Logică pentru informatică - Săptămâna 13
Forme normale ale formulelor de ordinul I - Partea a II-a

January 6, 2020

În cursul precedent am studiat forma normală Prenex pentru formulele din logica de ordinul I. În acest curs vom vedea alte forme normale pentru formulele din logica de ordinul I şi anume forma normală conjunctivă, forma normală Skolem precum şi forma normală Skolem clauzală.

În sfârșit, vom vedea cum aplicăm rezoluția de bază pentru a verifica dacă o formulă din `LP1` este satisfiabilă.

1 Formule închise

Definiția 1.1. *O formulă* $\varphi \in$ `LP1` *este* închisă *dacă* $free(\varphi) = \emptyset$.

Cu alte cuvinte, dacă o formulă nu are variabile libere, aceasta se numește închisă. Formulele închise se mai numesc și *propoziții* (engl. sentences).

Definiția 1.2. *O formulă care nu este închisă se numește* deschisă.

Exemplul 1.1. *Formula* $\forall x.P(x,x) \wedge \exists y.P(y,x)$ *este o formulă inchisă deoarece* $free(\forall x.P(x,x) \wedge \exists y.P(y,x)) = \emptyset$.

Formula $\forall z.\exists y.(\neg(P(z,z) \wedge \neg P(z,y)) \wedge P(x,x))$ *nu este închisă (este deschisă), deoarece* $free(\forall z.\exists y.(\neg(P(z,z) \wedge \neg P(z,y)) \wedge P(x,x))) = \{x\}$.

Definiția 1.3. *Fie* $\varphi \in$ `LP1` *o formulă și* $free(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *mulțimea variabilelor libere ale acesteia.*

Formula

$$\exists x_1.\exists x_2.\ldots.\exists x_n.\varphi$$

se numește închiderea existențială a formulei φ.

Observația 1.1. *Închiderea existențială a unei formule este o formulă închisă.*

Exemplul 1.2. *Închiderea existențială a formulei* $\forall z.\exists y.(\neg(P(z,z) \wedge \neg P(z,y)) \wedge P(x,x))$ *este* $\exists x.\forall z.\exists y.(\neg(P(z,z) \wedge \neg P(z,y)) \wedge P(x,x))$.

Definiția 1.4. *Două formule* $\varphi_1 \in$ `LP1` *și* $\varphi_2 \in$ `LP1` *sunt* echisatisfiabile*, dacă:*

1. *sau atât* φ_1 *cât și* φ_2 *sunt satisfiabile;*

2. *sau nici* φ_1 *și nici* φ_2 *nu sunt satisfiabile.*

Cu alte cuvinte, singurele cazuri când două formule nu sunt echisatisfiabile sunt când una dintre formule este satisfiabilă, iar cealaltă nu este satisfiabilă.

Teorema 1.1. *Orice formulă este echisatisfiabilă cu închiderea ei existențială.*

Definiția 1.5. *Fie* $\varphi \in$ `LP1` *o formulă și* $free(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *mulțimea variabilelor libere ale acesteia.*

Formula

$$\forall x_1.\forall x_2.\ldots.\forall x_n.\varphi$$

se numește închiderea universală *a formulei* φ.

Observația 1.2. *Închiderea universală a unei formule este o formulă închisă.*

Exemplul 1.3. *Închiderea universală a formulei* $\forall z.\exists y.(\neg(P(z,z) \wedge \neg P(z,y)) \wedge P(x,x))$ *este* $\forall x.\forall z.\exists y.(\neg(P(z,z) \wedge \neg P(z,y)) \wedge P(x,x))$.

Teorema 1.2. *O formulă este validă dacă și numai dacă închiderea ei universală este validă.*

2 Forma normală Skolem

Definiția 2.1 (FNS)**.** *O formulă* φ este în formă normală Skolem *(prescurtat, FNS) dacă*

$$\varphi = \forall x_1.\ldots.\forall x_n.\varphi',$$

unde:

1. φ' *nu conține cuantificatori și*

2. $free(\varphi') \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Cu alte cuvinte, o formulă este in formă normală Skolem dacă conţine doar cuantificatori universali aflaţi la începutul formulei, iar toate apariţiile variabilelor din formulă sunt apariţii legate (avem cuantificatori pentru toate variabilele ce apar în formula).

