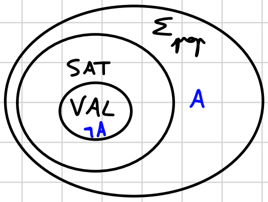
29.03.2021 (présentiel)

OL4 CMTD 8

Rappels :



Une clause $l_1 \vee \ldots \vee l_m$ est valide ssi $\exists x, \neg x \in \{l_1, \ldots, l_m\}$

Q : Comment montrer A en CNF valide ?

A : $A = \bigwedge_{i \in I} c_i$ et il faut que chaque c_i soit valide (donc très facile)

Q : et satisfiable ?

A : C'est compliqué.

Transformation en CNF

On a vu :

a) passer en NNF $\neg\neg A \to_m A$ $\quad \neg(A \vee B) \to_m \neg A \wedge \neg B$ $\quad \neg(A \wedge B) \to_m \neg A \vee \neg B$

b) puis $A \vee (B \wedge C) \to_c (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$\Rightarrow$ On a donc $A \equiv NNF(A) \equiv CNF(A)$
avec le processus $A \to_{m^*} NNF(A) \to_{c^*} CNF(A)$

pb : taille de CNF(A) est exponentielle de celle de A (car on "duplique" de l'information qd on applique $\to_{c^*}$)

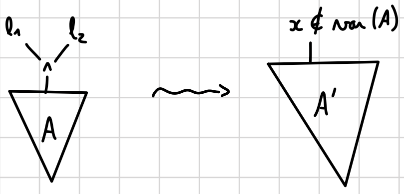
ex : Calculer $CNF(A)$ où $A = (x_1 \wedge y_1) \vee (x_2 \wedge y_2) \vee (x_3 \wedge y_3)$ est déjà en NNF

- $A \equiv \underset{= 2^3}{8}$ clauses de 2 littéraux

$\boxed{\text{Def : A et A' sont \textit{équisatisfiables} si soit } A, A' \in SAT, \text{ soit } \neg A, \neg A' \in VAL}$

methode 2 : On va donc plutôt chercher A' en CNF telle que A et A' sont équiSAT.

Procédure de TSEITIN ("tsaïtine")



$\wedge \ (x \Leftrightarrow l_1 \wedge l_2)$

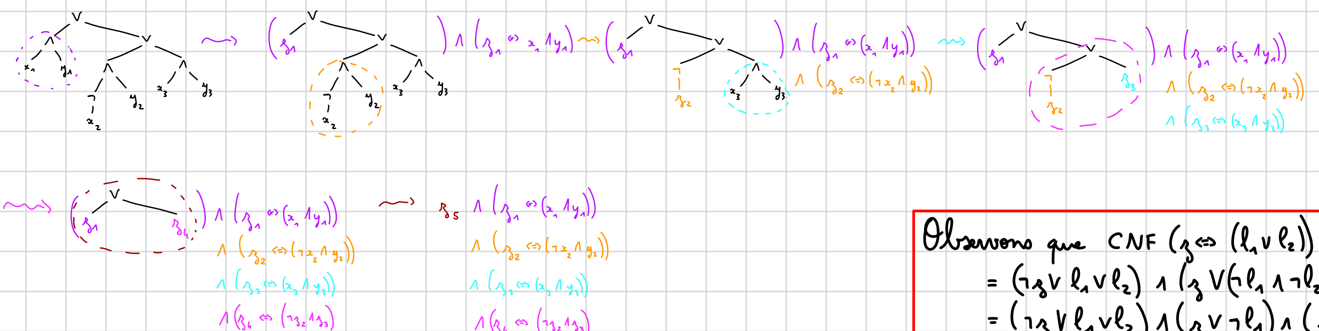
On réduit la taille à chaque tour
$t(A) \rightsquigarrow \underbrace{(t(A) - 2)}_{\text{on réduit d'au moins 2}} + k$

Donc $t(\text{tseitin}(A)) \leqslant \underbrace{\left(\frac{t(A)}{2}\right)}_{\text{nb d'étapes max}} \times k + 2$

