AAL TD 1 : Langages et Expressions Rationnelles

18.09.2020

Exercice 1

1)

u	a^3cbbca	$aabgjdd$	$titi$	$babc$
$\lvert u\rvert_a$	4	2	0	1
$\lvert u\rvert_b$	2	1	0	2

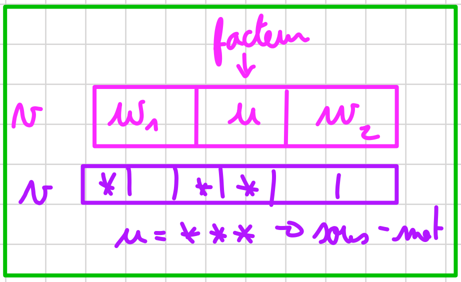
2) (u, v) tq $uv = abaac$

u	v
a	$baac$
ab	aac
aba	ac
$abaa$	c
ε	$abaac$
$abaac$	ε

3) $v = ababab$ 2 occurrences du facteur aba

$v = ababab$ ~~3~~ 4 occurrences du sous-mot aba

(+ les 2 facteurs)



Exercice 2

On suppose que $A = \{a, b\}$

1) a) $\mathcal{L}.\mathcal{M} = \{a, ab, a^3, ab^2, aba^2, b^2, b^3, b^2a^2\}$

b) $\mathcal{L}.\mathcal{M} = \emptyset$

c) $\mathcal{L}.\mathcal{M} = \{a, ba, bb\}$

d) $\mathcal{L}.\mathcal{M} =$ l'ensemble des mots sur $\{a,b\}$ qui ne commencent pas par bb.

$= \{aa\}.A^* \cup \{ab\}.A^* \cup \{ba\}.A^*$

$= \mathcal{L}(aa(a+b)^* + ab(a+b^*) + ba(a+b)^*)$

2) mq $\forall \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ on a $\mathcal{L}.(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) = (\mathcal{L}.\mathcal{M}) \cup (\mathcal{L}.\mathcal{N})$

$x.(y+z) = xy + xz$

Par double inclusion.

① Montrons que $\mathcal{L}.(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \subset (\mathcal{L}.\mathcal{M}) \cup (\mathcal{L}.\mathcal{N})$

Soit $u \in \mathcal{L}.(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})$. mq $u \in (\mathcal{L}.\mathcal{M}) \cup (\mathcal{L}.\mathcal{N})$

$\exists v \in \mathcal{L}$ et $w \in \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ tq $u = vw$

Supposons que $w \in \mathcal{M}$, alors $u \in \mathcal{L}.\mathcal{M}$ donc $u \in (\mathcal{L}.\mathcal{M}) \cup (\mathcal{L}.\mathcal{N})$ } donc

Sinon $w \in \mathcal{N}$ ———— $\mathcal{L}.\mathcal{N}$ ————

$\boxed{\mathcal{L}.(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \subset (\mathcal{L}.\mathcal{M}) \cup (\mathcal{L}.\mathcal{N})}$

② Montrons que $(\mathcal{L}.\mathcal{M}) \cup (\mathcal{L}.\mathcal{N}) \subset \mathcal{L}.(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})$

Soit $u \in (\mathcal{L}.\mathcal{M}) \cup (\mathcal{L}.\mathcal{N})$. Mq $u \in \mathcal{L}.(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})$

Soit $u \in \mathcal{L}.\mathcal{M}$

Alors $\exists v \in \mathcal{L}$, $w \in \mathcal{M}$ tq $u = vw$. Alors $w \in \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ et $u \in \mathcal{L}.(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})$

Sinon $u \in \mathcal{L}.\mathcal{N}$

———— $w \in \mathcal{N}$ ————

Donc $\boxed{(\mathcal{L}.\mathcal{M}) \cup (\mathcal{L}.\mathcal{N}) \subset \mathcal{L}.(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})}$

<u>Conclusion</u> On a donc bien $\boxed{\mathcal{L}.(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) = (\mathcal{L}.\mathcal{M}) \cup (\mathcal{L}.\mathcal{N})}$

Trouvons un exemple pour réfuter la distributivité de l'intersection

↳ $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ tq $\mathcal{L}.(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) \neq (\mathcal{L}.\mathcal{M}) \cap (\mathcal{L}.\mathcal{N})$

