<u>PROBLEME DE FLUX ÎN REȚELE</u>

§ 1. Problema fluxului maxim.

Definiție: Numim rețea (de transport) cu intrarea s și ieșirea t, 4-uplul $R = (G, s, t, c)$ ***unde:***

- $G = (V, E)$ ***este un digraf,***
- $s, t \in V;\ s \neq t;\ d_G^+(s) > 0;\ d_G^- > 0,$
- $c : E \to R_+;$ $c(e)$ ***se numește capacitatea arcului e.***

Observație: Vom presupune că $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ $\left(n \in N^*\right)$ ***și că*** $|E| = m$***. Pentru simplificarea notațiilor vom extinde funcția c la*** $c : V \times V \to R_+$ ***prin***

$$c((i,j)) = \begin{cases} c(ij) & \text{dacă } ij \in E \\ 0 & \text{dacă } ij \notin E \end{cases}$$

și vom nota $c((i, j)) = c_{ij}$.

Definiție: Se numește flux în rețeaua $R = (G, s, t, c)$ ***o funcție*** $x : V \times V \to R$***, care satisface***

(i) $$0 \le x_{ij} \le c_{ij} \quad \forall ij \in V \times V$$

(ii) $$\sum_{j \in V} x_{ji} - \sum_{j \in V} x_{ij} = 0 \quad \forall i \in V - \{s, t\}$$

Observație:

1^0^ Dacă $ij \in E$ ***atunci se numește fluxul (transportat) pe arcul ij. Evident, condiția (i) cere ca fluxul pe orice arc să fie nenegativ și subcapacitar, iar condiția (ii) (legea de conservare a fluxului) cere ca suma fluxurilor pe arcele care intră în vârful i să fie egală cu suma fluxurilor pe arcele care ies din vârful i. Se putea cere ca fluxul să fie definit numai pe arcele rețelei, dar cu convenția făcută la extensia funcției de capacitate, se observă că pentru perechile (i,j) care nu sunt arce în rețea condiția (i) impune ca fluxul să fie 0, și evident cele două definiții sunt echivalente. O preferăm pe cea dată, pentru simplitatea notațiilor, deși în implementări, structurile de date folosite vor ignora perechile(i,j) care nu sunt arce în rețea.***

2^0 Dacă se sumează relațiile (ii) (pentru $i \in V - \{s, t\}$) se obține:

$$0 = \sum_{i \neq s,t}\left(\sum_{j \in V} x_{ji} - \sum_{j \in V} x_{ij}\right) = \sum_{i \neq s,t}\ \sum_{j \neq s,t} x_{ji} - \sum_{i \neq s,t}\ \sum_{j \neq s,t} x_{ij} + \sum_{i \neq s,t} x_{si} + \sum_{i \neq s,t} x_{ti} - \sum_{i \neq s,t} x_{is} - \sum_{i \neq s,t} x_{it} =$$
$$-\left(\sum_{i} x_{is} - \sum_{i} x_{si}\right) - \left(\sum_{i} x_{it} - \sum_{i} x_{ti}\right)$$

adică

$$\sum_{j \in V} x_{jt} - \sum_{j \in V} x_{tj} = -\left(\sum_{j \in V} x_{js} - \sum_{j \in V} x_{sj}\right).$$

Definiție: Dacă x este un flux în rețeaua $R = (G, s, t, c)$ atunci se numește valoarea fluxului x numărul

$$v(x) = \sum_{j \in V} x_{jt} - \sum_{j \in V} x_{tj}$$

Se observă că v(x) se poate interpreta ca fiind fluxul net care ajunge în ieșirea rețelei sau (conform egalității obținute mai sus) fluxul net care iese din intrarea rețelei.

În orice rețea $R = (G, s, t, c)$ există un flux, fluxul nul $x_{ij} = 0 \quad \forall ij$, de valoare 0.

Problema fluxului maxim. Dată $R = (G, s, t, c)$ o rețea, să se determine un flux de valoare maximă.

Observații: 1^0 Problema se poate formula, evident, ca o problemă de programare liniară:

$$\begin{cases} \max v \\ \sum_j x_{ji} - \sum_j x_{ij} = 0, \forall i \neq s, t \\ \sum_j x_{js} - \sum_j x_{sj} = -v \\ \sum_j x_{jt} - \sum_j x_{tj} = v \\ 0 \leq x_{ij} \leq c_{ij} \forall ij \end{cases}$$

Particularitățile combinatorii ale problemei, numărul mare de restricții și mai ales

dificultățile legate de restricțiile de integritate ce s-ar putea impune variabilelor, care uneori în practică sunt esențiale, au condus la dezvoltarea de metode specifice de rezolvare.

Definiție: Dacă P este un drum în $\overline{G}$, multigraful suport al digrafului G, și $e = v_i v_j$ este o muchie a lui P atunci: dacă e corespunde arcului $v_i v_j$ al lui G, e se numește arc direct al drumului P; dacă e corespunde arcului $v_j v_i$ al lui G, atunci e se numește arc invers.

Definiție: Fie $R = (G, s, t, c)$ și x flux în R. Se numește C-drum (în R relativ la fluxul x) un drum D în $\overline{G}$ cu proprietatea că $\forall ij \in D(E)$:

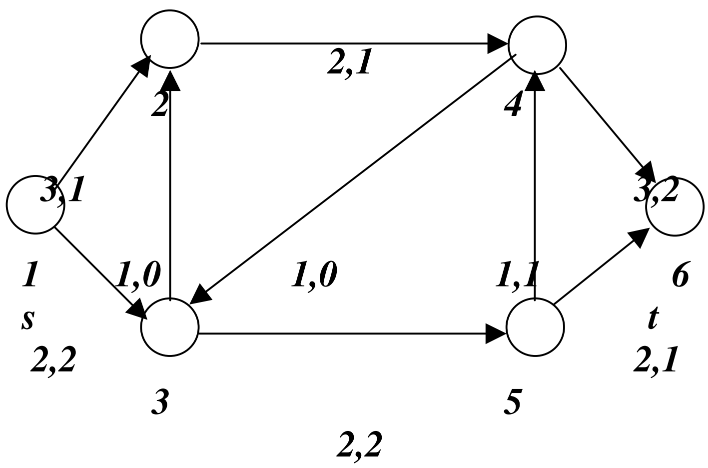
$x_{ij} < c_{ij}$ dacă ij este arc direct, $x_{ji} > 0$ dacă ij este arc invers.

