
Численное решение волнового уравнения

Д. Ю. Бобрышев^{1,*} and С. М. М. Аль-Хадж Аюб^{**}

¹Московский физико-технический институт, Институтский пер., 9, Долгопрудный, Московская обл., 141701

Received 22 Мая, 2024

Abstract—Основной целью данной работы является наблюдение различных эффектов, возникающих при решении волнового уравнения. Численное решение выполнено при помощи метода конечных элементов, написано на языке C++ с использованием библиотеки FEniCS.

Ключевые слова и фразы: Волновое уравнение, FEniCS

1. ВВЕДЕНИЕ

Волновое уравнение является одним из основных уравнений математической физики. При помощи волнового уравнения описываются различные колебательные процессы, например, распространение звуковой волны в среде, распространение электромагнитных волн (см [1]). В данной работе мы будем использовать теорему Гюйгенса-Френеля, используемую в электродинамике, а полученное решение следует интерпретировать как распространение электромагнитной волны. При решении волнового уравнения возникает ряд интересных эффектов. Например, выполняется принцип Гюйгенса-Френеля: каждая точка волнового фронта является источником вторичных когерентных сферических волн. При некоторых условиях, как следствие этого принципа, имеет место дифракция: явление огибания предметов световой волной. Так, например, если осветить узкую щель плоской монохроматической волной, на достаточно удалённом экране можно наблюдать последовательность светлых полос. Наблюдение дифракции является одной из основных целей работы.

Из принципа Гюйгенса-Френеля следует закон преломления волны при прохождении границы двух сред с различными показателями преломления. Преломлённая волна имеет иную скорость распространения, поэтому у преломлённой волны угол между направлением распространения и нормалью к поверхности оказывается иным, чем угол между нормалью и направлением распространения падающей волны. Данное явление можно использовать, например, для фокусировки волны в точку. Для этого используются линзы. Исследование свойств линз также является важной частью работы.

Для решения волнового уравнения мы использовали метод конечных элементов. Основной идеей данного метода является разбиение пространства, на котором необходимо получить решение, на некоторое конечное количество элементов: точек со связывающих их отрезками. Для каждой пары отрезков, имеющих общую точку, можно ввести линейную функцию v_k , и число u_k , а саму функцию аппроксимировать как сумму базисных функций v_k , умноженных на коэффициент u_k . Таким образом, дифференциальное уравнение с некоторыми граничными условиями можно приближённо представить в виде системы линейных уравнений, которую можно решить относительно u_k , и, таким образом, получить приближённо функцию u . Метод конечных элементов реализован в библиотеке FEniCS, которую мы использовали для получения численного решения волнового уравнения.

* E-mail: bobryshev.diu@phystech.edu

** E-mail: al-khadzh.aiub.sm@phystech.edu

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

В данной работе получены численные решения волнового уравнения (1).

$$\Delta u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

2.1. Дифракционная решётка

$$\Delta u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2)$$

В данной работе используется пропускающая дифракционная решётка, состоящая из чередующихся пропускающих полосок, называемых щелями, шириной a и не пропускающих полосок шириной b . Величина $d = a + b$ называется периодом дифракционной решётки. Распределение интенсивности света, прошедшего через дифракционную решётку, на удалённом экране:

$$I = I_0 \frac{\sin^2(n\nu)}{\sin^2(\nu)} \frac{\sin^2(u)}{u^2}, \quad (3)$$

где

$$u = \frac{\pi}{\lambda} a \sin(\varphi), \quad (4)$$

$$\nu = \frac{\pi}{\lambda} d \sin(\varphi). \quad (5)$$

Здесь φ - направление от дифракционной решётки на рассматриваемую точку экрана, λ - длина волны падающего света. Получившееся распределение интенсивности на экране см. на рис. 1.

