Limbaje Formale, Automate şi Compilatoare

Curs 2

2020-21

Curs 2

Forma normală

- O gramatică de tip 3 este in formă normală daca regulile sale sunt de forma $A \to a$ sau $A \to aB$, unde $a \in T$, si, eventual $S \to \epsilon$ (caz in care S nu apare in dreapta regulilor).

- Pentru orice gramatica de tip 3 exista o gramatica echivalenta in forma normala.

Forma normală

- Obtinerea gramaticii in forma normala echivalenta cu o gramatica de tip 3:
  - Se poate arata ca pot fi eliminate regulile de forma $A \to B$ (redenumiri) si cele de forma $A \to \epsilon$ (reguli de stergere), cu exceptia, eventual a regulii $S \to \epsilon$.
  - Orice regula de forma $A \to a_1a_2 \ldots a_n$ se inlocuieste cu $A \to a_1B_1, B_1 \to a_2B_2, \ldots, B_{n-2} \to a_{n-1}B_{n-1}, B_{n-1} \to a_n$, $n > 1$, $B_1, \ldots, B_{n-1}$ fiind neterminali noi.
  - Orice regula de forma $A \to a_1a_2 \ldots a_nB$ se inlocuieste cu $A \to a_1B_1$, $B_1 \to a_2B_2, \ldots, B_{n-2} \to a_{n-1}B_{n-1}, B_{n-1} \to a_nB$, $n > 1$, $B_1, \ldots, B_{n-1}$ fiind neterminali noi
  - Transformarile care se fac nu modifica limbajul generat de gramatica

Curs 2

Fie L, L_1, L_2 limbaje regulate: există gramaticile G, G_1, G_2 de tip 3 astfel ca $L = L(G), L_1 = L(G_1)$ şi $L_2 = L(G_2)$.

Atunci, următoarele limbaje sunt de asemenea regulate:

1. $L_1 \cup L_2$
2. $L_1 \cdot L_2$
3. L^*
4. $L_1 \cap L_2$
5. $L_1 \setminus L_2$

Închiderea la reununiune

Fie L, L_1, L_2 limbaje de tip 3 (regulate).

Fie $G_1 = (N_1, T_1, S_1, P_1)$ si $G_2 = (N_2, T_2, S_2, P_2)$ gramatici de tip 3 cu $L_1 = L(G_1)$, $L_2 = L(G_2)$.

Presupunem $N_1 \cap N2 = \emptyset$

Închiderea la reuniune: se arata ca $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_3$:

Gramatica $G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\})$ este de tip 3 si genereaza limbajul $L_1 \cup L_2$

Închiderea la operaţia de produs

Fie L_1, L_2 limbaje de tip 3 (regulate).

Fie $G_1 = (N_1, T_1, S_1, P_1)$ si $G_2 = (N_2, T_2, S_2, P_2)$ gramatici de tip 3 cu $L_1 = L(G_1)$, $L_2 = L(G_2)$.

Presupunem $N_1 \cap N2 = \emptyset$

Gramatica $G = (N_1 \cup N_2, T_1 \cup T_2, S_1, P)$ unde P consta din:

- regulile de forma $A \rightarrow uB$ din P_1 ($B \in N_1$)
- reguli $A \rightarrow uS_2$ pentru orice regula de forma $A \rightarrow u$ ($u \in T_1^*$) din P_1
- toate regulile din P_2

este de tip 3 si genereaza limbajul L_1L_2.

Exemplu

$L = \{uc^n, u \in \{a, b\}^+, n \geq 2\}$

$L = L_1 \cdot L_2$, unde: $L_1 = \{a, b\}^+$, $L_2 = \{c^n, n \geq 2\}$

$G1$:

1. $S_1 \to aS_1$
2. $S_1 \to bS_1$
3. $S_1 \to a$
4. $S_1 \to b$

$G2$:

1. $S_2 \to cS_2$
2. $S_2 \to cc$

$G = (\{S_1, S_2\}, \{a, b, c\}, S_1, P)$,

P :

1. $S_1 \to aS_1$
2. $S_1 \to bS_1$
3. $S_1 \to aS_2$
4. $S_1 \to bS_2$
5. $S_2 \to cS_2$
6. $S_2 \to cc$

Închiderea la operaţia de iteraţie

Fie L limbaj de tip 3 (regulat).

Fie $G = (N, T, S, P)$ de tip 3 care genereaza L ($L = L(G)$).