Dacă D este C-drum și $ij \in E(D)$, se numește capacitate reziduală a lui ij (relativ la C-drumul D) numărul

$$r(ij) = \begin{cases} c_{ij} - x_{ij} & \text{dacă } ij \text{ arc direct în } D \\ x_{ij} & \text{dacă } ij \text{ arc invers în } D. \end{cases}$$

Capacitatea reziduală a drumului D este $r(D) = \min_{e \in E(D)} r(e)$.

Exemplu: Considerăm rețeaua desenată mai jos, în care pe fiecare arc este precizată mai întâi capacitatea și apoi fluxul:



Atunci D : 1, 12, 2, 24, 4, 45, 5, 56, 6 este un C-drum de la s la t cu arcele directe 12($x_{12} = 1 < c_{12} = 3$); 24($x_{24} = 1 < c_{24} = 2$); 56($x_{56} = 1 < c_{56} = 2$) și arcul invers 45($x_{54} = 1 > 0$). Capacitatea reziduala a lui D este $r(D) = min(min(2,1,1),1) = 1$.

Definiție: Se numește drum de creștere a fluxului x, în rețeaua $R = (G, s, t, c)$, un C-drum de la s la t.

Lema 1. Dacă D este un drum de creștere a fluxului x în rețeaua $R = (G, s, t, c)$, atunci

$\boldsymbol{x^1 = x \otimes r(D)}$ ***definit prin***

$$x^1_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{dacã } \overline{\text{ij}} \notin E(D) \\ x_{ij} + r(D) & \text{dacã } ij \in E(D), \text{ij arc direct în D} \\ x_{ij} - r(D) & \text{dacã } \text{ji} \in \text{E(D), ji arc invers în D} \end{cases}$$

este flux în R și $\boldsymbol{v(x^1) = v(x) + r(D)}$.

Demonstrație. Definiția lui r(D) implica îndeplinirea de către x^1, a condițiilor (i). Condițiile (ii) verificate de x, nu sunt afectate pentru nici un vârf i $\notin V(D)$. Dacă i≠s,t este un vârf al drumului D, i este incidentcu exact două arce ale lui D, fie ele li și ik. Avem următoarele cazuri posibile:

a) ***li și ik arce directe:***

$$\boldsymbol{\sum_j x^1_{ji} - \sum_j x^1_{ij} = \sum_{j\neq l} x_{ji} - \sum_{j\neq k} x_{ij} + x^1_{li} - x^1_{ik} = \sum_{j\neq l} x_{ji} - \sum_{j\neq k} x_{ij} + x_{li} + r(D) - x_{ik} - r(D) = \sum_j x_{ji} - \sum_j x_{ij} = 0}$$

b) ***li și ik invers:***

$$\boldsymbol{\sum_j x^1_{ji} - \sum_j x^1_{ij} = \sum_{j\neq l,k} x_{ji} - \sum_j x_{ij} + x^1_{li} + x^1_{ki} = \sum_{j\neq l,k} x_{ji} - \sum_j x_{ij} + x_{li} + r(D) + x_{ki} - r(D) = \sum_j x_{ji} - \sum_j x_{ji} - \sum_j x_{ij} = 0}$$

c) ***li invers, ik direct: similar cu b).***

d) ***li invers, ik invers: similar cu a).***

Valoarea fluxului x^1 se obține considerând lt unicul arc al lui D incident cu t:

Dacă lt direct atunci:

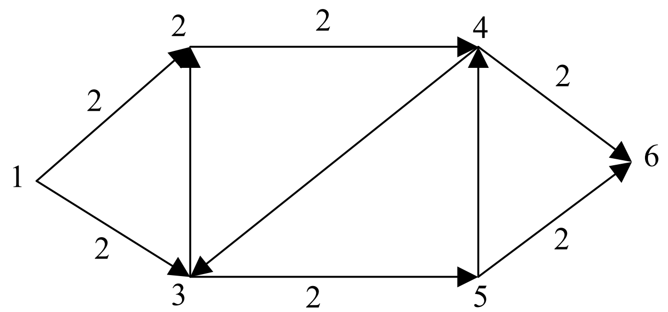
$$v(x^1) = \sum_j x^1_{jt} - \sum_j x^1_{tj} = \sum_{j\neq l} x_{jt} - \sum_j x_{tj} + x^1_{lt} = \sum_{j\neq l} x_{jt} - \sum_j x_{tj} + x_{lt} + r(D) = v(x) + r(D)$$

.

Dacă lt invers atunci:

$$v(x^1) = \sum_j x^1_{jt} - \sum_j x^1_{tj} = \sum_j x_{jt} - \sum_{j\neq l} x_{tj} - x^1_{tl} = \sum_j x_{jt} - \sum_{j\neq l} x_{tj} - (x_{lt} - r(D)) = v(x) + r(D)$$

Pentru exemplul anterior, fluxul $x^1 = x \otimes r(D)$ ***este precizat pe arce:***



Observații:

1^0 Această lemă justifică denumirea de drum de creștere, precum și pe cea de capacitate reziduală.

2^0 Din definiție, dacă D este un drum de creștere, r(D)>0 și deci avem $v(x \otimes r(D)) > v(x)$***. Rezultă că x admite un drum de creștere, x nu este flux de valoare maximă.***

Definiție: Fie $R = (G, s, t, c)$***. Se numește secțiune în rețeaua R, o partiție (S, T) a lui V cu*** $s \in S$ ***și*** $t \in T$***. Capacitatea secțiunii (S, T) este:***

$$c(S,T) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} c_{ij}$$

(suma capacităților arcelor de la S la T).

