Calcul Numeric

Cursul 3

2022

Anca Ignat

Condiționare ←→ stabilitate

Condiționarea unei probleme caracterizează sensibilitatea soluției în raport cu perturbarea datelor de intrare, în ipoteza unor calcule exacte (independent de algoritmul folosit pentru rezolvarea problemei).

Fie $\boldsymbol{x}$ datele exacte de intrare, $\tilde{\boldsymbol{x}}$ o aproximație cunoscută a acestora, $\boldsymbol{P(x)}$ soluţia exactă a problemei şi $\boldsymbol{P(\tilde{x})}$ soluţia problemei cu $\tilde{\boldsymbol{x}}$ ca date de intrare. Se presupune că s-au făcut calcule exacte la obţinerea soluţiilor $\boldsymbol{P(x)}$ şi $\boldsymbol{P(\tilde{x})}$.

O problemă se consideră a fi ***prost condiţionată*** dacă ***P(x)*** şi $P(\tilde{x})$ diferă mult chiar dacă eroarea relativă $\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}$ este mică.

Condiţionarea numerică a unei probleme este exprimată prin amplificarea erorii relative:

$$k(x) = \frac{\dfrac{\|P(x)-P(\tilde{x})\|}{\|P(x)\|}}{\dfrac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}} \quad \textbf{pentru } x \neq 0 \ \textbf{ si } P(x) \neq 0$$

O valoare mică pentru ***k(x)*** caracterizează o problemă bine-condiţionată.

Condiţionarea este o proprietate locală (se evaluează pentru diverse date de intrare ***x***). O problemă este bine-condiţionată dacă este bine-condiționată în orice punct.

Eroarea relativă în datele de ieşire ≈

Număr de condiţionare × Eroarea relativă în datele de intrare

Se consideră polinomul Wilkinson:

$$w(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-20) = x^{20} - 210x^{19} + P_{18}(x)$$

Dacă se schimbă coeficientul ***210*** al lui x^{19} cu

$$-210 - 2^{-23} = -210.0000001192$$

soluțiile (cu 5 zecimale exacte) noului polinom sunt:

1.00000 2.00000, 3.00000, 4.00000, 5.00000, 6.00001, 6.99970, 8.00727, 8.91725, 20.84691, $10.09527 \pm i0.64350$ $11.79363 \pm i1.65233$, $13.99236 \pm i2.51883$, $16.73074 \pm i2.81262$, $19.50244 \pm i1.94033$

Pentru rezolvarea unei probleme $\boldsymbol{P}$, calculatorul execută un algoritm $\tilde{\boldsymbol{P}}$. Deoarece se folosesc numere în virgulă mobilă, calculele sunt afectate de erori:

$$\boldsymbol{P(x) \neq \tilde{P}(x)}$$

Stabilitatea numerică exprimă mărimea erorilor numerice introduse de algoritm, în ipoteza unor date de intrare exacte, $\|\boldsymbol{P(x) - \tilde{P}(x)}\|$ sau $\dfrac{\|\boldsymbol{P(x) - \tilde{P}(x)}\|}{\|\boldsymbol{P(x)}\|}$.

O eroare relativă de ordinul erorii de rotunjire caracterizează un ***algoritm numeric stabil***.

Un **algoritm numeric stabil** aplicat unei **probleme bine condiționate** conduce la **rezultate cu precizie foarte bună**.

Un algoritm $\tilde{\boldsymbol{P}}$ destinat rezolvării problemei $\boldsymbol{P}$ este numeric stabil dacă este îndeplinită una din condițiile:

1. $\tilde{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ pentru orice intrare $\boldsymbol{x}$;

2. există $\tilde{\boldsymbol{x}}$ apropiat de $\boldsymbol{x}$, astfel ca $\tilde{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{P}(\tilde{\boldsymbol{x}})$

$\boldsymbol{x}$ = datele exacte,

$\boldsymbol{P(x)}$ = soluţia exactă folosind date exacte,

$\tilde{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x})$ = soluţia „*calculată*” folosind algoritmul $\tilde{\boldsymbol{P}}$ cu date exacte de intrare

