Seminar 1 - Relatii binare, Inchideri

Relatiile binare sunt multimi de perechi ordonate. Fie ρ o relatie binara de la A la B, $a \in A$ si $b \in B$, (a, b) este element al relatie ρ, se noteaza $(a, b) \in \rho$, daca $a\rho b$ => $\rho \subseteq A \times B$

Dom(ρ) si *Cod*(ρ) desemneaza domeniul si respectiv, codomeniul relatie ρ.

Fie A, B 2 multimi. Relatia $\iota_A \subseteq A \times A$ definita prin $\iota_A = \{(a, a) | a \in A\}$ este numita *relatia de egalitate* pe A sau *identitatea* pe A sau *diagonala* lui A

Definitia 1 Fie ρ si σ doua relatii binare. Relatia binara notata $\rho \circ \sigma$

$$\rho \circ \sigma = \{(a, c) | (\exists b)((a, b) \in \rho \wedge (b, c) \in \sigma)\}$$

este numita *produsul (compunerea)* relatiilor ρ si σ.

Observatie Daca $\rho \subseteq A \times B$ *si* $\sigma \subseteq B \times C$ *atunci* $\rho \circ \sigma \subseteq A \times C$

Definiţia 2 Fie ρ o relaţie binară. *Inversa* relaţiei ρ este relaţia notată ρ^{-1} şi data prin

$\rho^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in \rho\}$ deci $(a, b) \in \rho$ => $(b, a) \in \rho^{-1}$

Inversa unei relatii ρ exista intotdeauna, iar daca ρ este relatie de la A la B, atunci ρ^{-1} este relaţie de la B la A.

Exercitiul 1. Fie ρ, σ si θ relatii binare, iar A si B multimi. Atunci, au loc următoarele proprietăţi:

1. $\rho \circ (\sigma \circ \theta) = (\rho \circ \sigma) \circ \theta$;
2. $\rho \circ (\sigma \cup \theta) = (\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \theta)$;
3. $(\rho \cup \sigma) \circ \theta = (\rho \circ \theta) \cup (\sigma \circ \theta)$;
4. $\rho \circ (\sigma \cap \theta) \subseteq (\rho \circ \sigma) \cap (\rho \circ \theta)$;
5. $(\rho \cap \sigma) \circ \theta \subseteq (\rho \circ \theta) \cap (\sigma \circ \theta)$;
6. $\rho \circ \sigma - \rho \circ \theta \subseteq \rho \circ (\sigma - \theta)$;
7. daca $\sigma \subseteq \theta$, atunci $\rho \circ \sigma \subseteq \rho \circ \theta$ si $\sigma \circ \rho \subseteq \theta \circ \rho$;
8. $\iota_A \circ \rho \subseteq \rho$ si $\rho \circ \iota_B \subseteq \rho$. In plus, $\iota_A \circ \rho = \rho$ <=> $Dom(\rho) \subseteq A$ si $\rho \circ \iota_B = \rho$ <=> $Cod(\rho) \subseteq B$.

Dem 1. $\rho \circ (\sigma \circ \theta) = (\rho \circ \sigma) \circ \theta;$

$\rho \circ (\sigma \circ \theta) \subseteq (\rho \circ \sigma) \circ \theta$ *si* $(\rho \circ \sigma) \circ \theta \subseteq \rho \circ (\sigma \circ \theta)$

prima incluziune

$(a, b) \in \rho \circ (\sigma \circ \theta) \Rightarrow \exists c$ *astfel incat* $(a, c) \in \rho$ *si* $(c, b) \in \sigma \circ \theta$

$(c, b) \in \sigma \circ \theta \Rightarrow \exists d$ *astfel incat* $(c, d) \in \sigma$ *si* $(d, b) \in \theta$

$\Rightarrow \exists c$ *astfel incat* $(a, c) \in \rho$ *si* $(c, d) \in \sigma \Rightarrow \exists d$ *a.i.* $(a, d) \in \rho \circ \sigma$ si $(d, b) \in \theta$

deci $(a, b) \in (\rho \circ \sigma) \circ \theta$

deci $(a, b) \in \rho \circ (\sigma \circ \theta) \Rightarrow (a, b) \in (\rho \circ \sigma) \circ \theta$ *pentru orice (a,b) deci*

