Baze de date relaționale
Dependențe funcționale
Dependențe multivaluate

Nicolae-Cosmin Vârlan

November 2, 2014

Baze de date relaționale

Elemente ale modelului relațional

- U mulțime de atribute: $U = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$;
- $dom(A_i)$ - domeniul valorilor atributului A_i;

Definim *uplu* peste U ca fiind funcția:

$$\varphi : U \rightarrow \bigcup_{1 \leq i \leq n} dom(A_i) \quad \text{a.i. } \varphi(A_i) \in dom(A_i), 1 \leq i \leq n$$

Fie valorile v_i astfel încât $v_i = \varphi(A_i)$.

Notăm cu $\{A_1 : v_1,\ A_2 : v_2,\ \ldots,\ A_n : v_n\}$ asocierea dintre atributele existente în U și valorile acestora. In cazul în care sunt considerate mulțimi ordonate (de forma $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$), notația va fi de forma: $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Elemente ale modelului relațional

Consideram mulțimea ordonată $(A_1, A_2, \ldots A_n)$. Pentru orice uplu φ, există vectorul $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ a.i. $\varphi(A_i) = v_i$, $1 \leq i \leq n$.

Pentru un vector $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ cu $v_i \in dom(A_i)$, $1 \leq i \leq n$ există un uplu φ a.i. $\varphi(A_i) = v_i$.

In practică este considerată o anumită ordonare a atributelor.

Elemente ale modelului relațional

O mulțime de uple peste U se numește *relație* și se notează cu r.

r poate varia în timp dar nu și în structură.

Exemplu:
$r = \{(v_{11}, v_{12}, \ldots v_{1n}), (v_{21}, v_{22}, \ldots v_{2n}), \ldots, (v_{m1}, v_{m2}, \ldots v_{mn})\}$.

Structura relației se va nota cu $R[U]$ unde R se numește *numele relației* iar U este mulțimea de *atribute* corespunzătoare.

Notații echivalente $R(U)$, $R(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, $R[A_1, A_2, \ldots, A_n]$.

$R[U]$ se mai numește și *schemă de relație*.

Elemente ale modelului relațional

In practică, o relație r poate fi reprezentată printr-o matrice:

$$
r: \quad \begin{array}{cccc}
A_1 & A_2 & \dots & A_n \\
\hline
v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mn} \\
\hline
\end{array}
$$

unde $(v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$ este un uplu din r, $1 \leq i \leq m$ și $v_{ij} \in dom(A_j)$, $1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m$

Vom nota cu t_i linia cu numarul i din matrice:
$t_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$

Elemente ale modelului relațional

O mulțime finită D de scheme de relație se numește *schemă de baze de date*. Formal, $D = \{R_1[U_1], \ldots, R_h[U_h]\}$ unde $R_i[U_i]$ este o schemă de relație, $1 \leq i \leq h$.

O *bază de date peste D* este o corespondență ce asociază fiecărei scheme de relație din D o relație.

Exemplu:
$r_1, r_2, \ldots r_h$ este o bază de date peste $D = \{R_1[U_1], \ldots, R_h[U_h]\}$.

Considerând D ca fiind ordonată $D = (R_1[U_1], \ldots, R_h[U_h])$, putem nota baza de date sub forma $(r_1, r_2, \ldots r_h)$

Operații în cadrul modelului relațional - *proiecția*

Considerăm:

- $R[U]$ = schemă de relație;
- $X \subseteq U$;
- t = uplu peste $R[U]$ $(t \in r)$.

Se numește *proiecția lui t relativă la X* și notată cu $t[X]$, restricția lui t la mulțimea de atribute X.

