C11

Householder: $A = QR$; Q - ortogonală R - sup. triunghiulară

$Ax = b \iff Rx = Q^T \cdot b$

Pasul r:

$$A = P_r \cdot A$$

$$P_r = I - \frac{1}{\beta} u u^T$$

$$\sigma = a_{rr}^2 + a_{r+1r}^2 + \dots + a_{mr}^2$$

$$k = -\text{semn}(a_{rr}) \sqrt{\sigma}$$

$$\beta = \sigma - k * a_{rr}$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{rr} - k \\ a_{r+1r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{pmatrix}$$

$$P_{m-1} \cdot P_{m-2} \cdots P_1 A = \tilde{Q} A = R$$

$$\tilde{Q} = P_{m-1} \cdot P_{m-2} \cdots P_1$$

Exercițiu

- Să se calculeze descompunerea QR a matricei sistemului utilizând metoda Householder.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & -5 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Pasul 1

$\sigma = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 25$

$k = -\text{semn}(a_{11})\sqrt{\sigma} = -5$

$\beta = \sigma - k * a_{11} = 45$

$$u = \begin{pmatrix} a_{11} - k \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\beta} u u^T = \begin{pmatrix} 1.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = I_3 - \frac{1}{\beta} \cdot u u^T = \begin{pmatrix} -0.8 & 0 & -0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$A = P_1 A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Pasul 2

$\sigma = 10^2 + 0^2 = 100$

$k = -\text{semn}(a_{22})\sqrt{\sigma} = -10$

$\beta = \sigma - k a_{22} = 0 \Rightarrow$ am coloana 2 in formă superior triunghiulară, trec la pasul următor

-

$R = P_2 * (P_1 * A) = A^{n-1}$ (A de la ultima iterație)

$Q^T = P_2 * P_1 = P_1$ (pentru că am sărit de pasul 2)

- Acum putem rezolva sistemul prin substituție inversă

$RX = Q^T b$