Lema 2. Dacă x este un flux în $R = (G, s, t, c)$ ***și (S, T) este o secțiune a rețelei, atunci***

$$v(x) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} (x_{ij} - x_{ji})$$

(valoarea fluxului este egală cu fluxul net ce trece prin orice secțiune.)

Demonstrație:

$$v(x) = \left(\sum_j x_{jt} - \sum_j x_{tj} \right) - 0 = -\left(\sum_j x_{js} - \sum_j x_{sj} \right) - \sum_{i \in S,\, i \neq s} \left(\sum_j x_{ji} - \sum_j x_{ij} \right) =$$

$$\sum_{i \in S} \left(\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} \right) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} (x_{ij} - x_{ji}) + \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} (x_{ij} - x_{ji}) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} (x_{ij} - x_{ji})$$

Lema 3. Dacă x este un flux în $R = (G, s, t, c)$ ***și (S, T) este o secțiune, atunci:***
$v(x) \le c(S,T)$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} (x_{ij} - x_{ji}) && (\text{lema } 2) \\ &\le \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} (s_{ij} - x_{ji}) && (x_{ij} \le c_{ij}) \\ &\le \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} c_{ij} && (x_{ji} \ge 0) \end{aligned}$$

Observații:

1) Dacă $\bar{x}$ ***este un flux în*** $R = (G, s, t, c)$ ***și (*** $\bar{S}, \bar{T}$ ***) o secțiune astfel încât*** $v(\bar{x}) = c(\bar{S}, \bar{T})$***, atunci*** $\forall x$ ***flux în R*** $v(x) \le c(\bar{S}, \bar{T}) = v(\bar{x})$***, deci*** $\bar{x}$ ***este flux de valoare maximă. 2) În exemplul dat,*** x^1 ***este flux de valoare maximă întrucât*** $v(x^1) = 4 = c(\{1,2,3\}, \{4,5,6\})$

Teorema 1. Un flux este de valoare maximă într-o rețea R, dacă, nu există drumuri de creștere a fluxului x în rețeaua R.

Demonstrație: Dacă x este de valoare maximă și P ar fi un drum de creștere a lui x în R

atunci $x' = x \otimes r(P)$ ***ar avea valoarea*** $v(x') = v(x) + r(P) > v(x)$ ***(din lema 1), contrazicând faptul că x este de valoare maximă.***
Reciproc, fie x un flux în R care nu admite drumuri de creștere.
Considerăm $S = \{i \mid i \in V \wedge \exists D \;\; \text{C-drum de la s la i}\}$.

Evident $s \in S$ ***(există D de lungime 0) și*** $t \notin S$ ***(nu există C-drum de la s la t).***
Fie $T = S - V$. ***Rezultă că (S, T) este o secțiune. Să observăm că*** $\forall i \in S$ ***și*** $\forall j \in T$ ***avem:***

dacă $ij \in E$ ***atunci*** $x_{ij} = c_{ij}$ ***și***

dacă $ji \in E$ ***atunci*** $x_{ji} = 0$

(altminteri C-drumul de la s la i se poate extinde la un C-drum de la s la j). Deci, conform lemei 2, $v(x) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} (x_{ij} - x_{ji}) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} (c_{ij} - 0) = c(S, T)$ ***și prin urmare x este flux de valoare maximă.***

Teorema 2. Dacă toate capacitățile sunt întregi, atunci există un flux de valoare maximă cu toate componentele întregi.

Demonstrație: Se consideră următorul algoritm:

begin

1: $x^0=0;\ i:=0;$

2: ***while*** $(\exists P_i$ ***drum de creștere relativ la*** $x^i)$ ***do begin***

$x^{i+1} := x^1 \otimes r(P_i);$

i:=i+1;

end

end.

Se observă că "x^i are componante întregi" este un invariant al algoritmului (din definiția lui $r(P_i)$), dacă toate capacitățile sunt întregi, rezultă că $r(P_i)$ este întreg în ipoteza că x^i e întreg) și că la fiecare iterație a pasului 2 valoarea fluxului curent crește cu măcar o unitate, deci pasul 2 se repetă de cel mult $c(\{s\}, V - \{s\}) \in Z_+$ ***ori. Fluxul final obținut este, conform teoremei 1, de valoare maximă.***

Observație. Algoritmul, descris mai sus, este finit și în cazul capacităților raționale.

Teorema 3. (Ford-Fulkerson,1956) (flux maxim-secțiune minimă). Valoarea maximă a unui flux în rețeaua $R = (G, s, t, c)$ ***este egală cu capacitatea minimă a unei secțiuni a rețelei.***

Demonstrație: Dacă dispunem de un algoritm care, pornind de la un flux inițial x^0 (x^0 există întotdeauna, de exemplu $x^0=0$), construiește într-un număr finit de pași un flux

x, care nu admite drumuri de creștere, atunci secțiunea construită în demonstrația teoremei 1 satisface împreună cu x enunțul teoremei.

Pentru cazul capacităților raționale algoritmul descris în demonstrația teoremei 2, satisface această condiție.

Pentru cazul capacităților real vom prezenta, mai târziu, un astfel de algoritm, datorat lui Edmonds și Karp (1972).

