Dependente multivaluate

Fie X, Y $\subseteq$ U. O dependenta multivaluata este notata sintactic prin $X \rightarrow\rightarrow Y$.

Vom da doua definitii pentru satisfacerea unei dependente multivaluate de catre o relatie r peste U.

Definitia 1. Relatia r peste U satisface dependenta multivaluata $X \rightarrow\rightarrow Y$, daca pentru orice doua uple $t1, t2 \in r$ si $t1[X] = t2[X]$, exista uplele t3 si t4 din r, astfel ıncat:

(i) $t3[X] = t1[X]$, $t3[Y] = t1[Y]$ si $t3[Z] = t2[Z]$;

(ii) $t4[X] = t2[X]$, $t4[Y] = t2[Y]$ si $t4[Z] = t1[Z]$,

unde $Z = U - XY$.

In definitia 1 este suficient sa cerem existenta lui t3 sau t4, celalalt uplu rezulta considerand uplele ın ordinea t2,t1.

Pentru $t \in r$ avem $t[X] \in r[X]$. Notam prin $F_Y(t[X]) = \{t'[Y]/t' \in r, t'[X] = t[X]\}$. Aceasta se numeste multimea Y -valorilor asociate lui $t[X]$.

Exemplul 1. Fie relatia r data astfel:

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_1	b_2	c_2	d_2
a_1	b_1	c_1	d_2
a_1	b_2	c_2	d_1

a_2 b_3 c_1 d_1

a_2 b_3 c_1 d_2

Se verifica faptul ca r satisface $A \to\to BC$

conform definitiei 1.

Pentru $t \in r$, definim:

$M_Y(t[XZ]) = \{t'[Y]/t' \in r, t'[XZ] = t[XZ]\}$.

Definitia 2. Relatia r peste U satisface dependenta multivaluata $X \to\to Y$, daca pentru orice t1, t2 $\in$ r, astfel incat t1[X] = t2[X] avem:

M_Y (t1[XZ]) =M_Y (t2[XZ]).

Propozitia 1. Definitiile 1 si 2 sunt echivalente.

Demonstratie. Fie r ce satisface $X \to\to Y$ dupa definitia 1 si fie t_1, $t_2 \in r$, astfel ıncat $t_1[X] = t_2[X]$.

Fie $t'_1[Y] \in M_Y(t_1[XZ])$. Sa aratam ca

$t'_1[Y\ ] \in M_Y\ (t_2[XZ])$.

Avem $t'_1 \in r$ si $t'_1[XZ] = t_1[XZ]$. Rezulta $t'_1[X] = t_1[X] = t_2[X]$. Deoarece r satisface $X \to\to Y$ dupa definitia 1 si $t'_1[X] = t_2[X]$, exista $t_3 \in r$, astfel ıncat: $t_3[X] = t'_1[X]$, $t_3[Y\ ] = t'_1[Y\ ]$ si $t_3[Z] = t_2[Z]$.

De aici $t_3[XZ] = t_2[XZ]$, de unde

$t_3[Y\ ] \in M_Y\ (t_2[XZ])$. Deoarece $t'_1[Y] = t_3[Y]$, obtinem $t'_1[Y] \in M_Y\ (t_2[XZ])$.

Rationamentul fiind simetric rezulta si invers,

adica $t'_2[Y] \in M_Y(t_2[XZ])$ implica:

$t'_2[Y] \in M_Y(t_1[XZ])$.

Am aratat:

$M_Y(t_1[XZ]) = M_Y(t_2[XZ])$, adica r satisface $X \to\to Y$ dupa definitia 2.

Presupunem acum ca r satisface $X \to\to Y$ dupa definitia 2 si fie $t_1, t_2 \in r$, astfel ıncat $t_1[X]= t_2[X]$.

Din $M_Y(t_1[XZ]) = M_Y(t_2[XZ])$ si faptul ca $t_1[Y] \in M_Y(t_1[XZ])$ obtinem $t_1[Y] \in M_Y(t_2[XZ])$.

Deci $\exists t'_2 \in r$, astfel ıncat $t_1[Y] = t'_2[Y]$ si $t'_2[XZ] = t_2[XZ]$. Pentru $t'_2 \in r$ avem: $t'_2[X] = t_2[X] = t_1[X]$, $t'_2[Y] = t_1[Y]$ si $t'_2[Z] = t_2[Z]$.

Similar obtinem $t'_1 \in r$, astfel ıncat: $t'_1[X] = t_2[X]$, $t'_1[Y] = t_2[Y]$ si $t'_1[Z] = t_1[Z]$. Am aratat ca r satisface $X \rightarrow\rightarrow Y$ dupa definitia 1.

Observatia 1. Daca r satisface dependenta functionala $X \to Y$, atunci pentru orice $t \in r$, avem $M_Y (t[XZ]) = \{t[Y]\}$.

Observatia 2. Daca r satisface dependenta functionala $X \to Y$, atunci r satisface dependenta multivaluata $X \to\to Y$.

Observatia 3. Daca r satisface dependenta multivaluata $X \rightarrow\rightarrow Y$, atunci putem defini o functie $\psi : r[X] \rightarrow P(r[Y])$, prin $\psi(t[X]) = M_Y(t[XZ])$, $\forall t \in r$. Cand r satisface $X \rightarrow Y$, atunci $\psi : r[X] \rightarrow r[Y]$.

Proprietati ale dependentelor multivaluate:

Propozitia 2. MVD0 (Complementariere).

Fie $X, Y, Z \subseteq U$, astfel ıncat $XYZ = U$ si $Y \cap Z \subseteq X$. Daca r satisface $X \to\to Y$, atunci r satisface $X \to\to Z$.

MVD1 (Reflexivitate). Daca $Y \subseteq X$, atunci orice relatie r satisface $X \to\to Y$.

MVD2 (Extensie). Fie $Z \subseteq W$ si r satisface $X \to\to Y$. Atunci r satisface $XW \to\to YZ$.

