

Examen Matematică
(21.01.2022)
timp de lucru: 1h45'

Subiectul 1. (20 p.) Determinați integrala

$$\int_0^{\pi/2} e^{\cos x} \sin(2x) dx.$$

Subiectul 2. (30 p.) Fie funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{y \sin x - x \sin y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Calculați limitele iterate $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ și $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$; (15 p.)

b) Fie funcția $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $g(x, y) := y \cdot f(x, y)$. Determinați derivata direcțională a funcției g în $(0, 0)$ în direcția $(2, 1)$. (15 p.)

Subiectul 3. (40 p.) Fie funcția $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y, z) := 8x^2y - 27y^2z + z^2x - x^2.$$

a) Calculați derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției f (10 p.);

b) Calculați derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției f (10 p.);

c) Determinați punctele critice ale funcției f și tipul acestora (minim local, maxim local sau punct șa) (20 p.).

Puncte din oficiu: 10 p.