à la fin on a soit une variable ($t=1$) soit la négation d'une variable ($t=2$)

$\hookrightarrow$ LINÉAIRE
(bien mieux que l'exp de la méthode 1)

exemple : $A = (x_1 \wedge y_1) \vee \neg(\neg x_2 \wedge y_2) \vee (x_3 \wedge y_3)$



(pour terminer, il faudrait encore développer toutes les équivalences $\rightsquigarrow$

Observons que $CNF(z \Leftrightarrow (l_1 \vee l_2))$
$= (\neg z \vee l_1 \vee l_2) \wedge (z \vee (\neg l_1 \wedge \neg l_2))$
$= (\neg z \vee l_1 \vee l_2) \wedge (z \vee \neg l_1) \wedge (z \vee \neg l_2)$
de taille k

<u>Exercice</u> 1) Mq si $v \models A$ alors $\exists v'$ tq $v' \models A' \wedge (x \Leftrightarrow l_1 \wedge l_2)$

2) Montrer la réciproque.

1) Soit v tq $v \models A$

On sait que $A = A'[l_1 \wedge l_2 / x]$ et $[\![A]\!]v = 1$

donc $[\![A'[l_1 \wedge l_2 / x]]\!]v = 1$

$= [\![A']\!]v\left([\![l_1 \wedge l_2]\!]v / x\right)$

Donc $v' = v\left([\![l_1 \wedge l_2]\!]v / x\right) \models A'$

Il faut que v' satisfasse $(x \Leftrightarrow l_1 \wedge l_2)$

ie. $[\![x]\!]v' = [\![l_1 \wedge l_2]\!]v'$

Or on a $[\![x]\!]v' = [\![l_1 \wedge l_2]\!]v$ et $[\![l_1 \wedge l_2]\!]v' = [\![(l_1 \wedge l_2)[l_1 \wedge l_2 / x]]\!]v = [\![\overbrace{l_1 \wedge l_2}^{\text{car } x \text{ n'apparaît pas ds la formule } l_1 \wedge l_2}]\!]v$

Donc on a bien $v' \models A' \wedge (x \Leftrightarrow (l_1 \wedge l_2))$

⚠ La procédure de Tseitin ne renvoie PAS une formule ÉQUIVALENTE à la formule de départ, juste EQUISATISFIABLE

<u>exemple</u> : $A = x \wedge y$, alors $A' = z \wedge (z \Leftrightarrow (x \wedge y))$

et $v \models x \wedge y$ ssi $v(x) = v(y) = 1$

soit $v' = v(0/z)$ $\quad v'(x) = v'(y) = 1$

$v'(z) = 0$

Alors $[\![A]\!]v' = \text{AND}(v'(x), v'(y)) = \text{AND}(1,1) = 1$

mais $[\![A']\!]v' = \text{AND}(v'(z), \dots) = \text{AND}(0, \dots) = 0$

Donc $A \not\equiv A'$

Notations :

* $C = l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k$, on écrit $\{l_1, \dots, l_k\}$ l'ensemble des littéraux.

  = on enlève les doublons car $a \wedge a = a$

* Pour $\bigwedge_{i \in I \text{ fini}} c_i$ on écrit $\{c_1, \dots, c_i, \dots\}$ l'ensemble des clauses.

* $\bigvee \emptyset = 0$

exemple : $\{\{x_1\}, \{x_2, y_2\}, \emptyset\} = x_1 \wedge (x_2 \vee y_2) \wedge (\bigvee \emptyset) = 0$ donc non SAT

$\{\{x_1\}, \{x_2, y_2\}, \{\underbrace{x_1, x_3, \neg x_3}\}\} = x_1 \wedge (x_2 \vee y_2) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee \neg x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee y_2) \wedge 1 = x_1 \wedge (x_2 \vee y_2)$

$\equiv \{\{x_1, \{x_2, y_2\}\}$ on enlève la clause valide.