Seminar #6

Probabilităţi şi Statistică

Lanturi Markov

Problema 1

1. O metodă naivă de a prezice starea vremii este următoarea: starea meteo de mâine este aceeaşi cu cea de astăzi. Vom presupune că acest tip de predicţie este adevărat în 75% dintre cazuri. Pentru a simplifica prespunem că există doar două tipuri de vreme: "însorită" şi "ploioasă". Determinaţi lanţul Markov al stărilor meteo, digraful de tranziţie şi probabilităţile de echilibru.

Notam starile:
P("starea meteo de maine este aceeasi cu cea de astazi")=0.75
S1 - "vreme insorita"
S2 - " vreme ploioasa"
Lantul Markov:

- - spatiul starilor $S = \{s_1, s_2\}$
- probabilitatile p_{ij} de trecere de la o stare la alta

Matricea de tranzitie asociata va fi $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j=1,2}$
Asadar,

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

unde

$$p_{ij} = P(X_2 = s_j \mid X_1 = s_i), \; i, j = 1, 2$$

aici prin X_2 inteleg "ziua de maine", iar X_1 "ziua de astazi"
Aşadar,

$$p_{11} = P(X_2 = s_1 \mid X_1 = s_1) = 0.75.$$

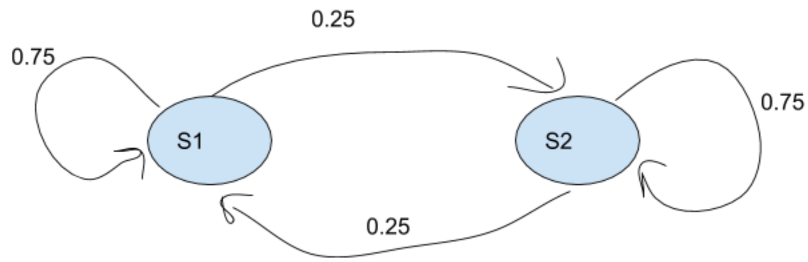
Cum $p_{11} + p_{12} = 1 \Rightarrow p_{12} = 0.25$

$$p_{22} = P(X_2 = s_2 \mid X_1 = s_2) = 0.75, \; p_21 = 1 - 0.75 = 0.25.$$

Matricea de tranzitie este

$$P = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

Digraful de tranzitie:



Cum avem doar o singura clasa $\{s_1, s_2\}$ recurentă neperiodică, putem calcula probabilitatile de echilibru π_i:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{2} \pi_k p_{kj} = \pi_j, \quad j = 1,2 \\ \sum\limits_{k=1}^{2} \pi_k = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} = \pi_1 \\ \pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22} = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Asadar avem de rezolvat sistemul

$$\begin{cases} 0.75\pi_1 + 0.25\pi_2 = \pi_1 \\ 0.25\pi_1 + 0.75\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$$

Problema 2

2. Metoda anterioară de prezicere este modificată în cazul unui oraş însorit: probabilitatea de a trece de la o zi ploioasa la una însorită este 0.5, iar probabilitatea de a trece de la o zi însorită la una ploioasă este 0.1. Reluaţi exerciţiul în acest caz.

In acest caz
P("trecere de la o zi ploioasa la o zi insorita") $= 0.5$
P("trecere de la o zi insorita la o zi ploioasa") $= 0.1$
Notam ca la exercitiul precedent
S1 - "vreme insorita"
S2 - " vreme ploioasa"
Deci

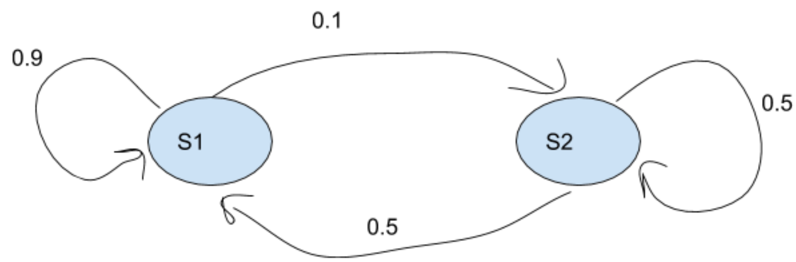
$$p_{12} = P(X_2 = s_2 \mid X_1 = s_1) = 0.1 \Rightarrow p_{11} = 1 - 0.1 = 0.9$$

$$p_{21} = P(X_2 = s_1 \mid X_1 = s_2) = 0.5 \Rightarrow p_{22} = 1 - 0.5 = 0.5$$