$\rho \circ (\sigma \circ \theta) \subseteq (\rho \circ \sigma) \circ \theta$ *(1)*

Demonstram a doua incluziune $(\rho \circ \sigma) \circ \theta \subseteq \rho \circ (\sigma \circ \theta)$

$(a, b) \in (\rho \circ \sigma) \circ \theta \Rightarrow \exists c$ *astfel incat* $(a, c) \in (\rho \circ \sigma)$ si $(c, b) \in \theta$

$\exists d$ *astfel incat* $(a, d) \in \rho$ *si* $(d, c) \in \sigma$ *si* $(c, b) \in \theta$

$\exists c$ *a.i.* $(d,c) \in \sigma$ *si* $(c, b) \in \theta \Rightarrow (d,b) \in \sigma \circ \theta$

$\exists d$ *a.i.* $(a, d) \in \rho$ *si* $(d,b) \in \sigma \circ \theta \Rightarrow (a, b) \in \rho \circ (\sigma \circ \theta)$

Deci $(a, b) \in (\rho \circ \sigma) \circ \theta \Rightarrow (a, b) \in \rho \circ (\sigma \circ \theta) \Rightarrow (\rho \circ \sigma) \circ \theta \subseteq \rho \circ (\sigma \circ \theta)$ *(2)*

Din (1) si (2) $\rho \circ (\sigma \circ \theta) = (\rho \circ \sigma) \circ \theta;$

Dem 2. $\rho \circ (\sigma \cup \theta) = (\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \theta);$
$\rho \circ (\sigma \cup \theta) \subseteq (\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \theta)$ si $(\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \theta) \subseteq \rho \circ (\sigma \cup \theta)$

Dem prima incluziune: $\rho \circ (\sigma \cup \theta) \subseteq (\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \theta)$
$(a, b) \in \rho \circ (\sigma \cup \theta) \Rightarrow \exists c$ *astfel incat* $(a, c) \in \rho$ *si* $(c,b) \in \sigma \cup \theta \Rightarrow$
$\exists c$ *astfel incat* $(a, c) \in \rho$ *si* $(c,b) \in \sigma$ *sau* $(c,b) \in \theta$
$\exists c$ *astfel incat* $[(a, c) \in \rho$ *si* $(c,b) \in \sigma]$ *sau* $\exists c$ *astfel incat* $[(a, c) \in \rho$ *si* $(c,b) \in \theta] \Rightarrow$
$(a,b) \in \rho \circ \sigma$ sau $(a,b) \in \rho \circ \theta \Rightarrow (a,b) \in (\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \theta);$

Dem a doua incluziune: $(\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \theta) \subseteq \rho \circ (\sigma \cup \theta)$

$(a, b) \in (\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \theta) \Rightarrow (a, b) \in (\rho \circ \sigma)$ sau $(a, b) \in (\rho \circ \theta) \Rightarrow$
$\exists c$ *astfel incat* $[(a, c) \in \rho$ *si* $(c,b) \in \sigma]$ *sau* $[(a, c) \in \rho$ *si* $(c,b) \in \theta] \Rightarrow$
$\exists c$ *astfel incat* $(a, c) \in \rho$ *si* $[(c,b) \in \sigma$ *sau* $(c,b) \in \theta] \Rightarrow$
$\exists c$ *astfel incat* $(a, c) \in \rho$ *si* $(c,b) \in \sigma \cup \theta \Rightarrow (a,b) \in \rho \circ (\sigma \cup \theta)$

Dem. 8. $\iota_A \circ \rho \subseteq \rho$ Fie $(a, b) \in \iota_A \circ \rho$. Atunci, exista c astfel încât $(a, c) \in \iota_A$ şi $(c, b) \in \rho$. Conform definiţiei relaţiei ι_A, urmează $a = c$ şi, deci, $(a, b) \in \rho$. Am obtinut astfel

$\iota_A \circ \rho \subseteq \rho$; incluziunea $\rho \circ \iota_B \subseteq \rho$ se demonstreaza similar.

