Baze de date relaționale / Dependențe

Nicolae-Cosmin Vârlan

October 31, 2015

Elemente ale modelului relațional

- U mulțime de atribute: $U = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$;
- $dom(A_i)$ - domeniul valorilor atributului A_i;

Definim *uplu* peste U ca fiind funcția:

$$\varphi : U \rightarrow \bigcup_{1 \leq i \leq n} dom(A_i) \quad \text{a.i. } \varphi(A_i) \in dom(A_i), 1 \leq i \leq n$$

Fie valorile v_i astfel încât $v_i = \varphi(A_i)$.

Notăm cu $\{A_1 : v_1,\ A_2 : v_2,\ \ldots,\ A_n : v_n\}$ asocierea dintre atributele existente în U și valorile acestora. In cazul în care sunt considerate mulțimi ordonate (de forma $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$), notația va fi de forma: $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Elemente ale modelului relațional

Consideram mulțimea ordonată $(A_1, A_2, \ldots A_n)$. Pentru orice uplu φ, există vectorul $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ a.i. $\varphi(A_i) = v_i$, $1 \leq i \leq n$.

Pentru un vector $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ cu $v_i \in dom(A_i)$, $1 \leq i \leq n$ există un uplu φ a.i. $\varphi(A_i) = v_i$.

In practică este considerată o anumită ordonare a atributelor.

Elemente ale modelului relațional

O mulțime de uple peste U se numește *relație* și se notează cu r.

r poate varia în timp dar nu și în structură.

Exemplu:
$r = \{(v_{11}, v_{12}, \ldots v_{1n}), (v_{21}, v_{22}, \ldots v_{2n}), \ldots, (v_{m1}, v_{m2}, \ldots v_{mn})\}$.

Structura relației se va nota cu $R[U]$ unde R se numește *numele relației* iar U este mulțimea de *atribute* corespunzătoare.

Notații echivalente $R(U)$, $R(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, $R[A_1, A_2, \ldots, A_n]$.

$R[U]$ se mai numește și *schemă de relație*.

Elemente ale modelului relațional

In practică, o relație r poate fi reprezentată printr-o matrice:

$$r : \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \hline v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mn} \\ \hline \end{array}$$

unde $(v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$ este un uplu din r, $1 \leq i \leq m$ și $v_{ij} \in dom(A_j),\ 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m$

Vom nota cu t_i linia cu numarul i din matrice:
$t_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$

Elemente ale modelului relațional

O mulțime finită D de scheme de relație se numește *schemă de baze de date*. Formal, $D = \{R_1[U_1], \ldots, R_h[U_h]\}$ unde $R_i[U_i]$ este o schemă de relație, $1 \leq i \leq h$.

O *bază de date peste D* este o corespondență ce asociază fiecărei scheme de relație din D o relație.

Exemplu:
$r_1, r_2, \ldots r_h$ este o bază de date peste $D = \{R_1[U_1], \ldots, R_h[U_h]\}$.

Considerând D ca fiind ordonată $D = (R_1[U_1], \ldots, R_h[U_h])$, putem nota baza de date sub forma $(r_1, r_2, \ldots r_h)$

Operatii

Asupra unei multimi de relatii putem efectua o serie de operatii. Exista doua categorii de operatori:

- operatori din teoria multimilor (reuniunea, intersectia, diferenta, produsul cartezian)
- operatori specifici algebrelor relationale (proiectia, selectia, joinul general, joinul natural)

Operații în cadrul modelului relațional - *reuniunea*

In cazul operatiilor pe multimi (cu exceptia produsului cartezian), acestea se realizeaza intre doua relatii. Trebuie sa existe o compatibilitate, relativa la multimea de atribute peste care sunt construite cele doua tuple, in sensul ca acele atribute care apar in prima relatie trebuie sa apara si in a doua relatie si reciproc.

Reuniunea a două relații r_1 și r_2, ambele peste $R[U]$, este o relație notată cu $r_1 \cup r_2$ definită astfel:

$$r_1 \cup r_2 = \{t \mid t = uplu,\ \ t \in r_1 \ sau \ t \in r_2\}$$

In practica, acest lucru se realizeaza utilizand cuvantul cheie UNION. Studentii din anii 1 si 3 sunt selectati de interogarea:

```
SELECT * FROM studenti WHERE an=1
 UNION
 SELECT * FROM studenti WHERE an=3;
```

Operații în cadrul modelului relațional - *diferența*

Diferența a două relații r_1 si r_2, ambele peste $R[U]$, este o relație notată cu $r_1 - r_2$ definită astfel:

$$r_1 - r_2 = \{t \mid t = uplu,\ \ t \in r_1\ si\ t \notin r_2\}$$

In practica, acest lucru se realizeaza utilizand cuvantul cheie MINUS. Pentru a-i selecta pe studentii din anul 2 fara bursa, putem sa ii selectam pe toti apoi sa ii eliminam pe cei cu bursa:

```
SELECT * FROM studenti WHERE an=2
  MINUS
  SELECT * FROM studenti WHERE bursa IS NOT NULL;
```

Se observa ca, la fel ca in cazul reuniunii, cele doua multimi de tuple peste care s-a facut diferenta sunt construite peste aceeasi multime de atribute.

