EXERCITII

1.Să se descrie un algoritm care sa genereze toate grafurile cu mulțimea de virfuri $\{1,2,\ldots,n\}$.

2.Interpretați combinatoriu elementele puterilor succesive A^k, $k \in N^*$, unde A este matricea de adiacență a grafului G.

3. $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n) \in Z_+^n$ se numeste secvență grafică dacă există G un graf cu n virfuri $\{1,2,\ldots,n\}$ astfel incit $d_G(i) = d_i \quad \forall i = 1,n$. Să se descrie un algoritm care să decidă pentru un D dat dacă este sau nu secvență grafică .

4. Demonstrați că un graf G este conex dacă și numai dacă oricare ar fi o partiție $V(G) = (V_1, V_2)$,
există $v_i \in V \quad (i = 1,2)_i$ astfel încât $v_1 v_2 \in E(G)$.

5. Demonstrați că un graf conex G este complet dacă și numai dacă mulțimea vecinilor oricărui vârf de grad maxim în G este clică.

6. Demonstrați că oricare ar fi G un graf, măcar unul din grafurile G sau $\overline{G}$ este conex.

7. Demonstrați că în orice graf conex G cu cel puțin două vârfuri, există măcar două vârfuri care nu-s puncte de articulație.

8. Demonstrați că oricare ar fi G un graf autocomplementar $(G \cong \overline{G})$: este conex, $|G| \equiv 0 (\bmod 4) \quad sau \quad |G| \equiv 1 (\bmod 4)$; are măcar un subgraf izomorf cu P_4.

9. Se dă un graf G și $p, q \in N^*$ astfel încât $|G| = p + q$. Descrieți un algoritm care să construiască o partiție $V(G) = (P, Q)$ astfel încât $|P| = p, |Q| = q$ și $\Delta([P]_G) + \Delta([Q]_G) \leq \Delta(G)$.

10. Fie $G = (\{1,....,n\}, E(G))$ un graf.
Definim $G \oplus G$ graful cu mulțimea vârfurilor $\{1,2,...,n\} \cup \{1',2',...,n'\}$ și cu mulțimea muchiilor $E(G \oplus G) = E(G) \cup \{i'j' \mid \forall ij \in E(G)\} \cup \{ii' \mid \forall i \in V(G)\}$.
Se consideră pentru $n \in N$ grafurile H_n definite recursiv astfel:

$$H_0 = K_1$$
$$H_n = H_{n-1} \oplus H_{n-1} \quad n > 0$$

a) Desenati H_3.
b) Determinați ordinul și dimensiunea lui H_n
c) Dat n să se construiască matricea de adiacență a lui H_n.
d) Demonstrați că H_n este bipartit și să se construiască o bipartiție a sa.
e) Să se determine numărul de stabilitate al lui H_n.
f) Demonstrați algoritmic că H_n este hamiltonian.

11. Fie T un arbore reprezentat cu ajutorul listelor de adiacență.

a) Să se modifice reprezentarea astfel incat:

- fiecare lista de adiacență să fie circulară (ultimul element puncteaza la primul).

-fiecare element al listei de adiacentă *A(v)* conține: vecinul curent (u); un pointer *next* către urmatorul element al listei,; un pointer *invers* către elementul din lista de adiacență a lui u care il conține pe v; un pointer *succesor* care este neinițializat.

b) Pentru orice element din listele de adiacenta, se pune *succesor* $\leftarrow$ *invers*$\uparrow$*.next*. Se observă că dacă elementul reprezintă arcul *vu*, atunci *succesor* punctează la un arc *uw*. Demonstrati ca in acest fel (cu ajutorul pointerului succesor) se obține o organizare de tip list circulară a elementelor din listele de adiacență.

12. Fie G un graf reprezentat cu ajutorul listelor de adiacenta, cu multimea virfurilor $\{1,2,\ldots,n\}$. Se cere sa se ordoneze $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ astfel incat:

$$\forall i \in [2..n] \quad \left|N_G(v_i)\cap\{v_1,\ldots v_{i-1}\}\right| = \max_{j\geq i}\left|N_G(v_j)\cap\{v_1,\ldots,v_{i-1}\}\right|.$$

Aceasta ordonare se numeste ordinea *max-adiacenta.* Complexitatea algoritmului: *O(n+m).*

13. Să se testeze dacă un graf dat este bipartit utilizind parcurgerea bfs.

14. Dat D un digraf să se decidă in O(n+m) dacă are un circuit folosind parcurgerea dfs.

15. Fie $G=(\{1,....,n\},E(G))$ un graf cu $d_G(i)=d_i \ \forall i \qquad d_1\leq d_2\leq\cdots\cdots\leq d_n$. Demonstrați că dacă $d_k\geq k \quad \forall k\leq n-d_n-1$, atunci G este conex.