MVD3 (Tranzitivitate). Daca r satisface $X \to\to Y$ si $Y \to\to Z$, atunci r satisface $X \to\to Z - Y$.

MVD4 (Pseudotranzitivitate). Daca r satisface $X \to\to Y$, si $YW \to\to Z$, atunci r satisface $XW \to\to Z - YW$.

MVD5 (Uniune). Daca r satisface $X \to\to Y$, si $X \to\to Z$, atunci r satisface $X \to\to YZ$.

MVD6 (Descompunere). Daca r satisface $X \to\to Y$, si $X \to\to Z$, atunci

r satisface $X \to\to Y \cap Z, X \to\to Y - Z, X \to\to Z - Y$.

Deoarece vom lucra cu multimi de dependente, ce pot fi functionale sau multivaluate, vom avea nevoie de asa numitele proprietati mixte.

FD-MVD1. Daca r satisface $X \to Y$, atunci r satisface $X \to\to Y$.

FD-MVD2. Daca r satisface $X \to\to Z$ si $Y \to Z'$, cu $Z' \subseteq Z$ si $Y \cap Z = \emptyset$, atunci r satisface $X \to Z'$.

FD-MVD3. Daca r satisface $X \to\to Y$ si $XY \to Z$, atunci r satisface $X \to Z - Y$.

Demonstrarea lui MVD0:

Pentru X, Y, Z ⊆ U vom considera, ın general, urmatoarea diagrama:

U reprezinta ıntregul patrat, X = {1, 2, 3, 4}, Y = {2, 3, 5, 6}, Z = {3, 4, 6, 7}, U − XYZ = {8}.

In conditiile proprietatii MVD0 ($XYZ = U$ si $Y \cap Z \subseteq X$), avem $8 = \varnothing$ si $6 = \varnothing$.

Fie $T1 = U - XY = \{7\}$, $T2 = U - XZ = \{5\}$.

Presupunem ca r satisface $X \to\to Y$. Aceasta ınseamna ca pentru orice $t, t' \in r$ cu $t[X] = t'[X]$, exista t_3 si $t_4 \in r$, astfel ıncat $t_3[X] = t[X]$, $t_3[Y] = t[Y]$, $t_3[T1] = t'[T1]$ si $t_4[X] = t'[X]$, $t_4[Y] = t'[Y]$, $t_4[T1] = t[T1]$.

Sa notam prin t_i respectiv t'_i, proiectia lui t respective t′, pe domeniul i. Atunci pentru t avem:

$$\begin{array}{llll} & X & Y & T1 \\ t \rightarrow & ((t_1, t_2, t_3, t_4), & (t_2, t_3, t_5), & (t_7)) \\ t' \rightarrow & ((t'_1, t'_2, t'_3, t'_4), & (t'_2, t'_3, t'_5), & (t'_7)) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} & X & Z & T2 \\ t \rightarrow & ((t_1, t_2, t_3, t_4), & (t_3, t_4, t_7), & (t_5)) \end{array}$$

$t' \rightarrow ((t'_1, t'_2, t'_3, t'_4), (t'_3, t'_4, t'_7), (t'_5))$

Din $t[X] = t'[X]$ rezulta $t_i = t'_i$, $i = 1, 4$.

Aplicam faptul ca r satisface $X \rightarrow\rightarrow Y$. Rezulta

ca exista $t'' \in r$, astfel ıncat:

X Y T1

$t'' \rightarrow ((t_1, t_2, t_3, t_4), (t_2, t_3, t_5), (t'_7))$.

Acest t'' proiectat pe X, Z, T2 da:

$t'' \rightarrow ((t_1, t_2, t_3, t_4), (t_3, t_4, t'_7), (t_5)) =$

$((t'_1, t'_2, t'_3, t'_4), (t'_3, t'_4, t'_7),(t_5))$

Avem deci satisfacuta definitia 1 pentru t' si t.

Multimile Y si Z intervin simetric ın MVD0, deci rezulta si invers: daca r satisface $X \to\to Z$, atunci r satisface $X \to\to Y$.

Demonstrarea proprietatii MVD1:

$Y = \{1\}$, $X = \{1, 2\}$, $Z = U - XY = \{3\}$.

Fie $t, t' \in r$, astfel ıncat $t[X] = t'[X]$, adica

$t_i = t'_i$, $i = 1, 2$.

$$
\begin{array}{llll}
 & X & Y & Z \\
t \rightarrow & ((t_1, t_2), & (t_1), & (t_3)) \\
t' \rightarrow & ((t'_1, t'_2), & (t'_1), & (t'_3))
\end{array}
$$

consideram $t'' = t'$. Avem:

$t'' \rightarrow ((t'_1, t'_2), (t'_1), (t'_3)) = ((t_1, t_2), (t_1), (t'_3))$

Demonstrarea proprietatii MVD2:

Avem $Z \subseteq W$ si r satisface $X \rightarrow\rightarrow Y$. Aratam ca r satisface $XW \rightarrow\rightarrow YZ$.

$X = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$Y = \{2, 3, 4, 5, 8, 9\}$

$W = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

$Z = \{5, 7, 9, 10\}$

$T1 = U - XY = \{10, 11, 12\}$

$T2 = U - XWY\ Z = \{12\}$.

Fie $t, t' \in r$, astfel ıncat $t[XW] = t'[XW]$, adica $t_i = t'_i$, $i = 1, 3, 4 - 11$.

	XW	YZ	T2

$t \rightarrow ((t_1, t_3, t_4 - t_{11}), (t_2 - t_5, t_7 - t_{10}), (t_{12}))$

$t' \rightarrow ((t'_1, t'_3, t'_4 - t'_{11}), (t'_2 - t'_5, t'_7 - t'_{10}, (t'_{12})),$

unde $t_i - t_j$ noteaza toate componentele

ıncepand cu t_i si terminand cu t_j ,($i < j$).