Operații în cadrul modelului relațional - *internsecția*

Internsecția a două relații r_1 si r_2, ambele peste $R[U]$, este o relație notată cu $r_1 \cap r_2$ definită astfel:

$$r_1 \cap r_2 = \{t \mid t = uplu,\ \ t \in r_1\ si\ t \in r_2\}$$

In practica, acest lucru se realizeaza utilizand cuvantul cheie INTERSECT. Putem afla care studenti din anul 2 au bursa ruland:

```
SELECT * FROM studenti WHERE an=2
  INTERSECT
  SELECT * FROM studenti WHERE bursa IS NOT NULL;
```

Operatorul de intersectie poate fi obtinut din ceilalti doi:
$r_1 \cap r_2 = r_1 - (r_1 - r_2)$

Operații în cadrul modelului relațional - *produs cartezian*

Produsul cartezian a două relații r_1 definită peste $R_1[U_1]$ și r_2 definită peste $R_2[U_2]$ cu $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ este o relație notată cu $r_1 \times r_2$ definită astfel:

$$r_1 \times r_2 = \{t \mid t = uplu\ peste\ U_1 \cup U_2,\ t[U_1] \in r_1\ si\ t[U_2] \in r_2\}$$

De aceasta data, cele doua relatii nu trebuie sa fie peste aceeasi multime de atribute. Rezultatul va fi o noua relatie peste o multime de atribute formata din atributele relatiilor initiale.

Operații în cadrul modelului relațional - *produs cartezian*

Daca un atribut s-ar repeta, el va fi identificat diferit. Spre exemplu, chiar daca tabelele note si cursuri au un acelasi camp, nu se face nici o sincronizare dupa acesta ci vor avea ca efect crearea a doua atribute diferite: r1.camp, r2.camp.

Produsul cartezian intre aceste tabele, in practica, se obtine executand interogarea:

```
SELECT * FROM cursuri, note;
```

Operații specifice algebrelor relaționale

Operatiile pe multimi aveau ca elemente tuplele. Uneori aceste tuple nu sunt compatibile (de exemplu nu putem reuni o relatie peste $R_1[U_1]$ cu $R_2[U_2]$).

Pentru a opera asupra atributelor ce definesc tuplele din rezultat, avem nevoie de o serie de operatori specifici algebrelor relationale: proiectia, si diverse variatii ale join-ului.

Operații în cadrul modelului relațional - *proiecția*

Considerăm:

- $R[U]$ = schemă de relație;
- $X \subseteq U$;
- t = uplu peste $R[U]$ ($t \in r$).

Se numește *proiecția lui t relativă la X* și notată cu $t[X]$, restricția lui t la mulțimea de atribute X.

Exemplu:
Dacă $U = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ atunci $t = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.
Considerăm $X = (A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k})$, $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$.

atunci $t[X] = (v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k})$;

Operații în cadrul modelului relațional - *proiecția*

Dacă r este o relație peste $R[U]$ și $X \subseteq U$, atunci *proiecția lui r relativă la X* este $r[X] = \{t[X] \mid t \in r\}$

Exemplu:
Dacă $U = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ atunci
$r = \{(v_{11}, v_{12}, \ldots v_{1n}), (v_{21}, v_{22}, \ldots v_{2n}), \ldots, (v_{m1}, v_{m2}, \ldots v_{mn})\}$.
Considerăm $X = (A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k})$, $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$.

atunci
$r[X] = \{(v_{1_{i_1}}, v_{1_{i_2}}, \ldots v_{1_{i_k}}), (v_{2_{i_1}}, \ldots v_{2_{i_k}}), \ldots, (v_{m_{i_1}}, \ldots v_{m_{i_k}})\}$

In practica, proiectia se realizeaza selectand doar anumite campuri alte tabelei (anumite atribute):

SELECT nume, prenume FROM studenti;

Operații în cadrul modelului relațional - *proiecția*

Ca si exemplu, vom scrie o interogare care sa returneze toate persoanele care trec pragul Facultatii (studenti si profesori):

```
SELECT nume, prenume FROM studenti
  UNION
  SELECT nume, prenume FROM profesori;
```

In cazul in care campurile cele doua campuri (nume, prenume) din cele doua tabele au acelasi tip (de exemplu nume este de tip VARCHAR2(10) in ambele tabele), interogarea va afisa toate persoanele ce “trec pragul Facultatii”.

Observatie: Pentru a modifica tipul nume din tabela profesori la VARCHAR2(10) executati comanda:

```
ALTER TABLE profesori MODIFY nume VARCHAR2(10);
```

Operații în cadrul modelului relațional - *join* (natural)

Considerăm:

- r_1 relație peste $R_1[U_1]$;
- r_2 relație peste $R_2[U_2]$;

Se numește *join* (sau *unire*) a relațiilor r_1 si r_2, relația $r_1 * r_2$ peste $U_1 \cup U_2$ definită prin:

$$r_1 * r_2 = \{t \mid t \text{ uplu peste } U_1 \cup U_2,\ t[U_i] \in r_i,\ i = 1, 2\}$$

Dacă R este un nume pentru relația peste $U_1 \cup U_2$ atunci $r_1 * r_2$ este definită peste $R[U_1 \cup U_2]$
Pentru simplitate vom nota $U_1 \cup U_2$ cu U_1U_2.

