Barem cadru
Test 1– Matematică
(18.11.2021)

Subiectul I .... **15 puncte**
Abordarea subiectului **1p**
Studierea proprietăţilor relaţiei R **14p**

Subiectul II .... **40 puncte**
1. i. Abordarea subiectului **1p**
Scrierea seriei de puteri sub forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n t^n$, unde $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3^n n^\alpha}$, iar $t = 2 + x$ ....
Există $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{3(n+1)^\alpha} = \frac{1}{3} \Rightarrow R = 3$ ....
$t = -3 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n n^\alpha}(-3)^n = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ - serie armonică generalizata - (C) pentru $\alpha > 1$ şi (D) pentru $\alpha \in [0,1]$ (1) ....
$t = 3 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n n^\alpha} 3^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n^\alpha} (C)$ pentru $\alpha > 0$ - Criteriul lui Leibniz (2)
dacă $\alpha = 0$, avem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n^0}$ (D) (3)
(1)-(3) $\Rightarrow$ pentru $\alpha \in (0,1]$ avem $D_c = (-3,3]$, $D_{ac} = (-3,3)$ (4)
$\Rightarrow$ pentru $\alpha > 1$ avem $D_{ac} = D_c = [-3,3]$ (5)
$\Rightarrow$ pentru $\alpha = 0$ avem $D_{ac} = D_c = (-3,3)$ (6)
(4)-(6) $\Rightarrow$ dacă $\alpha > 1$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{3^n n^\alpha} (2+x)^n$ este convergentă (absolut) pe intervalul $[-5,1]$
dacă $\alpha \in (0,1]$ seria este convergentă pe intervalul $(-5,1]$ (şi absolut convergentă pe $(-5,-1)$).
dacă $\alpha = 0$ seria este convergentă (absolut) pe intervalul $(-5,1)$. **14p**
ii. Pentru $x = -\frac{8}{3}$ şi $\alpha = 0$ seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{3^n} \left(\dfrac{-2}{3}\right)^n = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{9}\right)^n$ (C) (deoarece $x = -\frac{8}{3} \in D_c$)
Seria $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{9}\right)^n$ este o serie geometrică cu raţia $q = \frac{2}{9}$ şi are suma $-\dfrac{2}{9} \dfrac{1}{1-\frac{2}{9}} = -\dfrac{2}{7}$ **10p**
2. Abordarea subiectului **1p**
Verificarea condiţiilor din teorema Stolz-Cesaro:
Considerăm şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $a_n = 2^a + 5^a + \ldots + (3n-1)^a$ iar $b_n = n^{a+1}$.
Verificăm că b_n este strict monoton şi nemărginit (1)
Arătăm că există limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n+2)^a}{(n+1)^{a+1}-n^{a+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n+2)^a}{(n+1)^a + n(n+1)^{a-1} + \ldots + n^a} = \frac{3^a}{a+1} \in \mathbb{R}$ (2) **11p**
Concluzia: (1)-(2) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{3^a}{a+1}$ **3p**

Subiectul III .... **35 puncte**
Abordarea subiectului **1p**
Matricea asociată lui T în baza canonică este $A_{B_C} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 9 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -3 \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$
1. $T(-2,1,0) = (-3, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{5}{9})$ .... **4 p**
2. *Calculul valorilor proprii:* $\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$, cu $m_{\lambda_1} = 2$ şi $\lambda_2 = 2$ cu $m_{\lambda_2} = 1$. **10p**
Calculul vectorilor proprii:
Pentru $\lambda_1 = -1$ avem $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -3 \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rang(A + I_3) = 1$,
$V_{\lambda_1} = \{(3\alpha - 9\beta, \alpha, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = Lin(\{3,1,0), (-9,0,1)\}$,

Pentru $\lambda_2 = 2$ avem $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 \\ -\frac{1}{3} & -2 & -3 \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow rang(A - 2I_3) = 2$,

$V_{\lambda_2} = \{(9\alpha, -3\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} = Lin(\{9, -3, 1)\}$. **10p**

3. Cum $m_{\lambda_1} = \dim(\mathbb{R}^3) - rang(A - \lambda_1 I_3)$ iar $m_{\lambda_2} = \dim(\mathbb{R}^3) - rang(A - \lambda_2 I_3)$, rezultă că T este diagonalizabil **5p**

Baza în care se manifestă forma diagonală este $B_D = \{(3, 1, 0), (-9, 0, 1), (9, -3, 1)\}$ **3p**

Forma diagonală: $A_D = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

unde S este matricea de schimbare de la baza canonica din $\mathbb{R}^3$ la baza B_D **2p**

Puncte din oficiu: .... **10 puncte**