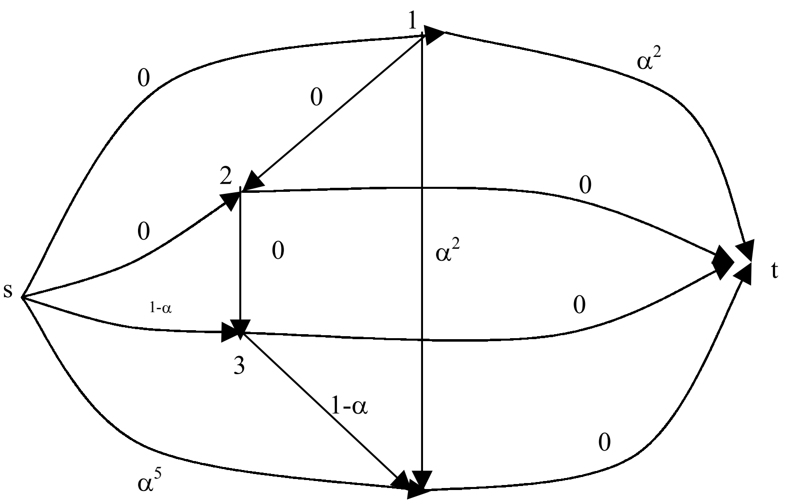
Observații:

i) ***Se observă că în demonstrația teoremei 3 avem nevoie de fapt, doar să arătăm că există un flux x de valoare maximă și apoi să-i aplicăm construcția din demonstrația teoremei 1; existența fluxului x maxim rezultă imediat, considerând transcrierea problemei fluxului maxim ca o problemă de programare liniară; am preferat demonstrația de mai sus care (deși va fi completată după analiza algoritmului lui Edmonds-Karp) este constructivă.***

ii) ***Importanța algoritmică a teoremei 3 este evidentă: mulțimea secțiunilor rețelei este finită, pe când mulțimea fluxurilor din rețea este infinită.***

iii) ***Prezentăm în continuare un exemplu datorat lui Lovasz (1970) care arată că în cazul datelor iraționale (pentru comoditate vom considera capacitățile iraționale, dar fluxul inițial*** x^0 ***cu componente iraționale) un algoritm de tipul celui descris în demonstrația teoremei 2, nu numai că nu se va opri (va repeta la infinit pasul 2), ci va produce un șir de fluxuri*** $x^n \quad n \in N$ ***cu proprietatea că*** $v(x^n)$ ***nu converge la valoarea fluxului maxim.***

Fie rețeaua desenată mai jos în care fiecare arc are capacitatea 1 și are precizat pe el fluxul inițial, unde α ***este unica rădăcină reală a ecuației*** $t^3 + t - 1 = 0 \quad \alpha \in (0,1)$.



Evident că $v\left(x^0\right)=\alpha^2$***. Considerăm***

$P_1 = s,1,2,3,4,t \qquad x^1 = x^0 \otimes r(P_1)$

$P_2 = s,1,4,3,2,t \qquad x^2 = x^1 \otimes r(P_2)$

$P_3 = s,3,4,1,2,t \qquad x^3 = x^2 \otimes r(P_3)$

$P_4 = s,3,2,1,4,t \qquad x^4 = x^3 \otimes r(P_4)$

Oricare ar fi $m \geq 0$***, fluxul curent*** x^{4m} ***va fi transformat în*** $x^{4m+1}, x^{4m+2}, x^{4m+3}, x^{4m+4}$***, folosind creșteri succesive pe drumurile*** P_1***,*** P_2***,*** P_3***,*** P_4***, valoarea sa crescând cu*** $\alpha^{4m+1}, \alpha^{4m+2}, \alpha^{4m+3}, \alpha^{4m+4}$

Valorile fluxului pe arcele directe s1 șî s3 se calculează în mod similar. Evident, valoarea fluxului maxim este 4, considerând câte o unitate de flux pe fiecare arc si și it (acesta este flux maxim pentru că $c(\{s\},\{1,2,3,4,t\})=4$.)

$v(x^{4m})=\alpha^2+(\alpha+...+\alpha^{4m})\ \forall m\geq 1$ ***și deci***

$\lim\limits_{m\to\infty} v(x^{4m})=\alpha^2+\dfrac{\alpha}{1-\alpha}=\alpha^2+\dfrac{1-\alpha^3}{1-\alpha}=2\alpha^2+\alpha+1<4$)

Algoritmul lui Ford și Fulkerson pentru aflarea unui flux maxim

Se va folosi un procedeu de etichetare a vârfurilor rețelei, în vederea depistării drumurilor de creștere a fluxului curent x. Dacă nu există drumuri de creștere, fluxul va fi de valoare maximă.

Eticheta atribuită unui vârf $j\in V$ ***are trei componente (***e_1, e_2, e_3***) unde*** $e_1\in V\cup\{0\}$; $e_2\in(direct, invers)$; $e_3\in R_+$ ***și au următoarea semnificație:***

- ***dacă*** e_2***=direct și*** e_1***=i atunci*** $\exists$ ***un C-drum P de la s la j cu ultimul arc ij, arc direct și r(P)=***e_3.
- ***dacă*** e_2***=invers și*** e_1***=i atunci*** $\exists$ ***un C-drum P de la s la j cu ultimul arc ij, arc direct și r(P)=***e_3.

Inițial, se etichetează sursa s cu eticheta (0,..,∞***). Celelalte vârfuri primesc etichetă prin "cercetarea" vârfurilor deja etichetate:***

Dacă i este un vârf etichetat, atunci $\forall j\in V$

dacă j neetichetat și $ij\in E$ ***și*** $x_{ij}<c_{ij}$ ***atunci***

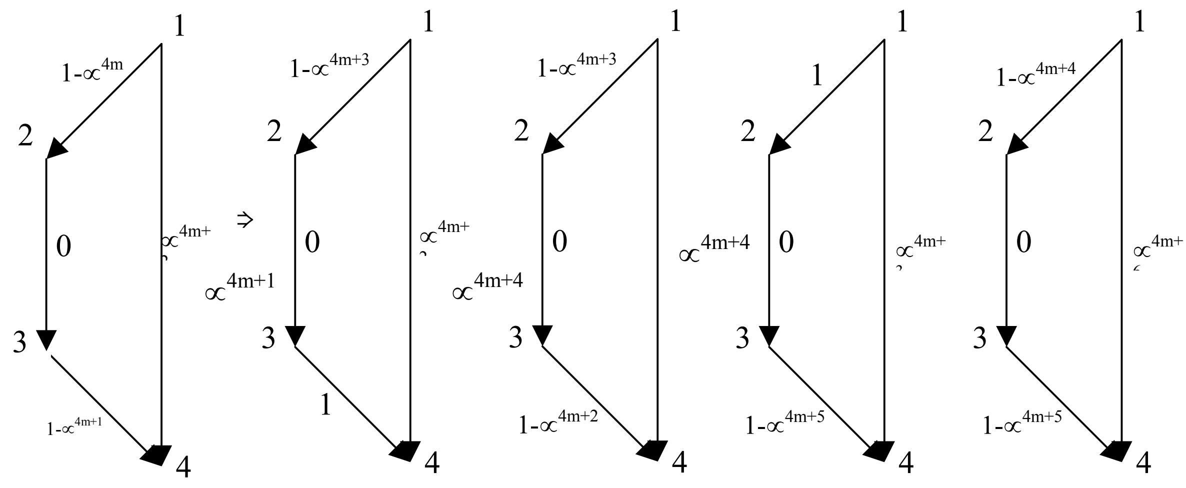
j primește eticheta $e=(i, direct, \min(e_3[i], c_{ij}-x_{ij}))$

