

Examen Matematică
(21.01.2022)
 timp de lucru: 1h45'

Subiectul 1. (20 p.) Determinați integrala

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx, \quad x > 0.$$

Subiectul 2. (30 p.) Fie funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Calculați limitele iterate $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ și $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$; (15 p.)

b) Fie funcția $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $g(x, y) := x \cdot f(x, y)$. Determinați derivata direcțională a funcției g în $(0, 0)$ în direcția $(1, 2)$. (15 p.)

Subiectul 3. (40 p.) Fie funcția $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y, z) := xy^2 - 27yz^2 + 8zx^2 - x^2.$$

a) Calculați derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției f (10 p.);

b) Calculați derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției f (10 p.);

c) Determinați punctele critice ale funcției f și tipul acestora (minim local, maxim local sau punct șa) (20 p.).

Puncte din oficiu: 10 p.
