Dependente functionale

1 Definitie. Proprietati. Sisteme de reguli de inferenta.

Fie $X, Y \subseteq U$. Vom nota sintactic o dependenta functionala prin $X \to Y$.

Semantic, vom spune ca o relatie r peste U satisface dependenta functionala

$X \to Y$ daca: $(\forall t1, t2)(t1, t2 \in r)[t1[X] = t2[X] \Rightarrow t1[Y] = t2[Y]]$.

Daca $X = \emptyset$,atunci spunem ca r satisface $\emptyset \rightarrow Y$ daca

$(\forall t1, t2)(t1, t2 \in r)[t1[Y] = t2[Y]]$, altfel

spus, r[Y] consta dintr-un singur element.

Daca $Y = \emptyset$, atunci consideram ca

orice relatie r peste U satisface dependenta functionala $X \rightarrow \emptyset$. Daca r satisface dependenta functionala $X \rightarrow Y$, atunci exista o functie : $r[X] \rightarrow r[Y]$ definita

prin: $F(t) = t'[Y]$, unde $t' \in r$, si $t'[X] = t \in r[X]$.

Daca r satisface $X \to Y$ se mai spune ca X determina functional pe Y ın r.

Proprietati ale dependentelor functionale:

FD1. (Reflexivitate) Daca $Y \subseteq X$, atunci r satisface $X \to Y$ pentru orice relatie r peste U.

FD2 (Extensie) Daca r satisface $X \to Y$, si $Z \subseteq W$, atunci r satisface $XW \to YZ$.

FD3 (Tranzitivitate) Daca r satisface $X \to Y$, si $Y \to Z$, atunci r satisface $X \to Z$.

FD4 (Pseudotranzitivitate) Daca r satisface $X \to Y$, si $YW \to Z$, atunci r satisface $XW \to Z$.

FD5 (Uniune) Daca r satisface $X \to Y$ si $X \to Z$, atunci r satisface $X \to Y Z$.

FD6 (Descompunere) Daca r satisface $X \to Y Z$, atunci r satisface $X \to Y$ si $X \to Z$.

FD7 (Proiectabilitate) Daca r peste U satisface $X \to Y$ si $X \subset Z \subseteq U$, atunci r[Z] satisface $X \to Y \cap Z$.

FD8 (Proiectabilitate inversa) Daca $X \rightarrow Y$ este satisfacuta de o proiectie a lui r, atunci $X \rightarrow Y$ este satisfacuta de r.

Definitia 2.

Fie Σ o multime de dependente functionale peste U. Spunem ca $X \rightarrow Y$ este consecinta din Σ, daca orice relatie ce satisface toate dependentele lui Σ va satisface si $X \rightarrow Y$.

Vom nota aceasta situatie prin $\Sigma \vdash X \rightarrow Y$.

Deci Σ |- $X \rightarrow Y$ daca pentru $(\forall r)[\forall \alpha \in \Sigma$, r satisface $\alpha \leadsto$ r satisface $X \rightarrow Y]$.

Fie $\Sigma^* = \{X \rightarrow Y \mid \Sigma \text{ |- } X \rightarrow Y\}$. Fie Σ_1 o multime de dependente functionale.

Spunem ca Σ_1 constituie o acoperire pentru Σ^*, daca $\Sigma^*_1 = \Sigma^*$.

Propozitia 1.1 Pentru orice multime Σ de dependente functionale exista o acoperire Σ_1 pentru Σ^*, astfel ıncat toate dependentele din Σ_1 sunt de forma

$X \to A$, A fiind un atribut din U.

Demonstratie. Pentru fiecare $X \to Y \in \Sigma$, cu Y = B1B2 . . .Bh, consideram

$X \to Bj$ incluse ın Σ_1, j = 1, h. Dupa proprietatile FD5 si FD6 avem: r satisface $X \to Y$ daca si numai daca r satisface $X \to Bj$, j = 1, h. Dupa aceleasi proprietati si din modul de definire a lui Σ1 avem: r satisface α, ∀α ∈ Σ daca si numai daca r satisface α1, ∀α1 ∈ Σ_1. Aceasta din urma conduce la $\Sigma \vdash X \rightarrow Y$ daca si numai daca $\Sigma_1 \vdash X \rightarrow Y$, ceea ce ınseamna $\Sigma^*_1 = \Sigma^*$.

Propozitia 1.2 $\Sigma \vdash X \rightarrow Y$ daca si numai daca $\Sigma \vdash X \rightarrow Bj$ pentru j = 1, h, unde Y = B1 . . .Bh.

Justificarea propozitiei rezulta imediat din FD5 si FD6. Din cele doua propozitii de mai sus, rezulta ca studiul dependentelor functionale, din punct de vedere al relatiei de “consecinta”, se reduce la studiul acestei “consecinte” pe multimea dependentelor functionale ın care membrul doi are un singur atribut.

Reguli de inferenta.

In continuare vom considera reguli formale de deducere a noi dependente functionale, pornind de la o multime data Σ.

Fie $\mathscr{R}$ o multime de reguli formale de deducere pentru dependente functionale si Σ o multime de dependente functionale. Spunem ca $X \rightarrow Y$ are o demonstratie ın Σ utilizand regulile $\mathscr{R}$, si vom nota $\Sigma|_{\mathscr{R}} X \rightarrow Y$, daca exista sirul $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, astfel ıncat:

a) $\alpha_n = X \rightarrow Y$, si

b) pentru orice i = 1, n, $\alpha_i \in \Sigma$ sau exista o regula din $\mathscr{R}$ de forma

$$\frac{\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{jk}}{\alpha_i},$$

unde j1, j2, . . . , jk < i (adica α_i se obtine utilizand o regula din $\mathscr{R}$, cu premizele existente ın sir ınainte de α_i). Corespunzator proprietatilor FD1–FD6 se pot defini reguli formale de deducere a dependentelor functionale:

$$\text{FD1f}: \frac{Y \subseteq X}{X \rightarrow Y}$$

$$\text{FD2f}: \frac{X \rightarrow Y,\ Z \subseteq W}{}$$

$$XW \rightarrow YZ$$

FD3f: $X \rightarrow Y,\ Y \rightarrow Z$

$$X \rightarrow Z$$

FD4f : $X \rightarrow Y,\ YW \rightarrow Z$

$$XW \rightarrow Z$$

FD5f : $X \to Y,\ X \to Z$

$$\frac{X \to Y,\ X \to Z}{X \to YZ}$$

FD6f : $X \to YZ$

$$\frac{X \to YZ}{X \to Y}$$

Armstrong a definit urmatoarele reguli de inferenta (numite axiomele lui Armstrong):

