# Calcul Numeric

## Cursul 7

## 2022

*Anca Ignat*

# Metode iterative pentru matrice simetrice şi pozitiv definite

Considerăm cazul sistemelor liniare cu matricea sistemului simetrică şi pozitiv definită:

$$A = A^T \text{ – matrice simetrică – } a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j = 1,2,\ldots n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = A^T \quad \Rightarrow \quad A = L + D + L^T$$

$$D = \mathrm{diag}[a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}] = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$L=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad L^T=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

**Definiţii**

Matricea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n \times n}}$ se numeşte ***pozitiv semidefinită*** (*A* ≥*0*):

$$\left(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{x}\right)_{\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}} \geq \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}.$$

Matricea *A* se numeşte ***pozitiv definită*** (***A*** > ***0***) dacă:

$$\left(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{x}\right)_{\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}} > \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}.$$

## Propoziţie

Dacă matricea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este pozitiv definită atunci matricea $\boldsymbol{A}$ este nesingulară.

Demonstraţie: Presupunem prin reducere la absurd că matricea $\boldsymbol{A}$ este pozitiv definită şi singulară. Atunci, sistemul de ecuaţii liniare $\boldsymbol{Ax=0}$ are pe lângă soluţia banală $\boldsymbol{x=0}$ şi o soluţie $\boldsymbol{x^0 \neq 0}$ . Avem:

$$x^0 \neq 0 \;\Rightarrow\; 0 < \left(Ax^0, x^0\right) = \left(0, x^0\right) = 0 \quad \textbf{contradicţie!}$$

$$A > 0 \;\Rightarrow\; a_{ii} = \left(Ae_i, e_i\right) > 0 \;\; \forall i = 1,\ldots,n$$

**Lemă**

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o matrice simetrică şi $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o matrice nesingulară astfel încât matricea $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^T - \boldsymbol{A}$ este pozitiv definită. Fie matricea $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$. Atunci raza spectrală a matricei $\boldsymbol{M}$ este strict subunitară dacă şi numai dacă matricea $\boldsymbol{A}$ este pozitiv definită:

$$\rho(\boldsymbol{M}) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A} > 0$$

**Teoremă**

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o matrice simetrică, nesingulară, cu diagonala pozitivă, $a_{ii} > 0$, $\forall\, i = 1,\ldots,n$ şi $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ vectorul termenilor liberi. Atunci metoda lui Gauss-Seidel generează şiruri convergente la soluţia $x^* = A^{-1}b, \forall\, x^{(0)}$ dacă şi numai dacă $\boldsymbol{A}$ este pozitiv definită .

Demonstraţie: Din teorema de convergenţă avem:

$$\boldsymbol{x^{(k)} \to x^*}\ ,\quad \boldsymbol{k \to \infty} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\rho(M) < 1}$$

Dacă matricea $\boldsymbol{A}$ se scrie sub forma:

$$\boldsymbol{A = L + D + L^T}$$

matricele $\boldsymbol{B}$ şi $\boldsymbol{C}$ sunt date de:

$$\boldsymbol{B = L + D} \quad , \quad \boldsymbol{C = B - A = -L^T}$$

Matricea iteraţiei $\boldsymbol{M}$ este:

$$\boldsymbol{M = B^{-1}C = B^{-1}(B - A) = I_n - B^{-1}A}$$

Încercăm să aplicăm **Lema** de mai sus. Pentru aceasta verificăm dacă matricea $P$ este pozitiv definită:

$$P = B + B^T - A = L + D + (L + D)^T - L - D - L^T = D$$

$$(Px, x)_{\mathbb{R}^n} = (Dx, x)_{\mathbb{R}^n} = ((a_{ii} x_i)_i, (x_i)_i)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2$$

$$a_{ii} > 0 \quad \forall i \Rightarrow (Px, x)_{\mathbb{R}^n} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \Rightarrow P > 0$$

Putem aplica **Lema** de unde deducem convergenţa şirului construit cu metoda Gauss-Seidel doar în cazul în care matricea $A$ este pozitiv definită:

$$x^{(k)} \to x^*, \quad k \to \infty \iff \rho(M) < 1 \iff A \text{ pozitiv definită}$$