Proiectam acum t si t′ pe tripleta (X, Y, T1):

$t \to ((t_1, t_3, t_4 - t_7), (t_2 - t_5, t_8, t_9), (t_{10} - t_{12}))$

$t' \to ((t'_1, t'_3, t'_4 - t'_7), (t'_2 - t'_5, t'_8, t'_9), (t'_{10} - t'_{12}))$.

Deoarece avem $t[X]=t'[X]$ si r satisface $X \to\to Y$,

rezulta ca exista $t'' \in r$, astfel ıncat:

$t'' \to ((t_1, t_3, t_4 - t_7), (t_2 - t_5, t_8, t_9), (t'_{10} - t'_{12}))$ pe

X, Y, T1.

Proiectand acest t'' pe XW, YZ, T2, obtinem:

$t'' \to ((t_1, t_3, t_4 - t_9, t'_{10}, t'_{11}), (t_2 - t_5, t_7 - t_9, t'_{10}), (t'_{12}))$

$= ((t_1, t_3, t_4 - t_{11}), (t_2 - t_5, t_7 - t_{10}), (t'_{12}))$,

deoarece $t_i = t'_i$, $i = 1, 3, 4 - 11$.

Pentru t si t' am obtinut t'' care satisface

definitia1.

Demonstrarea proprietatii MVD3:

Daca r satisface $X \to\to Y$, si $Y \to\to Z$, atunci r satisface $X \to\to Z - Y$.

$X = \{1, 2, 3, 4\}$

$Y = \{2, 3, 5, 6\}$

$Z = \{3, 4, 6, 7\}$,

$Z - Y = \{4, 7\}$

$T1 = U - XY = \{7, 8\}$

$T2 = U - Y\,Z = \{1, 8\}$

$T3 = U - X(Z - Y) = \{5, 6, 8\}$

Fie $t, t' \in r$, astfel ıncat $t[X] = t'[X]$, adica $t_i = t'_i$,

$i = 1, 4$

$t \rightarrow ((t_1 - t_4), (t_4, t_7), (t_5, t_6, t_8)$

$t' \rightarrow ((t'_1 - t'_4), (t'_4, t'_7), (t'_5, t'_6, t'_8))$ pe $X,Z - Y$, T3

Consideram t si t′ proiectate pe X, Y, T1:

$t \rightarrow ((t_1 - t_4), (t_2, t_3, t_5, t_6), (t_7, t_8))$

$t' \rightarrow ((t'_1 - t'_4), (t'_2, t'_3, t'_5, t'_6), (t'_7, t'_8))$

Deoarece r satisface $X \rightarrow\rightarrow Y$, rezulta ca exista

$t'' \in r$, astfel ıncat:

$t'' \rightarrow ((t_1 - t_4), (t_2, t_3, t_5, t_6), (t'_7, t'_8))$ pe X, Y, T1.

Consideram acum t si t′′ pe Y,Z, T2.

$t \rightarrow ((t_2, t_3, t_5, t_6), (t_2, t_4, t_6, t_7), (t_1, t_8))$

$t'' \rightarrow ((t_2, t_3, t_5, t_6), (t_2, t_4, t_6, t'_7), (t_1, t'_8))$

r satisface $Y \rightarrow\rightarrow Z$. Pentru t'' si t exista $t''' \in r$,

astfel ıncat

$t''' \rightarrow ((t_2, t_3, t_5, t_6), (t_2, t_4, t_6, t'_7),(t_1, t_8))$.

Considerand t''' proiectat pe X, $Z - Y$ si $T3$

obtinem:

$t''' \rightarrow ((t_1 - t_4), (t_4, t'_7), (t_5, t_6, t_8)) =$

$((t'_1 - t'_4), (t'_4, t'_7), (t_5, t_6, t_8))$

In concluzie, pentru t' si $t \in r$ cu $t'[X] = t[X]$ am gasit t''' ce satisface definitia 1.

Am aratat FD-MVD1. Sa aratam acum FD - MVD2:

Fie r care satisface $X \rightarrow\rightarrow Z$ si $Y \rightarrow Z'$, cu $Z' \subseteq Z$ si $Y \cap Z = \varnothing$.

Sa aratam ca r satisface $X \rightarrow Z'$.

$X = \{1, 2, 3, 4\}$

$Y = \{2, 5\}$

$Z = \{3, 4, 6, 7\}$

$Z' = \{4, 6\}$

$T1 = U - XZ = \{5, 8\}$.

Fie $t, t' \in r$, astfel ıncat : $t[X] = t'[X]$, deci

$t_i = t'_i$, $i = 1, 4$. Sa aratam ca $t[Z'] = t'[Z']$, adica

$t_6 = t'_6$.

Consideram proiectiile uplelor t si t′ pe X, Z,T1 :

$t \rightarrow ((t_1 - t_4),(t_3, t_4, t_6, t_7),(t_5, t_8))$

$t' \rightarrow ((t'_1 - t'_4), (t'_3, t'_4, t'_6, t'_7), (t'_5, t'_8))$

Deoarece r satisface $X \rightarrow\rightarrow Z$, exista $t'' \in r$, astfel

ıncat proiectiile lui t′′ pe X, Z, T1 sunt :

$t'' \rightarrow ((t_1 - t_4), (t_3, t_4, t_6, t_7), (t'_5, t'_8))$

Avem $t''_2 = t_2 = t'_2$ si $t''_5 = t'_5$, deci $t''[Y] = t'[Y]$.

Deoarece r satisface $Y \to Z'$, obtinem $t''[Z'] = t'[Z']$, adica $t''_6 = t'_6$, dar $t''_6 = t_6$. Deci $t_6 = t'_6$.

Sa aratam acum FD-MVD3:

Presupunem ca r satisface $X \to\to Y$ si $XY \to Z$.

Aratam ca r satisface

$X \to Z - Y$.