Observația 2.1. *O formulă aflată în FNS este obligatoriu închisă, deoarece toate variabilele libere ale formulei* φ' *sunt cuantificate universal în* φ *(datorită condiției* 2*), și deci nu mai pot exista variabile libere în* φ.

Exemplul 2.1. *În continuare, vom lucra peste signatura* $\Sigma = (\{P, Q, R\}, \{f, i, e\})$, *unde* P, Q, R *sunt simboluri predicative de aritate* $2, 1$ *și respectiv* 3, f *şi* i *sunt simboluri funcționale de aritate* 2 *și respectiv* 1, *iar* e *este simbol functional de aritate* 0 *(constantă).*

Exemple de formule în FNS:

$$\forall x.P(x,i(e)) \qquad \forall x.\forall y.\Big(P(f(x,e),y) \wedge \neg(R(x,i(f(y,y)),e) \vee Q(y))\Big)$$

Exemple de formule care nu sunt în FNS:

$$\exists x.P(x,x) \qquad \forall x.\Big(Q(e) \wedge \neg(Q(x) \vee Q(y))\Big) \qquad Q(e) \wedge \forall x.Q(x)$$

În cazul formulelor care nu sunt în FNS, motivele pentru care acestea nu sunt în FNS sunt urmatoarele: prima formulă conține cuantificator existențial; în cea de-a doua formulă nu avem cuantificator pentru variabila y; iar în cea de-a treia formulă, cuantificatorul $\forall x$ nu se află la începutul formulei.

Teorema 2.1 (Teorema de aducere în FNS)**.** *Pentru orice formulă $\varphi \in$ `LP1`, există o formulă $\varphi' \in$ `LP1` astfel încât:*

1. *φ' este în formă normală Skolem;*
2. *φ și φ' sunt echisatisfiabile.*

Schiță de demonstrație.

1. Calculăm o formulă φ_1, aflată în FNP și echivalentă cu formula φ (folosind Teorema de aducere în FNP din cursul precedent);
2. Calculăm o formulă φ_2, închiderea existențială a lui φ_1 (φ_2 va fi echisatisfabilă cu φ_1 și deci cu φ);
3. Aplicăm în mod repetat lema de Skolemizare pe formula φ_2, lemă prezentată mai jos.

Rezultatul va fi o formulă aflată în FNS, echisatisfabilă cu formula de la care am plecat.

□

Lema 2.1 (Skolem)**.** *Fie $\varphi = \forall x_1.\forall x_2.\ldots.\forall x_k.\exists x.\varphi'$, unde $k \geq 0$, $\varphi' \in$ `LP1` (φ' poate conține alți cuantificatori). Cu alte cuvinte, există k cuantificatori universali înainte de primul cunatificator existențial.*

Fie $f \in \mathcal{F}_k$ un simbol funcțional de aritate k care nu apare în φ (un simbol funcțional proaspăt – engl. fresh).

Avem că φ este echisatisfiabilă cu

$$\forall x_1.\ldots\forall x_k.(\sigma^\flat(\varphi')),$$

unde $\sigma = \{x \mapsto f(x_1,\ldots,x_k)\}$.

Schiță de demonstrație. Considerând că formula φ este peste signatura $\Sigma = (\mathcal{P},\mathcal{F})$, observăm că formula nou obținută este o formulă peste signatura $\Sigma' = (\mathcal{P},\mathcal{F}\cup\{f\})$ ce conține, pe lângă simbolurile predicative şi cele funcționale din signatura Σ, şi simbolul funcțional f de aritate k.

Implicația directă:

Presupunem că există o Σ-structură S și o atribuire α astfel încât $S, \alpha \models \varphi$.

Găsim o Σ'-structură S' și o atribuire α' astfel încât $S', \alpha' \models \forall x_1.\forall x_2.\ldots\forall x_k.(\sigma^\flat(\varphi'))$.

Atenție! Structura S' este peste signatura Σ' care este mai bogată decât signatura structurii S (apare simbolul funcțional f de aritate k, care este nou). În schimb, atribuirea α' poate coincide cu atribuirea α.

