

## Tema nr. 7

Fie  $P$  un polinom de grad  $n$  cu coeficienți reali:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

și  $\epsilon$  precizia calculelor.

Să se calculeze intervalul  $[-R, R]$  în care se găsesc toate rădăcinile reale ale polinomului  $P$ . Să se implementeze metoda a doua a lui Dehghan<sup>1</sup> de aproximare a rădăcinilor unui polinom. Pentru calculul valorii unui polinom într-un punct să se folosească schema lui Horner. Să se aproximeze cât mai multe rădăcini ale polinomului  $P$  cu metoda a doua a lui Dehghan, pornind de la puncte de start,  $x_0$ , diferite. Rezultatele se vor afișa pe ecran și se vor memora într-un fișier. În fișierul respectiv se vor scrie doar rădăcinile distincte (2 valori reale  $v_1$  și  $v_2$  sunt considerate diferite dacă  $|v_1 - v_2| > \epsilon$ ).

**Bonus 20 pt.:** Eliminarea rădăcinilor de multiplicitate  $> 1$  prin calculul celui mai mare divizor comun al polinoamelor  $P$  și  $P'$ ,  $Q = \text{c.m.m.d.c.}(P, P')$  și simplificarea polinomului  $P$ ,  $P = P/Q$ . Implementați algoritmul de calcul al celui mai mic divizor comun al două polinoame (nu folosiți o funcție care deja rezolvă această problemă).

### Metoda a doua a lui Dehghan de aproximare a rădăcinilor reale ale unui polinom

Fie  $P$  un polinom de grad  $n$ :

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad (a_0 \neq 0) \quad (1)$$

Toate rădăcinile reale ale polinomului  $P$  se află în intervalul  $[-R, R]$  unde  $R$  este dat de:

$$R = \frac{|a_0| + A}{|a_0|}, \quad A = \max\{|a_i|; i = \overline{1, n}\} \quad (2)$$

Pentru a aproxima o rădăcină reală  $x^*$  (din intervalul  $[-R, R]$ ) a polinomului  $P$  definit de (1), se construiește un șir de numere reale,  $\{x_k\}$ , care converge la rădăcina  $x^* \in [-R, R]$  căutată ( $x_k \rightarrow x^*$  pentru  $k \rightarrow \infty$ ).

---

<sup>1</sup>Dehghan, M., Hajarian, M. (2010). Some derivative free quadratic and cubic convergence iterative formulas for solving nonlinear equations. Computational and Applied Mathematics, 29(1), 19-30.

Pornind cu  $x_0$  o valoare reală dată, șirul  $\{x_k\}$  se construiește astfel (elementul  $x_{k+1}$  se calculează din precedentul element  $x_k$ ):

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2P(x_k)[P(x_k) + P(y_k)]}{[P(x_k + P(x_k)) - P(x_k - P(x_k))]} ,$$

$$k = 0, 1, \dots , x_0 - \text{dat} \tag{3}$$

$$x_{k+1} = x_k - \Delta x_k , \Delta x_k = \frac{2P(x_k)[P(x_k) + P(y_k)]}{[P(x_k + P(x_k)) - P(x_k - P(x_k))]} ,$$

$$y_k = x_k - \frac{2P(x_k)^2}{[P(x_k + P(x_k)) - P(x_k - P(x_k))]} ,$$

Să se calculeze o singură dată, în cadrul fiecărei iterații, valorile  $P(x_k)$ ,  $P(y)$ ,  $P(x_k + P(x_k))$  și  $P(x_k - P(x_k))$ .

Această metodă poate fi folosită și pentru găsirea rădăcinilor unei funcții  $f$  oarecare, nu neapărat polinomială.

**Observație importantă:** Alegerea iterației inițiale,  $x_0$ , poate determina convergența sau divergența șirului  $x_k$  la  $x^*$ . De obicei, o alegere a iterației inițiale  $x_0$  în vecinătatea lui  $x^*$  asigură convergența  $x_k \rightarrow x^*$  pentru  $k \rightarrow \infty$ .

