Capitolul 6

Rezoluție în Logica Propozițională Varianta Preliminară

Deducția naturală este un sistem deductiv *care este aproapiat de raționamentul uman.*

Totuși, un minus al deducție naturale este că, dându-se o secvență

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi,$$

este greu pentru un calculator să construiască o demonstrație formală a secvenței (i.e., nu este deosebit de eficient) din cauza numărului potențial mare de reguli de inferență care se pot aplica la fiecare pas.

Rezoluția este un sistem deductiv, la fel ca deducția naturală, dar este optimizat pentru calculatoare și nu pentru oameni. În particular, este ușor pentru un calculator să găsească demonstrații prin rezoluție (cel puțin, mai ușor decât să găsească demonstrații prin deducție naturală). Totuși, demonstrațiile formale prin rezoluție nu seamănă foarte mult cu gândirea umană. Există limbaje de programare (Prolog) care folosesc o variantă a rezoluției ca pasul de bază de execuție.

6.1 Recapiturale Forme Normale Conjunctive

Spre deosebire de deducția naturală, rezoluție lucrează doar cu *clauze* în loc de formule oarecare.

Un literal este o formulă care este sau o variabilă propozițională sau negația unei variabile propoziționale. De exemplu, formulele $\mathtt{p}, \neg\mathtt{p}, \mathtt{q}, \neg\mathtt{q}, \neg\mathtt{r_1}$ sunt literali, dar $\neg\neg\mathtt{p}$ și $(\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$ nu sunt literali.

O clauză este o disjuncție de literali. De exemplu, $p \vee q \vee r$ este o clauză, $\neg p \vee p \vee \neg q$ este altă clauză și $\neg p \vee \neg p$ este tot o clauză. Chiar p și $\neg p$ sunt clauze, din momement ce sunt disjuncții de 1 literal. Disjuncția a 0 literali se numește *clauza vidă* și se notează cu $\square$.

Formula $\square \in \mathbb{LP}$ este falsă în orice atribuire: $\hat{\tau}\Big(\square\Big) = 0$ pentru orice $\tau : A \to B$.

O formulă în *FNC* este o conjuncție de clauze. De exemplu, formula $(\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}) \wedge (\neg\mathtt{p}' \vee \mathtt{q} \vee \neg\mathtt{r})$ este în FNC (e o conjuncție de două clauze) și formula $(\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p}) \wedge (\neg\mathtt{q} \vee \mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \wedge (\mathtt{p})$ este tot în FNC (e o conjuncție de trei clauze). Formulele $(\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$ și $(\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})$ sunt și ele cazuri particulare de formule aflate în FNC, din moment ce prima este o conjuncție de o clauză, iar a doua este o conjuncție a două clauze.

Clauze ca mulțimi de literali

Știm despre disjuncție că este:

1. asociativă: pentru orice $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathbb{LP}$, $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \equiv ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$;
2. comutativă: pentru orice $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{LP}$, $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv (\varphi_2 \vee \varphi_1)$;
3. idempotentă: pentru orice $\varphi \in \mathbb{LP}$, $\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$.

Exercițiul 6.1. *Demonstrați cele trei echivalențe de mai sus.*

Acest lucru înseamnă, de exemplu, că clauzele $\mathtt{p} \vee \mathtt{p} \vee \mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q} \vee \neg\mathtt{q}$, $\neg\mathtt{q} \vee \mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q} \vee \mathtt{p}$, $p \vee \neg q$ sunt echivalente. Cele trei echivalențe de mai sus justifică folosirea următoarei notații:

Pentru orice literali $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$:

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} = \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n.$$

Altfel spus, o clauză este mulțimea literalilor săi.

De exemplu, mulțimea de literali $\{\mathtt{p}, \neg\mathtt{q}\}$ este o notație pentru oricare dintre clauzele $\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}$, $\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q} \vee \mathtt{p}$, $\neg\mathtt{q} \vee \neg\mathtt{q} \vee \neg\mathtt{q} \vee \mathtt{p}$ (toate cele trei clauze fiind echivalente).

FNC-urile ca mulțimi de clauze

Similar cu disjuncția, conjuncția satisface și ea următoarele proprietăți:

1. asociativitate: pentru orice $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathbb{LP}$, $(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)) \equiv ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3)$;
2. comutativitate: pentru orice $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{LP}$, $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv (\varphi_2 \wedge \varphi_1)$;
3. idempotență: pentru orice $\varphi \in \mathbb{LP}$, $\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$.

