CURS.
VARIABILE ALEATOARE DISCRETE

1. Definiţia variabilei aleatoare discrete

Noţiunea de **variabilă aleatoare** este una dintre noţiunile fundamentale ale teoriei probabilităţilor şi statisticii matematice. Într-o primă accepţiune noţiunea de variabilă aleatoare poate fi înţeleasă ca mărimea care în cadrul unui experiment poate lua o valoare întâmplătoare sub influenţa unor factori întâmplători. De exemplu numărul de zile dintr-un an în care cade ploaia peste o anumită regiune, rezultatul obţinut în urma măsurării unei mărimi fizice, viteza unei molecule de gaz, numărul de apeluri zilnice primite la o centrală telefonică, numărul de bile albe care apar în n extrageri dintr-o urnă ce conţine bile de diferite culori, numărul de puncte care apar la aruncarea unui zar etc.

În cele ce urmează ne propunem să studiem acele variabile aleatoare care iau un **număr finit sau cel mult numărabil de valori**. Pentru cunoaşterea unei variabile aleatoare trebuie să cunoaştem în primul rând valorile pe care le poate lua. Însă unele valori pot apărea mult mai des decât altele. Variabila aleatoare va fi precizată dacă vom cunoaşte şi probabilitatea cu care este luată fiecare valoare.

Definiţia 1.1. *Fie $(E, \mathcal{K}, P)$ un câmp de probabilitate finit sau cel mult numărabil. O funcţie*

$$X : E \to \{x_1, x_2, \dots x_n, \dots\}, \quad x_1, \cdots, x_n, \cdots \in \mathbb{R}$$

care ia un număr finit sau cel mult numărabil de valori reale se numeşte ***variabilă aleatoare discretă****.*

x_i sunt valorile pe care le poate lua variabila aleatoare discretă X. Vom nota

$$p_i = P\{X = x_i\} = P\{\ e \in E \mid X(e) = x_i\ \}, \quad i = 1, 2, \dots \tag{1}$$

probabilitatea cu care variabila considerată ia valoarea x_i.

Tabelul

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots \tag{2}$$

se numeşte **repartiţia variabilei X**.

Evenimentele $\{X = x_i\},\ i = 1, 2, \dots$ formează un sistem complet de evenimente. Au loc

$$0 \le p_i \le 1 \ \text{ şi } \ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \tag{3}$$

Exemplul 1.1. Două aparate de acelaşi tip funcţionează independent unul de celălalt şi se pot defecta cu probabilitatea $1 - p \in (0, 1)$. Să analizăm numărul de aparate ce funcţionează la un moment dat şi cu ce probabilitate acestea funcţionează.

Notăm cu A_i evenimentul: "aparatul i funcţionează", $i = 1,2$. Atunci $P(A_i) = p, \;\; i = 1,2$. Dacă urmărim starea în care se află cele două aparate găsim următoarele situaţii care constituie mulţimea cazurilor posibile:

$$E = \{ \; (\overline{A_1}, \overline{A_2}), \; (\overline{A_1}, A_2), \; (A_1, \overline{A_2}), \; (A_1, A_2) \; \}.$$

Evident $\overline{A_i}$, reprezintă evenimentul: "aparatul i nu funcţionează", $i = 1,2$.
Fie X variabila aleatoare care are ca valori numărul de aparate care funcţionează la un moment dat. Evident

$$X : E \to \{0,1,2\},$$

iar probabilităţile cu care se X ia aceste valori sunt:

$$P\{X = 0\} = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = (1-p)^2,$$

$$\begin{aligned} P\{X = 1\} &= P\left((\overline{A_1} \cap A_2) \cup (\; A_1 \cap \overline{A_2})\right) = P(\overline{A_1} \cap A_2) + P(\; A_1 \cap \overline{A_2}) \\ &= P(\overline{A_1})P(A_2) + P(A_1)P(\overline{A_2}) = 2p(1-p), \end{aligned}$$

$$P\{X = 2\} = P(A_1 \cap A_2) = p^2.$$

Se obţine astfel repartiţia

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ (1-p)^2 & 2p(1-p) & p^2 \end{pmatrix}.$$

Se verifică imediat $(1-p)^2 + 2p(1-p) + p^2 = 1$. □

Exemplul 1.2. O firmă încheie contracte independente cu trei furnizori $F_i, \;\; i = 1,2,3$ cu probabilităţile p_1, p_2 şi respectiv p_3. Numărul contractelor pe care firma le poate încheia este o variabilă aleatoare X cu 4 valori posibile $0,1,2,3$ a cărei repartiţie este

