Barem

Examen / nr. 2 – Matematică – semian A

(2019-2020 / 20.01.2020)

Subiectul 1 .... **30 puncte**

a) Abordarea subiectului 1

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\mathrm{e}^y$ 3

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - z + x^2\mathrm{e}^y$ 3

$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z - y$ 3

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\mathrm{e}^y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x\mathrm{e}^y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0$ 3

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + x^2\mathrm{e}^y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$ 3

c) Rezolvarea sistemului $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$: $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ 5

d) Determinarea Hessianului în punctul critic: $H_f(0, 0, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 3

$H_f(0, 0, 0)$ pozitiv definită 4

Concluzie: $(0, 0, 0)$ punct de minim local 2

Subiectul 2 .... **30 puncte**

a) Abordarea subiectului 1

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = f(x, 0)'|_{x=0} = 0$ 6

$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = f(0, y)'|_{y=0} = 0$ 6

b) Calculul derivatei direcţionale $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(tu, tv)}{t} = \begin{cases} \lim\limits_{t \to 0} \frac{t^3 uv^2}{t[(tu)^4 + (tv)^2]} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{uv^2}{t^2 u^4 + v^2}, & (u, v) \neq (0, 0); \\ 0, & (u, v) = (0, 0). \end{cases} = \begin{cases} u, & v \neq 0; \\ 0, & v = 0. \end{cases}$ 12

c) Diferenţiala Gâteaux în $(0, 0)$ a lui f este funcţia $\mathrm{D}f(0, 0)$, cu $\mathrm{D}f(0, 0)(u, v) = \begin{cases} u, & v \neq 0; \\ 0, & v = 0. \end{cases}$ 2

Aceasta nu este liniară, deci f nu este derivabilă Gâteaux în $(0, 0)$ 3

Subiectul 3 .... **30 puncte**

a) Abordarea subiectului 1

$\iint_D \frac{1+x}{1+x^2+y^2} dxdy \overset{x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{(1 + r\cos\theta) r}{1 + r^2} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr + \cos\theta \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2} dr \right] d\theta =$

$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \ln(1 + r^2)\Big|_{r=0}^{r=1} + \cos\theta \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+r^2}\right) dr \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \ln 2 + \cos\theta \left(1 - \left(\operatorname{arctg} r\Big|_{r=0}^{r=1}\right)\right) \right] d\theta =$

$= \pi \ln 2 + \int_0^{2\pi} \left[\cos\theta \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\right] d\theta = \pi \ln 2 + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \sin\theta\Big|_0^{2\pi} = \pi \ln 2$ 14

b) Identificarea punctelor în care funcţia nu este definită: $x = 0$ şi $x = 1$ 2

Aplicarea criteriului în α în $x = 0$: $\ell = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(1-x)^p} x^\alpha = \lim_{x \searrow 0} x^\alpha$ 3

Dacă luăm $\alpha = 0$, obţinem $\ell = 1 \in (0, +\infty)$, deci $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(1-x)^p} dx$ este convergentă, căci $\alpha < 1$ (de altfel, funcţia este mărginită în jurul lui 0) 3

Aplicarea criteriului în α în $x = 1$: $\ell = \lim_{x \nearrow 1} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(1-x)^p} (1 - x)^\alpha = \ln 2 \cdot \lim_{x \nearrow 1} (1 - x)^{\alpha - p}$ 3

Dacă luăm $\alpha = p$, obţinem $\ell = \ln 2 \in (0, +\infty)$, deci $\int_{1/2}^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(1-x)^p} dx$ este convergentă dacă şi numai dacă $p < 1$ 3

Concluzie: integrala este convergentă dacă şi numai dacă $p < 1$ 1

Puncte din oficiu: .... **10 puncte**

Precizări:

1) Pentru orice soluţie corectă, chiar diferită de cea din barem, se acordă punctaj corespunzător;

2) nota finală este 1/10 din punctajul total.