Exercițiul 6.2. *Demonstrați cele trei echivalențe de mai sus.*

Cele trei echivalențe de mai sus justifică următoarea notație: dându-se clauzele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, scriem $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ în loc de formula aflată în FNC $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$.

De exemplu, scriem $\{\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}, \mathtt{q} \vee \mathtt{r} \vee \mathtt{p}\}$ în loc de $(\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}) \wedge (\mathtt{q} \vee \mathtt{r} \vee \mathtt{p})$.

Mergând mai departe, putem combina cele două notații și să scriem, de exemplu, $\{\{\mathtt{p}, \neg\mathtt{q}\}, \{\mathtt{q}, \mathtt{r}, \mathtt{p}\}\}$ în loc de $(\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}) \wedge (\mathtt{q} \vee \mathtt{r} \vee \mathtt{p})$. Altfel spus, vom considera o formulă în FNC ca fiind o mulțime de mulțimi de literali.

Exercițiul 6.3. *Asigurați-vă că ați înțeles notațiile de mai sus și că puteți trece de la o notație la cealaltă ușor.*

Exercițiul 6.4. *Scrieți formula în FNC* $\mathtt{p} \vee \mathtt{q}$ *ca o mulțime de mulțimi de literali.*
Scrieți formula în FNC $\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}$ *ca o mulțime de mulțimi de literali.*
Scrieți formula în FNC $\square$ *ca o mulțime de mulțimi de literali.*

6.2 Rezoluția

Rezoluția este un sistem deductiv cu o singură regulă de inferență. Ipotezele și concluzia regulii de inferență sunt clauze (spre deosebire de deducția naturală, unde ipotezele și concluzia erau secvențe).

Iată singura regulă de inferență din sistemul deductiv al rezoluției:

$$\textsc{Rezoluție Binară}\ \frac{C \cup \{a\} \qquad D \cup \{\neg a\}}{C \cup D}$$

În regula de mai sus,C și D sunt clauze oarecare, văzute ca mulțimi de literali, și $a \in A$ este o variabilă propozițională oarecare. Din moment ce C este o clauză și $a \in A$ este o variabilă propozițională, avem că $C \cup \{a\}$ este de asemenea o clauză. Clauza $C \cup \{a\}$ este prima ipoteză a regulii de inferență.

A doua ipoteză este clauza $D \cup \{\neg a\}$. Concluzia regulii este tot o clauză, și anume $C \cup D$.

Iată un exemplu de aplicare a regulii de rezoluție:

1. $\{\mathtt{p}, \mathtt{q}\}$; (premisă)
2. $\{\neg\mathtt{p}, \neg\mathtt{r}\}$; (premisă)
3. $\{\mathtt{q}, \neg\mathtt{r}\}$. (prin R.B., liniile 1, 2, $a = \mathtt{p}$)

Știind că mulțimile de literali sunt chiar clauze, este la fel de corect să scriem demonstrația formală de mai sus sub forma:

1. $\mathtt{p} \vee \mathtt{q}$; (premisă)
2. $\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{r}$; (premisă)
3. $\mathtt{q} \vee \neg\mathtt{r}$. (prin R.B., liniile 1, 2, $a = \mathtt{p}$)

De fapt, chiar și regula de inferență poate fi scrisă sub forma

$$\text{REZOLUȚIE BINARĂ}\ \frac{C \vee a \qquad D \vee \neg a}{C \vee D,}$$

scriere care este la fel de corect și perfect echivalentă cu prezentarea regulii de inferență de mai sus. Asigurați-vă că înțelegeți ambele notații, deoarece le vom folosi în continuare pe amândouă.

Definiția 6.1. *Clauze $C \vee D$ rezultată în urma aplicării rezoluției se numește* rezolvent *al clauzelor $C \vee a$ și $D \vee \neg a$.*

Rezolventul a două clauze nu este unic. De exemplu, clauzele $\mathtt{p} \vee \mathtt{q}$ și $\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q} \vee \mathtt{r}$ au doi rezolvenți: $\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p} \vee \mathtt{r}$ și $\mathtt{q} \vee \neg\mathtt{q} \vee \mathtt{r}$. Putem distinge între rezolvenți prin marcarea explicită a *variabilei propoziționale* a pe care am folosit-o pentru a aplica regula de rezoluție:

Definiția 6.2. *Clauza $C \vee D$ rezultată în urma aplicării rezoluției se numește* rezolvent *al clauzelor $C \vee a$ și $D \vee \neg a$* după/în funcție de literalul a.