# Metodele relaxării

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n \times n}}$ o matrice reală pătratică de dimensiune *n*, simetrică, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ şi pozitiv definită, $\boldsymbol{A} > \boldsymbol{0}$ şi $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ un vector real. Considerăm sistemul de ecuaţii liniare:

$$\boldsymbol{Ax = b}$$

Deoarece matricea *A* este pozitiv definită sistemul de mai sus are soluţie unică, $\boldsymbol{x}^{*} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. Vom considera funcţia $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}_{+}$:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \left(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^{*} - \boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}^{*} - \boldsymbol{y}\right)_{\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}} \ , \ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$$

Din faptul că matricea $\boldsymbol{A}$ este pozitiv definită avem:

$$\boldsymbol{f(y) \geq 0}, \ \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \quad \text{şi } \boldsymbol{f(y)} > 0 = \boldsymbol{f(x^*)} \ , \forall \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}^*$$

Prin urmare $\boldsymbol{x}^*$ este şi unica soluţie a problemei de minimizare:

$$\mathbf{min}\left\{ \boldsymbol{f(y)};\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \right\} = \mathbf{0} = \boldsymbol{f(x^*)}$$

Vom căuta soluţia sistemului $\boldsymbol{Ax=b}$, $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ ca fiind soluţia problemei de minimizare de mai sus folosind o metodă de tip relaxare de forma:

$$y^{(0)} \in \mathbb{R}^n - \textbf{dat}, \quad y^{(k+1)} = y^{(k)} + c_k e_l \,, \quad l = l_k \,, \quad k = 0,1,\ldots$$

$$y_j^{(k+1)} = y_j^{(k)} \,, \quad \forall \; j \neq l \,, \qquad y_l^{(k+1)} = y_l^{(k)} + c_k$$

Constanta $c_k$ se determină astfel încât $f(y^{(k+1)}) < f(y^{(k)})$ în speranţa că şirul $y^{(k)}$ astfel construit converge la $x^*$. Notăm cu

$$r^{(k)} = b - Ay^{(k)} \text{ vectorul reziduu.}$$

Avem:

$$r^{(k)} = b - Ay^{(k)} = Ax^* - Ay^{(k)} = A(x^* - y^{(k)})$$

$$f(y^{(k+1)}) = f(y^{(k)}) - 2\,c_k\, r_l^{(k)} + c_k^2 a_{ll}$$

Pentru ca $f(y^{(k+1)}) < f(y^{(k)})$ este necesar şi suficient să alegem $c_k$ astfel ca:

$$c_k^2 a_{ll} - 2\, c_k\, r_l^{(k)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a_{ll} > 0)\, c_k \in \left( 0,\, 2\frac{r_l^{(k)}}{a_{ll}} \right) \text{sau} \left( 2\frac{r_l^{(k)}}{a_{ll}},\, 0 \right)$$

$$c_k = \omega_k\, \frac{r_l^{(k)}}{a_{ll}} \quad , \quad \text{cu } \omega_k \in (0,2)$$

Metoda de relaxare obţinută este următoarea:

$$y^{(0)} \in \mathbb{R}^n - \text{dat}, \;\; y^{(k+1)} = y^{(k)} + \omega_k\, \frac{r_l^{(k)}}{a_{ll}} e_l\,, \quad k = 0,1,\ldots\;, \quad \omega_k \in (0,2)$$

Pentru a aproxima $\boldsymbol{x}^*$ se deduce o clasă de metode numite ***metodele relaxării succesive***. Aceste metode se obţin aplicând metodele de relaxare de mai sus. Vom considera:

$$\boldsymbol{\omega_k = \omega, \forall k}$$

Vom construi un şir $\left\{\boldsymbol{x}^{(k)}\right\} \subseteq \mathbb{R}^n$ astfel:

$$x^{(0)} = y^{(0)} \text{ un vector din } \mathbb{R}^n \text{ dat}$$

$$l = 1 \quad y^{(1)} = y^{(0)} + \omega \frac{r_1^{(0)}}{a_{11}} e_1$$

$$l = 2 \quad y^{(2)} = y^{(1)} + \omega \frac{r_2^{(1)}}{a_{22}} e_2$$

$$\vdots$$

$$l = n \quad y^{(n)} = y^{(n-1)} + \omega \frac{r_n^{(n-1)}}{a_{nn}} e_n$$

$$x^{(1)} = y^{(n)}$$

Trecerea de la iteraţia ***k*** la iteraţia următoare se face astfel:

