Calcul Numeric

Cursul 4

2022

Anca Ignat

Algoritmul de eliminare Gauss

Algoritmul se realizează în ***n-1*** pași prin transformarea sistemului dat într-un sistem echivalent cu matrice triunghiulară superior.

Pas 1

la acest pas se obține sistemul:

$\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{(1)} \sim \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$ unde $\boldsymbol{A}^{(1)}$ are prima coloană în formă superior triunghiulară.

Pas 2

se construiește sistemul

$\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{(2)} \sim \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$ unde $\boldsymbol{A}^{(2)}$ are primele două coloane în formă superior triunghiulară.

$\vdots$

Pasul r

se obține sistemul $\boldsymbol{A}^{(r)}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{(r)} \sim \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$ unde $\boldsymbol{A}^{(r)}$ are primele ***r*** coloane în formă superior triunghiulară.

$\vdots$

Pasul n-1 :

se obține sistemul

$\boldsymbol{A}^{(n-1)}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{(n-1)} \sim \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$ unde $\boldsymbol{A}^{(n-1)}$ are primele ***n-1*** coloane în formă superior triunghiulară.

Dacă la un anumit pas matricea $A^{(r)}$ **nu poate fi construită** aceasta ne va arăta că matricea ***A*** **este singulară**.

În realizarea acestor pași se utilizează următoarele operații elementare:

- **înmulțirea unei ecuații cu un factor și adunarea la altă ecuație;**

- **interschimbarea a două ecuaţii și/sau două coloane în matricea *A*.**

Pasul 1

Intrare : sistemul $\boldsymbol{Ax=b}$

Ieșire : sistemul $\boldsymbol{A^{(1)}x = b^{(1)} \sim Ax = b}$**,** matricea $\boldsymbol{A^{(1)}}$ are prima coloană în formă superior triunghiulară.

Fie ecuația ***i,*** cu $\boldsymbol{i=1,\ldots,n}$

$$\boldsymbol{E_i} \ : \qquad \boldsymbol{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i}.$$

Presupunem $\boldsymbol{a_{11} \neq 0}$. Operațiile efectuate au ca obiectiv anularea coeficienților lui $\boldsymbol{x_1}$ din ecuațiile de la ***2*** la ***n*** şi sunt descrise în continuare:

$$E_1 * \left(\frac{-a_{21}}{a_{11}} \right) + E_2 = E_2^{(1)} \quad \Rightarrow \quad a_{21}^{(1)} = 0$$

$$\vdots$$

$$E_1 * \left(\frac{-a_{i1}}{a_{11}} \right) + E_i = E_i^{(1)} \quad \Rightarrow \quad a_{i1}^{(1)} = 0$$

$$\vdots$$

$$E_1 * \left(\frac{-a_{n1}}{a_{11}} \right) + E_n = E_n^{(1)} \quad \Rightarrow \quad a_{n1}^{(1)} = 0$$

Sistemul obținut prin aceste operații are forma:

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)} \\
\qquad\qquad a_{22}^{(1)} x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} \\
\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad a_{i2}^{(1)} x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{in}^{(1)} x_n = b_i^{(1)} \\
\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad a_{n2}^{(1)} x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{nn}^{(1)} x_n = b_n^{(1)}
\end{cases}
$$

Pas 2

Intrare : $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{(1)}$

Ieșire : $\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{(2)} \sim \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{A}^{(2)}$ are primele două coloane în formă superior triunghiulară.

Se presupune $\boldsymbol{a}_{22}^{(1)} \neq \boldsymbol{0}$ și se urmărește anularea elementelor $\boldsymbol{a}_{32}^{(2)}, \boldsymbol{a}_{42}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{n2}^{(2)}$ (transformarea coloanei 2 în formă superior triunghiulară). Operațiile efectuate asupra ecuațiilor $\boldsymbol{E}_i^{(1)}, \boldsymbol{i} = \boldsymbol{3}, \cdots, \boldsymbol{n}$ sunt următoarele :

$$
\begin{cases}
E_2^{(1)} * \left(-\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \right) + E_3^{(1)} = E_3^{(2)} \;\; \Rightarrow \;\; a_{32}^{(2)} = 0; \\
\vdots \\
E_2^{(1)} * \left(-\dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \right) + E_i^{(1)} = E_i^{(2)} \;\; \Rightarrow \;\; a_{i2}^{(2)} = 0; \\
\vdots \\
E_2^{(1)} * \left(-\dfrac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \right) + E_n^{(1)} = E_n^{(2)} \;\; \Rightarrow \;\; a_{n2}^{(2)} = 0;
\end{cases}
$$

