Mobilité (M2 IMPAIRS) **Examen** 21 mars 2022

Justifier proprement vos réponses ; vous ne recevrez pas tous les points pour une réponse correcte sans justification. On peut énoncer des résultats du cours sans les démontrer. Les documents du cours sont autorisés. Les appareils électroniques sont interdits. Le document fait 3 pages et contient 5 exercices.

Exercice 1. Allocation de fréquences

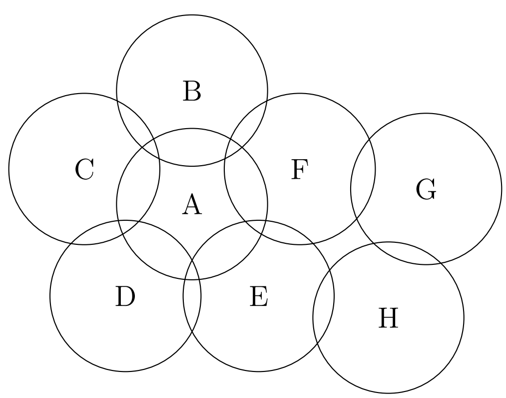
Huit balises d'émission radio vont être placées sur des îles du Pacifique Sud afin de surveiller l'activité sismique. Chacune de ces balises va émettre en continu sur une fréquence particulière. La portée en émission de chaque balise est de 130 km. Il faut déterminer sur quelle fréquence chacune de ces balise va émettre, sachant que seulement cinq fréquences $f_1, \ldots, f_5$ sont disponibles.

La problématique sous-jacente est l'identification des balises par un opérateur muni d'un récepteur, qui se déplacerait dans la région en question (par exemple en bateau ou en avion) pour faire des relevés. En vue d'identifier les signaux reçus sans ambiguïté, l'affectation des fréquences aux balises doit être telle que, quel que soit l'endroit où l'opérateur se trouve dans la région, il sache quelles balises ont envoyé les signaux qu'il reçoit. Autrement dit, si à un endroit donné il reçoit deux signaux sur les fréquences f_i et f_j, il doit pouvoir déduire quelle balise a émis sur la fréquence f_i, et quelle balise a émis sur la fréquence f_j afin de pouvoir interpréter les signaux reçus. Bien sûr pour cela on suppose que l'opérateur en question :

— connaît l'implantation géographique précise des balises
— connaît l'affectation des fréquences aux balises
— sait à tout moment à quel endroit de la région il se trouve (via disons un dispositif de type GPS)

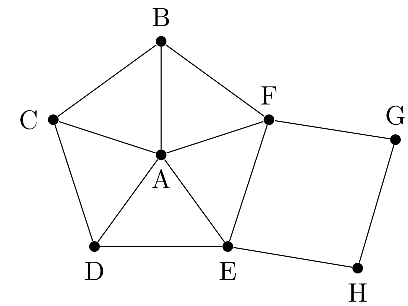
Le but est donc d'allouer les fréquences aux balises de sorte à ce que deux balises proches ne puissent pas être confondues par l'opérateur. Comme il y a huit balises et seulement cinq fréquences disponibles, alors nécessairement certaines balises utiliseront la même fréquence, ce qui ne posera aucun problème si ces balises sont suffisamment éloignées. L'utilisation des fréquences est gérée par une agence à qui on achète le droit d'utiliser la fréquence. Chaque fréquence coûte 100 000 euros, et ce que cette fréquence soit allouée à une balise ou plusieurs. L'enjeu est donc non seulement d'allouer les fréquences aux balises, mais de tenter de minimiser le coût d'achat des fréquences.

Les données du problème sont regroupées dans la figure ci-dessous. Chaque balise est représentée par une lettre avec sa zone de portée (un disque de rayon 130 km). L'utilisation d'une fréquence coûte 100 000 euros, que cette fréquence soit utilisée par une seule balise ou plusieurs.