$X = \{1, 2, 3, 4\}$

$Y = \{2, 3, 5, 6\}$

$Z = \{3, 4, 6, 7\}$

$Z - Y = \{4, 7\}$

$T1 = U - XY = \{7, 8\}$.

Fie $t, t' \in r$, astfel ıncat $t[X] = t'[X]$, adica

$t_i = t'_i$, $i = 1, 4$. Sa aratam ca

$t[Z - Y] = t'[Z - Y]$, adica $t_7 = t'_7$.

(Avem $t_4 = t'_4$).

Proiectam t si t′ pe X, Y si T1:

$t \to ((t_1 - t_4), (t_2, t_3, t_5, t_6), (t_7, t_8))$

$t' \to ((t'_1 - t'_4), (t'_2, t'_3, t'_5, t'_6), (t'_7, t'_8))$

Deoarece r satisface $X \to\to Y$, exista $t'' \in r$,

astfel ıncat proiectiile lui t'' pe X, Y si T1 sunt:

$t'' \to ((t_1 - t_4), (t_2, t_3, t_5, t_6), (t'_7, t'_8))$

Avem $t''_i = t_i$, $i = 1, 6$.

Deoarece r satisface $XY \to Z$, rezulta $t''[Z] = t[Z]$,

de unde $t''_7 = t_7$. Dar $t''_7 = t'_7$, deci $t'_7 = t_7$.

Pentru fiecare proprietate a dependentelor multivaluate asociem o regula formala prin aceeasi metoda ca la dependentele functionale:

$$\text{MVD0f: } \frac{XYZ = U \text{ si } Y \cap Z \subseteq X,\ X \rightarrow\rightarrow Y}{X \rightarrow\rightarrow Z}$$

$$\text{MVD1f: } \frac{Y \subseteq X}{}$$

$$X \rightarrow\rightarrow Y$$

MVD2f: $Z \subseteq W,\ X \rightarrow\rightarrow Y$

$$XW \rightarrow\rightarrow YZ$$

MVD3f: $X \rightarrow\rightarrow Y,\ Y \rightarrow\rightarrow Z$

$$X \rightarrow\rightarrow Z - Y$$

MVD4f: $X \rightarrow\rightarrow Y,\ YW \rightarrow\rightarrow Z$

$$XW \to\to Z - YW$$

MVD5f:

$$\frac{X \to\to Y,\ X \to\to Z}{X \to\to YZ}$$

MVD6f:

$$\frac{X \to\to Y,\ X \to\to Z}{X \to\to Y \cap Z,\ X \to\to Y - Z,\ X \to\to Z - Y}$$

FD-MVD1f: $\dfrac{X \rightarrow Y}{X \rightarrow\rightarrow Y}$

FD-MVD2f: $\dfrac{X \rightarrow\rightarrow Z,\ Y \rightarrow Z',\ Z' \subseteq Z,\ Y \cap Z = \emptyset}{X \rightarrow Z'}$

FD-MVD3f: $\dfrac{X \to\to Y,\ XY \to Z}{X \to Z - Y}$

Propozitia 3. Regulile de inferenta enuntate mai sus sunt valide.

Demonstratie. Rezulta imediat din propozitia 2.

Propozitia 4. Fie $\mathscr{R}$ o multime de reguli valide si o regula: $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$

σ ,

astfel ıncat $\{ \sigma_1, . . . ,\sigma_k \}|\!-\!-_{\mathscr{R}}\sigma$, atunci si regula este valida.

Afirmatia rezulta usor prin inductie dupa lungimea demonstratiei ın $\{ \sigma_1, . . . ,\sigma_k \}$ utilizand $\mathscr{R}$. Faptul ca $\{ \sigma_1, . . . ,\sigma_k \}|\!-\!-_{\mathscr{R}}\sigma$ ıl vom numi: “regula se exprima cu ajutorul regulilor de inferenta din $\mathscr{R}$”. In continuare, vom considera ın afara de regulile de inferenta de mai sus si regulile de inferenta FD1f, FD2f, FD3f pentru dependentele functionale.

Propozitia 5 Fie $\mathscr{R}_{FM}$ = { FD1f-FD3f, MVD0f-MVD3f, FD-MVD1f- FD-MVD3f }. Avem:

FD-MVD3f se exprima prin celelalte reguli din $\mathscr{R}_{FM}$ si FD-MVD2f se exprima prin celelalte reguli din $\mathscr{R}_{FM}$.

Demonstratie. Fie σ_1: $X \rightarrow\rightarrow Y$ si σ_2 : $XY \rightarrow Z$.

Aplicam la prima MVD0f obtinem

σ_3: $X \rightarrow\rightarrow U - XY$. Din $XY \rightarrow Z$ si $Z \rightarrow Z - XY$

(obtinuta din FD1f) prin FD3f rezulta

σ_4 : $XY \rightarrow Z - XY$. Deoarece $Z - XY \subseteq U - XY$

si $XY \cap (U - XY) = \emptyset$, putem aplica FD-MVD2f

pentru σ_3 si σ_4 si obtinem: σ_5 : $X \rightarrow Z - XY$.

Dupa FD1f avem σ_6: $X \rightarrow X \cap Z - Y$.

Aplicand FD5f care se exprima cu ajutorul regulilor FD1f-FD3f (Propozitia 1.3 Cap. II) rezulta $\sigma_7 : X \to Z - Y$, adica FD-MVD3f se exprima prin celelalte reguli din $\mathscr{R}_{FM}$.

Fie date $\sigma_1 : X \to\to Z$, $\sigma_2 : Y \to Z'$ cu conditiile $Z' \subseteq Z$ si $Y \cap Z = \varnothing$.

Aplicand MVD0f lui σ_1 obtinem:

$\sigma_3 : X \to\to U - XZ$.

Deoarece $Y \subseteq X(U - XZ)$ prin FD1f obtinem:

σ_4: $X(U - XZ) \rightarrow Y$. Aplicand FD3f pentru σ_4 si σ_2 se obtine σ_5: $X(U - XZ) \rightarrow Z'$.

