

Calcul Numeric

Cursul 6

2022

Anca Ignat

Metode iterative pentru rezolvarea sistemelor de ecuații liniare

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

- se presupune cunoscut că A este nesingulară, $\det A \neq 0$;
- soluția exactă a sistemului (1) se notează cu x^* :

$$x^* = A^{-1}b \quad (2)$$

- n - dimensiunea sistemului este "*mare*";
- A este matrice rară - cu "*puține*" elemente $a_{ij} \neq 0$;

- pentru a aproxima soluția \mathbf{x}^* matricea A nu se schimbă (transformă) ci doar se folosesc elementele nenule ale matricei ;
- se construiește un șir de vectori $\{\mathbf{x}^{(k)}\} \subseteq \mathbb{R}^n$, șir care în anumite cazuri, converge la \mathbf{x}^* :

$$\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}^* \quad \text{pentru } k \rightarrow \infty$$

O schemă generală de deducere a unei metode iterative

Fie descompunerea:

$$A = B - C, \quad B, C \in R^{n \times n}, \quad B \text{ "ușor" inversabilă} \quad (3)$$

Ce înseamnă B "ușor" inversabilă ? Sistemul liniar, având ca matrice a sistemului matricea B :

$$Bx = f$$

se rezolvă 'ușor' (adică repede) – ca în cazul sistemelor cu matrice diagonale sau triunghiulare, de exemplu.

$$Ax^* = b \Leftrightarrow Bx^* - Cx^* = b \Leftrightarrow$$

$$Bx^* = Cx^* + b \Leftrightarrow x^* = B^{-1}Cx^* + B^{-1}b = Mx^* + d$$

unde

$$M := B^{-1}C \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad d := B^{-1}b \in \mathbb{R}^n \quad (4)$$

Șirul $\{x^{(k)}\}$ se construiește astfel:

$$x^{(k+1)} := Mx^{(k)} + d, k = 0, 1, 2, \dots x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ ales arbitrar} \quad (5)$$

Vectorul $x^{(k+1)}$ poate fi privit și ca soluția sistemului liniar:

$$Bx = f \text{ cu } f := Cx^{(k)} + b \quad (6)$$

Cunoscând vectorul $\mathbf{x}^{(k)}$, următorul element din șir, $\mathbf{x}^{(k+1)}$, se poate construi fie utilizând relația (5) (dacă putem construi matricea \mathbf{M} explicit), fie rezolvând sistemul liniar (6).

Matricea \mathbf{M} poartă numele de *matricea iterației* iar vectorul $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ se numește *iterația inițială*.

Ne punem problema convergenței șirului $\mathbf{x}^{(k)}$:

$$\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}^* \quad , \quad k \rightarrow \infty$$

Se știe că această convergență nu are loc pentru orice matrice \mathbf{B} . Avem următorul rezultat general de convergență.

Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\{A^k\}$ un șir de matrici.

$$A^k \rightarrow \mathbf{0}_{n \times n}, k \rightarrow \infty \Leftrightarrow \|A^k\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

Propoziție

Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Atunci:

$$A^k \rightarrow \mathbf{0}, k \rightarrow \infty \Leftrightarrow \rho(A) < 1.$$

Dacă există o normă matriceală naturală pentru care $\|A\| < 1$ atunci:

$$A^k \rightarrow \mathbf{0} \text{ pentru } k \rightarrow \infty.$$

$$(n = 1 \rightarrow a \in \mathbb{R}, a^k \rightarrow 0 \text{ pentru } k \rightarrow \infty \Leftrightarrow |a| < 1.)$$

Propoziție

Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Seria $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ converge dacă și numai dacă raza spectrală a matricei A este subunitară:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = S \Leftrightarrow \rho(A) < 1.$$

Dacă există o normă a matricei A astfel încât $\|A\| < 1$ atunci seria converge. În cazul convergenței avem :

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = S = (I - A)^{-1}.$$

Teorema de convergență

Fie $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o matrice nesingulară și $B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det B \neq 0$, astfel ca $A = B - C$. Fie $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ un vector oarecare și $\{x^{(k)}\}$ șirul de vectori dat de relația (5) cu M și d dați de (4). Atunci:

$$x^{(k)} \rightarrow x^*, k \rightarrow \infty, \forall x^{(0)} \Leftrightarrow \rho(M) < 1 \quad (7)$$

unde $\rho(M) = \max\{|\lambda|; \lambda - \text{valoare proprie a matricii } M\}$ este raza spectrală a matricii M . Dacă există o normă matricială naturală astfel ca $\|M\| < 1$ atunci șirul $\{x^{(k)}\}$ converge la soluția x^* a sistemului (1).