Se observă că nu se schimbă forma superior triunghiulară a primei coloane.

Pas r

Intrare : $\boldsymbol{A}^{(r-1)}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{(r-1)}$

Ieșire : $\boldsymbol{A}^{(r)}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{(r)} \sim \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{A}^{(r)}$ are primele $\boldsymbol{r}$ coloane în formă superior triunghiulară.

Sistemul are următoarea formă:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
a_{11}^{(r-1)}x_1+\cdots+a_{1r}^{(r-1)}x_r+\cdots+a_{1n}^{(r-1)}x_n=b_1^{(r-1)}\\
\quad\ddots\\
\qquad\quad\ddots\\
\qquad\qquad\qquad a_{rr}^{(r-1)}x_r+\cdots+a_{rn}^{(r-1)}x_n=b_r^{(r-1)}\\
\qquad\qquad\qquad a_{r+1r}^{(r-1)}x_r+\cdots+a_{r+1n}^{(r-1)}x_n=b_{r+1}^{(r-1)}\\
\qquad\qquad\qquad\quad\vdots\\
\qquad\qquad\qquad a_{ir}^{(r-1)}x_r+\cdots+a_{in}^{(r-1)}x_n=b_i^{(r-1)}\\
\qquad\qquad\qquad\quad\vdots\\
\qquad\qquad\qquad a_{nr}^{(r-1)}x_r+\cdots+a_{nn}^{(r-1)}x_n=b_n^{(r-1)}
\end{array}
\right.
$$

Presupunem $\boldsymbol{a_{rr}^{(r-1)} \neq 0}$.

Vom urmări anularea elementelor $\boldsymbol{a_{r+1r}^{(r)}, a_{r+2r}^{(r)}, \cdots, a_{nr}^{(r)}}$.

$$\begin{cases} E_r^{(r-1)} * \left(-\dfrac{a_{r+1r}^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}}\right) + E_{r+1}^{(r-1)} = E_{r+1}^{(r)} \quad \Rightarrow \quad a_{r+1r}^{(r)} = 0; \\ \vdots \\ E_r^{(r-1)} * \left(-\dfrac{a_{ir}^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}}\right) + E_{i}^{(r-1)} = E_{i}^{(r)} \quad \Rightarrow \quad a_{ir}^{(r)} = 0; \\ \vdots \\ E_r^{(r-1)} * \left(-\dfrac{a_{nr}^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}}\right) + E_{n}^{(r-1)} = E_{n}^{(r)} \quad \Rightarrow \quad a_{nr}^{(r)} = 0; \end{cases}$$

Se observă că nu se schimbă forma superior triunghiulară a primelor ***r-1*** coloane.

La fiecare pas s-a făcut ipoteza $\boldsymbol{a_{rr}^{(r-1)} \neq 0}$. Elementul $\boldsymbol{a_{rr}^{(r-1)}}$ poartă numele de ***pivot***. În cazul în care elementul pivot este nul se pot aplica următoarele strategii, numite de ***pivotare***:

Pivotare (stabilitate + $a_{rr}^{(r-1)} \neq 0$?)

1^0 ***Fără pivotare***

Se caută primul indice $i_0 \in \{r, r+1, \cdots, n\}$ astfel încât $a_{i_0 r}^{(r-1)} \neq 0$. Se interschimbă ecuaţiile i_0 și r.