(A1) :

$$\frac{}{A1 \ldots Am \rightarrow Ai}, \quad i = 1,m$$

(A21) :

$$\frac{A1 \ldots Am \rightarrow B1 \ldots Br}{A1 \ldots Am \rightarrow Bj}, \quad j = 1, r$$

(A22) :

$$\frac{A1 \ldots Am \rightarrow Bj \;,\; j = 1, r}{A1 \ldots Am \rightarrow B1 \ldots Br}$$

(A3) : $A1 \ldots Am \rightarrow B1 \ldots Br,\ B1 \ldots Br \rightarrow C1 \ldots Cp$

$$\frac{A1 \ldots Am \rightarrow B1 \ldots Br,\quad B1 \ldots Br \rightarrow C1 \ldots Cp}{A1 \ldots Am \rightarrow C1 \ldots Cp}$$

unde Ai,Bj ,Ck sunt atribute.

Observatia 1.1 Regula A3 este ın fond FD3f (tranzitivitatea).

Definitie. Regula $\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jh}$

$$\frac{\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jh}}{\alpha_i}$$

se exprima cu ajutorul regulilor sistemului $\mathscr{R}$, daca:

$\{ \alpha_{j1} , . . . , \alpha_{jh}\} \vdash_{\mathscr{R}} \alpha_i$

Propozitia 1.3 Regulile FD4f, FD5f, FD6f se exprima cu ajutorul regulilor FD1f, FD2f, FD3f.

In adevar, fie $X \to Y$ si $YW \to Z$ date. Aplicam FD2f pentru $X \to Y$ si $W \subseteq W$, si obtinem $XW \to YW$. Aceasta din urma si $YW \to Z$ si FD3f conduc la $XW \to Z$.

Fie date $X \to Y$ si $X \to Z$. Aplicand FD2f pentru $X \to Y$ si $X \subseteq X$ obtinem $X \to XY$; de asemenea aplicam FD2f pentru $X \rightarrow Z$ si $Y \subseteq Y$ si obtinem $XY \rightarrow Y Z$. Prin tranzitivitate din $X \rightarrow XY$ si $XY \rightarrow Y Z$ obtinem

$X \rightarrow Y Z$.

Fie $X \rightarrow Y Z$. Dupa FD1f obtinem $Y Z \rightarrow Y$ si $Y Z \rightarrow Z$, aplicand FD3f se obtine $X \rightarrow Y$ si $X \rightarrow Z$.

Sa notam prin $\Sigma^{+}_{\mathscr{R}} = \{X \rightarrow Y \mid \Sigma \vdash_{\mathscr{R}} X \rightarrow Y\}$.

Fie $\mathscr{R}_1$ = {FD1f, FD2f, FD3f}, $\mathscr{R}_2 = \mathscr{R}_1 \cup$ {FD4f, FD5f, FD6f}, $\mathscr{R}_A$ = {A1,A21, A22, A3}.

Observatia 1.2. $\Sigma^{+}_{\mathscr{R}1} = \Sigma^{+}_{\mathscr{R}2}$ avand ın vedere propozitia 1.3.

Propozitia 1.4. Regulile din $\mathscr{R}_1$ se exprima prin cele din $\mathscr{R}_A$ si invers.

Demonstratie. Fie X = A1 . . .Am , si Y = $A_{i1} \ldots A_{ik}$, {i1, . . . , ik} ⊆ {1, 2, . . . ,m}. Aplicand regula A1 obtinem X → A_{i1} , . . . , X → A_{ik} , apoi considerand A22 obtinem X →$A_{i1} \ldots A_{ik}$, adica X → Y . Deci FD1f se exprima prin regulile din $\mathscr{R}_A$.

Fie $X \rightarrow Y$ si $Z \subseteq W$ date. Evidentiem atributele din fiecare:

$X = A1 \ldots Am$, $Y = B1 \ldots Bp$, $W = C1 \ldots Cq$,

$Z = C_{i1} \ldots C_{ik}$ cu $\{i1, \ldots, ik\} \subseteq \{1, 2, \ldots, q\}$.

Din $X \rightarrow Y$ prin A21 obtinem $X \rightarrow Bj$, $j = 1, p$.

Prin A1 , si A22 obtinem $XW \rightarrow X$. Din $X \rightarrow Bj$, si $XW \rightarrow X$ obtinem $XW \rightarrow Bj$, $j = 1, p$ utilizand A3.

Prin A1 obtinem $XW \rightarrow C_{il}$, $l = 1, k$.

Aplicand A22 pentru $XW \rightarrow Bj$, $j = 1, p$ si $XW \rightarrow C_{il}$, $l = 1, k$ obtinem $XW \rightarrow Y Z$.

Regula FD3f este exact A3.

Regula A1 se exprima numai prin FD1f. Regula A21 se exprima aplicand regula FD6f de $r-1$ ori, iar FD6f se exprima cu ajutorul celor din $\mathscr{R}_1$,

dupa propozitia 1.3.

Daca $\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jh}$

$$-------------- \in \mathscr{R}_1$$

$$\alpha_i$$

si se exprima cu ajutorul regulilor lui R2, notam

prin $trans_{\mathscr{R}2}$ (α_{j1} , . . . , α_{jh}, α_i) sirul de dependente ce se obtine pornind de la premizele α_{j1} , . . . , α_{jh} si aplicand regulile lui R2 pentru obtinerea lui α_i.

Propozitia 1.5 Fie $\mathscr{R}'_1$, si $\mathscr{R}'_2$ doua multimi de reguli, astfel ıncat $\mathscr{R}'_1$ se exprima prin $\mathscr{R}'_2$, si invers. Atunci

$\Sigma^{+}_{\mathscr{R}'1} = \Sigma^{+}_{\mathscr{R}'2}$ pentru orice multime Σ de dependente functionale.