Operații în cadrul modelului relațional - *join* (natural)

Exemplu:
Fie $R_1[A, B, C, D]$, si $R_2[C, D, E]$ si r_1, r_2 a.i.:

r_1 :

A	B	C	D
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	0	1

r_2 :

C	D	E
1	1	0
1	1	1
0	0	0
1	0	0
1	0	1

Atunci: $r_1 * r_2$:

A	B	C	D	E
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	1	0	1

Operații în cadrul modelului relațional - *join* (natural)

Urmatoarea interogare identifica cui apartine fiecare nota din tabelul note. Joinul se face dupa campul nr_matricol intre tabelele studenti si note:

```
SELECT nume, valoare FROM studenti
  JOIN note ON studenti.nr_matricol = note.nr_matricol
```

Se poate observa ca daca din produsul cartezian am elimina acele cazuri in care campul "nr_matricol" nu este identic in ambele tabele, am obtine, de fapt, acelasi rezultat. Din acest motiv, joinul de mai sus poate fi scris si sub forma:

```
SELECT nume, valoare FROM studenti,note
  WHERE studenti.nr_matricol = note.nr_matricol
```

Proprietăți *join* (natural)

- $r_1 * r_2[U_1] \subseteq r_1$
- $r_2 * r_1[U_2] \subseteq r_2$

Dacă $X = U_1 \cap U_2$ și:
$r_1' = \{t_1 | t_1 \in r_1, \exists t_2 \in r_2$ a.i. $t_1[X] = t_2[X]\}$ și $r_1" = r_1 - r_1'$,
$r_2' = \{t_2 | t_2 \in r_2, \exists t_1 \in r_1$ a.i. $t_1[X] = t_2[X]\}$ și $r_2" = r_2 - r_2'$,
atunci: $r_1 * r_2 = r_1' * r_2'$, $r_1 * r_2[U_1] = r_1'$, $r_2 * r_1[U_2] = r_2'$.

Dacă $\overline{r_1} \subseteq r_1, \overline{r_2} \subseteq r_2$ și $\overline{r_1} * \overline{r_2} = r_1 * r_2$ atunci $r_1' \subseteq \overline{r_1}$ si $r_2' \subseteq \overline{r_2}$

Dacă $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ atunci $r_1 * r_2 = r_1 \times r_2$.

Extindere *join* (natural)

Fie r_i relație peste $R_i[U_i], i = \overline{1, h}$ atunci:

$r_1 * r_2 * \ldots * r_h = \{t | t$ uplu peste $U_1, \ldots U_h,$ a.i. $t[U_i] \in r_i, i = \overline{1, h}\}$

Notații echivalente:

- $r_1 * r_2 * \ldots * r_h$
- $\bowtie \langle r_i, i = 1, h \rangle$
- $* \langle r_i, i = 1, h \rangle$

Operația join este asociativă.

Operații în cadrul modelului relațional - *join* (oarecare)

Fie r_i peste $R_i[U_i]$, $i = \overline{1,2}$ cu $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots A_{\alpha_k} \in U_1$ și $B_{\beta_1}, B_{\beta_2}, \ldots B_{\beta_k} \in U_2$ și θ_i operator de comparație între elementele lui $dom(A_{\alpha_i})$ și cele ale lui $dom(B_{\beta_i})$

θ_i este relație binara peste $dom(A_{\alpha i}) \times dom(B_{\beta i})$, $1 \leq i \leq k$. *Join-ul oarecare* a două relații r_1 și r_2, notat cu $r_1 \underset{\theta}{\bowtie} r_2$, este definit prin:

$$r_1 \underset{\theta}{\bowtie} r_2 = \{(t_1, t_2) | t_1 \in r_1, t_2 \in r_2, t_1[A_{\alpha_i}]\theta_i t_2[B_{\beta_i}], i = \overline{1,k}\}$$

unde $\theta = (A_{\alpha_1}\theta_1 B_{\beta_1}) \wedge (A_{\alpha_2}\theta_2 B_{\beta_2}) \wedge \ldots \wedge (A_{\alpha_k}\theta_k B_{\beta_k})$

Observație: un join oarecare cu condiția TRUE pentru orice combinatie de tuple este un produs cartezian.
Observatie2: Joinul oarecare poate fi considerat ca fiind o filtrare dupa anumite criterii ale rezultatelor unui produs cartezian.

Operații în cadrul modelului relațional - *join* (oarecare)

Atunci cand dorim sa selectam doar anumite randuri (WHERE), se poate face un join oarecare intre tabela pe care trebuie facuta selectia si tabela dual.

Vor fi selectate doar acele campuri care ne intereseaza (nu si cele din DUAL) si acestea se vor conforma conditiilor puse.

```
SELECT nume FROM studenti, dual
  WHERE studenti.bursa IS NOT NULL;
```

Operații în cadrul modelului relațional - *selecția*

Fie r o relație peste $R[U]$.
Considerăm pentru început expresiile elementare de selecție: $A\theta B$, $A\theta c$, $c\theta B$, unde $A, B \in U$ și c este o constantă.

Dacă e_1 și e_2 sunt expresii de selecție (elementare sau nu), atunci următoarele sunt expresii de selecție: (e_1), $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \vee e_2$, $(e_1 \wedge e_2)$, $(e_1 \vee e_2)$.

