SEMINAR 11

Exerciţii recomandate: 11.1 a),c),d),h), 11.2 a),c),d)
Rezerve: 11.3 b),e),g), 11.2 b),e),f), 11.3, 11.4

S11.1 Calculaţi:

a) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3+2x^2-x-2}dx$;

b) $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$;

c) $\displaystyle\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt[5]{\sin x-\cos x}}dx$;

d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$;

e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{3-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}dx$;

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1+x-x^2}}$;

g) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \min\left\{x\left(x^2-1\right), x+1\right\}dx$;

h) $\displaystyle\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}$.

S11.2 Stabiliţi natura următoarelor integrale improprii:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x}dx$;

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi\sin x)^{\alpha}\cdot(\cos x)^{\beta}\,dx,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{|x^2+2x-1|}}$;

d) $\displaystyle\int_{-2}^{\infty} \frac{e^{1/x}}{(x+1)^2}dx$;

e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^p\sqrt{1+\sqrt{x}}\ln x}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}dx,\ p\in\mathbb{R}$;

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+e^{-2x}+\sqrt{5}}dx$.

S11.3 Arătaţi că dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă astfel încât

$$\int_0^1 f^2(x)dx \le 3\left(\int_0^1 F(x)dx\right)^2,$$

unde F este o primitivă a lui f, pentru care $F(1)=0$, atunci f este liniară.

S11.4 Determinaţi $\alpha\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită de

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\sin x}}{(1+x)^{1/x}-e}, & x\neq 0\\ \alpha, & x=0\end{cases},$$

admite primitive.

S12.5 Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^4+x^3+3x^2+x+1},\ x\in\mathbb{R}.$$

Găsiţi o primitivă a funcţiei $f|_{\mathbb{R}_+^*}$, prin substituţia $t=x+\dfrac{1}{x}$. Determinaţi atunci o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$.

S12.6 Arătaţi că

$$\int_0^a e^{x^2}dx\cdot\int_0^a e^{-x^2}dx \ge a^2,\ \forall a\in\mathbb{R}_+.$$

S12.7 Calculaţi:

$$\int_0^{1/2} x\ln\frac{1+x}{1-x}dx+\int_0^1\frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}dx-\int_2^3\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,dx.$$

S12.8 Studiaţi convergenţa următoarelor integrale improprii

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^{\alpha}\sqrt{|3x^2-2x-1|}} \text{ şi } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x^4}dx, \text{ cu } \alpha \in \mathbb{R}.$$

S12.9 Date fiind funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) := \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $g(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$, arătaţi că $f(x)+g(x) = \frac{\pi}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Calculaţi apoi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ şi valoarea integralei $\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt$.

S12.10 Arătaţi că:

i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin(\gamma x)dx = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\gamma} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\gamma},\ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R},\ \gamma \neq 0;$

ii) $\displaystyle\Gamma(p) = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{p-1} dt,\ \forall p > 0;$

iii) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t^p}dt = \Gamma\left(1+\tfrac{1}{p}\right),\ \forall p > 0.$

Bibliografie recomandată

[1] G. Bucur, E. Câmpu, S. Găină, *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1966.
[2] C. Ciobotaru, R. Miculescu, A. Roşioru, ş.a., *Probleme de calcul integral,* Editura Gil, Zalău, 2005.
[3] A. Fulga, I. Radomir, *Analiză matematică. Culegere de probleme*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.
[4] M. Hidegkuti, *Lecture Notes and Worksheets on Improper Integrals,* City Colleges of Chicago, 2015.
[5] John K. Hunter, *An Introduction to Real Analysis,* Univ. of California Publ., 2013.
[6] M. Postolache (coord.), D. Cioroboiu, A. Pitea, *Calcul integral.Exerciţii şi probleme,* Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2010.