Implicația inversă:

Presupunem că există o Σ'-structură S' și o atribuire α' astfel încât $S', \alpha' \models \forall x_1.\forall x_2.\ldots\forall x_k.(\sigma^\flat(\varphi'))$.

Găsim o Σ-structură S și atribuirea σ astfel încât $S, \alpha \models \varphi$.. Din nou, atribuirea σ poate fi identică cu σ'.

□

Exercițiul 2.1. *Completați demonstrația de mai sus.*

Exemplul 2.2. *Calculăm o formă normală Skolem pentru formula*

$$\varphi = \forall x.\exists y.\forall z.\exists z'.(P(x, y) \leftrightarrow P(z, z')).$$

Prin Lema 2.1, avem că φ este echisatisfiabilă cu

$$\varphi_1 = \forall x.\forall z.\exists z'.(P(x, g(x)) \leftrightarrow P(z, z')),$$

unde g este un simbol funcțional nou, de aritate 1.

Aplicând din nou Lema 2.1, avem că formula φ_1 este echisatisfiabilă cu

$$\varphi_2 = \forall x.\forall z.(P(x, g(x)) \leftrightarrow P(z, h(x, z))),$$

unde h este un simbol funcțional nou, de aritate 2.

În concluzie, φ_2 este în FNS și est echisatisfiabilă cu φ, deci este o formă normală Skolem a formulei φ.

Observația 2.2. *Signatura formei normale Skolem a unei formule este mai bogată decât signature formulei de la care am plecat, din cauza adăugării simbolurilor Skolem.*

3 Forma normală conjunctivă

Definiția 3.1 (Literal)**.** *O formulă $\varphi \in$ `LP1` se numește* literal *dacă există un simbol predicativ $P \in \mathcal{P}_n$ de aritate $n \geq 0$ și n termeni $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ astfel încât*

$$\varphi = P(t_1, \ldots, t_n) \text{ sau } \varphi = \neg P(t_1, \ldots, t_n).$$

Cu alte cuvinte, un literal este o formulă atomică, sau negația unei formule atomice.

Exemplul 3.1. *Exemple de literali:*

$$P(x,x) \qquad \neg P(x,i(y)) \qquad \neg R(a,b,c) \qquad \neg P(x,x) \qquad Q(i(x))$$

$$R(a,f(x),b)$$

Exemple de formule care nu sunt literali:

$$P(x,y) \wedge P(x,y) \qquad \neg\neg P(x,x) \qquad \forall x.P(x,x)$$

Definiția 3.2 (Clauză)**.** *O formulă $\varphi \in$ `LP1` se numește* clauză *dacă există n literali $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in$ `LP1` astfel încât*

$$\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n.$$

Exemplul 3.2.

$$P(x,x) \vee R(x,e,y) \vee \neg P(x,f(e,y)) \qquad P(x,x) \qquad \Box \qquad P(x,x)$$

$$P(x,x) \vee R(x,f(e,e),y) \vee \neg P(x,f(e,y)) \vee \neg P(e,i(x))$$

Observația 3.1. *Un caz particular este reprezentat de clauza vidă, notată $\Box$, care este disjuncția a 0 literali. Clauza vidă este o formulă nesatisfiabilă.*

Un alt caz particular este reprezentat de literali. Orice literal este și clauză, fiind considerat disjuncția unui singur literal.

Definiția 3.3 (FNC)**.** *O formulă φ este* în formă normală clauzală *(sau, echivalent,* în formă normală conjunctivă*) dacă există $n \geq 1$ clauze $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ astfel încât*

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n.$$

Exemplul 3.3. *Următoarele formule sunt în FNC:*

$$(P(x,x) \vee Q(x)) \wedge (\neg P(x,y) \vee R(x,y,e))$$

$$(P(x,y) \vee Q(i(x)) \vee \neg Q(e)) \wedge (\neg P(x,x)) \wedge (\neg Q(f(z,z)) \vee R(x,z))$$

4 Forma normală Skolem clauzală

Definiția 4.1. *O formulă φ* este în formă normală Skolem clauzală *(prescurtat FNSC) dacă*