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ q_1q_2q_3 & p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3 & p_1p_2q_3 + q_1p_2p_3 + p_1q_2p_3 & p_1p_2p_3 \end{pmatrix}$$

Pentru a calcula probabilităţile cu care X ia valorile $0,1,2,3$ notăm cu $A_i, \;\; i = 1,2,3$ evenimentul "firma încheie contracte cu furnizorul F_i.
$P\{X = 0\}$ este probabilitatea ca firma să nu încheie niciun contract.

$P\{X = 0\} = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot (1 - P(A_3)) = (1-p_1) \cdot (1-p_2) \cdot (1-p_3) = q_1q_2q_3$.
$P\{X = 1\}$ este probabilitatea ca firma să încheie un singur contract.

$P\{X = 1\} = P\left((A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)\right) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) = p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3$, etc.
Am notat pentru simplitate $1 - p_1 = q_1$. □

2. Operaţii cu variabile aleatoare discrete

Fie variabilele

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix},\ i = 1, 2, \ldots \ \text{şi}\ Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix},\ j = 1, 2, \ldots .$$

Definim

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\},\ i = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots . \tag{4}$$

Propoziţia 2.1. *Au loc următoarele formule.*

$$\begin{aligned} p_i &= \sum_{j\in\mathbb{N}} p_{ij} \\ q_j &= \sum_{i\in\mathbb{N}} p_{ij} \\ \sum_{i\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{N}} p_{ij} &= 1 \end{aligned} \tag{5}$$

Demonstraţie. Avem

$$p_i = P\{X = x_i\} = P(\{X = x_i\} \cap E) = P\left(\{X = x_i\} \cap (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{Y = y_j\})\right) =$$

$$= P\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} p_{ij},$$

ceea ce demonstrează prima formulă. Următoarele două se arată analog şi le propunem cititorului ca exerciţiu. □

Definiţia 2.1. *Variabilele aleatoare* $X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix},\ i = 1, 2, \ldots$ *şi* $Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_i \end{pmatrix},\ j = 1, 2, \ldots$ *se numesc* ***independente****, dacă*

$$p_{ij} = p_i \cdot q_j,\quad \forall i = 1, 2, \ldots,\ \forall j = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Relaţia (**??**) ne spune că variabilele X şi Y sunt independente dacă şi numai dacă

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}.$$

Definiţia 2.2. *Fie variabilele aleatoare*

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix},\ i = 1, 2, \ldots \ \text{şi}\ Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_i \end{pmatrix},\ j = 1, 2, \ldots$$

şi fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Definim următoarele operaţii cu variabile aleatoare: sumă $X + Y$, $X + \alpha$, produs $X \cdot Y$, αX, puterea X^r, $r \in \mathbb{N}$.

Suma variabilelor X şi Y are repartiţia:

$$X + Y : \begin{pmatrix} x_i + y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix},\ i = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

Suma $X+\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$ are repartiţia:

$$X+\alpha:\begin{pmatrix} x_i+\alpha \\ p_i \end{pmatrix},\ i=1,2,\ldots. \tag{8}$$

Produsul variabilelor X şi Y are repartiţia:

$$X\cdot Y:\begin{pmatrix} x_i\cdot y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix},\ i=1,2,\ldots,\ j=1,2,\ldots. \tag{9}$$

Produsul $\alpha X,\ \alpha\in\mathbb{R}$ are repartiţia:

$$\alpha X:\begin{pmatrix} \alpha x_i \\ p_i \end{pmatrix},\ i=1,2,\ldots. \tag{10}$$

Puterea X^r, $r\in\mathbb{N}$ are repartiţia:

$$X^r:\begin{pmatrix} x_i^r \\ p_i \end{pmatrix},\ i=1,2,\ldots. \tag{11}$$

Exemplul 2.1. Se dau variabilele aleatoare independente:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix},\quad Y:\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Determinaţi repartiţiile variabilelor $X+Y$, $X\cdot Y$, $2+X$, X^2, $3Y$.

