Barem

Examen / nr. 1 – Matematică – semian B

(2019-2020 / 20.01.2020)

Subiectul 1 .... **30 puncte**

a) Abordarea subiectului **1**

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\mathrm{e}^{x^2+y^2}x$ **3**

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\mathrm{e}^{x^2+y^2}y$ **3**

$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z$ **3**

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathrm{e}^{x^2+y^2}\left(4x^2+2\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4\mathrm{e}^{x^2+y^2}xy$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0$ **3**

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathrm{e}^{x^2+y^2}\left[4y^2+2\right]$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$ **3**

c) Rezolvarea sistemului $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$: $(x,y,z) = (0,0,0)$ **5**

d) Determinarea Hessianului în punctul critic: $H_f(0,0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **3**

$H_f(0,0,0)$ pozitiv definită **4**

Concluzie: $(0,0,0)$ punct de minim local **2**

Subiectul 2 .... **30 puncte**

a) Abordarea subiectului **1**

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = f(x,0)'|_{x=0} = 1$ **6**

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = f(0,y)'|_{y=0} = 1$ **6**

b) Calculul derivatei direcţionale $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(tu,tv)}{t} = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} \frac{(tu)^3+(tv)^3}{t[(tu)^2+(tv)^2]} = \frac{u^3+v^3}{u^2+v^2}, & (u,v) \neq (0,0); \\ 0, & (u,v) = (0,0). \end{cases}$ **12**

c) Diferenţiala Gâteaux în $(0,0)$ a lui f este funcţia $\mathrm{D}f(0,0)$, cu $\mathrm{D}f(0,0)(u,v) = \begin{cases} \frac{u^3+v^3}{u^2+v^2}, & (u,v) \neq (0,0); \\ 0, & (u,v) = (0,0). \end{cases}$ **2**

Aceasta nu este liniară, deci f nu este derivabilă Gâteaux în $(0,0)$ **3**

Subiectul 3 .... **30 puncte**

a) Abordarea subiectului **1**

$\iint_D \frac{y}{y^2-x^2}dxdy = \int_2^3 \left(\int_{2x}^{x^2} \frac{y}{y^2-x^2}dy\right)dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{2}\ln(y^2-x^2)\Big|_{y=2x}^{y=x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \left(\ln(x^4-x^2) - \ln(3x^2)\right)dx =$

$= \frac{1}{2}\int_2^3 \left(\ln(x^2-1) - \ln 3\right)dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \left(x'\ln(x^2-1)\right)dx - \frac{\ln 3}{2} = \frac{1}{2}x\ln(x^2-1)\Big|_2^3 - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{2x^2}{x^2-1}dx - \frac{\ln 3}{2} =$

$= \frac{3}{2}\ln 8 - \frac{3}{2}\ln 3 - \int_2^3 \left(\frac{1}{x^2-1}+1\right)dx = \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 - 1 - \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}\Big|_2^3 = \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 - 1 + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3 = 5\ln 2 - 2\ln 3 - 1$ **14**

b) Identificarea punctelor în care funcţia nu este definită: $x = 0$ şi $x = +\infty$ **2**

Aplicarea criteriului în α în $x = 0$: $\ell = \lim_{x\searrow 0} \frac{\sqrt{1+x}}{x^p}x^\alpha = \lim_{x\searrow 0}\sqrt{1+x}\cdot x^{\alpha-p} = \lim_{x\searrow 0} x^{\alpha-p}$ **3**

Dacă luăm $\alpha = p$, obţinem $\ell = 1 \in (0,+\infty)$, deci $\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}}{x^p}dx$ este convergentă dacă şi numai dacă $p < 1$ **3**

Aplicarea criteriului în β în $x = +\infty$: $\ell = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{x^p}x^\beta = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\cdot x^{\beta-p+\frac{1}{2}}$ **3**

Dacă luăm $\beta = p - \frac{1}{2}$, obţinem $\ell = 1 \in (0,+\infty)$, deci $\int_1^\infty \frac{\sqrt{1+x}}{x^p}dx$ este convergentă dacă şi numai dacă $p > \frac{3}{2}$ **3**

Concluzie: integrala nu este convergentă, oricare ar fi p **1**

Puncte din oficiu: .... **10 puncte**

Precizări:

1) Pentru orice soluţie corectă, chiar diferită de cea din barem, se acordă punctaj corespunzător;

2) nota finală este 1/10 din punctajul total.