RUNSER Laure

Mathématiques 3 : Algèbre
Espaces Vectoriels TD n°2

12.11.2020

Exercice 1

20.11.2020

$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}$

On choisit :

- $v = (-1, 1, 1) \in P$ car $-1 - 2 \times 1 + 3 \times 1 = 0$
- $w = (1, 2, 1) \in P$ car $1 - 2 \times 2 + 3 = 0$

u et v ne sont pas colinéaire

Soit $u = av + bw$, $a, b \in \mathbb{R}$

- Montrons que $u \in P$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$u = av + bw = a(-1, 1, 1) + b(1, 2, 1) = (-a, a, a) + (b, 2b, b) = (-a + b, a + 2b, a + b)$

Donc $x - 2y + 3z = \underbrace{-a+b}_{x} - 2\underbrace{(a+2b)}_{y} + 3\underbrace{(a+b)}_{z} = -a + b - 2a - 4b + 3a + 3b = 0$

Donc $u \in P$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$

- et inversement $\forall u = (x, y, z) \in P$, u peut s'écrire comme une combinaison linéaire de v et w.

Exercice 2

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } 2x - y - 2z = 0\}$

- $\forall u = (x, y, z) \in F$ $2x - y - 2z = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y + z$

Donc $u = (\frac{1}{2}y + z, y, z)$ avec $y, z \in \mathbb{R}$

$u = y\underbrace{\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)}_{v} + z\underbrace{(1, 0, 1)}_{w}$ où u et v est une famille génératrice de F.

Or $v = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) \in F$ car $2 \times \frac{1}{2} - 2 + 0 = 0$

et $w = (1, 0, 1) \in F$ car $2 - 2 = 0$

De plus v et w sont indépendants. Donc ils forment une base de F.

et F de dimension 2 (car 2 variables libres)

Exercice 3

$$F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : \begin{matrix} x-y=0 \\ z-t=0 \end{matrix}\right\}$$

$\forall u \in F \begin{cases} x-y=0 \\ z-t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ z=t \end{cases}$ Donc $u=(y,y,t,t)$, $y,t\in\mathbb{R}$

Donc $u = y\underbrace{(1,1,0,0)}_{v} + t\underbrace{(0,0,1,1)}_{w}$ avec $v, w \in F$ une famille génératrice de F.

De plus v et w ne sont pas colinéaires, et forment donc une famille libre.

Donc $\{v, w\}$ est une base de F.

Exercice 4

On écrit F sous forme matricielle puis on échelonne et réduit la matrice.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-(L_1-2L_2)]{L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : \begin{matrix} x-3t=0 \\ y+3z+3t=0 \end{matrix}\right\}$$

Donc $\forall u \in F \begin{cases} x=3t \\ y=-3z-3t \end{cases}$ donc $u=(3t,-3z-3t,z,t)$, $z,t\in\mathbb{R}$

$$u = z\underbrace{(0,-3,1,0)}_{v\in F} + t\underbrace{(3,-3,0,1)}_{w\in F}$$

Comme $\{v, w\}$ est une famille libre et génératrice de F, c'est une base de F.

Exercice 9

23.11.2020

dim F = nb max de vecteurs libres contenus dans F.

= nb de vecteurs dans une base

ex: $\mathbb{R}^2 \rightsquigarrow$ base $\{(1,0),(0,1)\}$ dim $\mathbb{R}^2 = 2$
$\mathbb{R}^n \longrightarrow$ base $\{(1,0,0,\dots),(0,1,\dots)\dots\}$ dim $\mathbb{R}^n = n$

Démonstration

Prenons d'abord une base $\{u_1, \dots, u_d\}$ de $F_1 \cap F_2$. Donc $\dim(F_1 \cap F_2) = d$

$\{u_1, \dots, u_d\}$ est libre dans F_1 et F_2, mais aussi dans $F_1 + F_2$.