Folosim formulele precedente şi independenţa variabilelor. Convenim să punem pe prima linie toate rezultate în ordine crescătoare. De exemplu suma $X+Y$ poate lua doar valorile $1,\ 2,\ 3,4$. Înlocuim apoi probabilităţile şi folosind independenţa avem

$$P\{X+Y=1\}=P(\{X=0\}\cap\{Y=1\})=P\{X=0\}\cdot P\{Y=1\}=0,12.$$

Dacă unele valori sunt luate în mai multe moduri, folosim probabilitatea unei reuniuni, observând că evenimentele sunt incompatibile; de exemplu

$$P\{X+Y=2\}=P\left((\{X=0\}\cap\{Y=2\})\cup(\{X=1\}\cap\{Y=1\})\right)=$$

$$=P(\{X=0\}\cap\{Y=2\})+P(\{X=1\}\cap\{Y=1\})=0,2\cdot 0,4+0,4\cdot 0,6=0,32.$$

Obţinem

$$X+Y:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,12 & 0,32 & 0,4 & 0,16 \end{pmatrix},\quad XY:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0,2 & 0,24 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$2+X:\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix},\quad X^2:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0,2 & 0.4 & 0,4 \end{pmatrix},\quad 3Y:\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Exemplul 2.2. Ce distribuţie are suma variabilelor independente:

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p^2 & \frac{5}{3}p & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ q^2 & \frac{8}{5}q & \frac{1}{6} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}?$$

Dar produsul lor?

Punem condiţiile ca aceste tabele să reprezinte repartiţii de variabile aleatoare. Adică pe linia a doua să avem numere pozitive subunitare şi suma lor să fie 1. Obţinem pentru prima variabilă

$$p^2 + \frac{5}{3}p + \frac{1}{3} = 1 \;\text{ şi }\; p \in [0, 3/5]$$

de unde $p = \frac{1}{3}$. Analog

$$q^2 + \frac{8}{5}q + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} = 1 \;\text{ şi }\; q \in [0, 5/8]$$

de unde $q = \frac{2}{5}$. Rezultă

$$X + Y : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{225} & \frac{36}{225} & \frac{577}{1350} & \frac{209}{675} & \frac{2}{27} & \frac{1}{90} \end{pmatrix}, \quad X \cdot Y : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{270} & \frac{97}{1350} & \frac{189}{225} & \frac{11}{150} & \frac{1}{90} \end{pmatrix}$$

□

3. Funcţia de repartiţie

Definiţia 3.1. *Fie X o variabilă aleatoare discretă. Funcţia*

$$F : \mathbb{R} \to [0, 1], \quad F(x) = P\{X \le x\}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{12}$$

*se numeşte **funcţia de repartiţie** a variabilei X.*

Dacă variabila X are un număr finit de valori, atunci expresia funcţiei de repartiţie este

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1, & x_1 \le x < x_2 \\ \dots & \\ \sum_{j=1}^{i-1} p_j, & x_{i-1} \le x < x_i \\ \dots & \\ 1 & x \ge x_n. \end{cases} \tag{13}$$

Dacă X este o variabilă discretă, atunci funcţia de repartiţie poate fi scrisă sub forma

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i u(x - x_i), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

unde u este funcţia unitate a lui Heaviside:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \ge 0. \end{cases} \tag{15}$$

FIGURE 1. Funcţia de repartiţie

Observaţia 3.1. Funcţia de repartiţie este continuă la dreapta, iar saltul ei într-un punct de discontinuitate x_i este probabilitatea evenimentului ”X ia valoarea x_i”

$$p_i = P\{X = x_i\} = F(x_i) - F(x_i - 0).$$

Derivata în sensul distribuţiilor a funcţiei de repartiţie F este

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta(x - x_i)(F(x_i) - F(x_i - 0)) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta(x - x_i)p_i, \tag{16}$$

unde $\delta(x - x_i)$ este distribuţia Dirac calculată în x_i.
Funcţia f se numeşte **densitate de probabilitate** şi considerarea ei în cazul discret asigură tratarea unitară cu situaţia variabilelor aleatoare de tip continuu.

