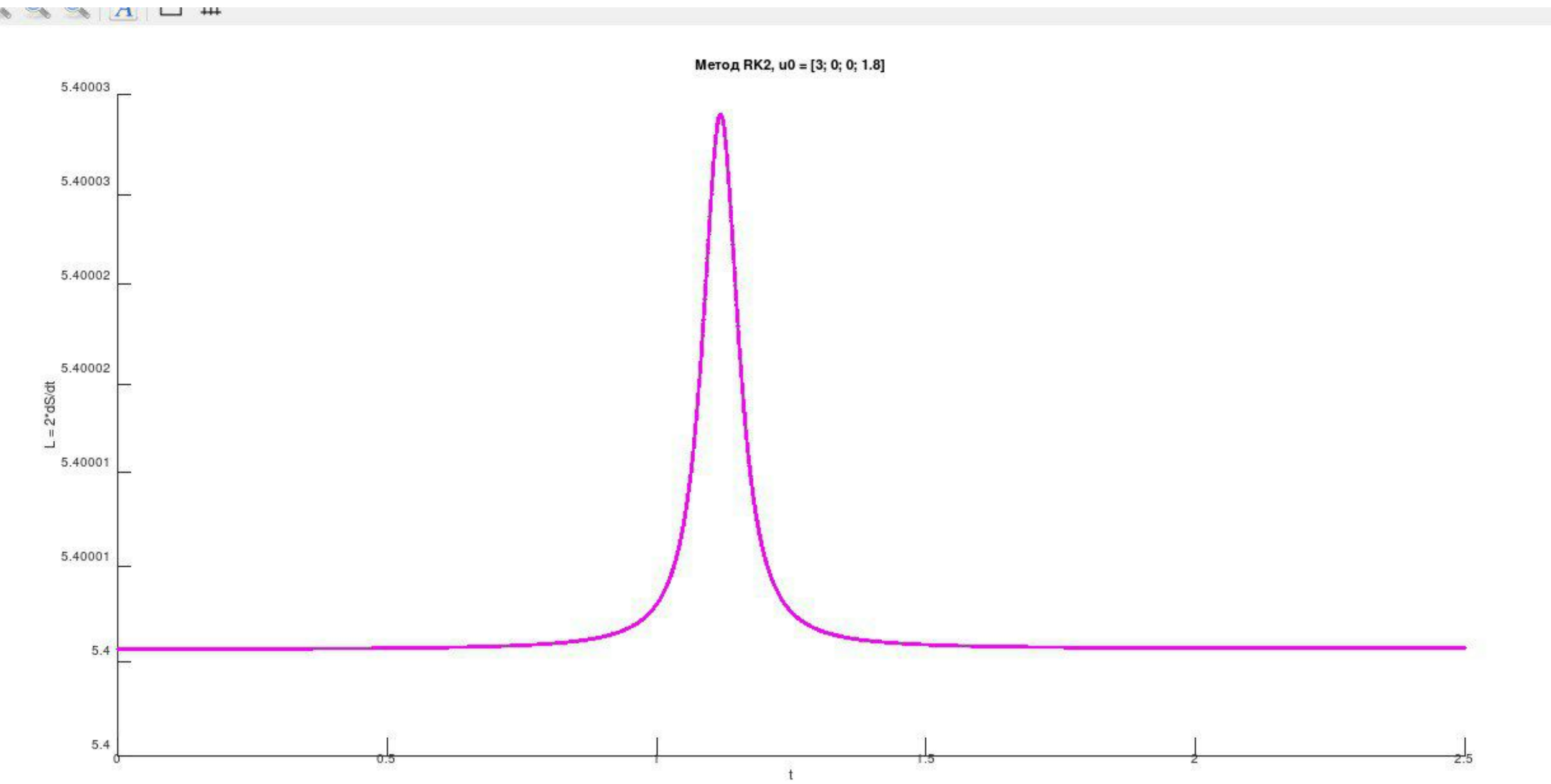


Метод Верле, u0 = [1; 0; 0; 4]
L = 2*dS/dt
t
4.6
4.4
4.2
4
3.8
3.6
3.4
0
0.5
1
1.5
2
2.5