Exemplu:
Dacă $U = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ atunci $t = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.
Considerăm $X = (A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k})$, $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$.

atunci $t[X] = (v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k})$;

Operații în cadrul modelului relațional - *proiecția*

Dacă r este o relație peste $R[U]$ și $X \subseteq U$, atunci *proiecția lui r relativă la X* este $r[X] = \{t[X] \mid t \in r\}$

Exemplu:
Dacă $U = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ atunci
$r = \{(v_{11}, v_{12}, \ldots v_{1n}), (v_{21}, v_{22}, \ldots v_{2n}), \ldots, (v_{m1}, v_{m2}, \ldots v_{mn})\}$.
Considerăm $X = (A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k})$, $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$.

atunci
$r[X] = \{(v_{1i_1}, v_{1i_2}, \ldots v_{1i_k}), (v_{2i_1}, \ldots v_{2i_k}), \ldots, (v_{mi_1}, \ldots v_{mi_k})\}$

Operații în cadrul modelului relațional - *reuniunea*

Reuniunea a două relații r_1 și r_2 peste $R[U]$ este o relație notată cu $r_1 \cup r_2$ definită astfel:

$$r_1 \cup r_2 = \{t \mid t = uplu, \;\; t \in r_1 \; sau \; t \in r_2\}$$

Operații în cadrul modelului relațional - *intersecția*

Intersecția a două relații r_1 și r_2 peste $R[U]$ este o relație notată cu $r_1 \cap r_2$ definită astfel:

$$r_1 \cap r_2 = \{t \mid t = uplu,\ \ t \in r_1 \text{ și } t \in r_2\}$$

Operații în cadrul modelului relațional - *diferența*

Diferența a două relații r_1 si r_2 peste $R[U]$ este o relație notată cu $r_1 - r_2$ definită astfel:

$$r_1 - r_2 = \{t \mid t = uplu,\ \ t \in r_1\ si\ t \notin r_2\}$$

Operații în cadrul modelului relațional - *produs cartezian*

Produsul cartezian a două relații r_1 definită peste $R_1[U_1]$ și r_2 definită peste $R_2[U_2]$ cu $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ este o relație notată cu $r_1 \times r_2$ definită astfel:

$$r_1 \times r_2 = \{t \mid t = uplu\ peste\ U_1 \cup U_2,\ t[U_1] \in r_1\ si\ t[U_2] \in r_2\}$$

Operații în cadrul modelului relațional - *join* (natural)

Considerăm:

- r_1 relație peste $R_1[U_1]$;
- r_2 relație peste $R_2[U_2]$;

Se numește *join* (sau *unire*) a relațiilor r_1 si r_2, relația $r_1 * r_2$ peste $U_1 \cup U_2$ definită prin:

$$r_1 * r_2 = \{t \mid t \text{ uplu peste } U_1 \cup U_2,\ t[U_i] \in r_i,\ i = 1, 2\}$$

Dacă R este un nume pentru relația peste $U_1 \cup U_2$ atunci $r_1 * r_2$ este definită peste $R[U_1 \cup U_2]$
Pentru simplitate vom nota $U_1 \cup U_2$ cu U_1U_2.

Operații în cadrul modelului relațional - *join* (natural)

Exemplu:

Fie $R_1[A, B, C, D]$, si $R_2[C, D, E]$ si r_1, r_2 a.i.:

r_1 :

A	B	C	D
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	0	1

r_2 :

C	D	E
1	1	0
1	1	1
0	0	0
1	0	0
1	0	1

Atunci: $r_1 * r_2$:

A	B	C	D	E
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	1	0	1

Proprietăți *join* (natural)

- $r_1 * r_2[U_1] \subseteq r_1$
- $r_1 * r_2[U_2] \subseteq r_2$

Dacă $X = U_1 \cap U_2$ și:
$r'_1 = \{t_1 | t_1 \in r_1, \exists t_2 \in r_2$ a.i. $t_1[X] = t_2[X]\}$ și $r_1" = r_1 - r'_1$,
$r'_2 = \{t_2 | t_2 \in r_2, \exists t_1 \in r_1$ a.i. $t_1[X] = t_2[X]\}$ și $r_2" = r_2 - r'_2$,
atunci: $r_1 * r_2 = r'_1 * r'_2$, $r_1 * r_2[U_1] = r'_1$, $r_1 * r_2[U_2] = r'_2$.