Exemplul 3.1. Determinaţi funcţia de repartiţie a variabilei:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0,1 & 1 \le x < 2 \\ 0,3 & 2 \le x < 3 \\ 0,6 & 3 \le x < 4 \\ 0,7 & 4 \le x < 5 \\ 0,9 & 5 \le x < 6 \\ 1 & 6 \le x \end{cases}$$

Are loc

$$F(x) = 0,1u(x-1) + 0,2u(x-2) + 0,3u(x-3) + 0,1u(x-4) +$$
$$+0,2u(x-5) + 0,1u(x-6).$$

Funcţia de repartiţie este reprezentată în figura (**??**), iar densitatea de probabilitate, reprezentată în figura (**??**), are expresia analitică

$$f(x) = 0,1\delta(x-1) + 0,2\delta(x-2) + 0,3\delta(x-3) + 0,1\delta(x-4) +$$
$$+0,2\delta(x-5) + 0,1\delta(x-6).$$

Se observă că derivând în sens distribuţional funcţia F obţinem f, deoarece derivata distribuţiei

FIGURE 2. Densitatea de probabilitate

Heaviside, u este distribuţia Dirac, δ. $\square$

4. Caracteristici numerice ale variabilelor discrete

O variabilă aleatoare poate fi caracterizată prin funcţia sa de repartiţie. În multe situaţii aceasta din urmă nu este cunoscută şi se pune problema introducerii unor alţi parametri (**caracteristici numerice**) care să permită caracterizarea variabilei aleatoare respective. Printre aceste caracteristici numerice, un rol important îl ocupă **valoarea medie** (sau speranţa matematică), **dispersia** (sau varianţa), **momentele iniţiale şi momentele centrate de diferite ordine**.

Definiţiile următoare au fost date pentru cazul în care variabila X are o infinitate numărabilă de valori, de aceea pentru existenţa valorilor caracteristice de mai jos vom presupune că seriilor corespunzătoare sunt convergente. În cazul în care o serie este divergentă vom spune că variabila X nu posedă respectiva caracteristică numerică.

Momentul iniţial de ordinul r, $r \in \mathbb{N}$ este

$$m_r = M[X^r] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^r p_i. \tag{17}$$

Media sau **speranţa** este

$$M[X] = m_1 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i. \tag{18}$$

Propoziţia 4.1. (***Proprietăţi ale mediei.***)

1. *Valoarea medie a unei constante este egală cu constanta respectivă:*
$$M[\lambda] = \lambda.$$
2. *Valoarea medie a unei variabile aleatoare care admite medie este cuprinsă între cea mai mică şi cea mai mare dintre valorile posibile ale variabilei aleatoare. Dacă $a = \inf_i x_i$ şi $b = \sup_i x_i$ atunci*
$$a \leq M[X] \leq b.$$

14.3. *Dacă X, Y sunt variabile aleatoare discrete care admit medie atunci*
$$M[X+Y] = M[X] + M[Y].$$

4. *Dacă X admite medie atunci*
$$M[\lambda + X] = \lambda + M[X], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
5. *Dacă X, Y sunt variabile aleatoare discrete independente şi admit medie atunci*
$$M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$$

6. *Dacă X admite medie atunci*

$$M[\lambda X] = \lambda M[X], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

7. *Dacă X, Y sunt variabile aleatoare care admit medie atunci*

$$|M[X \cdot Y]| \leq \sqrt{M[X^2] \cdot M[Y^2]} \qquad (\textit{inegalitatea lui Schwarz}).$$

Demonstraţie. Fie variabilele aleatoare

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, \ i = 1, 2, \ldots \ \text{şi} \ Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_i \end{pmatrix}, \ j = 1, 2, \ldots.$$

1. Avem

$$\lambda : \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix},$$

de unde folosind formula (**??**) obţinem imediat $M[\lambda] = \lambda$.

2. Putem scrie

$$M[X] = \sum_{i \geq 1} x_i p_i \geq a \sum_{i \geq 1} p_i = a,$$
$$M[X] = \sum_{i \geq 1} x_i p_i \leq b \sum_{i \geq 1} p_i = b.$$

14.3. Folosind (**??**) şi (**??**) avem

$$M[X + Y] = \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} (x_i + y_j) \, p_{ij} = \sum_{i \geq 1} x_i \sum_{j \geq 1} p_{ij} + \sum_{j \geq 1} y_j \sum_{i \geq 1} p_{ij}$$
$$= \sum_{i \geq 1} x_i p_i + \sum_{j \geq 1} y_j q_j = M[X] + M[Y].$$

4. Rezultă evident din 1. şi 14.3..

5. Putem scrie

$$M[X \cdot Y] = \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} x_i y_j p_{ij},$$

iar dacă variabilele sunt independente atunci $p_{ij} = p_i q_j$ şi deci

$$M[X \cdot Y] = \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} x_i y_j p_i q_j = (\sum_{i \geq 1} x_i p_i) \cdot (\sum_{j \geq 1} y_j q_j) = M[X] \cdot M[Y].$$