Să observăm că în procesul de calcul la pasul r intervine factorul $\dfrac{1}{a_{rr}^{(r-1)}}$ astfel că valori mici ale lui $\left|a_{rr}^{(r-1)}\right|$ conduc la amplificarea erorilor de calcul. Pentru a asigura stabilitatea numerică a procesului de calcul este de dorit ca $\left|a_{rr}^{(r-1)}\right|$ să fie ***'mare'***.

2^0 ***Pivotare parțială***

Se determină indicele $\boldsymbol{i_0}$:

$$\left|a_{i_0 r}^{(r-1)}\right| = \max\left\{\left|a_{ir}^{(r-1)}\right|; i = r,\dots,n\right\}$$

și se inter-schimbă ecuațiile $\boldsymbol{i_0}$, $\boldsymbol{r}$ dacă $\boldsymbol{i_0 \neq r}$.

3^0 ***Pivotare totală***

Se determină indicii $\boldsymbol{i_0}$ şi $\boldsymbol{j_0}$:

$$\left|a_{i_0 j_0}^{(r-1)}\right| = \max\left\{\left|a_{ij}^{(r-1)}\right|; i = r,\dots,n\,,\, j = r,\dots,n\right\}$$

și se inter-schimbă ecuațiile $\boldsymbol{i_0}$, $\boldsymbol{r}$ dacă $\boldsymbol{i_0 \neq r}$ şi coloanele $\boldsymbol{j_0}$, $\boldsymbol{r}$ dacă $\boldsymbol{j_0 \neq r}$

Schimbarea coloanelor implică schimbarea ordinii variabilelor astfel încât în final va trebui refăcută ordinea inițială a variabilelor.

Dacă după pivotare elementul pivot rămâne nul, $\boldsymbol{a_{rr}^{(r-1)} = 0}$, atunci putem deduce că $\boldsymbol{A^{(r-1)}}$ este singulară.

În adevăr, dacă în procesul de pivotare parțială $\boldsymbol{a_{rr}^{(r-1)} = 0}$, atunci

$$A^{(r-1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & & a_{1n} \\ & \ddots & & & \\ & & a_{rr} = 0 & \cdots & a_{rn} \\ & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ & & 0 & \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\det A^{(r-1)} = a_{11}^{(r-1)} a_{22}^{(r-1)} \cdots a_{r-1r-1}^{(r-1)} \det \begin{bmatrix} 0 \cdots\cdots a_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \cdots\cdots a_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

Deoarece operațiile efectuate (cele de interschimbare de ecuaţii și/sau coloane) nu au schimbat decât semnul determinantului avem:

$$\det A = \pm \det A^{(r-1)} = 0 \;\Rightarrow\; \det A = 0$$

prin urmare matricea A inițială este singulară.

Și în cazul procesului de pivotare totală dacă $a_{rr}^{(r-1)} = 0$, atunci:

$$
\boldsymbol{A}^{(r-1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & \\ & & a_{rr} = 0 & \cdots \mathbf{0} \\ & & 0 & \\ & & 0 & \\ & & 0 & \cdots\cdots\cdots \mathbf{0} \end{bmatrix} \Rightarrow
$$

$$
\det A^{(r-1)} = a_{11}^{(r-1)} a_{22}^{(r-1)} \cdots a_{r-1r-1}^{(r-1)} \det \begin{bmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 \end{bmatrix} = 0
$$

$\det A = \pm \det A^{(r-1)} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; A$ este matrice singulară.

$r = 1;$

pivotare(*r*);

while (*r* $\leq$ *n* - 1 şi $|a_{rr}| > \varepsilon$**)**

// Pas r

$*$ **for** $i = r + 1, \ldots, n$

- $f = -\dfrac{a_{ir}}{a_{rr}};$

- **for** $j = r + 1, \ldots, n$

  $a_{ij} = a_{ij} + f * a_{rj};$

- $a_{ir} = 0;$

- $b_i = b_i + f * b_r;$

$* \; r = r + 1;$

$*$ **pivotare(*r*);**

if $(|a_{rr}| \leq \varepsilon)$ **'MATRICE SINGULARA'**

else $\{ A \leftarrow A^{(n-1)}, \; b \leftarrow b^{(n-1)}$

se rezolvă sistemul triunghiular superior $Ax = b\}$

Numărul de operații efectuate la pasul ***r*** și în total este:

$$(n-r)\left[1M+(n-r)A+(n-r)M+1A+1M\right] \;\Rightarrow$$

$$\mathbf{M:}\quad \sum_{r=1}^{n-1}(n-r)^2+2\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)=\frac{(n-1)n(2n+5)}{6},$$

$$\mathbf{A:}\quad \sum_{r=1}^{n-1}(n-r)^2+\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)=\frac{(n-1)n(n+1)}{3},$$

$$\mathbf{M:}\ \frac{n^3}{3}+\mathcal{O}\left(n^2\right) \qquad ; \qquad \mathbf{A:}\ \frac{n^3}{3}+\mathcal{O}\left(n^2\right)$$

Eliminarea *„chinezească”*

200-100 î.Cr. China – *9 capitole despre arta matematică* – metodă de rezolvare foarte asemănătoare eliminării Gauss

„Avem 3 tipuri de grâu. Știm că 3 baloturi din primul tip, 2 baloturi din al doilea tip și 1 balot din al treilea tip cântăresc 39 măsuri. De asemenea, 2 baloturi din primul tip, 3 baloturi din al doilea tip și 1 balot din al treilea tip cântăresc 34 măsuri și 1 balot din primul tip, 2 baloturi din al doilea tip și 3 baloturi din al treilea tip cântăresc 26 măsuri. Câte măsuri cântărește un balot din fiecare tip de grâu”

Notația actuală:

$$3b_1 + 2b_2 + b_3 = 39$$
$$2b_1 + 3b_2 + b_3 = 34$$
$$b_1 + 2b_2 + 3b_3 = 26$$

Notația *chinezească*

1	**2**	**3**
2	**3**	**2**
3	**1**	**1**
26	**34**	**39**

Pasul 1

Se înmulțește coloana a doua cu 3 și se scade din ea coloana a treia atât timp cât este posibil.

Se înmulțește prima coloană cu 3 și se scade din ea coloana a treia atât timp cât este posibil.

Se ajunge la forma:

0	**0**	**3**
4	**5**	**2**
8	**1**	**1**
39	**24**	**39**

Pasul 2

Se înmulțește prima coloană cu 5 și se scade din ea coloana a doua atât timp cât este posibil.

Se ajunge la forma:

0	**0**	**3**
0	**5**	**2**
36	**1**	**1**
99	**24**	**39**

Pentru rezolvare se folosește metoda substituției inverse pe sistemul obținut mai sus.

Descompuneri *LU*

$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}, \quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{U},$$

L inferior triunghiulară şi ***U*** superior triunghiulară

$$\boldsymbol{L},\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \leftrightarrow \boldsymbol{LUx} = \boldsymbol{b} \leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \text{soluţia } \boldsymbol{y}^* \\ \boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}^* \Rightarrow \text{soluţia } \boldsymbol{x}^* \end{cases}, \quad \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Fie minorul principal principal al matricei $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A_p = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times p} \quad , \quad p = 1,\ldots,n}$$

Teoremă (descompunere *LU*)

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n \times n}}$ o matrice reală pătratică de dimensiune $\boldsymbol{n}$ astfel încât $\mathbf{det}\, \boldsymbol{A_p} \neq \mathbf{0}$, $\forall \boldsymbol{p} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{n}$. Atunci există o unică matrice inferior triunghiulară $\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{l_{ij}})_{\boldsymbol{i,j=1,\ldots,n}}$ şi o unică matrice superior triunghiulară $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{u_{ij}})_{\boldsymbol{i,j=1,\ldots,n}}$ cu $\boldsymbol{u_{ii}} = \mathbf{1}, \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{n}$ astfel încât

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{U} \tag{1}$$

Demonstraţie. ***Existenţa***: demonstraţia se face prin inducţie după $\boldsymbol{n}$ dimensiunea matricii $\boldsymbol{A}$.