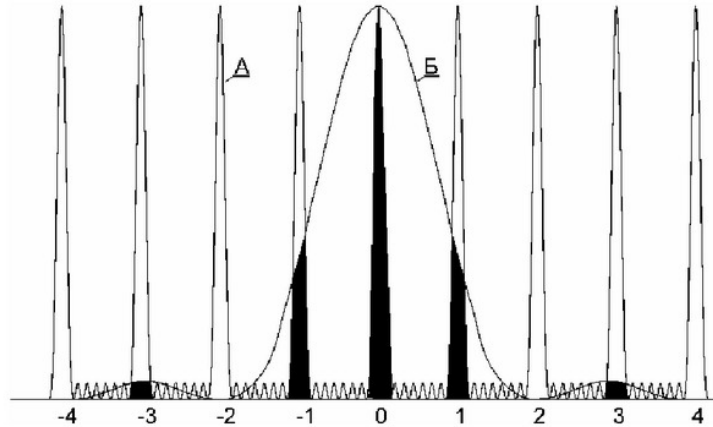


Figure 1. Распределение интенсивности на удалённом экране

Угловое положение главных максимумов:

$$d \sin(\varphi) = m\lambda. \quad (6)$$

2.2. Аберрации света

При рассмотрении хода лучей в геометрической оптике обычно считают выполненными следующие условия:

1. свет постулет в систему в виде параксиальных пучков
2. пучки составляют небольшие углы с главной осью системы
3. показатель преломления постоянен для всех лучей, т.е. среда не имеет дисперсии или свет достаточно монохроматичен

Аберрациями называют отклонения луча от направления, по которому луч должен был бы идти в идеальной системе. Мы будем изучать сферическую аберрацию, которая возникает при невыполнении условия (1). Сферическая аберрация обусловлена тем, что пучки света, падающие на разных расстояниях от линзы, соберутся в различных точках на главной оптической оси. Так, параксиальный пучок соберётся в точке L' , а пучок, прошедший через край линзы соберётся в точке L''' (см. рис. 2). Мерой продольной сферической аберрации

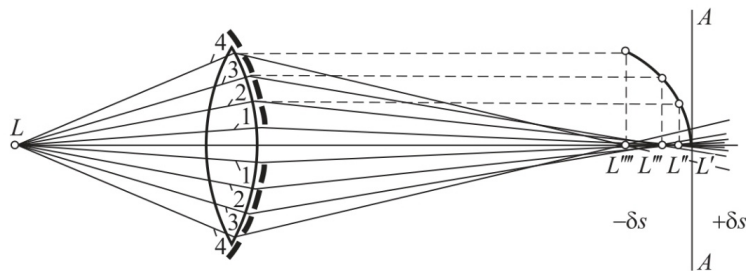


Figure 2. Сферическая Аберрациями

можно считать расстояние $L'L'''$. Проведём через точку L' плоскость, перпендикулярную главной оптической оси. Луч, прошедший через край линзы, пересечёт эту плоскость в некоторой точке A . Расстояние $L'A$ называется поперечной сферической аберрацией. Второй целью работы является измерение продольной и поперечной сферических аберраций.

2.3. Численный метод

Для решения волнового уравнения (1) мы выбрали следующий алгоритм. Производную по времени можно представить так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(t) - u(t - dt)}{dt}. \quad (7)$$

Вторую производную, соответственно, следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u(t) + u(t - 2dt) - 2u(t - dt)}{dt^2}. \quad (8)$$

Таким образом, для вычисления поля u в момент времени t необходимо знать поле в два предыдущих момента времени. Тогда можно задать необходимое поле в первые два момента времени, например, нулевое поле в каждой точке. Затем добавить граничное условие и вычислить поле по формуле $dt^2 \Delta u = \frac{u}{v^2}$. После этого, сохранив результат вычисления, решить уравнение (1) с помощью формулы (7). Таким итерационным методом можно получить поле $u(t)$ с заданными граничными условиями в любой момент времени t . Мы будем использовать прямоугольную форму сетки, на которой будем вычислять поле. Отдельно нужно уделить внимание граничным условиям. Как известно, если у струны закрепить концы, волна, возбуждённая в струне, будет отражаться от концов. В данном случае также можно наблюдать отражение волн от границ, причём стандартные граничные условия при решении с помощью библиотеки FEniCS подразумевают отражение от границ с сохранением знака поля. При задании нулевого граничного условия волна отразится с изменением знака. При этом отражённая волна может серьёзно повлиять на результаты эксперимента. Поэтому подавление отражённой волны является одной из главных проблем эксперимента.

Погасить волну можно несколькими способами. Первый способ - добавление пространственного трения, т.е. добавление в уравнение (1) свёртки градиента функции. Оказалось, что так волна действительно затухает, если добавить такое слагаемое во всё пространство. Однако при попытке задать такое трение в какой-то конкретной области, волна полностью отражается от этой области. Таким образом, погасить волну таким способом не получится, потому что волна никак не окажется в области с трением, если она ранее была в области без трения.