6. Proprietatea rezultă evident din proprietăţile 1. şi 14.3.

7. Avem $M[(x|X| + |Y|)^2] \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci

$$\left(M[X^2] \right) x^2 + 2 \left(M[|X \cdot Y|) \, x + \left(M[Y^2] \right) \geq 0, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Urmează că discriminantul $\triangle \leq 0$, adică

$$(M[|X \cdot Y|)^2 \leq M[X^2] \cdot M[Y^2].$$

$\square$

Exemplul 4.1. Variabila aleatoare

$$X : \begin{pmatrix} n \\ \dfrac{1}{n(n+1)} \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}^*}$$

nu are medie.

Pentru început observăm că are loc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

deci funcţia din enunţ este o variabilă aleatoare. Deoarece seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(n+1)}$$

este divergentă, urmează că nu există media variabilei X. □

Mediana este acea valoare notată m_e, cu proprietatea

$$P\{X \leq m_e\} = P\{X \geq m_e\}.$$

Deducem $F(m_e) = 1 - F(m_e)$, altfel spus mediana este soluţia ecuaţiei $F(x) = \dfrac{1}{2}$.
Dacă variabila are un număr finit de valori şi anume n , atunci se obişnuieşte ca

$$m_e = \begin{cases} x_{k+1} & \text{dacă } n = 2k+1 \\ x_k \text{ sau } x_{k+1} & \text{dacă } n = 2k. \end{cases} \tag{19}$$

Moda reprezintă valoarea luată de variabila X, cu frecvenţă maximă. Evident este posibil ca să nu existe moda, de exemplu în cazul uniform, sau dacă există, aceasta să nu fie unică.

Momentul centrat de ordin r este

$$\mu_r = M[(X - M[X])^r] = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - M[X])^r p_i. \tag{20}$$

Dispersia sau varianţa, este momentul centrat de ordin 2, adică

$$D^2[X] = \mu_2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - M[X])^2 p_i. \tag{21}$$

Propoziţia 4.2. *Dacă variabila aleatoare X are medie şi dispersie, atunci are loc*

$$D^2[X] = M[X^2] - (M[X])^2. \tag{22}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă notăm media cu m avem

$$D^2[X] = \sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i - m)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i^2 - 2m \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i + m^2 = M[X^2] - 2m^2 + m^2 = M[X^2] - (M[X])^2.$$

□

Propoziţia 4.3. (***Proprietăţi ale dispersiei.***)

1. *Dispersia unei constante este nulă*

$$D^2[\lambda] = 0$$

2. *Dacă X admite dispersie atunci*

$$D^2[\lambda X] = \lambda^2 D^2[X], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

14.3. *Dacă variabilele aleatoare X şi Y sunt independente, atunci*

$$D^2[X \pm Y] = D^2[X] + D^2[Y].$$

4. *Dacă X admite dispersie atunci*

$$D^2[\lambda + X] = D^2[X], \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Demonstraţie. Fie variabilele aleatoare

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, \ i = 1, 2, \dots \ \text{şi} \ Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_i \end{pmatrix}, \ j = 1, 2, \dots .$$

1. Avem

$$D^2[\lambda] = M[\lambda^2] - (M[\lambda])^2 = 0.$$

2. Dacă notăm $M[X] = m$, putem scrie

$$D^2[\lambda X] = \sum_{i \geq 1} p_i(\lambda x_i - \lambda m)^2 = \sum_{i \geq 1} p_i \lambda^2 (x_i - m)^2 = \lambda^2 \sum_{i \geq 1} p_i (x_i - m)^2 = \lambda^2 D[X].$$

14.3. Fie $Z = X + Y$. Atunci

$$\begin{aligned} D^2[Z] = M[Z^2] - (M[Z])^2 = M[(X+Y)^2] - (M[X+Y])^2 = M[X^2 + Y^2 + 2X \cdot Y] - (M[X] + M[Y])^2 \\ = M[X^2] + M[Y^2] + 2M[X \cdot Y] - (M[X])^2 - 2M[X]M[Y] - (M[Y])^2 \\ = M[X^2] - (M[X])^2 + M[Y^2] - (M[Y])^2 = D^2[X] + D^2[Y]. \end{aligned}$$

□

Mai general, dacă variabilele aleatoare $X_1, X_2, \dots, X_k$ sunt independente şi $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, k}$ atunci are loc

$$D^2[\sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i] = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 D^2[X_i].$$

Dispersia unei variabile aleatoare X este, într-un anume sens, cea mai bună valoare care caracterizează împrăştierea valorilor $x_1, x_2, \dots, x_n$ sau, cu alte cuvinte, media $M[X]$ este punctul cel mai potrivit faţă de care trebuie să măsurăm devierile acestor valori. Acest lucru rezultă din următoarea propoziţie.