On peut compléter la famille en une base de F_1 : $\{u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_a\}$

alors $\dim(F_1) = d + a$

De même avec F_2 : $\{u_1, \dots, u_d, w_1, \dots, w_b\}$ $\dim(F_2) = d + b$

On veut $\dim(F_1+F_2) + \underbrace{\dim(F_1 \cap F_2)}_{d} = \underbrace{\dim(F_1)}_{d+a} + \underbrace{\dim(F_2)}_{d+b}$

$\Rightarrow$ Il suffit de montrer que $\dim(F_1+F_2) = d + a + b$

Il faut donc démontrer que $\{u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_a, w_1, \dots, w_b\}$ est une base de $F_1 + F_2$.

On veut que $\{u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_a, w_1, \dots w_b\}$ soit une base de $F_1 + F_2$

$\rightarrow$ générateur

$$F_1 + F_2 = \{f_1 + f_2 \in E \text{ tq } f_1 \in F_1 \text{ et } f_2 \in F_2\}$$

Donc tout élément de $F_1 + F_2$ est de la forme $f_1 + f_2$ avec $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2$

$\{u_1, \dots u_d, v_1, \dots v_a\}$ base de F_1

$$f_1 = \sum \lambda_i u_i + \sum \mu_i v_i$$

$\{u_1, \dots, u_d, w_1, \dots, w_b\}$ base de F_2

$$f_2 = \sum k_i u_i + \sum \gamma_i w_i$$

$\Rightarrow f_1 + f_2 = \sum(\lambda_i + k_i) u_i + \sum \gamma_i w_i + \sum \mu_i v_i$

donc famille génératrice

Partie 2 27.11.2020

Exercice 2

$$\left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & 3 & a \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1/4(-a+4c+d) \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/4(-a+d) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3a+b-2c-2d \end{array}\right)$$

2) $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) = E_1 + E_2$

3) suppl de $\underbrace{E_1 + E_2}$

↳ sev de dim 3 donné par l'équat° $3a+b-2c-2d=0$

Donc supp = de dim 1

engendré par $v \notin E_1 + E_2$ (=) ne satisfait pas l'équat°

On prend $v = (1,0,0,0)$

donc $\mathrm{Vect}((1,0,0,0))$ est un suppl de E_1+E_2

Exercice 3

1) $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x=y=z=t\} = \{(x,x,x,x),\ x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{(1,1,1,1)\}$ → sev de dim 1

E → sev de dim 3

- dim E + dim F = 4 = dim $\mathbb{R}^4$
- Pour que E et F soient supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$

il faut : * soit $E + F = \mathbb{R}^4$
* soit $E \cap F = \{0\}$

en plus du fait que la somme des dimensions donne bien la dim de l'espace dans lequel on cherche le supplémentaire

ici le 2e est plus facile à vérifier :

$E \cap F = \left\{ (x,y,z,t) \ \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ \text{et } x=y=z=t \end{array} \right\}$ ⇒ un vecteur $v = (x,y,z,t)$ qui satisfait les deux conditions est $(0,0,0,0)$

⇒ $E \cap F = \{0\} = \{(0,0,0,0)\}$

Donc E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

2) E est définit par l'équation $x+y+z+t=0$

Donc les solut° sont $\begin{cases} x = -y - z - t \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

On prend pour (y,z,t) les valeurs $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

Donc une base de E est $(-1,1,0,0), (-1,0,1,0), (-1,0,0,1)$

Base de F : $\{(1,1,1,1)\}$ car F est la droite engendrée par ce vecteur.
de dim 1.