Demonstratie. Fie $X \to Y \in \Sigma^{+}_{\mathscr{R}'1}$. Sa aratam ca $X \to Y \in \Sigma^{+}_{\mathscr{R}'2}$ (*)

Exista sirul $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = X \to Y$, astfel ıncat pentru orice i, i = 1, n avem:

a) $\alpha_i \in \Sigma$ sau

b) exista $\sigma = \alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jh}$

$$\text{----------------------} \in \mathscr{R}'_1$$

$$\alpha_i$$

cu j1, j2, . . . , jh < i

Demonstratia o realizam prin inductie dupa n.

Daca n = 1, atunci putem avea:

c) $\alpha_1 \in \Sigma$, si deci $\alpha_1 \in \Sigma^+_{\mathscr{R}'2}$ sau

d) $\text{--------------} \in \mathscr{R}'_1$

$$\alpha_1$$

In cazul d) sirul $trans_{\mathscr{R}'2}(\ , \alpha_1)$ constituie o demonstratie pentru α_1 ın Σ, utilizand $\mathscr{R}'_2$, adica $\alpha_1 \in \Sigma^+_{\mathscr{R}'2}$.

Presupunem afirmatia (*) valabila ın cazul ın care $X \to Y$ are demonstratii ın Σ utilizand reguli din $\mathscr{R}'_1$ si lungimea demonstratiei este mai mica sau egala cu n.

Fie acum $X \to Y \in \Sigma^+_{\mathscr{R}'1}$ cu lungimea demonstratiei egala cu n + 1. Exista sirul $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1} = X \to Y$, astfel ıncat pentru orice i, $1 \leq i \leq n + 1$, avem:

a1) $\alpha_i \in \Sigma$ sau

b1) exista β, instantierea unei reguli din $\mathscr{R}'_1$

$$\beta = \frac{\alpha_{j1}, \ldots \alpha_{jh}}{\alpha_i} \in \mathscr{R}'_1$$

cu j1, . . . , jh < i

Daca $\alpha_{n+1} \in \Sigma$, atunci $\alpha_{n+1} = X \to Y \in \Sigma^{+}_{\mathscr{R}'2}$.

Daca α_{n+1} se obtine prin b1), atunci exista

$\alpha_{j1}, \ldots \alpha_{jh}$

$$\overline{} \in \mathscr{R}'_1$$

$$\alpha_{n+1}$$

cu $j1, \ldots, jh < n + 1$.

Dupa ipoteza inductiei avem: $\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jh} \in \Sigma^{+}_{\mathscr{R}'2}$.

Fie $dem_{\mathscr{R}'2}(\alpha_{ji})$ o demonstratie pentru α_{ji} ın Σ, utilizand regulile lui $\mathscr{R}'_2$, $i = 1, h$.

Atunci sirul: $dem_{\mathscr{R}'2}(\alpha_{j1}), \ldots, dem_{\mathscr{R}'2}(\alpha_{jh}), trans_{\mathscr{R}'2}(\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jh}, \alpha_{n+1})$

constituie o demonstratie pentru α_{n+1} ın Σ, utilizand regulile din $\mathscr{R}'_2$. Deci $\alpha_{n+1} \in \Sigma^{+}_{\mathscr{R}'2}$.

Relatia (*) ınseamna $\Sigma^{+}_{\mathscr{R}'1} \subseteq \Sigma^{+}_{\mathscr{R}'2}$. Rationamentul fiind simetric, rezulta si incluziunea inversa, deci egalitatea dorita.

Consecinta 1.1 $\Sigma^{+}_{\mathscr{R}1} = \Sigma^{+}_{\mathscr{R}A} = \Sigma^{+}_{\mathscr{R}2}$.

Relatii Armstrong

Definitie. Fie Σ o multime de restrictii functionale peste schema R(U). Numim relatie Armstrong pentru Σ o relatie r_0, care satisface proprietatile:

1) r_0 satisface τ , $\forall\tau \in \Sigma^+_{\mathscr{R}1}$, si

2) r_0 nu satisface γ, $\forall\gamma \notin \Sigma^+_{\mathscr{R}1}$.

Obs. Proprietatea 1) este echivalenta cu 1'):

1') r_0 satisface τ , $\forall\tau \in \Sigma$

Fie $X \subseteq U$ si $\mathscr{R}$ o multime de reguli de inferenta. Sa notam prin $X^{+}_{\mathscr{R}} = \{A | \Sigma \mid\!-_{\mathscr{R}} X \rightarrow A\}$

Lema 1.1 $\Sigma \mid\!-_{\mathscr{R}1} X \rightarrow Y$ daca si numai daca $Y \subseteq X^{+}_{\mathscr{R}1}$.

Demonstratie. Fie $Y = A_1A_2 \ldots A_m$, $A_i \in U$, $i = 1,m$. Presupunem ca $Y \subseteq X^{+}_{\mathscr{R}1}$. Atunci $A_i \in X^{+}_{\mathscr{R}1}$, $i = 1,m$, deci $\Sigma \mid\!-_{\mathscr{R}1} X \rightarrow A_i$, $i = 1,m$. Aplicand regula A22 (A22 se exprima cu ajutorul regulilor din $\mathscr{R}1$) obtinem:

$\Sigma \mid\!-_{\mathscr{R}1} X \rightarrow Y$.

Invers, daca $\Sigma|\!-_{\mathscr{R}1} X \rightarrow Y$, atunci aplicand regula A21, (A21 se exprima cu ajutorul regulilor din $\mathscr{R}1$) se obtine: $\Sigma|\!-_{\mathscr{R}1} X \rightarrow A_i$, i = 1,m, ceea ce ınseamna $A_i \in X^+_{\mathscr{R}1}$, i = 1,m, deci $Y \subseteq X^+_{\mathscr{R}1}$.

Lema 1.2 Fie Σ o multime de dependente functionale si σ: $X \rightarrow Y$ o dependenta functionala astfel ıncat $\Sigma|\!\!-\!\!\!/_{\mathscr{R}1}\ X \rightarrow Y$. Atunci exista o relatie r_σ ce satisface toate dependentele din Σ si r_σ nu satisface $X \rightarrow Y$.

Demonstratie. Avem $X^+_{\mathscr{R}1} \not\subseteq U$, caci ın caz contrar,

$X^{+}_{\mathscr{R}1} = U$ si utilizand lema1.1 si faptul ca $Y \subseteq U$, obtinem $\Sigma \vdash_{\mathscr{R}1} X \to Y$, deci contradictie.

