Seminar 2

***Exerciţii recomandate:** 2.1(a-f),2.2, 2.3(a,b,c), 2.4(b,c), 2.5(a,b),2.6(a), 2.8(a)
***Rezerve:** 2.1(g,h),2.4 (a),2.7

S2.1 Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - n}{n^3 + n^2 + 1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} [\ln(n^2 + 2n + 3) - \ln(3n^2 + n - 6)]$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + 5^n}{3^{n+1} + 5^{n+1}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (3n^2 + 5) \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2}{1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n - \sqrt[3]{n^3 - 3n^2 + 2}\right)^n$; h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{3}\ln 3 + \ldots + \frac{1}{n}\ln n}{n\sqrt{n}}$.

S2.2 Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$, definit prin $x_1 = 1$ şi

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n^2}\right) x_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

este convergent.

S2.3 Să se studieze convergenţa următoarelor şiruri:

$$\text{a) } x_n = (1 + \cos n\pi)\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}; \qquad \text{b) } x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1 + x_n}, n \in \mathbb{N}, x_0 = 2;$$

$$\text{c) } x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, n \in \mathbb{N}, x_0 \geq -2; \quad \text{d) } x_n = \frac{(-1)^n n^3 - 3^{-n}}{n^3}, n \in \mathbb{N}^*;$$

S2.4 Să se stabilească dacă următoarele şiruri sunt fundamentale:

a) $x_n = \dfrac{\cos x}{3} + \dfrac{\cos 2x}{3^2} + \ldots + \dfrac{\cos nx}{3^n}, n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$; b) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{c) } x_n = \frac{n^2}{n+1}, n \in \mathbb{N}; \quad \text{d) } x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}, n \in \mathbb{N}^*;$$

S2.5 Să se determine $L(x_n)$ pentru fiecare din şirurile cu termenul general x_n, unde:

a) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{1 + \frac{1}{n} + e^{\frac{1}{n}}}, n \in \mathbb{N}^*$; b) $x_n = 2 + (-1)^n + \sin\dfrac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$; c) $x_n = \dfrac{(-1)^n + n \operatorname{tg}\frac{n\pi}{4}}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

S2.6 Să se calculeze următoarele limite

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(n!)^3}}; \quad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}; \quad \text{c) } \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}}{n}.$$

S2.7 Să se arate că şirul cu termenul general

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

este convergent în $\mathbb{R}$ (limita sa fiind aşa numita constantă a lui Euler, $c = 0,577215... \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

S2.8 Să se calculeze următoarele limite

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}\ ;\quad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{\pi}{n}}\ ;\quad \text{c) } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{\frac{1}{\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)}}.$$

S2.9 Să se găsească $L(x_n)$ pentru şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$, unde

$$x_n = [1+(-1)^n]\cdot n^{(-1)^n} + \cos\frac{n\pi}{6},\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*.$$

S2.10 Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, cu $x_n > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, în $[0,+\infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$, atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$, având loc egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Bibliografie selectivă

1. Anca Precupanu - *Bazele analizei matematice*, (§1.5), ediţia a III-a, Ed. Polirom, Iaşi, 1998.
2. A. Croitoru, M. Durea, C. Văideanu, *Analiza matematică. Probleme*, Ed. Tehnopress, Iaşi, 2015.
3. E. Popescu - *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.
4. V. Postolică - *Eficienţă prin matematica aplicată*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.
5. C. Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă - *Analiză matematică. Probleme (Vol. I)*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.
6. S. Chiriţă - *Probleme de matematici superioare,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.