Второй способ - добавление вязкого трения, т.е. добавление в уравнение (1) члена вида $\eta \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$. Если добавить такое слагаемое во всё пространство, волна затухает точно так же, как в случае с пространственным трением; однако при выделении отдельной области с таким слагаемым волна не полностью отразится от этой области. При увеличении коэффициента η доля отражённой волны будет возрастать, но затухание происходит быстрее. Далее мы увидим, что подобный способ погашения волны также не очень эффективен.

Третий способ избавления от отражённой волны - введение достаточно большой сетки. Пространство для расчёта можно продлить в месте, где происходит отражение. Для того, чтобы время расчёта осталось примерно таким же, нужно сделать такую сетку разреженной. Это можно сделать потому, что информация о прошедшей волне нам не нужна, поэтому точность расчёта можно сделать очень малой. Этот способ является наиболее эффективным. При расчёте также необходимо учитывать численную вязкость: если расчёт происходит недостаточно точно, проходящая волна начинает затухать. Для подавления этого эффекта нужно ставить достаточно малый шаг по времени и достаточно большую частоту сетки.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

3.1. Дифракционная решётка

Дифракционную решётку можно задать двумя способами. Первый способ - возбудить плоскую волну, падающую на экран, на котором сделаны отверстия. Экран можно прописать в граничных условиях расчёта, т.е. сделать некоторую небольшую область, в которой поле всегда зануляется. Но, как указано в предыдущем пункте, волна начнёт отражаться от экрана. Отражённая волна может снова отразиться от границы и второй раз попасть на экран, что может немного испортить картину. Можно сделать экран как область с трением. В таком случае часть волны поглотится, а часть отразится. Однако полностью поглотиться волна не сможет. Если сделать трение слишком большим, отражённая волна, как и в предыдущем случае, может повлиять на расчёт. Если сделать трение достаточно малым, чтобы не замечать отражённую волну, прошедшая волна не затухнет до конца и также повлияет на результат эксперимента. Поэтому более предпочтительным является второй способ, менее естественный, но более эффективный.

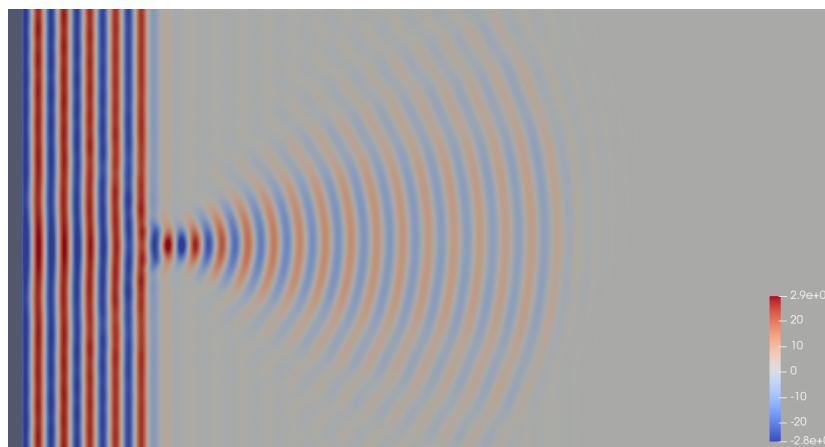


Figure 3. Распределение напряжённости электрического поля за экраном с одной щелью

Второй способ - задание граничных условий, соответствующих состоянию волны сразу за дифракционной решёткой. Такой способ имеет ряд преимуществ: нет влияния отражённой и прошедшей сквозь экран волн, не нужно просчитывать область между экраном и левой границей. Именно этот способ мы использовали для последнего расчёта. Кроме того, мы использовали большую сетку, которая становится разреженной ближе к краю. К сожалению, получить распределение интенсивности на достаточном расстоянии от

