SEMINAR 9

Exerciţii recomandate: 9.1 f),g), 9.2 a),c), 9.3 a),c) 9.4
Rezerve: 9.1 a),b),g),h), 9.2 b),d), 9.3 b), 9.5 a), 9.6 b)

S9.1 Studiaţi derivabilitatea (ordinară, direcţională, Gâteaux sau parţială, depinzând de funcţie şi/sau de cerinţe) a următoarelor funcţii:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}, & x\neq 1;\\ 0, & x=1,\end{cases}$ în $x_0=1$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\max\left\{|x|,|2-x^2|\right\}$, pe $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=[x]\sin^2(\pi x)$, pe $\mathbb{R}$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\ln\left(x^2+3x+3\right), & x\in\mathbb{Q};\\ (x+2)\left(e^{x+1}-1\right), & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$ în $x_0\in\{-2,-1\}$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ f(x)=\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}},\left(1+x^2\right)^{\sqrt[3]{x}}\right)$, în $x_0=0$;

f) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=4xy^3-z^2$, în $(-1,1,13)$ în direcţia $(4,-3,12)$;

g) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases}(x-y)\sin\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ în $(x_0,y_0)=(0,0)$;

h) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))$, în $(x_0,y_0)=(0,0)$, unde

$$f_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}\quad \text{şi } f_2(x,y)=\begin{cases}-\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

S9.2 Studiaţi diferenţiabilitatea Fréchet în origine pentru fiecare din următoarele funcţii:

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2, f(x)=(f_1(x),f_2(x))$, unde

$$f_1(x)=\begin{cases}-x, & x\leq 0\\ x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}\quad \text{şi } f_2(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ \operatorname{arctg} x, & x\geq 0\end{cases};$$

c) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0, & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$;

d) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))$, cu

$$f_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}\quad \text{şi } f_2(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^6+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

S9.3 Determinaţi derivatele parţiale de primul şi al doilea ordin pentru fiecare din următoarele funcţii, într-un punct al domeniului lor de definiţie:

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3, f(x,y)=\left(x^2y, xy-y^2, x^3-2xy\right)$;

b) $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}^2, f(x)=(\ln x,\operatorname{arctg} x)$;

c) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2, f(x,y,z)=\left(e^z\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2+1}\right),\sin(x-y+z)\right)$.

S9.4 Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}y^2\ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right), & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$. Arătaţi că există derivatele parţiale mixte ale lui f în orice punct $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, dar ele nu sunt continue în $(0,0)$. Sunt ele egale în $(0,0)$?

S9.5

a) Scrieţi formula lui Taylor pentru funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită de
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4,$$
în jurul lui $(1, 1, 1)$;

b) Scrieţi formula lui Taylor pentru polinomul $P(x, y) = 2x^3 - 3x^2y + 2y^2 + 9x^2 - 3y + 6x + 3$ în jurul lui $(-1, 1)$;

c) Scrieţi formula lui Taylor pentru funcţia $f(x, y) = \left(\mathrm{e}^{\sin(x-y)}, \cos(x + y)\right)$, pâna la termenii de ordinul doi.

S9.6 Fie $f : (\mathbb{R}_+^*)^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$, unde $f_1(x, y, z) = x^y + y^z - 2z^x$ şi $f_2(x, y, z) = \dfrac{1}{xy} - \dfrac{1}{y^2z} + \dfrac{1}{z^3(x + y)}$, $\forall x, y, z > 0$. Calculaţi:

a) $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(3, 2, 1) + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(1, 3, 2) + \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(2, 3, 1)$ şi $(\nabla f_1)(1, 1, 1)$;

b) $x\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) - y\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + 2z\dfrac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z)$ în $(3, 3, 1)$;

c) $((\mathrm{d}f_1)(1, e, e))\left(\frac{2}{e}, 1, -1\right)$ şi $\left((\mathrm{d}f_2)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)\right)(1, 1, -2)$;

d) $(\mathrm{d}f)(x_0, y_0, z_0)$, unde $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

S9.7 Arătaţi că următoarele funcţii sunt derivabile pe domeniul lor de definiţie şi că satisfac, în plus, relaţiile adiacente:

a) $f(x, y) = xy\sqrt{1 + (x^2 - y^2)^2}$,
$$xy\,\langle (y, x), (\nabla f)(x, y)\rangle_2 = \|(x, y)\|_2^2 \cdot f(x, y);$$

b) $f(x, y, z) = \ln(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z)$,
$$\sin 2x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + \sin 2y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + \sin 2z \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2;$$

c) $f(x, y) = \sin x + g(\sin y - \sin x)$,
$$\cos y \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \cos x \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos x \cos y, \forall g \in C^1([-2, 2]);$$

d) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \varphi\left(x_1 - x_2, (x_3 - x_4)e^{-x_1}, x_3 - x_4(x_1 - x_2 + 1)\right)$,
$$(x_1 - x_2)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3, x_4) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3, x_4)\right) + \\ (x_3 - x_4)\left[(x_1 - x_2 + 1)\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3, x_4) + \frac{\partial f}{\partial x_4}(x_1, x_2, x_3, x_4)\right] = 0,\ \forall \varphi \in C^1\left(\mathbb{R}^3\right).$$

