Université de Paris Campus Grands Moulins
Licence L2 (S3)
2020-2021

UFR de Mathématiques
Algèbre et analyse élémentaires III
MI3

Algèbre linéaire.

Espaces vectoriels. Feuille n°2.

1. Bases et dimension.

Exercice 1:

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-ensemble
$$P = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x - 2y + 3z = 0 \} .$$
Mettre en évidence deux vecteurs v, w, non mutuellement proportionnels, appartenant à P et montrer que tout élément de P est une combinaison linéaire de v et w.

Exercice 2:

On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$. Déterminer la dimension de la partie F formée des vecteurs (x, y, z) qui vérifient l'identité $2x - y - 2z = 0$. En trouver une base.

Exercice 3:

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, trouver une base du sous-espace vectoriel formé des (x, y, z, t) qui vérifient $x - y = 0$ et $z - t = 0$.

Exercice 4:

On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^4$. Déterminer la dimension de la partie F suivante :
$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \, ; \left(\begin{cases} 2x + y + 2z + 3t = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \right) \right\} .$$
En trouver une base.

Exercice 5:

a) On considère le sous-espace F de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1, -1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 1)$ et $(2, 0, 1, 1)$. Trouver un système d'équations définissant ce sous-espace dans $\mathbb{R}^4$.

b) Même question pour le sous-espace G de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1, -1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 1)$ et $(2, 0, 1, 0)$.

Exercice 6:

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des fonctions polynomiales en x de degré au plus 3 , on considère la suite (p_1, p_2, p_3, p_4) , où

$$p_1(x) = (1-x)^3\,,\; p_2(x) = x(1-x)^2\,,\; p_3(x) = x^2(1-x)\,,\; p_4(x) = x^3\,.$$

Calculer les coordonnées de p_j dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$; en déduire que la suite (p_1, p_2, p_3, p_4) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 7:

Montrer que l'ensemble des applications de $]-1,1[$ dans $\mathbf{R}$ définies par :

$$f(x) = a\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + b\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + c\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + d\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

où $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. En déterminer la dimension et en donner une base.

Exercice 8:

On considère l'ensemble des suites numériques réelles qui vérifient

$$\forall n \geq 0 \;\; u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\;.$$

a) Chercher toutes les suites géométriques $u_n = q^n$ appartenant à ce sous-espace et mettre ainsi en évidence une base de ce sous-espace.

b) Donner une expression explicite de la suite de Fibonacci (suite qui vérifie $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$ et $w_0 = 1 = w_1$).

Exercice 9:

Soit E un espace vectoriel réel. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E . Monter que l'on a

$$\mathrm{Dim}(F_1 + F_2) + \mathrm{Dim}(F_1 \cap F_2) = \mathrm{Dim}(F_1) + \mathrm{Dim}(F_2)\;.$$

Exercice 10:

Soit $E = \left\{a + b(1+\sqrt{2})^2 + c(1-\sqrt{2})^2 : a, b, c \in \mathbf{Q}\right\}$. Montrer que E un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel, en donner une base et en déterminer la dimension.

Exercice 11:

Montrer que dans le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$, la famille $(1, \sqrt{2})$ est libre, puis que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{6})$ est libre. Quelle est la dimension du sous-$\mathbf{Q}$-espace vectoriel engendré par cette dernière ?

Exercice 12:

Trouver des bases des espaces vectoriels des solutions des systèmes d'équations linéaires (ce qui revient à décrire l'ensemble des solutions : pourquoi ?)

$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 & = & 0 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 & = & 0 \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 13:

Pour chacun des sev suivants, donner une base parmi la famille génératrice donnée, la dimension et un système d'équations minimal. Compléter la base de chaque sev, s'il y a lieu, en une base de $\mathbb{R}^n$ ($n = 3$ pour les questions 1, 2, 3, $n = 4$ pour les questions 5, 6).

(1) $E = \mathrm{Vect}\big((-1, 1, 1), (-1, 1, 2)\big)$.
(2) $F = \mathrm{Vect}\big((2, -3, 1), (1, 2, -3), (3, -1, -2)\big)$.
(3) $G = \mathrm{Vect}\big((1, 1, -2)\big)$.
(4) $H = \mathrm{Vect}\big((2, -1, 2, 1), (-1, 3, 0, 1), (1, 2, 2, 2)\big)$.
(5) $K = \mathrm{Vect}\big((-3, 1, 2, -1), (-3, 1, 2, 0)\big)$.

