Outils Logiques Groupe 3 & 4 – DM 7 (Correction)

Exercice 1 (Tiroirs à trois)

Le principe des tiroirs à trois affirme que k pigeons peuvent être mis dans n tiroirs, de manière à ce que chaque tiroir contient au plus trois pigeons, si et seulement si $k \leq 3n$.
Fixons k pigeons et n tiroirs.

(1) Donner un ensemble de variables propositionnelles permettant de modéliser le placement des pigeons dans les tiroirs.

(2) Donner une formule $A_{k,n}$ en CNF modélisant : « chaque pigeon est dans exactement un tiroir ».

(3) Donner une formule $B_{k,n}$ en CNF modélisant : « chaque tiroir contient au plus 3 pigeons distincts ». En déduire une formule $\varphi_{k,n}$ en CNF telle que les solutions du problème des tiroirs à trois pour k pigeons et n tiroirs correspondent exactement aux affectations v telles que $v \vDash \varphi_{k,n}$.

(4) Bonus : Donner une formule $C_{k,n}$ en CNF modélisant : « chaque tiroir contient au moins 3 pigeons distincts ».

Solution

(1) On prend $x_{i,j}$ modélisant « le i-ème pigeon est dans le j-ième tiroir » pour $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq n$.

(2) (a) On modélise « chaque pigeon est dans au moins un tiroir » par :

$$A^1_{k,n} = \bigwedge_{1 \leq i \leq k} \left(\bigvee_{1 \leq j \leq n} x_{i,j} \right)$$

(b) On modélise « chaque pigeon est dans au plus un tiroir » par :

$$A^2_{k,n} = \bigwedge_{1 \leq i \leq k} \left(\bigwedge_{1, \leq j < j' \leq n} (\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i,j'}) \right)$$

Enfin on modélise « chaque pigeon est dans exactement un tiroir » par $A_{k,n} = A^1_{k,n} \wedge A^2_{k,n}$ qui est en CNF car elle est une conjonction de formules en CNF.

(3) On modélise « chaque tiroir contient au plus 3 pigeons distincts » par :

$$B_{k,n} = \bigwedge_{1 \leq j \leq n} \left(\bigwedge_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq k} (\neg x_{i_1,j} \vee \neg x_{i_2,j} \vee \neg x_{i_3,j} \vee \neg x_{i_4,j}) \right)$$

On déduit que $\varphi_{k,n} = A_{k,n} \wedge B_{k,n}$ modélise le problème des tiroirs à trois pour k pigeons et n tiroirs.

(4) De manière équivalente, on modélise « chaque tiroir ne contient pas au plus $k-3$ pigeons distincts » :

$$C_{k,n} = \bigwedge_{1 \leq j \leq n} \left(\bigwedge_{1 \leq i_1 < \ldots < i_{k-2} \leq k} (x_{i_1,j} \vee \ldots \vee x_{i_{k-2},j}) \right)$$

2	5			3		9		1
	1				4			
4		7				2		8
		5	2					
				9	8	1		
	4				3			
			3	6			7	2
	7							3
9		3				6		4

FIGURE 1 – Exemple de sudoku

Exercice 2 (Sudoku)

(Rappel : les règles du Sudoku sont expliqués dans la section 5.3 du poly.)
Un tableau de Sudoku rempli est un tableau carré avec 9 lignes et colonnes avec une valeur entre 1 et 9 dans chaque case et qui correspond à une solution d'un Sudoku.

(1) Donner des variables propositionnelles permettant de modéliser le remplissage d'une case par une valeur.

(2) Donner des formules en CNF modélisant :

  (a) « Chaque case contient au moins une valeur de 1 à 9 »,

  (b) « Chaque ligne contient chaque valeur de 1 à 9 au plus une fois »,

  (c) « Chaque colonne contient chaque valeur de 1 à 9 au plus une fois »,

  (d) « Chaque région contient chaque valeur de 1 à 9 au plus une fois ».