Dacă $\overline{r_1} \subseteq r_1, \overline{r_2} \subseteq r_2$ și $\overline{r_1} * \overline{r_2} = r_1 * r_2$ atunci $r'_1 \subseteq \overline{r_1}$ si $r'_2 \subseteq \overline{r_2}$

Dacă $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ atunci $r_1 * r_2 = r_1 \times r_2$.

Extindere *join* (natural)

Fie r_i relație peste $R_i[U_i], i = \overline{1, h}$ atunci:

$r_1 * r_2 * \ldots * r_h = \{t | t$ uplu peste $U_1, \ldots U_h,$ a.i. $t[U_i] \in r_i, i = \overline{1, h}\}$

Notații echivalente:

- $r_1 * r_2 * \ldots * r_h$
- $\bowtie \langle r_i, i = 1, h \rangle$
- $* \langle r_i, i = 1, h \rangle$

Operația join este asociativă.

Operații în cadrul modelului relațional - *join* (oarecare)

Fie r_i peste $R_i[U_i]$, $i = \overline{1,2}$ cu $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots A_{\alpha_k} \in U_1$ și $B_{\beta_1}, B_{\beta_2}, \ldots B_{\beta_k} \in U_2$ și θ_i operator de comparație între elementele lui $dom(A_{\alpha_i})$ și cele ale lui $dom(B_{\beta_i})$

θ_i este relație binara peste $dom(A_{\alpha i}) \times dom(B_{\beta i})$, $1 \leq i \leq k$. *Join-ul oarecare* a două relații r_1 și r_2, notat cu $r_1 \underset{\theta}{\bowtie} r_2$, este definit prin:

$$r_1 \underset{\theta}{\bowtie} r_2 = \{(t_1, t_2) | t_1 \in r_1, t_2 \in r_2, t_1[A_{\alpha_i}]\theta_i t_2[B_{\beta_i}], i = \overline{1,k}\}$$

unde $\theta = (A_{\alpha_1}\theta_1 B_{\beta_1}) \wedge (A_{\alpha_2}\theta_2 B_{\beta_2}) \wedge \ldots \wedge (A_{\alpha_k}\theta_k B_{\beta_k})$

Observație: un join oarecare cu condiția TRUE este un produs cartezian.

Operații în cadrul modelului relațional - *selecția*

Fie r o relație peste $R[U]$.
Considerăm pentru început expresiile elementare de selecție: $A\theta B$, $A\theta c$, $c\theta B$, unde $A, B \in U$ și c este o constantă.

Dacă e_1 și e_2 sunt expresii de selecție (elementare sau nu), atunci următoarele sunt expresii de selecție: (e_1), $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \vee e_2$, $(e_1 \wedge e_2)$, $(e_1 \vee e_2)$.

Operații în cadrul modelului relațional - *selecția*

Fie E o expresie de selecție. Atunci:

- când $E = A\theta B$, t satisface E dacă $t[A]\ \theta\ t[B]$,
- când $E = A\theta c$, t satisface E dacă $t[A]\ \theta\ c$,
- când $E = c\theta B$, t satisface E dacă $c\ \theta\ t[B]$,
- când $E = e_1 \wedge e_2$, t satisface E dacă t satisface atât pe e_1 cât și pe e_2,
- când $E = e_1 \vee e_2$, t satisface E dacă t satisface măcar pe unul dintre e_1 și e_2.

Dacă F este o expresie de selecție atunci *selecția* se notează cu $\sigma_F(r)$ și este definită ca:
$\sigma_F(r) = \{t|t = tuplupesteR[U], tsatisfaceF\}$

Operații în cadrul modelului relațional

Mulțimea de operații: reuniune, diferență, produs cartezian, proiecție și selecție formează o bază (adică celelalte operații pot fi exprimate prin intermediul lor).

Exemple (pe tabela emp / dept)

vezi fisier txt.

