BAREM - Lucrarea 1 - Matematică

(23.11.2019 - 10:00-11:45)

SUBIECTUL I (20 de puncte)

- $(A \cap B)\Delta A = A \setminus B \Leftrightarrow \chi_{(A\cap B)\Delta A} = \chi_{A\setminus B}$ (1.1)
- $\chi_{(A\cap B)\Delta A} = \chi_{A\cap B} + \chi_B - 2\chi_{A\cap B}\chi_B = \chi_A - \chi_A\chi_B$ (1.2)
- $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A\chi_B$ (1.3)
- (1.1)+(1.2)+(1.3) $\Rightarrow (A\cap B)\Delta A = A \setminus B$ ....

SUBIECTUL II (30 de puncte)

a) 20 puncte

- Scrierea seriei de puteri sub forma: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n t^{n-1}$, unde $t = 1 - x$, $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2+4n-3}$ (2.1)
- $\exists \rho = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+4n-3}{4(n+1)^2+4(n+1)-3} = 1$ (2.2)
- (2.2)$\Rightarrow R = 1 \Rightarrow$ mulţimile de convergenţă pentru (2.1): $D_c = D_{ac} = (-1, 1)$ (2.3)
- $t = -1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2+4n-3}(C) \sim \dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}(C)$ (2.4)
- $t = 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{4n^2+4n-3}(C)$ (Criteriul lui Leibniz) (2.5)
- (2.3)$\sim$(2.5)$\Rightarrow D_c = D_{ac} = [-1, 1]$ (2.6)
- (2.6)$\Rightarrow$ Concluzia:

  Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{4n^2+4n-3}(1-x)^{n-1}$ este convergentă (absolut) pe intervalul $[0, 2]$

b) 10 puncte

- Scrierea seriei pentru $x = 2 \in D_c = [0, 2]$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{2n-2}}{4n^2+4n-3}$(2.7)
- Rescrierea termenului general $\widetilde{a}_n$, $\widetilde{a}_n = \dfrac{1}{4n^2+4n-3}$ al seriei (2.7):

  $\widetilde{a}_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+3)} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+3}\right)$ (2.8)
- (2.7)+(2.8)$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2+4n-3} = \dfrac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k+3}\right)$

  $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k+3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+3}\right) = \dfrac{4}{3}$
- Concluzia: Suma seriei de puteri pentru $x = 2$ este $\dfrac{1}{3}$.

SUBIECTUL III (40 de puncte)

a) Calculul corect $T(-1,-1,3) = (-3,-3,1)$ - 5 puncte

b) Matricea operatorului T în baza canonică este: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2-\alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ - 5 puncte

c) 15 puncte

- Calculul valorilor proprii:
  $det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ cu $m_{\lambda_1} = 2$ şi $\lambda_2 = 3$ cu $m_{\lambda_2} = 1$
- Cazul I: $\lambda_1 = 1$, $(A - I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2-\alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}$
  - dacă $\alpha = 1$, atunci $rang(A - I_3) = 1 \Rightarrow dim(V_{\lambda_1}) = 2$

    $m_{\lambda_1} = dim(\mathbb{R}^3) - rang(A - I_3) = 2$ (3.1)

  - dacă $\alpha \neq 1$, atunci $rang(A - I_3) = 2 \Rightarrow dim(V_{\lambda_1}) = 1$

    $m_{\lambda_1} \neq dim(\mathbb{R}^3) - rang(A - I_3) \Rightarrow T$ nu este diagonalizabil
- Cazul II: $\lambda_2 = 3$, $(A - 3I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2-\alpha & \alpha & -2 \end{pmatrix}$
- Cum $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rang(A - 3I_3) = 2, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

  $m_{\lambda_2} = \dim(\mathbb{R}^3) - rang(A - 3I_3) = 1$ (3.2)
- Concluzia: T este diagonalizabil pentru $\alpha = 1$

d) 10 puncte

- $V_{\lambda_1} = \{(-\alpha, \alpha, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = Lin(\{(-1,1,0), (0,0,1)\})$
- $V_{\lambda_2} = \{(\alpha, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} = Lin(\{(1,1,1)\})$
- Baza în care se manifestă forma diagonală: $B_D = \{(-1,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$
- Forma diagonală $A_D = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, unde S este matricea de schimbare de la baza canonică din $\mathbb{R}^3$ la baza B_D.

e) 5 puncte
Baza B_D este ortogonală dacă şi numai dacă vectorii săi sunt ortogonali, doi câte doi

$\langle(-1,1,0), (0,0,1)\rangle = 0$, $\langle(-1,1,0), (1,1,1)\rangle = 0$, $\langle(1,1,1), (0,0,1)\rangle = 1 \neq 0$

Concluzia: Baza B_D nu este ortogonală.

Precizări:

Se acordă **10 puncte** din oficiu.
Pentru orice soluţie corectă, chiar diferită de cea din barem, se acordă punctaj corespunzător.
Nota finală reprezintă 1/10 din punctajul total obţinut.

23.11.2019