O primăvară frumoasă!

Calcul Numeric

Cursul 2

2022

Anca Ignat

Dacă fa**c**em înmulţirea matricială $\boldsymbol{Ae_j}$ obţinem coloana $\boldsymbol{j}$ a matricei $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{Ae_j} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_{\text{poziţia } j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{Ae_j}$ este coloana $\boldsymbol{j}$ a matricei $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{j=1,...,n}$;

$\boldsymbol{e_i^T A}$ este linia $\boldsymbol{i}$ a matricei $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{i=1,...,m}$.

Fie vectorii ***x*, *y***, cu ajutorul lor definim produsele scalare în $\mathbb{C}^n$ şi $\mathbb{R}^n$:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \;,\; \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

$$(x\,,\,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = y^H x = \begin{pmatrix} \overline{y_1} & \overline{y_2} & \cdots & \overline{y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n , \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$(x , y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = y^T x = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Proprietăţile matricei $\boldsymbol{A^H}$		Proprietăţi ale matricei $\boldsymbol{A^T}$
1.	$(A + B)^H = A^H + B^H$	$(A + B)^T = A^T + B^T$
2.	$(A^H)^H = A$	$(A^T)^T = A$
3.	$(AB)^H = B^H A^H$	$(AB)^T = B^T A^T$
4.	$(A^{-1})^H = (A^H)^{-1}$	$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Propoziţie

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{n}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^{m}$ atunci:

$$\left(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{y}\right)_{\mathbb{C}^m} = \left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^H \boldsymbol{y}\right)_{\mathbb{C}^n} .$$

Pentru cazul real avem:

$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{m} \Rightarrow \left(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{y}\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y}\right)_{\mathbb{R}^n}$$

Demonstraţie

$$(Ax , y) = y^H (Ax) = y^H A\, x = y^H (A^H)^H x =$$

$$= (A^H y)^H x = (x , A^H y).$$

Tipuri de matrice

Definiţii

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se numeşte ***simetrică*** dacă $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$.

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se numeşte ***autoadjunctă*** dacă $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^H$.

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se numeşte ***unitară*** dacă $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^H = \boldsymbol{I}_n$.

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se numeşte ***ortogonală*** dacă

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}_n.$$

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\boldsymbol{A=(a_{ij})}$ se numește matrice ***triunghiulară inferior*** (sau ***inferior triunghiulară***) dacă

$$\boldsymbol{a_{ij} = 0} \text{ pentru } \boldsymbol{j > i}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\boldsymbol{A=(a_{ij})}$ se numește matrice ***triunghiulară superior*** (sau ***superior triunghiulară***) dacă

$$\boldsymbol{a_{ij} = 0} \text{ pentru } \boldsymbol{j < i}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Notăm cu $\boldsymbol{I_n}$ matricea unitate:

$$\boldsymbol{I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}, I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Matrice diagonală $\boldsymbol{D}$=**diag**$\boldsymbol{[d_1, d_2, \ldots, d_n]}$

$$\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Norme

Definiție

Fie $\boldsymbol{X}$ un spațiu vectorial real. Se numește ***normă*** aplicația:

$$\|\,.\,\|: X \to \mathbb{R}_+$$

care îndeplinește condițiile:

$$\textbf{(1)}\ \ \|x\| \geq 0; \quad \|x\| = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0;$$

$$\textbf{(2)}\ \ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall\, x, y \in X;$$

$$\textbf{(3)}\ \ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|, \forall\, x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vom numi ***norme vectoriale*** normele definite pe spațiile $\boldsymbol{X} = \mathbb{C}^n$ sau $\mathbb{R}^n$.

Exemple

Fie spațiile vectoriale $\mathbb{C}^n$ sau $\mathbb{R}^n$. Pe aceste spații următoarele aplicații sunt norme vectoriale:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| - \text{city-block (Manhattan)}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} - \text{ euclidiană}$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, i = 1..n\} - \text{Cebyshev (a tablei de şah)}$$

Dacă $\|\cdot\|_v$ este o normă vectorială şi $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este o matrice nesingulară (**det** $\boldsymbol{P \neq 0}$) atunci aplicația:

$$\|\cdot\|_P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \|\boldsymbol{x}\|_P = \|\boldsymbol{Px}\|_v$$

este de asemenea o normă vectorială.

