

# **Calcul Numeric**

**Cursul 1**

**2022**

*Anca Ignat*

## **Echipa**

**Andreea Arusoaie**

**Valentin Roșca**

**Ștefan Bălăucă**

**Augustus Tabarcea (en)**

**Sebastian Ciobanu**

**Anca Ignat**

**Andrei Luca**

**[ancai@info.uaic.ro](mailto:ancai@info.uaic.ro) , [ancai\\_fii@yahoo.ro](mailto:ancai_fii@yahoo.ro)**

**[numericalcalculus2019@gmail.com](mailto:numericalcalculus2019@gmail.com) – teme de laborator**

**<http://profs.info.uaic.ro/~ancai/CN/>**

**Detalii despre modul de desfășurare online: Discord**

**Consultații:**

- **prin e-mail la adresele de mai sus sau**
- **Online, Zoom – Luni 16:30-18**

## **Regulament - 2022**

### **Laborator**

- 8 teme
- cei care prezintă temele până la termenul limită precizat la fiecare temă, punctajul maxim ce poate fi obținut este punctajul afișat pentru fiecare temă
- cei care prezintă temele după termenul limită precizat punctarea se va face din 50% din punctajul temei prezentate

## Examen

- teză scrisă de 1 oră, cu 3 sau 4 exerciții din materia predată,  
*"cu cursurile pe masă"*
- teza scrisă este notată între 1 și 10
- testul scris va avea loc:
  - în săptămâna 10 sau 11 - din primele 9 cursuri
  - 16 mai - 22 mai 2022 - pentru cei care nu obțin punctaj de promovare sau pentru mărirea notei - din toate cursurile

## **Calculul punctajului / notei final(e)**

**Punctaj final = punctaj laborator + 45\*nota examen**

**Promovează** disciplina acei studenți care au:

- **nota la examen  $\geq 3$**

**și**

- **punctaj final  $\geq 410$  pt**

**Nota finală** se calculează din punctajul final aplicând ”**curba lui Gauss**”.

## **Desfășurarea semestrului**

**Săptămânile 1-7 și 9-13 – școală conform orarului**

**Săptămâna a 8-a (prima săptămână de evaluare) – liberă**

**Săptămânile 10, 11, 12 - test scris**

## Bibliografie

1. Elemente de informatică și calcul numeric, vol. 1 - C.Ignat, C.Ilioi, T.Jucan - Ed. Univ. 'Al. I. Cuza' Iași, 1987
2. Matrix Computations - G.H. Golub, C.F. van Loan - John Hopkins Univ. Press, 2012
3. Numerical Analysis – R.L. Burden, J.D. Faires – Brooks/Cole, Thomson Learning (10-th edition, 2015)
4. Calcul numeric în C - T. A. Beu - Ed. Albastră, Cluj, 2004
5. Numerical analysis with algorithms and programming, Santanu Saha Ray, CRC Press, 2016.
6. Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing, W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, Cambridge University Press, NY, USA, 2007 (<http://numerical.recipes/>)
7. Linear Algebra, Ideas and Applications - R.C. Penney, 4-th ed., Wiley, 2016
8. Numerical Optimization – J. Nocedal, S.J. Wright, Springer-Verlag, New York, 1999



## Capitolele cursului

- ❖ Rezolvarea sistemelor liniare ( $Ax=b$ )
- ❖ Optimizare numerică ( $\min \{ F(x) ; x \in R^n \}$ )
- ❖ Valori și vectori proprii ( $Au = \lambda u$ )
- ❖ Interpolare numerică
- ❖ Ecuații neliniare ( $f(x)=0$ )

