Logică pentru Informatică - Curs 1

1 Propoziții

O *propoziție* este o afirmație care este sau adevărată, sau falsă. Iată câteva exemple de propoziții:

1. "Port o cămașă albastră";
2. "Tu deții un laptop";
3. "Tu deții un laptop și o tabletă, dar nu un telefon inteligent";
4. "Eu dețin un laptop, o tabletă, un telefon inteligent și un server";
5. "Voi cumpăra un laptop sau o tabletă";
6. "Pot instala programul pe telefonul meu inteligent sau pe tableta mea";
7. "Plouă afară, dar am o umbrelă";
8. "Dacă trec la Logică, voi face cinste cu bere la toată lumea";
9. "Joc jocuri des și învăț foarte bine";
10. "Zăpada este albă";
11. "Plouă";
12. "Nu plouă";
13. "Trec la Logică doar dacă studiez serios";
14. "Sau albul, sau negrul câștigă într-un joc de șah";
15. "$2 + 2 = 4$" ("Doi și cu doi fac patru");
16. "$1 + 1 = 1$" ("Unu plus unu este 1");
17. "$1 + 1 \neq 1$" ("Unu cu unu nu fac 1");
18. "Dacă $1 + 1 = 1$, atunci sunt o banană";
19. "Toate numerele naturale sunt întregi";

20. “Toate numere raționale sunt întregi”.

Iată câteva exemple de expresii care nu sunt propoziții:

1. “Roșu și negru” (nu este o afirmație);
2. “π” (nu este o afirmație);
3. “Plouă?” (întrebare, nu afirmație);
4. “Pleacă!” (exclamație, nu afirmație);
5. “$x > 7$” (aici avem un predicat care depinde de x; după ce fixăm o valoare pentru x, obținem o propoziție);
6. “Această afirmație este falsă.” (deși este o afirmație, nu este propoziție, deoarece nu este sau adevărată sau falsă, dacă ar fi adevărată, ar fi și falsă și invers).

Câteodată nu este foarte clar dacă ceva este o propoziție cu adevărat. De exemplu, suntem de acord că “zăpada este alba” în general, dar cineva ar putea spune ca a văzut zăpadă neagră (exemplu: pe stradă în țările subdezvoltate în timpul iernii), astfel încât valoarea de adevăr a afirmației “Zăpada este albă” este pusă în discuție. Dezbaterea despre faptul că o afirmație este propoziție sau nu este mai mult o problemă de logică filozofică și nu ne va preocupa în continuare foarte mult această discuție.

2 Logica propozițională informală

Logica Propozițională este logica propozițiilor, conectate între ele prin *conectori logici* cum ar fi *sau*, *și* și *non*. În această secțiune, vom trece prin bazele logicii propoziționale.

2.1 Propoziții atomice

Unele propoziții sunt atomice, în sensul în care nu pot fi descompuse în propoziții mai mici:

1. “Port o cămașă albastră”;
2. “Tu deții un laptop”;
3. “$2 + 2 = 4$” (“Doi și cu doi fac patru”).

2.2 Conjuncții

Unele propoziții sunt compuse din altele mai mici. De exemplu, propoziția "afară plouă și eu sunt supărat" este compusă din "afară plouă" și din "sunt supărat", legate între ele prin "și". Dacă două propoziții, "φ" și "ψ", sunt legate printr-un "și", propoziția rezultată, "φ și ψ", se numește o *conjuncție* (*conjuncția lui φ și ψ*).

O conjuncție este adevărată dacă ambele părți componente sunt adevărate. De exemplu, propoziția "afară plouă și eu sunt supărat" este adevărată dacă atât propoziția "afară plouă", cât și propoziția "sunt supărat", sunt adevărate. În particular, din moment ce nu sunt supărat, această conjuncție este falsă.

