Capitolul 5

Forme normale
Varianta Preliminară

În continuare, vom permite scrierea de formule fără paranteze, respectând următoarea ordine de prioritate a conectorilor logici:

$$\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow .$$

De exemplu, prin

$$\neg\neg\mathtt{p} \vee \perp \wedge \mathtt{p} \rightarrow \neg\mathtt{p} \wedge \mathtt{q} \leftrightarrow \mathtt{q}$$

înțelegem formula

$$(((\neg\neg\mathtt{p} \vee (\perp \wedge \mathtt{p})) \rightarrow(\neg\mathtt{p} \wedge \mathtt{q})) \leftrightarrow \mathtt{q}).$$

De asemenea, vom nota $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ cu $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3$ (adică într-o secvență de $\vee$-uri se face asocierea la stânga).

De asemenea, vom nota $((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3)$ cu $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ (adică și într-o secvență de $\wedge$-uri se face asocierea la stânga).

Exemplul 5.1. *Scrierea*

$$\mathtt{p} \wedge \mathtt{q} \wedge \mathtt{r} \vee \neg\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q} \wedge \neg\mathtt{r}$$

reprezintă formula

$$(((\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \wedge \mathtt{r}) \vee ((\neg\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q}) \wedge \neg\mathtt{r})).$$

Scrierea

$$\mathtt{p}_1 \wedge \mathtt{p}_2 \wedge \mathtt{p}_3 \wedge \mathtt{p}_4$$

reprezintă formula

$$(((\mathtt{p}_1 \wedge \mathtt{p}_2) \wedge \mathtt{p}_3) \wedge \mathtt{p}_4).$$

Scrierea

$$\mathtt{p}_1 \vee \mathtt{p}_2 \vee \mathtt{p}_3 \vee \mathtt{p}_4$$

reprezintă formula

$$(((\mathtt{p}_1 \vee \mathtt{p}_2) \vee \mathtt{p}_3) \vee \mathtt{p}_4).$$

5.1 Teorema de înlocuire

În continuare, prezentăm o teoremă pe care am folosit-o până acum implicit:

Teorema 5.1 (Teorema de înlocuire)**.** *Fie φ, φ' două formule astfel încât $\varphi \equiv \varphi'$.*

Fie φ_1 o formulă care conține φ ca subformulă.

Fie φ_2 formula obținută din φ_1 prin înlocuirea unei apariții a lui φ cu φ'.

Atunci $\varphi_1 \equiv \varphi_2$.

Cu alte cuvinte, $\equiv$ este o *congruență*.

Exemplul 5.2. *Fie $\varphi = \mathtt{p}$ și $\varphi' = \neg\neg\mathtt{p}$.*

Fie $\varphi_1 = (\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$ și $\varphi_2 = (\neg\neg\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$.

Prin teorema de înlocuire, avem că $\varphi_1 \equiv \varphi_2$. Cu alte cuvinte, dacă înlocuim într-o formulă o subformulă cu una echivalentă, noua formulă este echivalentă cu cea de la care am plecat.

5.2 Literal

Definiția 5.1 (Literal)**.** *O formulă φ se numește* literal *dacă există o variabilă propozițională $a \in A$ astfel încât*

$$\varphi = a \qquad \textit{sau} \qquad \varphi = \neg a.$$

Exemplul 5.3. *De exemplu, formulele $\mathtt{p}, \mathtt{q}, \neg\mathtt{p}, \neg\mathtt{p}', \mathtt{q}_1$ sunt literali, dar formulele $(\mathtt{p} \vee \mathtt{q}), \neg\neg\mathtt{p}, \neg\neg\neg\mathtt{q}_1, (\neg\mathtt{p}$ nu sunt literali.*

5.3 Clauză

Definiția 5.2. *O formulă φ se numește* clauză *dacă există n literali $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ astfel încât*

$$\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n.$$

Cu alte cuvinte, o clauză este o disjuncție de literali.