Definiție

Se numește ***produs scalar*** în spațiul vectorial $\boldsymbol{X}$ aplicația:

$$(\cdot\,,\cdot): X \times X \to K$$

care satisface condițiile :

$$\textbf{(a)}\ (x\,,x) \geq 0\,, \forall\, x \in X, \quad (x,x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0;$$

$$\textbf{(b)}\ (x\,,y) = \overline{(y\,,x)}\,, \forall\, x\,,y \in X,$$

$$\textbf{(c)}\ (\lambda x\,,y) = \lambda(x\,,y), \forall\, x\,,y \in X\,, \forall \lambda \in K,$$

$$\textbf{(d)}\ (x + y\,,z) = (x\,,z) + (y\,,z), \forall\, x\,,y\,,z \in X\,.$$

Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz:

$$|(x, y)| \le \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} \quad \forall x, y \in X$$

Într-un spațiu vectorial dotat cu produs scalar se poate induce o normă numită euclidiană:

$$\|x\|_2 = |x| := \sqrt{(x, x)}.$$

Reamintim definiția produselor scalare pe $\mathbb{C}^n$ şi pe $\mathbb{R}^n$ introduse anterior:

$$(x, y)_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \quad , \quad (x, y)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Obținem norma euclidiană (valabilă în spaţiile $\mathbb{C}^n$ şi $\mathbb{R}^n$):

$$\|x\|_2 = |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

Norme matriceale

Definiție

Aplicația $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ se numește ***normă matriceală*** dacă:

$$\textbf{(1)}\ \|A\| \geq 0\ \forall\, A \in \mathbb{R}^{n\times n}\ ;\ \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

$$\textbf{(2)}\ \|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

$$\textbf{(3)}\ \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,\ \forall\, A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

$$\textbf{(4)}\ \|A * B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,\ \forall\, A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Exemple

Norma Frobenius definită de relația $\left\|A\right\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2}$ este o normă matriceală.

Aplicația $\left\|A\right\|_{\max} = \max\{\left|a_{ij}\right|; i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,n\}$ ***<u>NU</u>*** este o normă matriceală.

Pentru ***n = 2*** fie:

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, B = A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$A * B = I_2 \,, \|A\|_{\max} = \|B\|_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\|A * B\|_{\max} = 1 > \|A\|_{\max} \bullet \|B\|_{\max} = \frac{1}{2}.$$

Norme matriceale naturale

- $\|\cdot\|_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ o normă vectorială $\to \|\cdot\|_i : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}_+$ ***normă matriceală naturală*** sau ***indusă***.

$$\|A\|_{\mathrm{i}} = \max\{ \frac{\|Ax\|_{\mathrm{v}}}{\|x\|_{\mathrm{v}}} ; x \in \mathbb{R}^n , x \neq 0\}$$

Definiţii echivalente :

$$\|A\|_{\mathrm{i}} = \max\{ \|Ax\|_{\mathrm{v}} ; x \in \mathbb{R}^n , \|x\|_{\mathrm{v}} \leq 1\}$$

$$= \max\{ \|Ax\|_{\mathrm{v}} ; x \in \mathbb{R}^n , \|x\|_{\mathrm{v}} = 1\}$$

$\|A\|_{\mathrm{i}}$ se numeşte ***normă matriceală naturală*** sau ***normă indusă*** de norma vectorială $\|\cdot\|_v$

Avem următoarea relaţie:

$$\|Ax\|_{\mathrm{v}} \le \|A\|_{\mathrm{i}} \|x\|_{\mathrm{v}}, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Norma Frobenius $\|\cdot\|_F$ nu este o normă naturală.

$$\|I_n\|_{\mathrm{i}} = \max\{ \frac{\|I_n x\|_{\mathrm{v}}}{\|x\|_{\mathrm{v}}} ; x \neq 0 \} = 1, \ \forall \ \|\cdot\|_i,$$

$$\|I_n\|_F = (1+1+\cdots+1)^{1/2} = \sqrt{n} \neq 1 \text{ pentru } n \ge 2.$$

Pentru $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ norma matriceală indusă este:

$$\|A\|_1 = \max\{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|;\ j = 1, 2, \dots, n\}$$

Pentru $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|;\ i = 1, \dots, n\}$ norma matricială indusă este:

$$\|A\|_\infty = \max\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|;\ i = 1, 2, \dots, n\}.$$

