

## SEMINAR 9

Exerciții recomandate: 9.1 e),i), 9.2 a),c), 9.3 a),c) 9.6

Rezerve: 9.1 a),b),g),j), 9.2 b),d), 9.3 b), 9.4 b), 9.5 b)

S9.1 Studiați derivabilitatea (ordinară, direcțională, Gâteaux sau parțială, depinzând de funcție și/sau de cerințe) a următoarelor funcții:

- a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}, & x \neq 1; \\ 0, & x = 1, \end{cases}$  în  $x_0 = 1$ ;
- b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \max\{|x|, |2-x^2|\}$ , pe  $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ ;
- c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x] \sin^2(\pi x)$ , pe  $\mathbb{R}$ ;
- d)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 3x + 3), & x \in \mathbb{Q}; \\ (x+2)(e^{x+1} - 1), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$  în  $x_0 \in \{-2, -1\}$ ;
- e)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = 4xy^3 - z^2$ , în  $(-1, 1, 13)$  în direcția  $(4, -3, 12)$ ;
- f)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = \left( \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}, (1+x^2)^{\sqrt[3]{x}} \right)$ , în  $x_0 = 0$ ;
- g)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \sin(x \sin(y \sin z))$ , într-un element al mulțimii  $\{(x, y, \pi) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$ , într-o direcție  $v$  aparținând intersecției planurilor  $2x + y + 2z - 1 = 0$  și  $3x + y + 3z + 1 = 0$ ;
- h)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = \left( e^{xy}, \cos(x-y) - 1, \ln(x^2 + \sqrt{1+y^2}) \right)$ , în  $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ , într-o direcție  $v$  a dreptei ce trece prin punctele  $(1, -2)$  și  $(-3, 1)$ ;
- i)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} (x-y) \sin \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$  în  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ;
- j)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ , în  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , unde
 
$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^3 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{și} \quad f_2(x, y) = \begin{cases} -\frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

S9.2 Studiați diferențiabilitatea Fréchet în origine pentru fiecare din următoarele funcții:

- a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ ;
- b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ , unde
 
$$f_1(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^2 \cos \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad f_2(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ \operatorname{arctg} x, & x \geq 0 \end{cases};$$
- c)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases};$
- d)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ , cu

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{și} \quad f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^6 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

S9.3 Determinați derivatele parțiale de primul și al doilea ordin pentru fiecare din următoarele funcții, într-un punct interior domeniului lor de definiție:

- a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x^2 y, xy - y^2, x^3 - 2xy)$ ;
- b)  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = (\ln x, \operatorname{arctg} x)$ ;
- c)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = \left( e^z \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}), \sin(x - y + z) \right)$ .

S9.4 Fie  $f : (\mathbb{R}_+^*)^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$ , unde  $f_1(x, y, z) = x^y + y^z - 2z^x$  și  $f_2(x, y, z) = \frac{1}{xy} - \frac{1}{y^2z} + \frac{1}{z^3(x+y)}$ ,  $\forall x, y, z > 0$ . Calculați:

- $\frac{\partial f_1}{\partial x}(3, 2, 1) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(1, 3, 2) + \frac{\partial f_1}{\partial z}(2, 3, 1)$  și  $(\nabla f_1)(1, 1, 1)$ ;
- $x \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) - y \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + 2z \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z)$  în  $(3, 3, 1)$ ;
- $((df_1)(1, e, e))(\frac{2}{e}, 1, -1)$  și  $((df_2)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1))(1, 1, -2)$ ;
- $(df)(x_0, y_0, z_0)$ , unde  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ .

S9.5 Arătați că următoarele funcții sunt derivabile pe domeniul lor de definiție și că satisfac, în plus, relațiile adiacente:

- $f(x, y) = xy\sqrt{1 + (x^2 - y^2)^2}$ ,  
 $xy \langle (y, x), (\nabla f)(x, y) \rangle_2 = \|(x, y)\|_2^2 \cdot f(x, y)$ ;
- $f(x, y, z) = \ln(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z)$ ,  
 $\sin 2x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + \sin 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + \sin 2z \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2$ ;
- $f(x, y) = \sin x + g(\sin y - \sin x)$ ,  
 $\cos y \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \cos x \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos x \cos y, \forall g \in C^1([-2, 2])$ ;
- $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \varphi(x_1 - x_2, (x_3 - x_4)e^{-x_1}, x_3 - x_4(x_1 - x_2 + 1))$ ,  
 $(x_1 - x_2) \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3, x_4) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3, x_4) \right) +$   
 $(x_3 - x_4) \left[ (x_1 - x_2 + 1) \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3, x_4) + \frac{\partial f}{\partial x_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) \right] = 0, \forall \varphi \in C^1(\mathbb{R}^3)$ .

S9.6 Fie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$ . Arătați că există derivatele parțiale mixte ale lui  $f$  în orice punct  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , dar ele nu sunt continue în  $(0, 0)$ . Sunt ele egale în  $(0, 0)$ ?

S9.7 Fie  $C$  o submulțime deschisă nevidă a lui  $\mathbb{R}^n$  astfel încât pentru orice  $x \in C$  și orice  $t \in \mathbb{R}^*$ , avem  $tx \in C$ . O funcție  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  se numește  $\omega$ -Euler omogenă ( $\omega \in \mathbb{R}$ ) dacă  $f(tx) = t^\omega f(x)$ ,  $\forall x \in C, \forall t \in \mathbb{R}^*$ .

