Matematică - Calcul diferenţial şi integral

Seminar - Săptămâna 3

***Exerciţii recomandate:** 3.1, 3.2(a,b,c,f,k), 3.3(a,c), 3.4

***Rezerve:** 3.2(g,i,o), 3.3(e), 3.6

S3.1 Stabiliţi natura următoarelor serii, iar în caz de convergenţă, determinaţi sumele lor.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{(n+1)!}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}+2^{n+1}}{6^n}$;

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$;

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{\mathrm{n}^2+\mathrm{n}+1}$;

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$.

S3.2 Folosind diverse criterii de convergenţă, să se stabilească natura următoarelor serii:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4n-3}{n(n^2-4)}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^3}-\frac{n}{4}\right)^n$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 5^2\cdot 9^2\cdot\ldots\cdot(4n-3)^2}{3^2\cdot 7^2\cdot 11^2\cdot\ldots\cdot(4n-1)^2}$;

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n+2)!}$;

h*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$;

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^4+3n^2+1}-n^2)$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^2$;

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$, unde $(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)$;

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{n\sqrt[3]{n}+5}$;

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$;

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}n\right)^n$;

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e\cdot\sqrt{e}\cdot\sqrt[3]{e}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{e}}$;

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^{n+1}-6^{n-1}}{12^n}$;

q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\ln\frac{n}{n+1}\right)$.

S3.3 Precizaţi natura seriilor următoare în funcţie de parametrii corespunzători.

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R};$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(\mathrm{n}\alpha)}{(\ln 3)^{n}}, \alpha \in \mathbb{R};$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n}}{\sqrt[n]{n!}}, \alpha \in \mathbb{R}_{+}^{*};$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{a} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right), a \in \mathbb{R};$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)}{n!}, \alpha \in \mathbb{R}_{+}^{*},$

S3.4 Utilizând criteriul logaritmului să se studieze convergenţa următoarei serii: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{3}-n+3}\right)^{\ln(n+1)}$.

S3.5* Fie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_{n}$ o serie convergentă din $\mathbb{R}$, cu $u_{n} \geq 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^{*}$. Ce se poate spune despre natura seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_{n}}{1+u_{n}}\right)^{\alpha}$, unde α este un număr real?

S3.6* Să se analizeze seria cu termenul general

$$\arccos \frac{n(n+1)+\sqrt{(n+1)(n+2)(3n+1)(3n+4)}}{(2n+1)(2n+3)}, n \in \mathbb{N}^{*}$$

şi, în caz de convergenţă, să i se afle suma.

Bibliografie recomandată

1. A. Croitoru, M. Durea, C. Văideanu - *Analiză matematică. Probleme*, Editura Tehnopress, Iasi, 2005.

2. C, Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică. Probleme (Vol. I)*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

3. M. Roşculeţ, C. Bucur, M. Craiu - *Culegere de probleme de analiză matematică*, E. D. P., Bucureşti, 1968.

4. I. Radomir, A. Fulga - *Analiză matematică. Culegere de probleme*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.

5. S. Chiriţă - *Probleme de matematici superioare*, Editura Didactică şi Pedagogică Bucureşti, 1989.