Rezolvarea sistemelor liniare

Istoric

- 1900 î.Hr., Babilon - apar primele probleme legate de ecuaţii liniare simultane
- 300 î.Hr. Babilon - tăbliţă cu următoarea problemă:

  ”*Avem două câmpuri de arie totală 1800 ha. Producţia la hectar pe primul câmp este de 2/3 buşel (=36,3l) iar pe al doilea este de 1/2 buşel. Dacă producţia totală este de 1100 buşeli, să se determine aria fiecărui teren în parte.*”

- 200-100 î.Hr. China – *9 capitole despre arta matematică* – metodă de rezolvare foarte asemănătoare eliminării Gauss („*Avem 3 tipuri de grâu. Ştim că 3 baloturi din primul tip, 2 baloturi din al doilea tip şi 1 balot din al treilea tip cântăresc 39 măsuri. De asemenea, 2 baloturi din primul tip, 3 baloturi din al doilea tip şi 1 balot din al treilea tip cântăresc 34 măsuri şi 1 balot din primul tip, 2 baloturi din al doilea tip şi 3 baloturi din al treilea tip cântăresc 26 măsuri. Câte măsuri cântăreşte* un balot *din fiecare tip de grâu*”*)*

- 1545, Cardan – în *Ars Magna*, propune o regulă (*regula de modo)* pentru rezolvarea unui sistem de 2 ecuaţii cu 2 necunoscute (seamănă cu regula lui Cramer)
- 1683, Seki Kowa, Japonia - ideea de „*determinant*”- „*Method of solving the dissimulated problems*”. Calculează ceea ce astăzi cunoaştem sub numele de determinant, determinanţii matricelor ***2x2***, ***3x3***, ***4x4***, ***5x5*** în legătură cu rezolvarea unor ecuaţii dar nu a sistemelor de ecuaţii.

- 1683, Leibniz într-o scrisoare către l'Hôpital explică faptul că sistemul de ecuaţii:

$$10+11x+12y=0$$
$$20+21x+22y=0$$
$$30+31x+32y=0$$

are soluţie deoarece :

10*21*32+11*22*30+12*20*31=10*22*31+11*20*32+12*21*30

(condiţia ca determinantul matricei coeficienţilor este 0).

Leibniz era convins că o notaţie matematică bună este cheia progresului şi experimentează mai mult de 50 de moduri diferite de a scrie coeficienţii unui sistem de ecuaţii. Leibniz foloseşte termenul de „*rezultant*” în loc de determinant şi a demonstrat regula lui Cramer pentru „rezultanţi”. Ştia că orice determinant poate fi dezvoltat în raport cu o coloană – operaţia se numeşte azi dezvoltarea Laplace.

- 1750, Cramer prezintă o formulă bazată pe determinanţi pentru rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare – *regula lui Cramer – „Introduction in the analysis of algebraic curves”* (dă o regulă generală pentru sisteme *n x n:*

  *‚One finds the value of each unknown by forming **n** fractions of which the common denominator has as many terms as there are permutations of **n** things’*

- 1764 Bezout, 1771 Vandermonde, 1772 Laplace – reguli de calcul al determinanţilor

- 1773 Lagrange – prima utilizare implicită a matricelor în legătură cu formele biliniare ce apar la optimizarea unei funcţii reale de 2 sau mai multe variabile (dorea să caracterizeze punctele de maxim şi minim a funcţiilor de mai multe variabile)

- 1800-1801, Gauss introduce noţiunea de „*determinant”* (determină proprietăţile formei pătratice) – *Disquisitiones arithmeticae(1801)*; descrie operaţiile de înmulţire matricială şi inversă a unei matrice în contextul tabloului coeficienţilor unei forme pătratice. Gauss dezvoltă *eliminarea Gaussiană* pe când studia orbita asteroidului Pallas de unde obţine un sistem liniar cu 6 ecuaţii cu 6 necunoscute.
- 1812, Cauchy foloseşte termenul de „*determinant*” în sensul cunoscut azi.