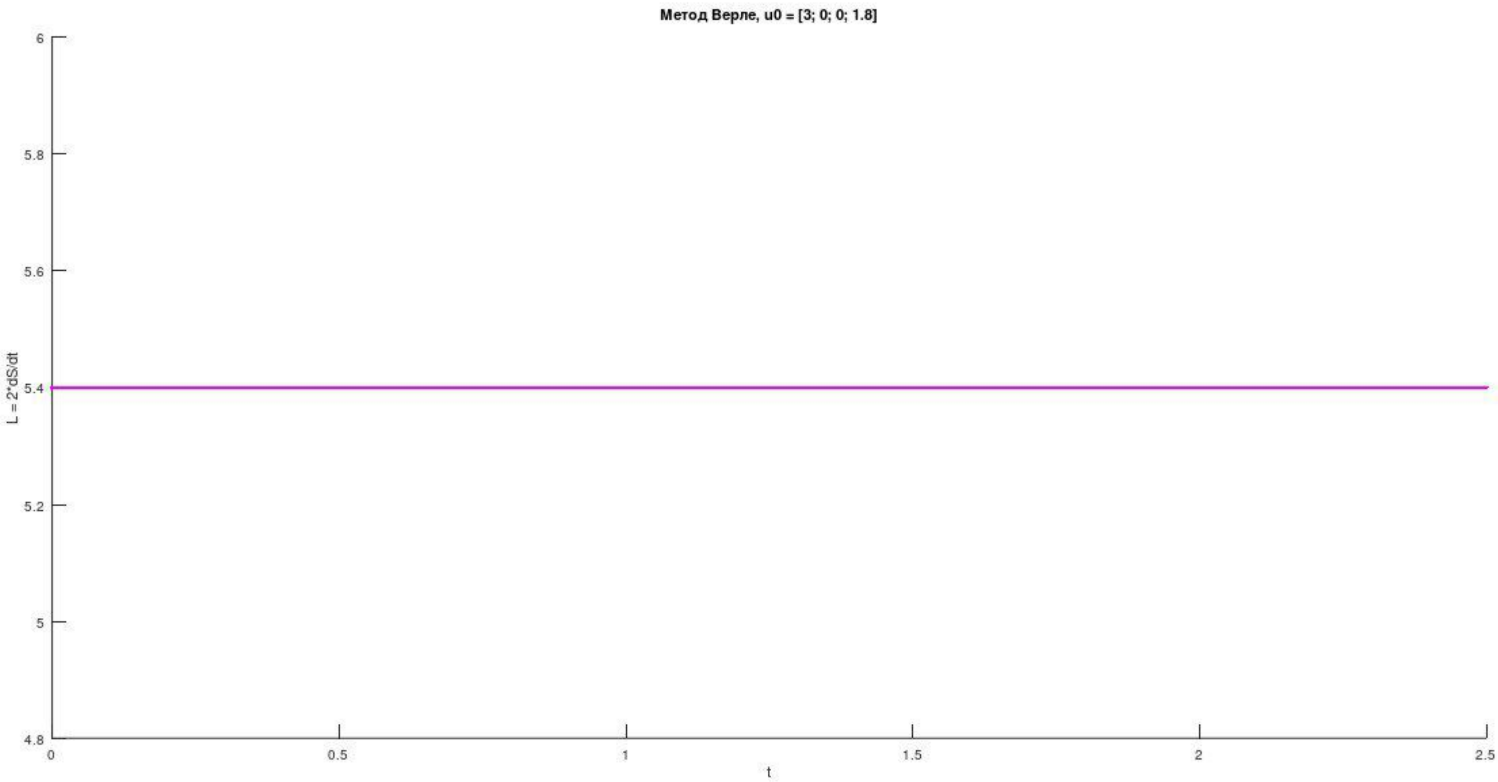

Метод RK2, u0 = [1.7; 0; 0; 1.7]
L = 2*dS/dt
t
2.891
2.8908
2.8906
2.8904
2.8902
2.89
2.8898
0
0.5
1
1.5
2
2.5



Метод Верле, u0 = [1.7; 0; 0; 1.7]
L = 2*dS/dt
t
3.2
3.1
3
2.9
2.8
2.7
2.6
0
0.5
1
1.5
2
2.5



Метод RK2, u0 = [3; 0; 0; 1.8]
5.40003
5.40003
5.40002
5.40002
5.40001
5.40001
5.4
5.4
L = 2*dS/dt
0
0.5
1
1.5
2
2.5
t



Метод Верле, u0 = [3; 0; 0; 1.8]
6
5.8
5.6
5.4
5.2
5
4.8
L = 2*dS/dt
0
0.5
1
1.5
2
2.5
t

Видим, что при использовании метода Верле, секторная скорость, действительно, константа. Этот метод в силу симметрии относительно времени сохраняет энергию E и момент импульса $\vec{L}$. А $|\vec{L}| = |[\vec{r}, \vec{v}] \cdot m|$. Второй закон Кеплера выполнен.

При использовании метода RK2 на графике $L(t)$ видны „всплески". Они небольшие, порядка 10^{-4}, но тем не менее есть. Метод RK2 не сохраняет энергию. Второй закон Кеплера не выполнен. „Скачки" примерно в середине периода, где точка ближе всего к притягивающему центру $\Rightarrow$ больше ошибка метода.

3) Проверим, что уменьшение длины шага вдвое приводит к отклонению орбиты менее чем на 1%:

метод Верле, $u_0 = (3\ 0\ 0\ 1.8)^T$, $T = 2.5$

$$\left.\begin{aligned} h = 0.0002\ \ & \vec{r}_{N+1}(x_{N+1}, y_{N+1}) = (2.8471, 0.4647) \\ h = 0.0001\ \ & \vec{r}_{N+1}(x_{N+1}, y_{N+1}) = (2.8470, 0.4647) \end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{\Delta |r_{N+1}|}{|r_{min}|} \le \frac{0.0001}{0.4} < 0.01$$