Seminar 3

***Exerciţii recomandate:** 3.1, 3.2(a,b,c,f,k), 3.3(a,c), 3.5

***Rezerve:** 3.2(g,i,o), 3.3(e), 3.7

S3.1 Stabiliţi natura următoarelor serii, iar în caz de convergenţă, determinaţi sumele lor.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3}; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{(n+1)!}; \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}+2^{n+1}}{6^n}; \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}};$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right); \quad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}+\ln\frac{n}{n+1}\right); \quad \text{g) } \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{\mathrm{n}^2+\mathrm{n}+1}.$$

S3.2 Folosind diverse criterii de convergenţă, să se stabilească natura fiecăreia dintre seriile de mai jos. Să se calculeze apoi, ori de câte ori este posibil, sumele lor.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}; \quad \text{b) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}; \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^3}-\frac{n}{4}\right)^n; \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2};$$

$$\text{e) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}; \quad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^2; \quad \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}, \text{ unde } (2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1);$$

$$\text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{n\sqrt[3]{n}+5}; \quad \text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right); \quad \text{j)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n\right)^n; \text{k) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2\cdot 5^2\cdot 9^2\cdot\ldots\cdot(4n-3)^2}{3^2\cdot 7^2\cdot 11^2\cdot\ldots\cdot(4n-1)^2};$$

$$\text{l) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e\cdot\sqrt{e}\cdot\sqrt[3]{e}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{e}}; \quad \text{m) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n+2)!}; \quad \text{n) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^{n+1}-6^{n-1}}{12^n}; \quad \text{o) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2};$$

S3.3 Precizaţi natura seriilor următoare în funcţie de parametrii corespunzători.

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}, \alpha\in\mathbb{R}; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(\mathrm{n}\alpha)}{(\ln 3)^n}, \alpha\in\mathbb{R}; \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt[n]{n!}}, \alpha\in\mathbb{R}_+^*;$$

$$\text{d) } \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^a \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right), a\in\mathbb{R}; \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)}{n!n^\beta}, \alpha\in\mathbb{R}_+^*, \beta\in\mathbb{R}.$$

S3.4 Să se demonstreze ***criteriul logaritmului*** pentru stabilirea naturii unei serii de numere reale pozitive: *Fie seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, *unde* $x_n > 0$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, *astfel încât există* $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{x_n}}{\ln n} = \lambda$. *Atunci:*

i) *dacă* $\lambda > 1$, *seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *este convergentă;*

ii) *dacă* $\lambda < 1$, *seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *este divergentă;*

iii) *dacă* $\lambda = 1$*, nu ne putem pronunţa asupra naturii seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

S3.5 Utilizând criteriul logaritmului să se studieze convergenţa următoarei serii: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3-n+3}\right)^{\ln(n+1)}$.

S3.6 Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie convergentă din $\mathbb{R}$, cu $u_n \geq 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Ce se poate spune despre natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_n}{1+u_n}\right)^{\alpha}$, unde α este un număr real?

S3.7 Să se analizeze seria cu termenul general

$$\arccos \frac{n(n+1)+\sqrt{(n+1)(n+2)(3n+1)(3n+4)}}{(2n+1)(2n+3)}, n \in \mathbb{N}^*$$

şi, în caz de convergenţă a sa, să i se afle suma.

Bibliografie selectivă

1. A. Croitoru, M. Durea, C. Văideanu - *Analiză matematică. Probleme*, Editura Tehnopress, Iasi, 2005.

2. C, Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică. Probleme (Vol. I)*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

3. M. Roşculeţ, C. Bucur, M. Craiu - *Culegere de probleme de analiză matematică*, E. D. P., Bucureşti, 1968.

4. I. Radomir, A. Fulga - *Analiză matematică. Culegere de probleme*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.

5. S. Chiriţă - *Probleme de matematici superioare*, Editura Didactică şi Pedagogică Bucureşti, 1989.