Barem

Examen / nr. 2 – Matematică – semian B

(2019-2020 / 20.01.2020)

Subiectul 1 .... **30 puncte**

a) Abordarea subiectului **1**

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{x^2+2z^2}x$ **3**

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2$ **3**

$\frac{\partial f}{\partial z} = 4e^{x^2+2z^2}z$ **3**

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x^2+2z^2}(4x^2+2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} = 8e^{x^2+2z^2}xz$ **3**

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = e^{x^2+2z^2}(16z^2+4)$ **3**

c) Rezolvarea sistemului $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$: $(x,y,z) = (0,-1,0)$ **5**

d) Determinarea Hessianului în punctul critic: $H_f(0,-1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **3**

$H_f(0,-1,0)$ pozitiv definită **4**

Concluzie: $(0,-1,0)$ punct de minim local **2**

Subiectul 2 .... **30 puncte**

a) Abordarea subiectului **1**

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = f(x,0)'|_{x=0} = 1$ **6**

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = f(0,y)'|_{y=0} = -1$ **6**

b) Derivata direcţională: $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(tu,tv)}{t} = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0}\frac{(tu)^3-(tv)^5}{t[(tu)^2+(tv)^4]} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{u^3-t^2v^5}{u^2+t^2v^4} & (u,v)\neq(0,0); \\ 0, & (u,v)=(0,0). \end{cases} = \begin{cases} u, & u\neq 0; \\ -v, & u=0. \end{cases}$ **12**

Diferenţiala Gâteaux în $(0,0)$ a lui f este funcţia $\mathrm{D}f(0,0)$, cu $\mathrm{D}f(0,0)(u,v) = \begin{cases} u, & u\neq 0; \\ -v, & u=0. \end{cases}$ **2**

Aceasta nu este este liniară, deci f nu este derivabilă Gâteaux în $(0,0)$ **3**

Subiectul 3 .... **30 puncte**

a) Abordarea subiectului **1**

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ln\left(1+x^2+y^2\right)dxdy \overset{x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\ln(1+r^2)drd\theta = 2\pi\int_0^2\left(\frac{r^3}{3}\right)'\ln(1+r^2)dr =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\ r^3\ln(1+r^2)\Big|_0^2 - \frac{2\pi}{3}\int_0^2\frac{2r^4}{1+r^2}dr = \frac{16\pi}{3}\ln 5 - \frac{2\pi}{3}\int_0^2\left(r^2-1+\frac{1}{1+r^2}\right)dr = \frac{16\pi}{3}\ln 5 - \frac{2\pi}{3}\left(\frac{r^3}{3} - r + \operatorname{arctg} r\right)\Big|_0^2 =$$

$= \frac{2\pi}{3}\left(8\ln 5 - \operatorname{arctg} 2 - \frac{2}{3}\right)$ **14**

b) Identificarea punctelor în care funcţia nu este definită: $x = 0$ şi $x = +\infty$ **2**

Aplicarea criteriului în α în $x = 0$: $\ell = \lim_{x\searrow 0}\frac{1}{x^p\sqrt{1+x}}x^\alpha = \lim_{x\searrow 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot x^{\alpha-p} = \lim_{x\searrow 0}x^{\alpha-p}$ **3**

Dacă luăm $\alpha = p$, obţinem $\ell = 1 \in (0,+\infty)$, deci $\int_0^1\frac{1}{x^p\sqrt{1+x}}dx$ este convergentă dacă şi numai dacă $p < 1$ **3**

Aplicarea criteriului în β în $x = +\infty$: $\ell = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p\sqrt{1+x}}x^\beta = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{1+x}}\cdot x^{\beta-p-\frac{1}{2}}$ **3**

Dacă luăm $\beta = p + \frac{1}{2}$, obţinem $\ell = 1 \in (0,+\infty)$, deci $\int_1^\infty\frac{1}{x^p\sqrt{1+x}}dx$ este convergentă dacă şi numai dacă $p > \frac{1}{2}$ **3**

Concluzie: integrala este convergentă dacă şi numai dacă $p \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ **1**

Puncte din oficiu: .... **10 puncte**

Precizări:

1) Pentru orice soluţie corectă, chiar diferită de cea din barem, se acordă punctaj corespunzător;

2) nota finală este 1/10 din punctajul total.