Seminar 5

***Exerciţii recomandate:** 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7
***Rezerve:** 5.10, 5.11, 5.14

S5.1 Fie $M := \left\{ A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \mid A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, a = b + c \right\}$.

a) Să se arate că M este un subspaţiu liniar al spaţiului $(\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
b) Să se afle o bază a lui M şi $dim(M)$.
c) Să se arate că $B = \{A_1, A_2, A_3\}$, unde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

este o bază a lui M. Să se găsească coordonatele vectorului $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ în această bază.

S5.2 Să se analizeze liniara dependenţă / independenţă a următoarelor mulţimi şi să se stabilească, în caz de dependenţă liniară a lor, relaţia de dependenţă în cauză.

a) $\{(1, 1, 1), (1, -2, 3), (-1, 11, -9)\} \subset \mathbb{R}^3$;

b) $\{f_1(x) = e^{2x}, f_2(x) = xe^{-x}, f_3(x) = x^2e^x\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

c) $\{(1, -1, 3), (-1, 1, 4), (1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$;

d) $\{f_1(x) = 1, f_2(x) = \cos 2x, f_3(x) = \cos^2 x\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

S5.3

1°. Să se arate că $B = \{(3, 1, 5), (3, 6, 2), (-1, 0, 1)\}$ formează o bază pentru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, la fel orientată ca baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$.

2°. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât mulţimea $B' = \{(m, 2, -3), (1, 1, -1), (m, 1, 3)\}$ să fie o bază a lui $\mathbb{R}^3$, contrar orientată bazei canonice a lui $\mathbb{R}^3$.

3°. Pentru valorile lui m determinate la 2°, să se afle matricea S a schimbării de bază de la B la B'.

4°. Să se determine coordonatele vectorului $\mathbf{x} = (1, 2, -1)$ în baza B.

S5.4 Să se arate că aplicaţia $< \cdot , \cdot >: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$< x, y >= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 5x_3y_3,\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3,$$

defineşte un produs scalar pe $\mathbb{R}^3$.

S5.5 Fie spaţiul liniar real $\mathbb{R}^3$, dotat cu produsul scalar euclidian. Să se analizeze ortogonalitatea sistemului de vectori $U = \{(1, -1, 1), (0, 1, 1), (-2, -1, 1)\}$. Să se calculeze apoi $\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ şi $\sphericalangle(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, unde $\mathbf{u} = (-1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (-1, 1, 1)$ şi $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$.

S5.6 Se consideră spaţiul euclidian $\mathbb{R}^4$, dotat cu produsul scalar canonic. Folosind procedeul de ortonormalizare al lui Gram-Schmidt, să se afle o bază ortonormată B', plecând de la baza

$$B = \{(1, 2, -1, 0), (1, -1, 1, 1), (-1, 2, 1, 1), (-1, -1, 0, 1)\}.$$

S5.7 Se consideră sistemul de vectori $C = \{(1, 4, 3, 2), (1, 1, -1, 1), (-3, 0, 7, 6)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

a) Să se determine $S = Sp(C)$ şi $S^{\perp}$.

b) Să se afle proiecţiile ortogonale ale vectorului $\mathbf{w} = (14, -3, -6, -7)$ pe S şi pe $S^{\perp}$. Să se verifice că avem

$$||\mathbf{w} - pr_S(\mathbf{u})|| \leq ||\mathbf{w} - \mathbf{u}||, \forall\ \mathbf{u} \in C,$$

unde $pr_S(\mathbf{u})$ este notaţia pentru proiecţia ortogonală a vectorului $\mathbf{u}$ pe S, care, prin definiţie, înseamnă acel vector $\mathbf{v} \in S$, pentru care $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in S^{\perp}$.

S5.8 Pe mulţimea $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, se definesc operaţiile $\oplus : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, prin $x \oplus y = xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$ şi $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, prin $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \alpha \in \mathbb{R}$. Să se arate că $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \odot)$ este un spaţiu liniar.

S5.9

a) Folosind inegalitatea lui Minkowski, să se arate că aplicaţia $||\cdot||_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in [1, +\infty)$, definită prin

$$||\mathbf{x}||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

este o normă pe $\mathbb{R}^n$.

b) Să se arate că $||\mathbf{x}||_{\infty} \overset{def}{=} \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k| = \lim\limits_{p \to \infty} ||\mathbf{x}||_p$, $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

c) Să se demonstreze că: $||\mathbf{x}||_{\infty} \leq ||\mathbf{x}||_2 \leq ||\mathbf{x}||_1 \leq \sqrt{n}||\mathbf{x}||_2 \leq n||\mathbf{x}||_{\infty}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

d) Să se arate că inegalitatea lui Hölder se poate reda sub forma

$$| < \mathbf{x}, \mathbf{y} > |_c \leq ||\mathbf{x}||_p \cdot ||\mathbf{y}||_q, \forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}},$$

pentru orice $p, q \in [1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
În particular, când $p = q = 2$, inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwarz se poate rescrie în forma:

$$| < \mathbf{x}, \mathbf{y} >_c | \leq ||\mathbf{x}||_2 \cdot ||\mathbf{y}||_2, \forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}.$$

