14/16

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (A_{(1,3)})^{n-1} + (A_{(3,3)})^{n-1} \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & (A_{(1,3)})^{n} + (A_{(3,3)})^{n} \\ 0 & (-2)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

L'hérédité est vraie : CQFD

Exercice 8 : $P(X) = X^5 + 2X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 1$

On remarque que $X = -1$ est une racine du polynôme car $P(-1) = 0$

On peut donc factoriser le polynôme par $(X+1)$ dans $\mathbb{R}[X]$

$$\begin{array}{r|l} X^5 + 2X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 1 & (X+1) \\ \hline -(X^5 + X^4) & X^4 + X^3 - X - 1 \\ X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 1 & \\ -(X^4 + X^3) & \\ \hline -X^2 - 2X - 1 & \\ -(-X^2 - X) & \\ \hline -X - 1 & \\ -(-X - 1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Alors : $P(X) = (X^4 + X^3 - X - 1)(X + 1)$