dacă j neetichetat și $ij\in E$ ***și*** $x_{ij}>0$ ***atunci***

j primește eticheta $e=(i, invers, \min(e_3[i], x_{ji}))$

Evident, în acest fel se respectă semnificația celor trei componente ale etichetelor. Numim această procedură etichetare(i).

Atunci când în procedura de etichetare s-a atribuit etichetă vârfului t, s-a obținut



un drum de creștere P a fluxului curent, de capacitate reziduală $r(P) = e_3[t]$ și ale cărui vârfuri se depistează în O(n) explorând prima componentă a etichetelor. Modificarea fluxului $x \otimes r(P)$ se execută în acest mers înapoi, tot în O(n)

Pentru noul flux se reia procedura de etichetare. Dacă toate vârfurile etichetate au fost cercetate și nu s-a reușit etichetarea vârfului t, rezultă că fluxul curent nu admite drumuri de creștere, este deci de valoare maximă, iar dacă S=mulțimea vârfurilor etichetate atunci (S, V-S) este o secțiune de capacitate minimă (conform teoremei 1).

Descrierea algoritmului

Begin

1: Se alege $x = (x_{ij})$ un flux inițial (posibil fluxul nul);

se etichetează s cu (0,..,∞)

2: while ($\exists$ vârfuri etichetate necercetate) do begin

"alege" un vârf etichetat și necercetat i;

etichetare(i);

if (t a primit etichetă) then begin

modifică fluxul pe drumul dat de etichete;

șterge toate etichetele;

etichetează s cu (1,..,∞)

end

end;

3: $S := \{i | i \in V, i \text{ are etichetă}\}$

$T := V - S$

x este flux de valoare maximă

(S, T) este secțiune de capacitate minimă.

end.

Complexitatea algoritmului: Pentru fiecare creștere a fluxului, sunt necesare cel mult $2m(m = |E|)$ inspecții de arce în vederea etichetării. Dacă toate capacitățile sunt întregi atunci vor fi necesare cel mult v (v=valoarea fluxului maxim) creșteri succesive. Rezultă că algoritmul are complexitatea O(mv). Dacă U este o margine superioară a capacităților arcelor atunci $v \le (n-1)U$ ($(n-1)U$ este o margine superioară a capacității secțiunii $(\{s\}, V - \{s\})$), deci algoritmul are complexitatea O(nmU).

Observații.

1^0 dezavantajele algoritmului sunt legate de neconvergența în cazul capacităților iraționale (deși practic, în implementări nu este cazul), și de faptul că mărimile capacităților influențează comportarea sa, aceasta neconstituind o măsură a volumului datelor de intrae. Exemplu:

Dacă "alegerea", din pasul 2 al algoritmului, se face ca drumurile de creștere succesive (pornind de la fluxul nul) să fie P_1, P_2, P_1, P_2,...unde P_1=1,2,3,4 ; P_2=1,3,2,4 atunci, fiecare creștere a fluxului mărește cu 1 valoarea fluxului curent și, deci, vor fi necesare 2M creșteri, ceea ce este inadmisibil pentru $M \in Z_+$ foarte mari.

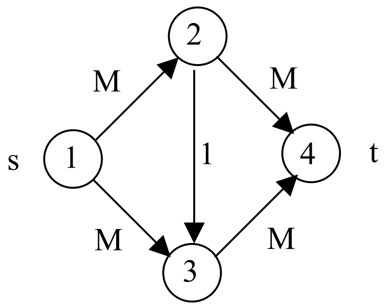
2^0 Aceste dezavantaje pot fi evitate dacă alegerile vârfurilor etichetate supuse cercetării se fac judicios. Primii care au observat acest fenomen, au fost Dinic (1970) și independent, Edmonds și Karp (1972).

Modificarea lui Edmonds și Karp a algoritmului lui Ford & Fulkerson

Numim drum minim de creștere a fluxului x în rețeaua R, un drum de creștere de lungime minimă printre toate drumurile de creștere.

Fie x un flux oarecare în rețeaua R. Definim șirul de fluxuri x^k în R astfel:

$x^0 := x;$



$x^k := x^{k-1} \otimes r(P_{k-1}), P_k$ ***este un drum minim de creștere relativ la x^{k-1}; k=1,2,...***

Vom dovedi că șirul de fluxuri astfel definit este finit.

Notăm, pentru $\forall i \in V$ ***și*** $\forall k = 0,1,2,...$

σ_i^k ***=lungimea minimă a unui C-drum de la s la i în R relativ la fluxul x^k.***

τ_i^k ***=lunngimea minimă a unui C-drum de la i la t în R relativ la fluxul x^k.***

Lema 4. Pentru $\forall i \in V$ ***și*** $\forall k = 0,1,2,...$ ***avem***

$$\sigma_i^{k+1} \geq \sigma_i^k \text{ și } \tau_i^{k+1} \geq \tau_i^k$$

Demonstrație: Demonstrăm numai monotonia lui σ, în mod similar se dovedește monotonia lui τ.