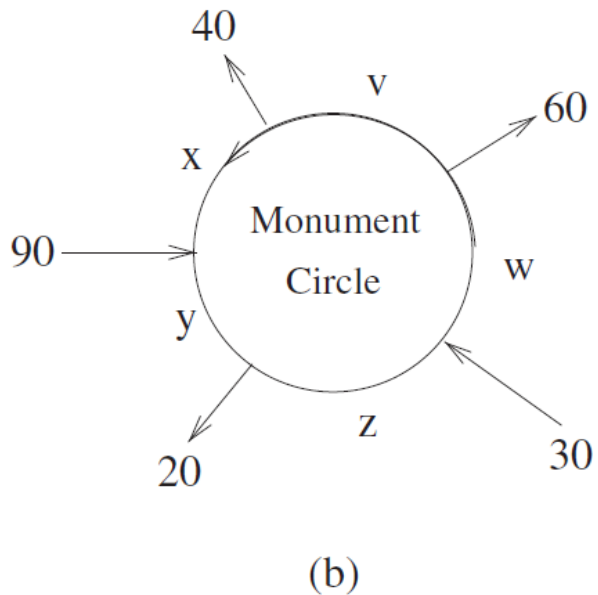
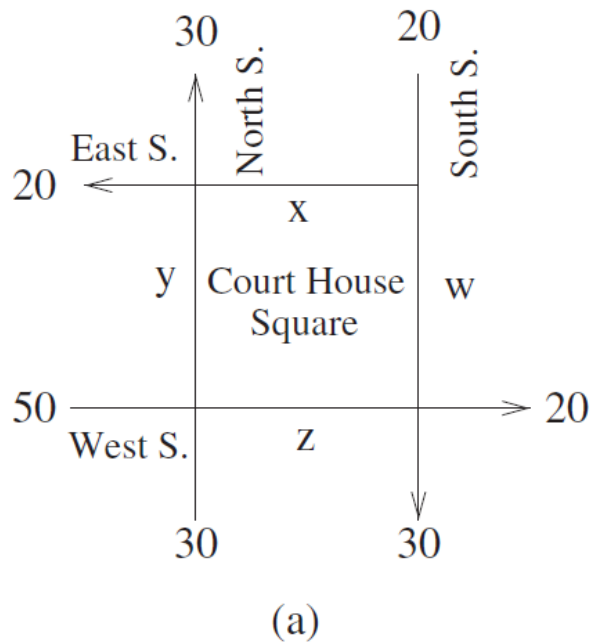
*“The world cannot be understood without numbers. But the world cannot be understood with numbers alone.”*

Hans Rosling, Anna Rosling Ronnlund, Ola Rosling

Factfulness. Zece motive pentru care interpretăm greșit lumea și de ce lucrurile stau mai bine decât crezi

“The world cannot be understood without numbers, nor through numbers alone.”

# Traffic Flow



**FIGURE 1.24** Two traffic patterns.

(R.C. Penney – Linear Algebra, Ideas and Applications, 4-th ed., Wiley, 2016)

- one way streets;
- the numbers represent the average number of cars per minute that enter or leave a given street at 3:30pm;
- $x, y, z, w, \dots$  - average number of cars per minute on a certain street
- no. of cars entering = no. of cars leaving