S5.10 Fie $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$ şi fie $||\cdot||$ norma indusă de acesta. Să se arate că $\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, au loc:

i) $||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 + ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = 2(||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2)$ (Euler)

ii) $||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 - ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = 4 < \mathbf{x}, \mathbf{y} >$ (Hilbert).

S5.11 Fie W un subspaţiu liniar al lui $\mathbb{R}^n$ şi $f : W \to \mathbb{R}$, o funcţie astfel încât

$$\{\mathbf{x} \in W \ \mid f(\mathbf{x}) = 0\} = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$$

şi

$$f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}), \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W.$$

Definim aplicaţia $< \cdot\,, \cdot >: W \times W \to \mathbb{R}$, prin:

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W.$$

a) Să se arate că W este un spaţiu prehilbertian.

b) Să se arate că orice două elemente ale lui W, diferite de $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$, sunt liniar dependente ($\dim(W) = 1$).

S5.12 Care dintre mulţimile de mai jos este un subspaţiu liniar?

a) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1 + x_n = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$;

b) $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid det(A) = 0\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

S5.13 Să se studieze, după valorile parametrului real m, dependenţa liniară a următoarelor sisteme de vectori. În caz de dependenţă liniară, să se găsească relaţia de dependenţă respectivă.

i) $\{(3,1,4),(-1,1,2),(1,3,m)\} \subseteq \mathbb{R}^3$;

ii) $\{(6,1,8,3),(2,3,0,2),(4,-1,-8,-2),(1,1,1,m)\} \subseteq \mathbb{R}^4$;

iii) $\{f_1(x)=e^{-x}, f_2(x)=e^x, f_3(x)=\text{sh}x\} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

S5.14 În spaţiul $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$, se consideră:

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

şi

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -11 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -10 & 5 \end{bmatrix} \right\}$$

a) Să se arate că B_1 şi B_2 sunt baze pentru $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

b) Să se scrie matricea S a schimbării de la B_1 la B_2;

c) Să se afle coordonatele matricii $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ în cele două baze B_1 şi B_2.

S5.15 Să se arate că aplicaţia $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1 + 2x_3y_3, \forall\, \mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3), \mathbf{y} = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$$

este un produs scalar pe $\mathbb{R}^3$.

S5.16 Fie $U = \{(0,1,1,0),(0,2,-2,1),(2,1,-1,-4),(9,-1,1,4)\}$ o submulţime a spaţiului liniar $(\mathbb{R}^4,+,\cdot)$. Să se arate că U este un sistem ortogonal de vectori în raport cu produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^4$ şi să se calculeze unghiul dintre ultimii doi vectori din U.

S5.17 Folosind procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt, să se afle o bază ortonormală a lui $\mathbb{R}^4$, plecând de la

$$B = \{(0,1,1,0),(0,4,0,1),(1,-1,1,0),(1,3,0,1)\}.$$

S5.18 Fie $\mathbb{R}^4$ dotat cu produsul scalar canonic şi $U = \{(-3,0,1,2),(1,-1,0,1)\}$. Să se calculeze $Sp(U)$ şi $U^\perp$, precum şi proiecţiile ortogonale ale vectorului $(2,1,2,1)$ pe U şi $U^\perp$.

Bibliografie selectivă

1. Veronica T. Borcea, Cătălina I. Davideanu, Corina Forăscu - *Probleme de algebră liniară*, Ed. "Gheorghe Asachi", Iaşi, 2000.

2. Şt. O. Tohăneanu, Rodica Dăneţ - *Curs practic de algebră liniară cu 327 de exerciţii şi probleme rezolvate,* Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2004.

3. C. Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică. Probleme (Vol. I)*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

4. E. Cioară - *Algebră liniară.Geometrie analitică (culegere de probleme)*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2009.

5. N. Crainic - *Elemente de algebră liniară,* Colectia "Universitaria", Edit. Institutului European, 2011

6. G. I. Shilov - *An Introduction to the Theory of Linear Spaces (Kindle Edition)*, Dover Publications, 2013.

7. J. Hefferon - *Linear Algebra. Extensive exercise sets, with worked answers to all exercises*, Saint Michael's College, 2014.

8. Y. Tsumura - *Practice Problems for Linear Algebra*, Ohio State University, 2016.