Exemplul 5.4. *Următoarele formule sunt clauze:*

1. $\mathtt{p} \vee \mathtt{q} \vee \mathtt{r}$;
2. $\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q} \vee \neg\mathtt{r}$;
3. $\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{q} \vee \neg\mathtt{r}$;
4. $\neg\mathtt{p}_1 \vee \mathtt{p}_1 \vee \mathtt{p}_2 \vee \neg\mathtt{q} \vee \neg\mathtt{r}$;
5. $\neg\mathtt{p}_1 \vee \mathtt{p}_1$;
6. $\neg\mathtt{p}_1$ *($n = 1$).*
7. $\mathtt{p}$ *($n = 1$).*

Următoarele formule nu sunt clauze:

1. $\mathtt{p} \wedge \mathtt{r}$; *(conjuncție în loc de disjuncție)*
2. $\mathtt{p} \vee \neg\neg\mathtt{q} \vee \neg\mathtt{r}$; *(nu e disjuncție de literali)*
3. $\neg\neg\mathtt{p} \vee \mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{p}_1$. *(apare $\neg\neg$, deci nu avem literali; apare $\wedge$)*

Observația 5.1. *Pentru $n = 0$, obținem* clauza vidă, *care se notează cu $\square$. Considerăm că $\square \in \mathbb{LP}$ este o formulă nesatisfiabilă (i.e., clauza vidă este o formulă echivalentă cu $\perp$).*

5.4 Forma Normală Conjunctivă

Definiția 5.3 (FNC)**.** *O formulă* φ este în FNC *dacă există* n *clauze* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *astfel încât*

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n.$$

Cu alte cuvinte, o formulă în FNC este o conjuncție de disjuncții de literali. Sau, o formulă în FNC este o conjuncție de clauze. FNC se mai numește și formă normală clauzală.

Exemplul 5.5. *Următoarele formule sunt în FNC:*

1. $(\neg \mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \wedge (\mathtt{r} \vee \neg \mathtt{p} \vee \mathtt{r}') \wedge (\neg \mathtt{p} \vee \neg \mathtt{r})$;
2. $\neg \mathtt{p} \wedge (\mathtt{r} \vee \neg \mathtt{p} \vee \mathtt{r}') \wedge \neg \mathtt{r}$;
3. $\neg \mathtt{p} \wedge \mathtt{r} \wedge \neg \mathtt{r}$;
4. $\neg \mathtt{p}$;
5. $\mathtt{p}$.

Următoarele formule nu sunt în FNC:

1. $\neg(\neg \mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \wedge (\mathtt{r} \vee \neg \mathtt{p} \vee \mathtt{r}') \wedge (\neg \mathtt{p} \vee \neg \mathtt{r})$; *(prima clauză e negată)*
2. $\neg \mathtt{p} \wedge \neg(\mathtt{r} \vee \neg \mathtt{p} \vee \mathtt{r}')$; *(a doua clauză e negată)*
3. $\neg \mathtt{p} \vee (\mathtt{r} \wedge \neg \mathtt{p} \wedge \mathtt{r}')$; *(conectorul principal e disjuncția, în loc de conjuncție)*
4. $\neg\neg \mathtt{p}$; *(apare $\neg\neg$, deci nu avem literali)*
5. $\mathtt{p} \vee (\mathtt{q} \wedge \mathtt{r})$. *(disjuncție de conjuncții, nu conjuncție de disjuncții de literali)*

5.5 Aducerea unei formule în FNC

Teorema 5.2 (Teorema de aducere a unei formule în FNC)**.** *Pentru orice formulă* φ*, există o formulă* φ'*, aflată în FNC, astfel încât* $\varphi \equiv \varphi'$*.*

Schiță de demonstrație. Prin aplicarea repetată a teoremei de înlocuire, folosind următoarele echivalențe:

1. $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \equiv ((\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1))$;
2. $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \equiv (\neg \varphi_1 \vee \varphi_2)$;
3. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3)) \equiv ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3))$;
4. $((\varphi_2 \wedge \varphi_3) \vee \varphi_1) \equiv ((\varphi_2 \vee \varphi_1) \wedge (\varphi_3 \vee \varphi_1))$;
5. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \equiv ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$;
6. $(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)) \equiv ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3)$;
7. $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv (\neg \varphi_1 \wedge \neg \varphi_2)$;
8. $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv (\neg \varphi_1 \vee \neg \varphi_2)$;

9. $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$.