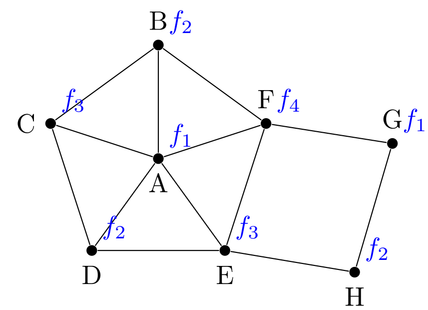
Question 1. Modéliser cette situation comme un problème de coloration de graphes. Justifier.

Soit G le graphe dont les sommets sont les 8 balises, et les arêtes correspondent aux paires de balises qui sont à distance inférieure à 260 km. Une coloration de G correspond à une affectation de fréquences aux balises. On obtient alors le graphe suivant :



Question 2. Donner le coût minimum d'une allocation de fréquences ainsi qu'une allocation optimale. Justifier.

Le nombre chromatique de G est de 4 : une 4-coloration est donné ci-dessous :



Il n'y a pas de 3-coloration car le sous-graphe induit par $\{A, B, C, D, E, F\}$ est 4-chromatique (sommet A est adjacent à tous les sommets du cycle impair B,C,D,E,F). Le coût minimum est donc de 400 000 euros.

Exercice 2. Tour des Cyclades

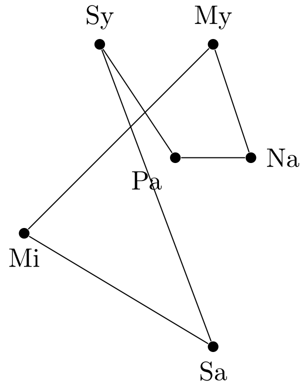
Pour célébrer l'obtention de votre master, vous allez faire un voyage en voilier dans les Cyclades (un archipel de Grèce) cet été. Vous allez louer un voilier à l'île de Syros et ensuite vous souhaitez faire escale aux îles de Milos, Mykonos, Naxos, Paros et Santorin (pas forcément dans cet ordre) avant de retourner à Syros. Le tableau ci-dessous indique les distances (en milles nautiques) entre les différentes îles.

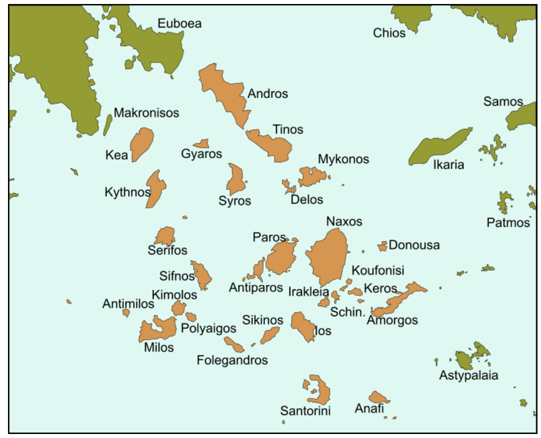
	Milos	Mykonos	Naxos	Paros	Santorin	Syros
Milos	$\times$	70	59	52	65	49
Mykonos	70	$\times$	24	27	74	25
Naxos	59	24	$\times$	16	54	31
Paros	52	27	16	$\times$	67	23
Santorin	65	74	54	67	$\times$	74
Syros	49	25	31	23	74	$\times$

Pour trouver le meilleur itinéraire, vous utilisez l'heuristique Nearest-Neighbour vue dans le cours de Mobilité : à chaque étape, aller à l'île non-visitée la plus proche.

Question 1. Quel est l'itinéraire trouvé par l'heuristique Nearest-Neighbour ?

Syros → Paros → Naxos → Mykonos → Milos → Santorin → Syros.



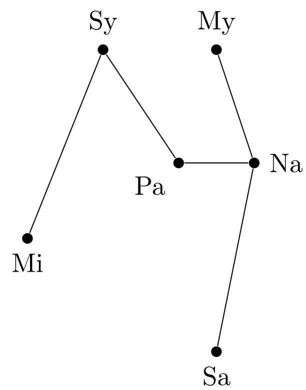


Non satisfait avec la solution trouvée, vous décidez d'utiliser l'algorithme de Christofides pour trouver un meilleur itinéraire.

