Barem

Examen / nr. 1 – Matematică – semian A

(2019-2020 / 20.01.2020)

Subiectul 1 .... **30 puncte**

a) Abordarea subiectului 1

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2e^{2x}(y^2 + (z-1)^2)$ 3

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2e^{2x}y$ 3

$\frac{\partial f}{\partial z} = 2e^{2x}(z-1)$ 3

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + 4e^{2x}(y^2 + (z-1)^2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4e^{2x}y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 4e^{2x}(z-1)$ 3

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{2x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2e^{2x}$ 3

c) Rezolvarea sistemului $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$: $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ 5

d) Determinarea Hessianului în punctul critic: $H_f(0,0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 3

$H_f(0,0,1)$ pozitiv definită 4

Concluzie: $(0,0,1)$ punct de minim local 2

Subiectul 2 .... **30 puncte**

a) Abordarea subiectului 1

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = f(x,0)'|_{x=0} = 1$ 6

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = f(0,y)'|_{y=0} = 0$ 6

b) Calculul derivatei direcţionale $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(tu,tv)}{t} = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} \frac{(tu)^3}{t[(tu)^2+(tv)^4]} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{u^3}{u^2+t^2v^4} = u, & (u,v) \neq (0,0); \\ 0, & (u,v) = (0,0). \end{cases}$ 12

c) Diferenţiala Gâteaux în $(0,0)$ a lui f este funcţia $\mathrm{D}f(0,0)$, cu $\mathrm{D}f(0,0)(u,v) = u$ 2

Aceasta este liniară, deci f este derivabilă Gâteaux în $(0,0)$ 3

Subiectul 3 .... **30 puncte**

a) Abordarea subiectului 1

$\iint_D \frac{y}{x^2+y^2} dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-x}^{x^2} \frac{y}{x^2+y^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) \Big|_{y=-x}^{y=x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\ln(x^2+x^4) - \ln(2x^2) \right) dx$ (*)

$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\ln(1+x^2) - \ln 2 \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x' \ln(1+x^2) \right) dx - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2} dx - \frac{\ln 2}{2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - 1 \right) dx =$

$= \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - 1 = \frac{\pi}{4} - 1$ 14

Observaţie: Integrala din enunţ este improprie, dar calculul de mai sus este transcrierea mai puţin riguroasă a calcului integralei atunci când înlocuim 0 cu $\varepsilon > 0$, iar apoi luăm $\varepsilon \to 0$. De altfel, funcţia din integrala (*), deşi nu este definită în 0, este mărginită, având de a face chiar cu o integrală Riemann.

b) Identificarea punctelor în care funcţia nu este definită: $x = 0$ şi $x = 1$ 2

Aplicarea criteriului în α în $x = 0$: $\ell = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^p\sqrt{1-x}} x^\alpha = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2\sqrt{1-x}} x^{\alpha-p+2} = \lim_{x \searrow 0} x^{\alpha-p+2}$ 3

Dacă luăm $\alpha = p - 2$, obţinem $\ell = 1 \in (0, +\infty)$, deci $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x^2)}{x^p\sqrt{1-x}} dx$ este convergentă dacă şi numai dacă $p - 2 < 1$, adică $p < 3$ 3

Aplicarea criteriului în α în $x = 1$: $\ell = \lim_{x \nearrow 1} \frac{\ln(1+x^2)}{x^p\sqrt{1-x}} (1-x)^\alpha = \ln 2 \cdot \lim_{x \nearrow 1} (1-x)^{\alpha - \frac{1}{2}}$ 3

Dacă luăm $\alpha = \frac{1}{2}$, obţinem $\ell = \ln 2 \in (0, +\infty)$, deci $\int_{1/2}^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^p\sqrt{1-x}} dx$ este convergentă, căci $\alpha < 1$ 3

Concluzie: integrala este convergentă dacă şi numai dacă $p < 3$ 1

Puncte din oficiu: .... **10 puncte**

Precizări:

1) Pentru orice soluţie corectă, chiar diferită de cea din barem, se acordă punctaj corespunzător;

2) nota finală este 1/10 din punctajul total.