$$\|M\| < 1 \Rightarrow x^{(k)} \rightarrow x^*, k \rightarrow \infty, \forall x^{(0)}. \quad (8)$$

Demonstrație: Scăzând relațiile (5) și $x^* = Mx^* + d$ obținem:

$$x^{(k+1)} - x^* = M(x^{(k)} - x^*), k = 0, 1, 2, \dots$$

Avem:

$$x^{(p)} - x^* = M(x^{(p-1)} - x^*) = M^2(x^{(p-2)} - x^*) = \dots = M^p(x^{(0)} - x^*)$$

$$x^{(p)} - x^* = M^p(x^{(0)} - x^*), \forall p$$

Prin urmare:

$$x^{(p)} \rightarrow x^*, p \rightarrow \infty \Leftrightarrow M^p \rightarrow 0, p \rightarrow \infty$$

$$M^p \rightarrow 0, p \rightarrow \infty \Leftrightarrow \rho(M) < 1$$

Dacă:

$$\|M\| < 1 \Rightarrow M^p \rightarrow 0, p \rightarrow \infty \Rightarrow x^{(p)} \rightarrow x^*, p \rightarrow \infty \quad \forall x^{(0)}$$

Evaluarea erorii absolute $\|x^{(k)} - x^*\|$

Presupunem $\|M\| < 1$ (șirul $\{x^{(k)}\}$ converge la x^*).

Avem din (5):

$$x^{(l+1)} = Mx^{(l)} + d$$

$$x^{(l)} = Mx^{(l-1)} + d$$

$$x^{(l+1)} - x^{(l)} = M(x^{(l)} - x^{(l-1)}) \quad \forall l$$

Pentru orice k, j , folosind relațiile de mai sus, avem:

$$x^{(k+j+1)} - x^{(k+j)} = M(x^{(k+j)} - x^{(k+j-1)}) = \dots = M^j(x^{(k+1)} - x^{(k)}) \quad \forall k, j$$

Aplicând succesiv relația precedentă obținem:

$$\mathbf{x}^{(k+p)} - \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+p)} - \mathbf{x}^{(k+p-1)} + \mathbf{x}^{(k+p-1)} - \mathbf{x}^{(k+p-2)} + \dots +$$

$$+ \mathbf{x}^{(k+2)} - \mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{p-1} (\mathbf{x}^{(k+j+1)} - \mathbf{x}^{(k+j)})$$

$$\mathbf{x}^{(k+p)} - \mathbf{x}^{(k)} = \sum_{j=0}^{p-1} (\mathbf{x}^{(k+j+1)} - \mathbf{x}^{(k+j)}) = \left(\sum_{j=0}^{p-1} \mathbf{M}^j \right) (\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)})$$

Făcând $p \rightarrow \infty$ obținem:

$$\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k)} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{M}^j \right) \mathbf{M} (\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)})$$

$$\|\mathbf{M}\| < 1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{M}^j = (\mathbf{I}_n - \mathbf{M})^{-1}$$

Mai avem și evaluarea:

$$\|\mathbf{M}\| < 1 \Rightarrow \frac{1}{1 + \|\mathbf{M}\|} \leq \|(\mathbf{I}_n - \mathbf{M})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{M}\|}$$

Prin urmare:

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \frac{\|\mathbf{M}\|}{1 - \|\mathbf{M}\|} \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|$$

Această relație ne spune că din punct de vedere practic putem opri algoritmul atunci când diferența dintre două iterații succesive devine suficient de mică, acest lucru asigurând apropierea de soluție.

În continuare vedea cum se memorează matricele rare și vom particulariza matricea ***B***.

Memorarea matricelor rare

- se memorează doar valorile nenule și suficiente informații despre indici astfel ca să se poată reconstitui complet matricea

Pp. că matricea A are NN elemente nenule.

Memorare comprimată pe linii

Se folosesc 3 vectori:

valori – vector de numere reale de dimensiune NN

ind_col – vector de indici de dimensiune NN

inceput_linii – vector de întregi de dimensiune $n+1$

În vectorul *valori* se memorează elementele nenule ale matricii *A* în ordinea liniilor iar în vectorul *ind_col* se memorează indicii de coloană ai elementelor din *valori*. În vectorul *inceput_linii* se stochează indicele/poziția în vectorul *valori / ind_col* al/a primului element de pe linia *i* memorat în vectorii *valori / ind_col*.

$$- \textit{inceput_linii}(n+1) = NN+1$$

$$- \textit{inceput_linii}(i+1) - \textit{inceput_linii}(i) = \\ \text{numărul de elemente nenule de pe linia } i, i=1,n$$

$$A = \begin{pmatrix} 102.5 & 0.0 & 2.5 & 0.0 & 0.0 \\ 3.5 & 104.88 & 1.05 & 0.0 & 0.33 \\ 0.0 & 0.0 & 100.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.3 & 0.0 & 101.3 & 0.0 \\ 0.73 & 0.0 & 0.0 & 1.5 & 102.23 \end{pmatrix}$$