O conjuncție nu conține neapărat cuvântul "și" în mod explicit. De exemplu, propoziția "afară plouă, dar eu am o umbrelă" este de asemenea o conjuncție, iar părțile ei componente sunt "afară plouă" și "eu am o umbrelă". Această propoziție conține conjuncția adversativă "dar".

Exercițiul 1. *Găsiți părțile componente ale conjuncției "mă joc acasă și învăț la școală".*

Exercițiul 2. *Dați un exemplu de o conjuncție falsă și un exemplu de o conjuncție adevărată.*

2.3 Disjuncții

Disjuncțiile sunt propoziții legate între ele prin "sau". De exemplu, "afară plouă sau sunt supărat" este o disjuncție a propozițiilor "afară plouă" și "sunt supărat".

Exercițiul 3. *Găsiți părțile componente ale disjuncției "Voi cumpăra un laptop sau o tabletă". Atenție! Cele două părți componente trebuie să fie propoziții (anumite cuvinte din cele două părți componente pot să fie implicite și să nu apară explicit în text).*

O disjuncție este adevărată dacă cel puțin una din părțile sale componente este adevărată. De exemplu, "$7 > 8$ sau $8 > 7$" este adevărată deoarece "$8 > 7$" este adevărată.

Acest înțeles al disjuncțiilor se numește *sau inclusiv* și este standard în matematică. Câteodată cuvântul "sau" este folosit în limbaj natural în sensul de *sau exclusiv*. De exemplu, în propoziția "albul sau negrul câștigă într-un joc de go", cuvântul "sau" are înțeles de "sau exclusiv". Înțelesul este că sau albul câștigă, sau negrul, dar nu amândoi simultan (este exclusă opțiunea să fie ambele adevărate în același timp).

În continuare, prin disjuncție vom înțelege *sau inclusiv* (interpretarea standard în matematică).

Exercițiul 4. *Dați un exemplu de o disjuncție falsă și un exemplu de o disjuncție adevărată.*

Exercițiul 5. *Când este disjuncție "φ sau ψ" falsă (în funcție de valorile lui φ și ψ)?*

2.4 Implicații

Implicațiile sunt propoziții de forma "dacă φ atunci ψ". Propoziția φ se numește *antecedent* al implicației, iar propoziția ψ se numește *consecvent* (sau *concluzie*) al implicației.

Un exemplu de implicație este "dacă trec la Logică, dau o petrecere". Antecedentul este "trec la Logică", iar concluzia este "dau o pretrecere". Când este o implicație adevărată/falsă? O implicație este falsă dacă și numai dacă antecedentul este adevărat, dar consecventul este fals. Să presupunem că trec la Logică și că totuși nu dau o petrecere. Atunci implicația "dacă trec la Logică, dau o petrecere", în ansamblul său, este falsă (antecedentul este adevărat, dar consecventul fals).

Înțelesul unei implicații merită o discuție mai amănunțită, deoarece poate fi contraintuitiv. Implicațiile, așa cum apar în matematică, pot fi diferite de implicațiile pe care le folosim în viața de zi cu zi. În viața de zi cu zi, când spunem "dacă trec la logică, dau o petrecere", înțelegem că avem o legătura de cauzalitate între faptul de a trece la Logică și faptul de a da o petrecere. Alte exemple de astfel de legătură de cauzalitate: "dacă am bani, cumpăr o mașină", "dacă mă ajuți, te ajut". În limbajul de zi cu zi, nu ne-am gândi niciodată să conectăm două propoziții printr-o implicație, dacă cele două propoziții nu au legătură între ele: de exemplu, propoziția "dacă Pământul este rotund, atunci $2 + 2 = 4$." nu ar avea sens, deși este adevărată.

Implicația folosită în matematică se numește *implicație materială.* Valorea de adevăr a unei implicații depinde doar de valorile de adevăr ale părților componente (antecedentul și consecventul), nu și de legătura de cauzalitate dintre ele. Acest înțeles al implicației materiale nu corespunde tot timpul cu înțelesul din limbajul natural (e.g., limba română), dar practica arată că este singurul înțeles rezonabil în matematică (și informatică).