$$x^{(k)} = y^{(kn)}$$

$$l = 1 \quad y^{(kn+1)} = y^{(kn)} + \omega \frac{r_1^{(kn)}}{a_{11}} e_1$$

$$l = 2 \quad y^{(kn+2)} = y^{(kn+1)} + \omega \frac{r_2^{(kn+1)}}{a_{22}} e_2$$

$$\vdots$$

$$l = n \quad y^{(kn+n)} = y^{(kn+n-1)} + \omega \frac{r_n^{(kn+n-1)}}{a_{nn}} e_n$$

$$x^{(k+1)} = y^{((k+1)n)}, \; k = 0,1,2,\ldots$$

Acum putem scrie dependenţa vectorului $x^{(k+1)}$ de $x^{(k)}$:

$$\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n,\ \omega \in (0,2) \ \textbf{date},$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1,2,\dots,n\,,$$

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)\, x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1,2,\dots,n,$$

$$k = 0,1,2,\dots$$

Metodele de mai sus poartă numele de ***metodele relaxării succesive***. Pentru $\omega = 1$ obţinem metoda Gauss-Seidel.

- $\mathbf{0 < \omega < 1}$ metodele se numesc de ***sub-relaxare*** şi pot fi folosite în cazul când metoda Gauss-Seidel diverge.

- $\mathbf{1 < \omega < 2}$ metodele se numesc de ***supra-relaxare*** şi pot fi folosite pentru accelerarea convergenţei în cazul când metoda Gauss-Seidel converge.

Rearanjând formulele de mai sus avem:

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \frac{a_{ii}}{\omega} x_i^{(k+1)} = \left(B\, x^{(k+1)}\right)_i = \frac{(1-\omega)}{\omega} a_{ii} x_i^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i =$$

$$= \left(C\, x^{(k)}\right)_i + \left(b\right)_i$$

Matricea $\boldsymbol{A}$ fiind simetrică, poate fi scrisă sub forma:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{L}^T \quad \textbf{cu} \quad \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & 0 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \mathbf{0} & \cdots & 0 & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & \\ \boldsymbol{a}_{n1} & \boldsymbol{a}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{n\,n-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D} = \textbf{diag}\left[\boldsymbol{a}_{11}, \boldsymbol{a}_{22}, \ldots, \boldsymbol{a}_{nn}\right]$$

Cu aceste notaţii, matricile ***B*** şi ***C*** de mai sus pot fi scrise astfel:

$$\boldsymbol{B = L + \frac{1}{\omega} D} \qquad , \qquad \boldsymbol{C = \frac{1-\omega}{\omega} D - L^T}$$

Vom verifică dacă metodele relaxării succesive se înscriu în clasa generală de metode iterative, adică vom verifica dacă ***A=B-C*** :

$$\boldsymbol{B - C = L + \frac{1}{\omega} D} - \boldsymbol{\frac{1-\omega}{\omega} D} + \boldsymbol{L^T = L + D + L^T = A}$$

Convergenţa şirului $\boldsymbol{x^{(k)}}$ la soluţia $\boldsymbol{x^{*}=A^{-1}b}$ ?

**Teoremă**

Fie o matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, simetrică, $A=A^T$ cu **det**$A \neq 0$, $a_{ii}>0$, $\forall i=1,\ldots,n$, $b \in \mathbb{R}^n$ un vector real şi $\omega \in (0,2)$. Atunci şirul $x^{(k)}$ construit cu o metoda de relaxare succesivă converge la soluţia $x^*$ a sistemului liniar $Ax=b$ oricare ar fi iteraţia iniţială $x^{(0)}$ dacă şi numai dacă matricea $A$ este pozitiv definită.

$$x^{(k)} \to x^*, k \to \infty, \forall\, x^{(0)} \quad \Leftrightarrow \quad (Ax, x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

Demonstraţie: Vom verifica dacă raza spectrală a matricei iteraţiei este subunitară folosind **Lema.** Avem:

$$\boldsymbol{M = B^{-1}C = B^{-1}\left(B - A\right) = I_n - B^{-1}A}$$

$$\boldsymbol{B = L + \frac{1}{\omega}D} \ \ , \ \mathbf{det}\ \boldsymbol{B = \frac{1}{\omega^n}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0} \quad \boldsymbol{(a_{ii} > 0\,,\ \forall i)}$$