Arătați că dacă  $f$  este Fréchet diferențiabilă pe  $C$  și  $\omega \in \mathbb{R}$ , atunci  $f$  este  $\omega$ -Euler omogenă dacă și numai dacă satisface identitatea lui Euler:

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = \omega f(x), \forall x \in C \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

S9.8 Fie  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  o mulțime convexă (adică, pentru orice  $x, y \in A$  și  $\lambda \in [0, 1]$ , avem  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ ) cu  $\mathring{A} \neq \emptyset$  și  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă pe  $A$ , diferențiabilă pe  $\mathring{A}$ . Arătați că  $f$  este convexă pe  $\mathring{A}$  (adică, pentru orice  $x, y \in \mathring{A}$  și  $\lambda \in [0, 1]$ , avem  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ ) dacă și numai dacă

$$\langle (\nabla f)(y) - (\nabla f)(x), y - x \rangle \geq 0, \forall x, y \in \mathring{A}$$

sau, echivalent

$$f(y) \geq f(x) + \langle (\nabla f)(x), y - x \rangle, \forall x, y \in \mathring{A}.$$

S9.9 Fie  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă nevidă și  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție diferențiabilă Fréchet pe  $D$ . Atunci, pentru orice  $x, y \in D$ , există  $z \in \{ty + (1 - t)x \mid t \in (0, 1)\}$  astfel încât

$$f(y) - f(x) = (df)(z)(y - x).$$

S9.10 Fie  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă nevidă convexă și  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  o funcție diferențiabilă Fréchet pe  $D$ . Atunci, pentru orice  $x, y \in D$ , există  $\xi \in \{ty + (1-t)x \mid t \in (0, 1)\}$  astfel încât

$$\|f(y) - f(x)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|(\mathrm{d}f)(\xi)\|_{L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)} \cdot \|y - x\|_{\mathbb{R}^n}.$$

S9.11

a) Scrieți formula lui Taylor pentru funcția  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , definită de

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4,$$

în jurul lui  $(1, 1, 1)$ ;

b) Scrieți formula lui Taylor pentru polinomul  $P(x, y) = 2x^3 - 3x^2y + 2y^2 + 9x^2 - 3y + 6x + 3$  în jurul lui  $(-1, 1)$ ;

c) Scrieți formula lui Taylor pentru funcția  $f(x, y) = (e^{\sin(x-y)}, \cos(x+y))$ , pâna la termenii de ordinul doi.

S9.12 Fie  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y, z) = (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, xy + yz + zx)$ .

a) Studiați derivabilitatea Gâteaux și diferențiabilitatea Fréchet în  $f$  pe  $\ker f := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$ ;

b) Arătați că matricea jacobiană a lui  $f$  există și este singulară în orice punct al lui  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ .

S9.13 Arătați că  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , definită de  $f(x, y, z) = (z^2 - x^2 - y^2) \operatorname{sh}(x - y + z)$ , satisface relația

$$(z - y) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + (x + z) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + (x + y) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0.$$

S9.14 Fie  $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  definită de  $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{x_1 x_2 x_3}$ .

a) Calculați  $(\mathrm{d}f)(1, 1, 1)$ .

b) Arătați că  $f$  este convexă.

S9.15 Fie  $D$  o submulțime nevidă, deschisă a lui  $\mathbb{R}^3$ . De asemenea, fie  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^*$  o funcție de clasă  $C^2$  pe  $D$ . Arătați că are loc următoarea formulă:

$$\left( \left( \mathrm{d}^2 \left( \frac{1}{f} \right) \right) (x) \right) (u, v) = - \frac{1}{f^2(x)} \left( (\mathrm{d}^2 f)(x) \right) (u, v) + \frac{2}{f^3(x)} \left( (\mathrm{d}f)(x) \right) (u) \cdot \left( (\mathrm{d}f)(x) \right) (v), \quad \forall x \in D, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3.$$

S9.16 Scrieți formula lui Taylor de ordinul 3 pentru funcția  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definită de

$$f(x_1, x_2) = 3x_2^2 - x_1^2 + 2x_1x_2 - 6x_1 - 2x_2 + 4,$$

într-o vecinătate a lui  $(-2, 1)$ .

#### BIBLIOGRAFIE RECOMANDATĂ

- [1] T. Dray, *Interpreting Derivatives*, Oregon State University, 2016.
- [2] C. Drăgușin, *Calcul diferențial (Culegere de exerciții și probleme)*, Editura "Fair Partners", București, 2008.
- [3] A. Fulga, I. Radomir, *Analiză matematică. Culegere de probleme*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.
- [4] M. Postolache, *Analiză matematică (teorie și aplicații)*, Editura "Fair Partners", București, 2011.
- [5] J. Stewart, *Student Solutions Manual, Chapters 10-17 for Stewart's Multivariable Calculus*, 8th Paperback, 2015.
- [6] I. Toma, *Analiză matematică. Calcul diferențial. Curs, aplicații și exerciții propuse*, Conspress (U.T.C.B.), 2010.