Matricea de tranzitie

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Digraful de tranzitie



Cum avem doar o singura clasa $\{s_1, s_2\}$ recurentă neperiodică, putem calcula probabilitatile de echilibru π_i din sistemul

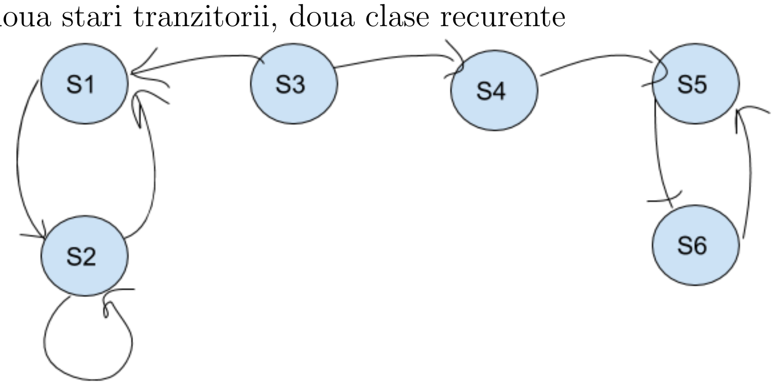
$$\begin{cases} 0.9\pi_1 + 0.5\pi_2 = \pi_1 \\ 0.1\pi_1 + 0.5\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 0.5\pi_2 = 0.1\pi_1 \Rightarrow \pi_1 = 5\pi_2$$

Dar cum $\pi_1 + \pi_2 = 1 \Rightarrow \pi_1 = \dfrac{5}{6},\ \pi_2 = \dfrac{1}{6}$

Problema 3

3. Desenaţi digraful de tranziţie al unui lanţ Markov care să aibă mai multe clase recurente şi mai multe stări tranzitorii.

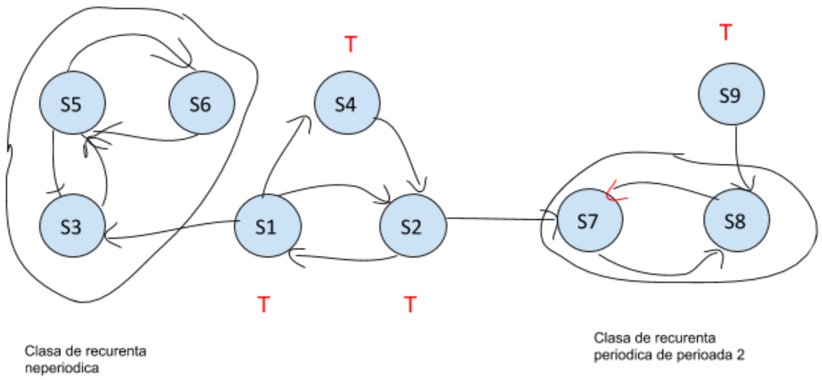
- doua stari tranzitorii, doua clase recurente



Starile tranzitorii: $\{S3\},\ \{S4\}$

Clasele recurente: $A(S1) = A(S2) = \{S1, S2\},\ A(S5) = A(S6) = \{S5, S6\}$

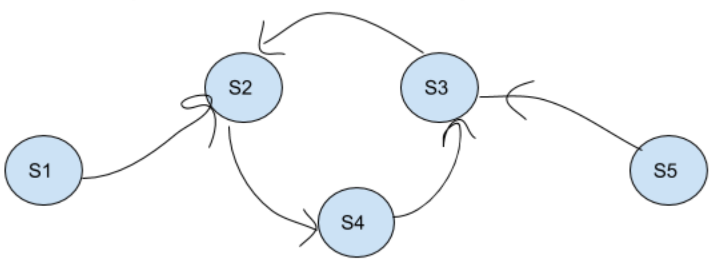
- doua clase recurente (una periodica una neperiodica) si 4 stari tranzitorii