Matricea $\boldsymbol{A}$ este simetrică iar matricea $\boldsymbol{B}$ este nesingulară. Pentru a fi îndeplinite ipotezele Lemei trebuie să verificăm că matricea $\boldsymbol{P}$ este pozitiv definită:

$$\boldsymbol{P = B + B^T - A = L + \frac{1}{\omega}D + L^T + \frac{1}{\omega}D - L - D - L^T = \frac{2-\omega}{\omega}D}$$

$$\left(Px,x\right)=\frac{(2-\omega)}{\omega}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2>0,\ \ x\neq 0\ \ (a_{ii}>0,\forall i)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(2-\omega)}{\omega}>0\ \ \Leftrightarrow\omega\in\left(0,2\right)$$

Toate ipotezele lemei sunt îndeplinite, prin urmare avem convergența dorită.

## Valori şi vectori proprii
## (eigenvalues, eigenvectors)

**Definiţie**

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Numărul complex $\lambda \in \mathbb{C}$ se numeşte ***valoare proprie*** a matricei ***A*** dacă există un vector $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n, \boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ astfel ca:

$$\boldsymbol{Au=\lambda u}$$

Vectorul ***u*** se numeşte ***vector propriu*** asociat valorii proprii $\boldsymbol{\lambda}$.

Pentru existenţa vectorului $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ este necesar şi suficient ca matricea $\boldsymbol{(\lambda I_n - A)}$ să fie singulară , adică $\mathbf{det}\boldsymbol{(\lambda I_n - A)=0}$.

Polinomul de grad $\boldsymbol{n}$:

$$p_A(\lambda) = \mathbf{det}(\lambda I_n - A)$$

se numeşte ***polinom caracteristic*** al matricei $\boldsymbol{A}$.

**Propoziţia 1**

Fie rădăcinile polinomului caracteristic $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ distincte, $\lambda_i \neq \lambda_j$ pentru $1 \le i < j \le n$ şi $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vectorii proprii corespunzători. Atunci $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sunt liniar independenţi. (demonstraţia se face prin inducţie)

**Propoziţia 2**

Fie valorile proprii $\lambda_i$ ale matricei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ distincte. Atunci există o matrice nesingulară $T$ astfel ca:

$$T^{-1}AT = \mathbf{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n].$$

Demonstraţie. Fie $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vectorii proprii ai matricei $A$. Considerăm matricea $T$ ale cărei coloane sunt vectorii proprii $u_i$, $\mathrm{T} = [u_1 \quad u_2 \quad \ldots \quad u_n]$. Deoarece vectorii proprii sunt liniar independenţi conform propoziţiei 1 rezultă că matricea $T$ este nesingulară. Vom avea:

$$AT = \left[Au_1 \; Au_2 \ldots Au_n\right] = \left[\lambda_1 u_1 \; \lambda_2 u_2 \ldots \lambda_n u_n\right] = T.\mathbf{diag}\left[\lambda_1 \; \lambda_2 \ldots \lambda_n\right]$$

Înmulţind la stânga cu $T^{-1}$ obţinem concluzia propoziţiei 2.

**Definiţie**

***Matrici**le* ***A*** şi ***B*** sunt ***asemenea*** (notaţie ***A~B***) dacă şi numai dacă există o matrice nesingulară ***T*** (**det** ***T*** **≠ 0**) astfel ca:

$$A = T\,B\,T^{-1}$$

**Propoziţia 3**

$$A \sim B \;\Rightarrow\; p_A(\lambda) = p_B(\lambda).$$

Demonstraţie.

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \det\left(\lambda I_n - TBT^{-1}\right) = \det\left(\lambda TT^{-1} - TBT^{-1}\right)$$

$$= \det\left(T\left(\lambda I_n - B\right)T^{-1}\right) = \det(T)\det\left(\lambda I_n - B\right)\det\left(T^{-1}\right) = p_B(\lambda)$$

Propoziţia 3 ne spune că matricele asemenea au același polinom caracteristic şi aceleași valori proprii.