Definim relatia $r_\sigma = \{ t1, t2 \}$, unde t1 este uplul continınd 1 pentru toate atributele din U, iar t2 este definit prin:
$t2[A] = 1$ daca $A \in X^{+}_{\mathscr{R}1}$ si 0 altfel.

Deoarece $X^{+}_{\mathscr{R}1} \not\subseteq U$, rezulta $t1 \neq t2$.

1) Aratam ca r_σ satisface orice dependenta functionala $V \to W \in \Sigma$.

Presupunem contrariul, deci r_σ nu satisface $V \to W$.

Atunci $V \subseteq X^+_{\mathscr{R}1}$, caci daca $V \not\subseteq X^+_{\mathscr{R}1}$, exista $B \in V$, si $B \notin X^+_{\mathscr{R}1}$, ceea ce ınseamna $t1[B] \neq t2[B]$, deci

$t1[V] \neq t2[V]$, de unde rezulta r_σ satisface $V \to W$ (contradictie).

Pe de alta parte, avem: $W \not\subseteq X^+_{\mathscr{R}1}$, caci daca $W \subseteq X^+_{\mathscr{R}1}$, atunci $t1[W] = t2[W]$ (dupa definitia lui r_σ), ceea ce ar ınsemna ca r_σ satisface $V \to W$ (contradictie).

Din W $\not\subseteq X^{+}_{\mathscr{R}1}$ rezulta ca exista A $\in$ W, A $\not\in X^{+}_{\mathscr{R}1}$. Deci t2[A] = 0 si t1[A] = 1.

Relatia V $\subseteq X^{+}_{\mathscr{R}1}$ conduce la $\Sigma|\text{-}_{\mathscr{R}1} X \rightarrow V$, dupa lema 1.1. Dar $V \rightarrow W \in \Sigma$, aplicand tranzitivitatea rezulta

$\Sigma|\text{-}_{\mathscr{R}1}\ X \rightarrow W$, ceea ce ınseamna W $\subseteq X^{+}_{\mathscr{R}1,}$ contradictie.

2) Aratam ca r_σ nu satisface $X \rightarrow Y$.

Presupunem ca r_σ satisface $X \rightarrow Y$. Aceasta ınseamna ca t1[X] = t2[X] implica t1[Y] = t2[Y].

Deoarece $X \subseteq X^+_{\mathscr{R}1}$ si $t1[A] = t2[A]$, $\forall A \in X^+_{\mathscr{R}1}$, rezulta $t1[X] = t2[X]$, deci avem $t1[Y] = t2[Y]$, ceea ce ınseamna dupa definitia lui r_σ ca $Y \subseteq X^+_{\mathscr{R}1}$ si dupa lema 1.1, obtinem $\Sigma |\!-_{\mathscr{R}1} X \rightarrow Y$, deci o contradictie.

Teorema 1.1 (Armstrong). Fie Σ o multime de dependente functionale.

Atunci exista o relatie r0 ce satisface exact elementele lui $\Sigma^+_{\mathscr{R}1}$, adica:

1) r0 satisface τ , $\forall \tau \in \Sigma^+_{\mathscr{R}1}$, si

2) r0 nu satisface γ, $\forall \gamma \notin \Sigma^{+}_{\mathscr{R}1}$.

Demonstratie. Deoarece U este finita, rezulta ca Σ este finita si $P(U) \times P(U) - \Sigma^{+}_{\mathscr{R}1}$ este finita. (P(U) este multimea partilor lui U; pentru orice dependenta functionala $X \to Y$, exista o unica pereche $(X, Y) \in P(U) \times P(U)$).

Fie $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ dependentele care nu apartin multimii $\Sigma^{+}_{\mathscr{R}1}$. Pentru o restrictie $\sigma \notin \Sigma^{+}_{\mathscr{R}1}$ in lema anterioara am construit $r_\sigma = \{t1, t2\}$, unde t1 si t2 aveau valorile 0 si 1.

Vom considera valori diferite pentru $\sigma_i \neq \sigma_j$, si anume:

In $r_{\sigma i}$ vom considera valorile 2i−2 si 2i−1, $i = 1, k$.

Desigur $r_{\sigma i}$ le vom construi ca ın lema precedenta:

$r_{\sigma i} = \{t^i_1, t^i_2\}$,

$t^i_1 [A] = 2i - 1, \forall A \in U$, iar

$t^i_2 [A] = 2i - 1$ pentru $A \in X^+_{i,\mathscr{R}1}$ si $2i - 2$ altfel.

$(\sigma_i : X_i \to Y_i)$.

Definim r0 ca fiind reuniunea relatiilor $r_{\sigma i}$, $i = 1, k$. In continuare pentru fiecare atribut A ce satisface

$\Sigma \vdash_{\mathscr{R}1} \emptyset \to A$ (echivalent cu $A \in \emptyset^{+}_{\mathscr{R}1}$) ınlocuim toate valorile din coloana atributului A ın r0 cu o aceeasi valoare, notata v_A. Vom lua pentru

astfel de atribute A si A′, $v_A \neq v_{A'}$ si $v_A \geq 2k$.

Vom arata ca r0, astfel construita, este o relatie Armstrong pentru Σ.

a) Aratam ca r0 satisface orice $X \to Y \in \Sigma$.

Fie $A \in Y$ oarecare. Este suficient sa aratam ca r0 satisface $X \to A$ (aplicand uniunea va rezulta ca r0 satisface $X \to Y$). Distingem doua cazuri:

I. $X \subseteq \varnothing^{+}_{\mathscr{R}1}$. Avem $\Sigma|-_{\mathscr{R}1} \varnothing \to X$, si ımpreuna cu $X \to Y \in \Sigma$, obtinem $\Sigma|-_{\mathscr{R}1} \varnothing \to Y$ (prin tranzitivitate), ceea ce ınseamna $Y \subseteq \varnothing^{+}_{\mathscr{R}1}$ (lema 1.1).

$A \in Y$ si $Y \subseteq \varnothing^{+}_{\mathscr{R}1}$ implica $A \in \varnothing^{+}_{\mathscr{R}1}$ si din constructia lui r0 toate valorile ın coloana A sunt v_A, ceea ce denota faptul ca r0 satisface $X \to A$.