$n=5, \quad NN=12$

$$valori = (102.5, 2.5, 0.33, 1.05, 104.88, 3.5, 100.0, 101.3, 1.3, 1.5, 0.73, 102.23)$$

$$ind_col = (1, 3, 5, 3, 2, 1, 3, 4, 2, 4, 1, 5)$$

$$inceput_linii = (1, 3, 7, 8, 10, 13)$$

Dacă se știe că matricea are maxim n_max elemente nenule pe fiecare linie se pot folosi 2 matrice pentru memorarea rară:

valori – matrice de numere reale de dimensiune $n \times n_max$

ind_col – matrice de indici de dimensiune $n \times n_max$

În matricea *valori* se memorează pe linia i elementele nenule de pe linia i a matricei A iar în matricea *ind_col* se memorează indicii de coloană ai elementelor corespunzătoare din matricea *valori*.

$$A = \begin{pmatrix} 102.5 & 0.0 & 2.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 104.88 & 1.05 & 0.0 & 0.33 \\ 0.0 & 0.0 & 100.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.3 & 0.0 & 101.3 & 0.0 \\ 0.73 & 0.0 & 0.0 & 1.5 & 102.23 \end{pmatrix}$$

$$\mathit{valori} = \begin{pmatrix} 102.5 & 2.5 & 0 \\ 104.88 & 1.05 & 0.33 \\ 100.0 & 0 & 0 \\ 101.3 & 1.3 & 0 \\ 102.23 & 1.5 & 0.73 \end{pmatrix} \quad \mathit{ind_col} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalele matricei A :

$$d_0 : (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

$$d_1 : (a_{12}, a_{23}, \dots, a_{n-1n})$$

$$d_{-1} : (a_{21}, a_{32}, \dots, a_{nn-1})$$

$$d_2 : (a_{13}, a_{24}, \dots, a_{n-2n})$$

$$d_{-2} : (a_{31}, a_{42}, \dots, a_{nn-2})$$

$$\vdots$$

Pentru matricele care au elementele nenule plasate pe câteva din diagonalele matricei A (n_d diagonale cu elemente nenule) se pot folosi pentru memorare o matrice și un vector:

diag – matrice cu numere reale de dimensiune $n \times n_d$

diag_no – vector de întregi de dimensiune n_d

În matricea *diag* se memorează pe coloane diagonalele cu elemente nenule iar în *diag_no* este specificat numărul diagonalei care e memorat în coloana *j* a matricei *diag*.

$$diag(i, j) = a_{i + diag_no(j)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 20.5 & 2.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 40.5 & 3.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 100.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.3 & 0.0 & 101.5 & 4.0 \\ 0.0 & 0.0 & 3.0 & 0.0 & 102.5 \end{pmatrix}$$

$$diag = \begin{pmatrix} * & 20.5 & 2.0 \\ * & 40.5 & 3.0 \\ 1.0 & 100.0 & 0.0 \\ 2.3 & 101.5 & 4.0 \\ 3.0 & 102.5 & * \end{pmatrix} \quad diag_no = (-2, 0, 1)$$

Alte tipuri de memorări rare:

http://netlib.org/linalg/html_templates/node90.html

Metoda Jacobi pentru rezolvarea sistemelor liniare

Fie sistemul:

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n$$

cu

$$\det A \neq 0, \quad a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

Alegem:

$$B = \text{diag}[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}] = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det B = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$$

$$B^{-1} = \text{diag}\left[\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}}\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Matricea C este:

$$C = B - A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \mathbf{0} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & \mathbf{0} & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad c_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{dacă } i \neq j \\ \mathbf{0} & \text{dacă } i = j \end{cases}$$

Matricea iterației se poate calcula și are forma:

$$M := B^{-1}C = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & \mathbf{0} & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & \mathbf{0} & \dots & -\frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad m_{ij} = \begin{cases} -(\frac{a_{ij}}{a_{ii}}) & \text{dacă } i \neq j \\ \mathbf{0} & \text{dacă } i = j \end{cases}$$

Construim vectorul \mathbf{g} :

$$\mathbf{g} := \mathbf{M}\mathbf{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^n \quad , \quad \mathbf{M}\mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{g}_i)_{i=1}^n$$

Componentele vectorului \mathbf{g} sunt:

$$\mathbf{g}_i = \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j^{(k)} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} = - \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii} \quad , i = 1, \dots, n$$

Vectorul d este:

$$d = B^{-1}b = (d_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n, \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, i = 1, \dots, n$$

Șirul $\{x^{(k)}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ se construiește folosind formula:

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + d \quad \Leftrightarrow \quad x_i^{(k+1)} = g_i + d_i, i = 1, \dots, n$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)}{a_{ii}}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)})}{a_{ii}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

Formula (1) descrie *metoda lui Jacobi* de aproximare a soluției unui sistem liniar.