În particular, atât propoziția "dacă Pământul este plat, atunci 2+2=5", cât și propoziția "dacă Pământul este plat, atunci $2 + 2 = 4$" sunt adevărate, deoarece antecedentul este fals.

Exercițiul 6. *Care sunt valorile de adevăr ale propozițiilor "dacă $2 + 2 = 4$, atunci Pământul este plat" și "dacă $2 + 2 = 5$, atunci Pământul este plat"?*

Valoarea de adevăr a implicației "dacă φ, atunci ψ" depinde doar de valorile de adevăr ale antecedentului, φ, și consecventului, ψ, și este prezentată în următorul tabel de adevăr:

φ	ψ	dacă φ, atunci ψ
fals	*fals*	*adevărat*
fals	*adevărat*	*adevărat*
adevărat	*fals*	*fals*
adevărat	*adevărat*	*adevărat*

Următorul exemplu arată că tabelul de adevăr de mai sus este singura intrepretare rezonabilă a implicației. Sunteți cu siguranță de acord că orice număr natural este număr întreg. Altfel spus, propoziția "pentru orice număr x, dacă

x este număr natural, atunci x este număr întreg" este adevărată. În particular veți fi de acord că propoziția este adevărată în cazurile particulare $x = -10$, $x = 10$ și $x = 1.2$ (din moment ce este vorba despre "orice număr x").

Obținem cazurile particulare "dacă -10 este număr natural, atunci -10 este număr întreg", "dacă 10 este număr natural, atunci 10 este număr întreg" și "dacă 1.2 este număr natural, atunci 1.2 este număr întreg.", care trebuie toate să fie adevărate. Aceste cazuri particulare exemplifică rândurile 2, 4 și 1 ale tabelului de adevăr de mai sus (de obicei, studenții nu au încredere în rândul 2). Cât despre a treia linia, o propoziție de forma "dacă φ, atunci ψ", unde φ este adevărată, dar ψ este falsă, nu poate fi decât falsă. Altfel, ar trebui să acceptăm ca fiind adevărate propoziții cum ar fi "Dacă $2 + 2 = 4$, atunci $2 + 2 = 5$." (antecedentul $2 + 2 = 4$ este adevărat, consecventul $2 + 2 = 5$ este fals).

Unele implicații pot fi relativ dificil de identificat. De exemplu, în propoziția "trec la Logică doar dacă învăț.", antecedentul este (împotriva aparențelor) "trec la Logică", iar consecventul este "învăț". Atenție! Propoziția de mai sus nu are același înțeles cu "dacă învăț, trec la Logică".

Implicațiile în limba română pot câteodată să nu folosească șablonul "dacă ... atunci ...". De exemplu, sensul cel mai rezonabil al propoziției "trec la Logică sau renunț la facultate" (aparent o disjuncție), este că "dacă nu trec la Logică, renunț la facultate" (implicație).

2.5 Negațiile

O propoziție de forma "nu este adevărat că φ" se numește *negația* lui φ. De exemplu, "nu plouă" este negația propoziției "plouă". Valorea de adevăr a negației unei propoziții φ este opusul valorii de adevăr al propoziției φ. De exemplu, în momentul în care scriu acest text, propoziția "plouă" este falsă, și deci propoziția "nu plouă" este adevărată.

Cuvintele "și, "sau", "dacă-atunci", "non" sunt numite *conectori logici*, deoarece pot fi folosite pentru a conecta propoziții mai mici pentru a obține propoziții mai mari.

Exercițiul 7. *Dați un exemplu de o propoziție falsă care folosește atât o negație, cât și o conjuncție.*

2.6 Echivalențe

O propoziție de forma "φ dacă și numai dacă ψ" se numește o *echivalență*. O astfel de propoziție, în ansamblul său, este adevărată dacă φ și ψ au aceeași valoare de adevăr (ambele false sau ambele adevărate).

