Criterii - Serii cu termeni pozitivi

I. Criteriul I de comparaţie - CCI:

Fie seriile $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, aşa încât $x_n \leq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} y_n (C)$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (C)$;

b) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (D)$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} y_n (D)$.

II. Criteriul II de comparaţie - CCII: Fie seriile $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, cu $x_n > 0, y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} y_n (C)$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (C)$;

b) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (D)$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} y_n (D)$.

III. Criteriul III de comparaţie - CCIII: Fie seriile $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, cu $x_n > 0, y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, aşa încât $\exists\ \ell = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$. Dacă

a) $\ell \in (0, +\infty)$, atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ au aceeaşi natură;

b) $\ell = 0$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} y_n(C) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n(C)$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(D) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n(D)$;

c) $\ell = +\infty$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(C) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n(C)$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} y_n(D) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n(D)$.

IV. Criteriul de condensare al lui Cauchy:

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, cu $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător, atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}.$$

V. Criteriul rădăcinii al lui Cauchy:

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dacă există $\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$, atunci:

i) dacă $\ell < 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C);

ii) dacă $\ell > 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D);

iii) dacă $\ell = 1$ nu putem stabili natura seriei pe această cale.

VI. Criteriul logaritmului: Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, cu $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dacă există limita $\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{x_n}}{\ln n}$, atunci:

i) dacă $\lambda > 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C);

ii) dacă $\lambda < 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D);

iii) dacă $\lambda = 1$, nu putem stabili natura seriei pe această cale.

VII. Criteriul raportului - Criteriul lui D'Alembert:

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, cu $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\exists L = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

i) Dacă $L < 1$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă;

ii) Dacă $L > 1$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă;

iii) Dacă $L = 1$, nu putem stabili natura seriei pe această cale.

VIII. Criteriul lui Raabe-Duhamel: Fie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă există $\rho = \lim_{n\to\infty} \left[n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \right]$, atunci:

i) dacă $\rho > 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C);

ii) dacă $\rho < 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D);

iii) dacă $\rho = 1$ nu putem stabili natura seriei pe această cale.

IX. Criteriul lui Gauss: Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, cu $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dacă raportul $\frac{x_n}{x_{n+1}}$ se poate exprima sub forma

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{y_n}{n^{1+\gamma}}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$, iar şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit, atunci:

a) când $\alpha > 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(C)$;

b) când $\alpha < 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(D)$;

c) când $\alpha = 1$ şi $\beta > 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(C)$;

d) când $\alpha = 1$ şi $\beta \leq 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(D)$.

X. Criteriul lui Bertrand Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât să existe $\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} n \ln n - (n+1) \ln (n+1) \right)$.

i) Dacă $\mu > 0$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C);

ii) Dacă $\mu < 0$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D);

iii) Dacă $\mu = 0$, nu ne putem pronunţa asupra naturii seriei.

XI. Criteriul lui Kummer: Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, cu $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dacă există şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$, astfel încât există $\ell = \lim_{n\to\infty} \left(a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} \right)$, atunci

i) dacă $\ell > 0$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(C)$;

ii) dacă $\ell < 0$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}(D)$, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(D)$;

iii) când $\ell = 0$, nu putem stabili natura seriei date.

Criterii generale

I. Criteriul general - al lui Cauchy - de convergenţă:

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* : |x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}| < \varepsilon, \forall\, n, p \in \mathbb{N}^*, n \geq n_\varepsilon.$$

II. Criteriul general de divergenţă:

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă dacă şi numai dacă, $\exists \varepsilon_0 > 0$ cu proprietatea că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists\, k_n \geq n$ şi $\exists\, p_n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$|x_{k_n+1} + x_{k_n+2} + \ldots + x_{k_n+p_n}| \geq \varepsilon_0.$$

III. Criteriul necesar de convergenţă:

Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ (Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ (D)).

IV. Criteriul lui Dirichlet:

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ două şiruri de numere reale şi fie $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, n \in \mathbb{N}^*$. Dacă

- şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit;
- şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton descrescător cu $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$,

atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.

V. Criteriul lui Leibniz:

Dacă $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir de numere reale pozitive, descrescător şi convergent la 0, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n$ este convergentă.

VI. Criteriul lui Abel:

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ două şiruri de numere reale. Dacă

- seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă;
- şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton şi mărginit,

atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.