## Teorema lui Gershgorin

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **şi** $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ o valoare proprie oarecare a matricei $\boldsymbol{A}$. Atunci:

$$\exists \boldsymbol{i_0} \in \{1,2,\ldots,\boldsymbol{n}\} \textbf{ astfel încât } \left|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{a_{i_0 i_0}}\right| \le \boldsymbol{r_{i_0}}\ ,\ \boldsymbol{r_{i_0}} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} \left|\boldsymbol{a_{i_0 j}}\right|.$$

(Valoarea proprie $\boldsymbol{\lambda}$ se află în cercul din planul complex de centru $\boldsymbol{a_{i_0 i_0}}$ **şi rază** $\boldsymbol{r_{i_0}}$ .)

Demonstraţie. Fie $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ o valoare proprie a matricei $\boldsymbol{A}$ şi $\boldsymbol{u \neq 0}$ un vector propriu asociat valorii proprii $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{Au = \lambda u}$. Avem:

$$\lambda u_i = a_{ii} u_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} u_j \iff (\lambda - a_{ii}) u_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} u_j,\ i = 1, \ldots, n.$$

Fie $\boldsymbol{i_0}$ astfel ca $\left|u_{i_0}\right| = \|u\|_\infty = \max\left\{\left|u_k\right|; k = 1, \ldots, n\right\} > 0\ (u \neq 0)$.

Vom avea:

$$\left|\lambda - a_{i_0 i_0}\right| = \left|\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} a_{i_0 j} \frac{u_j}{u_{i_0}}\right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \leq i_0}}^{n} \left|a_{i_0 j}\right| \frac{\left|u_j\right|}{\left|u_{i_0}\right|} \leq r_{i_0}\ ,\ \text{ţinând seama că } \frac{\left|u_j\right|}{\left|u_{i_0}\right|} \leq 1.$$

**Observaţie**. Presupunem că matricea $\boldsymbol{A}$ are $\boldsymbol{n}$ vectori proprii liniar independenţi $\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{u}^2, \ldots, \boldsymbol{u}^n$ asociaţi valorilor proprii $\boldsymbol{\lambda_1}$, $\boldsymbol{\lambda_2}$, ..., $\boldsymbol{\lambda_n}$ Fie $\boldsymbol{U} = \left[\boldsymbol{u}^1\, \boldsymbol{u}^2 \ldots \boldsymbol{u}^n\right]$ . Datorită independenţei vectorilor $\boldsymbol{u}^k$ rezultă că matricea $\boldsymbol{U}$ este nesingulară şi avem:

$$\Lambda = \operatorname{diag}\left[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right] \qquad \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \Lambda.$$

Considerăm matricea perturbată:

$$\boldsymbol{A}(\varepsilon) = \boldsymbol{A} + \varepsilon \boldsymbol{B}.$$

$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}(\varepsilon)\boldsymbol{U} = \Lambda + \varepsilon \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U} = \Lambda + \varepsilon \boldsymbol{C}.$$

$$\boldsymbol{A}(\varepsilon) \sim \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}(\varepsilon)\boldsymbol{U} \Rightarrow \text{ au aceleaşi valori proprii } \lambda_i(\varepsilon)$$

$$\left|\lambda(\varepsilon) - \lambda_i - \varepsilon c_{ii}\right| \le \varepsilon \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} \left|c_{ij}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\lambda(\varepsilon) - \lambda_i\right| = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

## Metoda puterii pentru matrice simetrice

**Propoziţie**

Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, A = A^T$. Atunci toate valorile proprii ale matricei $A$ sunt numere reale.

Demonstraţie. Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ şi $u \in \mathbb{C}^n$, $u \neq 0$, $Au = \lambda u$.