Presupunem ca simbolul de start S nu apare in partea dreapta a vreunei reguli.

Gramatica $G' = (N, T, S, P')$ unde P' consta din

- reguli $A \to uB$ din P ($B \in N$)
- reguli $A \to uS$, pentru orice regula $A \to u$ din P ($u \in T^*$), diferită de $S \to \epsilon$
- regula $S \to \epsilon$

este de tip 3 si generează L^*

Exemplu

$L = \{a^{n_1}b^{m_1}a^{n_2}b^{m_2}\ldots a^{n_k}b^{m_k}, n_i, m_i \geq 1 \forall i \in \{1, k\}, k \geq 0\}$

$L = \{a^n b^m, n \geq 1, m \geq 1\}^*$

G :

1. $S \rightarrow x$
2. $x \rightarrow ax$
3. $x \rightarrow ay$
4. $y \rightarrow by$
5. $y \rightarrow b$

G' :

1. $S \rightarrow x$
2. $x \rightarrow ax$
3. $x \rightarrow ay$
4. $y \rightarrow by$
5. $y \rightarrow bS$
6. $S \rightarrow \epsilon$

Închiderea la intersecţie

Fie L_1, L_2 limbaje de tip 3 (regulate).

Fie $G_1 = (N_1, T_1, S_1, P_1)$ si $G_2 = (N_2, T_2, S_2, P_2)$ gramatici de tip 3, **în formă normală**, cu $L_1 = L(G_1)$, $L_2 = L(G_2)$.

Gramatica $G = (N_1 \times N_2, T_1 \cap T_2, (S_1, S_2), P)$, unde P constă din:

- $(S_1, S_2) \rightarrow \epsilon$, dacă $S_1 \rightarrow \epsilon \in P_1$ şi $S_2 \rightarrow \epsilon \in P_2$
- $(A_1, B_1) \rightarrow a(A_2, B_2)$, dacă $A_1 \rightarrow aA_2 \in P_1$ şi $B_1 \rightarrow aB_2 \in P_2$
- $(A_1, A_2) \rightarrow a$, dacă $A_1 \rightarrow a \in P_1$ şi $A_2 \rightarrow a \in P_2$

este de tip 3 şi generează limbajul $L_1 \cap L_2$

Exemplu

$L(G1) = \{w \in \{0,1\}^*,$ w contine cel putin un simbol '0'$\}$,

$L(G2) = \{w \in \{0,1\}^*,$ w se termina cu '1'$\}$

$L(G) = \{w \in \{0,1\}^*,$ w contine cel putin un simbol '0' si se termina cu '1'$\}$

$G1$:

1. $S_1 \to 1S_1$
2. $S_1 \to 0A$
3. $S_1 \to 0$
4. $A \to 1A$
5. $A \to 0A$
6. $A \to 1$
7. $A \to 0$

$G2$:

1. $S_2 \to 0S_2$
2. $S_2 \to 1S_2$
3. $S_2 \to 1$

G

1. $(S_1, S2) \to 1(S_1, S_2)$
2. $(A, S_2) \to 1(A, S_2)$
3. $(S_1, S_2) \to 0(A, S_2)$
4. $(A, S_2) \to 0(A, S_2)$
5. $(A, S_2) \to 1$

Exemplu

$L(G1) = \{w \in \{0,1\}^*,$ w contine cel putin un simbol '0'$\}$,

$L(G2) = \{w \in \{0,1\}^*,$ w se termina cu '1'$\}$

$L(G) = \{w \in \{0,1\}^*,$ w contine cel putin un simbol '0' si se termina cu '1'$\}$

$G1$:

1. $S_1 \rightarrow 1S_1$
2. $S_1 \rightarrow 0A$
3. $S_1 \rightarrow 0$
4. $A \rightarrow 1A$
5. $A \rightarrow 0A$
6. $A \rightarrow 1$
7. $A \rightarrow 0$

$G2$:

1. $S_2 \rightarrow 0S_2$
2. $S_2 \rightarrow 1S_2$
3. $S_2 \rightarrow 1$

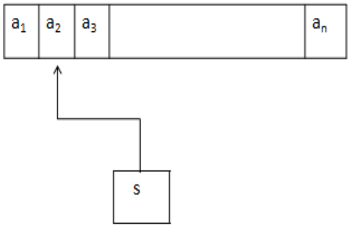
G

1. $S \rightarrow 1S$
2. $X \rightarrow 1X$
3. $S \rightarrow 0X$
4. $X \rightarrow 0X$
5. $X \rightarrow 1$