- $\|\cdot\|_{\mathbf{v}}$ şi $\|\cdot\|_{\mathbf{v,P}}$ - norme vectoriale $\rightarrow$ $\|\cdot\|_{\mathbf{i}}$ şi respectiv $\|\cdot\|_{\mathbf{i,P}}$

normele matriciale induse

$$\begin{array}{ccc} \|\cdot\|_{\mathrm{v}} & \rightarrow & \|\cdot\|_{\mathrm{i}} \\ \downarrow & & \mathbf{?} \\ \|\cdot\|_{\mathrm{v,P}} & \rightarrow & \|\cdot\|_{\mathrm{i,P}} \end{array}$$

$$\|x\|_{\mathbf{v,P}} = \|Px\|_{\mathbf{v}} \quad \rightarrow \quad \|A\|_{\mathbf{i,P}} = \left\|PAP^{-1}\right\|_{\mathbf{i}}$$

Valori şi vectori proprii

Definiţii

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se numeşte ***valoare proprie*** (***autovaloare***) a matricei $\boldsymbol{A}$ un număr complex $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ pentru care există un vector nenul $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{n}, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ a.î.:

$$\boldsymbol{Ax = \lambda x}.$$

Vectorul x se numeşte ***vector propriu*** (***autovector***) asociat val. proprii $\boldsymbol{\lambda}$.

$$\boldsymbol{Ax = \lambda x} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{(\lambda I_n - A)x = 0, x \neq 0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{det}\boldsymbol{(\lambda I_n - A) = 0}$$

→ Matricea $\lambda I_n - A$ este singulară.

Polinomul:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2\lambda^{n-2} - \ldots - a_{n-1}\lambda - a_n$$

se numeşte ***polinom caracteristic*** asociat matricei ***A***.

→ **grad** $p_A = n$ → are ***n*** rădăcini care sunt valorile proprii ale matricei ***A***.

Se numeşte ***rază spectrală*** a matricei ***A***:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_i|, i = 1, \ldots, n, \lambda_i - \text{valorile proprii ale matricei A}\}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$ norma indusă este

$$\|A\|_2 = |A| = \sqrt{\rho(A^T A)}$$ se numeşte ***norma spectrală***.

Propoziţie

Fie $\|\cdot\|$ o normă matriceală naturală. Atunci:

$$\rho(A) \le \|A\|, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Numere în format binar

În 1985 IEEE a publicat un raport numit Binary Floating Point Arithmetic Standard 754-1985 și o actualizare în 2008 IEEE 754-2008 care furnizează standarde pentru numere în virgulă mobilă binare și decimale, formate de interschimbare a tipului de date, algoritmi de rotunjire aritmetică, tratarea excepțiilor. Aceste standarde sunt respectate de toți fabricanții de calculatoare care folosesc arhitectura în virgulă mobilă.

O reprezentare binară pe 64 de biți a unui număr real se face în felul următor: primul bit este bitul de semn, următorii 11 biți reprezintă exponentul ***c*** iar următorii 52 de biți conțin informații despre partea fracționară, ***f***, numită și mantisă:

$$(-1)^s 2^{c-1023}(1+f)\ .$$

0 10000000011 1011100100010000000000000000000000000000000000000000 =
27.56640625

[27.5664062499999982236431605997495353221893310546875,
27.5664062500000017763568394002504646778106689453125).

Cel mai mic număr pozitiv care poate fi reprezentat este cu $\boldsymbol{s = 0, c = 1, f = 0}$ adică

$$\boldsymbol{z = 2^{-1022}(1+0) \approx 0.22251 \times 10^{-307}}$$

iar cel mai mare este pentru $\boldsymbol{s = 0,\ c = 2046,\ f = 1 - 2^{-52}}$

$$\boldsymbol{Z = 2^{1023}(2 - 2^{-52}) \approx 0.17977 \times 10^{309}}.$$

Numerele care apar în calcule și sunt mai mici decât $\boldsymbol{z}$ sunt setate în general la 0 (*underflow*) iar cele mai mari decât $\boldsymbol{Z}$ duc, de obicei, la oprirea calculelor (*overflow*).

Se observă că numărul 0 are două reprezentări: $s=0, c=1, f=0$ și $s=1, c=1, f=0$.

