$LP_{\perp,\to}$ = cea mai mică mulțime a.î.

CB1: $A \subseteq LP_{\perp,\to}$

CB2: $\perp \in LP_{\perp,\to}$

CI : Dacă $\varphi_1, \varphi_2 \in LP_{\perp,\to}$ atunci $(\varphi_1 \to \varphi_2) \in LP_{\perp,\to}$

Merg la facultate dacă și numai dacă am oră.

p : merg la facultate

q : am oră

$(p \leftrightarrow q)$

(merg la facultate dacă am ore) și

(merg la facultate numai dacă am ore)

Dacă $\underbrace{\varphi_1}_{\text{antecedent "premisa"}}$ atunci $\underbrace{\varphi_2}_{\text{concluzia}}$

Dacă am ore, atunci merg la facultate. $(q \to p)$

și $\wedge$

Dacă merg la facultate, atunci am ore. $(p \to q)$

$\equiv$

$(p \leftrightarrow q)$

78

Ex 76 2) Lucrez la logică doar dacă nu se poate ieși afară. ($\neg q$)

p : lucrez la logică

q : se poate ieși afară

φ_1 doar dacă φ_2

$(\varphi_1 \to \varphi_2)$

$(p \to \neg q)$

$(((2+3)*4))$

$(2+(-5))$

(Nu plouă) dacă este soare

Se poate ieși afară dacă (nu plouă) și este cald. ($\neg r$) ($\neg r \wedge s$)

r : (afară) plouă

s : (afară) este cald

$$((\neg r \wedge s) \to q)$$

o altă afirmație

Din moment ce nu lucrez la logică și afară este cald, înseamnă că plouă.

consecința întregului paragraf $\to \vDash$

privit separat "implicație"

$(\neg p \wedge s) \to r$ validă

$\varphi_1 \vDash \varphi_2$ ddacă $(\varphi_1 \to \varphi_2)$ validă

privit în context.

Nu lucrez la logică și afară este cald.

$(\neg p \wedge s)$

$\Gamma = \{(p \to \neg q), ((\neg r \wedge s) \to q), (\neg p \wedge s)\} \vDash r$ De verificat!

ddacă pt orice $\tau : A \to B$ a.î. $\hat{\tau}((p \to \neg q)) = \hat{\tau}(((\neg r \wedge s) \to q)) = \hat{\tau}((\neg p \wedge s)) = 1$ $(*)$

avem și $\hat{\tau}(r) = 1$

are loc și $\hat{\tau}(r) = 1$

τ' a.î. $\hat{\tau}(r) = 0$

τ a.î. $(*)$

τ toate atrib.

$p \to \neg q \equiv \neg p \vee \neg q$

Fie $\tau : A \to B$ arbitrar fixat a.î.

ipoteze

$\hat{\tau}((p \to \neg q)) = 1 \iff \overline{\hat{\tau}(p)} + \hat{\tau}(\neg q) = 1 \iff \overline{\tau(p)} + \overline{\tau(q)} = 1$ (1)

și

$\hat{\tau}(((\neg r \wedge s) \to q)) = 1 \iff \overline{\hat{\tau}((\neg r \wedge s))} + \hat{\tau}(q) = 1 \iff \overline{\hat{\tau}(\neg r) * \hat{\tau}(s)} + \tau(q) = 1$

$\iff \overline{\overline{\tau(r)} * \tau(s)} + \tau(q) = 1$ (2)

și

$\hat{\tau}((\neg p \wedge s)) = 1 \iff \hat{\tau}(\neg p) * \hat{\tau}(s) = 1 \iff \overline{\tau(p)} * \tau(s) = 1$ (3)

Vrem să arătăm că $\hat{\tau}(r) = 1$

$\hat{\tau}(p \wedge s) = 1 \Rightarrow \tau(p) * \tau(s) = 1 \Rightarrow \hat{\tau}(p) = 1$

$\tau(s) = 1.$

"Lucrez la logică și afară este cald"

Din (3) $\Rightarrow \overline{\tau(p)} = 1 \Rightarrow \tau(p) = 0$

și

$\tau(s) = 1$

Din (1) și $\tau(p) = 0 \Rightarrow \overline{0} + \overline{\tau(q)} = 1 \Rightarrow 1 + \overline{\tau(q)} = 1$