Propoziţia 4.4. *Dacă X este o variabilă aleatoare care ia valorile x_1, x_2, $\dots, x_n, ..$ cu probabilităţile $p_1, p_2, \dots, p_n, ...$, iar m este media sa, atunci*

$$D^2[X] = \sum_{i \geq 1} p_i (x_i - m)^2 \leq \sum_{i \geq 1} p_i (x_i - x)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstraţie. Putem scrie $x_i - x = (x_i - m) + (m - x),\ i = \overline{1, n}$ şi

$$\sum_{i\geq 1} p_i(x_i - x)^2 = \sum_{i\geq 1} p_i[(x_i - m) + (m - x)]^2$$

$$= \sum_{i\geq 1} p_i(x_i - m)^2 + 2(m - x)\sum_{i\geq 1} p_i(x_i - m) + (m - x)^2$$

$$= \sum_{i\geq 1} p_i(x_i - m)^2 + 2(m - x)(m - m) + (m - x)^2 = D^2[X] + (m - x)^2 \geq D^2[X].$$

□

Abaterea medie pătratică este definită prin relaţia

$$\sigma = D[X] = \sqrt{D^2[X]}. \tag{23}$$

Propoziţia 4.5. (***Proprietăţi ale abaterii medii pătratice.***)

1. $D[\lambda] = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.
2. $D[\lambda + X] = D[X], \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

14.3. $D[\lambda X] = \mid \lambda \mid D[X], \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Covarianţa variabilelor X şi Y este definită prin:

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = M[(X - M[X]) \cdot (Y - M[Y])] \tag{24}$$

În cazul în care $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ se spune că X şi Y sunt **necorelate**.

Propoziţia 4.6. *Fie X şi Y două variabile aleatoare care admit medie. Atunci:*

1. $\mathrm{Cov}[X, Y] = M[X \cdot Y] - M[X] \cdot M[Y]$.
2. *dacă X şi Y sunt independente, atunci X şi Y sunt necorelate. Reciproca nu este adevărată.*

Demonstraţie.

1. Fie $m_1 = M[X]$ şi $m_2 = M[Y]$. Atunci

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = M\left[X \cdot Y - Y m_1 - X m_2 + m_1 m_2\right] = M\left[X \cdot Y\right] - m_1 M\left[X\right] - m_2 M\left[Y\right] + m_1 m_2$$

$$= M\left[X \cdot Y\right] - M\left[X\right] \cdot M\left[Y\right].$$

2. Dacă X şi Y sunt independente, atunci $M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$ şi deci din punctul 1. deducem imediat $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$.

□

Propoziţia 4.7. *Fie X şi Y două variabile aleatoare care admit medie şi dispersie. Atunci:*

$$D^2[X \pm Y] = D^2[X] + D^2[Y] \pm 2Cov[X, Y]. \tag{25}$$

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned} D^2[X+Y] &= M\left[(X+Y-M[X+Y])^2\right] = M\left[((X-M[X])+(Y-M[Y]))^2\right] \\ &= M\left[(X-M[X])^2+(Y-M[Y])^2+2(X-M[X])(Y-M[Y])\right] \\ &= M\left[(X-M[X])^2\right]+M\left[(Y-M[Y])^2\right]+2M[(X-M[X])(Y-M[Y])] \\ &= D^2[X]+D^2[Y]+2\mathrm{Cov}[X,Y]. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.1. (***Inegalitatea lui Cebâşev.***)

Fie X o variabilă aleatoare care admite medie şi dispersie finite. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, are loc inegalitatea

$$P\{\mid X-m\mid<\varepsilon\} \geq 1-\frac{D^2[X]}{\varepsilon^2}, \quad m=M[X]. \tag{26}$$

