

n° 21955060

L2 info, groupe 3

Exercice 11) \sin et \exp admettent toutes les deux un DL à l'ordre 4 en 0.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4)$$

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o_0(u^4)$$

avec $u = x - \frac{x^3}{6}$ on a donc

$$\exp(\sin(x)) = 1 + x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4)\right)^3}{6} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4)\right)^4}{24} + o_0(x^4)$$

$$\exp(\sin(x)) = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{2} \cdot x \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{3x^4}{24} + o_0(x^4)$$

$$\exp(\sin(x)) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o_0(x^4)$$

2) $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = (1+(1+x)^{1/2})^{1/2} = f(x)$

$(1+x)^{1/2}$ admet un DL à l'ordre 2 quand $x \rightarrow 0$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o_0(x^2) \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{donc } (1+\sqrt{1+x})^{1/2} &= \left(1 + 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o_0(x^2)\right)^{1/2} \\ &= \left(2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o_0(x^2)\right)^{1/2} \\ &= \left(2 \left(1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + o_0(x^2)\right)\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{2} \left(1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + o_0(x^2)\right)^{1/2} \end{aligned}$$

$\rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$

donc en réutilisant (*) avec u à la place de x on trouve

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + o_0(x^2)\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + o_0(x^2)\right)^2 + o_0(x^2)\right) \\ &= \sqrt{2} \left(1 + \frac{x}{8} - \frac{x^2}{32} + o_0(x^2) - \frac{1}{8} \left(\frac{x^2}{16} - 2 \cdot \frac{x}{4} \cdot \frac{x^2}{16} + o_0(x^2)\right) + o_0(x^2)\right) \\ &= \sqrt{2} \left(1 + \frac{x}{8} - \frac{x^2}{16 \cdot 2} - \frac{x^2}{16 \cdot 8} + o_0(x^2)\right) \\ &= \sqrt{2} \left(1 + \frac{x}{8} - \frac{(8x^2 + 2x^2)}{16 \cdot 2 \cdot 8} + o_0(x^2)\right) \\ &= \sqrt{2} + \frac{x}{4\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2} \times 10x^2}{16 \cdot 2 \cdot 8} + o_0(x^2) \end{aligned}$$

$$\text{donc } f(x) = \sqrt{2} + \frac{x}{4\sqrt{2}} - \frac{5x^2}{64\sqrt{2}} + o_0(x^2)$$

$$3) f(x) = \frac{\cos(x)}{1+\tan(x)} = \cos(x) \times \frac{1}{1+\tan(x)}$$

on:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o_0(x^4)$$

$$\text{donc } f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)\right) \times \frac{1}{1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + o_0(x^4)\right)} \quad \begin{matrix} = g(x) \\ \rightarrow 0 \text{ qd } x \rightarrow 0 \end{matrix}$$

$$\text{on } \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o_0(u^4) \quad \text{donc } g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{3} + \left(x + \frac{x^3}{3}\right)^2 - x^3 + x^4 + o_0(x^4)$$

qd $u \rightarrow 0$ on simplifie car les autres termes sont d'un ordre ≥ 4 .

$$g(x) = 1 - x - \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{2x^4}{3} - x^3 + x^4 + o_0(x^4) \\ = 1 - x + x^2 - \frac{4x^3}{3} + \frac{5x^4}{3} + o_0(x^4)$$

$$\text{donc } f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)\right) \cdot \left(1 - x + x^2 - \frac{4x^3}{3} + \frac{5x^4}{3} + o_0(x^4)\right)$$

$$f(x) = 1 - x + x^2 - \frac{4x^3}{3} + \frac{5x^4}{3} + o_0(x^4) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + o_0(x^4) + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)$$

$$f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{6} + \frac{29}{24}x^4 + o_0(x^4)$$

$$4) f(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

$$\text{on } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{donc } f(x) = \frac{1}{1 + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)} = \frac{1}{2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)}$$

$$\text{et } \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o_0(u^4)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48} + o_0(x^4)} \quad \rightarrow 0 \text{ qd } x \rightarrow 0$$

$$\text{on pose donc } u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48} + o_0(x^4)$$

