

Logică pentru Informatică - Săptămâna 10

Semantica Logicii de Ordinul I

Exerciții pentru Seminar

November 25, 2019

Toate exercițiile folosesc signatura Σ (Exemplul 3.1, pagina 6), Σ -structurile S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 (Exemplul 3.3, pagina 7) și S_1 -atribuirile α_1, α_2 (Exemplul 3.4 și Exemplul 3.5 pagina 8), definite în notele de curs.

1. Marcați aparițiile libere și respectiv aparițiile legate ale variabilelor în formulele de mai jos:

(a) $\phi_1 \triangleq (\forall x.P(x, x) \wedge P(x, y)) \wedge P(x, z)$;

(b) $\phi_2 \triangleq (\forall x.P(f(x, x), i(x)) \wedge \exists y.(P(x, y) \wedge P(x, z)))$.

2. Identificați domeniul de vizibilitate, pentru fiecare cuantificator, în formulele ϕ_1 și ϕ_2 date în **Exercițiul 1**.
3. Găsiți variabilele, variabilele libere și respectiv variabilele legate ale formulelor ϕ_1 și ϕ_2 date în Exercițiul 1.
4. Stabiliți dacă:

(a) $S_1, \alpha_1 \models P(x_2, x_3)$;

(b) $S_1, \alpha_1 \models \neg P(x_2, x_3)$;

(c) $S_1, \alpha_1 \models \neg P(x_2, x_3) \wedge P(x_1, x_1)$;

(d) $S_1, \alpha_1 \models \exists x_3.P(x_2, x_3)$;

(e) $S_1, \alpha_1 \models \forall x_2.\exists x_3.P(x_2, x_3)$;

(f) $S_1, \alpha_1 \models \exists x_3.\forall x_2.P(x_2, x_3)$;

(g) $S_1, \alpha_2 \models \forall x_2.\exists x_3.P(x_2, i(x_3))$;

5. Găsiți pentru fiecare dintre itemii de mai jos câte o S_2 -atribuire α_3 astfel încât:

(a) $S_2, \alpha_3 \models P(x_1, x_2)$;

- (b) $S_2, \alpha_3 \models P(f(x_1, x_2), x_3)$;
- (c) $S_2, \alpha_3 \models P(f(x_1, x_2), i(x_3))$;
- (d) $S_2, \alpha_3 \models P(x, e)$;
- (e) $S_2, \alpha_3 \models \exists y.P(x, i(y))$;
- (f) $S_2, \alpha_3 \models \forall y.P(x, i(y))$.

6. Arătați că următoarele formule sunt valide în S_2 :

- (a) $\forall x.\exists y.P(x, i(y))$;
- (b) $\forall x.P(f(x, e), x)$;
- (c) $\forall x.P(x, i(i(x)))$.

7. Arătați că formula $\forall x.\exists y.P(x, i(y))$ nu este validă în S_3 .

8. Găsiți o formulă care să fie satisfiabilă în S_1 dar nu în S_3 .

9. Găsiți o formulă fără variabile libere care să fie satisfiabilă în S_5 dar nu în S_4 .

10. Arătați că formula $\forall x.\exists y.P(x, y)$ nu este validă (atenție, conform Definiției 3.8 din notele de curs).

11. Arătați că formula $(\forall x.P(x, x)) \rightarrow \exists x_2.P(x_1, x_2)$ este validă (atenție, folosiți corect Definiția 3.8 din notele de curs).

12. Arătați că formula $\forall x.\exists y.P(x, y)$ nu este validă (atenție, folosiți corect Definiția 3.8 din notele de curs).

13. Arătați că formula $\forall x.\neg P(x, x)$ este satisfiabilă (conform Definiției 3.7 din notele de curs).

14. Arătați că formula $\forall x.\neg P(x, x) \wedge \exists x.P(x, x)$ nu este satisfiabilă (conform Definiției 3.7 din notele de curs).