Exemplu de Barem

Examen Matematică

(2021-2022 / 21.01.2022)

Subiectul 1 .... **20 puncte**

Abordarea subiectului 1

$\int_0^1 e^{x^3} x^5 dx = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{x^3} x^3 (x^3)' dx \overset{t=x^3}{=} \frac{1}{3}\int_0^1 e^t t dt$ (schimbare de variabilă) 8

$= \frac{1}{3}\int_0^1 (e^t)' t dt = \frac{1}{3}\left(e^t t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt\right)$ (integrare prin părţi) 8

$= \frac{1}{3}\left(e - e^t\Big|_0^1\right) = \frac{1}{3}\left[e - (e-1)\right] = \frac{1}{3}$ 3

Subiectul 2 .... **30 puncte**

Abordarea subiectului 1

a) $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{x\sin(x+y)}{x^2+y^2} = \frac{x \sin x}{x^2} = \frac{\sin x}{x},\ \forall x \neq 0$ 4

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 3

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin(x+y)}{x^2+y^2} = 0,\ \forall y \neq 0$ 4

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$ 3

b) $g(x,y) = xf(x,y) = \frac{x^2\sin(x+y)}{x^2+y^2}$ 1

$g'((0,0);(1,1)) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{g(t,t)-g(0,0)}{t}$ (definiţia) 4

$= \lim\limits_{t\to 0}\frac{t^2\sin(2t)}{t\cdot 2t^2} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(2t)}{2t} = 1$ 10

Subiectul 3 .... **40 puncte**

Abordarea subiectului 1

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 16xy + 2z^2 - 18x$ 3

$\frac{\partial f}{\partial y} = 8x^2 - 8yz$ 3

$\frac{\partial f}{\partial z} = -4y^2 + 4zx$ 3

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 16y - 18,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -8z,\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 4x$ 4

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = 16x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} = 4z,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} = -8y$ 6

c) Pentru gasirea punctelor critice, trebuie rezolvat sistemul $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ (1), $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (2), $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ (3). 1

Cazul i): $y = 0$. Rezultă, din (2), $x = 0$, şi din (1), $z = 0$

Cazul ii): $y \neq 0$. Rezultă, din (2), $z = \frac{x^2}{y}$, iar din (3), $y^2 = \frac{x^3}{y} \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Leftrightarrow x = y$. Deci $x = y = z$, iar din (1), $x^2 = x$, de unde $x = y = z = 1$ 9

Punctele critice sunt deci $(0,0,0)$ şi $(1,1,1)$. 2

$H_f(0,0,0) = \begin{bmatrix} -18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_f(1,1,1) = \begin{bmatrix} -2 & 16 & 4 \\ 16 & -8 & -8 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 8 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ 4

În $(0,0,0)$, $\Delta_1 = -18 < 0$, $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$, deci nu putem spune nimic despre natura acestui punct prin această metodă ($d^2 f(0,0,0)$ este semi-negativ definită) 2

totuşi $f(x,0,\sqrt{x}) = -7x^2 < 0,\ \forall x > 0$ şi $f(x,0,3\sqrt{x}) = 9x^2 > 0,\ \forall x > 0$, deci $(0,0,0)$ este punct şa 0

În $(1,1,1)$, $\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = 4\cdot(4 - 8\cdot 8) = 16\cdot(-15) < 0$, deci $(1,1,1)$ este punct şa 2

Puncte din oficiu: .... **10 puncte**

Precizări:

1) Pentru orice soluţie corectă, chiar diferită de cea din barem, se acordă punctaj corespunzător;

2) nota finală este 1/10 din punctajul total.