SEMINAR 7

Exerciţii recomandate: 7.1 i), 7.2 a), e), 7.3
Rezerve: 7.1 ii), iv), 7.2 b), f), 7.4, 7.5 a), b), f)

S7.1 i) Fie $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită de

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + \frac{28}{5}x_3y_3 - x_1y_2 - 2x_1y_3 - x_2y_1 + 4x_2y_3 - 2x_3y_1 + 4x_3y_2,$$

pentru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

a) Arătaţi că aplicaţia g este o formă biliniară simetrică pe $\mathbb{R}^3$.
b) Găsiţi matricea lui g în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$. Determinaţi discriminantul lui g şi $\operatorname{rang} g$.
c) Determinaţi $\operatorname{Ker}(g)$.
d) Găsiţi matricea lui g în raport cu baza $\{(1, 1, 1), (2, -1, 2), (1, 3, -3)\}$.
e) Scrieţi forma pătratică h corespunzătoare lui g şi stabiliţi o formă normală a lui h. Determinaţi signatura lui h şi deduceţi forma biliniară corespunzătoare formei normale a lui h.
f) Determinaţi o bază a lui $\mathbb{R}^3$ în raport cu care h are forma normală de mai sus. Caracterizaţi dintr-un punct de vedere geometric nucleul lui h.

Repetaţi acest exerciţiu pentru:

ii) $g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 5x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + 3x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2$;
iii) $g_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_1 + 2x_3y_2$;
iv) $g_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$,

unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

S7.2 Stabiliţi ce este, dintr-un punct de vedere geometric, nucleul fiecăreia dintre formele pătratice neomogene:

a) $h_1(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_2^2 - 26x_1 + 18x_2 - 39$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
b) $h_2(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 18x_1 - 18x_2 + 9$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
c) $h_3(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 14x_1 - 2x_2 + 3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
d) $h_4(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 12x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 + 14x_1 + 16x_2 - 12x_3 - 33$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
e) $h_5(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 2$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
f) $h_6(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
g) $h_7(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1 - 4x_2 + 4$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
h) $h_8(\mathbf{x}) = x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3 - 1$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

S7.3 Fie $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma biliniară definită de

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1y_1 + 13x_2y_2 + 14x_3y_3 - 3x_1y_2 + 2x_1y_3 - 3x_2y_1 - 12x_2y_3 + 2x_3y_1 - 12x_3y_2,$$

pentru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

a) Arătaţi că g determină pe $\mathbb{R}^3$ o structură de spaţiu prehilbertian, pentru care vectorii $(1, 0, 0)$ şi $(1, 1, 0)$ sunt ortogonali.
b) Ortonormalizaţi sistemul $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ în raport cu structura de mai sus.

S7.4 Fie $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ forma biliniară definită de

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 5x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3 - x_4y_4 + x_1y_2 - x_1y_3 - 2x_1y_4 + x_2y_1 + 2x_2y_3 - x_2y_4 - x_3y_1 + 2x_3y_2 + x_3y_4 - 2x_4y_1 - x_4y_2 + x_4y_3,$$

pentru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$.

a) Arătaţi că g este simetrică şi determinaţi $Ker(g)$.
b) Găsiţi matricea lui g în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$. Determinaţi discriminantul lui g şi $\operatorname{rang} g$.
c) Scrieţi forma pătratică a lui h corespunzătoare lui g. Stabiliţi forma normală a lui h şi o bază a lui $\mathbb{R}^4$ în raport cu care h are această formă normală.
d) Determinaţi signatura lui h.

S7.5 Stabiliţi ce este, dintr-un punct de vedere geometric, nucleul fiecăreia dintre formele pătratice neomogene:

a) $h(\mathbf{x}) = 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 + 2$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.
b) $h(\mathbf{x}) = x_1 - x_3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
c) $h(\mathbf{x}) = 7x_1^2 - 8x_1x_2 + x_2^2 - 6x_1 - 12x_2 - 9$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
d) $h(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2 - 20x_1x_2 + 4x_1x_3 + 16x_2x_3 - 24x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 180$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
e) $h(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 - x_1 - 1$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
f) $h(\mathbf{x}) = x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

S7.6* Pe spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$ considerăm două forme pătratice h_1 şi $h_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definite de:

(1) $h_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$;
(2) $h_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \sqrt{2}x_1x_2 + \sqrt{2}x_1x_3$,

pentru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Aduceţi cele două forme pătratice la forma canonică printr-o schimbare ortogonală de bază.

Bibliografie recomandată

[1] V. T. Borcea, C. I. Davideanu, C. Forăscu, *Algebră liniară*, Ed. “Gh. Asachi”, Iaşi, 2000.
[2] E. Cioară, *Algebră liniară.Geometrie analitică (culegere de probleme)*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2009.
[3] M. Constantinescu, O. Dogaru, M.-M. Doroftei, *Capitole de algebră liniară şi geometrie analitică. Noţiuni teoretice şi probleme,* Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2012.
[4] M. Craioveanu, I. D. Albu, *Geometrie afină şi euclidiană. Exerciţii*, Ed. Facla, Timişoara, 1982.
[5] E. Denne, *More Quadratic Surfaces.Visions in Math*, Washington & Lee University, 2016.
[6] Z. Dvořák, *Bilinear and Quadratic Forms,* Lessons on Linear Algebra, 2015.
[7] P. Matei, *Algebră liniară şi geometrie analitică.Culegere de probleme,* Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2007.
[8] A. R. Saro, A. R. Moyano - *Algebra y Geometria Quadratica*, Netbiblo, 2007.