Presupunem că există un cel ma mic k astfel încât există $i \in V$ cu $\sigma_i^{k+1} < \sigma_i^k$. Considerăm $i_0 \in V$ astfel încât $\sigma_{i_0}^{k+1} = \min\{\sigma_i^{k+1} | i \in V, \sigma_i^{k+1} < \sigma_i^k\}$. Întrucât $\sigma_s^k = 0\ \forall k$, rezultă că $\sigma_{i_0}^{k+1} > 0$ și că pe C-drumul de lungime $\sigma_{i_0}^{k+1}$ de la s la i_0 relativ la x^{k+1} există un penultim vârf j, care evident satisface (a) $\sigma_j^{k+1} = \sigma_{i_0}^{k+1} - 1$ (pentru că se află pe un C-drum de lungime minimă) și (b) $\sigma_j^{k+1} \geq \sigma_j^k$ (din alegerea lui i_0). Avem de analizat două situații:

i) ji_0 este arc direct pe C-drumul de lungime $\sigma_{i_0}^{k+1}$ de la s la i_0.

Atunci, $x_{ji_0}^{k+1} < c_{ji_0}$. Rezultă că $x_{ji_0}^k = c_{ji_0}$, adică în P_k, ji_0 a fost arc invers[dacă $x_{ji_0}^k < c_{ji_0}$, atunci $\sigma_{i_0}^k \leq \sigma_j^k + 1 \leq \sigma_j^{k+1} = \sigma_{i_0}^{k+1}$, contrazicând alegerea lui i_0 (în ultimele două relații s-au folosit succesiv (b) și (a))]. Cum P_k este drum minim de creștere în R relativ la x^k, rezultă că $\sigma_j^k = \sigma_{i_0}^k + 1$. Deci, $\sigma_{i_0}^{k+1} + 1 = \sigma_j^k \leq \sigma_j^{k+1} = \sigma_{i_0}^{k+1} - 1 < \sigma_{i_0}^k - 1$, contradicție.

ii) Ji_0 este arc invers pe C-drumul de lungime $\sigma_{i_0}^{k+1}$ de la s la i_0.

Atunci, $x_{i_0j}^{k+1} > 0$. Rezultă că $x_{i_0j}^k = 0$ și deci i_0j a fost arc direct în P_k (dacă $x_{i_0j}^{k+1} > 0$ atunci, $\sigma_{i_0}^k \leq \sigma_j^k + 1 \leq \sigma_j^{k+1} = \sigma_{i_0}^{k+1}$, contrazicând alegerea lui i_0). Cim P_k este un drum minim de creștere în R relativ la x^k rezultă că $\sigma_{i_0}^k + 1 = \sigma_j^k \leq \sigma_j^{k+1} = \sigma_{i_0}^{k+1} - 1 < \sigma_{i_0}^k - 1$, contradicție.

În ambele situații s-a obținut o contradicție, și deci, rezultă că $\sigma_i^{k+1} \geq \sigma_i^k \quad \forall i \in V$ și $\forall k$.

Teorema 4. Dacă $x=x^0$ este un flux oarecare în rețeaua R, atunci șirul de fluxuri x^1, x^2,... obținut din x^0 prin creșteri succesive pe drumuri minime de creștere, are cel mult $\frac{mn}{2}$ elemente (în cel mult $\frac{mn}{2}$ creșteri succesive, se obține un flux care nu admite drumuri de creștere).

Demonstrație: Dacă P este un drum de creștere relativ la un flux în rețeaua R, cu capacitate reziduală r(P) vom numi arc critic în P orice arc $e \in P$ cu $r(e) = r(P)$. Să observăm că în $x \otimes r(P)$, fluxul pe arcele critice devine sau egal cu capacitatea (între arcele directe) sau egal cu 0 (pentru arcele inverse).
Fie ij un arc critic pe drumul minim de creștere P_k relativ la x^k. Lungimea lui P_k este:

$$\sigma_i^k + \tau_i^k = \sigma_j^k + \tau_j^k$$

Cum ij este critic în P_k, în x^{k+1} nu va putea fi folosit în aceeași direcție ca în P_k. Prima oară când fluxul pe arcul ij se va modifica, el va apare într-un drum de creștere P_l cu l>k relativ la x^l și va fi folosit în direcție opusă.

Avem deci două cazuri:

i) ij direct în P_k. Atunci $\sigma_j^k = \sigma_i^k + 1$. ***În P_l ij va fi arc invers, deci*** $\sigma_i^l = \sigma_j^l + 1$. ***Rezultă,*** $\sigma_i^l + \tau_i^l = \sigma_j^l + 1 + \tau_i^l \geq \sigma_j^k + 1 + \tau_i^k = \sigma_i^k + \tau_i^k + 2$ ***(s-a folosit lema 1). Am obținut că*** $\lg(P^l) \geq \lg(P^k) + 2$.

ii) ij arc invers în P_k. Atunci $\sigma_i^k = \sigma_j^k + 1$. ***În P_l ij va fi arc direct, deci*** $\sigma_j^l = \sigma_i^l + 1$. ***Rezultă,*** $\sigma_j^l + \tau_j^l = \sigma_i^l + 1 + \tau_j^l \geq \sigma_i^k + 1 + \tau_j^k = \sigma_j^k + \tau_j^k + 2$. ***Deci,*** $\lg(P^l) \geq \lg(P^k) + 2$.

Rezultă că orice drum minim de creștere în care arcul ij este critic este cu măcar două arce mai lung decât precedentul în care ij a fost critic. Cum, un drum în G are cel mult n-1 arce, rezultă că un arc fixat nu poate fi critic în procesul de creștere mai mult de $\frac{n}{2}$ ***ori. Cum orice drum de creștere are cel puțin un arc critic, rezultă că nu vom avea mai mult de*** $\frac{mn}{2}$ ***drumuri minime de creștere, în șirul construit, Deci după cel mult*** $\frac{mn}{2}$ ***creșteri, se obține un flux care nu admite drumuri de creștere.***

Consecință. Dacă $R = (G, s, t, c)$ ***este o rețea, atunci există un flux care nu admite drumuri de creștere.***

Observații:

1^0 Rezultă de aici, că demonstrația teoremei 3 este completă.