$0 + \overline{\tau(q)} = 1 \Rightarrow \tau(q) = 0$

Din 2: $\overline{\overline{\tau(r)} * 1} + 0 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{\overline{\tau(r)} * 1} = 1$

$\Rightarrow \overline{\overline{\tau(r)}} = 1 \Rightarrow \tau(r) = 1.$

Căutăm $\tau : A \to B$ a.î. $\hat{\tau}((p \to \neg q)) = \hat{\tau}(((\neg r \wedge s) \to q)) = \hat{\tau}((\neg p \wedge s)) = 1$ $(*)$

și $\hat{\tau}(r) = 0$

$\iff$ Căutăm $\tau : A \to B$ a.î.
$$\begin{cases} \overline{\tau(p)} + \overline{\tau(q)} = 1 & (1) \\ \overline{\overline{\tau(r)} * \tau(s)} + \tau(q) = 1 & (2) \\ \overline{\tau(p)} * \tau(s) = 1 & (3) \\ \tau(r) = 0 & (4) \end{cases}$$

Fie $\tau : A \to B$ definit prin
$$\tau(p) = 0$$
$$\tau(s) = 1$$
$$\tau(q) = 1$$
$$\tau(r) = 0$$
$$\tau(a) = 1 \text{ pt orice } a \in A \setminus \{p, s, q, r\}$$

Verificare :
$$\begin{cases} (1): \overline{0}+\overline{1}=1 \Leftrightarrow 1+0=1 \Leftrightarrow 1=1 \text{ "A"} \\ (2): \overline{\overline{0}*1}+1=1 \Leftrightarrow \overline{1*1}+1=1 \Leftrightarrow \overline{1}+1=1 \Leftrightarrow \\ \qquad \Leftrightarrow 0+1=1 \Leftrightarrow 1=1 \text{ "A"}. \\ (3): \overline{0}*1=1 \Leftrightarrow 1*1=1 \Leftrightarrow 1=1 \text{ "A"}, \\ (4): 0=0 \text{ "A"}. \end{cases}$$

$\Rightarrow \Gamma \not\models \psi$

65

Ex 64 2) ~~pt orice $\varphi_1, \varphi_2 \in LP$ $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \varphi_2$ ddacă φ_1 este contradicție~~

Fie $\varphi_1 \in LP$. $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \varphi_2$ pt orice $\varphi_2 \in LP$ ddacă φ_1 este contradicție

tautologie = validă

contradicție = nesatisfiabilă

"$\Leftarrow$" "dacă"
$$\frac{\varphi_1 \text{ contradicție}}{(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \varphi_2 \text{ pt orice } \varphi_2 \in LP}$$

φ_1 contradicție ddacă pt orice $\tau: A \to B$ avem $\hat{\tau}(\varphi_1) = 0$

$(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \varphi_2$ pt orice $\varphi_2 \in LP$ ddacă pt orice $\varphi_2 \in LP$, pt orice $\tau: A \to B$ avem $\hat{\tau}((\varphi_1 \vee \varphi_2)) = \hat{\tau}(\varphi_2)$

ddacă pt orice $\varphi_2 \in LP$, pt orice $\tau: A \to B$ avem. $\hat{\tau}(\varphi_1) + \hat{\tau}(\varphi_2) = \hat{\tau}(\varphi_2)$.

(din ip) ddacă pt orice $\varphi_2 \in LP$, pt orice $\tau: A \to B$ avem $0 + \hat{\tau}(\varphi_2) = \hat{\tau}(\varphi_2)$ "A".

"$\Rightarrow$" "doar dacă"
$$\frac{(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \varphi_2 \text{ pt orice } \varphi_2 \in LP}{\varphi_1 \text{ este contradicție}}$$

Din ipoteză $\Rightarrow$ pt orice $\varphi_2 \in LP$, $\underbrace{\text{pt orice } \tau: A \to B \text{ avem } \hat{\tau}(\varphi_1) + \hat{\tau}(\varphi_2) = \hat{\tau}(\varphi_2)}_{(*)}$

$\Rightarrow$ (*) are loc și pt $\varphi_2 = (p \wedge \neg p)$ pt care $\hat{\tau}(\varphi_2) = 0$ pt orice $\tau: A \to B$.