Exercice 14:

Pour chacun des sev suivants de $\mathbb{R}^3$, donner une base, la dimension et un système d'équations minimal.

(1) $E = \big\{(2x - y, x + y, -x + y),\ x, y \in \mathbb{R}\big\}$.
(2) $F = \big\{(x + 2y, y - 2x, y - x),\ x, y \in \mathbb{R}\big\}$.

Exercice 15:

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère $a_1 = (2, -2, 3, 1)$ et $a_2 = (-1, 4, -6, -2)$.

(1) Trouver des vecteurs a_3 et a_4 tels que $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
(2) Déterminer un système d'équations minimal pour le sev de $\mathbb{R}^4$ engendré par a_1 et a_2.

Exercice 16:

On considère les deux familles de vecteurs dans $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{S}_1 = \big\{(1, -4, -2, 2), (-4, -2, 5, 4), (6, -6, -9, 0)\big\}$$

et

$$\mathcal{S}_2 = \big\{(-1, -2, 1, 2), (2, 1, -3, 1), (-1, 1, 1, 3)\big\}$$

Soient E_1 et E_2 les sev de $\mathbb{R}^4$ engendrés par $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$.

(1) Montrer que $E_1 \subset E_2$.
(2) Est-ce que $E_1 = E_2$? Si non, donner un vecteur de E_2 qui n'est pas dans E_1.

2. Espaces supplémentaires.

Exercice 1:

Soit E_1 le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{(1, 3, 0, 4), (2, 0, 1, 2)\}$ et E_2 le sous-espace engendré par $\{(1, 1, 2, 3), (4, -1, 0, 2)\}$. E_1 et E_2 sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 2:

Soit E_1 et E_2 les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ engendrés respectivement par les vecteurs $\{(1,-1,0,1),(0,2,1,0)\}$ et les vecteurs $\{(0,6,-1,4),(3,3,1,5)\}$.

a) Caractériser $E_1 \cap E_2$.

b) Donner une base de $E_1 + E_2$.

c) Déterminer un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3:

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des (x, y, z, t) tels que $x + y + z + t = 0$ et l'ensemble F des (x, y, z, t) tels que $x = y = z = t$.

a) Montrer que E et F sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

b) Déterminer des bases de E et de F .

Exercice 4:

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1,-1,2,3)$, $(1,1,2,0)$ et $(3,-1,6,-6)$, et F le sous-espace engendré par $(0,-2,0,-3)$, $(1,0,1,0)$.

a) Trouver des bases de $E, F, E \cap F, E + F$.

b) E et F sont-ils des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 5:

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1,1,1,1)$, $(1,-1,1,-1)$ et $(1,3,1,3)$ et G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1,2,0,2)$, $(1,2,1,2)$ et $(3,1,3,1)$.

a) Trouver la dimension de F et G . En donner des bases.

b) Trouver la dimension des sous-espaces $F \cap G$ et $F + G$. En donner des bases.

c) E et F sont-ils des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 6:

a) Montrer que les vecteurs $u_1 = (1,2,0)$, $u_2 = (2,1,2)$ et $u_3 = (3,1,1)$ forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

b) Trouver les coordonnées du vecteur $w = (1,2,,3)$ dans cette base.

c) Montrer que les vecteurs $v_1 = (0,1,0)$, $v_2 = (1,0,1)$ et $v_3 = (2,1,0)$ forment une autre base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

d) Trouver les coordonnées des vecteurs u_i $(i = 1,2,3)$ dans la base $\mathcal{B}'$. En déduire les coordonnées de w dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 7:

Soit m un paramètre réel. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $v = (1,2)$ et $w = (-2,m)$. On note F_m l'espace vectoriel engendré par les deux vecteurs.

a) Quelle peut être la dimension d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de F_m (on discutera suivant la valeur de m) ?

b) Trouver un tel sous-espace supplémentaire dans tous les cas.

Exercice 8:

Trouver la dimension, des bases et des équations pour les espaces vectoriels $E \cap F$ et $E + F$.