Algoritmul Crout *de calcul al descompunerii* ***LU***

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$ o matrice reală pătratică de dimensiune $\boldsymbol{n}$ care satisface ipotezele teoremei de mai sus. Algoritmul de calcul al matricelor $\boldsymbol{L}$ şi $\boldsymbol{U}$ are $\boldsymbol{n}$ etape. La fiecare pas se determină simultan:

- câte o coloană din matricea $\boldsymbol{L}$ şi
- câte o linie din matricea $\boldsymbol{U}$.

Descriem în continuare, un pas oarecare.

Pasul p $(p = 1, 2, \ldots, n)$

Se determină elementele coloanei p ale matricii L:

$$l_{ip},\ i = p, \ldots, n$$

şi elementele liniei p ale matricii U ,

$$u_{pp} = 1,\ \ u_{pi}, i = p + 1, \ldots, n,$$

$$(u_{pi} = l_{ip} = 0,\ i = 1, \ldots, p-1).$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{l}_{\boldsymbol{pp}} \\ \boldsymbol{l}_{\boldsymbol{p+1\,p}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{l}_{\boldsymbol{np}} \end{pmatrix} \text{ col. } \boldsymbol{p} \text{ a matr. } \boldsymbol{L}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} & \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{pp+1}} & \cdots & \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{pn}} \end{pmatrix} \text{ lin. } \boldsymbol{p} \text{ a matr. } \boldsymbol{U}$$

Se cunosc de la paşii anteriori:

- elementele primelor ***p-1*** coloane din ***L***
  (elemente $\boldsymbol{l_{ik}}$ cu $\boldsymbol{k = 1,\ldots, p-1, \forall j}$).

- elementele primelor ***p-1*** linii din ***U***
  (elemente $\boldsymbol{u_{kj}}$ cu $\boldsymbol{k = 1,\ldots, p-1, \forall j}$)

Calculul elementelor ***coloanei p*** din matricea *L*, $\boldsymbol{l_{ip}}$ $\boldsymbol{i = p,\ldots,n}$ se face folosind elementul $\boldsymbol{a_{ip}}$ şi $\boldsymbol{(LU)_{ip}}$. Avem:

$$a_{ip} = (LU)_{ip} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{kp} \ (u_{kp} = 0, k = p+1,\ldots,n) = \sum_{k=1}^{p} l_{ik} u_{kp} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} l_{ik} u_{kp} + l_{ip} u_{pp} = \sum_{k=1}^{p-1} l_{ik} u_{kp} + l_{ip} \ \ (u_{pp} = 1)$$

Pentru $i = p,\ldots,n$ avem:

$$l_{ip} = a_{ip} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{ik} u_{kp} , \quad i = p,\ldots,n \qquad (2)$$

($u_{pp} = 1$, l_{ik}, u_{kp} $k = 1,\ldots, p-1$ sunt elemente de pe coloane din L şi linii din U calculate la paşii anteriori)

Calculul elementelor ***liniei p*** din matricea ***U:***

$$u_{pi}\ , i = p+1,\ldots,n\ (u_{pi} = 0\ , i = 1,\ldots, p-1\ , u_{pp} = 1)$$

se face analog:

$$a_{pi} = (LU)_{pi} = \sum_{k=1}^{n} l_{pk}u_{ki}(l_{pk} = 0, k = p+1,\ldots,n) = \sum_{k=1}^{p} l_{pk}u_{ki} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} l_{pk}u_{ki} + l_{pp}u_{pi}$$

Dacă $l_{pp} \neq 0$ putem calcula elementele nenule ale coloanei ***p*** din matricea ***U*** astfel:

$$u_{pi} = \frac{(a_{pi} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{pk} u_{ki})}{l_{pp}} \quad , \quad i = p+1, \cdots, n \qquad (3)$$

(elementele l_{pk}, u_{ki} $k = 1, \ldots, p-1$ sunt calculate anterior pasului ***p)***

Dac $l_{pp} = 0$, calculele se opresc, descompunerea ***LU*** nu poate fi calculată - matricea ***A*** are un minor A_p cu determinantul ***0***.