Operații în cadrul modelului relațional - *selecția*

Fie E o expresie de selecție. Atunci:

- când $E = A\theta B$, t satisface E dacă $t[A]\ \theta\ t[B]$,
- când $E = A\theta c$, t satisface E dacă $t[A]\ \theta\ c$,
- când $E = c\theta B$, t satisface E dacă $c\ \theta\ t[B]$,
- când $E = e_1 \wedge e_2$, t satisface E dacă t satisface atât pe e_1 cât și pe e_2,
- când $E = e_1 \vee e_2$, t satisface E dacă t satisface măcar pe unul dintre e_1 și e_2.

Dacă F este o expresie de selecție atunci *selecția* se notează cu $\sigma_F(r)$ și este definită ca:
$\sigma_F(r) = \{t | t = tuplupesteR[U], tsatisfaceF\}$

Exerciții:

Utilizand schema de baze de date de la laborator, scrieti in algebra relationala urmatoarele:

- Cursurile din facultate impreuna cu numele profesorilor care le tin.
- Numele si prenumele studentilor din anul 1 si care au bursa mai mare de 300 ron.
- Prenumele studentilor care au acelasi nume de familie ca macar unul din profesori.
- Numele si prenumele studentilor, cursurile pe care le-au urmat si notele pe care le-au obtinut.

Scrieti interogarile SQL asociate formulelor din algebra relationala scrise mai sus.

Notatii (alternative) operatori alg. relationala

Proiectia ($r_1[U]$): $\pi_U(r_1)$
Join natural ($r_1 * r_2$): $r_1 \bowtie r_2$
Join oarecare: $r_1 \underset{\theta}{\bowtie} r_2$
Selectia : $\sigma_\theta(r_1)$ [obs: $r_1 \underset{\theta}{\bowtie} r_2 = \sigma_\theta(r_1 \times r_2)$]
Join la stanga: $r_1 \rhd \circ \lhd_L r_2$
Join la dreapta: $r_1 \rhd \circ \lhd_R r_2$
Full outer join : $r_1 \rhd \circ \lhd r_2$
Redenumirea: Daca r este definit peste $B_1, B_2, \ldots, B_n$ si vrem sa redenumim numele atributelor, vom folosi operatorul de redenumire $\rho : r' = \rho(r_1)_{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ - redenumirea atributelor lui r in $A_1, A_2, \ldots, A_n$

Dependențe funcționale

Dependențe funcționale

Fie $X, Y \subseteq U$. Vom nota o dependență funcțională cu $X \to Y$.

O relație r peste U satisface *dependența funcțională* $X \to Y$ dacă:

$$(\forall t_1, t_2)(t_1, t_2 \in r)[t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y]]$$

$X = \emptyset$ avem $\emptyset \to Y$ dacă $(\forall t_1, t_2)(t_1, t_2 \in r)[t_1[Y] = t_2[Y]]$

$Y = \emptyset$ atunci orice $\forall r$ peste U avem că $X \to \emptyset$

Dacă r satisface $X \to Y$, atunci există o funcție $\varphi : r[X] \to r[Y]$ definită prin $\varphi(t) = t'[Y]$, unde $t' \in r$ și $t'[X] = t \in r[X]$.
Dacă r satisface $X \to Y$ spunem că X determină funcțional pe Y în r.

Proprietăți ale dependențelor funcționale

FD1. (Reflexivitate) Dacă $Y \subseteq X$, atunci r satisface $X \to Y$, $\forall r \in U$.

FD2. (Extensie) Dacă r satisface $X \to Y$ și $Z \subseteq W$, atunci r satisface $XW \to YZ$.

FD3. (Tranzitivitate) Dacă r satisface $X \to Y$ și $Y \to Z$, atunci r satisface $X \to Z$.

FD4. (Pseudotranzitivitate) Dacă r satisface $X \to Y$ și $YW \to Z$, atunci r satisface $XW \to Z$.

Proprietăți ale dependențelor funcționale

FD5. (Uniune) Dacă r satisface $X \to Y$ și $X \to Z$, atunci r satisface $X \to YZ$.

FD6. (Descompunere) Dacă r satisface $X \to YZ$, atunci r satisface $X \to Y$ și $X \to Z$.

FD7. (Proiectabilitate) Dacă r peste U satisface $X \to Y$ și $X \subset Z \subseteq U$, atunci $r[Z]$ satisface $X \to Y \cap Z$

FD8. (Proiectabilitate inversă) Dacă $X \to Y$ este satisfacută de o proiecție a lui r, atunci $X \to Y$ este satisfacută de r.

Dependențe funcționale - consecință și acoperire

Dacă Σ este o mulțime de dependențe funcționale peste U atunci spunem că $X \rightarrow Y$ *este consecință din* Σ dacă orice relație ce satisface toate consecințele din Σ satisface și $X \rightarrow Y$.
Notație: $\Sigma \models X \rightarrow Y$

Fie $\Sigma^* = \{X \rightarrow Y | \Sigma \models X \rightarrow Y\}$. Fie Σ_1 = mulțime de dependențe funcționale. Σ_1 constituie o *acoperire* pentru Σ^* dacă $\Sigma_1^* = \Sigma^*$.