  Expliquez pourquoi les autres contraintes d'un tableau de Sudoku rempli (comme « chaque valeur apparaît au moins une fois dans chaque ligne ») peuvent se déduire de (a)-(d). Donner une formule ψ en CNF telle que les tableaux du Sudoku remplis correspondent exactement aux affectations v telles que $v \vDash \psi$.

(3) Expliquez comment un tableau de Sudoku partiellement rempli (comme dans la Figure 1) peut se formuler comme un problème de SAT en utilisant la formule ψ.

Solution

(1) x_{ijk} : « la case à la position (i, j) contient la valeur k » pour tous $1 \leq i, j, k \leq 9$.

(2) (a) « Chaque case contient au moins une valeur de 1 à 9 » :

$$A = \bigwedge_{1 \leq i,j \leq 9} \left(\bigvee_{1 \leq k \leq 9} x_{ijk} \right)$$

(b) « Chaque ligne contient chaque valeur de 1 à 9 au plus une fois » :

$$B = \bigwedge_{1 \le i,k \le 9} \left(\bigwedge_{1 \le j < j' \le 9} (\neg x_{ijk} \vee \neg x_{ij'k}) \right)$$

(c) « Chaque colonne contient chaque valeur de 1 à 9 au plus une fois » :

$$C = \bigwedge_{1 \le j,k \le 9} \left(\bigwedge_{1 \le i < i' \le 9} (\neg x_{ijk} \vee \neg x_{i'jk}) \right)$$

(d) « Chaque région contient chaque valeur de 1 à 9 au plus une fois »

$$D = \bigwedge_{\substack{0 \le r,s \le 2 \\ 1 \le k \le 9}} \left(\bigwedge_{\substack{1 \le i,i' \le 3 \\ 1 \le j,j' \le 3 \\ (i,j) \ne (i',j')}} (\neg x_{(3r+i)(3s+j)k} \vee \neg x_{(3r+i')(3s+j')k}) \right)$$

Si chaque case du tableau contient une valeur entre 1 et 9 et si chaque ligne contient chaque valeur au plus une fois, on déduit par le principe des tiroirs que chaque ligne contient chaque valeur exactement une fois. Idem pour les colonnes et les régions.

On conclut que la formule en CNF $\psi = A \wedge B \wedge C \wedge D$ est telle que les tableaux de Sudoku remplis correspondent exactement aux affectations v telles que $v \vDash \psi$.

(3) Étant donné un tableau de Sudoku partiellement rempli T, notons ψ_T la conjonction de ψ avec toutes les clauses unitaires de la forme x_{ijk} où la valeur k apparaît dans la case (i, j) de T. Alors les solutions de T correspondent exactement aux affectations v telles que $v \vDash \psi_T$.

Exercice 3 (Ch. 5, Exo 70)

Solution

Rappelons qu'une permutation $\pi\colon \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$ est exactement une fonction bijective. Le problème se ramène donc à mettre n pigeons distincts dans n tiroirs distincts sans mettre plus d'un pigeon dans un tiroir. La formule A_n voulue est donc

$$\begin{aligned} &\left(\bigwedge_{1 \le i \le n} \left(\bigvee_{1 \le j \le n} x_{i,j} \right) \right) \\ \wedge &\left(\bigwedge_{1 \le i \le n} \left(\bigwedge_{1 \le j < j' \le n} (\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i,j'}) \right) \right) \\ \wedge &\left(\bigwedge_{1 \le j \le n} \left(\bigwedge_{1 \le i < i' \le n} (\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i',j}) \right) \right) \end{aligned}$$

Exercice 4 (Ch 5, Exo 71)

Solution

On veut modéliser « au plus k des $x_1, \ldots, x_n$ sont vraies » :

$$\bigwedge_{1 \le i_1 < \ldots < i_{k+1} \le n} (\neg x_{i_1} \vee \ldots \vee \neg x_{i_{k+1}})$$