Stari tranzitorii: $\{S1\}, \{S2\}$, $\{S4\}, \{S9\}$
Clase recurente:
- $\{S3, S5, S6\}$ clasa recurenta neperiodica
- $\{S7, S8\}$ clasa recurenta periodica de perioada 2

Problema 4

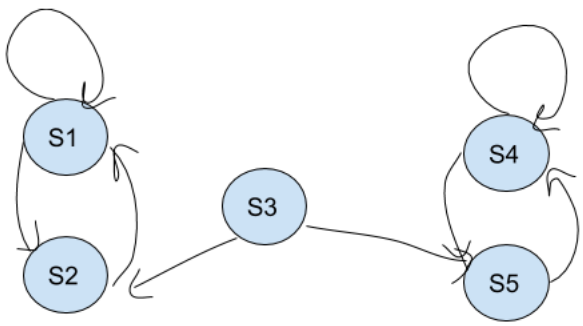
4. Desenaţi digraful de tranziţie al unui lanţ Markov care să aibă o clasă recurentă periodică şi două stări tranzitorii.



- clasa recurenta periodica de perioada 3 $\{S2, S4, S3\}$
-stari tranzitorii: $S1$, $S5$

Problema 6

6. Desenaţi digraful de tranziţie al unui lanţ Markov care să aibă două clase recurente neperiodice şi o stare tranzitorie.



-clasa recurenta neperiodica $\{S1, S2\}, \{S4, S5\}$
-stari tranzitorii $\{S3\}$

Problema 12

12. Se dă un lanţ Markov omogen cu patru stări a cărui matrice de tranziţie este următoarea:

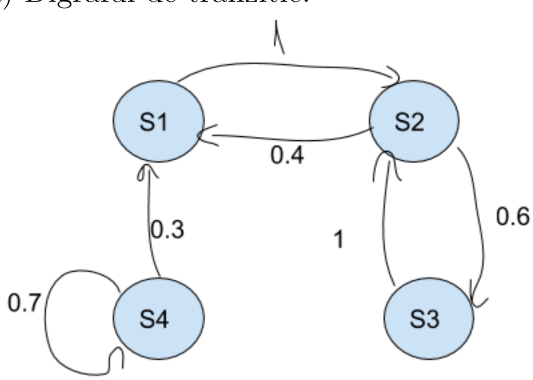
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

(a) Desenaţi digraful de tranziţie.

(b) Determinaţi clasele recurente şi stările tranzitorii.

(c) Există vreo clasă periodică?

(a) Digraful de tranzitie:



(b) Clasele recurente $\{S1, S2, S3\}$, stare tranzitorie: $S4$
(c) Nu.

Problema 14

14. Un muzeu are în custodie trei pânze de Renoir, două de Cézanne şi una de Monet, dar are spaţiu pentruy a expune doar una dintre aceste pânze. Astfel că tabloul expus este schimbat în fiecare lună cu unul dintre celelalte cinci aleator şi uniform. Găsiţi matricea de tranziţie a acestul lanţ Markov.

Solutie: 3R,2C,1M

Notez:

- S_1=”tabelul ales este Renoir”
- S_2=”tabelul ales este Cézanne”
- S_3=”tabelul ales este Monet”
- X_1=”luna curenta, X_2=”luna urmatoare”

$$
\begin{gathered}
p_{11} = P(X_2 = S1 \mid X_1 = S_1) = \frac{2}{5}, \;\; p_{12} = P(X_2 = S2 \mid X_1 = S_1) = \frac{2}{5} \;\; p_{13} = P(X_2 = S3 \mid X_1 = S_1) = \frac{1}{5} \\
p_{21} = P(X_2 = S1 \mid X_1 = S_2) = \frac{3}{5}, \;\; p_{22} = P(X_2 = S2 \mid X_1 = S_2) = \frac{1}{5}, \;\; p_{23} = P(X_2 = S3 \mid X_1 = S_2) = \frac{1}{5}, \\
p_{31} = P(X_2 = S1 \mid X_1 = S_3) = \frac{3}{5}, \; p_{32} = P(X_2 = S2 \mid X_1 = S_3) = \frac{2}{5} \; p_{33} = P(X_2 = S3 \mid X_1 = S_3) = 0
\end{gathered} \tag{1}
$$