Considerăm produsul scalar:

$$(Au, u)_{\mathbb{C}^n} = \lambda (u, u)_{\mathbb{C}^n} = \lambda \|u\|_2^2 .$$

$$(Au, u)_{\mathbb{C}^n} = \left(u, A^T u\right)_{\mathbb{C}^n} = (u, Au)_{\mathbb{C}^n} = \overline{(Au, u)_{\mathbb{C}^n}} \Rightarrow (Au, u)_{\mathbb{C}^n} \in \mathbb{R}$$

$$\lambda = \frac{(Au, u)_{\mathbb{C}^n}}{\|u\|_2^2} \in \mathbb{R} .$$

**Propoziţie**

Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A = A^T$. Atunci există o bază ortonormată de vectori proprii ai matricei $A$, $\{u^1, u^2, ..., u^n\}$ :

$$\left(u^i, u^j\right)_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$$

Echivalent, putem scrie ca există vectori proprii $\{u^1, u^2, ..., u^n\}$ asociaţi valorilor proprii reale $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ atfel ca:

$$AU = U\Lambda \quad \Leftrightarrow \quad U^T AU = \Lambda$$

cu $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]$ şi $U = [u^1\, u^2\, \cdots\, u^n]$ matrice ortogonală.

**Definiţie**

Se numeşte *coeficient Rayleigh* al vectorului $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ pentru matricea ***A*** următoarea mărime scalară:

$$\boldsymbol{r(u)} = \frac{\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{u}} = \frac{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})_{\mathbb{R}^n}}{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})_{\mathbb{R}^n}} = \frac{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})_{\mathbb{R}^n}}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}$$

Se verifică uşor că dacă $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ este vector propriu al matricei ***A*** asociat valorii proprii $\boldsymbol{\lambda}$ atunci $\boldsymbol{r(u)} = \boldsymbol{\lambda}$.

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$. Matricea are valori proprii reale $\boldsymbol{\lambda_1}$, $\boldsymbol{\lambda_2}, \ldots, \boldsymbol{\lambda_n}$. Presupunem în plus că:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots |\lambda_n| \geq 0$$

Metoda puterii este un algoritm care aproximează valoarea proprie de modul maxim $\lambda_1$ şi un vector propriu asociat.

Se porneşte de la un vector nenul de normă euclidiană 1, $\boldsymbol{u}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{u}^{(0)}\|_2 = 1$ şi se construieşte următorul şir de vectori de normă euclidiană ***1***:

$$\boldsymbol{u}^{(0)},\ \boldsymbol{u}^{(1)} = \frac{1}{\|A\boldsymbol{u}^{(0)}\|_2} A\boldsymbol{u}^{(0)},\ \ \boldsymbol{u}^{(2)} = \frac{1}{\|A\boldsymbol{u}^{(1)}\|_2} A\boldsymbol{u}^{(1)}, \dots,$$

$$\boldsymbol{u}^{(k)} = \frac{1}{\|A\boldsymbol{u}^{(k-1)}\|_2} A\boldsymbol{u}^{(k-1)}, \dots$$

În anumite condiţii acest şir converge la un vector propriu asociat valorii proprii $\lambda_1$, iar coeficienţii Rayleigh corespunzători converg către $\lambda_1$.

**Teoremă**

Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A = A^T$ o matrice simetrică pentru care valorile proprii îndeplinesc condiţia:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots |\lambda_n| \geq 0.$$

Dacă $u^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\|u^{(0)}\|_2 = 1$ , $(u^{(0)}, u^1)_{\mathbb{R}^n} \neq 0$ ($u^1$ vector propriu asociat lui $\lambda_1$) atunci:

$$u^{(k)} = \frac{1}{\|A^k u^{(0)}\|_2} A^k u^{(0)} \to u^1 \text{ (vector propriu asociat lui } \lambda_1\text{)}$$

$$r(u^{(k)}) \to \lambda_1$$

Demonstraţie. Fie $\{u^1, u^2, \ldots, u^n\}$ vectori proprii asociaţi valorilor proprii $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ care formează o bază ortonormată în $\mathbb{R}^n$. Avem:

$$u^{(0)} = a_1 u^1 + a_2 u^2 + \cdots + a_n u^n \ , \ a_i \in \mathbb{R}$$

Deoarece $(u^{(0)}, u^1)_{\mathbb{R}^n} \neq 0$ rezultă că $a_1 \neq 0$. Din construcţia şirului $u^{(k)}$ deducem că există o constantă $c_k$ astfel ca:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}^{(k)} &= \boldsymbol{c}_k \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{u}^{(0)} = \\
&= \boldsymbol{c}_k \boldsymbol{A}^k (\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{u}^1 + \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{u}^2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n \boldsymbol{u}^n) = \\
&= \boldsymbol{c}_k (\boldsymbol{a}_1 \lambda_1^k \boldsymbol{u}^1 + \boldsymbol{a}_2 \lambda_2^k \boldsymbol{u}^2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n \lambda_n^k \boldsymbol{u}^n) = \\
&= \boldsymbol{c}_k \lambda_1^k \left[ \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{u}^1 + \boldsymbol{a}_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \boldsymbol{u}^2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \boldsymbol{u}^n \right]
\end{aligned}
$$