II. $X \not\subseteq \varnothing^{+}_{\mathscr{R}1}$. Rezulta ca $\exists B \in X$, $B \not\in \varnothing^{+}_{\mathscr{R}1}$.

Fie t1, t2 $\in$ r0 cu proprietatea t1[X] = t2[X].

Trebuie sa aratam ca t1[A] = t2[A].

Deoarece $B \in X$ si $B \not\in \varnothing^{+}_{\mathscr{R}1}$, rezulta ca ın aceasta situatie coloana lui B contine 2k valori

distincte, deci t1 si t2 nu contin aceleasi valori.

Deoarece t1[X] = t2[X], rezulta ca t1 si t2 provin din aceeasi relatie $r_{\sigma i}$. (Eventual anumite coloane A din t1 si t2 au suferit modificarea cu valori v_A). Dupa lema anterioara t1 si t2 initiale din r $_{\sigma i}$ au satisfacut Σ, deci si

$X \rightarrow A$. Noile t1 si t2 obtinute prin identificarea valorilor din anumite coloane, vor satisface, de asemenea,

$X \rightarrow A$, deci t1[A] = t2[A].

b) Aratam ca r0 nu satisface σ, $\forall \sigma \notin \Sigma^{+}_{\mathscr{R}1}$ (echivalent cu r0 nu satisface σ_i, i = 1, k).

Dupa lema anterioara stim ca r $_{\sigma i}$ nu satisface σ_i.

$r_{\sigma i} = \{t^i{}_1, t^i{}_2\}$,

$t^i{}_1 [A] = 2i - 1, \forall A \in U$, iar

$t^i{}_2[A] = 2i - 1$ pentru $A \in X^+{}_{i,\mathscr{R}1}$, $2i - 2$ altfel.

$(\sigma_i : X_i \to Y_i)$.

Deoarece $X_i \subseteq X^+{}_{i,\mathscr{R}1}$ ınseamna ca $\exists B_i \in Y_i$, $B_i \notin X^+{}_{i,\mathscr{R}1}$

astfel ıncat $t^i{}_1 [B_i] /= t^i{}_2 [B_i]$.

Vom arata ca nu toate coloanele de acest tip B_i din Y sufera identificarea datorita apartenentei atributului respectiv la $\varnothing^{+}{}_{\mathscr{R}1}$.

Presupunem ca pentru orice $B_i \in Y_i$, $B_i \notin X^{+}{}_{i,\mathscr{R}1}$

avem $Bi \in \varnothing^{+}{}_{\mathscr{R}1}$. Atunci $\Sigma|\text{-}_{\mathscr{R}1} \varnothing \to B_i$, aplicand uniunea obtinem: $\Sigma|\text{-}_{\mathscr{R}1}\varnothing \to Yi - X^{+}{}_{i,\mathscr{R}1}$. Aceasta ımpreuna cu $\Sigma|\text{-}_{\mathscr{R}1}$ $Xi \to \varnothing$ si tranzitivitatea ne dau

$\Sigma|\text{-}_{\mathscr{R}1}Xi \to Yi - X^{+}{}_{i,\mathscr{R}1}$.

Dar avem $\Sigma \vdash_{\mathscr{R}1} X_i \to X^+_{i,\mathscr{R}1}$, aplicand uniunea pentru toate A din $X^+_{i,\mathscr{R}1} = \{A \mid \Sigma \vdash_{\mathscr{R}1} X_i \to A\}$. Aplicand ınca o data uniunea obtinem $\Sigma \vdash_{\mathscr{R}1} X_i \to Y_i$, adica $\Sigma \vdash_{\mathscr{R}1} \sigma_i$, contradictie. Rezulta ca ın urma identificarii $\exists B_i \in Y_i$, astfel ıncat $t^i_1 [B_i] \neq t^i_2 [B_i]$. Avand $t^i_1 [X_i] = t^i_2 [X_i]$, rezulta ca r0 nu satisface σ_i.

Studiul dependentelor functionale utilizand calculul propozitional

Acest studiu a fost realizat de Fagin. Pentru fiecare atribut $A \in U$ se asociaza o variabila propozitionala notata a. Corespunzator dependentei functionale

$A1 \ldots Am \rightarrow B1 \ldots Bp$ asociem implicatia logica

$a1 \ldots am \Rightarrow b1 \ldots bp$, unde $a1 \ldots am$ ınseamna conjunctia logica a variabilelor $a1, a2, \ldots, am$;

similar b1 . . . bp. Semnul “$\Rightarrow$” reprezinta implicatia logica.

Vom nota valorile de adevar din calculul propozitional prin 1 (adevarat) , si 0 (fals).

O asignare o notam prin δ si este o functie δ: Var $\rightarrow$ {0, 1}, unde Var este multimea variabilelor propozitionale.

Functia δ se extinde la formule ın general (si la implicatii ın particular) prin

δ (p1 $\wedge$ p2) = δ (p1) $\wedge\delta$ (p2), p1 si p2 fiind formule,

δ (p1 v p2) = δ (p1) vδ (p2),

δ (¬ p) = ¬ δ (p),

unde conjunctia, disjunctia si negatia ın {0, 1} sunt definite ın modul cunoscut.

Rezulta ca δ (a1 . . . am $\Rightarrow$ b1 . . . bp) = 1 daca si numai daca:

1. $\exists$i, 1 ≤ i ≤ m, astfel ıncat δ (ai) = 0 sau

2. $\forall$i, i = 1,m, δ (ai) = 1 , si $\forall$j, j = 1, p, δ (bj) = 1.

In calculul propozitional exista notiunea de consecinta logica a unei formule g dintr-o multime de formule F. Se noteaza prin $F \models_{c.l.} g$, daca

$(\forall\delta)[(\forall f \in F, \delta(f) = 1) \leadsto \delta(g) = 1]$;

δ noteaza o asignare a variabilelor propozitionale.

Pentru o dependenta σ vom nota prin $\bar{\sigma}$ implicatia atasata, iar pentru o multime de dependente functionale Σ, vom nota prin $\bar{\Sigma} = \{ \bar{\sigma} | \sigma \in \Sigma \}$.

Exemplul 2.1 Fie $\Sigma = \{AB \to C, AC \to D, BD \to E\}$. Atunci $\bar{\Sigma} = \{ab \Rightarrow c, ac \Rightarrow d, bd \Rightarrow e\}$.