Primele două echivalențe asigură faptul că din formulă dispar toate implicațiile și dublele implicații.

Echivalențele 3 și 4 asigură că în arborele formulei toate disjuncțiile "coboară" sub conjuncții.

Echivalențele 5 și 6 asigură asociativitatea lanțurilor de disjuncții și respectiv de conjuncții (astfel încât să punem scrie $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3 \vee \ldots \vee \varphi_n$ în loc de $((((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \ldots) \vee \varphi_n)$.

Echivalențele 7 și 8 asigură faptul că negațiile ajung "sub" conjuncții și disjuncții în arborele formulei.

Ultima echivalență asigură că nu există două negații "una sub alta" în arborele de sintaxă abstractă.

Aplicarea echivalențelor de mai sus se oprește (nu se pot aplica la infinit – de ce?).

Rezultatul va fi o formulă în care conjuncțiile sunt "deasupra" disjuncțiilor, care la rândul lor sunt "deasupra" eventualelor negații în arborele abstract de sintaxă, adică o formulă în FNC. □

Exemplul 5.6. *Să aducem formula $((\neg p \to \neg q) \leftrightarrow (q \to p))$ în FNC:*

$$
\begin{aligned}
& ((\neg p \to \neg q) \leftrightarrow (q \to p)) \\
\overset{1}{\equiv}\; & \Big((\neg p \to \neg q) \to (q \to p)\Big) \wedge \Big((q \to p) \to (\neg p \to \neg q)\Big) \\
\overset{2}{\equiv}\; & \Big((\neg\neg p \vee \neg q) \to (\neg q \vee p)\Big) \wedge \Big((\neg q \vee p) \to (\neg\neg p \vee \neg q)\Big) \\
\overset{2}{\equiv}\; & \Big(\neg(\neg\neg p \vee \neg q) \vee (\neg q \vee p)\Big) \wedge \Big(\neg(\neg q \vee p) \vee (\neg\neg p \vee \neg q)\Big) \\
\overset{7}{\equiv}\; & \Big((\neg\neg\neg p \wedge \neg\neg q) \vee (\neg q \vee p)\Big) \wedge \Big((\neg\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg\neg p \vee \neg q)\Big) \\
\overset{9}{\equiv}\; & \Big((\neg p \wedge q) \vee (\neg q \vee p)\Big) \wedge \Big((q \wedge \neg p) \vee (p \vee \neg q)\Big) \\
\overset{4}{\equiv}\; & \Big((\neg p \vee (\neg q \vee p)) \wedge (q \vee (\neg q \vee p))\Big) \wedge \Big((q \vee (p \vee \neg q)) \wedge (\neg p \vee (p \vee \neg q))\Big) \\
\overset{5}{\equiv}\; & \Big(((\neg p \vee \neg q) \vee p) \wedge ((q \vee \neg q) \vee p)\Big) \wedge \Big(((q \vee p) \vee \neg q) \wedge ((\neg p \vee p) \vee \neg q)\Big) \\
=\; & \big((\neg p \vee \neg q \vee p) \wedge (q \vee \neg q \vee p)\big) \wedge \big((q \vee p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee p \vee \neg q)\big) \\
\overset{6}{\equiv}\; & \Big(((\neg p \vee \neg q \vee p) \wedge (q \vee \neg q \vee p)) \wedge (q \vee p \vee \neg q)\Big) \wedge (\neg p \vee p \vee \neg q) \\
=\; & (\neg p \vee \neg q \vee p) \wedge (q \vee \neg q \vee p) \wedge (q \vee p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee p \vee \neg q).
\end{aligned}
$$