2^0 S-ar putea pune întrebarea dacă nu cumva, cosiderarea drumurilor minime de creștere, mărește complexitatea algoritmului de flux maxim ?

Răspunsul este însă banal:

Lema 5. Dacă, în pasul 2 al algoritmului lui Ford și Fulkerson, alegerea vârfurilor etichetate în vederea cercetării se face după regula "primul etichetat-primul cercetat", atunci drumurile de creștere care se depistează sunt cu număr minim de arce.

Demonstrație: Fie P un drum de creștere depistat și fie P' un drum minim de creștere. Presupunem că $\lg(P) \geq \lg(P')$. ***Considerăm arcele lor***

$$P\ :\quad si_1, i_1 i_2, \ldots, i_{k-1} i_k, i_k i_{k+1}, i_{k+1} i_{k+2}, \ldots, i_{k+l-1} t \qquad \lg(P) > \lg(P')$$
$$P'\ :\quad si_1, i_1 i_2, \ldots, i_{k-1} i_k, i_k j_{k+1}, j_{k+1} j_{k+2}, \ldots, j_{k+l'-1} t \quad \lg(P') = k + l';\quad l' < l.$$

Conform regulii de etichetare i_{k+1} primește etichetă înaintea lui j_{k+1}, dar j_{k+1} primește etichetă înaintea lui i_{k+2}; j_{k+2} primește etichetă înaintea lui i_{k+3} și așa mai departe, obținem inductiv că t primește etichetă înaintea lui $i_{k+l'-1}$, deci t primește etichetă pe drumul P', înainte de a primi etichetă pe drumul P, absurd.

Observație: Regula "primul etichetat-primul cercetat" corespunde unei explorări b f s a fârfurilor cercetate, ceea ce se poate realiza, utilizând o coadă pentru memorarea vârfurilor etichetate. Aceasta nu afectează complexitatea algoritmului, care va necesita tot O(m) operații pentru fiecare creștere a fluxului și folosind teorema 4 obținem:

Teorema 5. (Edmonds-Karp 1972)

Dacă se modifică algoritmul lui Ford și Fulkerson cu precizarea alegerii b f s a vârfurilor etichetate în vederea cercetării, atunci, fluxul maxim se obține în $O(m^2n)$ operații.

Algoritmi de tip flux pentru problema fluxului maxim

Fie $R = (G, s, t, c)$ ***o rețea.***

Definiție. Se numește preflux în rețeaua R, o funcție x:E→R astfel încât

(i) $$0 \le x_{ij} \le c_{ij} \quad \forall ij \in E$$

(ii) $$\forall i \in s \quad e_i = \sum_{j:ji\in E} x_{ji} - \sum_{j:ij\in E} x_{ij} \ge 0$$

Numărul e_i $i \in V$-{s, t} se numește excesul din vârful i.
Dacă $i \in V$-{s, t} și $e_i>0$ atunci i se numește nod activ. Dacă $ij \in E$ x_{ij} va fi numit fluxul pe arcul ij.

Observații:

1^0 Dacă în rețeaua R nu există noduri active, atunci prefluxul x este flux de la s la t în R de valoare e_t.

2^0 Ideea algoritmilor de tip preflux este: se pornește cu un preflux în R și se transformă prin modificări ale fluxului pe arce într-un flux care nu admite drumuri de creștere.

3^0 În definiția unui preflux, nu am mai utilizat convenția că vom introduce toate perechile de arce din digraful complet simetric de ordin n, întrucât în analiza algoritmilor pe care îi vom prezenta va fi esențială reprezentarea digrafului G cu ajutorul listelor de adiacență. Totuși, vom considera că dacă $ij \in E$ atunci și $ji \in E$ (altminteri, adăugăm arcul ji cu capacitate 0).

***Definiție:* Dacă x este un preflux în R și ij∈E, atunci capacitatea reziduală a arcului ij este**

$$r_{ij} = c_{ij} - x_{ij} + x_{ji}$$

(reprezentând fluxul adițional ce poate fi "trimis" de la nodul i la nodul j utilizând arcele ij și ji).

***Observație.* Peste tot, în cele ce urmează, a "trimite" flux de la i la j înseamnă să creștem fluxul pe arcul ij sau să micșorăm fluxul pe arcul ji.**

***Definiție:* Se numește C-drum relativ la prefluxul x, un drum al lui G ale cărui arce au capacitatea pozitivă.**

***Definiție:* Se numește funcție de distanță în R relativ la prefluxul x, o funcție $d : V \to Z_+$ care satisface:**

(D1) $$d(t) = 0$$

(D2) $$\forall ij \in E, r_{ij} > 0 \Rightarrow d(i) \le d(j) + 1$$

Observații:

1[0]. Dacă P este un C-drum relativ la prefluxul x în R de la i la t atunci $d(i) \le \lg(P)$ ***(arcele unui C-drum au capacitate reziduală pozitivă și se aplică (D2)). Rezultă că*** $d(i) \le \tau_i$ ***(lungimea minimă a unui C-drum de la i la t).***

2[0]. Vom nota cu A(i), pentru orice vârf i, lista sa de adiacență, care poate conține arcele ij∈E.

***Definiție.* Fie x un preflux în R și d o funcție de distanță relativ la x.**
Un arc ij∈E se numește admisibil dacă

$$r_{ij} > 0 \wedge d(i) = d(j) + 1.$$

Dacă R este o rețea, considerăm inițializare următoarea procedură care construiește în O(m) un preflux x și o funcție de distanță d corespunzătoare acestuia, astfel:

procedure inițializare;
begin
  for ∀ij∈E do

if i=s then x_{ij}:=c_{sj} else x_{ij}:=0;
d[s]:=n;
d[t]:=0;
for $\forall i \in V$-{s, t} do d[i]:=1;
end.