Unicitatea: Demonstraţie prin reducere la absurd.
Facem observaţia că inversa unei matrici nesingulare triunghiulară inferior (superior) este o matrice de acelaşi tip.

Presupunem că

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{L_1} \cdot \boldsymbol{U_1} \qquad (4)$$

Din ipoteza $\boldsymbol{A}$ nesingulară rezultă existenţa inverselor matricelor $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{L_1}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{U_1}$. Înmulţind egalitatea (4) la stânga cu $\boldsymbol{L^{-1}}$şi cu $\boldsymbol{U_1^{-1}}$ la dreapta obţinem

$$\boldsymbol{U}\,\boldsymbol{U_1^{-1}} = \boldsymbol{L^{-1}}\boldsymbol{L_1}.$$

Matricea $\boldsymbol{U}\,\boldsymbol{U_1^{-1}}$ este superior triunghiulară cu elementele diagonale egale cu $\boldsymbol{1}$ iar matricea $\boldsymbol{L^{-1}}\boldsymbol{L_1}$ este inferior triunghiulară. Rezultă că:

$$\boldsymbol{U}\,\boldsymbol{U_1^{-1}} = \boldsymbol{L^{-1}}\boldsymbol{L_1} = \boldsymbol{I_n}, \qquad \text{deci} \qquad \boldsymbol{L}=\boldsymbol{L_1}, \quad \boldsymbol{U}=\boldsymbol{U_1}.$$

Numărul de operații efectuate:

A (adunări, scăderi):

$$\sum_{p=1}^{n}\left[(n-p+1)(p-1)+(n-p)(p-1)\right]=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{1}{3}n^{3}+O(n^{2})$$

M (înmulțiri, împărțiri):

$$\sum_{p=1}^{n}\left[(n-p+1)(p-1)+(n-p)p\right]=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}=\frac{1}{3}n^{3}+O(n^{2})$$

Descompunerea Cholesky

O matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se numeşte ***pozitiv definit***ă dacă:

$$(Ax, x)_{\mathbb{R}^n} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \; x \neq 0$$

Notaţie: $A > 0$

Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o matrice simetrică ($A = A^T$) şi pozitiv definită.

Descompunerea Cholesky pentru matricea A este de forma:

$$A = LL^T, \; L \text{ matrice inferior triunghiulară}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = LL^T = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Matricea L se calculează în n paşi, coloană după coloană.

Pas *r (r=1,…,n)*

Se calculează elementele coloanei ***r*** a matricii ***L***:

întâi elementul diagonal $\boldsymbol{l_{rr}}$ apoi

celelalte elemente $\boldsymbol{l_{ir}}$ ***(i=r+1,…n)***

Coloana ***r*** a matricii ***L:***

$$\left(\mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0} \quad \boldsymbol{l_{rr}} \quad \boldsymbol{l_{r+1r}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{l_{ir}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{l_{nr}}\right)^{\boldsymbol{T}}$$

- se cunosc elementele primelor ***(r-1)*** coloane ale matricii ***L***

Calcul l_{rr}:

$$a_{rr} = \left(LL^T\right)_{rr} = \begin{pmatrix} l_{r1} & \cdots & l_{rr-1} & l_{rr-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{r1} \\ \vdots \\ l_{rr-1} \\ l_{rr} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= l_{r1}^2 + l_{r2}^2 + \cdots + l_{rr-1}^2 + l_{rr}^2 \quad \Rightarrow \quad l_{rr} = \pm\sqrt{a_{rr} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}^2}$$

Calcul l_{ir} $(i=r+1,\ldots,n)$:

$$a_{ir} = \left(LL^T\right)_{ir} = \begin{pmatrix} l_{i1} & \cdots & l_{ir-1} & l_{ir} & \cdots & l_{ii} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{r1} \\ \vdots \\ l_{rr-1} \\ l_{rr} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= l_{i1}l_{r1} + l_{i2}l_{r2} + \cdots + l_{ir-1}l_{rr-1} + l_{ir}l_{rr} \quad \Rightarrow \quad l_{ir} = \frac{\left(a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}l_{rk}\right)}{l_{rr}}$$