Logică pentru Informatică - Subiectul 1 (23.11.2018)

Se va completa de către student
Nume, prenume:
An, grupă:

Se va completa de profesorul corector	
Subiect	Punctaj
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Începeți rezolvarea pe această pagină. Numerotați toate paginile.

Reguli de inferență pentru deducția naturală:

$$\wedge i\ \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi'),} \qquad \wedge e_1\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}{\Gamma \vdash \varphi,} \qquad \wedge e_2\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \varphi')}{\Gamma \vdash \varphi',} \qquad \rightarrow e\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \varphi') \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi',} \qquad \rightarrow i\ \frac{\Gamma, \varphi \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \varphi'),} \qquad \vee i_1\ \frac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2),} \qquad \vee i_2\ \frac{\Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2),}$$

$$\vee e\ \frac{\Gamma \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2) \qquad \Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi' \qquad \Gamma, \varphi_2 \vdash \varphi'}{\Gamma \vdash \varphi',} \qquad \neg e\ \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot,} \qquad \neg i\ \frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi,} \qquad \bot e\ \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi,} \qquad \textsc{Ipoteză}\ \frac{}{\Gamma \vdash \varphi}\ \varphi \in \Gamma, \qquad \textsc{Extindere}\ \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \varphi' \vdash \varphi,} \qquad \neg\neg e\ \frac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi.}$$

Orice altă soluție corectă se punctează integral.

1. (5p). Enunțați teorema de corectitudine pentru rezoluție.

   Soluție: în notele de curs.

2. (10p). Scrieți o formulă din $\mathtt{LP}$ care modelează următoarea afirmație: dacă învăț atunci câștig bani, dar eu nu câștig bani.

   Soluție:

   (4p). Identificarea formulelor atomice: învăț (îi asociem variabila propozițională $\mathtt{p}$), câștig bani (îi asociem variabila propozițională $\mathtt{q}$).

   (6p). “Traducerea” corectă într-o formulă: $((\mathtt{p} \rightarrow \mathtt{q}) \wedge \neg\mathtt{q})$.

3. (10p). Arătați că, oricum am alege o formulă $\varphi \in \mathtt{LP}$, formula φ este validă dacă și numai dacă $\varphi \equiv \varphi \vee \neg\varphi$.

   Fie φ o formulă arbitrară.

   (2p). Definiția validității.

   Formula φ este validă ddacă, prin definiție, (A) pentru orice atribuire τ, $\hat{\tau}\Big(\varphi\Big) = 1$.

   (2p). Definiția echivalenței.

   $\varphi \equiv \varphi \vee \neg\varphi$ ddacă, prin definiție, (B) pentru orice atribuire τ, avem $\hat{\tau}\Big(\varphi\Big) = \hat{\tau}\Big(\varphi\Big) + \overline{\hat{\tau}\Big(\varphi\Big)}$.

   (6p). Terminarea demonstrației: (A) decurge din (B) și (B) decurge din (A).

   Dar, deoarece $\hat{\tau}\Big(\varphi\Big) + \overline{\hat{\tau}\Big(\varphi\Big)} = 1$, (B) are loc ddacă pentru orice atribuire τ, avem $\hat{\tau}\Big(\varphi\Big) = 1$. Adică (B) are loc ddacă (A) are loc, q.e.d.

4. (10p). Arătați, folosind algoritmul lui Tseitin și metoda rezoluției, că formula $\neg(\mathtt{p}_1 \wedge \neg\mathtt{p}_1)$ este validă.

   Aplicarea teoremei care exprimă legătura dintre contradicții și tautologii:

   Formula $\varphi = \neg(\mathtt{p}_1 \wedge \neg\mathtt{p}_1)$ este validă ddacă $\neg\varphi = \neg\neg(\mathtt{p}_1 \wedge \neg\mathtt{p}_1)$ este o contradicție.

   (5p). Aplicarea algoritmului lui Tseitin.

   Alocarea a câte o variabilă propozițională nouă fiecărei subformule neatomice:

   (a) $\mathtt{q}_1 \equiv \neg\mathtt{q}_2$;

   (b) $\mathtt{q}_2 \equiv \neg\mathtt{q}_3$;

(c) $q_3 \equiv p_1 \wedge q_4$;

(d) $q_4 \equiv \neg p_1$;

Găsirea clauzelor:

(a) $q_1 \leftrightarrow \neg q_2 \equiv (q_1 \vee q_2) \wedge (\neg q_1 \vee \neg q_2)$;

(b) $q_2 \leftrightarrow \neg q_3 \equiv (q_2 \vee q_3) \wedge (\neg q_2 \vee \neg q_3)$;

(c) $q_3 \leftrightarrow p_1 \wedge q_4 \equiv (\neg q_3 \vee p_1) \wedge (\neg q_3 \vee q_4) \wedge (\neg p_1 \vee \neg q_4 \vee q_3)$;

(d) $q_4 \leftrightarrow \neg p_1 \equiv (q_4 \vee p_1) \wedge (\neg q_4 \vee \neg p_1)$.

Identificarea formulei în FNC echisatisfiabilă cu $\neg\varphi$.

Formula $\varphi' = q_1 \wedge (q_1 \vee q_2) \wedge (\neg q_1 \vee \neg q_2) \wedge (q_2 \vee q_3) \wedge$
$(\neg q_2 \vee \neg q_3) \wedge (\neg q_3 \vee p_1) \wedge (\neg q_3 \vee q_4) \wedge (\neg p_1 \vee \neg q_4 \vee q_3) \wedge$
$(q_4 \vee p_1) \wedge (\neg q_4 \vee \neg p_1)$ este, prin construcție, în FNC și echisatisfiabilă cu $\neg\varphi$.

(5p) Găsirea unei demonstrații prin rezoluție a clauzei vide.

Formula $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă ddacă φ' este nesatisfiabilă, ddacă există o derivare prin rezoluție a clauzei vide pornind de la clauzele lui φ':

(a) q_1; (ipoteză)

(b) $\neg q_1 \vee \neg q_2$; (ipoteză)

(c) $\neg q_2$; (r.b., a, b, q_1)

(d) $q_2 \vee q_3$; (ipoteză)

(e) q_3; (r.b., d, c, q_2)

(f) $\neg q_3 \vee p_1$; (ipoteză)

(g) p_1; (r.b., e, f, q_3)

(h) $\neg q_3 \vee q_4$; (ipoteză)

(i) $\neg q_4 \vee \neg p_1$; (ipoteză)

(j) q_4; (r.b., e, h, q_3)

(k) $\neg q_4$; (r.b., g, i, p_1)

(l) $\square$. (r.b., j, k, q_4)

Deci φ' este nesatisfiabilă, $\neg\varphi$ nesatisfiabilă și φ validă.

5. (10p). Dați o demonstrație formală pentru secvența $p \to q, \neg q \vdash \neg p$, folosind deducția naturală, fără a folosi regula *modus tollens*.

Demonstrație corectă: 10p.

(a) $p \to q, \neg q, p \vdash p \to q$; (ipoteză)

(b) $p \to q, \neg q, p \vdash p$; (ipoteză)

(c) $p \to q, \neg q, p \vdash q$; ($\to e$, a, b)

(d) $p \to q, \neg q, p \vdash \neg q$; (ipoteză)

(e) $p \to q, \neg q, p \vdash \bot$; ($\neg e$, c, d)

(f) $p \to q, \neg q \vdash \neg p$. ($\neg i$, e)