Proprietăți ale dependențelor funcționale

Propoziție

Pentru orice mulțime Σ de dependențe funcționale există o acoperire Σ_1 pentru Σ^*, astfel încat toate dependențele din Σ_1 sunt de forma $X \to A$, A fiind un atribut din U.

Propoziție

$\Sigma \models X \to Y$ *dacă și numai dacă* $\Sigma \models X \to B_j$ *pentru* $j = \overline{1, h}$, *unde* $Y = B_1 \ldots B_h$.

Reguli de deducere

Fie $\mathcal{R}$ o mulțime de formule de deducere pentru dependențe funcționale și Σ o mulțime de dependențe funcționale. Spunem că $X \to Y$ este o *demonstrație* în Σ utilizând regulile $\mathcal{R}$ și vom nota $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}} X \to Y$, dacă există șirul $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, astfel încât:

- $\sigma_n = X \to Y$ și
- pentru $\forall i = \overline{1, n}$, $\sigma_i \in \Sigma$ sau există în $\mathcal{R}$ o regulă de forma $\frac{\sigma_{j_1}, \sigma_{j_2}, \ldots \sigma_{j_k}}{\sigma_i}$, unde $j_1, j_2, \ldots, j_k < i$.

Reguli de deducere

Conform proprietăților FD1-FD5 putem defini regulile:

FD1f: $\frac{Y \subseteq X}{X \to Y}$

FD2f: $\frac{X \to Y,\ Z \subseteq W}{XW \to YZ}$

FD3f: $\frac{X \to Y,\ Y \to Z}{X \to Z}$

FD4f: $\frac{X \to Y,\ YW \to Z}{XW \to Z}$

FD5f: $\frac{X \to Y,\ X \to Z}{X \to YZ}$

FD6f: $\frac{X \to YZ}{X \to Y},\ \frac{X \to YZ}{X \to Z}$

Propoziție

Regulile FD4f, FD5f, FD6f se exprimă cu ajutorul regulilor FD1f, FD2f, FD3f.

Notăm cu $\mathcal{R}_1 = \{$FD1f, FD2f, FD3f$\}$,
și cu $\mathcal{R}_2 = R_1 \cup \{$FD4f, FD5f, FD6f$\}$

Propoziție

Regulile FD4f, FD5f, FD6f se exprimă cu ajutorul regulilor FD1f, FD2f, FD3f.

Idei de demonstratie:

- FD4f:Se aplica FD2f pentru $X \to Y$ si $W \subseteq W$ iar din rezultat si din $YW \to Z$ prin FD3f se obtine rezultatul;
- FD5f: Se aplica FD2f pentru $X \to Y$ si $X \subseteq X$ si la fel pentru $X \to Z$ si $Y \subseteq Y$ apoi FD3f (tranzitivitatea) intre rezultate;
- FD6f: din FD1f avem ca $YZ \to Y$ si $YZ \to Z$ si din FD3f rezulta $X \to Y$ si $X \to Z$

Axiomele lui Armstrong

Armstrong a definit (în *Dependency structures of database relationships* Proc. IFIP 74, Amsterdam, 580-583) următoarele reguli de inferența (numite *Axiomele lui Armstrong*):

A1: $\dfrac{}{A_1 ... A_n \to A_i}, i = \overline{1, n}$

A2: $\dfrac{A_1, ... A_m \to B_1, ... B_r}{A_1 ... A_m \to B_j}, j = \overline{1, r}$

$$\frac{A_1, ... A_m \to B_j,\ j = \overline{1, r}}{A_1 ... A_m \to B_1, ... B_r}$$

A3: $\dfrac{A_1, ... A_m \to B_1, ... B_r, \quad B_1, ... B_r \to C_1, ... C_p}{A_1 ... A_m \to C_1, ... C_p}$

unde A_i, B_j, C_k sunt atribute. Notăm $\mathcal{R}_A = \{$A1, A2, A3$\}$.

Obs: regula A3 este de fapt FD3f (tranzitivitatea).

Propoziție

Regulile din $\mathcal{R}_1$ se exprimă prin cele din R_A și invers.

Notatie:

$$\Sigma^+_{\mathcal{R}} = \{X \to Y | \Sigma \vdash_{\mathcal{R}} X \to Y\}$$

Propoziție

Fie $\mathcal{R}'_1$ si $\mathcal{R}'_2$ doua multimi de reguli astfel incat $\mathcal{R}'_1$ se exprima prin $\mathcal{R}'_2$ si invers. Atunci $\Sigma^+_{\mathcal{R}'_1} = \Sigma^+_{\mathcal{R}'_2}$ pentru orice multime Σ de dependente functionale.

Consecinta: $\Sigma^+_{\mathcal{R}_1} = \Sigma^+_{\mathcal{R}_A}$

Fie $X \subseteq U$ si $\mathcal{R}$ o multime de reguli de inferenta. Notam cu

$$X^{+}_{\mathcal{R}} = \{A | \Sigma \vdash_{\mathcal{R}} X \to A\}$$

Lema

$\Sigma \vdash_{\mathcal{R}} X \to Y$ *daca si numai daca* $Y \subseteq X^{+}_{\mathcal{R}_1}$.