De exemplu, $\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{p} \vee \mathtt{r}$ este rezolventul după $\mathtt{q}$ al clauzelor $\mathtt{p} \vee \mathtt{q}$ și $\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q} \vee \mathtt{r}$, în timp ce $\mathtt{q} \vee \neg\mathtt{q} \vee \mathtt{r}$ este rezolventul lor în funcție de $\mathtt{p}$.

Observați că aplicarea unei reguli de inferență este foarte rigidă, regula trebuind aplicată exact așa cum este scrisă. De exemplu, o greșeală frecventă în aplicarea regulii este următoarea:

1. $\mathtt{p} \vee \mathtt{q} \vee \mathtt{r}$; (premisă)
2. $\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}$; (premisă)
3. $\mathtt{r}$. (**aplicare greșită** a regulii de rezoluție binară)

Pe linia 3, putem concluziona sau rezolventul după $\mathtt{p}$ sau după $\mathtt{q}$, dar nu are sens să amestecăm cei doi rezolvenți după $\mathtt{p}$ și $\mathtt{q}$. Asigurați-vă că ați înțeles acest aspect.

Iată prima variantă corectă:

1. $\mathtt{p} \vee \mathtt{q} \vee \mathtt{r}$; (premisă)
2. $\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}$; (premisă)
3. $\mathtt{q} \vee \mathtt{r} \vee \neg\mathtt{q}$; (rezolvent al 1, 2 după $a = \mathtt{p}$)

și iată a doua variantă corectă:

1. $\mathtt{p} \vee \mathtt{q} \vee \mathtt{r}$; (premisă)
2. $\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}$; (premisă)
3. $\mathtt{p} \vee \mathtt{r} \vee \neg\mathtt{p}$. (rezolvent al 1, 2 după $a = \mathtt{q}$)

6.3 Demonstrații formale

La fel ca în cazul deducției naturale,

Definiția 6.3. *O* demonstrație formală *a clauzei φ din mulțimea de clauze $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ este o listă de clauze $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ astfel încât, pentru orice $1 \leq i \leq m$:*

- *sau $\psi_i \in \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$,*
- *sau ψ_i este rezolventul a două clauze ψ_j, ψ_k care apare mai "devreme" în demonstrația formală: $1 \leq j, k < i$.*

Mai mult, ψ_m trebuie să fie aceeași formulă cu φ.

Clauzele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se numesc premisele demonstrației formale și φ se numește concluzia demonstrației formale.

Iată un exemplu de demonstrație a clauzei $\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}$ din $\neg\mathtt{r} \vee \mathtt{p} \vee \neg\mathtt{r}'$, $\mathtt{r} \vee \mathtt{p}$ și $\mathtt{r}' \vee \neg\mathtt{q}$ prin rezoluție:

1. $\neg\mathtt{r} \vee \mathtt{p} \vee \neg\mathtt{r}'$; (premisă)
2. $\mathtt{r} \vee \mathtt{p}$; (premisă)
3. $\mathtt{r}' \vee \neg\mathtt{q}$; (premisă)
4. $\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{r}'$; (rezoluție, 2, 1, $a = \mathtt{r}$)
5. $\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}$. (rezoluție, 3, 4, $a = \mathtt{r}'$)

Câteodată spunem *derivare (prin rezoluție) a clauzei φ* în loc de *demonstrație formală prin rezoluție a clauzei φ*. Iată o derivare a clauzei vide din $\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}, \mathtt{q}, \neg\mathtt{p}$:

1. $\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q}$; (premisă)
2. $\mathtt{q}$; (premisă)
3. $\neg\mathtt{p}$; (premisă)
4. $\mathtt{p}$; (rezoluție, 2, 1, $a = \mathtt{q}$)
5. $\square$. (rezoluție, 4, 3, $a = \mathtt{p}$)

O derivare a clauze $\square$ din $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ este numită câteodată o *respingere a mulțimii de clauze* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Exercițiul 6.5. *Pornind cu aceleași premise ca mai sus, găsiți o altă derivare prin rezoluție a clauzei $\square$.*

6.4 Corectitudine

Ca și deducția naturală, rezoluția este corectă. În această secțiune arătăm acest lucru.

