SEMINAR 11

Exerciţii recomandate: 11.1 a),c), 11.2, 11.6 a),b), 11.7 a)
Rezerve: 11.1 b), 11.3, 11.4, 11.5, 11.6 c),d), 11.7 b)

S11.1 Calculaţi:

a) $\displaystyle\int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt[5]{\sin x - \cos x}} dx;$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \min\left\{x\left(x^2-1\right), x+1\right\} dx;$

c) $\displaystyle\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)};$

d) $\displaystyle\int_0^{1/2} x \ln\frac{1+x}{1-x} dx + \int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx.$

S11.2 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^4+x^3+3x^2+x+1}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Găsiţi o primitivă a funcţiei $f|_{\mathbb{R}_+^*}$, prin substituţia $t = x + \frac{1}{x}$. Determinaţi atunci o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$.

S11.3 Arătaţi că dacă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă astfel încât

$$\int_0^1 f^2(x)dx \leq 3\left(\int_0^1 F(x)dx\right)^2,$$

unde F este o primitivă a lui f, pentru care $F(1) = 0$, atunci f este liniară.

S11.4 Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită de

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{\sin x}}{(1+x)^{1/x}-e}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases},$$

admite primitive.

S11.5 Arătaţi că

$$\int_0^a e^{x^2} dx \cdot \int_0^a e^{-x^2} dx \geq a^2, \ \forall a \in \mathbb{R}_+.$$

S11.6 Calculaţi:

a) $\displaystyle\iint_D \left(x^2+y\right) dxdy$, unde D este domeniul mărginit de curbele $x = y^2$ şi $y = x^2$;

b) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$, unde D este domeniul mărginit de curbele $x^2+y^2 = 1$ şi $x^2+y^2 = 4$;

c) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$, unde D este domeniul mărginit de curbele $y = \frac{1}{x}$ şi $y = x$, cu $x \in [1,2]$;

d) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2+y^2} dxdy$, unde D este domeniul mărginit de curbele $y = x$ şi $y = \frac{x^2}{4}$.

S11.7 Calculaţi:

a) $\displaystyle\iiint_D \frac{1}{(x+y+z)^3} dxdydz$, unde $D = [1,2] \times [1,2] \times [1,2]$;

b) $\displaystyle\iiint_D xyz \sin(x+y+z) dxdydz$, unde D este domeniul mărginit de planele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ and $x+y+z = \frac{\pi}{2}$.

S11.8 Calculaţi aria mărginită de curba $(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1$, unde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sunt astfel încât $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

S11.9 Calculaţi aria mărginită de curba

$$\left|\frac{x}{a}\right|^p + \left|\frac{y}{b}\right|^p = 1,$$

unde a, b şi p sunt parametri din $\mathbb{R}_+^*$.

S11.10 Utilizând coordonatele cilindrice, calculaţi volumul mărginit de suprafeţele

$$x^2 + y^2 - 3z = 0 \text{ şi } \left(x^2 + y^2\right)^2 = 9\left(x^2 - y^2\right).$$

S11.11 În ce proporţie este împărţit volumul sferei

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4z$$

de suprafaţa $x^2 + y^2 + z = 4$?

Bibliografie recomandată

[1] G. Bucur, E. Câmpu, S. Găină, *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1966.
[2] C. Ciobotaru, R. Miculescu, A. Roşioru, ş.a., *Probleme de calcul integral,* Editura Gil, Zalău, 2005.
[3] A. Fulga, I. Radomir, *Analiză matematică. Culegere de probleme*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.
[4] M. Hidegkuti, *Lecture Notes and Worksheets on Improper Integrals,* City Colleges of Chicago, 2015.
[5] John K. Hunter, *An Introduction to Real Analysis,* Univ. of California Publ., 2013.
[6] M. Postolache (coord.), D. Cioroboiu, A. Pitea, *Calcul integral.Exerciţii şi probleme,* Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2010.