1. *φ este în formă normală Skolem și*
2. *φ' este în formă normală clauzală, unde: $\varphi = \forall x_1.\ldots.\forall x_n.\varphi'$, iar φ' nu are cuantificatori (cu alte cuvinte, φ' este subformula obținută din φ prin ștergerea cuantificatorilor).*

Exemplul 4.1. *Exemple de formule în FNSC:*

$$\forall x.\forall y.\Big((P(x,x) \vee \neg Q(i(x)) \wedge (P(e,y) \vee \neg Q(e))\Big)$$

$$\forall x.\forall y.\Big(Q(e) \wedge (\neg R(x,e,y) \vee Q(i(y)))\Big)$$

$$\forall x.\forall y.\forall z.(P(x,y) \wedge (Q(x) \vee R(x,y,z)) \wedge \neg Q(x)).$$

Exemple de formule care nu sunt în FNSC:

$$\exists x.Q(x) \qquad \forall x.\Big(Q(e) \wedge (\neg R(x,y,z) \vee Q(y))\Big)$$

$$\forall x.\forall y.\Big(Q(e) \wedge \neg(Q(x) \vee Q(y))\Big)$$

Teorema 4.1. *Pentru orice formulă* $\varphi \in$ `LP1` *aflată în FNS există o formulă* $\varphi' \in$ `LP1` *astfel încât:*

1. φ' *este în FNSC și*
2. $\varphi \equiv \varphi'$.

Schiță de demonstrație. Se aplică de la stânga la dreapta următoarele echivalențe:

1. $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \equiv (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1)$;
2. $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \equiv \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$;
3. $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$;
4. $\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$;
5. $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \equiv \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2$;
6. $\varphi_1 \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_3)$.

De asemenea, se permite folosirea liberă a asociativității și comutativității conectorilor $\vee$ și $\wedge$.

Primele două echivalențe elimină orice folosire a cuantificatorilor $\leftrightarrow$ și $\rightarrow$.

Următoarele trei echivalențe se asigură că negațiile pot fi aplicate doar formulelor atomice.

Ultima echivalență se asigură că $\vee$-ul nu apare peste $\wedge$.

În final, vom avea o formulă în care spre rădăcină (după cuantificatorii universali) avem $\wedge$, urmat de un strat de $\vee$, urmat de $\neg$, urmat de formule atomice, ceea ce înseamnă că formula rezultată este în FNSC.

$\square$

Observația 4.1. *Un rezultat al teoremelor 2.1 și 4.1 este faptul că pentru orice formulă* $\varphi \in$ `LP1` *există o formulă* $\varphi' \in$ `LP1` *astfel încât* φ' *este în* $FNSC$ *iar formulele* φ *și* φ' *sunt echisatisfiabile.*

Pentru a găsi această formulă, trebuie să urmăm pașii următori:

1. *Calculăm formula* φ_1 *în FNP echivalentă cu* φ*;*
2. *Calculăm* φ_2 *închiderea existențială pentru* φ_1*;*
3. *Aplicăm lema de Skolemizare pentru a elimina cuantificatorii existențiali și obținem formula* φ_3*;*
4. *Aplicăm echivalențele din teorema 4.1 pentru a pune formula* φ_3 *în FNSC.*

Exemplul 4.2. *Calculam o FNSC pentru formula* $\varphi = (\forall x.P(x,z)) \wedge (\exists y.\neg P(y,z))$.

$$\begin{aligned} \varphi = &\quad (\forall x.P(x,z)) \wedge (\exists y.\neg P(y,z)) \\ \equiv &\quad \forall x.(P(x,z) \wedge (\exists y.\neg P(y,z))) \\ \equiv &\quad \forall x.\exists y.(P(x,z) \wedge \neg P(y,z)) \end{aligned}$$