Lema 6.1. *Fie $\varphi \in \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Avem că*

$$\varphi_1, \ldots \varphi_n \models \varphi.$$

Exercițiul 6.6. *Demonstrați lema 6.1.*

Lema 6.2. *Fie C, D două clauze și fie $a \in A$ o variabilă propozițională. Avem că*

$$C \cup \{a\}, D \cup \{\neg a\} \models C \vee D.$$

Exercițiul 6.7. *Demonstrați lema 6.2.*

Teorema 6.1 (Corectitudinea rezoluției)**.** *Dacă există o demonstrație prin rezoluție a clauzei φ din $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, atunci*

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi.$$

Proof. Fie $\psi_1, \ldots, \psi_m$ o demonstrație prin rezoluție a clauzei φ din $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Vom arăta prin inducție după $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ că

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi_i.$$

Fie $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ un întreg. Avem prin ipoteza de inducție că

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi_l \text{ for any } l \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$$

și arătăm că

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi_i.$$

Prin definiția unei demonstrații formale prin rezoluție, trebuie să fim în unul dintre următoarele două cazuri:

1. $\psi_i \in \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. În acest caz avem că

   $$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi_i$$

   prin lema 6.1, ceea ce e exact ce trebuia să arătăm.

2. ψ_i a fost obținută prin rezoluție din ψ_j, ψ_k, unde $1 \leq j, k < i$. În acest caz, ψ_j trebuie să fie de forma $\psi_j = C \vee a$, ψ_k trebuie să fie de forma $\psi_k = D \vee \neg a$ și $\psi_i = C \vee D$, unde C, D sunt clauze și $a \in A$ este o variabilă propozițională.

   Prin ipoteza de inducție avem că $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi_j$ și că $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi_k$. Înlocuind ψ_j și ψ_k cu $\psi_j = C \vee a$ și $\psi_k = D \vee \neg a$, avem că

   $$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models C \vee a$$

   și că

   $$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models D \vee \neg a.$$

   Arătăm că

   $$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models C \vee D.$$

   Fie τ un model pentru φ_1, ..., și φ_n. Avem că τ este model al $C \vee a$ și al $D \vee \neg a$ datorită celor două consecințe semantice de mai sus. Din lema 6.2, avem că τ este model al clauzei $C \vee D$. Dar $\psi_i = C \vee D$ și deci τ este model al ψ_i. Deoarece τ era un model arbitrar pentru φ_1, ..., și φ_n, avem că

   $$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi_i,$$

   care este fix ce trebuia să arătăm.

În ambele cazuri, am arătat că

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi_i$$

pentru orice $1 \leq i \leq m$. Deoarece $\psi_1, \ldots, \psi_m$ este o demonstrație pentru φ, avem $\psi_m = \varphi$ și deci, pentru $i = m$, obținem

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi,$$

concluzia teoremei.

□

6.5 Completitudine

Un sistem deductiv trebuie să fie corect pentru a fi folositor (altfel, ne-ar permite să demonstrăm ceva fals).

Totuși, este bine ca un sistem deductiv să fie și complet, adică să ne permită să demonstrăm formal orice este adevărat.

Din păcate, rezoluția nu este completă, după cum ne arată următorul contraexemplu:

Teorema 6.2 (Rezoluția este incompletă). *Există clauzele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi$ astfel încât*

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi,$$

dar nu există nicio demonstrație prin rezoluție a clauzei φ din $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Proof. Fie $n = 2$, $\varphi_1 = \mathtt{p}$, $\varphi_2 = \mathtt{q}$ și $\varphi = \mathtt{p} \vee \mathtt{q}$. Avem că $\mathtt{p}, \mathtt{q} \models \mathtt{p} \vee \mathtt{q}$, dar nu există nicio modalitate de a continua următoarea demonstrație prin rezoluție:

1. $\mathtt{p}$; (premisă)
2. $\mathtt{q}$; (premisă)
3. $\cdots$

deoarece nu apare niciun literal negativ. Deci, doar $\mathtt{p}$ și $\mathtt{q}$ pot fi derivate prin rezoluție din $\mathtt{p}, \mathtt{q}$. □

Totuși, rezoluția se bucură de o formă de completitudine mai slabă, numită completitudine refutațională:

Teorema 6.3 (Completitudinea refutațională a rezoluției). *Dacă formula în FNC $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ este nesatisfiabilă, atunci există o derivare prin rezoluție a $\square$ pornind de la clauzele φ_1, φ_2, ..., φ_n.*

Demonstrația depășește cadrul cursului, dar nu este foarte complicată și recomand să o încercați sub forma unui exercițiu.