$\Rightarrow$ pt orice $\tau : A \to B$ avem $\hat{\tau}(\varphi_1) + 0 = 0$

$\Rightarrow$ pt orice $\tau : A \to B$ avem $\hat{\tau}(\varphi_1) = 0$ $\Rightarrow$ φ_1 contradicție

---

pt orice $\varphi_1, \varphi_2 \in LP$ $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \varphi_2$ ddacă φ_1 contradicție

Fie $\varphi_1 \in LP$ fixat $\qquad \varphi_1 = (p \vee \neg p)$

$\varphi_2 \in LP$ fixat $\qquad \varphi_2 = (q \vee \neg q)$

"$\Leftarrow$" $\quad \varphi_1$ contradicție $\Leftrightarrow$ pt orice $\tau : A \to B$ avem $\hat{\tau}(\varphi_1) = 0$

$(\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \varphi_2$ $\Leftrightarrow$ pt orice $\tau : A \to B$ avem $\underbrace{\hat{\tau}(\varphi_1)}_{0} + \hat{\tau}(\varphi_2) = \hat{\tau}(\varphi_2)$

"$\Rightarrow$" $\quad (\varphi_1 \vee \varphi_2) \equiv \varphi_2$ $\Leftrightarrow$ pt orice $\tau : A \to B$ avem $\hat{\tau}(\varphi_1) + \hat{\tau}(\varphi_2) \overset{?}{=} \hat{\tau}(\varphi_2)$

φ_1 contradicție $\qquad\qquad 1 + 1 = 1$

$LP_{\wedge,\vee}$ cea mai mică mulțime a.î.

- CB : $\quad A \subseteq LP_{\wedge,\vee}$
- CI 1. Dacă $\varphi_1, \varphi_2 \in LP_{\wedge,\vee}$ atunci $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \in LP_{\wedge,\vee}$
- CI 2 : $\qquad (\varphi_1 \vee \varphi_2) \in LP_{\wedge,\vee}$

pt orice $\varphi \in LP_{\wedge,\vee}$ avem φ satisfiabil.

Fie $\tau : A \to B$ a.î. $\tau(a) = 1$ pt orice $a \in A$

$P(\varphi) : \hat{\tau}(\varphi) = 1.$

Dem prin inducție structurală

Fie φ arbitrar fixat din $LP_{\wedge,\vee}$

CB : $\varphi \in A$

φ satisfiabil ddacă există $\tau : A \to B$ a.î. $\hat{\tau}(\varphi) = 1$.

Găsim $\tau : A \to B$ a.î. $\tau(\underbrace{\varphi}_{\in A}) = 1$

$\tau(a) = 1$ pt orice $a \in A \setminus \{\varphi\}$

CI 1. $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$

pp. $\hat{\tau}(\varphi_1) = 1$
$\hat{\tau}(\varphi_2) = 1$

$\hat{\tau}((\varphi_1 \wedge \varphi_2)) = 1 \iff \hat{\tau}(\varphi_1) * \hat{\tau}(\varphi_2) = 1 * 1 = 1$ "A".

CI 2 $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$

$\hat{\tau}(\varphi_1) = 1$
$\hat{\tau}(\varphi_2) = 1$

$\hat{\tau}((\varphi_1 \vee \varphi_2)) = 1 \iff \hat{\tau}(\varphi_1) + \hat{\tau}(\varphi_2) = 1 \iff 1 + 1 = 1$ "A".

$\Rightarrow \hat{\tau}(\varphi) = 1$ pt orice $\varphi \in LP_{\wedge, \vee}$ unde $\tau : A \to B$, $\tau(a) = 1$, $a \in A$

$\Rightarrow \varphi$ este satisf pt orice $\varphi \in LP_{\wedge, \vee}$

$\hat{\tau}_1(\overbrace{p \vee q}^{\varphi_1}) = 1$ $\tau_2(\overbrace{p \vee r}^{\varphi_2}) = 1$

$\tau_1(p) = 1$ $\tau_2(p) = 0$ 1

$\tau_1(q) = 0$ $\tau_2(r) = 1$

$\tau(a) = 1$ $a \in prop(\varphi_1) \cap prop(\varphi_2)$

$\hat{\tau}(\varphi_2) = 1$ — prin ind struct.