- 1826, Cauchy găsește valorile proprii şi deduce rezultate legate de diagonalizarea unei matrice. Introduce noţiunea de matrice asemenea şi demonstrează ca acestea au aceeași ecuație caracteristică. Demonstrează că orice matrice reală simetrică este diagonalizabilă.
- 1850, Sylvester introduce pentru prima data termenul de ***matrice*** (din latină, „uter" – un loc unde ceva se formează sau este produs, „*an oblong arrangement of terms*")

- 1855, Cayley – algebră matricială, prima definiţie abstractă a unei matrice. Studiază transformările liniare şi compunerea lor ceea ce îl conduce la operaţiile cu matrice (adunare, înmulţire, înmulţirea cu un scalar, inversa)

- 1858, Cayley în *Memoriu asupra teoriei matricelor : „Sunt multe lucruri de spus despre această teorie a matricelor şi, după părerea mea, această teorie ar trebui să preceadă teoria determinanţilor”*

- Jordan (1870 – Treatise on substitutions and algebraic equations – forma canonică Jordan), Frobenius (1878 – On linear substituions and bilinear forms, rangul unei matrici)
- 1890, Weierstrass – On determinant theory, definiţia axiomatică a determinantului
- 1925, Heisenberg reinventează algebra matricială pentru mecanica cuantică

- 1947, vonNeuman & Goldstine introduc numerele de condiţionare atunci când analizează erorile de rotunjire
- 1948, Turing introduce descompunerea *LU* a unei matrice
- 1958, Wilkinson dezvoltă factorizarea *QR*

....

Propoziție

Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pentru care există o normă matricială naturală astfel ca $\|A\| < 1$. Atunci există matricele $(I_n \pm A)^{-1}$ şi avem evaluările:

$$\frac{1}{1 + \|A\|} \le \left\|(I \pm A)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Evaluarea erorii în rezolvarea sistemelor liniare

(condiţionarea sistemelor liniare)

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$ şi sist. de ec. liniare:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{A} \textbf{ nesingulară } \Leftrightarrow \textbf{ det } \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow \exists \textbf{ sol. sist. } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Pentru erorile în datele de intrare facem notațiile:

- $\Delta \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **eroarea absolută pentru** $\boldsymbol{A}$;
- $\Delta \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$ **eroarea absolută pentru** $\boldsymbol{b}$;

În realitate se rezolvă sistemul:

$$(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})\,\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b}$$

soluţia fiind $\tilde{\boldsymbol{x}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}$$

În mod natural se ridică următoarele probleme :

1. Dacă $\boldsymbol{A}$ este matrice nesingulară, $\Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{?}$ a.î. $\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}$ să fie nesingulară ?
2. Pp. $\boldsymbol{A}$ şi $\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}$ nesingulare care sunt relaţiile între $\dfrac{\|\Delta\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}, \dfrac{\|\Delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$ şi $\dfrac{\|\Delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$?

1. Pp. $\boldsymbol{A}$ nesingulară.

$$A + \Delta A = A\left(I_n + A^{-1}\Delta A\right) \rightarrow$$

$$A + \Delta A \text{ nesingulară } \Leftrightarrow \left(I_n + A^{-1}\Delta A\right) \text{ nesingulară}$$

Propoziţie

Fie $\boldsymbol{A}$ nesingulară şi $\|\Delta A\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$. Atunci $I+A^{-1}\Delta A$ este

nesingulară şi avem:

$$\left\| \left(I_n + A^{-1}\Delta A \right)^{-1} \right\| \le \frac{1}{1 - \left\| A^{-1} \right\| \cdot \left\| \Delta A \right\|}$$