16. In graful $G=(\{1,....,n\},E(G))$ notam $\delta(G)=\min\{d_G(i); i=1,n\}$

Descrieți un algoritm de complexitate $O(n\delta(G))$ pentru aflarea unui vârf de grad minim într-un graf G dat cu ajutorul listelor de adiacență.

17. Fie $G=(\{1,....,n\},E(G))$ un graf și $a\colon E(G)\to R$. Dacă s și t sunt două vârfuri ale lui G, se definește locul îingust al drumului D de la s la t ca fiind $b(D)=\min\{a(e)\,|\,e\in E(D)\}$.

Descrieți un algoritm care să determine drumul de la s la t cu locul îngust maxim.

18. Desrcieti un algoritm care sa determine pentru un graf (dat cu ajutorul listelor de adiacenta) componenta conexa cu numar maxim de virfuri.

19. Fie $G = (\{1,....,n\}, E(G))$ un digraf complet fără perechi de arce simetrice (turneu). Să se construiască un drum hamiltonian în *G*.

20. a) Fie *G* un graf bipartit *k*-regulat ($k \geq 1$). Demonstrați că *G* are un cuplaj *M* astfel 1ncât fiecare vârf al grafului este incident cu o muchie din cuplaj.
    b) Demonstrați că pentru orice graf bipartit *H* cu gradul maxim *k*, se poate construi un graf bipartit *G* *k*-regulat astfel încât *H* este subgraf indus al lui *G*.
    c) Deduceți că în orice graf bipartit *G* există un cuplaj *M* cu proprietatea că $\Delta(G - M) = \Delta(G) - 1$.

21. Fie D un digraf și $a::E(D) \to R$, $b:E(D) \to R_+^*$. Să se determine C^* circuit în D astfel încât $$\frac{a(C^*)}{b(C^*)} = \min\left\{\frac{a(C)}{b(C)} \mid C \quad circuit\ in\ D\right\}.$$

22. Fie T un arbore cu $n \geq 2$ vârfuri $\{1,2,....,n\}$. Pentru $i = \overline{1,n-1}$ se execută : se șterge vârful pendant cel mai mic și se pune $a_i =$ vecinul acestui vârf pendant. Se obține vectorul $a(T) = a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ $(a_{n-1} = n)$ care se numește *codul Prüfer* asociat lui T. Implementați algoritmul de obținere a lui $a(T)$ pentru un T dat.

23. Fie G un graf conex și T_G familia arborilor săi parțiali. Se consideră graful $H = (T_G, E(H))$ unde $T_1T_2 \in E(H) \Leftrightarrow |E(T_1)\Delta E(T_2)| = 2$.
    Demonstrați că H este conex.

24. Arătați că dacă T este un arbore, atunci prin orice vârf pendant trece o mulțime stabilă de cardinal maxim a lui T. Deduceți un algoritm pentru determinarea lui $\alpha(T)$.

25. Arătați că în orice digraf *G*, există o mulțime *S* de vârfuri astfel încât *S* este mulțime stabilă în graful suport asociat și orice vârf dinafara lui S este accesibil din *S* pe un drum de lungime cel mult 2 (*S* se numește *seminucleu*). Dacă drmul anterior se cerea să fie de lungime 1 se obținea ceea ce se numește *nucleu*. Construiți un digraf care nu are nucleu.

26. Fie *G=(V,E)* un graf cu $|V| = n$ și $|E| = m$. Demonstrați că există o 2-partiție a

lui V astfel încât numărul muchiilor cu extremităţi în clase diferite ale partiţiei este măcar $m/2$.

27. Care este numărul total de secţiuni ale unei reţele al cărei digraf suport are n+2 vârfuri ?

28. Un arc al unei reţele *R=(G,s,t,c)* se numeşte *vital* dacă îndepărtarea sa din G provoacă cea mai mare scădere a valorii fluxului maxim de la s la t. Descrieţi un algoritm polinomial de determinare a unui arc vital.

29. Demonstraţi că dacă G este bipartit, atunci $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$.

30. Fie G un graf conex cu $|V| = n$ gradul maxim $\Delta \geq 3$, şi diametrul d .

    Demonstraţi că $n \leq 1 + \Delta \cdot \dfrac{(\Delta-1)^d - 1}{\Delta - 2}$.

31. Arătaţi că în orice graf există măcar două vârfuri de acelaşi grad.

32. Fie G un graf de ordin n astfel incât pentru vârfurile neadiacente v şi w ale sale are loc inegalitatea $d_G(v) + d_G(w) \geq n$. Demonstraţi că G este hamiltonian dacă şi numai dacă *G+vw* este hamiltonian. Fie G un graf cu proprietatea că pentru orice două vârfuri neadiacente este satisfăcută inegalitatea de mai sus. Demonstraţi că G este hamiltonian şi construiţi un circuit hamiltonian în G în timp polinomial.