Să presupunem acum că $\iota_A \circ \rho = \rho$ şi să arătăm că $Dom(\rho) \subseteq A$. Fie $a \in Dom(\rho)$. Atunci, există b astfel încât $(a, b) \in \rho$. Deoarece $\rho = \iota_A \circ \rho$, obţinem $(a, b) \in \iota_A \circ \rho$ şi, deci, va exista c astfel încât $(a, c) \in \iota_A$ şi $(c, b) \in \rho$. Conform definitiei relatiei ι_A avem $c = a$ deci $a \in A$. Am obtinut astfel $Dom(\rho) \subseteq A$.

Reciproc, presupunem ca $Dom(\rho) \subseteq A$. Conform cu ceea ce am demonstrat anterior ($\iota_A \circ \rho \subseteq \rho$), ne rămâne de arătat că $\rho \subseteq \iota_A \circ \rho$. Fie deci $(a, b) \in \rho$. Cum $Dom(\rho) \subseteq A$ rezuta ca $a \in A$ deci putem scrie $(a, b) \in \iota_A \circ \rho$. Am obtinut astfel $\rho = \iota_A \circ \rho$.

Echivalenta $\rho \circ \iota_B = \rho$ daca si numai daca $Cod(\rho) \subseteq B$ se demonstreaza asemanator.

Exercitiul 2. Fie ρ şi σ relaţii binare. Atunci au loc următoarele proprietăţi:

(1) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$;

(2) daca $\rho \subseteq \sigma$, atunci $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$; (3) $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$;

(4) $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$; (5) $(\rho - \sigma)^{-1} = \rho^{-1} - \sigma^{-1}$;

(6) $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$.

Demonstratie Vom demonstra 6.

Dem $(\rho \circ \sigma)^{-1} \subseteq \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$

Fie $(a, b) \in (\rho \circ \sigma)^{-1}$. Atunci, $(b, a) \in \rho \circ \sigma$ şi există c astfel încât $(b, c) \in \rho$ şi $(c, a) \in \sigma$. Deci $(c, b) \in \rho^{-1}$ şi $(a, c) \in \sigma^{-1}$, deci $(a, c) \in \sigma^{-1}$ si $(c, b) \in \rho^{-1}$ deci $(a, b) \in \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$. Am obtinut astfel incluziunea $(\rho \circ \sigma)^{-1} \subseteq \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$.

Dem $\sigma^{-1} \circ \rho^{-1} \subseteq (\rho \circ \sigma)^{-1}$

Fie $(a, b) \in \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$ => există c astfel încât $(a, c) \in \sigma^{-1}$ şi $(c, b) \in \rho^{-1}$ =>
$(c, a) \in \sigma$ şi $(b, c) \in \rho$ => $(b, c) \in \rho$ si $(c, a) \in \sigma$ => $(b, a) \in \rho \circ \sigma$ =>
(a,b) $\in (\rho \circ \sigma)^{-1}$

Definitia 3. Fie ρ o relatie binara si A o multime.

- ρ este numită *reflexivă pe A* dacă are loc

$$(\forall a)(a \in A \Rightarrow (a, a) \in \rho) \qquad a \rho a$$

- ρ este numită *simetrică pe A* dacă are loc

$$(\forall a, b)(a, b \in A \wedge (a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \in \rho).$$

- ρ este numită *asimetrică pe A* dacă are loc

$$(\forall a, b)(a, b \in A \wedge (a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \notin \rho).$$

- ρ este numită *antisimetrică pe A* dacă are loc

$$(\forall a, b)(a, b \in A \wedge (a, b) \in \rho \wedge (b, a) \in \rho \Rightarrow a = b).$$

- ρ este numită *tranzitivă pe A* dacă are loc

$$(\forall a, b, c)(a, b, c \in A \wedge (a, b) \in \rho \wedge (b, c) \in \rho \Rightarrow (a, c) \in \rho).$$

Exercitiul 3. Fie ρ o relatie binara si $A = Dom(\rho) \cup Cod(\rho)$.

1. ρ este reflexiva daca si numai daca $\iota_A \subseteq \rho$.

2. ρ este simetrica daca si numai daca $\rho = \rho^{-1}$.

3. ρ este antisimetrica daca si numai daca $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \iota_A$.