Lema

Fie Σ o multime de dependente functionale si $\sigma : X \to Y$ o dependenta functionala astfel incat $\Sigma \nvdash_{\mathcal{R}_1} X \to Y$. Atunci exista o relatie r_σ ce satisface toate dependentele functionale din Σ si r_σ nu satisface $X \to Y$.

Theorem

Fie Σ o multime de dependente functionale. Atunci exista o relatie r_0 ce satisface exact elementele lui $\Sigma^+_{\mathcal{R}_1}$, adica:

- *r_0 satisface τ, $\forall \tau \in \Sigma^+_{\mathcal{R}_1}$ si*
- *r_0 nu satisface γ, $\forall \gamma \notin \Sigma^+_{\mathcal{R}_1}$*

Dependențe multivaluate

Exemplu

Presupunem că persoana cu CNP $= 1$ a fost admisă la două facultăți și are permis de conducere pentru categoriile A și B:

r :

CNP	Admis la facult.	Are permis categ.
1	Informatică	A
1	Matematică	B

Deși anumite rânduri nu sunt scrise în tabelă, putem să intuim că persoana cu CNP $= 1$ a dat la Facultatea de Informatică și are permis de conducerea categoria B. Deci, deși în r nu există t-uplul $\langle$ 1,Informatica,B $\rangle$, ar trebui să existe și el (pentru că poate fi dedus din cele existente).

Care alt t-uplu mai poate fi dedus ?

Exemplu

r :

CNP	Admis la facult.	Are permis categ.
1	Informatică	A
1	Matematică	B
1	Informatică	B
1	Matematică	A

t-uplele marcate cu roșu ar putea lipsi, ele fiind redundante deoarece pot fi obținute din primele două t-uple.

Prin intermediul dependențelor funcționale pot afla la care coloane pot renunța astfel încât să le pot reface ulterior.

Prin intermediul dependențelor multivaluate pot afla la care linii pot renunța astfel încât să le pot reface ulterior.

Dependențe multivaluate - definiție

Fie $X, Y \subseteq U$. O dependență multivaluată este notată cu $X \twoheadrightarrow Y$.

Definition

Relația *r peste U satisface dependența multivaluată $X \twoheadrightarrow Y$* dacă pentru oricare două tuple $t_1, t_2 \in r$ și $t_1[x] = t_2[x]$, există tuplele t_3 și t_4 din r, astfel încât:

- $t_3[X] = t_1[X], t_3[Y] = t_1[Y], t_3[Z] = t_2[Z]$;
- $t_4[X] = t_2[X], t_4[Y] = t_2[Y], t_4[Z] = t_1[Z]$

unde $Z = U - XY$ (Z mai este denumită și $rest$).

Exemplul 2 (mai formal)

r :

A	B	C	D			
a_1	b_1	c_1	d_1	t_1		t_1"
a_1	b_2	c_2	d_2	t_2		
a_1	b_1	c_1	d_2	t_3		t_2"
a_1	b_2	c_2	d_1	t_4		
a_2	b_3	c_1	d_1		t'_1, t'_4	
a_2	b_3	c_1	d_2		t'_2, t'_3	

r satisface $A \twoheadrightarrow BC$

Intrebare: cum alegem t_3", t_4" ?

Deoarece atunci când $t_1[A] = t_2[A]$ avem că:
$t_3[A] = t_1[A], t_3[BC] = t_1[BC], t_3[D] = t_2[D]$ și
$t_4[A] = t_2[A], t_4[BC] = t_2[BC], t_4[D] = t_1[D]$

Definiție echivalentă

Relația *r peste U satisface dependența multivaluată $X \twoheadrightarrow Y$*, dacă pentru orice $t_1, t_2 \in r$ cu $t_1[X] = t_2[X]$ avem că $M_Y(t_1[XZ]) = M_Y(t_2[XZ])$

unde $M_Y(t[XZ]) = \{t'[Y] | t' \in r, t'[XZ] = t[XZ]\}$ = valorile lui Y din diferite tuple in care XZ sunt egale (cu XZ-ul din parametru).

r :

A	B	C	D		
a_1	b_1	c_1	d_1	=	t_1
a_1	b_2	c_2	d_2	=	t_2
a_1	b_1	c_1	d_2		
a_1	b_2	c_2	d_1		
a_2	b_3	c_1	d_1		
a_2	b_3	c_1	d_2		

$M_Y(t1[AD]) = M_Y(t2[AD]) = \{(b_1, c_1), (b_2, c_2)\}$

Observații

- Dacă r satisface dependența funcțională $X \rightarrow Y$, atunci pentru orice $t \in r$, avem $M_Y(t[XZ]) = \{t[Y]\}$.
- Dacă r satisface dependența funcțională $X \rightarrow Y$, atunci r satisface și dependența multivaluată $X \twoheadrightarrow Y$.
- Dacă r satisface dependența multivaluată $X \twoheadrightarrow Y$, atunci putem defini o funcție $\psi : r[X] \rightarrow \mathcal{P}(r[Y])$, prin $\psi(t[X]) = M_Y(t[XZ]), \forall t \in r$ (returneaza valorile diferite din proiectia pe Y). Când r satisface $X \rightarrow Y$, atunci $\psi : r[X] \rightarrow r[Y]$ (deoarece valorile pe Y nu sunt diferite in cadrul dependentei functionale).