Demonstraţie. Avem:

$$\left\| \Delta A \right\| < \frac{1}{\left\| A^{-1} \right\|} \Rightarrow \left\| A^{-1}\Delta A \right\| \le \left\| A^{-1} \right\| \cdot \left\| \Delta A \right\| < 1 \overset{\text{Prop}}{\Rightarrow} \exists \left(I + A^{-1}\Delta A \right)^{-1}$$

$$\left\| \left(I + A^{-1}\Delta A \right)^{-1} \right\| \le \frac{1}{1 - \left\| A^{-1}\Delta A \right\|} \le \frac{1}{1 - \left\| A^{-1} \right\| \cdot \left\| \Delta A \right\|} .$$

Pp. că A este nesingulară şi $\left\| \Delta A \right\| < \dfrac{1}{\left\| A^{-1} \right\|}$.

$$(A+\Delta A)(x+\Delta x)=b+\Delta b \Rightarrow (A+\Delta A)\Delta x + Ax + (\Delta A)\,x = b+\Delta b \Rightarrow$$

$$A\left(I+A^{-1}\Delta A\right)\Delta x = \Delta b - (\Delta A)\,x \Rightarrow \Delta x = \left(I+A^{-1}\Delta A\right)^{-1} A^{-1}\left[\Delta b - (\Delta A)\,x\right] \Rightarrow$$

$$\|\Delta x\| \le \left\|\left(I+A^{-1}\Delta A\right)^{-1}\right\| \left\|A^{-1}\right\| \left(\|\Delta b\| + \|\Delta A\|\|x\|\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-\left\|A^{-1}\right\|\|\Delta A\|}\left(\frac{\|\Delta b\|}{\|x\|} + \|\Delta A\|\right) \qquad \textbf{(1)}$$

Din $Ax = b$ obţinem $\|b\| \le \|A\|\|x\| \Rightarrow \dfrac{1}{\|x\|} \le \dfrac{\|A\|}{\|b\|}$ şi ţinând seamă

de acest rezultat, din (1) deducem:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|\|A\|}{1-\left\|A^{-1}\right\|\|\Delta A\|}\left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right).$$

$\boldsymbol{k(A) = \|A^{-1}\|\,\|A\|}$ ***numărul de condiţionare*** al matricei ***A***.

Propoziţie

Dacă matricea ***A*** este nesingulară şi $\|\Delta A\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$ atunci:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{k(A)}{1 - k(A)\cdot\dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right).$$

Din $I_n = A\,A^{-1}$ rezultă $1 = \|I_n\| \le \|A\|\|A^{-1}\| = k(A).$

$k(A) \ge 1, \ \forall A$ dar dep. de norma matricială naturală utilizată.

O matrice $\boldsymbol{A}$ pentru care numărul de condiţionare este mare se numeşte matrice ***prost condiţionată (k(A) ‚mare’)***.

Ax=b* cu *k(A) mare $\rightarrow$ $\dfrac{\|\Delta \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$ poate fi mare chiar dacă erorile relative $\dfrac{\|\Delta \boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$ **şi** $\dfrac{\|\Delta \boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}$ sunt mici.

Fie A o matrice simetrică $A = A^T$, nesingulară. Utilizând norma matricială subordonată normei vectoriale euclidiene:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho\left(A^T A\right)} = \sqrt{\rho\left(A^2\right)}$$

$$k(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$$

Matricea simetrică A are valorile proprii reale $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$,

A^2 are valorile proprii $\lambda_1^2, \lambda_2^2, ..., \lambda_n^2$

A^{-1} are valorile proprii $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, ..., \frac{1}{\lambda_n}$.

$$|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le .... \le |\lambda_n| \Rightarrow \rho(A) = |\lambda_n| \quad \text{şi} \quad \rho\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{|\lambda_1|}$$

$$A = A^T \to \|A\|_2 = \rho(A) = |\lambda_n|\,, \left\|A^{-1}\right\|_2 = \rho\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{|\lambda_1|},$$

$$k_2(A) = \| A \|_2 \cdot \| A^{-1} \|_2 = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}$$ ***număr de condiţionare spectral*.**