Din această ultimă relaţie, din faptul că $\boldsymbol{\lambda_1}$ este valoare proprie dominantă şi $\boldsymbol{a_1 \neq 0}$ deducem că pentru $\boldsymbol{k}$ suficient de mare vectorul $\boldsymbol{u^{(k)}}$ se aliniază după vectorul propriu $\boldsymbol{u^1}$:

$$
\boldsymbol{u}^{(k)} \approx \boldsymbol{c}_k \lambda_1^k \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{u}^1
$$

# Metoda puterii

$$u^{(0)} \in \mathbb{R}^n \;,\; \| u^{(0)} \|_2 = 1;$$

$$k = 0;$$

*do*

- $k++;$
- $w = Au^{(k-1)};$
- $u^{(k)} = \dfrac{1}{\| w \|_2} w \;;$
- $\lambda_k = r(u^{(k)}) = \left( Au^{(k)}, u^{(k)} \right)_{\mathbb{R}^n} ;$

$$while\,(\| Au^{(k)} - \lambda_k u^{(k)} \| > \varepsilon \text{ şi } k \le k_{\max});$$

## Metoda iteraţiei inverse

Considerăm o matrice simetrică $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n \times n}}, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ şi $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}$ un număr real care nu este valoare proprie a matricei ***A***. Vom folosi metoda puterii pentru a aproxima valoarea proprie a matricei ***A*** care este cea mai apropiată de $\boldsymbol{\mu}$ şi un vector propriu asociat.

$\boldsymbol{\mu} \neq$ valoare proprie $\rightarrow$ $\mathbf{det}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\mu I_n}) \neq \mathbf{0}$ $\rightarrow$ $\exists\, (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\mu I_n})^{-1}$

Fie $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ valorile proprii reale ale matricei ***A***.

Valorile proprii ale matricei $\boldsymbol{(A-\mu I_n)^{-1}}$ sunt:

$$\left\{\frac{\mathbf{1}}{(\lambda_1-\mu)},\frac{\mathbf{1}}{(\lambda_2-\mu)},\ldots,\frac{\mathbf{1}}{(\lambda_n-\mu)}\right\}$$

Matricele $\boldsymbol{A}$ şi $\boldsymbol{(A-\mu I_n)^{-1}}$ au aceiași vectori proprii. Să presupunem că $\boldsymbol{\lambda_I}$ este valoarea proprie cea mai apropiată de $\boldsymbol{\mu}$ (şi singura). Atunci:

$$\frac{\mathbf{1}}{|\lambda_I-\mu|} > \frac{\mathbf{1}}{|\lambda_j-\mu|} \quad \forall\, j \neq I$$

Această relaţie sugerează ideea aplicării metodei puterii matricei $\boldsymbol{(A - \mu I_n)^{-1}}$ pentru a aproxima valoarea proprie $\boldsymbol{(\lambda_I - \mu)^{-1}}$ şi a unui vector propriu asociat. Algoritmul duce la aproximarea valorii proprii cea mai apropiată de $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\lambda_I}$ şi a unui vector propriu asociat acestei autovalori, $\boldsymbol{u^I}$.

## Metoda iteraţiei inverse

$\boldsymbol{u}^{(0)} \in \mathbb{R}^{n}$ , $\|\boldsymbol{u}^{(0)}\|_2 = 1;$

$k = 0;$

*do*

- $k++;$
- Se rezolvă sistemul $(A - \mu I_n)w = u^{(k-1)}$;
- $u^{(k)} = \dfrac{1}{\|w\|_2} w$ ;
- $\lambda_k = r(u^{(k)}) = \left( Au^{(k)}, u^{(k)} \right)_{\mathbb{R}^n}$ ;

*while* $(\| Au^{(k)} - \lambda_k u^{(k)} \| > \varepsilon$ şi $k \le k_{\max});$