4. ρ este tranzitiva daca si numai daca $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

Demonstraţie Demonstram (3) Presupunem ca ρ este antisimetrică. Pentru orice $(a, b) \in \rho \cap \rho^{-1}$ are loc $(a, b) \in \rho$ şi $(b, a) \in \rho$. Relaţia ρ fiind antisimetrică, deducem $a = b$ şi, deci, $(a, b) \in \iota_A$. Am obtinut astfel $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \iota_A$.

Data o relatie ρ pe A definim:

- $\rho^0 = \iota_A$;
- $\rho^{n+1} = \rho^n \circ \rho$, pentru orice $n \geq 0$;
- $\rho^+ = \bigcup_{n\geq 1} \rho^n$
- $\rho^* = \bigcup_{n\geq 0} \rho^n = \iota_A \cup \rho^+$

Definitia 4. Fie ρ *o* relatie binara pe A si P o proprietate. Cea mai mica relatie binara ρ' pe A care include ρ si care are proprietatea P se numeste inchiderea P a relatiei ρ .

Notam prin r (ρ) *închiderea reflexivă a relaţiei* ρ
t (ρ) *închiderea tranzitivă a relaţiei* ρ
s (ρ) *închiderea simetrică a relaţiei* ρ

Observatie Fie ρ o relatie pe A. Atunci,

- ρ^+ este cea mai mica relatie tranzitiva pe A ce include ρ;
- ρ^* este cea mai mica relatie reflexiva si tranzitiva pe A ce include ρ.
- $\iota_A \subseteq \rho^*$ şi, deci, ρ^* este reflexivă.

Exercitiul 4. Fie ρ o relatie binara pe A atunci

1. $r(\rho) = \rho \cup \iota_A$
2. $s(\rho) = \rho \cup \rho^{-1}$
3. $t(\rho) = \rho^+ = \cup_{n\geq 1} \rho^n$
4. $rt(\rho) = \rho^* = \cup_{n\geq 0} \rho^n$

Demonstratie

1. $\rho \cup \iota_A$ *este reflexiva* deoarece $(a, a) \in \rho \cup \iota_A$, $(a, a) \in \iota_A$ *si contine* ρ. *Este cea mai mica cu aceasta proprietate deoarece multimea minimala trebuie sa contina* ρ *si sa fie reflexiva deci* ι_A *trebuie sa fie in aceasta multime minimala (Exercitiul 3, 1).*

2. $s(\rho) = \rho \cup \rho^{-1}$

$\rho \subseteq \rho \cup \rho^{-1}$; $\rho \cup \rho^{-1}$ *este simetrica conform punctului 2. Exercitiul 3*

$(\rho \cup \rho^{-1})^{-1} = \rho^{-1} \cup (\rho^{-1})^{-1} = \rho \cup \rho^{-1}$

Observatie Relaţia ρ^+ este numită *închiderea tranzitivă a relaţiei* ρ, iar ρ^*, *închiderea reflexivă şi tranzitivă a relaţiei* ρ.

Exercitiul 5. Fie ρ *si* σ doua relatii binare pe A atunci

1. $r(\rho \cup \sigma) = r(\rho) \cup r(\sigma)$
2. $s(\rho \cup \sigma) = s(\rho) \cup s(\sigma)$
3. $t(\rho \cup \iota_A) = t(\rho) \cup \iota_A$
4. $rs(\rho) = sr(\rho)$
5. $tr(\rho) = rt(\rho)$
6. $(\rho^n)^{-1} = (\rho^{-1})^n$, $n\geq 1$
7. $(\cup_{n\geq 1} \rho^n)^{-1} = \cup_{n\geq 1} (\rho^{-1})^n$, $n\geq 1$

Demonstratie

1. $r(\rho \cup \sigma) = (\rho \cup \sigma) \cup \iota_A = (\rho \cup \iota_A) \cup (\sigma \cup \iota_A) = r(\rho) \cup r(\sigma)$
2. $s(\rho \cup \sigma) = (\rho \cup \sigma) \cup (\rho \cup \sigma)^{-1} = (\rho \cup \sigma) \cup \rho^{-1} \cup \sigma^{-1} = (\rho \cup \rho^{-1}) \cup (\sigma \cup \sigma^{-1}) = s(\rho) \cup s(\sigma)$.