Curs 2

Automate finite

- Mecanism de recunoaştere (acceptare) pentru limbaje
- Limbaje de tip 3
- Mulţime finită de stări



Automate finite

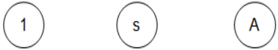
Definiţie 1

Un automat finit determinist este un 5-uplu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, *unde:*

- *Q şi Σ sunt mulţimi finite, nevide, numite mulţimea stărilor respectiv alfabetul de intrare*
- *$q_0 \in Q$ este starea iniţială*
- *$F \subseteq Q$ este mulţimea stărilor finale*
- *δ este o funcţie , $\delta : Q \times \Sigma \to Q$, numită funcţia de tranziţie*

Reprezentare prin diagrame(grafuri) de tranziţie

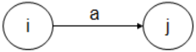
Stări:



Stare iniţială:

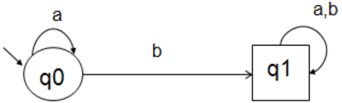
Stări finale:

Funcţia de tranziţie:



Reprezentare prin matricea de tranziţie

$$A = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_1\})$$



Intrare Stare δ	a	b
q0	q0	q1
q1	q1	q1

Limbajul acceptat

- Extensia lui δ la cuvinte $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$
  1. $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q, \forall q \in Q$;
  2. $\hat{\delta}(q, ua) = \delta(\hat{\delta}(q, u), a)), \forall q \in Q, \forall u \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma$.

- **Observaţii:**
  - $\hat{\delta}(q, a) = \delta(q, a), \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$
  - $\hat{\delta}(q, uv) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, u), v), \forall q \in Q, \forall u, v \in \Sigma^*$

Limbajul acceptat

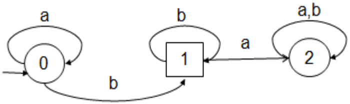
Definiţie 2

Limbajul acceptat (recunoscut) de automatul $A = (Q, \delta, \Sigma, q_0, F)$ *este mulţimea :*

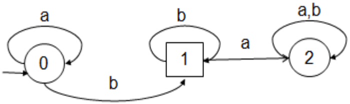
$$L(A) = \{w | w \in \Sigma^*, \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}.$$

- Un cuvânt w este recunoscut de un automat A dacă, după citirea în întregime a cuvântului w, automatul (pornind din starea iniţială q_0) ajunge într-o stare finală.
- $\hat{\delta}(q, a) = \delta(q, a), \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$. Din acest motiv, $\hat{\delta}$ va fi notată de asemenea cu δ.
- Două automate A şi A' sunt echivalente, dacă $L(A) = L(A')$

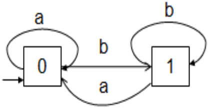
Exemple



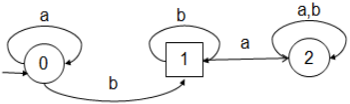
Exemple



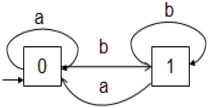
$L(A) = \{a^n b^m | n \geq 0, m \geq 1\}$



Exemple



$$L(A) = \{a^n b^m | n \geq 0, m \geq 1\}$$



$$L(A) = \{a, b\}^*$$

Exemple

Automate deterministe pentru:

- $L = \{w \in \{0,1\}^* | w \text{ conţine un număr par de } 0\}$
- $L = \{w \in \{0,1\}^* | w \text{ se termina cu } 11\}$

Curs 2

1. Forma normală pentru gramatici de tip 3
2. Proprietăţi de închidere pentru $\mathcal{L}_3$
3. Automate finite deterministe
4. Automate finite nedeterministe

Automate finite nedeterministe

Definiţie 3

Un automat finit nedeterminist este un 5-uplu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, *unde:*

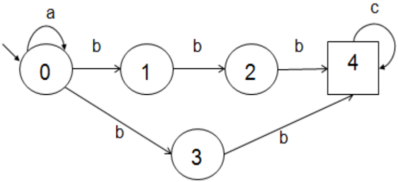
- Q, Σ, q_0 *şi* F *sunt definite ca în cazul automatelor finite deterministe*
- δ *este o funcţie ,* $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$, *numită funcţia de tranziţie*

- **Observaţie:**

  A este automat determinist, dacă

$$|\delta(q, a)| = 1, \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$$

Exemple



Intrare / Stare	a	b	c
0	{0}	{1,3}	Φ
1	Φ	{2}	Φ
2	Φ	{4}	Φ
3	Φ	{4}	Φ
4	Φ	Φ	{4}

Extensia lui δ la cuvinte

- Fie S mulţime de stări. Notăm $\delta(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$.
- Extensia lui δ la cuvinte $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$
  1. $\hat{\delta}(q, \epsilon) = \{q\}, \forall q \in Q$;
  2. $\hat{\delta}(q, ua) = \delta(\hat{\delta}(q, u), a)$, $\forall q \in Q, \forall u \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma$.