Vom stabili o legatura ıntre notiunea de “consecinta” definita ın domeniul dependentelor functionale si notiunea de “consecinta logica” definita ın domeniul calculului propozitional.

Fie σ: $AB \to E$ si Σ din exemplul anterior. Se pune ıntrebarea daca $\Sigma \models \sigma$?

Pentru aceasta, fie r o relatie ce satisface toate elementele lui Σ si fie t1, t2 $\in$ r

astfel ıncat t1[AB] = t2[AB]. Din r satisface AB $\rightarrow$ C rezulta t1[C] = t2[C], deci t1[AC] = t2[AC].

Din faptul ca r satisface AC $\rightarrow$ D rezulta t1[D] = t2[D], deci t1[BD] = t2[BD].

Din faptul ca r satisface BD $\rightarrow$ E rezulta ca t1[E] = t2[E],

deci r satisface AB $\rightarrow$ E. In concluzie $\Sigma \models$ AB $\rightarrow$ E.

Vrem sa vedem acum daca $\bar{\Sigma}$|=$_{\text{c.l.}}$ $\bar{\sigma}$? Pentru aceasta vom putea proceda astfel: construim tabela cu cele 25 asignari ale variabilelor propozitionale a, b, c, d, e , si vom calcula valoarea de asignare pentru toate elementele lui $\bar{\Sigma}$ si pentru $\bar{\sigma}$, si daca ın fiecare caz, ın care toate elementele lui $\bar{\Sigma}$ sunt 1, rezulta si $\bar{\sigma}$ este 1, atunci vom avea $\bar{\Sigma}$|=$_{\text{c.l.}}$ $\bar{\sigma}$.

Dar putem reduce acest calcul considerand

asignarile δ astfel:

1. Daca $\delta(a) = 0$ sau $\delta(b) = 0$, atunci $\delta(\bar{\sigma}) = 1$.

2. Daca $\delta(a) = \delta(b) = 1$, atunci deoarece δ trebuie sa satisfaca $ab \Rightarrow c$, rezulta $\delta(c) = 1$. Cum δ trebuie sa satisfaca $ac \Rightarrow d$, rezulta $\delta(d) = 1$, si la fel δ trebuie sa satisfaca $bd \Rightarrow e$, rezulta $\delta(e) = 1$, deci $\delta(ab \Rightarrow e) = 1$,

adica $\delta(\bar{\sigma}) = 1$.

Vom stabili echivalenta ıntre “consecinta” din universul dependentelor functionale si “consecinta logica” din calculul propozitional.

Teorema 2.1 (de echivalenta). Fie Σ o multime de dependente functionale si σ o dependenta functionala. Fie $\bar{\Sigma}$ multimea de implicatii corespunzatoare lui

Σ si $\bar{\sigma}$ implicatia asociata lui σ. Atunci avem:

σ este consecinta a lui Σ daca si numai daca

$\bar{\sigma}$ este consecinta logica a lui $\bar{\Sigma}$

$$\Sigma \models \sigma \text{ iff } \bar{\Sigma} \models_{c.l.} \bar{\sigma}.$$

Conform acestei teoreme problema deciderii daca o dependenta functionala este consecinta a unei multimi de dependente se transforma ıntr-o problema de a

decide daca o implicatie este consecinta logica a unei multimi de implicatii.

Pentru aceasta ultima problema de decizie exista un algoritm eficient, datorat lui Chang.

Dupa propozitiile 1.1, 1.2, putem presupune ca Σ are dependentele cu un singur atribut ın partea dreapta , si la fel σ are ın partea dreapta un singur atribut.

Algoritmul lui Chang:

1. Se considera cuvinte formate peste $\overline{U} \cup \{\sim, *\}$ astfel:

pentru a1 . . . am $\Rightarrow$ b $\in \overline{\Sigma}$ se considera cuvantul

$\sim a1 * \sim a2 * . . . \sim am * b$

Daca U = {A1, . . . ,An}, atunci $\overline{U}$ = {a1, . . . , an}.

Sa notam prin S multimea de cuvinte obtinute.

2. Daca $\bar{\sigma}$ are forma: c1 . . . ck $\Rightarrow$ d, atunci adaugam la S urmatoarele k + 1 cuvinte:

c1

c2

...

ck

~ d

Numim o variabila ai “atom” , si ~ ai “atom negat”.

3. Algoritmul cauta un atom X, astfel ıncat X este un cuvant ın S , si exista un cuvant ce ıncepe cu ~ X. Daca exista un astfel de atom, se selecteaza

unul arbitrar si se sterge ~ X din fiecare sir ce ıncepe cu ~ X (eventual si * daca acest caracter * urmeaza ın sir).

4. Se continua pasul 3) atat timp cat exista un astfel de atom. Este clar ca algoritmul se opreste ıntotdeauna si exista 2 situatii:

(a) s-a obtinut sirul vid, notat cu λ sau

(b) nu exista nici un atom X ce satisface cele 2 conditii si nu s-a obtinut sirul vid.

Daca avem (a) atunci $\bar{\sigma}$ este consecinta logica a lui $\bar{\Sigma}$, altfel $\bar{\sigma}$ nu este consecinta logica a lui $\bar{\Sigma}$.

Exemplul 2.2 Fie $\bar{\Sigma}$ = {ab ⇒ c, ac ⇒ d, bd ⇒ e} si $\bar{\sigma}$: ab ⇒ e. Atunci:

S = {~ a∗ ~ b ∗ c, ~ a∗ ~ c ∗ d, ~ b∗ ~ d ∗ e, a, b, ~ e}.

Putem alege X = a, atunci S devine

S = {~ b ∗ c, ~ c ∗ d, ~ b∗ ~ d ∗ e, a, b, ~ e}

In continuare putem lua X = b si S devine

S = {c, ~ c * d, ~ d * e, a, b, ~ e}

Fie acum X = c, atunci S devine:

S = {c, d,~ d * e, a, b, ~ e}

Luand acum X = d obtinem:

S = {c, d, e, a, b,~ e},

Pentru X = e, rezulta:

S = {c, d, e, a, b, λ}, deci $\bar{\Sigma} \models_{c.l.} \bar{\sigma}$.