Dependențe funcționale

Dependențe funcționale

Fie $X, Y \subseteq U$. Vom nota o dependență funcțională cu $X \rightarrow Y$.

O relație r peste U satisface *dependența funcțională* $X \rightarrow Y$ dacă:

$$(\forall t_1, t_2)(t_1, t_2 \in r)[t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y]]$$

$X = \emptyset$ avem $\emptyset \rightarrow Y$ dacă $(\forall t_1, t_2)(t_1, t_2 \in r)[t_1[Y] = t_2[Y]]$

$Y = \emptyset$ atunci orice $\forall r$ peste U avem că $X \rightarrow \emptyset$

Dacă r satisface $X \rightarrow Y$, atunci există o funcție $\varphi : r[X] \rightarrow r[Y]$ definită prin $\varphi(t) = t'[Y]$, unde $t' \in r$ și $t'[X] = t \in r[X]$.
Dacă r satisface $X \rightarrow Y$ spunem că X determină funcțional pe Y în r.

Exemplu

Fie $X = \{A, B\}$, $Y = \{D, E\}$. Se observă că $X \to Y$.

r :

A	B	C	D	E
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1

$t_1[X] \neq t_2[x]$, $t_1[X] \neq t_3[x]$, $t_1[X] \neq t_4[x]$ - ok pentru t_1;

$t_2[X] \neq t_3[x]$, $t_2[X] \neq t_4[x]$ - ok pentru t_2;

$t_3[X] = t_4[X] \to t_3[Y] = t_4[Y]$ - relatie verificata cand doua linii sunt egale - ok.

Fie $X = \{A, B\}$, $Y = \{D, E\}$. Se observă că $X \to Y$.

r :

A	B	C	D	E
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1

Dacă r satisface $X \to Y$, atunci există o funcție $\varphi : r[X] \to r[Y]$ definită prin $\varphi(t) = t'[Y]$, unde $t' \in r$ și $t'[X] = t \in r[X]$.

Pe exemplu:
t' din observație este format din coloanele A, B, C, D și E.
t din observație este format doar din coloanele A și B.
$\varphi(t)$ asociaza tuplului $t'[A, B]$ valorile $t'[D, E]$:

$$\varphi((0,0)) = (0,1),\ \ \varphi((0,1)) = (0,0),\ \ \varphi((1,1)) = (0,0),$$

Proprietăți ale dependențelor funcționale

FD1. (Reflexivitate) Dacă $Y \subseteq X$, atunci r satisface $X \to Y$, $\forall r \in U$.

FD2. (Extensie) Dacă r satisface $X \to Y$ și $Z \subseteq W$, atunci r satisface $XW \to YZ$.

FD3. (Tranzitivitate) Dacă r satisface $X \to Y$ și $Y \to Z$, atunci r satisface $X \to Z$.

FD4. (Pseudotranzitivitate) Dacă r satisface $X \to Y$ și $YW \to Z$, atunci r satisface $XW \to Z$.

Proprietăți ale dependențelor funcționale

FD5. (Uniune) Dacă r satisface $X \to Y$ și $X \to Z$, atunci r satisface $X \to YZ$.

FD6. (Descompunere) Dacă r satisface $X \to YZ$, atunci r satisface $X \to Y$ și $X \to Z$.

FD7. (Proiectabilitate) Dacă r peste U satisface $X \to Y$ și $X \subset Z \subseteq U$, atunci $r[Z]$ satisface $X \to Y \cap Z$

FD8. (Proiectabilitate inversă) Dacă $X \to Y$ este satisfacută de o proiecție a lui r, atunci $X \to Y$ este satisfacută de r.

Dependențe funcționale - consecință și acoperire

Dacă Σ este o mulțime de dependențe funcționale peste U atunci spunem că $X \to Y$ *este consecință din* Σ dacă orice relație ce satisface toate consecințele din Σ satisface și $X \to Y$.
Notație: $\Sigma \models X \to Y$

Fie $\Sigma^* = \{X \to Y | \Sigma \models X \to Y\}$. Fie Σ_1 = mulțime de dependențe funcționale. Σ_1 constituie o *acoperire* pentru Σ^* dacă $\Sigma_1^* = \Sigma^*$.