S9.8* Fie C o submulţime deschisă nevidă a lui $\mathbb{R}^n$ astfel încât pentru orice $x \in C$ şi orice $t \in \mathbb{R}^*$, avem $tx \in C$. O funcţie $f : C \to \mathbb{R}$ se numeşte *ω-Euler omogenă* ($\omega \in \mathbb{R}$) dacă $f(tx) = t^\omega f(x)$, $\forall x \in C$, $\forall t \in \mathbb{R}^*$.

Arătaţi că dacă f este Fréchet diferenţiabilă pe C şi $\omega \in \mathbb{R}$, atunci f este ω-Euler omogenă dacă şi numai dacă satisface *identitatea lui Euler*:
$$\langle \nabla f(x), x\rangle = \omega f(x),\ \forall x \in C \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}.$$

S9.9* Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi convexă (adică, pentru orice $x, y \in A$ şi $\lambda \in [0, 1]$, avem $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$) şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă pe A. Arătaţi că f este convexă (adică, pentru orice $x, y \in A$ şi $\lambda \in [0, 1]$, avem $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$) dacă şi numai dacă
$$\langle (\nabla f)(y) - (\nabla f)(x), y - x\rangle \geq 0,\ \forall x, y \in A$$
sau, echivalent
$$f(y) \geq f(x) + \langle (\nabla f)(x), y - x\rangle,\ \forall x, y \in A.$$

S9.10 Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă nevidă şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă Fréchet pe D. Atunci, pentru orice $x, y \in D$, există $z \in \{ty + (1 - t)x \mid t \in (0, 1)\}$ astfel încât
$$f(y) - f(x) = (\mathrm{d}f)(z)(y - x).$$

S9.11 Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă nevidă convexă şi $f : D \to \mathbb{R}^m$ o funcţie diferenţiabilă Fréchet pe D. Atunci, pentru orice $x, y \in D$, există $\xi \in \{ty + (1-t)x \mid t \in (0,1)\}$ astfel încât

$$\|f(y) - f(x)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|(\mathrm{d}f)(\xi)\|_{\mathrm{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)} \cdot \|y - x\|_{\mathbb{R}^n}.$$

S9.12 Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = \left(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, xy + yz + zx\right)$.

a) Studiaţi derivabilitatea Gâteaux şi diferenţiabilitatea Fréchet în f pe $\ker f := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\right\}$;

b) Arătaţi că matricea jacobiană a lui f există şi este singulară în orice punct al lui $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$.

S9.13 Arătaţi că $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită de $f(x,y,z) = (z^2 - x^2 - y^2)\,\mathrm{sh}(x - y + z)$, satisface relaţia

$$(z-y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + (x+z)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + (x+y)\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0.$$

S9.14 Fie $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ definită de $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{x_1x_2x_3}$.

a) Calculaţi $(\mathrm{d}f)(1,1,1)$.

b) Arătaţi că f este convexă.

S9.15 Fie D o submulţime nevidă, deschisă a lui $\mathbb{R}^3$. De asemenea, fie $f : D \to \mathbb{R}^*$ o funcţie de clasă C^2 pe D. Arătaţi că are loc următoarea formulă:

$$\left(\left(\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{f}\right)\right)(x)\right)(u,v) = -\frac{1}{f^2(x)}\left(\left(\mathrm{d}^2 f\right)(x)\right)(u,v) + \frac{2}{f^3(x)}\left((\mathrm{d}f)(x)\right)(u) \cdot \left((\mathrm{d}f)(x)\right)(v),\ \forall x \in D,\ \forall u,v \in \mathbb{R}^3.$$

S9.16 Scrieţi formula lui Taylor de ordinul 3 pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită de

$$f(x,y) = 3y^2 - x^2 + 2xy - 6x - 2y + 4,$$

într-o vecinătate a lui $(-2,1)$.

Bibliografie recomandată

[1] T. Dray, *Interpreting Derivatives,* Oregon State University, 2016.

[2] C. Drăguşin, *Calcul diferenţial (Culegere de exerciţii şi probleme)*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2008.

[3] A. Fulga, I. Radomir, *Analiză matematică. Culegere de probleme*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.

[4] M. Postolache, *Analiză matematică (teorie şi aplicaţii)*, Editura "Fair Partners", Bucureşti, 2011.

[5] J. Stewart, *Student Solutions Manual, Chapters 10-17 for Stewart's Multivariable Calculus*, 8th Paperback, 2015.

[6] I. Toma, *Analiză matematică.Calcul diferenţial.Curs, aplicaţii si exerciţii propuse,* Conspress (U.T.C.B.), 2010.