Subiectul 3. **(25 p.)** Fie un cilindru de arie totală 24π. Găsiți raza $r > 0$ și înălțimea $h > 0$ a cilindrului astfel încât volumul său să fie maxim (reamintim că volumul cilindrului este $\pi r^2 h$, aria bazei este πr^2, iar aria sa laterală este $2\pi r h$).

$$A = 24\pi = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$V = \pi r^2 h$$

calculul se pastreaza, numai constanta aia se schimba, asta e solutia e (2,-2,2)

$$\Rightarrow f(r,h) = \pi r^2 h$$

$$g(r,h) = 2\pi r h + 2\pi r^2 - 24\pi \qquad r, h > 0$$

$$L(r,h) = f(r,h) + \lambda g(r,h)$$
$$= \pi r^2 h + \lambda(2\pi r h + \pi r^2 - 24\pi)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r}(r,h,\lambda) = 2\pi r h + \lambda(2\pi h + 2\pi r) = 2\pi(\lambda h + r h + \lambda r) \\ \dfrac{\partial L}{\partial h}(r,h,\lambda) = \pi r^2 + \lambda 2\pi r = \pi r(r + 2\lambda) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(r,h,\lambda) = 2\pi r h + \pi r^2 - 24\pi = \pi(2rh + r^2 - 24) \end{cases}$$

Pct critice

$$\begin{cases} \lambda h + r h + \lambda r = 0 \\ r + 2\lambda = 0 \Rightarrow r = -2\lambda \\ 2 r h + r^2 - 24 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda x - 2\lambda y - 2\lambda^2 = 0 \\ x + 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda < 0 \\ -4\lambda y + 4\lambda^2 - 24 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\lambda y - 2\lambda^2 = 0 \Rightarrow y = -2\lambda \\ x = -2\lambda \\ 8\lambda^2 + 4\lambda^2 - 24 = 0 \end{cases}$$

$$12\lambda^2 - 24 = 0$$

$$\lambda^2 = 2$$

$$\rightarrow \lambda = -\sqrt{2}$$

$$x = 2\sqrt{2} = y$$

solutia e (2,-2,2)!

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, y; \lambda) = 2m(y + \lambda)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y, \lambda) = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x, y, \lambda) = 2m(x + \lambda)$$

$$H_L(h,r;-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2m(h-\sqrt{2}) & 2m(r-\sqrt{2}) \\ 2m(r-\sqrt{2}) & 0 \end{pmatrix}$$

solutia e (2,-2,2)!

$$H_L(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2m\sqrt{2} & 2m\sqrt{2} \\ 2m\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = 2m\sqrt{2} > 0$$

$$D_2 = -8m^2 < 0$$

$$d^2L = 2m\sqrt{2}\,dr^2 + 4m\sqrt{2}\,dr\,dh =$$

$$g(r,h) = 2mrh + mr^2 - 24m$$

$$\Rightarrow dg(r,h) = (2mh + 2mr)\,dr + 2mr\,dh = 0$$

În pct critic $dg(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) =$

$2\pi \cdot 4\sqrt{2}\, dr + 2\pi \cdot 2\sqrt{2}\, dh = 0$

$2dr + dh = 0$

$\to dh = -2dr$

$d^2 L = 2\pi\sqrt{2}\, dr^2 - 8\pi\sqrt{2}\, dr^2$

$= -6\pi\sqrt{2}\, dr^2 < 0$

$\to$ Pct critic e pct maxim