Teorema 2.2 (de completitudine a dependentelor). Fie Σ o multime de dependente functionale, σ o dependenta functionala. Atunci avem σ este o consecinta a lui Σ daca si numai daca σ are o demonstratie ın Σ utilizand regulile de inferenta A1,A2,A3 (axiomele lui Armstrong).

In notatii, teorema se exprima prin:

$\Sigma \models \sigma$ iff $\Sigma \vdash_{\mathscr{R}_A} \sigma$.

Demonstratie. Regulile de inferenta A1,A2,A3 au forma:

(A1) $A1 \ldots Am \rightarrow Ai, \ 1 \leq i \leq m$

(A21) $A1 \ldots Am \rightarrow B1 \ldots Br$

$$\frac{A1 \ldots Am \rightarrow B1 \ldots Br}{A1 \ldots Am \rightarrow Bj}, \ j = 1, r,$$

(A22)

$$\frac{A1 \ldots Am \rightarrow Bj, \ j = 1, r}{A1 \ldots Am \rightarrow B1 \ldots Br}$$

(A3) $\dfrac{A1...Am \rightarrow B1...Br,\quad B1...Br \rightarrow C1...Cp}{A1...Am \rightarrow C1...Cp}$

Fapt 1: Daca $\mathscr{R}$ este un sistem de reguli de inferenta valide si daca $\Sigma \vdash_{\mathscr{R}} \sigma$, atunci $\Sigma \models \sigma$.

O regula $\dfrac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}{\alpha}$

se numeste valida daca$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \models \alpha$.

Justificarea faptului rezulta prin inductie asupra lungimii demonstratiei. Fie

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_h = \sigma$ o demonstratie pentru σ ın Σ utilizand regulile $\mathscr{R}$. Daca

$h = 1$, atunci $\sigma_1 = \sigma$ poate fi ın una din situatiile:

a) $\sigma_1 = \sigma \in \Sigma$, si deci $\Sigma \models \sigma$, sau

b) exista o regula de forma $\frac{}{\sigma} \in \mathscr{R}$;

regula fiind valida, rezulta σ dependent triviala

(deci satisfacuta de orice relatie), de unde $\Sigma \models \sigma$.

Presupunem Fapt 1 adevarat pentru demonstratii de lungime mai mica sau egala cu h. Fie o demonstratie a lui σ de lungime $h + 1$: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_h, \sigma_{h+1} = \sigma$.

Pentru σ avem 2 situatii:

c) $\sigma \in \Sigma$, deci $\Sigma \models \sigma$ sau

d) $\exists \quad \sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{ik}$

$$\frac{\qquad\qquad}{\sigma} \in \mathscr{R},\ i1, \ldots, ik \leq h.$$

In cazul d) dupa ipoteza inductiei avem:

$\Sigma \models \sigma_{i1}, \ldots, \Sigma \models \sigma_{ik}$, si deoarece

regula este valida, avem $\{\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{ik}\} \models \sigma$.

Rezulta atunci $\Sigma \models \sigma$.

Regulile (A1) (A2) (A3) sunt valide, din proprietatile dependentelor functionale.

Deci putem aplica Fapt 1, ceeace implica:

Daca $\Sigma |\text{--}_{\mathscr{R}A}\ \sigma$, atunci $\Sigma \models \sigma$.

Invers: presupunem $\Sigma \models \sigma$. Consideram $\Sigma^{+}_{\mathscr{R}A}$

(ınchiderea lui Σ referitoare la regulile de inferenta $\mathscr{R}A$).

Stim ca:

$$\Sigma^{+}_{\mathscr{R}A} = \{\sigma_1 | \Sigma |\text{--}_{\mathscr{R}A}\ \sigma_1\}.$$

Trebuie sa aratam ca $\sigma \in \Sigma^{+}_{\mathscr{R}A}$.

Avem: $\Sigma \subseteq \Sigma^{+}_{\mathscr{R}A}$.

Dupa teorema lui Armstrong (Teorema 1.1) exista o relatie r0 ce satisface exact elementele din $\Sigma^{+}_{\mathscr{R}1}$, unde $\mathscr{R}1$ = {FD1f, FD2f, FD3f}.

Dupa consecinta 1.1, avem $\Sigma^{+}_{\mathscr{R}1} = \Sigma^{+}_{\mathscr{R}A}$. Deci relatia r0 satisface exact elementele lui $\Sigma^{+}_{\mathscr{R}A}$.

Deoarece $\Sigma \subseteq \Sigma^{+}_{\mathscr{R}A}$, rezulta ca r0 satisface toate dependentele din Σ.

Avand $\Sigma \models \sigma$ obtinem ca r0 satisface σ. Deoarece r0 satisface exact elementele lui $\Sigma^{+}_{\mathscr{R}A}$, obtinem:

$\sigma \in \Sigma^{+}{}_{\mathscr{R}A}$, deci $\Sigma |\text{--}_{\mathscr{R}A}\ \sigma$.

Reguli de inferenta pentru formule.

(similare cu regulile A1,A2, A3).

(A1′) -----------------, $1 \leq i \leq m$

$a1 \ldots am \Rightarrow ai$

(A21′) $a1 \ldots am \Rightarrow b1 \ldots br$

$$\overline{}, \; j = 1, r,$$

$$a1 \ldots am \Rightarrow bj$$

(A22') $\qquad \dfrac{a1 \ldots am \Rightarrow bj \;,\; j = 1, r}{a1 \ldots am \Rightarrow b1 \ldots br}$

(A3') $\qquad \dfrac{a1 \ldots am \Rightarrow b1 \ldots br,\; b1 \ldots br \Rightarrow c1 \ldots cp}{a1 \ldots am \Rightarrow c1 \ldots cp}$

Teorema 2.3 (de completitudine implicationala). Fie $\bar{\Sigma}$ o multime de implicatii asociate dependentelor functionale din Σ, $\bar{\sigma}$ implicatia asociata dependentei functionale σ. Atunci $\bar{\sigma}$ este consecinta logica a lui $\bar{\Sigma}$ daca si

numai daca $\bar{\sigma}$ are o demonstratie ın $\bar{\Sigma}$, utilizand regulile de inferenta (A1′),(A21′),(A22′), (A3′).