Matricea de tranzitie:

$$
P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}
$$

Problema 21

21. Un controler tratează cererile de citire scriere (read-write) pe un suport de memorie de la trei procese diferite. Condiţiile sunt de aşa natură că fiecare proces are un număr nelimitat de astfel de cereri. După satisfacerea unei cereri a procesului j controlerul tratează o cerere a procesului j cu probabilitate p_{ij}, unde $P = (p_{ij})$ este următoarea matrice

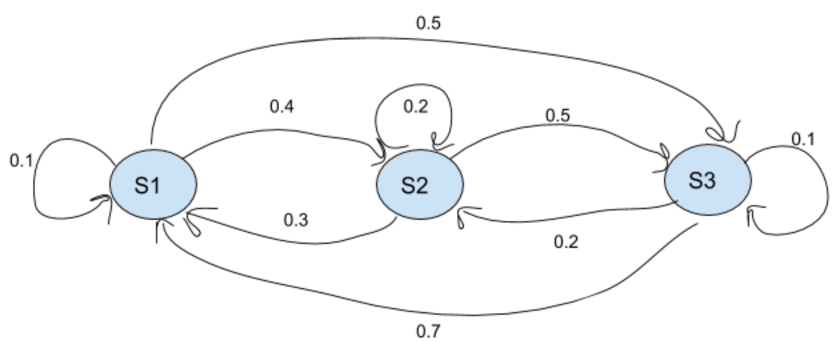
$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Presupunem că o scriere/citire durează un acelaşi timp constant.

(a) Modelaţi această situaţie ca un lanţ Markov cu trei stări şi desenaţi digraful corespunzător.

(b) Determinaţi probabilităţile de echilibru, dacă acestea există.

Solutie:
Starile lantului Markov: S1, S2, S3
Digraful lantului Markov



Avem o **clasa recurenta neperiodica** $\{S1, S2, S3\}$ (nu este periodica deoarece am putea avea situatia S1-S1-S1-S2-S3).
Cum lantul Markov contine doar o singura clasa recurenta neperiodica, putem calcula probabilitatile de echilibru π_j. Prin urmare avem sistemul

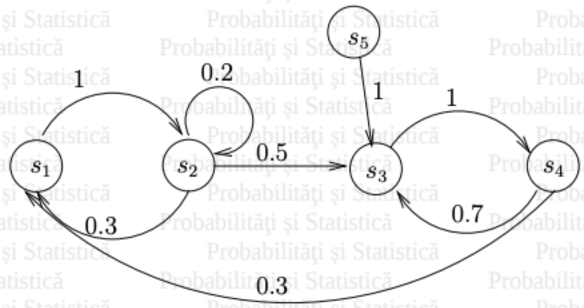
$$\begin{cases} p_{11}\pi_1 + p_{21}\pi_2 + p_{31}\pi_3 = \pi_1 \\ p_{12}\pi_1 + p_{22}\pi_2 + p_{32}\pi_3 = \pi_2 \\ p_{13}\pi_1 + p_{23}\pi_2 + p_{33}\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.1\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.7\pi_3 = \pi_1 \quad (1) \\ 0.4\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.2\pi_3 = \pi_2 \quad (2) \\ 0.5\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0.1\pi_3 = \pi_3 \quad (3) \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \quad (4) \end{cases}$$

Din (3) $\Rightarrow \pi_1 + \pi_2 = \frac{9}{5}\pi_3$

Din (4)$\Rightarrow \frac{9}{5}\pi_3 + \pi_3 = 1$. Aşadar, $\pi_3 = \frac{5}{14} \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} \pi_1 = \frac{31}{28 \cdot 3},\ \pi_2 = \frac{23}{28 \cdot 3}$

Problema 23

23. **În desenul de mai jos este trasat digraful unui lanţ Markov discret şi omogen.**



(a) **Determinaţi matricea de tranziţie corespunzătoare, clasele recurente şi stările tranzitorii.**