6.6 Demonstrarea validității și consecințelor semantice folosind rezoluția

Putem folosi corectitudinea și completitudinea refutațională a rezoluției pentru a construi un algoritm pentru testarea validității și respectiv a consecințelor logice.

Demonstrarea validității Iată un exemplu de testarea a validității formulei $\mathtt{p} \vee \mathtt{q} \rightarrow \mathtt{q} \vee \mathtt{p}$.
În primul rând, știm că:

Teorema 6.4. *O formulă φ este validă ddacă negația sa, $\neg\varphi$, este o contradicție.*

Exercițiul 6.8. *Demonstrați teorema de mai sus.*

De aceea, stabilirea validității formulei $\mathtt{p} \vee \mathtt{q} \rightarrow \mathtt{q} \vee \mathtt{p}$ este echivalentă cu stabilirea nesatisfiabilității formulei $\neg(\mathtt{p} \vee \mathtt{q} \rightarrow \mathtt{q} \vee \mathtt{p})$.
O formulă este satisfiabilă ddacă FNC-ul ei este satisfiabilă.
Să calculăm o FNC a formulei $\neg(\mathtt{p} \vee \mathtt{q} \rightarrow \mathtt{q} \vee \mathtt{p})$:

$$\begin{aligned}
\neg(\mathtt{p} \vee \mathtt{q} \rightarrow \mathtt{q} \vee \mathtt{p}) \equiv & \quad \neg(\neg(\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \vee (\mathtt{q} \vee \mathtt{p})) \\
\equiv & \quad \neg\neg(\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \wedge \neg(\mathtt{q} \vee \mathtt{p}) \\
\equiv & \quad (\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \wedge (\neg\mathtt{q}) \wedge (\neg\mathtt{p}).
\end{aligned}$$

Am ajuns la o FNC. Pornind cu clauzele formulei aflate în FNC, găsim o derivare pentru $\square$ prin rezoluție:

1. $\mathtt{p} \vee \mathtt{q}$; (premisă)
2. $\neg\mathtt{q}$; (premisă)
3. $\neg\mathtt{p}$; (premisă)
4. $\mathtt{p}$; (rezoluție, 1, 2, $a = \mathtt{q}$)
5. $\square$. (rezoluție, 4, 3, $a = \mathtt{p}$)

Putem raționa în continuare prin aplicarea următorului corolar al teoremei de corectitudine:

Corolarul 6.1. *Dacă $\square$ este derivabilă prin rezoluție pornind de la $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, atunci mulțimea de clauze $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ este neconsistentă.*

Proof. Prin teorema de corectitudine, avem că $\varphi_1, \ldots \varphi_n \models \square$. Presupunem prin reducere la absurd că $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ este consistentă; atunci există o atribuire $\tau : A \rightarrow B$ astfel încât $\hat{\tau}\Big(\varphi_1\Big) = \ldots = \hat{\tau}\Big(\varphi_n\Big) = 1$. Din moment ce $\varphi_1, \ldots \varphi_n \models \square$, avem că $\hat{\tau}\Big(\square\Big) = 1$. Dar, prin definiție, nu există o astfel de atribuire (care face clauza $\square$ adevărată), și deci presupunerea noastră trebuie să fi fost falsă. Deci $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ nu este consistentă. $\square$

Continuând exemplul, mulțimea noastră de clauze este neconsistentă, ceea ce înseamnă că $\neg(\mathtt{p} \vee \mathtt{q} \rightarrow \mathtt{q} \vee \mathtt{p})$ este nesatisfiabilă, și deci $(\mathtt{p} \vee \mathtt{q} \rightarrow \mathtt{q} \vee \mathtt{p})$ este validă (ceea ce trebuia să arătăm).

Verificarea consecințelor semantice Cum putem folosi rezoluția pentru a arăta că $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$?
Folosim următoarea teoremă, care reduce consecința logică la validitate:

Teorema 6.5. *Fie $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi$ orice formule propoziționale. Avem că*

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$$

ddacă

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi$$

este validă.

Exercițiul 6.9. *Demonstrați teorema de mai sus.*

Pentru a arăta folosind rezoluția că o consecință semantică are loc, întâi aplicăm teorema de mai sus, și apoi aplicăm metoda pentru demonstrarea validității prin rezoluție.

Mai multe explicații pentru rezoluția propozițională pot fi găsite la adresa `http://intrologic.stanford.edu/notes/chapter_05.html`.