RUNSER LAURE
21955060

OL4 DM 6 (noté)

pour le 3 mai 2021

Exercice 1

1) D'après la proposition 9 du poly, toute fonction $g : \mathbb{B}^m \to \mathbb{B}$ est définissable

donc $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ est définissable.

On prend $A = (x \land \neg y) \lor (\neg x \land y)$

2) a)

$\boxed{\oplus_L}$

$$\begin{aligned}
\Gamma, A \oplus B \vdash \Delta &\equiv ((\textstyle\bigwedge\Gamma) \land (A \oplus B)) \Rightarrow (\textstyle\bigvee\Delta) \equiv \neg((\textstyle\bigwedge\Gamma) \land (A \oplus B)) \lor (\textstyle\bigvee\Delta) \\
&\equiv \neg(\textstyle\bigwedge\Gamma) \lor \neg(A \oplus B) \lor (\textstyle\bigvee\Delta) \\
&\equiv \neg((A \land \neg B) \lor (\neg A \land B)) \lor \neg(\textstyle\bigwedge\Gamma) \lor (\textstyle\bigvee\Delta) \\
&\equiv (\neg(A \land \neg B) \land \neg(\neg A \land B)) \lor \neg(\textstyle\bigwedge\Gamma) \lor (\textstyle\bigvee\Delta) \\
&\equiv (\neg(A \land \neg B) \lor \neg(\textstyle\bigwedge\Gamma) \lor (\textstyle\bigvee\Delta)) \land (\neg(\neg A \land B) \lor \neg(\textstyle\bigwedge\Gamma) \lor (\textstyle\bigvee\Delta)) \\
&\equiv (\neg A \lor B \lor \neg(\textstyle\bigwedge\Gamma) \lor (\textstyle\bigvee\Delta)) \land (A \lor \neg B \lor \neg(\textstyle\bigwedge\Gamma) \lor (\textstyle\bigvee\Delta)) \\
&\equiv (\neg(A \land (\textstyle\bigwedge\Gamma)) \lor (B \lor (\textstyle\bigvee\Delta))) \land (\neg(B \land (\textstyle\bigwedge\Gamma)) \lor (A \lor (\textstyle\bigvee\Delta))) \\
&\equiv (((\textstyle\bigwedge\Gamma) \land A) \Rightarrow (B \lor (\textstyle\bigvee\Delta))) \land (((\textstyle\bigwedge\Gamma) \land B) \Rightarrow (A \lor (\textstyle\bigvee\Delta))) \\
&\equiv (\Gamma, A \vdash B, \Delta) \land (\Gamma, B \vdash A, \Delta)
\end{aligned}$$

Donc la règle $\oplus_L$ est bien correcte (la conjonction des hypothèses est équivalente à la conclusion).

$\boxed{\oplus_R}$

$$\begin{aligned}
\Gamma \vdash A \oplus B, \Delta &\equiv (\textstyle\bigwedge\Gamma) \Rightarrow (A \oplus B) \lor (\textstyle\bigvee\Delta) \\
&\equiv \neg(\textstyle\bigwedge\Gamma) \lor (A \oplus B) \lor (\textstyle\bigvee\Delta) \\
&\equiv \neg(\textstyle\bigwedge\Gamma) \lor (\textstyle\bigvee\Delta) \lor (A \land \neg B) \lor (\neg A \land B) \\
&\equiv (\neg(\textstyle\bigwedge\Gamma) \lor (\textstyle\bigvee\Delta) \lor A \lor (\neg A \land B)) \land (\neg(\textstyle\bigwedge\Gamma) \lor (\textstyle\bigvee\Delta) \lor \neg B \lor (\neg A \land B)) \\
&\equiv (\neg(\textstyle\bigwedge\Gamma) \lor (\textstyle\bigvee\Delta) \lor \underbrace{A \lor \neg A}_{=1}) \land (\neg(\textstyle\bigwedge\Gamma) \lor (\textstyle\bigvee\Delta) \lor A \lor B) \land (\neg(\textstyle\bigwedge\Gamma) \lor (\textstyle\bigvee\Delta) \lor \neg B \lor \neg A) \land (\neg(\textstyle\bigwedge\Gamma) \lor (\textstyle\bigvee\Delta) \lor \underbrace{\neg B \lor B}_{=1}) \\
&\equiv ((\textstyle\bigwedge\Gamma) \Rightarrow (A \lor B \lor (\textstyle\bigvee\Delta))) \land (((\textstyle\bigwedge\Gamma) \land A \land B) \Rightarrow (\textstyle\bigvee\Delta)) \\
&\equiv (\Gamma \vdash A, B, \Delta) \land (\Gamma, A, B \vdash \Delta)
\end{aligned}$$

Donc la règle $\oplus_R$ est bien correcte.

b) J'ai raisonné par équivalence : on voit bien que la conclusion est équivalente à la conjonction des hypothèses.
Donc la validité de la conclusion entraîne la validité de toutes les hypothèses.
Donc les 2 règles sont réversibles.

Exercice 2

1)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash B, A, B}\,Ax \qquad \dfrac{}{B \vdash A, A, B}\,Ax}{A \oplus B \vdash A, B}\,\oplus_L}{A \oplus B \vdash A \vee B}\,\vee_R}{\vdash (A \oplus B) \Rightarrow (A \vee B)}\,\Rightarrow_R
$$

2)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash B, A, B}\,Ax \qquad \dfrac{}{B \vdash A, A, B}\,Ax}{A \oplus B \vdash A, B}\,\oplus_L}{A \oplus B \vdash A \vee B}\,\vee_R \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, B \vdash B, \neg A}\,Ax}{A \vdash B, \neg A, \neg B}\,\neg_R \qquad \dfrac{\dfrac{}{B, A \vdash A, \neg B}\,Ax}{B \vdash A, \neg A, \neg B}\,\neg_R}{A \oplus B \vdash \neg A, \neg B}\,\oplus_L}{A \oplus B \vdash \neg A \vee \neg B}\,\vee_R}{A \oplus B \vdash (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)}\,\neg_R}{\vdash (A \oplus B) \Rightarrow ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B))}\,\Rightarrow_R
$$

3)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vee B, A, B \vdash A}\,Ax}{A \vee B, \neg A, A, B \vdash}\,\neg_L \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vee B, A, B \vdash B}\,Ax}{A \vee B, \neg B, A, B \vdash}\,\neg_L}{A \vee B, \neg A \vee \neg B, A, B \vdash}\,\vee_L \qquad \dfrac{\dfrac{}{A, \neg A \vee \neg B \vdash A, B}\,Ax \qquad \dfrac{}{B, \neg A \vee \neg B \vdash A, B}\,Ax}{A \vee B, \neg A \vee \neg B \vdash A, B}\,\vee_L}{A \vee B, \neg A \vee \neg B \vdash A \oplus B}\,\oplus_R}{(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \vdash A \oplus B}\,\wedge_L}{\vdash ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \Rightarrow (A \oplus B)}\,\Rightarrow_R
$$