# Monoizi de cuvinte

monoid → comutativ ; → asociativ

Def. cuvânt de lungime $k \geq 1$ peste $\Sigma$ este o funcție $w : \{1, \dots, k\} \to \Sigma$

$w = w(1) \dots w(k)$, dacă $k \geq 1$, atunci $|w| = k$

$\lambda$ - cuvântul vid

Notații $\Sigma^0 = \{\lambda\}$

$\Sigma^+ = \bigcup_{k \geq 1} \Sigma^k$, $k \geq 1$

$\Sigma^* = \bigcup_{k \geq 0} \Sigma^k = \Sigma^+ \cup \{\lambda\}$

2 cuv. sunt egale $u, v \in \Sigma^k \iff |u| = |v|$ și $u(i) = v(i)$, $\forall i = \overline{1,k}$

Thm. Levi $x, y, u, v$ cuvinte, a.î. $xy = uv$ ; $|x| < |u|$, at. $\exists! z \in \Sigma^+$, a.î. $u = xz$

$|x| = |u| \Rightarrow x = u ; y = v$

$|x| > |u|$, $\exists! z$ $x = uz$

Def. $C$ cod, $C \subseteq \Sigma^+ \iff \forall w \in C^+$, $w = u_1 \cdots u_n = v_1 \cdots v_m$, $u_i, v_j \in C \Rightarrow$

$\Rightarrow (n = m) \wedge (u_i = v_i, \forall i)$ → o concatenare de cuvinte din $C$

$\nexists$ dacă C e cod!

$w = abbaabbaabb$

$w = 2\ 1\ 3\ 4\ 3\ 4 = 43434$

$ab|b|a|abb|a|abb = ab^2|a|ab^2|a|ab^2$

$(ab)^2 = abab$

$$\boxed{C_1 = \{\underset{1}{b}, \underset{2}{ab}, \underset{3}{a}, \underset{4}{abb}\}}$$

Ex1 Produsul a 2 coduri nu este întotdeauna cod.

$C_1 = \{ \boxed{w_1} \boxed{w_2} \boxed{w_3} \}$ $\qquad \boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ } = w_1 w_2 w_2 w_1 \to$ scriere unică ($c_1$ - cod)

$C_2 = \{ \qquad \}$

$C_1 = \{\overset{w_1}{01}, \overset{w_2}{11}\} \to c_1$ cod?

$C_1C_2 = \{ \boxed{w_i}\boxed{u_j} \} \to \forall w_i \in C_1$ și $\forall u_j \in C_2$

$C_2 = \{\underset{u_1}{00}, \underset{u_2}{001}\} \to c_2$ cod?

$C_2C_1 = \{ \boxed{u_j}\boxed{w_i} \}$

$C_1C_2 = \{0100, 01001, 1100, 11001\}$

$C_2C_1 = \{0001, 0011, 00101, 00111\}$

$\boxed{u_i w_j}$ $\qquad \boxed{u_{i+3} w_{j-1}}$

Alg. Sardinas-Patterson $\quad C = \{ \overset{ab}{\boxed{c}}, \boxed{\phantom{c}}, \overset{abcd}{\boxed{c \mid x}} \}$ ? C este cod?

$C_1 = \{ x \in \Sigma^+ \mid \exists c \in C, \underbrace{cx}_{abcd} \in C \}$

cd sufixul $\searrow$ ab $\quad c_i = \{a, \ldots$

$C_{i+1} = \{ x \in \Sigma^+ \mid (\exists c \in C, cx \in C_i) \vee (\exists c \in C_i, cx \in C) \}$

$C_t = C_j, j < t \Rightarrow$ oprire

Dacă $C_i \cap C = \emptyset, \forall i \Rightarrow C$ cod

Ex3 a) $C = \{ab, ab^2, b^3a\}$

b) $C = \{aba^2, ba^2, (ab)^2, aba^2bab\}$

c) $C = \{ab, ab^m, b^n a\} \quad m, n \geq 1$

$abbb = ab^3$

a) $C_1 = \{b\} \cap C = \emptyset \quad (ab, ab\underline{b})$

$C_2 = \{b^2a\} \cap C = \emptyset \quad (b, b\underline{bba})$

$C_3 = \emptyset$

$C_4 = \emptyset \Rightarrow C$ cod

b) $C_1 = \{bab\} \cap C = \emptyset \quad (abaa, abaa\underline{bab})$

$C_2 = \emptyset = C_3 \Rightarrow C$ cod.

**Ex2** Fie $C$ cod, $k \geq 2$, dem. că $C^k$ este cod; $C^k = \{w_1 \cdots w_k \mid w_i \in C\}$

$w = u_1 u_2 \cdots u_k$, $u_i \in C^k$ $\quad$ $\boxed{1 \mid \cdots \mid k} \in C^k$ $\quad \forall a_i = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}$

Pres că $C^k$ nu e cod, adică $\Rightarrow \exists x \in (C^k)^+$ $x$ se scrie în 2 moduri:

$x = a_1 a_2 \cdots a_m = b_1 b_2 \cdots b_m \Rightarrow a_i \in C^k \Rightarrow a_i = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}$ concatenare de $k$ cuvinte din $C$; $a_i, \forall i$, are scriere (descompunere) unică în cuvinte din $C$

Similar pt $b_i$

$x = \underbrace{\boxed{a_{1_1} a_{1_2} \cdots a_{1_k}}}_{a_{i_j} \in C} \boxed{a_{2_1} \cdots a_{2_k}} \cdots \boxed{a_{m_1} \cdots a_{m_k}} = \boxed{b_{1_1} \cdots b_{1_k}} \underbrace{\boxed{b_{2_1} \cdots b_{2_k}}}_{\forall b_{i_j} \in C} \cdots \boxed{b_{m_1} \cdots b_{m_k}}$

$C$ cod $\Rightarrow a_{i_j} = b_{i_j}, \forall i, j \Rightarrow m = m \Rightarrow C^k$ cod $\Rightarrow$ contradicție!

$\Downarrow$

$a_i = b_i, \forall i$ $\quad$ Scrierea (desc.) e unică.