Proprietăți ale dependențelor funcționale

Propoziție

Pentru orice mulțime Σ *de dependențe funcționale există o acoperire* Σ_1 *pentru* Σ^**, astfel încat toate dependențele din* Σ_1 *sunt de forma* $X \to A$*,* A *fiind un atribut din* U*.*

Propoziție

$\Sigma \models X \to Y$ *dacă și numai dacă* $\Sigma \models X \to B_j$ *pentru* $j = \overline{1, h}$*, unde* $Y = B_1 \ldots B_h$*.*

Reguli de deducere

Fie $\mathcal{R}$ o mulțime de formule de deducere pentru dependențe funcționale și Σ o mulțime de dependențe funcționale. Spunem că $X \to Y$ este o *demonstrație* în Σ utilizând regulile $\mathcal{R}$ și vom nota $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}} X \to Y$, dacă există șirul $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, astfel încât:

- $\sigma_n = X \to Y$ și
- pentru $\forall i = \overline{1, n}$, $\sigma_i \in \Sigma$ sau există în $\mathcal{R}$ o regulă de forma $\frac{\sigma_{j_1}, \sigma_{j_2}, \ldots \sigma_{j_k}}{\sigma_i}$, unde $j_1, j_2, \ldots, j_k < i$.

Reguli de deducere

Conform proprietăților FD1-FD5 putem defini regulile:

FD1f: $\frac{Y \subseteq X}{X \to Y}$

FD2f: $\frac{X \to Y,\ Z \subseteq W}{XW \to YZ}$

FD3f: $\frac{X \to Y,\ Y \to Z}{X \to Z}$

FD4f: $\frac{X \to Y,\ YW \to Z}{XW \to Z}$

FD5f: $\frac{X \to Y,\ X \to Z}{X \to YZ}$

FD6f: $\frac{X \to YZ}{X \to Y}, \frac{X \to YZ}{X \to Z}$

Propoziție

Regulile FD4f, FD5f, FD6f se exprimă cu ajutorul regulilor FD1f, FD2f, FD3f.

Notăm cu $\mathcal{R}_1 = \{$FD1f, FD2f, FD3f$\}$,
și cu $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cup \{$FD4f, FD5f, FD6f$\}$

Axiomele lui Armstrong

Armstrong a definit (în *Dependency structures of database relationships* Proc. IFIP 74, Amsterdam, 580-583) următoarele reguli de inferența (numite *Axiomele lui Armstrong*):

A1: $\frac{}{A_1 \ldots A_m \to A_i}, i = \overline{1, m}$

A2: $\frac{A_1, \ldots A_m \to B_1, \ldots B_r}{A_1 \ldots A_m \to B_j}, j = \overline{1, r}$

$\frac{A_1, \ldots A_m \to B_j,\ j = \overline{1, r}}{A_1 \ldots A_m \to B_1, \ldots B_r}$

A3: $\frac{A_1, \ldots A_m \to B_1, \ldots B_r, \quad B_1, \ldots B_r \to C_1, \ldots C_p}{A_1 \ldots A_m \to C_1, \ldots C_p}$

unde A_i, B_j, C_k sunt atribute. Notăm $\mathcal{R}_A = \{$A1, A2, A3$\}$.

Obs: regula A3 este de fapt FD3f (tranzitivitatea).

Propoziție

Regulile din $\mathcal{R}_1$ se exprimă prin cele din R_A și invers.

Notație:

$$\Sigma_{\mathcal{R}}^{+} = \{X \to Y | \Sigma \vdash_{\mathcal{R}} X \to Y\}$$

Propoziție

Fie $\mathcal{R}_1'$ si $\mathcal{R}_2'$ doua multimi de reguli astfel incat $\mathcal{R}_1'$ se exprima prin $\mathcal{R}_2'$ si invers. Atunci $\Sigma_{\mathcal{R}_1'}^{+} = \Sigma_{\mathcal{R}_2'}^{+}$ pentru orice multime Σ de dependente functionale.

