Algorithmique
TD n° 5 : Programmation dynamique

Exercice 1 : Construire un palindrome

On rappelle qu'un palindrome est une chaîne de caractères qui est égale à son miroir (par exemple *abba*). En insérant suffisamment de caractères dans une chaîne on peut la transformer en palindrome. Par exemple, en insérant un b à la fin, on peut transformer *baa* en palindrome *baab*.

1. Combien de caractères faut-il insérer pour obtenir un palindrome à partir de a, ab, $acecb$?

2. Soit $min(w, g, d)$ le nombre minimal d'insertions pour obtenir un palindrome à partir du mot $w[g : d]$ (avec g et d entre 0 et $len(w) - 1$ et $g \leqslant d$). Soit $w = aceccgab$. Remplissez le tableau suivant avec les valeurs de $min(w, g, d)$:

g \ d	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1	×							
2	×	×						
3	×	×	×					
4	×	×	×	×				
5	×	×	×	×	×			
6	×	×	×	×	×	×		
7	×	×	×	×	×	×	×	

3. Donnez une relation de récurrence pour $min(w, g, d)$ (sans tester si une sous chaîne est un palindrome)

4. Décrivez un algorithme récursif pour déterminer le nombre minimal d'insertion nécessaire pour transformer une chaîne de caractères en palindrome.

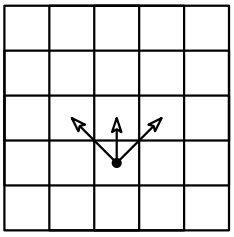
5. Qu'elle est sa complexité ?

6. Trouver un algorithme de programmation dynamique pour ce problème.

7. Quelle est sa complexité ?

Exercice 2 : un jeu vidéo

Dans un jeu vidéo des années 1980, un vaisseau spatial se déplace à vitesse constante vers le haut (en fait, c'est le décor qui va vers le bas... peu importe). Le joueur peut rester sur la même colonne, ou se déplacer d'une unité vers la gauche ou d'une vers la droite. Selon l'emplacement où il se trouve, il gagne des points, en perd, ou meurt.



On modélise le problème sous forme d'une matrice $\ell \times c$. À chaque case (i, j) est affecté un bonus/malus $b_{i,j}$ (valant $-\infty$ si le joueur meurt). Le but est donc de trouver le chemin qui rapporte le plus, sachant que seules sont accessibles depuis la case (i, j) les cases $(i+1, j-1)$, $(i+1, j)$ et $(i + 1, j + 1)$, comme sur le dessin.

1. Trouver une relation de récurrence pour calculer le maximum de points que l'on peut gagner *en arrivant* sur la case (i, j). Comment gérer les « effets de bord » de manière pratique pour que cette relation est la même pour toutes les valeurs de j (même pour $j = 1$ et $j = c$) ?
2. En déduire un algorithme (de programmation dynamique) trouvant le score maximum à partir d'une case. Quelle est sa complexité ?
3. Améliorer l'algorithme pour qu'il trouve également le chemin à suivre.

Exercice 3 : plus longue sous chaîne commune

Une sous chaîne (aussi appelé parfois facteur) commune de deux chaînes est une chaîne constituée des éléments communs des deux chaînes dans le même ordre dans les deux chaînes.
Par exemple, les sous chaînes communes de "abcde" et "acdeij" sont : "a", "c", "d", "e", "cd", "de", "cde".

1. Donnez deux chaînes de sorte qu'il y ait deux sous chaînes communes de taille maximale.
2. Donnez un algorithme qui permet de vérifier qu'une chaîne est une sous chaîne d'une autre.
3. Donnez un algorithme naïf pour retrouver une des plus longues sous chaînes communes de deux chaînes.
4. Étant données deux chaînes s et t, soit $lplscc(i, j)$ la longueur de la plus longue sous chaîne commune de s et de t qui s'arrête à $s[i]$ et à $t[j]$. Soit $plscc(i, j)$ la plus longue sous chaîne commune de s et de t qui s'arrête à $s[i]$ et à $t[j]$. Soit $s =$ "$abcdeg$" et $t =$ "$deabceg$". Remplissez le tableau suivant à gauche avec les valeurs de $lplscc(i, j)$. Remplissez le tableau à droite avec les valeurs de $plscc(i, j)$.

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							

5. Donnez une récurrence pour $lplscc(i, j)$. Donnez ensuite une récurrence pour $plscc(i, j)$, la plus longue sous chaîne commune de s et de t qui s'arrête à $s[i]$ et à $t[j]$.
6. Donnez un algorithme de programmation dynamique pour trouver une des plus longues sous chaînes communes de deux chaînes.
7. Comment le modifier pour obtenir toutes les sous chaînes commune de longueur maximale ?