$$\text{donc } f(x) = \frac{1}{2} \left(1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o_0(u^4)\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48} + o_0(x^4)\right) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + \frac{7x^4}{48} + o_0(x^4)\right) - \left(\frac{x^3}{8} + \frac{3x^4}{16} + o_0(x^4)\right) + \left(\frac{x^4}{16} + o_0(x^4)\right) + o_0(x^4)\right)$$

$$\text{donc } f(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + o_0(x^4)\right)$$

$$6) f(x) = (1+x)^{\frac{1}{1+x}} = \exp\left(\frac{1}{1+x} \ln(1+x)\right)$$

$$\text{or } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)$$

$$\text{et } \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o_0(x^3)$$

$$\text{donc } f(x) = \exp\left((1-x+x^2-x^3+o_0(x^3))\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o_0(x^3)\right)\right)$$

$$f(x) = \exp\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{x^3}{2} + x^3 + o_0(x^3)\right)$$

$$f(x) = \exp\left(x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^3}{6} + o_0(x^3)\right)$$

→ 0 qd x → 0

$$\text{or } \exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o_0(u^3)$$

$$\text{donc } f(x) = 1 + x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^3}{6} + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{6x^3}{2}\right) + \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)$$

$$f(x) = 1 + x - x^2 + \frac{x^3}{2} + o_0(x^3)$$

$$5) f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} = \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)}$$

$$\text{or } \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5)$$

$$\text{donc } \sin(x) - x = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5)$$

$$\text{et } x \sin(x) = x^2 - \frac{x^4}{6} + o_0(x^4) = \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o_0(x^4)} = \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1-u}$$

comme $u \rightarrow 0$ qd $x \rightarrow 0$, on peut faire la DL

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + o_0(u^3)$$

$$\text{donc } x \sin(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{36} + \frac{x^6}{216} + o_0(x^6)\right)$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{6} + \frac{x^2}{36} + \frac{x^4}{216} + o_0(x^4)$$

$$\text{donc } f(x) = \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5)\right) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{6} + \frac{x^2}{36} + \frac{x^4}{216} + o_0(x^4)\right)$$

On ne garde que les termes d'ordre inférieur ou égal à 3 :

$$f(x) = -\frac{x}{6} - \frac{x^3}{360} + o_0(x^3)$$

$$f(x) = -\frac{x}{6} - \frac{7x^3}{360} + o_0(x^3)$$

Exercice 2

$$1) f(x) = \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\sin(x) - x}$$

$$\text{or } \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)$$

$$\text{et } \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^3)$$

$$\text{donc } f(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3) - x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^3) \right) \right) \times \frac{1}{x - \frac{x^3}{6} - x + o_0(x^3)}$$

$$f(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{2} + o_0(x^3) \right) \times \frac{1}{\frac{x^3}{6} + o_0(x^3)}$$

$$f(x) = \frac{-\frac{2x^3}{6} + o_0(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o_0(x^3)}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$$

$$2) f(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = \exp \left(\frac{1}{x} \ln \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) \right)$$

$$\text{or } \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3) \quad \text{donc } f(x) = \exp \left(\frac{1}{x} \ln \left(\frac{x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)}{x} \right) \right)$$

$$f(x) = \exp \left(\frac{1}{x} \ln \left(1 - \frac{x^2}{6} + o_0(x^3) \right) \right)$$

$\rightarrow 0 \text{ qd } x \rightarrow 0$

$$\text{or } \ln(1+u) = u + o_0(u)$$

$$\text{donc } f(x) = \exp \left(\frac{1}{x} \times \frac{-x^2}{6} + o_0(x^2) \right)$$

$$f(x) = \exp \left(\frac{-x}{6} + o_0(x^2) \right)$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^0 = 1$$

$$3) f(x) = \frac{\sin(x) - x}{\tan(x) - x}$$

$$\text{or } \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)$$

$$\text{donc } f(x) = \frac{-\frac{x^3}{6} + o_0(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o_0(x^3)} = \frac{-\frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o_0(x^3)}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2}$$

$$4) f(x) = \frac{\cos(x) - \exp(x^2)}{x \tan(x) - x^2}$$

$$\text{or } \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^3)$$

$$\exp(x) = 1 + x + o_0(x)$$

$$\text{donc } \exp(x^2) = 1 + x^2 + o_0(x^3)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)$$