A matrice ortogonală $\to$ $k_2(A)=1$

$$A^T A = A \cdot A^T = I_n \Rightarrow A^{-1} = A^T$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho\left(A^T A\right)} = \sqrt{\rho(I)} = 1 = \left\|A^T\right\|_2$$

$$k_2(A) = \|A\|_2 \cdot \left\|A^{-1}\right\|_2 = \|A\|_2 \cdot \left\|A^T\right\|_2 = 1\,,$$

Matrice aproape singulară dar cu număr de condiţionare mic:

$$\boldsymbol{A} = \mathbf{diag}\ [1, 0.1, 0.1, \ldots, 0.1] \in \mathbb{R}^{100\times100} \Rightarrow \det \boldsymbol{A} = 1 \cdot (0.1)^{99} = 10^{-99}$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = 1\ ,\ \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2 = 10 \Rightarrow \boldsymbol{k}_2(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_2\ \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2 = 10$$

Matrice foarte prost condiționată cu det. nenul (**det *A*=1**):

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & \cdots & (-2)^{i-1} & \cdots & (-2)^{n-1} \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & (-2)^{i-2} & \cdots & (-2)^{n-2} \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\| A \|_\infty = \| A \|_1 = 3 \quad ,$$

$$\| A^{-1} \|_\infty = \| A^{-1} \|_1 = 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

$$n = 100 \;\Rightarrow\; k(A) = \| A \|_\infty \| A^{-1} \|_\infty = \| A \|_1 \| A^{-1} \|_1 = 3 \cdot (2^{100} - 1)$$

$$\det A = 1$$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 1.001y = 2 \end{cases} , \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 1.001y = 2.001 \end{cases} \quad k(A) = 4002$$

$$x = 2\,,\ \ y = 0 \qquad\qquad x = 1\,,\ \ y = 1$$

$$\begin{cases} 400x - 201y = 200 \\ -800x + 401y = -200 \end{cases} , \quad \begin{cases} 401x - 201y = 200 \\ -800x + 401y = -200 \end{cases}$$

$$x = -100\,,\ \ y = -200 \qquad\qquad x = 40000\,,\ \ y = 79800$$

$$k_2(A) = 2503 \qquad\qquad k_2(A) = 1002000$$

$$\begin{cases} 1.2969x + 0.8648y = 0.8642 \\ 0.2161x + 0.1441y = 0.1440 \end{cases} \quad x = 2\,,\ \ y = -2 \qquad k_2(A) = 249730000$$

$$\bar{x} = 0.9911,\ \ \bar{y} = -0.4870\ \ ,$$

$$r = b - Az = \begin{pmatrix} 0.8642 \\ 0.1440 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.2969 & 0.8648 \\ 0.1441 & 0.1441 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9911 \\ -0.4870 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-8} \\ -10^{-8} \end{pmatrix}$$

Matricea Hilbert

$$H = (h_{ij})_{i,j=1}^{n} \quad , \quad h_{ij} = \frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 x^{i+j-2}\,dx$$

$$k_2(H_n) \approx \frac{(\sqrt{2}+1)^{4(n+1)}}{2^{\frac{15}{4}}\sqrt{\pi n}} \sim e^{3.5n}$$

n	$k_2(H_n)$	n	$k_2(H_n)$
1	1	7	$4.753 \cdot 10^{8}$
2	19.281	8	$1.526 \cdot 10^{10}$
3	$5.241 \cdot 10^{2}$	9	$4.932 \cdot 10^{11}$
4	$1.551 \cdot 10^{4}$	10	$1.602 \cdot 10^{13}$
5	$4.766 \cdot 10^{5}$	11	$5.220 \cdot 10^{14}$
6	$1.495 \cdot 10^{7}$	12	$1.678 \cdot 10^{16}$

$$H^{-1} = (g_{ij}) \quad g_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{(i+j-1)} \frac{(n+i-1)!\,(n+j-1)!}{\left[(i-1)!(j-1)!\right]^{2}(n-i)!(n-j)!}$$

Metode numerice de rezolvarea sistemelor liniare

Fie matricea nesingulară $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ şi $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$. Rezolvarea sistemului de ecuații liniare ***Ax=b*** se poate face folosind ***regula lui Cramer:***

$$\boldsymbol{x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A}, i = 1, \ldots, n},$$

în care ***Aᵢ(b)*** se obține din matricea ***A*** prin înlocuirea coloanei ***i*** cu vectorul ***b***.