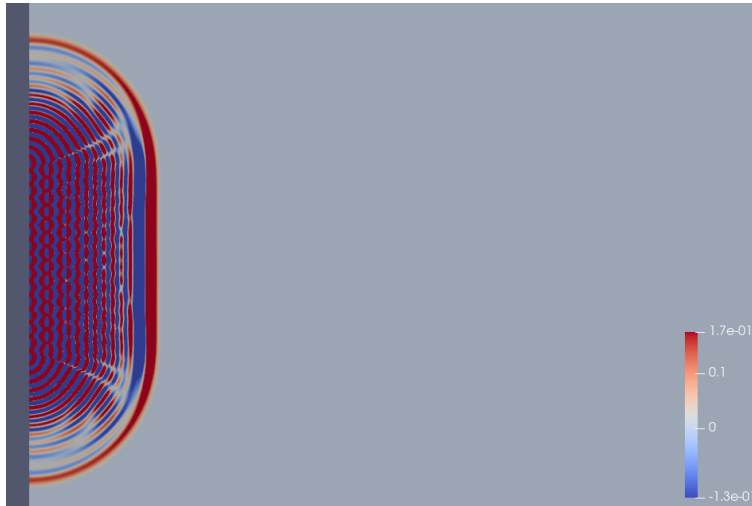


Figure 4. Распределение электрического поля за экраном, $N=15$ - количество щелей

дифракционной решётки не удалось. На это есть несколько причин. Во-первых, для наблюдения дифракции нужно много штрихов решётки и, соответственно, очень маленькая длина волны, что накладывает ряд ограничений на шаг по времени и на частоту сетки. Во-вторых, дифракционную картину нужно наблюдать на достаточном удалении от экрана. Поэтому сетка должна быть достаточно протяжённой и достаточно мелкой; но расчёт на такой сетке оказывается очень долгим. В-третьих, для корректного расчёта интенсивности необходимо усреднять квадрат напряжённости поля на большом промежутке времени.

3.2. Преломление, линза

Преломление реализуется изменением скорости в некоторой зоне (см. рис. 5). В данном случае линза создавалась путем изменения показателя преломления в определенной области. Основной целью эксперимента являлась проверка достоверности предложенной модели посредством проведения базовых исследований с использованием линзы. Первая проблема подобного эксперимента заключалась в ограниченности размеров линзы, что приводило к дифракции волны, не проходящей через линзу.

Это мешало проведению точных наблюдений, поскольку дифрагированная волна накладывалась на преломленную, искажая результаты эксперимента (см. рис. 6). Для исключения влияния не преломленного света на результаты эксперимента было принято решение разместить диафрагму на оси линзы. Таким образом, за линзой оказывалась только волна, преломленная ею. В данном случае следует использовать волну с длиной значительно меньшей, чем размер щели.

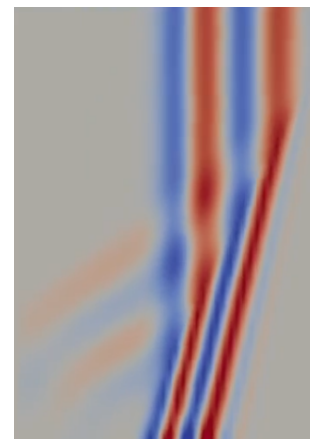


Figure 5. Преломление плоской волны

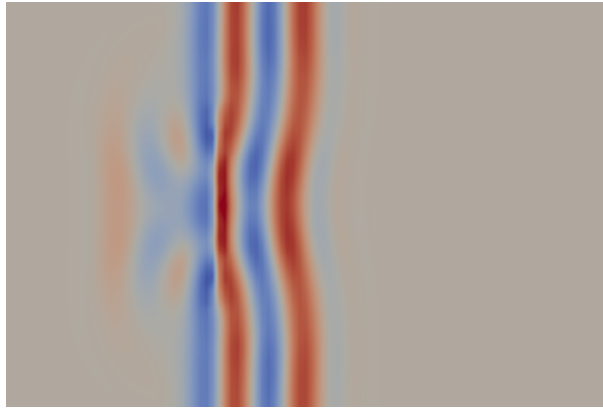


Figure 6. Влияние линзы на плоскую волну

Следующим шагом предполагается выполнение проверки соответствия фокусных расстояний линз, путем сравнения значения, вычисленного по формуле тонкой линзы $(1/R_1 + 1/R_2)(n_{\text{линзы}}/n_{\text{среды}} - 1)$. Данный шаг был пройден успешно.