5.6 Forma Normală Disjunctivă

Definiția 5.4 (FND). *O formulă este în FND dacă este o disjuncție de conjuncții de literali.*

Exemplul 5.7. *Următoarele formule sunt în FND:*

1. $(\neg \mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee (\mathtt{r} \wedge \neg \mathtt{p} \wedge \mathtt{r}') \vee (\neg \mathtt{p} \wedge \neg \mathtt{r})$;
2. $\neg \mathtt{p} \vee (\mathtt{r} \wedge \neg \mathtt{p} \wedge \mathtt{r}') \vee \neg \mathtt{r}$;
3. $\neg \mathtt{p} \vee \mathtt{r} \vee \neg \mathtt{r}$;
4. $\neg \mathtt{p}$;
5. $\mathtt{p}$.

Următoarele formule nu sunt în FND:

1. $\neg(\neg \mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee (\mathtt{r} \wedge \neg \mathtt{p} \wedge \mathtt{r}') \vee (\neg \mathtt{p} \wedge \neg \mathtt{r})$;

2. $\neg\mathtt{p} \vee \neg(\mathtt{r} \wedge \neg\mathtt{p} \wedge \mathtt{r}')$;

3. $\neg\mathtt{p} \wedge (\mathtt{r} \vee \neg\mathtt{p} \vee \mathtt{r}')$;

4. $\neg\neg\mathtt{p}$;

5. $\mathtt{p} \wedge (\mathtt{q} \vee \mathtt{r})$.

Exercițiul 1. *Enunțați și schițați demonstrația teoremei de aducere în FND.*

5.7 Legătura dintre FNC și FND

Definiția 5.5. *Complementul unei formule $\varphi \in \mathbb{LP}_{\neg,\vee,\wedge}$ se notează φ^c și este definit astfel:*

1. $a^c = \neg a$, *pentru orice* $a \in A$;

2. $(\neg\varphi)^c = \varphi$, *pentru orice* $\varphi \in \mathbb{LP}$;

3. $(\varphi_1 \vee \varphi_2)^c = (\varphi_1^c \wedge \varphi_2^c)$, *pentru orice* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{LP}$;

4. $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^c = (\varphi_1^c \vee \varphi_2^c)$, *pentru orice* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{LP}$.

Exemplul 5.8. 1. $\neg\mathtt{p}^c = \mathtt{p}$ *(atenție, complementul lui $\neg\mathtt{p}$ nu este $\neg\neg\mathtt{p}$);*

2. $\neg(\neg\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee (\mathtt{r} \wedge \neg\mathtt{p} \wedge \mathtt{r}') \vee (\neg\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{r})^c = (\neg\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \wedge (\mathtt{r} \vee \neg\mathtt{p} \vee \mathtt{r}') \wedge (\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{r})$;

3. $(\neg\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \wedge (\mathtt{r} \vee \neg\mathtt{p} \vee \mathtt{r}') \wedge (\neg\mathtt{p} \vee \neg\mathtt{r})^c = \neg(\neg\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \vee (\mathtt{r} \wedge \neg\mathtt{p} \wedge \mathtt{r}') \vee (\neg\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{r})$.

Teorema 5.3 (Complementul este echivalent cu negația)**.** *Pentru orice formulă $\varphi \in \mathbb{LP}_{\neg,\wedge,\vee}$, avem că*

$$\varphi^c \equiv \neg\varphi.$$

Exercițiu: demonstrați teorema de mai sus prin inducție structurală.

Exemplul 5.9. $(\mathtt{p} \wedge (\mathtt{q} \vee \neg\mathtt{r}))^c = (\neg\mathtt{p} \vee (\neg\mathtt{q} \wedge \mathtt{r})) \equiv \neg(\mathtt{p} \wedge (\mathtt{q} \vee \neg\mathtt{r}))$.

Teorema 5.4 (Legătura dintre FNC și FND)**.** *Fie φ_1 o formulă în FNC și φ_2 o formulă în FND.*

Atunci φ_1^c este în FND și φ_2^c este în FNC.