Nu este nevoie de memorat întreg șirul  $\{x_k\}$  ci doar 'ultimul' element calculat,  $x_{k_0}$ . Se consideră că o valoare  $x_{k_0} \approx x^*$  (este 'ultimul' element calculat) atunci când diferența dintre două iterații succesive devine suficient de mică, i.e.,

$$|x_{k_0} - x_{k_0-1}| < \epsilon$$

unde  $\epsilon$  este precizia cu care vrem să aproximăm soluția  $x^*$ . Prin urmare, o schemă posibilă de aproximare a soluției  $x^*$  cu metoda lui Dehghan este următoarea:

### *Metoda a doua a lui Dehghan*

$x = (x_0) = \text{ales aleator} ; k=0 ;$   
(pentru convergența șirului  $\{x_k\}$  este de preferat alegerea  
elementului  $x_0$  în vecinătatea soluției căutate)  
do  
{  
★ if ( $|P(x_k)| \leq \epsilon/10$  )  
     $\Delta x = 0;$   
else  
    calculează  $\Delta x$  folosind formula (3) ;  
★  $x = x - \Delta x;$   
★  $k = k + 1;$   
}  
while ( $|\Delta x| \geq \epsilon$  și  $k \leq k_{\max}$  și  $|\Delta x| \leq 10^8$ )  
if (  $|\Delta x| < \epsilon$  )  $x_k \approx x^*$  ;  
else *divergență* ; (de încercat schimbarea lui  $x_0$ )

### Schema lui Horner de calcul al valorii $P(v)$

Fie  $P$  un polinom de grad  $n$ :

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_kx^{n-k} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_i \in \mathbb{R} \forall i, \quad a_0 \neq 0 \quad (4)$$

Putem scrie polinomul  $P$  și astfel:

$$P(x) = (((\dots((a_0x + a_1)x + a_2)x + a_3)x + \dots)x + a_{n-1})x + a_n$$

Ținând cont de această grupare a termenilor, obținem un mod eficient de a calcula valoarea polinomului  $P$  într-un punct  $v \in \mathbb{R}$  oarecare, procedeu numit *metoda lui Horner*:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_i &= a_i + b_{i-1}v, \quad i = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (5)$$

Folosind șirul de mai sus, valoarea polinomului  $P$  în punctul  $v$  este:

$$P(v) = b_n$$

iar ceilalți termeni  $b_i$  calculați, sunt coeficienții polinomului cât,  $Q$ , din împărțirea cu rest:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - v)Q(x) + r, \\ Q(x) &= b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}, \\ r &= b_n = P(v). \end{aligned} \quad (6)$$

Pentru a calcula  $P(v)$  ( $b_n$ ) cu formulele (5) se poate folosi o singură valoare reală  $b \in \mathbb{R}$  și nu un vector  $b \in \mathbb{R}^n$ .

### Example

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 ,$$

$$a_0 = 1.0, \quad a_1 = -6.0, \quad a_2 = 11.0, \quad a_3 = -6.$$

$$P(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{7}\right)(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{42}(42x^4 - 55x^3 - 42x^2 + 49x - 6)$$

$$a_0 = 42.0, \quad a_1 = -55.0, \quad a_2 = -42.0, \quad a_3 = 49.0, \quad a_4 = -6.0.$$

$$P(x) = (x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3)\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{8}(8x^4 - 38x^3 + 49x^2 - 22x + 3)$$

$$a_0 = 8.0, \quad a_1 = -38.0, \quad a_2 = 49.0, \quad a_3 = -22.0, \quad a_4 = 3.0.$$

$$P(x) = (x-1)^2(x-2)^2$$

$$= x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$$

$$a_0 = 1.0, \quad a_1 = -6.0, \quad a_2 = 13.0, \quad a_3 = -12.0, \quad a_4 = 4.0.$$