Putem aplica regula FD-MVD3f pentru σ_3 si σ_5, ceea ce conduce la σ_6: $X \rightarrow Z' - (U - XZ)$.

Dar $Z' - (U - XZ) = Z'$. Deci σ_6: $X \rightarrow Z'$.

In concluzie, regula FD-MVD2f se exprima prin celelalte reguli din $\mathscr{R}_{FM}$.

Propozitia 6. Regulile MVD4f-MVD6f se exprima cu ajutorul regulilor MVD0f-MVD3f.

Demonstratie. Fie σ_1: X $\rightarrow\rightarrow$ Y si σ_2: YW $\rightarrow\rightarrow$ Z.

Aplicam pentru σ_1 si W $\subseteq$ W regula MVD2f si obtinem: σ_3: XW $\rightarrow\rightarrow$ YW.

Pentru σ_3 si σ_2 aplicam MVD3f si se obtine:

σ_4: XW $\rightarrow\rightarrow$ Z − YW.

Deci $\{\sigma_1, \sigma_2\} \vdash_{\{MVD2f,\ MVD3f\}} \sigma_4$

(regula pentru pseudotranzitivitate).

Consideram acum MVD5f. Fie σ_1: $X \rightarrow\rightarrow Y$ si σ_2 : $X \rightarrow\rightarrow Z$.

Din σ_1, $Z \subseteq Z$ si MVD2f se obtine

σ_3 : $XZ \rightarrow\rightarrow YZ$. Aplicand lui σ_3 regula MVD0f se obtine

σ_4: $XZ \rightarrow\rightarrow (U - XYZ)$. Din σ_2, $X \subseteq X$ si MVD2f rezulta σ_5: $X \rightarrow\rightarrow XZ$. Din σ_5, σ_4 si regula MVD3f rezulta σ_6: $X \rightarrow\rightarrow U - XYZ$.

Aplicand pentru σ_6 regula MVD0f rezulta

σ_7: $X \rightarrow\rightarrow YZ$.

Fie σ_1: $X \rightarrow\rightarrow Y$ si σ_2 : $X \rightarrow\rightarrow Z$.

Din $X \rightarrow\rightarrow X$ (reflexivitate) si σ_1 prin MVD3f obtinem $\sigma_3 : X \rightarrow\rightarrow Y - X$.

Aplicand lui σ_3 regula MVD0f obtinem

σ_4: $X \rightarrow\rightarrow U - XY$.

Din $X \rightarrow\rightarrow X$ si $X \rightarrow\rightarrow Z$ prin MVD3f obtinem:

σ_5: $X \rightarrow\rightarrow Z - X$. Aplicand acesteia MVD0f obtinem:

σ_6: $X \rightarrow\rightarrow U - XZ$. Aplicand acum MVD4f (reuniunea) pentru σ_4 si σ_6 obtinem:

σ_7: $X \to\to (U-XY)(U-XZ)$. Aplicam acum MVD0f pentru σ_7, vom avea:

σ_8: $X \to\to Y \cap Z - X$. Prin MVD1f avem

σ_9: $X \to\to X \cap Y \cap Z$.

Prin reuniune (MVD4f) din σ_8 si σ_9 se obtine

σ_{10}: $X \to\to Y \cap Z$.

Astfel, pornind de la σ_1 si σ_2 si aplicand regulile MVD0f-MVD3f se obtine σ_{10}.

Sa aratam acum cea de a doua parte a lui MVD6f. Pornim de la σ_1: $X \rightarrow\rightarrow Y$ si σ_2 : $X \rightarrow\rightarrow Z$. Aplicand MVD5f se obtine $X \rightarrow\rightarrow YZ$.

De aici, prin MVD0f, se obtine:

σ_3: $X \rightarrow\rightarrow U - XYZ$. Aplicam MVD5f pentru σ_2 si σ_3 ceea ce produce:

σ_4: $X \rightarrow\rightarrow Z(U - XYZ)$. Pentru σ_4 aplicam MVD0f, ceea ce conduce la

σ_5: $X \to\to Y - XZ$. Prin reflexivitate avem σ_6 : $X \to\to X \cap Y - Z$. Prin MVD5f din σ_5 si σ_6 se obtine: σ_7 : $X \to\to Y - Z$. In mod similar, se obtine $X \to\to Z - Y$ (schimband ın fond Y cu Z peste tot).

Teorema 1. Fie Σ o multime de dependente functionale sau multivaluate si X o submultime de atribute. Atunci exista o partitie a lui $U - X$ notate prin $\{Y_1, . . . , Y_k\}$, astfel ıncat pentru $Z \subseteq U - X$ avem $\Sigma|\text{--}_{\mathscr{R}_{FM}}\ X \to\to Z$ iff Z este reuniunea unui numar de multimi din partitia $\{Y_1, . . . , Y_k\}$.

Demonstratie. Construim partitia notata P, astfel: initial consideram ın P numai $U - X$. Fie P obtinuta la un moment dat avand elementele $W_1, \ldots, W_n$.

Presupunem ca $\Sigma|\!\!-\!\!-_{\mathscr{R}_{FM}}\ X \twoheadrightarrow W_i$, pentru orice $i = 1, n$ (initial $\Sigma \vdash X \twoheadrightarrow U - X$ dupa MVD0f si MVD1f).

Fie $\Sigma|\!-\!-_{\mathscr{R}_{FM}} X \to\to Z$ si $Z \subseteq U - X$ si Z nu este reuniune de multimi W_i.