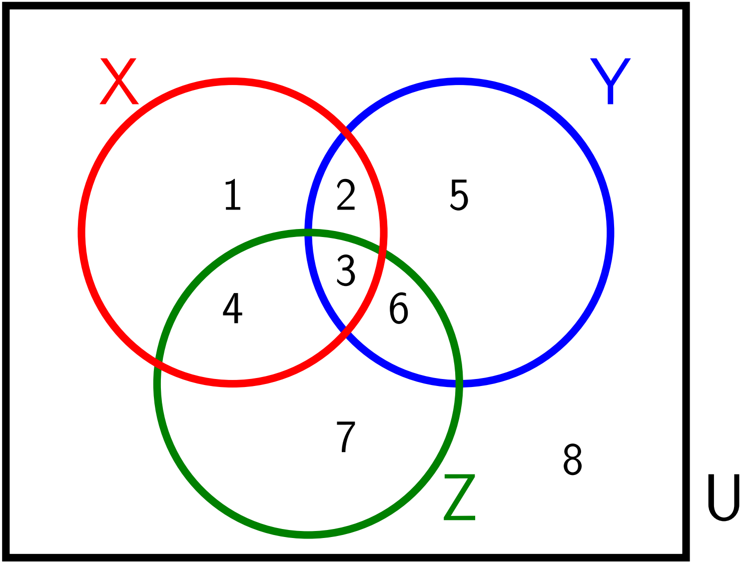
Proprietăți ale dependențelor multivaluate

MVD0 (Complementariere) Fie $X, Y, Z \subseteq U$, asfel încât $XYZ = U$ și $Y \cap Z \subseteq X$. Dacă r satisface $X \twoheadrightarrow Y$, atunci r satisface $X \twoheadrightarrow Z$.

MVD1 (Reflexivitate) Dacă $Y \subseteq X$, atunci orice relație r satisface $X \twoheadrightarrow Y$.

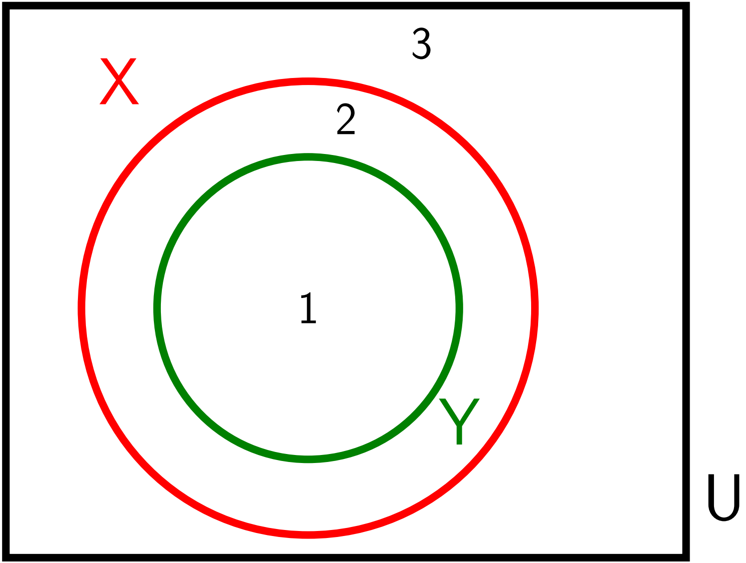
MVD2 (Extensie) Fie $Z \subseteq W$ și r satisface $X \twoheadrightarrow Y$. Atunci r satisface $XW \twoheadrightarrow YZ$

MVD3 (Tranzitivitate) Dacă r satisface $X \twoheadrightarrow Y$ și $Y \twoheadrightarrow Z$, atunci r satisface $X \twoheadrightarrow Z - Y$

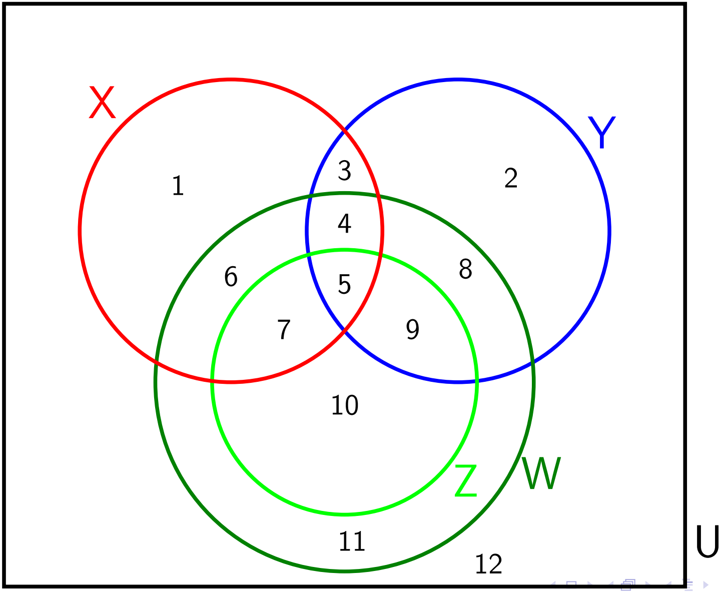


MVD0

MVD1



MVD2



Proprietăți ale dependențelor multivaluate

MVD4 (Pseudotranzitivitate) Dacă r satisface $X \twoheadrightarrow Y$ și $YW \twoheadrightarrow Z$, atunci r satisface și $XW \twoheadrightarrow Z - YW$.