Algoritmul dat de regula lui Cramer este foarte costisitor din punct de vedere al resurselor și instabil numeric.

Din aceste motive s-au căutat alte metode de aproximare a soluției $\boldsymbol{x}$**.** Unul din cele mai folosiți algoritmi este **algoritmul de eliminare Gauss :**

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \quad \leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{b}} \text{ \textbf{cu} } \tilde{\boldsymbol{A}} \text{ matrice superior triunghiulară}$$

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}} \quad \textbf{(notăm } \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\sim\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{b}}\textbf{)}$$

C:\ D\ cn info3 2021-2022 sem ii\curs\curs 04\Cramer.exe

```
n = 10

Eliminarea Gauss
04.03.2022 21:02:25
Timp in milisecunde (eliminare Gauss) 2
04.03.2022 21:02:25


Eroarea |Ax-b| = 1,00442975964863E-14


Eroarea |x-x_exact| = 7,1581622508791E-14

Solutia exacta : 1,2, ...


Regula lui Cramer
04.03.2022 21:02:25
Timp in milisecunde (Cramer) 4364
04.03.2022 21:02:29


Eroarea |Ax-b| = 2,85393991926588E-11


Eroarea |x-x_exact| = 3,99554995866884E-11


n =
```

C:\ D\ cn info3 2021-2022 sem ii\curs\curs 03\Cramer.exe

```
n = 11

 Eliminarea Gauss
05.03.2022 16:14:13
 Timp in milisecunde (eliminare Gauss) 0
05.03.2022 16:14:13


 Eroarea |Ax-b| = 1,56226172104547E-14


 Eroarea |x-x_exact| = 4,84508249897898E-13

 Solutia exacta : 1,2, ...


 Regula lui Cramer
05.03.2022 16:14:13
 Timp in milisecunde (Cramer) 50199
05.03.2022 16:15:04


 Eroarea |Ax-b| = 9,72812910066041E-10


 Eroarea |x-x_exact| = 7,05987026507931E-10


 n =
```

3.1 Gerschgorin's estimate

C:\ D\ cn info3 2021-2022 sem ii\curs\curs 04\Cramer.exe

```
n = 12

 Eliminarea Gauss
04.03.2022 21:52:28
 Timp in milisecunde (eliminare Gauss) 0
04.03.2022 21:52:28


 Eroarea |Ax-b| = 2,01688903424503E-14


 Eroarea |x-x_exact| = 1,34706499390866E-13

 Solutia exacta : 1,2, ...


 Regula lui Cramer
04.03.2022 21:52:28
 Timp in milisecunde (Cramer) 921179
04.03.2022 22:07:53


 Eroarea |Ax-b| = 1,03068652311345E-09


 Eroarea |x-x_exact| = 5,65280022570973E-10


 n =
```

C:\ D\ cn info3 2021-2022 sem ii\curs\curs 03\Cramer.exe

```
n = 13

Eliminarea Gauss
05.03.2022 11:42:13
Timp in milisecunde (eliminare Gauss) 2
05.03.2022 11:42:13


Eroarea |Ax-b| = 2,36547860027221E-14


Eroarea |x-x_exact| = 6,02527783109332E-14

Solutia exacta : 1,2, ...


Regula lui Cramer
05.03.2022 11:42:13
Timp in milisecunde (Cramer) 12236765
05.03.2022 15:06:09


Eroarea |Ax-b| = 3,44101391273652E-09


Eroarea |x-x_exact| = 9,95924703928746E-10


n =
```