De exemplu, în momentul în care scriu acest text, propoziția "plouă dacă și numai dacă ninge" este adevărată. De ce? Deoarece atât propoziția "plouă" cât și propoziția "ninge" sunt false.

Exercițiul 8. *Care este valoarea de adevăr a propoziției "Numărul* 7 *este impar dacă și numai dacă* 7 *este număr prim."?*

3 Ambiguități în limba română

Am discutat mai sus, la modul informal, despre limbajul logicii propoziționale: propoziții atomice conectate prin "și", "sau", "non", etc. Până în acest moment, am folosit limba română. Totuși, limba română (și orice alt limbaj natural) nu sunt potrivite pentru scopul nostru din cauza *ambiguităților*.

Iată exemple de propoziții ambigue:

1. "Ion și Maria sunt căsătoriți" (înțelesul 1: între ei; înțelesul 2: căsătoriți, dar posibil cu alte persoane);
2. "Văd negru" (înțeles 1: sunt supărat; înțeles 2: mă simt rău; înțeles 3: nu este lumină în jur, etc.);
3. "Trimit mesajul lui Ion" (înțeles 1: mesajul este al lui Ion și eu îl trimit, nu se știe unde; înțeles 2: am un mesaj și îl trimit către Ion);
4. "Nu vorbesc și mănânc" (înțeles 1: neg faptul că și vorbesc și mănânc; înțeles 2: nu vorbesc, dar mănânc).

Astfel de ambiguități sunt cel puțin neplăcute dacă scopul nostru este să determinăm valoarea de adevăr a unei propoziții (dacă nici măcar nu suntem siguri ce înseamnă propoziția). Pentru peste 2000 de ani, logica a lucrat cu limbaj natural. Nevoia a introduce un limbaj formal, simbolic, fără ambiguități, a apărut în secolele XVIII - XIX, odată cu dezvoltarea logicii matematice. În logica simbolică/formală, pe care urmează să o studiem, vom lucra cu un limbaj artificial, numit limbaj formal, care este proiectat de o asemenea manieră încât să nu conțină nicio ambiguitate.

În fapt, primul limbaj formal pe care îl vom studia va fi *limbajul formal al logicii propoziționale* (pe scurt, *logica propozițională*).

4 Sintaxa formală a logicii propoziționale

Sintaxa = reguli de scriere. Sintaxa logicii propoziționale = care sunt regulile de scriere pentru formulele logicii propoziționale.

În contextul informaticii, prin *alfabet* se înțelege o mulțime. Elementele unui alfabet se numesc *simboluri*. De cele mai multe ori, un alfabet este finit (dar nu în cazul nostru).

Care este diferența dintre o mulțime și un alfabet? A priori, niciuna. Contează intenția – ce vom face cu ele mai departe. Elementele unui alfabet le folosim pentru a crea *cuvinte*. Un *cuvânt* peste un alfabet este o secvență de simboluri din alfabet.

Exemplul 4.1. *Fie alfabetul* $A = \{0, 1\}$. *Șirurile/secvențele de simboluri* 001010*,* 101021 *și* 1 *sunt exemple de cuvinte peste alfabetul* A*.*

Formulele propoziționale vor fi cuvinte peste alfabetul logicii propoziționale (anumite cuvinte sunt formule; nu toate).

Alfabetul logicii propoziționale este reuniunea următoarelor mulțimi:

1. $\{\mathtt{p}, \mathtt{q}, \mathtt{r}, \mathtt{p}', \mathtt{q}_1, \ldots\}$, mulțimea *variabilelor propoziționale*;

2. $\{\neg, \wedge, \vee\}$, mulțimea *conectorilor logici*;

3. $\{(,)\}$, mulțimea simbolurilor auxiliare (un simbol pentru paranteză deschisă și un simbol pentru paranteză închisă).