Așadar, o formă normală prenex a formulei φ *este*

$$\varphi_1 = \forall x.\exists y.(P(x,z) \wedge \neg P(y,z)).$$

Continuam prin calcularea inchiderii existentiale pentru φ_1*. Aceasta este*

$$\varphi_2 = \exists z.\forall x.\exists y.(P(x,z) \wedge \neg P(y,z)).$$

Conform Teoremei 1.1, φ_2 *este echisatisfiabil cu* φ_1*.*

In continuare aplicam lema de scolemizare pentru eliminarea cuantificatorilor existentiali din φ_2*. Astfel,* φ_2 *este echisatisfiabil cu*

$$\varphi_3 = \forall x.\exists y.(P(x,c) \wedge \neg P(y,c))$$

unde c *este un simbol constant nou. Aplicand din nou lema de skolemizare, obtinem ca* φ_3 *este equisatisfiabil cu*

$$\varphi_4 = \forall x.(P(x,c) \wedge \neg P(g(x),c))$$

unde g *este un simbol functional nou de aritate* 1*. Formula* φ_4 *obtinuta este o FNSC pentru* φ*.*

5 Rezoluția de bază

Pentru a testa satisfiabilitatea unei formule aflate în FNSC, putem folosi sistemul deductiv descris în secțiunea aceasta.

Definiția 5.1. *Un termen* $t \in \mathcal{T}$ *se numește* termen de bază *dacă* $vars(t) = \emptyset$.

În engleză, termen de bază = ground term.

Definiția 5.2. *O substituție* $\sigma = \{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$ *se numește* substituție de bază *dacă* $t_1, \ldots, t_n$ *sunt termeni de bază.*

În engleză, substituție de bază = ground substitution.

Definiția 5.3. *Rezoluția de bază este un sistem deductiv*[1] *pentru clauze, cu următoarea regulă de inferență, numită rezoluție de bază:*

$$\frac{C_1 \vee P(t_1, \ldots, t_n) \qquad C_2 \vee \neg P(t'_1, \ldots, t'_n)}{\sigma_1^\flat(C_1) \vee \sigma_2^\flat(C_2)} \quad \begin{array}{l} \sigma_1 \text{ E SUBST. DE BAZĂ} \\ \sigma_2 \text{ E SUBST. DE BAZĂ} \\ \sigma_1^\sharp(t_i) = \sigma_2^\sharp(t'_i) \text{ PENTRU ORICE } 1 \leq i \leq n \end{array}$$

Teorema 5.1 (Teorema rezoluției de bază)**.** *O formulă* φ *aflată în FNSC este nesatisfiabilă ddacă se poate obține* $\Box$ *prin rezoluție de bază pornind de la clauzele din* φ.

Exemplul 5.1. *Continuam exemplul 4.2 pentru a arata ca formula* $\varphi = (\forall x.P(x, z)) \wedge (\exists y.\neg P(y, z))$ *nu este satisfiabila. In Exemplul* 4.2 *am calculat o FNSC* $\varphi_4 = \forall x.(P(x, c) \wedge \neg P(g(x), c))$ *pentru formula* φ. *Avem ca* φ_4 *este equisatisfiabila cu* φ.

Vom arata folosind rezolutia de baza ca formula φ_4 *este nesatisfiabila.*

1. $P(x, c)$
2. $\neg P(g(x), c)$
3. $\Box$ *(1, 2,* $\sigma_1 = \{x \mapsto g(e)\}$, $\sigma_2 = \{x \mapsto e\}$, $\sigma_1^\flat(P(x, c)) = \sigma_2^\flat(P(g(x), c))$*).*

Deoarece am ajuns la clauza vida, conform teoremei 5.1*, avem ca* φ_4 *este nesatisfiabila. Dar* φ *este equisatisfiabila cu* φ_4. *Asadar si* φ *este nesatisfiabila.*

6 Un exemplu

Ne interesează să stabilim validitatea formulei

$$\varphi = \Big(\forall x.\big(Q(x) \leftrightarrow \neg Q(i(x))\big)\Big) \rightarrow \Big(\forall x.\big(Q(x) \rightarrow Q(i(i(x)))\big)\Big).$$

Este ușor de văzut că o formulă este validă dacă și numai dacă negația ei este nesatisfiabilă. Astfel încât, pentru a stabili că φ este validă, este suficient să arătăm că

$$\neg\varphi = \neg\bigg(\Big(\forall x.\big(Q(x) \leftrightarrow \neg Q(i(x))\big)\Big) \rightarrow \Big(\forall x.\big(Q(x) \rightarrow Q(i(i(x)))\big)\Big)\bigg)$$

este nesatisfiabilă.