Deoarece P este partitie pentru $U - X$, rezulta ca exista W_i din P, astfel ıncat $W_i \cap Z \neq \emptyset$ si $W_i - Z \neq \emptyset$. Pentru fiecare astfel de W_i din P ınlocuim ın P pe W_i cu $W_i \cap Z$ si $Wi - Z$. Deoarece $\Sigma|\!-\!-_{\mathscr{R}_{FM}} X \to\to Z$ si dupa ipoteza inductiei $\Sigma|\text{--}_{\mathscr{R}_{FM}} X \to\to W_i$, aplicand MVD6f se obtine $\Sigma|\text{--}_{\mathscr{R}_{FM}} X \to\to W_i \cap Z$ si $\Sigma|\text{--}_{\mathscr{R}_{FM}} X \to\to W_i - Z$.

Altfel spus, noua partitie satisface aceeasi proprietate ca vechea partitie.

Deoarece U este finita si multimea dependentelor functionale sau multivaluate este finita, rezulta ca algoritmul de mai sus este finit. (Numarul partitiilor lui $U - X$ este de asemenea finit).

Fie $P = \{Y_1, \ldots, Y_k\}$ partitia finala obtinuta.

Rezulta prin inductie

dupa pasii folositi ın constructia lui P ca:

$\Sigma \vdash_{\mathscr{R}_{FM}} X \rightarrow\rightarrow Y_i$, $i = \overline{1, k}$.

Daca $Z \subseteq U - X$ este reuniune de Y_i, adica $Z = Y_{i1} \cup \ldots \cup Y_{ih}$, aplicand MVD5f se obtine $\Sigma \vdash_{\mathscr{R}_{FM}} X \twoheadrightarrow Z$.

Invers. Pentru $Z \subseteq U - X$, daca $\Sigma \vdash_{\mathscr{R}_{FM}} X \twoheadrightarrow Z$, atunci Z este reuniune de Y_i, pentru ca altfel s-ar putea rafina partitia P, ceea ce este o contradictie.

Definitia 3. Pentru Σ o multime de dependente functionale sau multivaluate si X o submultime de atribute, numim baza de dependenta pentru X cu privire la Σ, partitia $B(\Sigma,X) = \{\{A_1\} \ldots \{A_h\}, Y_1, \ldots, Y_k\}$, unde

$X = A_1 \ldots A_h$, iar $Y_1 \ldots Y_k$ este partitia construita ın teorema 1.

Observatia 4. Avem $\Sigma|\text{--}_{\mathscr{R}_{FM}}\ X \rightarrow\rightarrow Z$ iff Z este o reuniune de elemente din partitia $B(\Sigma,X)$.

In adevar, daca Z este reuniune de elemente din $B(\Sigma,X)$, atunci fie

$Z = A_{i1} \ldots A_{it} \cup Y_{j1} \cup \ldots \cup Y_{jl}$.

Avem : $\Sigma|\text{--}_{\mathscr{R}_{FM}}\ X \rightarrow\rightarrow A_{ip}$, $p = 1, t$ dupa MVD1f si $\Sigma|\text{--}_{\mathscr{R}_{FM}}\ X \rightarrow\rightarrow Y_{jq}$, $q = 1, l$ dupa teorema 1.

Aplicand acestora MVD5f se obtine

$\Sigma|\text{--}_{\mathscr{R}FM}\ X \to\to Z.$

Invers, presupunem c˘a avem $\Sigma|\mathscr{R}FM$

$X \to\to Z$. Fie $Z = X1 \cup Z1$,

unde $X1 \subseteq X$ si $Z1 \subseteq U - X$. $(X1 \cap Z1 = \emptyset)$.

Dup˘a MVD6f rezulta

$\Sigma|\mathscr{R}_{FM}\ X \to\to Z1$. De aici dupa teorema 1,

$Z1 = Y_{j1} \cup \ldots \cup Y_{jl}$.

Daca $X1 = A_{i1} \ldots A_{it}$, atunci Z este reuniunea elementelor $A_{i1} \ldots A_{it}$, $Y_{j1} \ldots Y_{jl}$ din $B(\Sigma,X)$.

Observatia 5. Fie $X_{\Sigma} = \{A | \Sigma |\mathscr{R}_{FM} \ X \rightarrow A\}$.

Atunci pentru orice $A \in X*_{\Sigma}$ avem $\{A\}$ $B(\Sigma,X)$.

In adevar, pentru $A \in X*_{\Sigma}$ dupa FD-MVD1f, obtinem $\Sigma |\mathscr{R}_{FM} \ X \rightarrow\rightarrow A$ si aplicand teorema 1, rezulta $\{A\} \in B(\Sigma,X)$.

1 Studiul dependentelor functionale si multivaluate utilizand calculul propozitional

Pentru fiecare atribut $A \in U$ asociem o variabila propozitionala notata a. Pentru o dependenta functionala $\sigma: A_1 \ldots A_m \rightarrow B_1 \ldots B_h$ asociem formula (numita implicatie) $\sigma : a_1 \ldots a_m \Rightarrow b_1 \ldots b_h$ (ca ın cazul studiului dependentelor functionale, utilizand calculul propozitional, capitolul II, §2).

Daca $\sigma : A_1 \ldots A_m \rightarrow\rightarrow B_1 \ldots B_h$ este o dependenta multivaluata

si $U - A_1 \ldots A_m B_1 \ldots B_h = C_1 \ldots C_p$, atunci formula asociata lui σ va fi

$\sigma: a_1 \ldots a_m \Rightarrow b_1 \ldots b_h + c_1 \ldots c_p$.

Semnul + noteaza disjunctia logica.

Daca $\sigma : X \rightarrow Y$, atunci _ se noteaza si prin $x \Rightarrow y$. Daca $\sigma : X \rightarrow\rightarrow Y$, atunci _ se noteaza si prin $x \Rightarrow\Rightarrow y$.

Multimile X, Y si $Z = U - XY$ pot fi vide. Facem conventia ca pentru multimea vida $\varnothing$, formula asociata are valoarea true (conjunctia unei multimi vide de variabile propozitionale este true).

Propozitia 1.1 $x \Rightarrow\Rightarrow y$ este true iff $x \Rightarrow\Rightarrow y - x$ este true.

