Tema nr. 8

Fie $F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ o funcţie reală. Să se aproximeze un punct de minim (local sau global) al funcţiei F folosind metoda Steffensen. Să se verifice dacă soluţia obţinută este punct de minim prin verificarea semnului celei de-a doua derivate în punctul găsit. Să se compare soluţiile obţinute folosind cele două moduri de aproximare a derivatei funcţei F, din punct de vedere al numărului de iteraţii efectuate pentru obţinerea soluţiilor (pentru aceeaşi precizie $\epsilon > 0$).

Minimizarea funcţiilor de o variabilă

Fie $F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ o funcţie reală de două ori derivabilă, $F \in C^2(\mathbf{R})$, pentru care vrem să aproximăm soluţia x^* a problemei de minimizare:

$$\min\{F(x); x \in V\} \quad \longleftrightarrow \quad F(x^*) \leq F(x) \quad \forall x \in V \tag{1}$$

unde $V = \mathbf{R}$ (x^* este punct de minim global) sau $V = [\bar{x} - r, \bar{x} + r]$ (punct de minim local). Se numeşte *punct critic* pentru funcţia F, un punct $\tilde{x}$ care este rădăcină a primei derivate a lui F:

$$F'(\tilde{x}) = 0. \tag{2}$$

Se ştie că pentru funcţiile de două ori derivabile, punctele de minim ale funcţiei F se găsesc printre punctele critice. Un punct critic este punct de minim dacă:

$$F''(x^*) > 0.$$

Vom căuta punctele de minim ale lui F printre soluţiile ecuaţiei (2). Mai jos este descrisă metoda Steffensen de aproximare a unei rădăcini a ecuaţiei neliniare:

$$g(x) = 0 \qquad (g(x) = F'(x)).$$

Metoda Steffensen

Rădăcina x^* se aproximează construind un şir $\{x_k\}$ care, în anumite condiţii, converge la soluţia x^* căutată. Convergenţa şirului depinde de alegerea primului element ale şirului.

Elementul $k+1$ al şirului, x_{k+1}, se construieşte folosind elementul precedent din şir, x_k, astfel:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{g(x_k)^2}{g(x_k+g(x_k))-g(x_k)} = x_k - \Delta x_k \ , \\ \Delta x_k &= \frac{g(x_k)}{g(x_k+g(x_k))-g(x_k)} \ , \quad k=0,1,\dots\ , x_0 - \text{ dat.} \end{aligned} \tag{3}$$

Convergenţa şirului $\{x_k\}$ la x^* depinde de alegerea primului element al şirului, x_0. Dacă în relaţia de mai sus, numitorul din calculul lui $\Delta\, x_k$ este 0, atunci $\Delta x_k = 0$, algoritmul se opreşte, iteraţia la care s-a ajuns poate fi considerată o aproximare a soluţiei căutate.

La calculul lui x_{k+1}, să se calculeze o singură dată valoarea $g(x_k)$ şi să se folosească valoarea obţinută în formulele (3).

Observaţie importantă: Alegerea elementului iniţial, x_0, poate determina convergenţa sau divergenţa şirului x_k la x^*. De obicei, o alegere a datelor iniţiale în vecinătatea lui x^* asigură convergenţa $x_k \longrightarrow x^*$ pentru $k \to \infty$.

Nu este necesară memorarea întregului şir $\{x_k\}$ ci avem nevoie doar de 'ultimul' element x_{k_0} calculat. Se consideră că o valoare x_{k_0} aproximează rădăcina căutată, x^*, $x_{k_0} \approx x^*$ (x_{k_0} este ultimul element al şirului care se calculează) atunci când diferenţa dintre două iteraţii succesive devine suficient de mică, i.e.,

$$|x_{k_0} - x_{k_0-1}| < \epsilon \tag{4}$$

unde ϵ este precizia cu care vrem să aproximăm soluţia x^*. Un alt test de oprire a algoritmului, care ar putea înlocui relaţia (4) este $|g(x_{k_0})| < \epsilon$. Prin urmare, o schemă posibilă de aproximare a soluţiei x^* este următoarea:

Schema de calcul

se alege random x_0 (sau se citeşte de la tastatură) ;
//(pentru convergenţa şirului $\{x_k\}$ este bine de ales
// x_0 în vecinătatea soluţiei căutate)
$x = x_0$;
$k = 0$;
do
{
- if ($|g(x + g(x)) - g(x)| \leq \epsilon$) return x;
- calculează $\Delta\, x$ cu formula (3) ;
- $x = x - \Delta\, x$;;
- $k = k + 1$;

}
while ($|\Delta\, x| \geq \epsilon$ şi $k \leq k_{\max}$ şi $|\Delta\, x| \leq 10^8$)
if ($|\Delta\, x| < \epsilon$) return x; // $x_k \approx x^*$;
else *"divergenţă"* ; //(de încercat schimbarea lui x_0)

Pentru a calcula valoarea derivatei funcţiei F într-un punct oarecare se vor folosi următoarele două formule de aproximare:

$$F'(x) \approx G_i(x,h) \quad , \quad i = 1,2$$

unde

$$G_1(x,h) = \frac{3F(x) - 4F(x-h) + F(x-2h)}{2h}$$

$$G_2(x,h) = \frac{-F(x+2h) + 8F(x+h) - 8F(x-h) + F(x-2h)}{12h}$$

cu $h = 10^{-5}$ sau 10^{-6} (poate fi considerat ca parametru de intrare). Se va verifica dacă punctul critic calculat cu metoda Steffensen este punct de minim pentru funcţia F, verificând relaţia:

$$F''(x^*) > 0.$$

Pentru a aproxima F'', derivata de ordinul 2 a funcţiei F, se va folosi formula:

$$F''(x) \approx \frac{-F(x+2h) + 16F(x+h) - 30F(x) + 16F(x-h) - F(x-2h)}{12h^2}$$

Exemple

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2x + 3 \ , \qquad x^* = 2 + \sqrt{2} \approx 3.41421356237$$

$$F(x) = x^2 + \sin(x) \ , \qquad x^* \approx -0.4501836112948$$

$$F(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 \ , \qquad x^* \in \{1,2\}$$