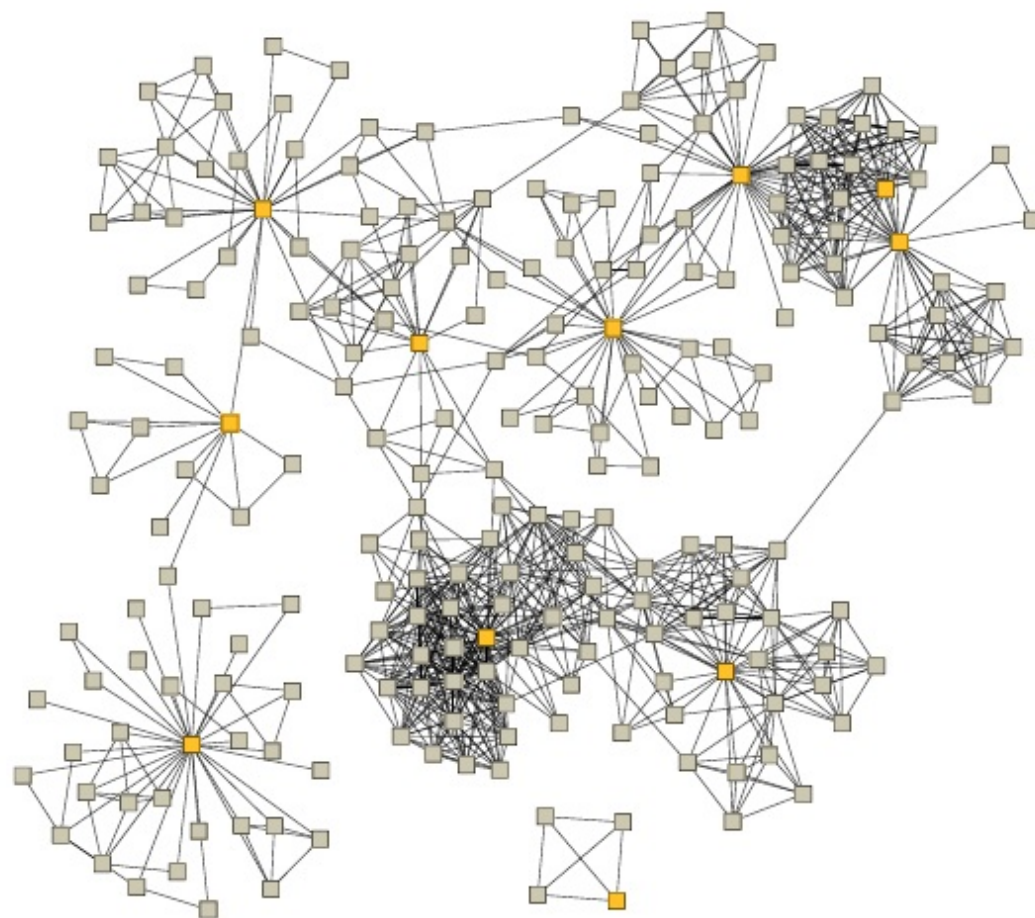
$$x + y = 50$$

$$y + z = 80$$

$$z + w = 50$$

$$x + w = 20$$

$$x + y + z + w = 100$$



## Centralitate în rețelele sociale

- noțiune introdusă de A. Bavelas în 1948 studiind comunicarea între oameni

$(V, E)$  – graful care modelează rețeaua,  $A$  – matricea de adiacență asociată,  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ ,  $N=/?/$

- care sunt cele mai ‘importante’ noduri din rețea?

1. Centralitate de grad (*'degree centrality'*) – se bazează pe noțiunea de grad/grade asociate nodurilor în grafuri

Se numește **drum geodesic** între două vârfuri orice drum de lungime minimă (număr minim de muchii) dintre cele 2 vârfuri.

2. Centralitate de apropiere (*'closeness centrality'*)

Centralitatea de apropiere a unui nod este suma lungimilor drumurilor geodesice de la nodul respectiv la toate celelalte noduri.



### 3. Centralitate de interrelație (*'betweenness centrality'*)

$$b(v) = \sum_{\substack{s \neq v \neq t, \\ s, t \in V}} \frac{n_{st}(v)}{n_{st}}$$

unde  $n_{st}$  este numărul total de drumuri geodesice între nodurile  $s$  și  $t$ , iar  $n_{st}(v)$  este numărul de drumuri geodesice care trec prin nodul  $v$ .

- măsoară controlul pe care îl deține nodul  $v$  în circulația informațiilor în rețea

#### 4. Centralitate de vector propriu (*'eigenvector centrality'*)

- se ține cont de faptul că nu toate muchiile (conexiunile) sunt la fel de importante (ca în cazul centralității de grad)
- conexiunile către persoane influente vor 'împrumuta' importanță mai mare decât conexiunile către persoanele mai puțin influente

$x(i)$  = centralitatea de vector propriu a nodului  $v_i$

$$x(i) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \in \Gamma(v_i)} x(j) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^N a_{ij} x(j), \quad \lambda > 0 \text{ o constanta}$$

$$\mathbf{x} = (x(1), x(2), \dots, x(N))^T$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda} A \mathbf{x} \Leftrightarrow A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

$\lambda_A > 0$  - valoarea proprie Perron (cea mai mare valoare proprie),  $\mathbf{x}$  – vectorul propriu asociat

**Compresia imaginilor digitale și descompunerea după valori singulare**  
o imagine digitală  $\leftrightarrow$  matrice de pixeli  $A$  cu  $m$  linii și  $n$  coloane

$$A = \left( a_{ij} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ sau } \mathbb{R}^3$$

$$(a_{ij} \in \{0,1,\dots,255\} \text{ sau } a_{ij} \in \{0,1,\dots,255\}^3 \text{ sau } a_{ij} \in [0,1]^{(3)})$$

Memorarea lui  $A$ :  $m \cdot n \cdot \text{mem}(\text{int/double})(\cdot 3)$  bytes

Descompunerea după valori singulare (**SVD**) a unei matrici

$$A = U S V^T, \quad U \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad S \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad V \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$U = [u_1, u_2, \dots, u_m], \quad V = [v_1, v_2, \dots, v_n] - \text{matrici ortogonale}$$

$$\left(u_i, u_j\right)_{\mathbb{R}^m} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{daca } i = j \\ 0 & \text{daca } i \neq j \end{cases}, \quad \left(v_i, v_j\right)_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij} \quad \forall i, j$$

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_2 & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \ddots & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \sigma_r & \mathbf{0} \\ & & & & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ ,  $r \leq \min\{m, n\}$  - valorile singulare ale matr.  $A$