Demonstratie. Daca $X = A_1 \ldots A_m$, $Y = B_1 \ldots B_h$ si $Z = U - XY = C_1 \ldots C_p$, atunci $x \Rightarrow\Rightarrow y$ este

$$a_1 \ldots a_m \Rightarrow b_1 \ldots b_h + c_1 \ldots c_p.$$

Fie $Y - X = B_1 \ldots B_t$ si $Y \cap X = B_{t+1} \ldots B_h$.

Daca δ este o asignare, astfel ıncat

$\delta(x \Rightarrow\Rightarrow y) = true$, atunci putem avea:

a) exista i, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, astfel ıncat $\delta(a_i) =$ false.

In acest caz $\delta(x \Rightarrow y - x) = true$.

b) $\forall i$, $i \in \{1, 2, \ldots m\}$, $\delta(a_i) = true$.

De aici $\delta(a_1 \ldots a_m) = true$.

Rezulta $\delta(b_1 \dots b_h)$ = true sau $\delta(c_1 \dots c_p)$ = true.

b1) $\delta(b_1 \dots b_h)$ = true implica $\delta(b_1 \dots b_t)$ = true, deci $\delta(x \Rightarrow (y - x) + c_1 \dots c_p)$ = true.

b2) $\delta(c_1 \dots c_p)$ = true atunci $\delta(x \Rightarrow\Rightarrow y - x)$ = true.

Invers rezulta similar.

Pentru simplitatea scrierii vom considera valoarea de adevar true notata prin 1, iar false prin 0.

Ca si ın cazul dependentelor functionale, intentia noastra este de a stabili o legatura ıntre notiunea de consecinta din domeniul dependentelor functionale si multivaluate si notiunea de

consecinta logica din calculul propozitional.

Exemplul 1.1 Fie $U = \{A,B,C,D\}$, si $\Sigma = \{A \to\to B, C \to B\}$ si

$\sigma: A \to B$. Atunci _ : $a \Rightarrow b$,

$\Sigma = \{a \Rightarrow b + cd, c \Rightarrow b\}$.

Aratam ca $\Sigma \models$ _. In adevar, fie r o relatie ce

satisface dependentele

$A \rightarrow\rightarrow B$ si $C \rightarrow B$. Sa aratam ca r satisface $A \rightarrow B$. Fie $t_1, t_2 \in r$ cu $t_1[A] = t_2[A]$ si fie

$t_1 = (a1, b1, c1, d1)$ si $t_2 = (a2, b2, c2, d2)$.

Deoarece r satisface $A \rightarrow\rightarrow B$, rezulta ca exista $t_3, t_4 \in r$, astfel ıncat $t_3 = (a1, b1, c2, d2)$ si $t_4 = (a1, b2, c1, d1)$. Deoarece $t1, t4 \in r$ si r satisface $C \rightarrow B$, rezulta ca b1 = b2, adica $t_1[B] = t_2[B]$, deci r satisface A → B. Aratam acum ca $\Sigma \models_{c.l.}$ _.

Fie δ o asignare, astfel ıncat $\delta(a \Rightarrow b + cd) = 1$ si $\delta(c \Rightarrow b) = 1$.

Sa aratam ca $\delta(a \Rightarrow b) = 1$.

Daca $\delta(a) = 0$, atunci am terminat.

Daca $\delta(a) = 1$, atunci $\delta(b+cd) = 1$, deci $\delta(b) = 1$ sau $\delta(cd) = 1$; ın cazul $\delta(b) = 1$ am terminat.

In cazul $\delta(cd) = 1$ rezulta $\delta(c) = 1$ si cu $\delta(c \Rightarrow b) = 1$ se obtine $\delta(b) = 1$, deci iarasi $\delta(a \Rightarrow b) = 1$.

Teorema 1.1 Teorema de echivalenta.

Fie Σ o multime de dependente functionale sau multivaluate si σ o dependenta functionala sau multivaluata.

Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

a) σ este o consecinta a lui Σ.

b) σ este o consecinta a lui Σ pe multimea relatiilor cu 2 uple.

c) este consecinta logica a lui Σ.

Vom da ıntai o demonstratie sintactica a teoremei de echivalenta. Pentru aceasta vom considera reguli de inferenta pentru implicatii ce se construiesc pornind de la regulile de inferenta din $\mathscr{R}$FM = {FD1f-FD3f, MVD0f-MVD3f, FD-MVD1f-FD-MVD3f}

In capitolul II am considerat regulile de inferenta A1′, A2′, A3′ pentru

implicatii din calculul propozitional, reguli ce corespund axiomelor lui Armstrong.

Enuntam regulile de inferenta asociate celor din

$\mathscr{R}$FM:

FD1′: $y \subseteq x$

$$\frac{y \subseteq x}{x \Rightarrow y}$$

$y \subseteq x$ noteaza faptul ca orice variabila ce apare

ın y, apare de asemenea ın x.

FD2′: $x \Rightarrow y,\ z \subseteq w$

$$xw \Rightarrow yz$$

FD3′: $x \Rightarrow y,\ y \Rightarrow z$

$$x \Rightarrow z$$

MVD0′: $xyz = u,\ y \cap z \subseteq x,\ x \Rightarrow\Rightarrow y$

$$x \Rightarrow\Rightarrow z$$

u este conjunctia tuturor variabilelor asociate lui U.