Extensia lui δ la cuvinte

- Fie S mulţime de stări. Notăm $\delta(S,a) = \bigcup_{q\in S} \delta(q,a)$.
- Extensia lui δ la cuvinte $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$
  1. $\hat{\delta}(q,\epsilon) = \{q\}, \forall q \in Q$;
  2. $\hat{\delta}(q,ua) = \delta(\hat{\delta}(q,u),a)$, $\forall q \in Q, \forall u \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma$.

- **Observaţii:**
  - $\hat{\delta}(q,a) = \delta(q,a)$, $\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma$
  - $\hat{\delta}(q,uv) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q,u),v)$, $\forall q \in Q, \forall u,v \in \Sigma^*$.

Limbajul acceptat

Definiţie 4

Limbajul acceptat (recunoscut) de automatul finit nedeterminist $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ este mulţimea :

$$L(A) = \{w | w \in \Sigma^*, \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

- Un cuvânt w este recunoscut de un automat A dacă, după citirea în întregime a cuvântului w, automatul (pornind din starea iniţială q_0) poate să ajungă într-o stare finală.

Determinism = Nedeterminism

Teorema 1

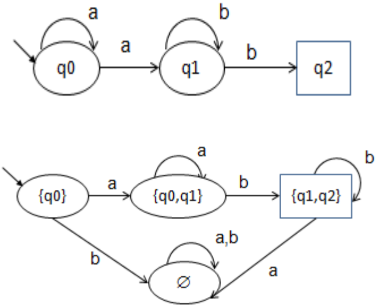
Pentru orice automat nedeterminist A, există unul determinist A′ echivalent.

Dacă $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ atunci $A' = (2^Q, \Sigma, \delta', Q_0, F')$ unde:

- $Q_0 = \{q_0\}$
- $F' = \{S | S \subseteq Q, S \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(S, a) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a)$

- Pentru aplicaţii se construiesc doar stările accesibile din starea iniţială

Exemplu



Determinism = Nedeterminism

Dacă $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ atunci $A' = (2^Q, \Sigma, \delta', Q_0, F')$ unde:

- $Q_0 = \{q_0\}$
- $F' = \{S | S \subseteq Q, S \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(S, a) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a)$

Au loc:

Determinism = Nedeterminism

Dacă $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ atunci $A' = (2^Q, \Sigma, \delta', Q_0, F')$ unde:

- $Q_0 = \{q_0\}$
- $F' = \{S | S \subseteq Q, S \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(S, a) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a)$

Au loc:

- $\delta'(S, w) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, w), \forall w \in \Sigma^*$

Determinism = Nedeterminism

Dacă $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ atunci $A' = (2^Q, \Sigma, \delta', Q_0, F')$ unde:

- $Q_0 = \{q_0\}$
- $F' = \{S | S \subseteq Q, S \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(S, a) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a)$

Au loc:

- $\delta'(S, w) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, w), \forall w \in \Sigma^*$
- $\delta'(Q_0, w) = \delta'(\{q_0\}, w) = \bigcup_{s \in \{q_0\}} \delta(s, w) = \delta(q0, w)$

Determinism = Nedeterminism

Dacă $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ atunci $A' = (2^Q, \Sigma, \delta', Q_0, F')$ unde:

- $Q_0 = \{q_0\}$
- $F' = \{S | S \subseteq Q, S \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(S, a) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a)$

Au loc:

- $\delta'(S, w) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, w), \forall w \in \Sigma^*$
- $\delta'(Q_0, w) = \delta'(\{q_0\}, w) = \bigcup_{s \in \{q_0\}} \delta(s, w) = \delta(q0, w)$
- $w \in L(A') \Leftrightarrow$
  $\delta'(Q_0, w) \in F' \Leftrightarrow \delta'(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow \delta(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$
  $\Leftrightarrow w \in L(A)$