1 = S1.4

Relație problemă divizibilitate

a div b dacă $\exists\, c \in \mathbb{N}^*$ a.î. $b = a \cdot c$

$a \mid b$ dacă $\exists\, c \in \mathbb{N}^*$ a.î. $b = a \cdot c$ (=)

$b : a = c$

ex: 3 div 6 deoarece $\exists\, 2 \in \mathbb{N}^*$ a.î.

$6 = 3 \cdot 2$

Trebuia să arătam că div relație ordine

Reflexivă $\underline{\forall\, a \in \mathbb{N}^*}$ găsesc $c \in \mathbb{N}^*$

$a = a \cdot c$

$\exists\, 1 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $a = a \cdot 1 \Rightarrow$ a div a

Antisimetrică Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$

a div b $\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{N}^*$ a.î. $b = a \cdot c$

b div a $\Rightarrow \exists\, d \in \mathbb{N}^*$ a.î. $a = b \cdot d$

$\underline{b} = a \cdot c = (b \cdot d) \cdot c = \underline{b \cdot d \cdot c} \quad | : b$

$\Rightarrow 1 = d \cdot c \Rightarrow c = d = 1 \Rightarrow a = b$

Tranzitivitatea Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$

a div $b \Rightarrow \exists\, e \in \mathbb{N}^*$ a.î. $b = a \cdot e$

b div $c \Rightarrow \exists\, f \in \mathbb{N}^*$ a.î. $c = b \cdot f$

$c = b \cdot f = a(e \cdot f)$

$\Rightarrow \exists\, g = e \cdot f$ a.î. $c = a \cdot g \Rightarrow$

a div c

R, A, T $\Rightarrow$ div relație de ordine

---

(2) ex: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x \rho y \iff x \cdot y > 0$

Reflexivitate

Fie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vrem să arăt că

$x \rho x$ adică $x \cdot x > 0$

$x^2 > 0$ pt că $x \neq 0$

Simetrie

Fie $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a.î.

$x P y \Leftrightarrow x \cdot y > 0 \Leftrightarrow y \cdot x > 0 \Leftrightarrow y P x$

$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$

Tranzitivitatea

Fie $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a.î.

$$\begin{array}{l} x P y \Rightarrow x y > 0 \\ y P z \Rightarrow y z > 0 \end{array} \quad \odot$$

$$\overline{x y^2 z > 0 \,\Big|\, : y^2 > 0}$$

$$x z > 0 \Leftrightarrow x P z$$

P Refl, Sim, Tranz $\Rightarrow$ P relație de echivalență

Clase de echivalență

Fie X o mulțime și $\equiv$ o relație de echivalență.

Fie $x \in X$.

Clasa de echivalență a lui x:

Notație: $\hat{x}$ / se mai folosește $\bar{x}$, $[x]_{\equiv}$

$$\hat{x} \doteq \{ y \in X \mid x \equiv y \}$$

ex: • relația de paralelism în plan e relație de echivalență

a

$\hat{a}$ = {toate dreptele paralele cu a}

• congruența modulo 3 e relație de echivantă

Pe $\mathbb{N}$: $x \equiv y \pmod 3 \iff x - y$ are restul 0 la împărțirea la 3

$1 \equiv 1 \pmod 3$

$4 \equiv 1 \pmod 3$

$\hat{4} = \hat{1} = \{1, 4, 7, 10, \ldots\}$

$\hat{2} = \{2, 5, 8, 11, \ldots\}$

$\hat{0} = \{0, 3, 6, \ldots\}$

$\hat{0} \cup \hat{1} \cup \hat{2} = \underline{\mathbb{N}} \longrightarrow$ Când se cere mulțimea clase de echivalență, caut elemente ai clasele lor să "acopere" mulțimea inițială

Revenind la relația ρ $\qquad \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\hat{2} = (0, \infty)$

$\widehat{-1} = (-\infty, 0)$

⇒ Mulțimea claselor de echiv:

$\{(0,\infty), (-\infty,0)\}$

3. = S 1.8

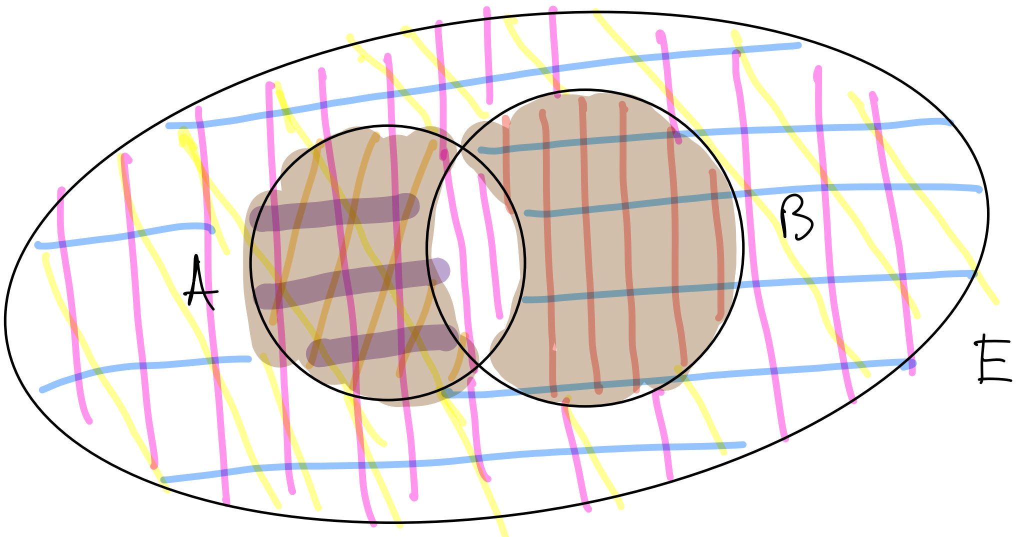
Tot timpul mulțimile există într-o mulțime univers.
Dacă nu e precizată explicit, poate fi aleasă reuniunea tuturor din exercițiu.

$$A, B \subset E$$

$$\overline{A} = C_A = E \setminus A$$

$$(C_A \,\Delta\, C_B) \cap C_{B \setminus A} = A \setminus B$$

Desenul nu egalează o demonstrație dar e mai bun decât nimic



$A \setminus B$

$B \setminus A$

$C_{B \setminus A}$

C_A

C_B

$C_A \,\Delta\, C_B$ doar galben sau doar albastru

$(C_A \,\Delta\, C_B) \cap C_{B \setminus A}$

mov + roz

$x \in (C_A \,\Delta\, C_B) \cap C_{B \setminus A} \iff$

$x \in (C_A \,\Delta\, C_B) \wedge x \in C_{B \setminus A} \iff$

$$\left[x \in (C_A \setminus C_B) \cup (C_B \setminus C_A)\right] \wedge$$

$$\neg\left(x \in B \setminus A\right) \iff$$

$$\overbrace{\left[(x \in C_A \setminus C_B) \vee (x \in C_B \setminus C_A)\right]}^{p}$$

$$\wedge\ \overbrace{\underbrace{\neg\left(x \in B \wedge x \notin A\right)}}^{q} \iff$$

$$\left[(x \in C_A \wedge x \notin C_B) \vee (x \in C_B \wedge x \notin C_A)\right]$$

$$\wedge \left[\neg(x \in B) \vee \neg(x \notin A)\right] \iff$$

$$\left[\overbrace{(x \notin A \wedge x \in B)}^{p} \vee \overbrace{(x \notin B \wedge x \in A)}^{q}\right]$$

$$\wedge\ \underbrace{\left[(x \notin B) \vee (x \in A)\right]}_{r}$$

$$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

$$\Big[\big(\underbrace{x \notin A \wedge x \in B}_{p}\big) \wedge \big[(\underbrace{x \notin B}_{q}) \vee (\underbrace{x \in A}_{r})\big]\Big]$$

$$\vee \Big[\big(x \notin B \wedge x \in A\big) \wedge \big[(x \notin B) \vee (x \in A)\big]\Big]$$

$$\Big[\big(x \notin A \wedge \underbrace{\cancel{x \in B \wedge x \notin B}}_{0}\big) \vee$$

$$\big(\underbrace{x \notin A \wedge x \in B \wedge x \in A}_{0}\big)\Big]$$

$$\vee \Big[\big(x \notin B \wedge x \in A\big) \wedge \big(x \notin B \vee x \in A\big)\Big]$$

$$\Big[\underbrace{x \notin B \wedge x \in A}_{p} \wedge \big(\underbrace{x \notin B}_{q} \vee \underbrace{x \in A}_{r}\big)\Big]$$

$$\big(x \notin B \wedge x \in A \wedge x \notin B\big) \vee$$

$$\big(x \notin B \wedge x \in A \wedge x \in A\big)$$

$$x \in A \wedge x \notin B \iff x \in A \setminus B$$

$$\chi^{\text{Scu}}_{(CA \Delta CB) \cap CB\setminus A} =$$

$$\chi_{CA} = 1 - \chi_A$$

$$\chi_{CA \Delta CB}\,\chi_{CB\setminus A} =$$

$$(\chi_{CA} + \chi_{CB} - 2\chi_{CA}\chi_{CB})(1 - \chi_{B\setminus A})$$

$$= (1 - \chi_A + 1 - \chi_B - 2(1-\chi_A)(1-\chi_B))$$

$$(1 - (\chi_B - \chi_B\chi_A)) =$$

$$(2 - \chi_A - \chi_B - 2(1 - \chi_A - \chi_B + \chi_A\chi_B))$$

$$(1 - \chi_B + \chi_B\chi_A) =$$

$$(\cancel{2} - \cancel{\chi_A} - \cancel{\chi_B} - \cancel{2} + \cancel{2}\chi_A + \cancel{2}\chi_B -$$
$$2\chi_A\chi_B)(1 - \chi_B + \chi_B\chi_A)$$