MVD1′: $y \subseteq x$

$$\frac{y \subseteq x}{x \Rightarrow\Rightarrow y}$$

MVD2′: $z \subseteq w,\ x \Rightarrow\Rightarrow y$

$$\frac{z \subseteq w,\ x \Rightarrow\Rightarrow y}{xw \Rightarrow\Rightarrow yz}$$

MVD3′: $x \Rightarrow\Rightarrow y,\ y \Rightarrow\Rightarrow z$

$x \Rightarrow\Rightarrow z - y$

FD-MVD1′: $x \Rightarrow y$

$x \Rightarrow\Rightarrow y$

FD-MVD2′: $x \Rightarrow\Rightarrow z,\ y \Rightarrow z',\ z' \subseteq z,\ y \cap z = \emptyset$

$$x \Rightarrow z'$$

FD-MVD3′: $x \Rightarrow\Rightarrow y,\ xy \Rightarrow z$

$$\frac{}{x \Rightarrow z - y}$$

Observatia 1.2 Deoarece sistemul de reguli {A1′, A2′, A3′} este valid si {A1′, A2′, A3′} este echivalent cu {FD1′,FD2′,FD3′} (ın virtutea faptului ca {A1, A2, A3} este echivalent cu {FD1f, FD2f, FD3f} si Σ-- $_{\{FD1f\text{-}FD3f\}}$ σ iff Σ--$|_{\{A1,A2,A3\}}$ σ) rezulta ca FD1′, FD2′, FD3′ sunt valide. Aceasta afirmatie rezulta desigur si direct.

Observatia 1.3 In virtutea propozitiei 5 ne vom dispensa de una din regulile FD-MVD2′ sau FD-MVD3′. Vom renunta la ultima.

Lema 1.4 Regulile de inferenta FD1′-FD3′, MVD0′-MVD3′, FD-MVD1′,FD-MVD2′ sunt valide. Fie $\mathscr{R}$FM′ multimea acestor reguli.

Demonstratie. Primele 3 sunt valide dupa observatia 1.2.

$MVD0'$ este valida: Consideram reprezentarea multimilor de variabile

din x, y, z, $u - xy$, $u - xz$:

Din ipotezele respective se obtine: $6 = \emptyset$ si $8 = \emptyset$.

Fie $t1 = u - xy$ si $t2 = u - xz$.

Sa notam prin i conjunctia variabilelor din domeniul i, i = 1, 5, 7.

Formula $x \Rightarrow\Rightarrow y$ se scrie astfel: $1\ 2\ 3\ 4 \Rightarrow 2\ 3\ 5 + 7$, iar $x \Rightarrow\Rightarrow z$ devine

$1\ 2\ 3\ 4 \Rightarrow 3\ 4\ 7 + 5$.

Fie δ o asignare astfel ıncat $\delta(x \Rightarrow\Rightarrow y) = 1$.

Daca $\delta(1\ 2\ 3\ 4) = 0$, atunci $\delta(x \Rightarrow\Rightarrow z) = 1$.

Daca $\delta(1\ 2\ 3\ 4) = 1$, atunci $\delta(2\ 3\ 5) = 1$ sau $\delta(7) = 1$.

Cand avem $\delta(2\ 3\ 5) = 1$, atunci $\delta(5) = 1$, deci $\delta(x \Rightarrow\Rightarrow z) = 1$.

Cand avem $\delta(7) = 1$, atunci $\delta(3\ 4\ 7) = 1$, deci $\delta(x \Rightarrow\Rightarrow z) = 1$.

Observatia 1.4 Fie Σ o multime de formule din calculul propozitional si Σ^+ multimea formulelor ce pot fi derivate din Σ, utilizand regulile de inferenta FD1′-FD3′, MVD0′- MVD3′, FD-MVD1′, FD-MVD2′.

Atunci dupa lema 1.4 rezulta ca $\Sigma \models_{c.l.} \Sigma^+$, adica formulele din Σ^+ sunt consecinte logice ale formulelor din Σ.

Lema 1.5 Fie Σ o multime de formule asociate multimii Σ de dependente functionale sau multivaluate si X o multime de atribute.

Fie $X^+ = \{A | \Sigma\text{--}_{FM}\ X \to A\}$. Fie $B(\Sigma,X)$ baza de dependenta pentru X cu privire la Σ si $W \in B(\Sigma,X)$, astfel ıncat $W \cap X+ = \emptyset$. Consideram asignarea δ_0 definita astfel: $\delta_0(a) = 0$ iff $A \in W$. Atunci avem: $\delta_0(\_) = 1$ pentru $\_ \in \Sigma$.

Teorema 1.2 (Teorema de completitudine pentru formule).

Fie Σ multimea de formule asociate multimii Σ de dependente functionale sau multivaluate si _ formula asociata dependentei _ (functionala sau multivaluata). Atunci _ este consecinta logica a lui Σ daca si numai daca _ poate fi demonstrata ın Σ utilizand regulile de inferenta

$\mathscr{R}$FM′. Pe scurt: $\Sigma \models_{c.l.}$ _ iff $\Sigma|$FM′ _.

In continuare vom da demonstratia sintactica a

teoremei de echivalenta.

Teorema 1.3 (Teorema de echivalenta). Fie Σ o

multime de dependente

functionale sau multivaluate si _ o dependenta functionala sau multivaluata.

Atunci sunt echivalente urmatoarele afirmatii:

a) _ este o consecinta a lui Σ.

b) _ este o consecinta a lui Σ pe domeniul relatiilor cu 2 uple.

c) _ este o consecina logica a lui Σ.

Demonstratie.

a) implica b) rezulta imediat.

Aratam ca b) implica c). Fie b) adevarata si presupunem c) falsa.

Atunci exista o asignare δ, astfel ıncat δ(_) = 1 pentru orice _ $\in$ Σ si δ(_) = 0.

Consideram relatia r cu 2 uple t_1 si t_2 definite astfel:

$t_1[A] = 1$ pentru orice $A \in U$, $t_2[A] = 1$ iff $\delta(a) = 1$.

Dupa lema 2.5 obtinem:

r satisface _, orice _ $\in \Sigma$ si r nu satisface _,

ceea ce contrazice b).

Aratam acum: c) implica a). Fie _ consecinta logica a lui Σ. Dupa teorema 1.1 rezulta ca $\Sigma|\mathscr{R}'FM$ _, de unde $\Sigma|\mathscr{R}FM$ _.

Avem atunci $\Sigma \models$ _,

deoarece regulile din $\mathscr{R}$FM sunt valide.