Exercice 8

1) On cherche une base de E et sa dimension

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dim $E = 2$ avec $(1,2,1)$ et $(1,1,-1)$ comme base

De m̂ pour F

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dim $F = 2$ et $(1,2,2)$ et $(2,3,-1)$ comme base

Donc $E = \mathrm{Vect}((1,2,1),(1,1,-1)) \to \dim E = 2$

$F = \mathrm{Vect}((1,2,2),(2,3,-1)) \to \dim F = 2$

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & 2 & 3 & b \\ 1 & -1 & 2 & -1 & c \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & 2 & 4a+3b-c \\ & 1 & & 1 & 2a-b \\ & & 1 & -1 & 3a-2b+c \end{array}\right)$$
$$\underbrace{v_1 \; v_2}_{E} \; \underbrace{v_3 \; v_4}_{F}$$

dim $E+F = 3$ car 3 lignes non nulles.

Donc $\boxed{E+F = \mathbb{R}^3}$ (base canonique)

donc on n'avait pas besoin de mettre la colonne avec a, b, c dans le calcul (vu que pas besoin de trouver une équation)

$\begin{cases} x = -2t \\ y = -t \\ z = t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$ par ex $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases}$ $\quad (-2)v_1 + (-1)v_1 + v_3 + v_4 = 0$

↳ dépendance linéaire entre les 4 vecteurs

$\Rightarrow 2v_1 + v_2 = v_3 + v_4 \in E \cap F$ $\quad \Rightarrow 2v_1 + v_2 = v_3 + v_4$

$\Rightarrow E \cap F = \mathrm{Vect}(3,5,11)$

On sait que $\underbrace{\dim(E+F)}_{3} + \dim(E \cap F) = \underbrace{\dim(E)}_{2} + \underbrace{\dim(F)}_{2}$ donc $\dim(E \cap F) = 1$

$E \cap F = \mathrm{Vect}((3,5,1))$

$$\begin{cases} 5a - 3b = 0 \\ a - 3c = 0 \end{cases} \qquad (a,b,c) \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{5}{3}a & \Rightarrow \left(a, \frac{5}{3}a, \frac{1}{3}a\right) \\ c = \frac{1}{3}a & \Rightarrow \frac{a}{3}(3,5,1) \end{cases}$$

Ces 2 équations définissent $E \cap F$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6

$u_1 = (1,2,0)$

$u_2 = (2,1,2)$

$u_3 = (3,1,1)$

1) Mq c'est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

↳ 3 vecteurs donc montrer qu'ils sont libres

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5/3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5/3 \\ 0 & 0 & -7/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang } 3 \text{ donc } \{u_1, u_2, u_3\} \text{ libre}$$

donc c'est une base.

2) $w = (1,2,3)$ dans la base canonique

Exprimer w en terme de u_1, u_2, u_3. (combinaison possible et unique car u_1, u_2, u_3 base de $\mathbb{R}^3$)

$w = a u_1 + b u_2 + c u_3$, (a,b,c) unique

$$\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & w \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4/7 \\ 0 & 1 & 0 & 15/7 \\ 0 & 0 & 1 & -9/7 \end{array}\right)$$

$$w = \frac{4}{7}u_1 + \frac{15}{7}u_2 - \frac{9}{7}u_3$$

$$\boxed{w = \left(\frac{4}{7}, \frac{15}{7}, \frac{-9}{7}\right) \text{ dans } \mathcal{B}.}$$

3) $v_1 = (0,1,0)$
$v_2 = (1,0,1)$
$v_3 = (2,1,0)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$ donc (v_i) aussi une base de $\mathbb{R}^3$.

4) Trouver les coordonnées des u_i dans la base $\{v_i\}$.

$$\begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & u_1 & u_2 & u_3 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Donc $u_1 = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$
$u_2 = (1,2,0)$
$u_3 = (0,1,1)$
dans la base des $\{v_i\}$.

$w = \left(\frac{4}{7}, \frac{15}{7}, -\frac{9}{7}\right)$ dans la base des $\{u_i\}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{matrice de passage de } B \text{ à } B'} \cdot \begin{pmatrix} 4/7 \\ 15/7 \\ -9/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

coordonnées de w dans B'

coordonnées de w dans B