C:\ D\ cn info3 2021-2022 sem ii\curs\curs 03\Cramer.exe

```
 n = 8000

 Eliminarea Gauss
05.03.2022 16:17:20
 Timp in milisecunde (eliminare Gauss) 2285277
05.03.2022 16:55:25


 Eroarea |Ax-b| = 1,45671149537004E-05


 Eroarea |x-x_exact| = 0,000268972468485747

 Solutia exacta : 1,2, ...


 Regula lui Cramer
05.03.2022 16:55:26
```

Metoda substituției

Fie sistemul liniar $\boldsymbol{Ax = b}$ unde matricea sistemului $\boldsymbol{A}$ este triunghiulară. Pentru a găsi soluția unică a sistemului, trebuie ca matricea să fie nesingulară. Determinantul matricelor triunghiulare este dat de formula:

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\det A \neq 0 \;, a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1,2,\ldots,n$$

Vom considera întâi cazul când matricea A este inferior triunghiulară. Sistemul are forma:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\
\vdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii}x_i = b_i \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{ni}x_i + \cdots + a_{nn}x_n = b_i
\end{cases}
\qquad (1)
$$

Necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se deduc folosind ecuațiile sistemului de la prima către ultima.

Din prima ecuație se deduce x_1:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \qquad (2)$$

Din a doua ecuație , utilizând valoarea x_1 din (2), obținem x_2:

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}$$

Când ajungem la ecuația $\boldsymbol{i}$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii-1}x_{i-1} + a_{ii}x_i = b_i$$

folosind variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ calculate anterior, avem:

$$x_i = \frac{b_i - a_{i1}x_1 - \cdots - a_{ii-1}x_{i-1}}{a_{ii}}$$

Din ultima ecuație se deduce $\boldsymbol{x_n}$ astfel:

$$x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}}$$

Algoritmul de calcul al soluției sistemelor (1) cu matrice inferior triunghiulară este următorul:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j}{a_{ii}}, i = 1, 2, \ldots, n-1, n$$

Acest algoritm se numește ***metoda substituției directe***.

Vom considera, în continuare sistemul (1) cu matrice superior triunghiulară :

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1i}x_i + \cdots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\
\quad \ddots \\
\qquad\qquad a_{ii}x_i + \cdots + a_{in-1}x_{n-1} + a_{in}x_n = b_i \\
\qquad\qquad\quad \ddots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{n-1n}x_n = b_{n-1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n
\end{array}$$

Necunoscutele $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ se deduc pe rând, folosind ecuațiile sistemului, de la ultima către prima.

Din ultima ecuație găsim $\boldsymbol{x_n}$:

$$\boldsymbol{x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}}$$

Folosind valoarea lui $\boldsymbol{x_n}$ dedusă mai sus, din penultima ecuație obținem:

$$\boldsymbol{x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1n} x_n}{a_{n-1n-1}}}$$

Când ajungem la ecuația ***i***:

$$a_{ii}x_i + a_{ii+1}x_{i+1} + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

se cunosc deja $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$ de unde ducem:

$$x_i = \frac{b_i - a_{ii+1}x_{i+1} - \cdots - a_{in}x_n}{a_{ii}}$$

Din prima ecuație găsim valoarea lui x_1:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

Procedeul descris mai sus se numește de ***metoda substituției inverse*** pentru rezolvarea sistemelor liniare cu matrice superior triunghiulară:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}, i = n, n-1, \cdots, 2, 1.$$

M - numărul de operații ***, /** (înmulțiri/împărțiri) efectuate

A - numărul operațiilor $\pm$ (adunări/scăderi) efectuate.

Atunci pentru calculul componentei x_i se efectuează

$M=n-i+1$, $A=n-i$ şi în total:

$$M=\sum_{i=n}^{1}(n-i+1)=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$A=\sum_{i=n}^{1}(n-i)=\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2}$$

Efortul de calcul pentru metoda substituției directe este

$$M=\frac{n(n+1)}{2} \qquad A=\frac{n(n-1)}{2}.$$