2). $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 2

On a : $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

Donc : $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \left(2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{2}}$

On met $\sqrt{2}$ en facteur :

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

On réutilise le D.L à l'ordre 2 de $\sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16}\right)^2 + o(x^2)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16}\right) - \frac{1}{8}\cdot\frac{x^2}{16} + o(x^2)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(1 + \frac{x}{8} - \frac{5x^2}{128}\right) + o(x^2)$$

En développant la racine :

$$\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}x}{8} - \frac{5\sqrt{2}x^2}{128} + o(x^2)$$