Consecinta: $\Sigma_{\mathcal{R}_1}^{+} = \Sigma_{\mathcal{R}_A}^{+}$

Fie $X \subseteq U$ și $\mathcal{R}$ o mulțime de reguli de inferență. Notăm cu

$$X^+_{\mathcal{R}} = \{A | \Sigma \vdash_{\mathcal{R}} X \to A\}$$

Lemă

$\Sigma \vdash_{\mathcal{R}} X \to Y$ *dacă și numai dacă* $Y \subseteq X^+_{\mathcal{R}_1}$.

Lemă

Fie Σ o mulțime de dependențe funcționale și $\sigma : X \to Y$ o dependență funcțională astfel încât $\Sigma \nvdash_{\mathcal{R}_1} X \to Y$. Atunci există o relație r_σ ce satisface toate dependențele funcționale din Σ și r_σ nu satisface $X \to Y$.

Theorem

Fie Σ o mulțime de dependențe funcționale. Atunci există o relație r_0 ce satisface exact elementele lui $\Sigma^+_{\mathcal{R}_1}$, adică:

- *r_0 satisface τ, $\forall \tau \in \Sigma^+_{\mathcal{R}_1}$ si*
- *r_0 nu satisface γ, $\forall \gamma \notin \Sigma^+_{\mathcal{R}_1}$*

Dependențe multivaluate

Exemplu

Presupunem că persoana cu CNP $= 1$ a fost admisă la două facultăți și are permis de conducere pentru categoriile A și B:

r :

CNP	Admis la facult.	Are permis categ.
1	Informatică	A
1	Matematică	B

Deși anumite rânduri nu sunt scrise în tabelă, putem să intuim că persoana cu CNP $= 1$ a dat la facultatea de Informatică și are permis de conducerea categoria B. Deci, deși în r nu există t-uplul $\langle$ 1,Informatica,B $\rangle$, ar trebui să existe și el (pentru că poate fi dedus din cele existente).

Care alt t-uplu mai poate fi dedus ?

Exemplu

r :

CNP	Admis la facult.	Are permis categ.
1	Informatică	A
1	Matematică	B
1	Informatică	B
1	Matematică	A

t-uplele marcate cu roșu ar putea lipsi, ele fiind redundante deoarece pot fi obținute din primele două t-uple.

Prin intermediul dependențelor funcționale pot afla la care coloane pot renunța astfel încât să le pot reface ulterior.

Prin intermediul dependențelor multivaluate pot afla la care linii pot renunța astfel încât să le pot reface ulterior.

Dependențe multivaluate - definiție

Fie $X, Y \subseteq U$. O dependență multivaluată este notată cu $X \twoheadrightarrow Y$.

Definition

Relația *r peste U satisface dependența multivaluată $X \twoheadrightarrow Y$* dacă pentru oricare două tuple $t_1, t_2 \in r$ și $t_1[x] = t_2[x]$, există relațiile t_3 și t_4 din r, astfel încât:

- $t_3[X] = t_1[X], t_3[Y] = t_1[Y], t_3[Z] = t_2[Z]$;
- $t_4[X] = t_2[X], t_4[Y] = t_2[Y], t_4[Z] = t_1[Z]$

unde $Z = U - XY$ (Z mai este denumită și $rest$).

Exemplul 2 (mai formal)

r :

A	B	C	D			
a_1	b_1	c_1	d_1	t_1		t_1”
a_1	b_2	c_2	d_2	t_2		
a_1	b_1	c_1	d_2	t_3		t_2”
a_1	b_2	c_2	d_1	t_4		
a_2	b_3	c_1	d_1		t'_1, t'_4	
a_2	b_3	c_1	d_2		t'_2, t'_3	

r satisface $A \twoheadrightarrow BC$

Intrebare: cum alegem t_3”, t_4” ?

