

Fie sistemul

$$\begin{cases} 30x_1 + 3x_2 = 33 \\ 40x_1 + 29x_2 = 69 \\ 20x_2 = 20 \end{cases}$$

Să se găsească soluția în sensul celor mai mici pătrate folosind descompunerea QR adaptată (varianta Givens cu matrici de rotație)

$$A = \begin{pmatrix} 30 & 3 \\ 40 & 29 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Pas 1: se transf col 1 în f sup  $\Delta$

$a_{21} \rightarrow 0$  se fol rotația  $R_{12}$

$a_{31} \rightarrow 0$   $R_{13} = I$  pti că  $a_{31} = 0$

$$R_{12} \cdot A = \begin{pmatrix} c & \lambda & 0 \\ -\lambda & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 & 3 \\ 40 & 29 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30c + 40\lambda & 3c + 29\lambda \\ -30\lambda + 40c & -3\lambda + 29c \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$c$  și  $\lambda$  se aleg a.î  $-30\lambda + 40c = 0$

$c^2 + \lambda^2 = 1 \Rightarrow c = 3/5 = 0.6, \lambda = 4/5 = 0.8$

$$\Rightarrow R_{12} \cdot A = \begin{pmatrix} 50 & 25 \\ 0 & 15 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Pas 2:  $(R_{12} A)_{32} = 20 \rightarrow 0$

se fol. matricea  $R_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & \lambda \\ 0 & -\lambda & c \end{pmatrix}$

$$R_{23} (R_{12} \cdot A) = \begin{pmatrix} 50 & 25 \\ 0 & 15c + 20\lambda \\ 0 & -15\lambda + 20c \end{pmatrix} \rightarrow = 0$$

$c$  si  $s$  se aleg a.  $i^2 - 15s + 20c = 0$ ,

$$c^2 + s^2 = 1 \Rightarrow s = 0.8 \quad c = 0.6$$

$$\Rightarrow \underbrace{R_{23} \ R_{12}}_{Q^T} A = \begin{bmatrix} 50 & 25 \\ 0 & 25 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R} \\ 0 \ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Q = R_{12}^T R_{23}^T = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.48 & 0.64 \\ 0.8 & 0.36 & -0.48 \\ 0 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Soluția sist se obține rezolvând

$$\text{sist } \bar{R}x = (Q^T b)_{1:2}$$

$$Q^T \cdot b = \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$50x_1 + 25x_2 = 75$$

$$25x_2 = 25$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

Sistemul de ecuații normale

$$A^T A x = A^T b$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 0 \\ 3 & 29 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 & 3 \\ 40 & 29 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2500 & 1250 \\ 1250 & 1250 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot b = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 0 \\ 3 & 29 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 33 \\ 69 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3750 \\ 2500 \end{pmatrix}$$

Sist de ec. normale :

$$2500 x_1 + 1250 x_2 = 3750$$

$$1250 x_1 + 1250 x_2 = 2500$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

Ptr cazul când sistemul nu are soluție clasică:

$$b = \begin{pmatrix} 33 \\ 69 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$Q^T \cdot b = \begin{pmatrix} 75 \\ 33 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Soluția în sensul celor mai mici pătrate se obține rezolvând sistemul

$$50x_1 + 25x_2 = 75$$

$$25x_2 = 33$$

$$x_1 = 0.84 \quad x_2 = 1.32$$

Rezolvarea cu sistemul de  
ecuații normale:

$$A^T b = \begin{pmatrix} 3750 \\ 2700 \end{pmatrix}$$

Sist de ec. normale

$$2500 x_1 + 1250 x_2 = 3750$$

$$1250 x_1 + 1250 x_2 = 2700$$

$$\Rightarrow x_1 = 0.84, x_2 = 1.32$$