Exerciţii recapitulative

1. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ definim următoarea relaţie

$$x\rho y \Leftrightarrow (x = y \vee x + y = 1)$$

Să se demonstreze că ρ este relaţie de echivalenţă. Să se determine mulţimea factor $\mathbb{R}_\rho$.

2. Fie $X \neq 0$ şi $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Folosind proprietăţile funcţiei caracteristice, arătaţi că

$$(A \cap B) \cup (C \setminus A) = C \Leftrightarrow A \cap (B\Delta C) = \varnothing.$$

3. Să se determine natura seriilor

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n, \alpha > 0,\ b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)^n.$$

4. Să se găsească mulţimea de convergenţă a următoarei serii de puteri:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{2n} (x-1)^n,$$

5. Se consideră mulţimea $A = \{(a, 1, -1), (1, 0, -1), (1, a, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}$.

   a) Pentru $a = 0$ să se arate că mulţimea A este liniar independentă.

   b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât mulţimea A să fie o bază a lui $\mathbb{R}^3$, contrar orientată bazei canonice a lui $\mathbb{R}^3$.

   c) Pentru valorile lui a) determinate la punctul b), să se determine matricea de schimbare de la baza A la baza $A' = \{(1, 1, 0), (-1, 1, -1), (2, -1, 1)\}$.

   d) Să se determine coordonatele lui $x = (1, 1, 1)$ în baza A'.

6. Fie endomorfismul $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$, definit prin

$$T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_0 + a_1 + (a_1 + a_2)t + (a_2 - a_0)t^2,$$

unde $\mathbb{R}_2[t]$ este mulţimea polinoamelor de grad cel mult 2.

   a) Să se calculeze $T(1 - 2t + 3t^2)$.

   b) Să se determine matricea endomorfismului T în baza canonică din $\mathbb{R}_2[t]$, $B_c = \{1, t, t^2\}$.

   c) Să se afle $rang(T)$ si o bază pentru $Im(T)$.

   d) Să se afle $Ker(T)$ şi $def(T)$.