Condiții suficiente de convergență

Propoziția 1

$$\|M\| < 1 \quad \Rightarrow \quad x^{(k)} \rightarrow x^*, k \rightarrow \infty.$$

Demonstrație. Fie x^* soluția sistemului $Ax=b$. Din relația $A=B-C$ rezultă $Bx^* = Cx^* + b$ sau $x^* = Mx^* + d$.

Procesul iterativ $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + d$ conduce la relația:

$$\|x^* - x^{(k+1)}\| = \|M(x^* - x^{(k)})\| \leq \|M\| \|x^* - x^{(k)}\| \leq \dots \leq \|M\|^{k+1} \|x^* - x^{(0)}\|$$

În continuare vom aplica această propoziție pentru diverse norme.

• Din $\|M\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} < 1$ deducem:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad x^{(k)} \rightarrow x^*, k \rightarrow \infty$$

- Din $\|M\|_1 = \max\{\sum_{i=1}^n |m_{ij}|; j = 1, \dots, n\} < 1$ deducem:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \left(\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right) < 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \Rightarrow x^{(k)} \rightarrow x^*, k \rightarrow \infty$$

- (*Criteriul dominanței diagonalei pe linii*)

$$\text{Din } \|M\|_\infty = \max\{\sum_{j=1}^n |m_{ij}|; i = 1, \dots, n\} < 1 \text{ deducem:}$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right) < 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow x^{(k)} \rightarrow x^*, k \rightarrow \infty$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*$$

- (*Criteriul dominanței diagonalei pe coloane*)

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| < |a_{jj}| \quad \forall j = 1, \dots, n \Rightarrow \|M\|_1 < 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*$$

Metoda Gauss-Seidel pentru rezolvarea sistemelor liniare

Considerăm din nou sistemul liniar:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} , \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} , \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$

cu

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \quad , \quad a_{ii} \neq 0 , i = 1, 2, \dots, n$$

Putem deduce metoda Gauss-Seidel din metoda lui Jacobi astfel:

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}, i = 1, \dots, n - \text{Jacobi}$$

\Updownarrow

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}, i = 1, \dots, n - \text{Gauss-Seidel}$$

Când calculăm $x_i^{(k+1)}$ cunoaștem deja $x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$ și putem folosi aceste valori în prima sumă.

Deducerea metodei Gauss-Seidel din schema generală se face luând:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{dacă } j \leq i \\ \mathbf{0} & \text{dacă } j > i \end{cases}$$

Matricea \mathbf{B} este nesaringulară ($a_{ii} \neq \mathbf{0}, \forall i$):

$$\det \mathbf{B} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \neq \mathbf{0}$$

Matricea C este:

$$C = B - A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -a_{n-1n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad c_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{dacă } i < j \\ \mathbf{0} & \text{dacă } i \geq j \end{cases}$$

În cazul metodei Gauss-Seidel, vectorul $\mathbf{x}^{(k+1)}$ se obține din $\mathbf{x}^{(k)}$ rezolvând sistemul inferior triunghiular (7) din schema generală:

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} = \mathbf{f} \quad (1)$$

Soluția sistemului (1) este dată de formula:

$$x_i = (f_i - \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j) / b_{ii} = (f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j) / a_{ii} , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Vectorul f este:

$$f_i = (Cx^{(k)})_i + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

$$(Cx^{(k)})_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j^{(k)} = - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)}, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (4)$$

Folosind formula de rezolvare a sistemelor inferior triunghiulare (2), din relațiile (3) și (4) avem:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)})}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Condiții suficiente de convergență pentru metoda Gauss-Seidel

Propoziția 1

Dacă matricea A este astfel încât:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right)^2 < 1$$

atunci are loc convergența șirului construit cu metoda Gauss-Seidel la soluția sistemului $Ax=b$:

$$x^{(k)} \rightarrow x^*, k \rightarrow \infty \quad \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

Propoziția 2 (*Criteriul dominanței diagonalei pe linii*)

Dacă matricea A este astfel încât:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i = 1, \dots, n$$

atunci:

$$x^{(k)} \rightarrow x^*, k \rightarrow \infty \quad \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

Propoziția 3 (*Criteriul dominanței diagonalei pe coloane*)

Dacă matricea A este astfel încât:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| < |a_{jj}| \quad \forall j = 1, \dots, n$$

atunci metoda Gauss-Seidel converge:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*, \quad \forall x^{(0)}$$