Vom calcula o FNSC clauzală a formulei $\neg\varphi$, FNSC despre care știm că este echisatisfiabilă cu formula $\neg\varphi$. Primul pas este să găsim o FNP:

[1] De fapt, sistemul deductiv mai conține o regulă, numită factorizare, pe care o vom vedea mai târziu

$$
\begin{aligned}
\neg\varphi = \quad & \neg\Big(\big(\forall x.\big(Q(x) \leftrightarrow \neg Q(i(x))\big)\big) \rightarrow \big(\forall x.\big(Q(x) \rightarrow Q(i(i(x)))\big)\big)\Big)\\
\equiv \quad & \neg\Big(\neg\big(\forall x.\big(Q(x) \leftrightarrow \neg Q(i(x))\big)\big) \vee \big(\forall x.\big(Q(x) \rightarrow Q(i(i(x)))\big)\big)\Big)\\
\equiv \quad & \big(\neg\neg\forall x.\big(Q(x) \leftrightarrow \neg Q(i(x))\big)\big) \wedge \big(\neg\forall x.\big(Q(x) \rightarrow Q(i(i(x)))\big)\big)\\
\equiv \quad & \big(\forall x.\big(Q(x) \leftrightarrow \neg Q(i(x))\big)\big) \wedge \big(\exists x.\neg\big(Q(x) \rightarrow Q(i(i(x)))\big)\big)\\
\equiv \quad & \forall x.\Big(\big(Q(x) \leftrightarrow \neg Q(i(x))\big) \wedge \exists x.\neg\big(Q(x) \rightarrow Q(i(i(x)))\big)\Big)\\
\equiv \quad & \forall x.\Big(\big(Q(x) \leftrightarrow \neg Q(i(x))\big) \wedge \exists x'.\neg\big(Q(x') \rightarrow Q(i(i(x')))\big)\Big)\\
\equiv \quad & \forall x.\exists x'.\Big(\big(Q(x) \leftrightarrow \neg Q(i(x))\big) \wedge \neg\big(Q(x') \rightarrow Q(i(i(x')))\big)\Big)\\
\equiv \quad & \forall x.\exists x'.\Big(\big(Q(x) \rightarrow \neg Q(i(x))\big) \wedge \big(\neg Q(i(x)) \rightarrow Q(x)\big) \wedge \neg\big(Q(x') \rightarrow Q(i(i(x')))\big)\Big)\\
\equiv \quad & \forall x.\exists x'.\Big(\big(\neg Q(x) \vee \neg Q(i(x))\big) \wedge \big(\neg\neg Q(i(x)) \vee Q(x)\big) \wedge \neg\big(\neg Q(x') \vee Q(i(i(x')))\big)\Big)
\end{aligned}
$$

Așadar, o formă normală prenex a formulei $\neg\varphi$ este

$$\varphi_1 = \forall x.\exists x'.\Big(\big(\neg Q(x)\vee\neg Q(i(x))\big)\wedge\big(\neg\neg Q(i(x))\vee Q(x)\big)\wedge\neg\big(\neg Q(x')\vee Q(i(i(x')))\big)\Big).$$

Continuăm prin găsirea unei FNS a formulei φ_1, prin aplicarea lemei de skolemizare, și folosind un simbol Skolem proaspăt g, de aritate 1:

$$\varphi_1 = \forall x.\exists x'.\Big(\big(\neg Q(x)\vee\neg Q(i(x))\big)\wedge\big(\neg\neg Q(i(x))\vee Q(x)\big)\wedge\neg\big(\neg Q(x')\vee Q(i(i(x')))\big)\Big)$$

echisatisfiabilă cu

$$\forall x.\Big(\big(\neg Q(x) \vee \neg Q(i(x))\big) \wedge \big(\neg\neg Q(i(x)) \vee Q(x)\big) \wedge \neg\big(\neg Q(g(x)) \vee Q(i(i(g(x))))\big)\Big)$$

