# Algoritmul de eliminare Gauss - descompunere LU

Fie sistemul

$$\begin{aligned} 2x_1 + \quad\quad + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Alg. de eliminare Gauss fără interschimbări de ecuații:

<u>Pas 1</u>:

$$Ec\,2 = Ec\,2 + \left(-\frac{3}{2}\right) * Ec\,1$$
$$Ec\,3 = Ec\,3 + (-2) * Ec\,1$$

Obținem sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 + \quad\quad + 2x_3 = 4 \\ \quad\quad x_2 + 2x_3 = 1 \\ \quad\quad x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

Același sistem îl obținem dacă folosim matricea inf. triunghiulară

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

și schimbăm sist

$$Ax = b \longrightarrow T_1 A x = T_1 b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pas 2 : $Ec\,3 = Ec\,3 + (-1) * Ec\,2$

Obținem sistemul superior triunghiular:

$$\begin{cases} 2x_1 + \phantom{x_2} + 2x_3 = 4 \\ \phantom{2x_1 +} x_2 + 2x_3 = 1 \\ \phantom{2x_1 + x_2 +} 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Dacă folosim:

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = U \quad T_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avem:

$$T_2 T_1 A = U \Leftrightarrow$$

$$A = \underbrace{T_1^{-1} T_2^{-1}}_{L} \cdot U = L \cdot U$$

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = T_1^{-1} T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Am obținut o descompunere LU pentru matricea A cu $l_{ii} = 1 \ \forall i = \overline{1,3}$

Pentru alg de eliminare Gauss cu pivotare parțială vom obține o descomp. LU pentru o permutată a matricii A (pe linii)

Algoritmul de eliminare Gauss cu pivotare parțială.

$I_{kl}$ = matricea $I_n$ în care s-au interschimbat linia k cu linia l

$I_{kl} * A$ = interschimbă liniile k și l

$A * I_{kl}$ = interschimbă coloanele k și l

$$I_{kl}^{-1} = I_{kl}$$

Pas 1: $\max\{|2|, |3|, |4|\} = 4 = |a_{31}|$

- se interschimbă $ec_3$ cu $ec_1$
- pas Gauss de transformare:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 8x_3 = 9 & / * \left(-\frac{3}{4}\right) + ec_2 \quad / * \left(-\frac{1}{2}\right) + ec_3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 7 \\ 2x_1 + \quad + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 8x_3 = 9 \\ \frac{1}{4}x_2 - x_3 = \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2}x_2 - 2x_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Matriceal, acest lucru este echivalent cu

$$T_1 I_{13} A x = T_1 I_{13} b$$

cu $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Pas 2</u>: $\max \left\{ \left|\frac{1}{4}\right|, \left|-\frac{1}{2}\right| \right\} = \frac{1}{2} = |a_{32}|$

- se intersch $ec_2$ cu $ec_3$
- pas Gauss de transformare

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 8x_3 = 9 \\ -\frac{1}{2}x_2 - 2x_3 = -\frac{1}{2} \quad / \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + ec_3 \\ \frac{1}{4}x_2 - x_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 8x_3 = 9 \\ -\frac{1}{2}x_2 - 2x_3 = -\frac{1}{2} \\ -2x_3 = 0 \end{cases} \qquad U = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Matricial:

$$T_2\, I_{23}\,(T_1\, i_{13}\, A)\, x = T_2\, i_{23}\,(T_1\, I_{13}\, b)$$

$$T_2\, i_{23}\, T_1\, i_{13}\, A = U \,;\; T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2\, \underbrace{i_{23}\, T_1\, i_{23}}_{T_1'}\, \underbrace{i_{23}\, i_{13}\, A}_{PA} = U$$

$$T_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PA = \underbrace{(T_1')^{-1}\, T_2^{-1}}_{L}\, U$$

$$(T_1')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = (T_1')^{-1} \, T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/4 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PA = I_{23} \, I_{13} \, A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

matricea A cu liniile permutate

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/4 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 0 & -1/2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

descompunere LU cu $l_{ii} = 1$