## SEMINAR 7

Exerciţii recomandate: 8.1 i), 8.3, 8.4, 8.5 a), e)
Rezerve: 8.1 ii), iv), 8.2, 8.5 b), f), 8.6

**S8.1** i) Fie $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită de

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + \frac{28}{5}x_3y_3 - x_1y_2 - 2x_1y_3 - x_2y_1 + 4x_2y_3 - 2x_3y_1 + 4x_3y_2,$$

pentru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

a) Arătaţi că aplicaţia $g$ este o formă biliniară simetrică pe $\mathbb{R}^3$.
b) Găsiţi matricea lui $g$ în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$. Determinaţi discriminantul lui $g$ şi $\operatorname{rang} g$.
c) Determinaţi $\ker g$.
d) Găsiţi matricea lui $g$ în raport cu baza $\{(1, 1, 1), (2, -1, 2), (1, 3, -3)\}$.
e) Scrieţi forma pătratică $h$ corespunzătoare lui $g$ şi stabiliţi o formă normală a lui $h$. Determinaţi signatura lui $h$ şi deduceţi forma biliniară corespunzătoare formei normale a lui $h$.
f) Determinaţi o bază a lui $\mathbb{R}^3$ în raport cu care $h$ are forma normală de mai sus. Caracterizaţi dintr-un punct de vedere geometric nucleul lui $h$.

Repetaţi acest exerciţiu pentru:

ii) $g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 5x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + 3x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2$;
iii) $g_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_1 + 2x_3y_2$;
iv) $g_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$,

unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

**S8.2** Fie $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o formă biliniară pe $\mathbb{R}^3$ a cărei matrice în raport cu baza canonică este

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Scrieţi $g$ sub formă matriceală şi calculaţi $g((-1, 0, 1), (1, -1, 0))$.
b) Determinaţi forma simetrică şi cea antisimetrică asociate lui $g$.
c) Determinaţi $g'$ şi $g''$ (funcţionalele liniare asociate lui $g$) şi găsiţi $\ker g'$ and $\ker g''$.
d) Stabiliţi forma normală a lui $g_s$ (forma simetrică asociată lui $g$) şi precizaţi o bază în $\mathbb{R}^3$ în raport cu care $g_s$ are această formă normală.

Refaceţi acest exerciţiu pentru forma biliniară a cărei matrice în raport cu baza canonică este

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

**S8.3** Fie $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma biliniară definită de

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1y_1 + 13x_2y_2 + 14x_3y_3 - 3x_1y_2 + 2x_1y_3 - 3x_2y_1 - 12x_2y_3 + 2x_3y_1 - 12x_3y_2,$$

pentru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

a) Arătaţi că $g$ determină pe $\mathbb{R}^3$ o structură de spaţiu prehilbertian, pentru care vectorii $(1, 0, 0)$ şi $(1, 1, 0)$ sunt ortogonali.
b) Ortonormalizaţi sistemul $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ în raport cu structura de mai sus.

**S8.4** Pe spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$ considerăm două forme pătratice $h_1$ şi $h_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definite de:

(1) $h_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$;

(2) $h_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \sqrt{2}x_1x_2 + \sqrt{2}x_1x_3$,

pentru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Aduceţi cele două forme pătratice la forma canonică printr-o schimbare ortogonală de bază.

**S8.5** Stabiliţi ce este, dintr-un punct de vedere geometric, nucleul fiecăreia dintre formele pătratice neomogene:

a) $h_1(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_2^2 - 26x_1 + 18x_2 - 39$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

b) $h_2(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 18x_1 - 18x_2 + 9$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

c) $h_3(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 14x_1 - 2x_2 + 3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

d) $h_4(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 12x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 + 14x_1 + 16x_2 - 12x_3 - 33$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

e) $h_5(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 2$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

f) $h_6(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

g) $h_7(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1 - 4x_2 + 4$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

h) $h_8(\mathbf{x}) = x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3 - 1$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

**S8.6** Fie $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ forma biliniară definită de

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 5x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3 - x_4y_4 + x_1y_2 - x_1y_3 - 2x_1y_4 + x_2y_1 + 2x_2y_3 - x_2y_4 - x_3y_1 + 2x_3y_2 + x_3y_4 - 2x_4y_1 - x_4y_2 + x_4y_3,$$

pentru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$.

a) Determinaţi $g', g''$ şi $Ker(g)$.

b) Găsiţi matricea lui $g$ în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$. Determinaţi discriminantul lui $g$ şi $\operatorname{rang} g$.

c) Scrieţi forma pătratică a lui $h$ corespunzătoare lui $g$. Stabiliţi forma normală a lui $h$ şi o bază a lui $\mathbb{R}^4$ în raport cu care $h$ are această formă normală.

d) Determinaţi signatura lui $h$.

**S8.7** Stabiliţi ce este, dintr-un punct de vedere geometric, nucleul fiecăreia dintre formele pătratice neomogene:

a) $h(\mathbf{x}) = 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 + 2$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

b) $h(\mathbf{x}) = x_1 - x_3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

c) $h(\mathbf{x}) = 7x_1^2 - 8x_1x_2 + x_2^2 - 6x_1 - 12x_2 - 9$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

d) $h(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2 - 20x_1x_2 + 4x_1x_3 + 16x_2x_3 - 24x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 180$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

e) $h(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 - x_1 - 1$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

f) $h(\mathbf{x}) = x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

## Bibliografie recomandată


[1] V. T. Borcea, C. I. Davideanu, C. Forăscu, *Algebră liniară*, Ed. “Gh. Asachi”, Iaşi, 2000.

[2] E. Cioară, *Algebră liniară.Geometrie analitică ( culegere de probleme )*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2009.

[3] M. Constantinescu, O. Dogaru, M.-M. Doroftei, *Capitole de algebră liniară şi geometrie analitică. Noţiuni teoretice şi probleme,* Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2012.

[4] M. Craioveanu, I. D. Albu, *Geometrie afină şi euclidiană. Exerciţii*, Ed. Facla, Timişoara, 1982.

[5] E. Denne, *More Quadratic Surfaces.Visions in Math*, Washington & Lee University, 2016.

[6] Z. Dvořák, *Bilinear and Quadratic Forms,* Lessons on Linear Algebra, 2015.

[7] P. Matei, *Algebră liniară şi geometrie analitică.Culegere de probleme,* Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2007.

[8] A. R. Saro, A. R. Moyano - *Algebra y Geometria Quadratica*, Netbiblo, 2007.