$$\text{donc } f(x) = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^3) - (1 + x^2 + o_0(x^3))}{x \times \left(x + \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)\right) - x^2}$$

$$f(x) = \frac{-\frac{3}{2}x^2 + o_0(x^3)}{\frac{x^4}{3} + o_0(x^3)}$$

$$f(x) = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}} \times \frac{x^2 + o_0(x^3)}{x^4 + o_0(x^3)} = \frac{-9}{2} \times \frac{1}{x^2} + o_0(x^3)$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$5) f(x) = \frac{\ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}$$

changement de variable : $t = x - 1$ alors $x \rightarrow 1 \Rightarrow t \rightarrow 0$
 $x = t + 1$

$$f(t) = \frac{\ln(t+1)}{t^2} - \frac{1}{t}$$

$$\text{or } \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o_0(t^2)$$

$$\text{donc } f(t) = \frac{t}{t^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{t^2} \right) - \frac{1}{t} + o_0(t^2) = -\frac{1}{2} + o_0(t^2) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{t \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$$

Exercice 3

1) Soit $f(x) = \exp(x) \quad \forall m \in \mathbb{Z}, m \geq 0 \quad f^{(m)}(x) = \exp(x) = f(x)$

On applique la formule de Taylor-Lagrange entre 0 et 1,

sachant que $\forall m \in \mathbb{Z}, m \geq 0 \quad (1-0)^m = 1^m = 1$

On a :

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

soit

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{f(\xi)}{(n+1)!}$$

On pose $\theta_n = f(\xi)$ et on retrouve donc bien la formule

$$e = 1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i!} \right) + \frac{\theta_n}{(n+1)!}$$

2) Par l'absurde.

Supposons e rationnel. Alors $\exists m \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}^*$ tq $e = \frac{m}{n}$

c'est-à-dire que $\frac{m}{n} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \dots$

$$\text{donc } n! \cdot \frac{m}{n} = \underbrace{(n-1)! \cdot m}_{\substack{\text{entier} \\ \uparrow \\ \in \mathbb{Z} \\ \text{donc entier}}} = \underbrace{n! + n! + \frac{1}{2} + \dots + 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots}_{\text{entier}}$$

$$< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots$$

$$< \frac{1}{n} < 1$$

Il s'agit donc d'une fraction

On obtient que le produit de deux entiers est égale à la somme d'un entier et d'une fraction, ce qui est une contradiction.

Donc e n'est pas rationnel.

Exercice 4

$f_n(x) = (x^2 - 1)^n$ est un polynôme de degré n .

$g(x) = x^2 - 1$ admet deux racines -1 et 1 d'ordre n

donc $\forall k \in [0, \dots, n-1]$ on a $g^{(k)}(-1) = g^{(k)}(1) = 0$

Donc chaque facteur de $f_n(x)$ s'annule en ± 1 .

Montrons par récurrence que $f_n^{(k)}$ s'annule au moins 4 fois dans $[-1, 1]$.

initialisation: $k=0$ $f_n(x) = x^2 - 1$ s'annule 2 fois donc plus que 0 fois.

OK

hérédité: On suppose que $f^{(n)}(x)$ s'annule au moins n fois sur $[-1, 1]$.

Montrons que $f^{(n+1)}(x)$ s'annule au moins $n+1$ fois sur $[-1, 1]$.

Il existe au moins n racines pour $f^{(n)}(x)$, dont -1 et 1 .

$$\text{On a } f^{(n)}(-1) = f^{(n)}(1) = 0$$

Comme $f^{(n)}(x)$ est continue (car $f_n(x)$ est un polynôme de classe C^∞)

on peut appliquer le théorème de Rolle sur chaque intervalle

$[-1, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, 1]$ où les $\{x_1, \dots, x_n\}$ sont les autres racines de $f^{(n)}(x)$.

Il y a $n+1$ intervalles de ce type.

Donc $f^{(n+1)}(x)$ s'annule au moins $n+1$ fois dans $[-1, 1]$.

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion: $f^{(n)}$ admet n racines dans $[-1, 1]$.