Также хотелось сделать некоторое количество толстых линз и проверить, как бует меняться их фокус, в зависимости от толщины. Для симметричной двояковыпуклой линзы с радиусом образующих, принятым за единицу, зависимость фокусного расстояния от толщины линзы d может быть описана следующей формулой:

$$f = 1 + \frac{d}{2} - \frac{2}{4-d} \quad (9)$$

Таблица экспериментальных и теоретических данных: Как видно из таблицы, теория

Table 1. Таблица зависимости $f(d)$

d	$f_{\text{эксп}}$	$f_{\text{теор}}$
0.15	0.81	0.8
0.30	0.87	0.86
0.45	0.94	0.91
0.60	0.97	0.97
0.75	1.00	1.01

хорошо согласуется с экспериментальными данными, что подтверждает корректность используемой формулы для определения фокусного расстояния в зависимости от толщины линзы.

Была также поставлена задача исследовать влияние различных эффектов на определение фокуса линзы, однако на её реализацию не хватило времени. Это может быть интересной темой для дальнейшего исследования, особенно с учетом возможных aberrаций и других оптических эффектов, которые могут возникать в зависимости от конструкции линзы и условий эксперимента.

4. ВЫВОД

Дифракционный эксперимент не завершён, т.к. он оказался слишком тяжёлым. Для наблюдения хотя бы качественной картины необходимо иметь большие вычислительные мощности и больше времени. Заметим, что волновое уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка по времени. Его можно разбить на эквивалентную систему

$$\dot{x} = y;$$

$$\dot{y} = \Delta x$$

Такой ход позволит избавиться от второй производной по времени, что может существенно повысить точность расчётов. К сожалению, эксперимент с aberrациями провести не удалось. С другой стороны, была проведена проверка формулы толстой линзы.

5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

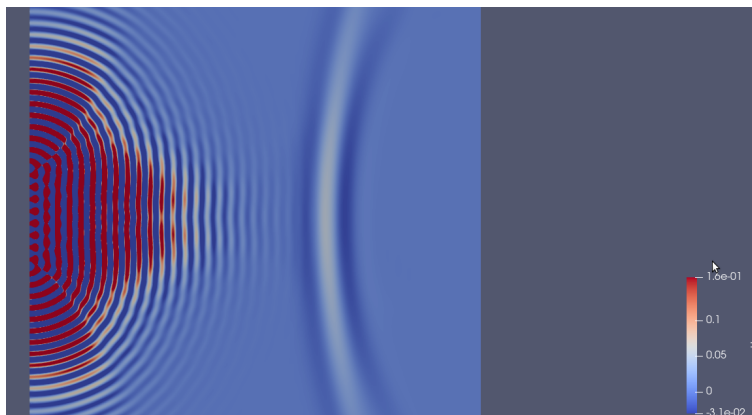


Figure 7. Дифракционная решётка с 9 штрихами. Правая граница является отражающей

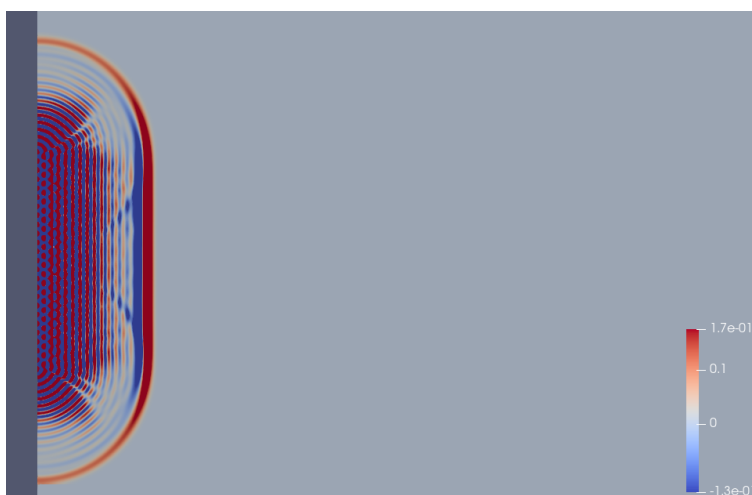


Figure 8. Распределение электрического поля за экраном, N=25 - количество щелей

Благодарности. Мы благодарны К.А. Беклемышевой за внимательное прочтение данной статьи и за справедливые критические замечания, которые были учтены при окончательном редактировании статьи.

REFERENCES

1. Сивухин Д.В. Оптика. Учебное пособие - 2-е издание, 1985 г.
2. Ландсберг Г.С. Оптика. Учебное пособие - 6-е издание, 2010 г.
3. Денисов Ю.В. Характеристики спектрографа с дифракционной решёткой. Учебно-методическое пособие, 2019 г.
4. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ. — М.: Мир, 1986