Matematică - Calcul diferenţial şi integral

Seminar - Săptămâna 1

***Exerciţii recomandate:** S1.1(a,d,f), S1.2, S1.3, S1.4, S1.5, S1.6
***Rezerve:** S1.8, S1.13, S1.14, S1.15

S1.1 Să se arate că pentru orice mulţimi A, B şi C, au loc egalităţile:

a) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$;

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

d) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

e) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;

f) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

S1.2 Să se determine mulţimile $A \cap B$, $A \cup B$, C_A, C_B, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup (B \setminus C_A)$, $A \cap (C_A \setminus B)$ ştiind că $A = \{x \in \mathbb{R} | (x^2 - 9)(x+1) > 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x - 3 > 0\}$.

S1.3 Pe mulţimea $\mathbb{N}^*$ se consideră relaţia binară notată cu "div" şi definită prin

$$a \operatorname{div} b \Longleftrightarrow \exists\ c \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } b = a \cdot c,\ \ \forall a, b \in \mathbb{N}^*.$$

a) Arătaţi că relaţia "div" este relaţie de ordine pe $\mathbb{N}^*$. Este relaţia "div" totală?

b) Să se determine mulţimea majoranţilor, mulţimea minoranţilor, $\inf, \sup, \min, \max$ pentru mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

S1.4 Fie $X = \{1, 2, 3\}$ şi, în raport cu X, relaţiile binare

$$R = \{(1,2), (1,3), (2,2)\}, \quad S = \{(1,2), (2,3)\}.$$

Să se determine domeniul, codomeniul şi inversa fiecăreia dintre relaţiile date. Să se verifice apoi egalitatea

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$

S1.5 Utilizând proprietăţile funcţiei caracteristice a unei mulţimi, să se resoluţioneze exerciţiul **S1.1**.

S1.6 Să se determine domeniul maxim de definiţie pentru următoarele funcţii:

a) $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \arcsin(\ln x) + 2\sqrt{1 - \ln^2 x}$;

b) $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \arcsin \dfrac{1}{x^2} + \ln((1-x)x)$;

S1.7 Să se arate că dacă mulţimile A, B şi C satisfac, simultan, relaţiile

$$A \cup B = C,$$
$$(A \cup C) \cap B = C,$$
$$(A \cap C) \cup B = A,$$

atunci ele sunt egale.

S1.8 Pentru oricare două submulţimi, A şi B, ale unei mulţimi E, are loc relaţia:

$$(C_A \Delta C_B) \cap C_{B\setminus A} = A \setminus B.$$

S1.9 Arătând în prealabil că, în $\mathcal{P}(E)$, avem

$$A\Delta B = C \Longleftrightarrow B = A\Delta C,$$

să se rezolve ecuaţia

$$A\Delta X = B$$

în cazul în care $E = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, c, d\}$ şi $B = \{b, d, e\}$.

S1.10 Considerându-se relaţiile binare $\rho = \{(3a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ şi $\delta = \{(b, 3b) \mid b \in \mathbb{R}\}$, să se arate că $\rho \circ \delta = 1_{\mathbb{R}}$.

S1.11* Fie $f \in \mathcal{F}(X, Y)$ şi $g \in \mathcal{F}(Y, Z)$. Să se demonstreze că dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci şi g este surjectivă.

S1.12* Două mulţimi nevide A şi B se numesc echipotente dacă există măcar o bijecţie $f : A \to B$. Să se arate că relaţia de echipotenţă este o relaţie de echivalenţă.

S1.13* Fie $G = \{(z, u) \mid z, u \in \mathbb{C},\ u = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R},\ z = e^u = e^a(\cos b + i \sin b)\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Este G o relaţie de tip funcţie?

S1.14 Fie $X \neq \varnothing$ o mulţime cu cel puţin două elemente şi $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$. Pentru oricare $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, se consideră relaţia "$\preccurlyeq$" definită prin:

$$f \preccurlyeq g \Longleftrightarrow f(x) \leq g(x), \forall\ x \in X.$$

Să se arate că $(\mathcal{F}(X, \mathbb{R}), \preccurlyeq)$ este o mulţime ordonată, dar nu şi total ordonată.

S1.15

a) Cunoscută fiind mulţimea $A \in \mathcal{P}(E)$, să se rezolve (în $\mathcal{P}(E)$) ecuaţia:

$$X \cap A = X \cup A.$$

b) Să se arate că:

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B,\ \forall\ A, B \in \mathcal{P}(E).$$

Bibliografie recomandată

1. C. Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică.Probleme I*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

2. I. Radomir, A. Fulga - *Analiză matematică.Culegere de probleme*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.

3. A. Croitoru, M. Durea, C. Văideanu - *Probleme de analiză matematică. Calcul diferenţial în* $\mathbb{R}$, Editura PIM, Iaşi 2010.

4. V. Postolică, Genoveva Spătaru-Burcă - *Analiză matematică.Exerciţii şi probleme I*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2005.

5. R. Gologan, A. Halanay ş.a. - *Probleme de examen. Analiză matematică*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2004.