Iată exemple de cuvinte peste alfabetul logicii propoziționale:

1. $))\mathtt{p} \vee \wedge$;

2. $\vee \vee \neg(\mathtt{p})$;

3. p;

4. ppp;

5. $\neg(\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$.

Anumite cuvinte se numesc formule propoziționale.

De exemplu, ultimul cuvânt de mai sus, $\neg(\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$, este o formulă a logicii propoziționale, dar $\vee \vee \neg(\mathtt{p})$ nu este. Următoarea definiție surprinde cu precizie care cuvinte sunt formule și care cuvinte nu sunt formule propoziționale.

Definiția 4.1 (Mulțimea formulelor propoziționale (LP))**.** *Mulțimea formulelor propoziționale, notată LP de aici înainte, este* cea mai mică mulțime *de cuvinte peste alfabetul logicii propoziționale care satisface următoarele proprietăți:*

1. *(Cazul de Bază) Orice variabilă propozițională, văzută ca un cuvânt de lungime* 1*, este în mulțimea LP;*

2. *(Cazul Inductiv i) Dacă $\varphi \in LP$, atunci $\neg\varphi \in LP$ (echivalent, dacă cuvântul φ este o formulă propozițională, și cuvântul care începe cu simbolul $\neg$ și continuă cu simbolurile din φ este formulă propozițională);*

3. *(Cazul Inductiv ii) Dacă $\varphi_1, \varphi_2 \in LP$, atunci $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \in LP$ (echivalent, exercițiu pentru acasă);*

4. *(Cazul Inductiv iii) Dacă $\varphi_1, \varphi_2 \in LP$, atunci $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \in LP$ (echivalent, exercițiu pentru acasă).*

Iată câteva exemple de elemente ale mulțimii LP:

$$\mathtt{p} \qquad \mathtt{q} \qquad \neg\mathtt{p} \qquad \neg\mathtt{q} \qquad \neg\mathtt{p}' \qquad \neg\neg\mathtt{p}_1 \qquad (\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \qquad (\mathtt{p} \wedge \mathtt{q}) \qquad \neg(\mathtt{p} \vee \mathtt{q})$$

$$(\neg\mathtt{p} \wedge \neg\mathtt{q}) \qquad \neg(\neg\neg\mathtt{p} \vee \mathtt{p}) \qquad ((\mathtt{p} \vee \mathtt{q}) \wedge \mathtt{r}) \qquad (\mathtt{p} \vee (\mathtt{q} \wedge \mathtt{r}))$$

Iată exemple de cuvinte care nu sunt în LP:

$$\mathtt{pp} \qquad \mathtt{q}\neg\mathtt{q} \qquad \mathtt{q} \wedge \neg\mathtt{p} \qquad \mathtt{p} + \mathtt{q}$$

Definiția mulțimii *LP* este un exemplu de *definiție inductivă*. Astfel de definiții sunt foarte importante în informatică și este obligatoriu să ajungem să le înțelegem foarte bine. Într-o definiție inductivă, există de obicei 1 sau mai multe cazuri de bază, care definesc cele mai "mici" elemente ale mulțimii (în cazul nostru, variabilele propoziționale). Cazurile inductive arată cum se pot construi elemente mai "mari" pornind de la alte elemente mai "mici", despre care știm deja că sunt în mulțime. Alt element important este restricția de minimalitate (subliniată în definiția de mai sus), care indică că **doar** elementele care pot fi construite apelând la cazurile de bază și la cazurile inductive fac parte din mulțime. Această restricție de minimalitate asigură unicitatea mulțimii (nu există o altă mulțime cu cele 4 proprietăți și care să fie minimală) și ne permite să arătăm ca anumite elemente nu fac parte din mulțime (cele care nu pot fi construite prin cazurile de bază/inductive).

De exemplu, cuvântul `pp` nu este în mulțimea *LP*, deoarece nu poate fi construit prin aplicarea celor 4 proprietăți (cazul de bază, plus cele trei cazuri inductive).