$\mathcal{L} = \{a, \varepsilon\}$

$\mathcal{M} = \{a, b\}$

$\mathcal{N} = \{aa, bb\}$

Alors $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ donc $\mathcal{L}.(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) = \emptyset$

Mais $\mathcal{L}.\mathcal{M} = \{aa, ab, a, b\}$

$\mathcal{L}.\mathcal{N} = \{a^3, abb, aa, bb\}$

et donc $(\mathcal{L}.\mathcal{M}) \cap (\mathcal{L}.\mathcal{N}) = \{aa\} \neq \emptyset$

<u>Autre contre-exemple</u>

$\mathcal{L} = \{a, b\}^*$

$\mathcal{M} = \{\varepsilon\}$

$\mathcal{N} = \{a\}$

Alors $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ donc $\mathcal{L}.(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) = \emptyset$

Mais $\mathcal{L}.\mathcal{M} = \{a, b\}^*$

et $\mathcal{L}.\mathcal{N}$ = mots qui terminent par $a = \{a, b\}^*.a$

donc $(\mathcal{L}.\mathcal{M}) \cap (\mathcal{L}.\mathcal{N}) = \{a, b\}^*.a \neq \emptyset$

3) a) $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^*.\mathcal{M}^*$ VRAI

Par double inclusion

① Soit $u \in \mathcal{M}^*$ Alors $u = \underbrace{\varepsilon}_{\in \mathcal{M}^*}.\underbrace{u}_{\in \mathcal{M}^*} \in \mathcal{M}^*.\mathcal{M}^*$

② Soit $u \in \mathcal{M}^*.\mathcal{M}^*$ Alors $u = vw$, $v, w \in \mathcal{M}^*$

$v = v_1 \dots v_n$ où $v_i \in \mathcal{M}$

$w = w_1 \dots w_m$ où $w_i \in \mathcal{M}$

donc $u = v_1 \dots v_n w_1 \dots w_m \in \mathcal{M}^*$

Donc <u>OK</u>

b) $L^* = (L.L)^*$ FAUX

contre-exemple : $L = \{a\}$ $\to$ L^* = tous les mots avec a $= \{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

$L\,L = \{aa\}$ $\to$ $(L.L)^*$ $\to$ que les mots de taille paire $= \{a^{2i} \mid i \in \mathbb{N}\}$

c) $L^* = L.L^*$ FAUX

(par contre $L^* = L.L^* \cup \{\varepsilon\}$ VRAI)

contre-exemple $L = \{a\}$

$L^* = \{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ← contient ε

$L.L^* = \{a^i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$ ← ne contient pas ε

d) $L^* = (L^*)^*$ VRAI

$\boxed{\subset}$ $L^* = (L^*)^1 \subset (L^*)^*$

$\boxed{\supset}$ $(L^*)^* \to \underbrace{u_1 u_2 \dots u_m}$ où $u_i \in L^*$

↳ $v_{i1} v_{i2} \dots v_{in_i}$ où $v_{ij} \in L$

$$v_{11} v_{12} \dots v_{1m_1} \dots v_{2m_2} v_{31} \dots v_{m,m_m}$$

e) $\underbrace{L.(N.L)^*} = (\underbrace{L.N})^*.L$ VRAI

$$\underbrace{(L.\,(N)(L).(N)(L)\dots(N)}_{i \text{ fois}}.L)$$

$$\underbrace{(N)(L).(N)(L)\dots(N).L)}_{i \text{ fois}}$$

Exercice 3

1) $b^* a b^*$ ✓

2) $b^* a b^* a b^*$ ✓

3) $(a+b)^* a (a+b)^* a (a+b)^*$ ✓ ou $b^* a b^* a (a+b)^*$

4) $\underline{(a+b)^*} a (a+b)^* b \underline{(a+b)^*} + \underline{(a+b)^*} b (a+b)^* a \underline{(a+b)^*}$

$= \underline{(a+b)^*} \left(\underline{a(a+b)^* b} + \underline{b(a+b)^* a} \right) \underline{(a+b)^*}$

$= (a+b)^* \left(\underline{a a^* b} + \underline{b b^* a} \right) (a+b)^*$

5) $(b^* a b^* a b^*)^*$ ✓

6) $(a+b)^* aa (a+b)^*$ ✓

7) $(b + ab)^* (a + \varepsilon)$

8) $b^* a^*$ ✓

10) Ne s'exprime PAS en exp rationnelle

9) Difficile