Deoarece atunci când $t_1[A] = t_2[A]$ avem că:
$t_3[A] = t_1[A], t_3[BC] = t_1[BC], t_3[D] = t_2[D]$ și
$t_4[A] = t_2[A], t_4[BC] = t_2[BC], t_4[D] = t_1[D]$

Definiție echivalentă

Definition

Relația *r peste U satisface dependența multivaluată $X \twoheadrightarrow Y$*, dacă pentru orice $t_1, t_2 \in r$ cu $t_1[X] = t_2[X]$ avem că $M_Y(t_1[XZ]) = M_Y(t_2[XZ])$

unde $M_Y(t[XZ]) = \{t'[Y] | t' \in r, t'[XZ] = t[XZ]\}$

r :

A	B	C	D		
a_1	b_1	c_1	d_1	$=$	t_1
a_1	b_2	c_2	d_2	$=$	t_2
a_1	b_1	c_1	d_2		
a_1	b_2	c_2	d_1		
a_2	b_3	c_1	d_1		
a_2	b_3	c_1	d_2		

$M_Y(t1[AD]) = M_Y(t2[AD]) = \{(b_1, c_1), (b_2, c_2)\}$

Observații

- Dacă r satisface dependența funcțională $X \to Y$, atunci pentru orice $t \in r$, avem $M_Y(t[XZ]) = \{t[Y]\}$.
- Dacă r satisface dependența funcțională $X \to Y$, atunci r satisface și dependența multivaluată $X \twoheadrightarrow Y$.
- Dacă r satisface dependența multivaluată $X \twoheadrightarrow Y$, atunci putem defini o funcție $\psi : r[X] \to \mathcal{P}(r[Y])$, prin $\psi(t[X]) = M_Y(t[XZ]), \forall t \in r$. Când r satisface $X \to Y$, atunci $\psi : r[X] \to r[Y]$.

Proprietăți ale dependențelor multivaluate

MVD0 (Complementariere) Fie $X, Y, Z \subseteq U$, asfel încât $XYZ = U$ și $Y \cap Z \subseteq X$. Daca r satisface $X \twoheadrightarrow Y$, atunci r satisface $X \twoheadrightarrow Z$.

MVD1 (Reflexivitate) Dacă $Y \subseteq X$, atunci orice relație r satisface $X \twoheadrightarrow Y$.

MVD2 (Extensie) Fie $Z \subseteq W$ și r satisface $X \twoheadrightarrow Y$. Atunci r satisface $XW \twoheadrightarrow YZ$

MVD3 (Tranzitivitate) Dacă r satisface $X \twoheadrightarrow Y$ și $Y \twoheadrightarrow Z$, atunci r satisface $X \twoheadrightarrow Z - Y$

Proprietăți ale dependențelor multivaluate

MVD4 (Pseudotranzitivitate) Dacă r satisface $X \twoheadrightarrow Y$ și $YW \twoheadrightarrow Z$, atunci r satisface și $XW \twoheadrightarrow Z - YW$.

MVD5 (Uniune) Dacă r satisface $X \twoheadrightarrow Y$ și $X \twoheadrightarrow Z$ atunci r satisface $X \twoheadrightarrow YZ$.

MVD6 (Descompunere) Dacă r satisface $X \twoheadrightarrow Y$ și $X \twoheadrightarrow Z$, atunci r satisface $X \twoheadrightarrow Y \cap Z$, $X \twoheadrightarrow Y - Z$, $X \twoheadrightarrow Z - Y$

Proprietăți mixte ale dependențelor multivaluate

FD-MVD1. Dacă r satisface $X \to Y$, atunci r satisface și $X \twoheadrightarrow Y$.

FD-MVD2. Dacă r satisface $X \twoheadrightarrow Z$ și $Y \to Z'$, cu $Z' \subseteq Z$ și $Y \cap Z = \emptyset$, atunci r satisface $X \to Z'$.

FD-MVD3. Dacă r satisface $X \twoheadrightarrow Y$ și $XY \twoheadrightarrow Z$, atunci r satisface $X \to Z - Y$.