$$(\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B)(1 - \chi_B + \chi_B\chi_A)$$

$$= \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B -$$

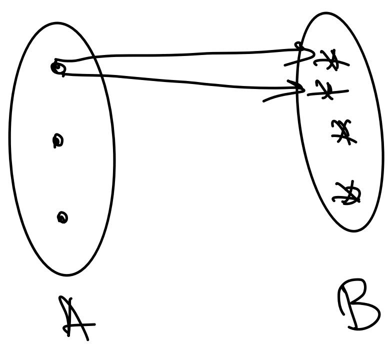
$$\chi_A \chi_B - \chi_B^2 + 2\chi_A \chi_B^2 +$$

$$\chi_A^2 \chi_B + \chi_A \chi_B^2 - 2\chi_A \chi_B^2 =$$

$$\chi_A + \cancel{\chi_B} - 2\cancel{\chi_A \chi_B} - \cancel{\chi_A \chi_B} - \cancel{\chi_B} +$$

$$2\cancel{\chi_A \chi_B} + \cancel{\chi_A \chi_B} + \cancel{\chi_A \chi_B} - 2\chi_A \chi_B$$

$$\chi_A - \chi_A \chi_B = \chi_{A \setminus B}$$



Din- un punct din A

pot pleca 0 săgeți

1 săgeată

mai multe săgeți

Ca relația să fie fct trebuie ca din fiecare pct din A să plece exact o săgeată.

$\Rightarrow$ Să verific că e fct înseamnă să verific că din fiecare punct din A pleacă

$\to$ măcar una

$\to$ nu mai mult de una.

4 = S.1.13

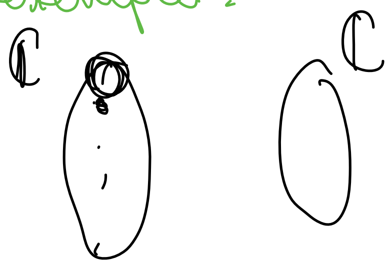
$G \subset \underset{\smile}{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$

$\mathbb{C} = \{z = e^u = e^a(\cos b + i \sin b)\}$

$\mathbb{C} = \{u = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$\exists$ z pt care nu găsesc nici un u?

Când este formulată o întrebare Este...? prima încercare ar trebui să fie să: caut un contra-exemplu.



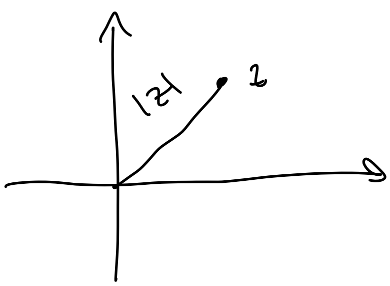
$(z \longrightarrow w)$

$\theta = 0$

$$z = e^a (\underbrace{\cos 0}_{1} + \underbrace{i \sin 0}_{0}) = e^a$$

$w = a$

Pt 0 nu găsesc z



$$a = 0$$

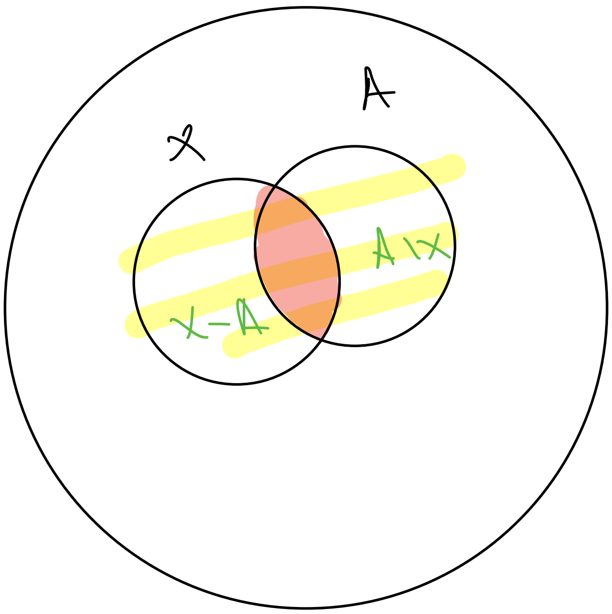
$$z = 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$w_1 = 0 + i \cdot \frac{\pi}{4} = i \frac{\pi}{4}$$

$$w_2 = i \cdot \frac{9\pi}{4} = i \frac{9\pi}{4}$$

5 = S.1.15

$X \cap A = X \cup A$



$X \cap A$

$X \cup A$

Ca galben = rozu => zonele doar galbene sunt mulțimea vidă

$A \setminus X = \emptyset$ $\quad$ $\underline{X = A}$

$X \setminus A = \emptyset$

$$A \cup X \supset X \cap A$$

$$\underline{X} \subset A \cup X = X \cap A \subset A \subset A \cup X = A \cap X \subset \underline{X}$$

$\Rightarrow$ Am egalitate peste tot.