Așadar, o FNS a formulei $\neg\varphi$ este formula $\varphi_2 = \forall x.\Big(\big(\neg Q(x) \vee \neg Q(i(x))\big) \wedge \big(\neg\neg Q(i(x)) \vee Q(x)\big) \wedge \neg\big(\neg Q(g(x)) \vee Q(i(i(g(x))))\big)\Big)$. Continuăm, pentru a găsi o FNSC a formulei φ_2:

$$
\begin{aligned}
\varphi_2 = \quad & \forall x.\Big(\big(\neg Q(x) \vee \neg Q(i(x))\big) \wedge \big(\neg\neg Q(i(x)) \vee Q(x)\big) \wedge \neg\big(\neg Q(g(x)) \vee Q(i(i(g(x))))\big)\Big)\\
\equiv \quad & \forall x.\Big(\big(\neg Q(x) \vee \neg Q(i(x))\big) \wedge \big(\neg\neg Q(i(x)) \vee Q(x)\big) \wedge \big(\neg\neg Q(g(x)) \wedge \neg Q(i(i(g(x))))\big)\Big).\\
\equiv \quad & \forall x.\Big(\big(\neg Q(x) \vee \neg Q(i(x))\big) \wedge \big(Q(i(x)) \vee Q(x)\big) \wedge \big(Q(g(x)) \wedge \neg Q(i(i(g(x))))\big)\Big).\\
\equiv \quad & \forall x.\Big(\big(\neg Q(x) \vee \neg Q(i(x))\big) \wedge \big(Q(i(x)) \vee Q(x)\big) \wedge \big(Q(g(x))\big) \wedge \big(\neg Q(i(i(g(x))))\big)\Big).
\end{aligned}
$$

Am obtinut asadar formula

$$\varphi_3 = \forall x.\Big(\big(\neg Q(x)\vee\neg Q(i(x))\big)\wedge\big(Q(i(x))\vee Q(x)\big)\wedge\big(Q(g(x))\big)\wedge\big(\neg Q(i(i(g(x))))\big)\Big)$$

care este o FNSC pentru formula $\neg\varphi$.

Vom arăta, folosind rezoluția de bază, că formula φ_3 este nesatisfiabilă folosind rezoluția de bază:

1. $\neg Q(x) \vee \neg Q(i(x))$;
2. $Q(i(x)) \vee Q(x)$;
3. $Q(g(x))$;
4. $\neg Q(i(i(g(x))))$;
5. $\neg Q(i(g(e)))$ (3,1,$\sigma_1 = \{x \mapsto e\}$,$\sigma_2 = \{x \mapsto g(e)\}$, $\sigma_1^\flat(Q(g(x))) = \sigma_2^\flat(Q(x))$);
6. $Q(i(i(g(e))))$ (2,5,$\sigma_1 = \{x \mapsto i(g(e))\}$, $\sigma_2 = \{\}$, $\sigma_1^\flat(Q(x)) = \sigma_2^\flat(Q(i(g(e))))$);
7. $\square$ (6, 4, $\sigma_1 = \{\}$, $\sigma_2 = \{x \mapsto e\}$, $\sigma_1^\flat(Q(i(i(g(e))))) = \sigma_2^\flat(Q(i(i(g(x)))))$).

Deoarece am ajuns la clauza vidă, concluzionăm prin Teorema 5.1 că formula $\forall x.\Big(\big(\neg Q(x) \vee \neg Q(i(x))\big) \wedge \big(Q(i(x)) \vee Q(x)\big) \wedge \big(Q(g(x))\big) \wedge \big(\neg Q(i(i(g(x))))\big)\Big)$ este nesatisfiabilă.

Dar formula de mai sus este o FNSC a formulei $\neg\varphi$, deci cele două sunt echisatisfiabile. Deci $\neg\varphi$ este de asemenea nesatisfiabilă. Deci formula cu care am pornit,

$$\varphi = \Big(\forall x.\big(Q(x) \leftrightarrow \neg Q(i(x))\big)\Big) \rightarrow \Big(\forall x.\big(Q(x) \rightarrow Q(i(i(x)))\big)\Big),$$

este validă.