Reguli de inferență

MVD0f: $\dfrac{XYZ=U,\ \ Y\cap Z\subseteq X,\ \ X\twoheadrightarrow Y}{X\twoheadrightarrow Z}$

MVD1f: $\dfrac{Y\subseteq X}{X\twoheadrightarrow Y}$

MVD2f: $\dfrac{Z\subseteq W,\ \ X\twoheadrightarrow Y}{XW\twoheadrightarrow YZ}$

MVD3f: $\dfrac{X\twoheadrightarrow Y,\ \ Y\twoheadrightarrow Z}{X\twoheadrightarrow Z-Y}$

MVD4f: $\dfrac{X\twoheadrightarrow Y, YW\twoheadrightarrow Z}{XW\twoheadrightarrow Z-YW}$

Reguli de inferență

MVD5f: $\dfrac{X \twoheadrightarrow Y,\ \ X \twoheadrightarrow Z}{X \twoheadrightarrow YZ}$

MVD6f: $\dfrac{X \twoheadrightarrow Y,\ \ X \twoheadrightarrow Z}{X \twoheadrightarrow Y \cap Z,\ \ X \twoheadrightarrow Y - Z,\ \ X \twoheadrightarrow Z - Y}$

FD-MVD1f: $\dfrac{X \rightarrow Y}{X \twoheadrightarrow Y}$

FD-MVD2f: $\dfrac{X \twoheadrightarrow Z,\ \ Y \rightarrow Z',\ \ Z' \subseteq Z,\ \ Y \cap Z = \emptyset}{X \rightarrow Z'}$

FD-MVD3f: $\dfrac{X \twoheadrightarrow Y,\ \ XY \twoheadrightarrow Z}{X \twoheadrightarrow Z - Y}$

Propoziție

Fie $\mathcal{R}$ o multime de reguli valide si γ o regula $\frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k}{\beta}$, astfel incat $\{\alpha_1, \ldots \alpha_k\} \vdash_{\mathcal{R}} \beta$, atunci si regula γ este valida.

Propoziție

Fie $\mathcal{R}_{FM} = \{FD1f - FD3f^1, \quad MVD0f - MVD3f,$ $FD - MVD1f - FD - MVD3f\}$. Avem:

- *$FD - MVD3f$ se exprima cu celelalte regulid din $\mathcal{R}_{FM}$ si FD*
- *$MVD2f$ se exprima prin celelalte reguli din $\mathcal{R}_{FM}$.*

Propoziție

Regulile $MVD4f - MVD6f$ se exprima cu ajutorul regulilor $MVD0f - MVD3f$

[1] cele de la dependente functionale

Theorem

Fie Σ o multime de dependente functionale sau multivaluate si X o submultime de atribute. Atunci exista o partitie a lui $U - X$ notata prin $Y_1 \dots Y_k$, astfel incat pentru $Z \subseteq U - X$ avem $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}_{FM}} X \twoheadrightarrow Z$ daca si numai daca Z este reuniunea unui numar de multimi din partitia $\{Y_1, \dots Y_k\}$

Definition

Pentru Σ o multime de dependente functionale sau multivaluate si X o submultime de atribute, numim *baza de dependenta pentru X cu privire la Σ* partitia $B(\Sigma, X) = \{\{A_1\} \dots \{A_h\}, Y_1 \dots Y_k\}$, unde $X = A_1, \dots A_h$, iar $Y_1, \dots Y_k$ este partitia construita in teorema precedenta.

Observatii

- Avem $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}_{FM}} X \twoheadrightarrow Z$ daca si numai daca Z este o reuniune de elemente din partitia $B(\Sigma, X)$.
- Fie $X_{\Sigma}^{*} = \{A | \Sigma \vdash_{\mathcal{R}_{FM}} X \rightarrow A\}$. Atunci pentru orice $A \in X_{\Sigma}^{*}$ avem $\{A\} \in B(\Sigma, X)$.