

**Examen Matematică**  
(21.01.2022)  
**timp de lucru: 1h45'**

---

**Subiectul 1. (20 p.)** Determinați integrala

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx, \quad x > 0.$$

---

**Subiectul 2. (30 p.)** Fie funcția  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{y \sin x - x \sin y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Calculați limitele iterate  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  și  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ ; (15 p.)

b) Fie funcția  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $g(x, y) := y \cdot f(x, y)$ . Determinați derivata direcțională a funcției  $g$  în  $(0, 0)$  în direcția  $(2, 1)$ . (15 p.)

---

**Subiectul 3. (40 p.)** Fie funcția  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$f(x, y, z) := xy^2 - 27yz^2 + 8zx^2 - x^2.$$

a) Calculați derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $f$  (10 p.);

b) Calculați derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției  $f$  (10 p.);

c) Determinați punctele critice ale funcției  $f$  și tipul acestora (minim local, maxim local sau punct șa) (20 p.).

---

**Puncte din oficiu: 10 p.**

---