MVD5 (Uniune) Dacă r satisface $X \twoheadrightarrow Y$ și $X \twoheadrightarrow Z$ atunci r satisface $X \twoheadrightarrow YZ$.

MVD6 (Descompunere) Dacă r satisface $X \twoheadrightarrow Y$ și $X \twoheadrightarrow Z$, atunci r satisface $X \twoheadrightarrow Y \cap Z$, $X \twoheadrightarrow Y - Z$, $X \twoheadrightarrow Z - Y$

Proprietăți mixte ale dependențelor multivaluate

FD-MVD1. Dacă r satisface $X \to Y$, atunci r satisface și $X \twoheadrightarrow Y$.

FD-MVD2. Dacă r satisface $X \twoheadrightarrow Z$ și $Y \to Z'$, cu $Z' \subseteq Z$ și $Y \cap Z = \emptyset$, atunci r satisface $X \to Z'$.

FD-MVD3. Dacă r satisface $X \twoheadrightarrow Y$ și $XY \twoheadrightarrow Z$, atunci r satisface $X \to Z - Y$.

Reguli de inferență

MVD0f: $$\frac{XYZ=U,\ \ Y\cap Z\subseteq X,\ \ X\twoheadrightarrow Y}{X\twoheadrightarrow Z}$$

MVD1f: $$\frac{Y\subseteq X}{X\twoheadrightarrow Y}$$

MVD2f: $$\frac{Z\subseteq W,\ \ X\twoheadrightarrow Y}{XW\twoheadrightarrow YZ}$$

MVD3f: $$\frac{X\twoheadrightarrow Y,\ \ Y\twoheadrightarrow Z}{X\twoheadrightarrow Z-Y}$$

MVD4f: $$\frac{X\twoheadrightarrow Y, YW\twoheadrightarrow Z}{XW\twoheadrightarrow Z-YW}$$

Reguli de inferență

MVD5f: $$\frac{X \twoheadrightarrow Y,\ \ X \twoheadrightarrow Z}{X \twoheadrightarrow YZ}$$

MVD6f: $$\frac{X \twoheadrightarrow Y,\ \ X \twoheadrightarrow Z}{X \twoheadrightarrow Y \cap Z,\ \ X \twoheadrightarrow Y - Z,\ \ X \twoheadrightarrow Z - Y}$$

FD-MVD1f: $$\frac{X \rightarrow Y}{X \twoheadrightarrow Y}$$

FD-MVD2f: $$\frac{X \twoheadrightarrow Z,\ \ Y \rightarrow Z',\ \ Z' \subseteq Z,\ \ Y \cap Z = \emptyset}{X \rightarrow Z'}$$

FD-MVD3f: $$\frac{X \twoheadrightarrow Y,\ \ XY \twoheadrightarrow Z}{X \twoheadrightarrow Z - Y}$$

Propoziție

Fie $\mathcal{R}$ o multime de reguli valide si γ o regula $\frac{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_k}{\beta}$, astfel incat $\{\alpha_1,\ldots\alpha_k\} \vdash_{\mathcal{R}} \beta$, atunci si regula γ este valida.

Propoziție

Fie $\mathcal{R}_{FM} = \{FD1f \;-\; FD3f$[1]$, \quad MVD0f \;-\; MVD3f,$ $FD-MVD1f \;-\; FD-MVD3f\}$. Avem:

- *$FD-MVD3f$ se exprima cu celelalte regulid din $\mathcal{R}_{FM}$ si FD*
- *$MVD2f$ se exprima prin celelalte reguli din $\mathcal{R}_{FM}$.*

Propoziție

Regulile $MVD4f - MVD6f$ se exprima cu ajutorul regulilor $MVD0f - MVD3f$

[1] cele de la dependente functionale

Theorem

Fie Σ *o multime de dependente functionale sau multivaluate si* X *o submultime de atribute. Atunci exista o partitie a lui* $U - X$ *notata prin* $Y_1 \ldots Y_k$*, astfel incat pentru* $Z \subseteq U - X$ *avem* $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}_{FM}} X \twoheadrightarrow Z$ *daca si numai daca Z este reuniunea unui numar de multimi din partitia* $\{Y_1, \ldots Y_k\}$

Definition

Pentru Σ o multime de dependente functionale sau multivaluate si X o submultime de atribute, numim *baza de dependenta pentru* X *cu privire la* Σ partitia $B(\Sigma, X) = \{\{A_1\} \ldots \{A_h\}, Y_1 \ldots Y_k\}$, unde $X = A_1, \ldots A_h$, iar $Y_1, \ldots Y_k$ este partitia construita in teorema precedenta.

Observatii

- Avem $\Sigma \vdash_{\mathcal{R}_{FM}} X \twoheadrightarrow Z$ daca si numai daca Z este o reuniune de elemente din partitia $B(\Sigma, X)$.
- Fie $X^*_\Sigma = \{A | \Sigma \vdash_{\mathcal{R}_{FM}} X \rightarrow A\}$. Atunci pentru orice $A \in X^*_\Sigma$ avem $\{A\} \in B(\Sigma, X)$.