Observații:

1^0. După execuția acestei proceduri, $\forall sj \in A(s)$ avem r_{sj}=0, deci alegerea lui $d(s)=n$ nu afectează condiția D2. Pentru arcele cu capacitate reziduală pozitivă de forma js D2 este evident verificată.

2^0. Alegerea lui $d(s)=n$ are următoarea interpretare: " nu există C-drum de la s la t în R relativ la x" (întrucât, altminteri, ar trebui ca lungimea acestuia să fie $\geq$ n). Dacă, în algoritmii de tip preflux vom păstra acest invariant, atunci când x va deveni flux, va rezulta că nu admite drumuri de creștere și deci x va fi de valoare maximă.

Considerăm următoarele proceduri

procedure pompează (i : V – {s, t});
begin
alege ij$\in$A(i) ij admisibil;
"trimite" δ=min(e_i,r_{ij}) unități de flux de la i la j
end;

Dacă δ=r_{ij} vom spune că avem o pompare saturată, altminteri pomparea este nesaturată.

procedure reetichetare(i : V – {s, t});
begin
d(i):=min{d(j)+1 $\mid$ ij$\in$A(i) $\wedge$ r_{ij} > 0}
end;

Schema generală a unui algoritm de tip preflux este:

```
begin
        inițializare;
        while ∃ noduri active în R do begin
                selectează un nod activ i;
                if ∃ arce admisibile în A(i)
                        then pompează (i)
                        else reetichetează (i)
        end
end.
```

***Lema 6.** Algoritmul de tip preflux, descris mai sus, are ca invariant "d este funcție de distanță relativ la prefluxul x". La fiecare reetichetare(i), d(i) crește strict.*

***Demonstrație:** Procedura inițializare construiește, evident, o funcție de distanță relativ la prefluxul inițial. Dacă înaintea execuției unei iterații a lui while, d este funcție de distanță relativ la prefluxul relativ x, atunci:*

a) dacă se execută pompare(i), atunci singura pereche ce poate viola D2 este d(i) și d(j). Cum arcul ij a fost ales admisibil, avem d(i)=d(j)+1. După pompare, arcul ji poate avea $r_{ji}>0$ (fără ca înainte să fi fost), dar condiția $d(i)\leq d(j)+1$ este, evident, satisfăcută.

b) dacă se execută reetichetare(i), modificarea lui d(i) se face astfel încât D2 să rămână valabilă pentru orice arc ij cu $r_{ij}>0$. Cum apelul lui reetichetare implică $d(i)<d(j)+1$ $\forall ij$ cu $r_{ij}>0$, rezultă că după apel d(i) crește măcar cu o unitate.

Pentru finitudinea algoritmului va trebui să dovedim că, dacă, pe parcursul lui, avem un nod i activ, atunci în A(i) va exista măcar un arc ij cu $r_{ij}>0$. Aceasta rezultă din

***Lema 7.** Dacă pe parcursul algoritmului, i_0 este un nod activ, atunci există un C-drum de la i_0 la s, în R, relativ la prefluxul curent x.*

***Demonstrație:** Dacă x este un preflux în R, atunci x se poate scrie ca o sumă finită*

$x = x^1 + x^2 + \ldots x^p$, ***unde fiecare x^k satisface:***

mulțimea** $A^k = \{ij \mid ij \in E,\ x_{ij}^k \neq 0\}$ **este

a)mulțimea arcelor unui drum de la s la t,

b)mulțimea arcelor de la s la un nod activ,

c)mulțimea arcelor unui circuit.

În plus, în situațiile a) și c), x^k este un flux.

(Demonstrația rezultă algoritmic, prin construirea mai întâi a mulțimilor a), și apoi a celor de tip c) și b), căutând la fiecare etapă inversul unui drum cu proprietățile dorite; prefluxul construit se scade din cel curent; excesele nenegative, asigură posibilitatea construcției, care este finită, întrucât după fiecare etapă numărul arcelor cu flux curent nul crește.)

Cum i_0 este un nod activ în R relativ la x, rezultă că situația b) va apare pentru nodul i_0 (întrucât situațiile b) și c) nu afectează excesul din nodul i_0). Arcele inverse ale acestui drum au capacitatea reziduală strict pozitivă și ele formează C-drumul din enunțul lemei.

***Consecința 1.** $\forall i\in V$ d(i)<2n*

***Demonstrație:** Dacă i nu a fost reetichetat, atunci d(i)=1<2n. Dacă i a fost reetichetat, atunci înainte de reetichetare i este nod activ, deci există C-drum de la i la s de lungime cel mult n-1. Din modul de modificare a lui d(i) și din D2 rezultă că după reetichetare $d(i)\leq d(s)+n-1=2n-1$, întrucât d(s)=n nu se schimbă pe parcursul*

algoritmului.

Consecința 2. Numărul total de apeluri ale procedurii reetichetare este mai mic decât $2n^2$.

Demonstrație: Fiecare din cele n-2 vârfuri ce pot fi supuse etichetării poate fi etichetat de cel mult 2n-1 ori, având în vedere consecința 1, lema 6, și etichetarea inițială.

Consecința 3. Numărul total de pompări saturate este $\leq$ nm.

Demonstrație: După ce un arc ij devine saturat (situație în care d(i)=d(j)+1), pe acest arc nu se va mai putea trimite flux până când nu se va trimite flux pe arcul ji situație în care vom avea d'(j)=d'(i)+1≥d(i)+1=d(j)+2; această schimbare de flux nu va avea loc până ce d(j) nu crește cu două unități. Deci, un arc nu poate deveni saturat mai mult de n ori și în total vom avea cel mult mn pompări saturate.

Lema 8. (Goldberg și Tarjan 1986) Numărul pompărilor nesaturate sete cel mult $2n^2m$.

Lema 9. La terminarea algoritmului x este flux de valoare maximă.

Demonstrație: Din lemele 6 și 8 și consecința 3 rezultă că algoritmul se termină după cel mult $2n^2m$ iterații și cum d(s)=n nu se modifică pe parcurs, rezultă că fluxul obținut este fără drumuri de creștere.