(1) Dans $\mathbb{R}^3$, avec $E = \mathrm{Vect}\big((1,2,1),(1,1,-1),(1,3,3)\big)$ et $F = \mathrm{Vect}\big((1,2,2),(2,3,-1),(1,3,-3)\big)$.

(2) Dans $\mathbb{R}^5$, avec $E = \mathrm{Vect}\big((-1,6,4,7,-2),(2,3,0,5,-2),(-3,6,5,6,-5)\big)$ et $F = \mathrm{Vect}\big((1,1,2,1,-1),(0,-2,0,-1,-5),(2,0,2,1,-3)\big)$.

Exercice 9:

Soit m un paramètre réel. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v = (1,-2,-5)$ et $w = (-2,4,m)$. On note F_m l'espace vectoriel engendré par les deux vecteurs.

a) Quelle peut être la dimension d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de F_m (on discutera suivant la valeur de m) ?

b) Trouver un tel sous-espace supplémentaire dans tous les cas.

Exercice 10:

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ on considère deux sous-espaces vectoriels.

a) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par les trois vecteurs $u_1 = (1,1,2,3)$, $u_2 = (-1,1,2,-2)$ et $u_3 = (-2,-1,1,2)$. A quelle(s) condition(s) doit satisfaire le vecteur (x,y,z,t) pour appartenir à F ?

b) Soit G le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $v_1 = (1,2,3,0)$, $v_2 = (-1,1,2,-2)$ et $v_3 = (3,0,-1,4)$. A quelle(s) condition(s) doit satisfaire le vecteur (x,y,z,t) pour appartenir à G ?

c) Donner une base du sous-espace vectoriel $F \cap G$. Ces deux sous-espaces vectoriels sont-ils supplémentaires ?

d) Déterminer le sous-espace vectoriel $F + G$ (on en donnera une base et un système d'équation(s) le définissant).

e) Trouver un supplémentaire de F (respectivement G) dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 11:

On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n (où $n \geq 2$). Soient x_1 et x_2 deux réels distincts.

a) Montrer que l'ensemble F_1 (resp. F_2) des éléments de E formé des polynômes s'annulant en x_1 (resp. x_2) est un sous-espace vectoriel de E . Trouver sa dimension.

b) Montrer de même que l'ensemble F des éléments de E formé des polynômes s'annulant en x_1 et en x_2 est un sous-espace vectoriel de E . Trouver sa dimension.

c) Montrer que $F = F_1 + F_2$. Sont-ils supplémentaires ?

Exercice 12:

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n ($n \geq 1$). Soit H un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$ (on parle d'hyperplan de E). Soit D une droite vectorielle de E (sous-espace vectoriel de dimension 1 de E). Montrer que soit D est contenue dans H soit $D \oplus H = E$.

Exercice 13:

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel des fonctions (continues sur $\mathbb{R}$) qui valent 0 en 0 . Montrer que la droite vectorielle (de E) engendrée par la fonctions $x \mapsto \exp(x)$ est un supplémentaire dans E de F .

Exercice 14:

Soient U, V, W des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

(1) Montrer que $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cup V)$.

(2) Montrer que si $\dim(U)+\dim(V) > \dim(E)$ alors $U \cap V \neq \{0\}$.

(3) A-t-on toujours $U \cap (V+W) = U \cap V + U \cap W$?

(4) Montrer que $(U+W) \cap (V+W) \cap (V+U) = (W+V) \cap U + (V+U) \cap W$.

Exercice 15:

On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs lignes $e_1 = (1,0,1,0)$, $e_2 = (-1,1,1,1)$, $e_3 = (2,3,4,0)$ ainsi que $f_1 = (-1,2,-3,1)$, $f_2 = (-1,2,1,3)$, $f_3 = (-1,2,5,-1)$. On pose $E = \mathrm{Vect}\big(e_1, e_2, e_3\big)$ et $F = \mathrm{Vect}\big(f_1, f_2, f_3\big)$.

(1) Calculer $\dim(E)$ et $\dim(F)$.

(2) Trouver des équations et une base de $E \cap F$.

(3) Extraire de $\{e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3\}$ une base de $\mathbb{R}^4$.