O formă echivalentă a teoremei este: dacă media distribuţiei X este m şi abaterea medie pătratică este $\sigma = \sqrt{D^2[X]}$, probabilitatea ca valorile variabilei aleatoare să fie mai depărtate de medie cu cel puţin $k\sigma$ este cel mult $\frac{1}{k^2}$.

$$P(\{|X-m| \geq k\sigma\}) < \frac{1}{k^2}. \tag{27}$$

Dacă luăm $\epsilon = k\sigma$ în inegalitatea (**??**) obţinem

$$P(\{|X-m| < k\sigma\}) \geq 1-\frac{1}{k^2}. \tag{28}$$

Deoarece evenimentele $\{|X-m| < k\sigma\}$ şi $\{|X-m| \geq k\sigma\}$ sunt contrare, rezultă evident (**??**). Relaţia (**??**) este echivalentă cu

$$P(\{m-k\sigma < X < m+k\sigma\}) \geq 1-\frac{1}{k^2}.$$

Pentru $k = 3$ obţinem $P(\{m-3\sigma < X < m+3\sigma\}) \geq 1-\frac{1}{9} = \frac{8}{9} = 0.88889$. Deci, cu o probabilitate cuprinsă între 0.88889 şi 1, orice variabilă ia valori cuprinse în intervalul $(m-3\sigma, m+3\sigma)$.

Exemplul 4.2. Numărul clienţilor care vizitează un showroom sâmbăta dimineaţă este o variabilă aleatoare cu media $m = 18$ şi abaterea $\sigma = 2,5$. Cu ce probabilitate putem presupune că numărul vizitatorilor va fi cuprins între 8 şi 28 de clienţi.

Deoarece $8 < X < 28 \Rightarrow -10 < X-18 < 10 \Rightarrow \epsilon = 10$ şi folosind relaţia (**??**) obţinem:

$$P(\{\mid X-18\mid< 10\}) \geq 0.9375$$

deci probabilitatea ca numărul vizitatorilor să fie cuprins între 8 şi 28 de clienţi este de cel puţin 0.9375. □

Avantajul inegalităţii lui Cebâşev este că se poate aplica oricărei distribuţii pentru care media şi abaterea medie pătratică există.

Dezavantajul este că această inegaliate dă o margine inferioară a probabilităţii ca valorile variabilei aleatoare să fie cuprinse într-un interval de forma $(m-\epsilon, m+\epsilon)$.

5. Funcţia caracteristică

Funcţia caracteristică a variabilei aleatoare discrete $X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i=1,2,\dots}$ este funcţia

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

definită prin relaţia

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{jtx_i} p_i, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad j^2 = -1. \tag{29}$$

Vom nota uneori φ_X, pentru a pune în evidenţă variabila căreia i se asociază. Remarcăm următoarele două proprietăţi ale funcţiei caracteristice.

Propoziţia 5.1. *Dacă variabilele X şi Y sunt independente, atunci*

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) \tag{30}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Fie

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i=1,2,\dots}, \quad Y : \begin{pmatrix} y_k \\ q_k \end{pmatrix}_{k=1,2,\dots} \text{ şi } X+Y : \begin{pmatrix} x_i + y_k \\ p_{ik} \end{pmatrix}_{i,k=1,2,\dots}.$$

Avem

$$\varphi_{X+Y}(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} e^{jt(x_i+y_k)} p_{ik}.$$

Deoarece variabilele X şi Y sunt independente avem $p_{ik} = p_i \cdot q_k$ şi găsim

$$\varphi_{X+Y}(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} e^{jtx_i} \cdot e^{jty_k} \cdot p_i \cdot q_k = \left(\sum_{i=1}^{\infty} e^{jtx_i} p_i\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{jty_k} q_k\right) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t),$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$. □

Propoziţia 5.2. *Momentele iniţiale ale variabilei aleatoare X se obţin cu ajutorul funcţiei caracteristice, după formula:*

$$M[X^m] = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{j^m}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{31}$$

Demonstraţie. Fie

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i=1,2,\dots}.$$

Din (**??**) şi dezvoltarea în serie a funcţiei exponenţială

$$e^{jtx_i} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{j^m x_i^m}{m!} t^m,$$

deducem

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{j^m x_i^m}{m!} t^m\right) p_i = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{j^m}{m!}\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^m p_i\right) t^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{j^m M[X^m]}{m!} t^m.$$

Pe de altă parte

$$\varphi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} t^m,$$

de unde rezultă (**??**). $\square$