(b) **Dacă există o singură clasă recurentă neperiodică, determinaţi probabilităţile de echilibru ale stărilor.**

(a) Matricea de tranzitie : avem 5 stari, deci P va avea 5 linii si 5 coloane:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

- Stari tranzitorii: $\{S5\}$
- Clase recurente: $\{S1, S2, S3, S4\}$

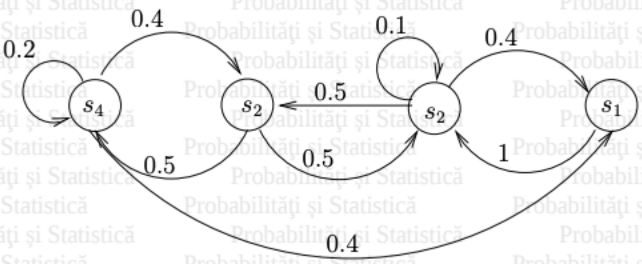
Se observa ca $p_{22} \neq 0$, prin urmare clasa recurenta este neperiodica. (avem bucla la S2, adica putem avea situatia s1-s2-s2-s2-s2-...-s3-s4-s1)
Cum clasa recurenta $\{S1, S2, S3, S4\}$ este neperiodică, există probabilitatile de echilibru $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$ ce urmeaza a fi determinate din sistemul

$$\begin{cases} 0\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0\pi_3 + 0.3\pi_4 + 0\pi_5 = \pi_1 \\ \pi_1 + 0.2\pi_2 + 0\pi_3 + 0\pi_4 + 0\pi_5 = \pi_2 \\ 0\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0\pi_3 + 0.7\pi_4 + \pi_5 = \pi_3 \\ 0\pi_1 + 0\pi_2 + \pi_3 + 0\pi_4 + 0\pi_5 = \pi_4 \\ 0\pi_1 + 0\pi_2 + 0\pi_3 + 0\pi_4 + 0\pi_5 = \pi_5 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.3\pi_2 + 0.3\pi_4 = \pi_1 \\ \pi_1 = 0.8\pi_2 \\ 0.5\pi_2 + 0.7\pi_4 + \pi_5 = \pi_3 \\ \pi_3 = \pi_4 \\ \pi_5 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1 \end{cases}$$

Solutia sistemului va fi $\pi_1 = \frac{12}{77}, \pi_2 = \frac{15}{77}, \pi_3 = \pi_4 = \frac{25}{77}, \pi_5 = 0$

Problema 24

24. În desenul de mai jos este trasat digraful unui lanţ Markov discret şi omogen.



(a) Determinaţi matricea de tranziţie corespunzătoare, clasele recurente şi stările tranzitorii.

(b) Dacă există o singură clasă recurentă neperiodică, determinaţi probabilităţile de echilibru ale stărilor.

Este gresit desenul, o sa punem s4-s3-s2-s1

Solutie:

Lantul Markov are 4 stari: S1,S2,S3,S4.

Matricea de tranzitie:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.4 & 0 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Avem 0 stari tranzitorii si o singura clasa recurenta neperiodica $\{S1, S2, S3, S4\}$ - exista un circuit care trece prin toate starile, si avem bucle $p_{22} \neq 0$.

(b) Cum avem o singura clasa recurenta neperiodica, exista probabilitatile de echilibru $\pi_1, ..., \pi_4$ pe care o sa le aflam din sistemul:

$$\begin{cases} 0.4\pi_2 + 0.4\pi_4 = \pi_1 \\ \pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.5\pi_3 = \pi_2 \\ 0.5\pi_2 + 0.4\pi_4 = \pi_3 \\ 0.5\pi_3 + 0.2\pi_4 = \pi_4 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{34}{25}\pi_4 \\ \pi_2 = \frac{12}{5}\pi_4 \\ \pi_3 = \frac{8}{5}\pi_4 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \Rightarrow \pi_4 = \frac{25}{159} \end{cases}$$

Prin urmare avem probabilitatile de echilibru:

$$\pi_1 = \frac{34}{159}, \quad \pi_2 = \frac{60}{159}, \quad \pi_3 = \frac{40}{159}, \pi_4 = \frac{25}{159}.$$