Învăţare automată

— Licenţă, anul III, 2021-2022, test —

Nume student: **Grupa:**

1. **(Câştigul de informaţie: câteva proprietăţi şi o exemplificare)**

La problema 50 de la capitolul *Fundamente* am definit câştigul de informaţie astfel: $IG(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$**. De asemenea, am arătat că entropia condiţonală medie a unei variabile aleatoare** X **în raport cu o altă variabilă aleatoare** Y **se poate calcula cu formula**

$$H(Y|X) = -\sum_{x \in Val(X)} \sum_{y \in Val(Y)} P(X=x, Y=y) \log_2 P(Y=y|X=x).$$

Următoarea *demonstraţie* ne arată că putem calcula câştigul de informaţie şi în alt mod:

$$\begin{aligned}
& IG(X;Y) = H(X) - H(X|Y) && (1)\\
&= -\sum_{x \in Val(X)} P(X=x) \log_2 P(X=x) \\
&\quad -\left(-\sum_{x \in Val(X)} \sum_{y \in Val(Y)} P(X=x, Y=y) \log_2 P(Y=y|X=x) \right) && (2)\\
&= -\sum_{x \in Val(X)} \sum_{y \in Val(Y)} P(X=x, Y=y) \log_2 P(X=x) \\
&\quad + \sum_{x \in Val(X)} \sum_{y \in Val(Y)} P(X=x, Y=y) \log_2 P(Y=y|X=x) && (3)\\
&= -\sum_{x \in Val(X)} \sum_{y \in Val(Y)} P(X=x, Y=y)(\log_2 P(X=x) - \log_2 P(X=x|Y=y)) && (4)\\
&= -\sum_{x \in Val(X)} \sum_{y \in Val(Y)} P(X=x, Y=y) \log_2 \frac{P(X=x)}{P(X=x|Y=y)} && (5)\\
&= -\sum_{x \in Val(X)} \sum_{y \in Val(Y)} P(X=x, Y=y) \log_2 \frac{P(X=x)P(Y=y)}{P(X=x, Y=y)}. && (6)
\end{aligned}$$

a. Justificaţi *de ce* anume au loc fiecare dintre egalităţile care intervin in demonstraţia de mai sus.

b. Definiţi independenţa a două variabile aleatoare X **şi** Y**.**
Apoi, folosind rezultatul demonstrat mai sus,

$$IG(X;Y) = -\sum_{x \in Val(X)} \sum_{y \in Val(Y)} P(X=x, Y=y) \log_2 \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)P(Y=y)},$$

arătaţi că dacă X **şi** Y **sunt independente, atunci** $IG(X;Y) = 0$**.**

c. Fie X **şi** Y **două variabile aleatoare independente, care iau valorile** 0 **şi** 1 **cu probabilităţi egale, adică** $P(X=0) = P(X=1) = P(Y=0) = P(Y=1) = 1/2$**.**

Considerăm încă o variabilă aleatoare Z, tot cu valori în mulţimea $\{0, 1\}$. Distribuţia de probabilitate a variabilei condiţionate $Z|X, Y$ este definită în tabelul următor:

X	Y	$P(Z = 0\|X, Y)$	$P(Z = 1\|X, Y)$
0	0	0.8	0.2
0	1	0.2	0.8
1	0	0.2	0.8
1	1	0.8	0.2

i. Folosind formula de multiplicare, precum şi indepdendenţa variabilelor X şi Y, completaţi în tabelul următor distribuţia de probabilitate comună $P(X, Y, Z)$.

X	Y	Z	$P(X, Y, Z)$
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

ii. Calculaţi apoi distribuţiile marginale $P(X, Z)$, $P(Y, Z)$ şi $P(Z)$.

X	Z	$P(X, Z)$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Y	Z	$P(Y, Z)$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Z	$P(Z)$
0	
1	

iii. În final, arătaţi că $IG(X; Z) = IG(Y; Z) = 0$. (***Sugestie***: Folosiţi rezultatul de la punctul b.)

2. **(Aplicarea formulei probabilităţii totale)**

O urnă conţine w bile albe şi b bile negre. Extragem o bilă dintre acestea, în mod aleatoriu. Apoi repunem bila în urnă, împreună cu alte d bile de aceeaşi culoare (ca a bilei extrase). După aceasta, extragem din urnă încă o bilă, în mod aleatoriu.

a. Demonstraţi că probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie albă nu depinde de d.

b. Particularizaţi [raţionamentul dumneavoastră] pentru cazul $w = 2$, $b = 3$ şi $d = 7$.