Temă suplimentară

24 Decembrie 2021

Consideraţi următoarele numere:
n =numărul de litere din numele vostru (dacă aveţi mai multe prenume, adunaţi numărul de litere din fiecare)
p =numărul de litere din prenumele vostru (dacă aveţi mai multe prenume, adunaţi numărul de litere din fiecare)
m =numărul lunii în care v-aţi născut Termen de predare: 3 ianuarie 2022, ora 24:00
Rezolvarea temelor va fi trimisă pe Discord ca mesaj privat

1. Se consideră funcţia: $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dată de:
   $f(x, y, z, t) = (f_1(x, y, z, t), f_2(x, y, z, t), f_3(x, y, z, t), f_4(x, y, z, t)$
   unde $f_{1,2,3,4} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dau

$$\begin{cases} f_1(x,y,z,t) = \begin{cases} \frac{(x^n+y^n+z^n+t^n)^m}{(x^m+y^m+z^m+t^m)^n}, & (x,y,z,t) \neq (0,0,0,0), \\ 0, & (x,y,z,t) = (0,0,0,0) \end{cases} \\ f_2(x,y,z,t) = \begin{cases} \frac{(\sin(xyzt))^m(e^{xyzt}-1)}{x^n+y^n+z^n+t^n}, & (x,y,z,t) \neq (0,0,0,0), \\ 0, & (x,y,z,t) = (0,0,0,0) \end{cases} \\ f_3(x,y,z,t) = x^n + y^n + z^n + t^n + mxyzt \\ f_4(x,y,z,t) = \begin{cases} xyzt\frac{x^2+y^2-z^2-t^2}{x^2+y^2+z^2+t^2}, & (x,y,z,t) \neq (0,0,0,0) \\ 0, & (x,y,z,t) = (0,0,0,0) \end{cases} \end{cases}$$

   (a) Calculaţi limitele parţiale, direcţionale, globale ale lui f în $(0, 0, 0, 0)$.
   (b) Studiaţi limitele iterate ale lui f_4 în $(0, 0, 0, 0)$.
   (c) Calculaţi $\bigtriangledown f_1, \bigtriangledown f_2, \bigtriangledown f_3, \bigtriangledown f_4$ pentru punctele din $\mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$. Calculaţi Jacobianul lui f pentru punctele din $\mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$ (vezi curs).
   (d) Calculaţi derivatele parţiale ale lui f în $(0, 0, 0, 0)$.
   (e) Studiaţi diferenţiabilitatea Frechet a componentelor lui f în $(0, 0, 0, 0)$.
   (f) Studiaţi derivata Gateaux a lui f_1 după direcţia $(1, 1, 1, 1)$.
   (g) Calculaţi diferenţiala de ordinul 1 şi 2 a lui f_3.
   (h) Studiaţi punctele de extrem ale lui f_4.
   (i) Studiaţi punctele de extrem ale lui f_3 cu restricţia $xyzt = 1$.

2. Fie $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definită de

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = nx_1y_1+nx_2y_2+px_3y_3+px_4y_4+x_1y_2+x_1y_3+x_1y_4+x_2y_1+x_2y_3+x_2y_4+x_3y_1+x_3y_2+x_3y_4+x_4y_1+x_4y_2+x_4y_3,$$

   pentru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$.

   (a) Arătaţi că aplicaţia g este o formă biliniară simetrică pe $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$. Este g produs scalar?
   (b) Găsiţi matricea lui g în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$. Determinaţi discriminantul lui g şi $\operatorname{rang} g$.
   (c) Determinaţi $\operatorname{Ker}(g)$.
   (d) Găsiţi matricea lui g în raport cu baza $\{(1, 1, 1, 1),\ (2, 3, 4, 5),\ (4, 9, 16, 25),\ (8, 27, 64, 125)\}$.
   (e) Scrieţi forma pătratică h corespunzătoare lui g şi stabiliţi o formă normală a lui h. (Încercaţi să aplicaţi toţii algoritmii studiaţi la curs). Determinaţi signatura lui h şi deduceţi forma biliniară corespunzătoare formei normale a lui h.
   (f) Determinaţi o bază a lui $\mathbb{R}^4$ în raport cu care h are forma normală de mai sus.

(g) Caracterizaţi dintr-un punct de vedere geometric nucleul lui h.

(h) Ortonormaţi baza $\{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$ în raport cu g (dacă g e produs scalar. Altfel, în raport cu produsul scalar uzual.)

(i) Stabiliţi ce este, dintr-un punct de vedere geometric, nucleul formei pătratice neomogene: $h(x) + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 1$, unde h este forma normală determinată anterior.