Reprezentarea zecimală

$\pm 0.d_1 d_2 \ldots d_k \times 10^n$ $1 \le d_1 \le 9$, $0 \le d_i \le 9$, $i=2,...,k$ - reprezentarea zecimală folosind k cifre. Orice număr real y:

$$y = 0.d_1 d_2 \ldots d_k d_{k+1} d_{k+2} \ldots \times 10^n$$

poate fi reprezentat folosind k cifre printr-o simplă trunchiere

$$fl(y) = 0.d_1 d_2 \ldots d_k \times 10^n \ .$$

O altă metodă de a obține o reprezentare cu $\boldsymbol{k}$ cifre este prin rotunjire:

$$\boldsymbol{fl(y) = 0.\delta_1\delta_2 \ldots \delta_k \times 10^n}$$

Dacă $\boldsymbol{d_{k+1} \geq 5}$ se adaugă ***1*** la $\boldsymbol{d_k}$ pentru a obține ***fl(y)*** (*round up*),

altfel se face trunchierea la $\boldsymbol{k}$ cifre (*round down*).

Un număr $\boldsymbol{r^*}$ aproximează numărul $\boldsymbol{r}$ cu $\boldsymbol{t}$ cifre exacte dacă t este cel mai mare întreg nenegativ pentru care:

$$\boldsymbol{\frac{\left|r - r^*\right|}{|r|} \leq 5 \times 10^{-t}} \ .$$

În cazul trunchierii avem

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| \leq 10^{-k+1}$$

iar când se face rotunjirea:

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| \leq 0.5 \times 10^{-k+1}.$$

Operațiile elementare

$$x +_c y = fl(fl(x) + fl(y))$$
$$x -_c y = fl(fl(x) - fl(y))$$
$$x \times_c y = fl(fl(x) \times fl(y))$$
$$x \div_c y = fl(fl(x) \div fl(y))$$

Surse de erori în calculele numerice

1. Erori în <u>datele de intrare</u>:
   - măsurători afectate de erori sistematice sau perturbații temporare,
   - erori de rotunjire: 1/3 , π , 1/7,…

2. Erori de <u>modelare</u>

- erori de <u>discretizare:</u>

  limita unui şir , suma unei serii , funcţii neliniare aproximate de funcţii liniare, aproximarea derivatei unei funcţii …

- <u>simplificări</u> în modelul matematic

  idealizări , ignorarea unor parametri…

3. Erori în timpul calculelor:

- de rotunjire datorate capacității limitate de memorare a datelor, operațiile nu sunt efectuate exact.
- erori ale bibliotecilor folosite (‚*bug*').

4. Erori umane (date, algoritmi, înţelegerea problemei)

Eroare absolută , eroare relativă

a – valoarea exactă,

ã – valoarea aproximativă.

Eroare absolută : ***a- ã sau |a - ã | sau*** $\|a - \tilde{a}\|$

$$a = \tilde{a} \pm \Delta_a,\ |a - \tilde{a}| \le \Delta_a$$

Eroare relativă: $a \neq 0$ $\quad \dfrac{a - \tilde{a}}{a}$ **sau** $\dfrac{|a - \tilde{a}|}{|a|}$ **sau** $\dfrac{\|a - \tilde{a}\|}{\|a\|}$

$\dfrac{|a - \tilde{a}|}{|a|} \le \delta_a$ (δ_a se exprimă, de regulă, în %).

În aproximările 1kg ±5g, 50g±5g erorile absolute sunt egale dar pentru prima cantitate eroarea relativă este 0,5% iar pentru a doua eroarea relativă este 10%.

$$a_1 = \tilde{a}_1 \pm \Delta_{a_1} \, , a_2 = \tilde{a}_2 \pm \Delta_{a_2} \, ,$$

$$a_1 \pm a_2 = (\tilde{a}_1 \pm \tilde{a}_2) \pm \left(\Delta_{a_1} \pm \Delta_{a_2}\right)$$

$$\Delta_{a_1 + a_2} \leq \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} \, .$$

a_1 cu eroare relativă δ_{a_1} şi a_2 cu eroare relativă δ_{a_2} :

$$a = a_1 * a_2 \text{ sau } \frac{a_1}{a_2} \text{ rezultă } \quad \delta_a = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} \, .$$