Demonstratie. Regulile (A1′), (A21′), (A22′), (A3′) considerate ca reguli ın calculul propozitional sunt valide, adica orice asignare care face adevarate premizele regulii, va face adevarata si concluzia regulii. Procedand ca ın demonstratia teoremei de completitudine a dependentelor obtinem ca daca $\Sigma \vdash_{A1',A21',A22',A3'} \sigma$, atunci $\Sigma \models_{c.l.} \sigma$.

Invers, fie $\Sigma \models_{c.l.} \sigma$.

Va trebui sa aratam ca: $\Sigma \vdash_{A1',A21',A22',A3'} \sigma$.

Fie $\bar{\sigma}$: $a_1 \ldots a_m \Rightarrow d_1 \ldots d_h$.

Sa notam prin:

PROV E = $\{e | \Sigma |\text{--}_{A1', A21', A22', A3'} \; a_1 \ldots a_m \Rightarrow e\}$

Aplicand regula (A1′) obtinem $a_i \in$ PROV E, $1 \leq i \leq m$.

Aratam ca $d_j \in$ PROV E, pentru orice $j = 1, h$.

Presupunem contrariul, deci $\exists j \in \{1, 2, \ldots, h\}$, astfel

ıncat $dj \notin$ PROV E, adica:

Σ|-/- $_{A1',A2',A22',A3'}$ $a_1 \dots a_m \Rightarrow d_j$.

Consideram urmatoarea asignare:

$\delta_0(x) = 1$ daca $x \in$ PROV E si 0 altfel

Deoarece $a_i \in$ PROV E, rezulta ca $\delta_0(a_i) = 1$, orice i = 1,m.

Relatia: $d_j \notin$ PROV E implica $\delta_0(d_j) = 0$, deci $\delta_0(\bar{\sigma}) = 0$.
Aratam ca δ_0 satisface toate elementele din $\bar{\Sigma}$.

Fie $b_1 \dots b_r \Rightarrow c_1 \dots c_p \in \bar{\Sigma}$. Avem doua situatii:

1. $b_i \in$ PROV E pentru orice i = 1, r; aceasta ınseamna ca $\Sigma|\!\!-_{A1',A21',A21',A3'}\ a_1 \ldots a_m \Rightarrow b_i$, i = 1, r

Aplicand (A22′) obtinem:

$\Sigma|\!\!-_{A1',A21',A22',A3'}\ a_1 \ldots a_m \Rightarrow b_1 \ldots b_r$.

Aceasta relatie ımpreuna cu $b_1 \ldots b_r \Rightarrow c_1 \ldots c_p \in \overline{\Sigma}$ si (A3′) conduc la:

$\Sigma|\!\!-_{A1',A21',A22',A3'}\ a_1 \ldots a_m \Rightarrow c_1 \ldots c_p$.

De aici, aplicand (A22′) obtinem:

$\Sigma|\!-\!-_{A1',A21',A22',A3'}\ a_1 \ldots a_m \Rightarrow c_k$, $1 \le k \le p$,

ceea ce ınseamna ca $c_k \in$ PROVE, orice k, $1 \le k \le p$, si dupa definitia lui δ_0 obtinem :

$\delta_0 (c_k) = 1$, $\forall k$, $1 \le k \le p$, deci $\delta_0 (c_1 \ldots c_p) = 1$, ceea ce ınseamna:

$\delta_0(b_1 \ldots b_r \Rightarrow c_1 \ldots c_p) = 1.$

2. Exista $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, astfel ıncat $b_i \notin$ PROVE.
Aceasta ınseamna ca:

δ_0 (b_i) = 0, deci δ_0 (b_1 . . . b_r) = 0, de unde

δ_0 (b_1 . . . $b_r \Rightarrow c_1$ . . . c_p) = 1.

Asignarea δ_0 construita mai sus satisface conditia

δ_0 ($\bar{\gamma}$) = 1, orice $\bar{\gamma} \in \overline{\Sigma}$, dar avem:

δ_0 ($\bar{\sigma}$) = 0. Acest lucru contrazice ipoteza $\Sigma \models_{c.l.} \sigma$.

Inseamna ca toate variabilele $d_j \in$ PROV E, j = 1, $\overline{h}$.

De aici rezulta:

$\Sigma \vdash_{A1', A21', A22', A3'} a_1 \ldots a_m \Rightarrow d_j$, j = 1, $\overline{h}$

Aplicand A22′ se obtine :

$\Sigma \mid\!-\!-_{A1',A21',A22',A3'}\ a_1 \ldots a_m \Rightarrow d_1 \ldots d_h$, adica:

$\Sigma \mid\!-\!-_{A1',A21',A22',A3'}\ \bar{\sigma}$.

Demonstrarea teoremei de echivalenta.

Teorema 2.1 (de echivalenta). Fie Σ o multime de dependente functionale si σ o dependenta functionala. Fie $\bar{\Sigma}$ multimea de implicatii corespunzatoare lui Σ si $\bar{\sigma}$ implicatia asociata lui σ. Atunci avem:

σ este consecinta a lui Σ daca si numai daca

$\bar{\sigma}$ este consecinta logica a lui $\bar{\Sigma}$

$$\Sigma \models \sigma \quad \text{iff} \quad \bar{\Sigma} \models_{\text{c.l.}} \bar{\sigma}.$$

Demonstratie. Dupa teorema de completitudine a dependentelor avem:

$\Sigma \models \sigma$ iff $\Sigma \vdash_{\mathscr{R}A} \sigma$

Orice demonstratie a lui σ ın Σ, utilizand regulile $\mathscr{R}_A$ se poate transforma sintactic ıntr-o demonstratie a lui $\bar{\sigma}$ ın $\bar{\Sigma}$ utilizand regulile A′1,A21’,A22’,A3’ si ınlocuind

atributele prin variabilele propozitionale respective, semnul ” → ” prin ” ⇒ ”si invers. Deci avem:

$\Sigma \vdash_{\mathscr{R}A} \sigma$ iff $\bar{\Sigma} \vdash_{A1',A21',A22',A3'} \bar{\sigma}$

Dupa teorema de completitudine implicationala

avem:

Σ|-- $_{A1',A21',A22',A3'}$ $\bar{\sigma}$ iff $\bar{\Sigma}$|=$_{c.l.}$ $\bar{\sigma}$.

Astfel avem:

Σ |= σ iff $\bar{\Sigma}$|=$_{c.l.}$ $\bar{\sigma}$.