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$$

$$A \approx A_k = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T$$

memorarea lui  $A_k$  necesită  $k(m+n+1) \cdot \text{mem}(\text{double})$

$$m=1265, n=538 \quad , \quad r_c = \frac{mn}{k(m+n+1)},$$

$$k=50 \quad r_c=7.54; \quad k=100 \quad r_c=3.77; \quad k=200 \quad r_c=1.88;$$

$$k=300 \quad r_c=1.25; \quad k=400 \quad r_c=0.94; \quad k=538 \quad r_c=0.70$$

## Vectori și matrici

Fie  $x_i, y_i, \lambda \in \mathbb{R}$ . Se definesc vectorii  $x, y \in \mathbb{R}^n$  și operațiile de adunare și înmulțire cu scalari astfel:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Fie vectorul  $z \in \mathbb{C}^n$ :

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \text{ cu } z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}.$$

Pentru  $z \in \mathbb{C}$  utilizăm notațiile:

$$z = a + ib, \operatorname{Re} z = a, \operatorname{Im} z = b,$$

$$\bar{z} = a - ib - \text{conjugatul numărului } z$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} - \text{modulul numărului complex } z$$



Notăm cu  $\mathbb{R}^{m \times n}$  /  $\mathbb{C}^{m \times n}$  spațiul matricilor cu elemente reale / complexe cu  $m$  linii și  $n$  coloane

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R} / \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

## Definiție

$X$  se numește *spațiu vectorial* (*spațiu liniar*)

$$+ : X \times X \rightarrow X \text{ și } \cdot : K \times X \rightarrow X, \quad (K = \mathbb{R})$$

astfel încât  $(X, +)$  este un grup comutativ :

$$a + b = b + a, \quad \forall a, b \in X - \text{comutativitate},$$

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad \forall a, b, c \in X - \text{asociativitate},$$

$$\exists 0 \in X \text{ a. î. } a + 0 = 0 + a = a, \quad \forall a \in X - \text{element neutru},$$

$$\forall a \in X, \exists -a \in X \text{ a. î. } a + (-a) = (-a) + a = 0 - \text{element opus}.$$

iar pentru operația de înmulțire cu scalari au loc relațiile:

$$\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b, \forall \lambda \in K, \forall a, b \in X,$$

$$(\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a, \forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in X,$$

$$\lambda(\mu a) = (\lambda \mu) a, \forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in X,$$

$$\exists 1 \in K \text{ astfel încât } 1 \cdot a = a, \forall a \in X.$$

## Definiție

Fie  $X$  un spațiu liniar. Spunem că vectorii  $x_1, x_2, \dots, x_p \in X$  sunt *liniar independenți* dacă:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_p x_p = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0, \alpha_i \in K$$

*Spațiul* vectorial  $X$  este *finit dimensional* dacă există  $p$  vectori liniar independenți în  $X$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_p \in X$ , și orice mulțime de  $q$  elemente din  $X$  cu  $q > p$  este liniar dependentă. În acest caz dimensiunea spațiului  $X$  este  $p$  ( $\dim X = p$ ).

Fie spațiul vectorial  $X$  finit dimensional cu  $\dim X = p$ . Orice sistem de  $p$  vectori liniar independenți din  $X$  se numește *bază* a spațiului  $X$ .

Fie  $x_1, x_2, \dots, x_p \in X$  o bază pentru spațiul  $X$ . Atunci pentru  $\forall x \in X$ ,  $\exists$  unice constantele  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in K$  astfel încât

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_p x_p = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i .$$

$\mathbb{R}^n$  este un spațiu vectorial finit dimensional,  $\dim \mathbb{R}^n = \mathbf{n}$  cu baza canonică:

$$e_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \dots, e_k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ - poziția } k, \dots, e_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

## Calcul matricial

Fie matricea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij})_{i=1 \dots m, j=1 \dots n}$$

Se definește *matricea transpusă*:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = (a_{ji})_{i=1 \dots m, j=1 \dots n} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Pentru matricea:

$$A \in \mathbb{C}^{m \times n}, A = (a_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}$$

se definește *matricea adjunctă*  $A^H$ :

$$A^H = \overline{A^T} = (\overline{a_{ji}})_{\substack{j=1 \dots n \\ i=1 \dots m}}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^H = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

Pentru  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  matricea adjunctă coincide cu transpusa,

$$A^H = A^T.$$



Fie vectorul  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , acesta este considerat vector coloană,

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^T = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)$$