Soit G le graphe complet à six sommets, dont les sommets correspondent aux îles, et le poids de chaque arête correspond à la distance entre les îles. (*Il n'est pas nécessaire de le dessiner.*)

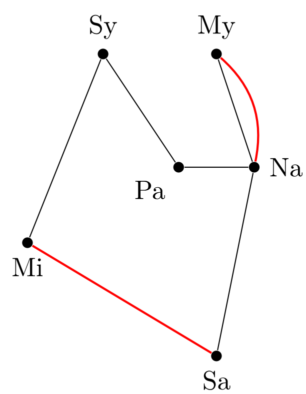
Question 2. Trouver un arbre couvrant de poids minimum de G. Quel algorithme avez-vous utilisé ?

On utilise l'algorithme de Kruskal ou de Prim. Voici l'arbre trouvé :



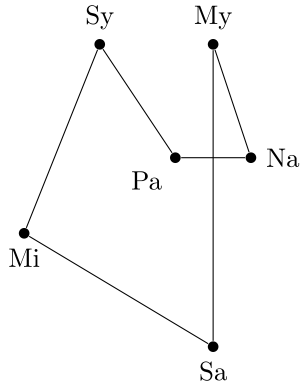
Question 3. Trouver (à la main) un couplage M de poids minimum dans G tel que $G + M$ est eulérien.

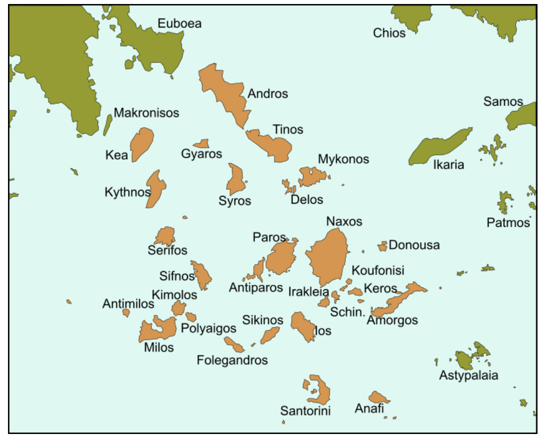
Les arêtes de M sont indiquées en rouge :



Question 4. Déduire un itinéraire pour votre voyage.

Syros → Paros → Naxos → Mykonos → Santorin → Milos → Syros





Exercice 3. Colonie de vacances

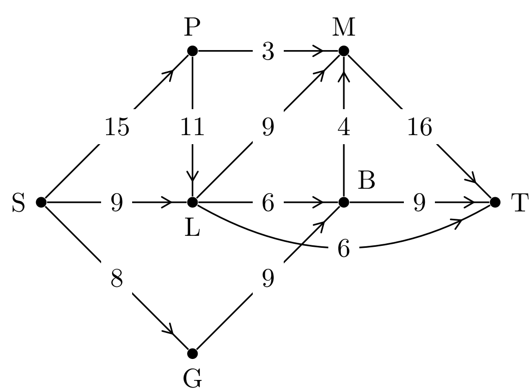
Vous devez organiser une colonie de vacances partant de Strasbourg et à destination de Toulouse. Pour des raisons financières, vous avez décidé de transporter les 30 enfants sous votre responsabilité par bus. Hélas, ayant commencé l'organisation de ce voyage un peu tardivement, il n'y a plus de bus direct entre Strasbourg et Toulouse, il faudra donc faire des changements dans certaines villes. De plus, il ne reste que peu de places sur l'ensemble du réseau. Le tableau suivant résume le nombre de places restantes pour les différents bus :

Arrivée / Départ	Paris	Lyon	Montpellier	Bordeaux	Genève	Toulouse
Strasbourg	15	9	×	×	8	×
Paris	×	11	3	×	×	×
Lyon	×	×	9	6	×	6
Montpellier	×	×	×	×	×	16
Bordeaux	×	×	4	×	×	9
Genève	×	×	×	9	×	×

L'objectif est de savoir s'il est possible de transporter tous les enfants de Strasbourg jusqu'à Toulouse par bus sans louer de minivans pour certaines parties du trajet.

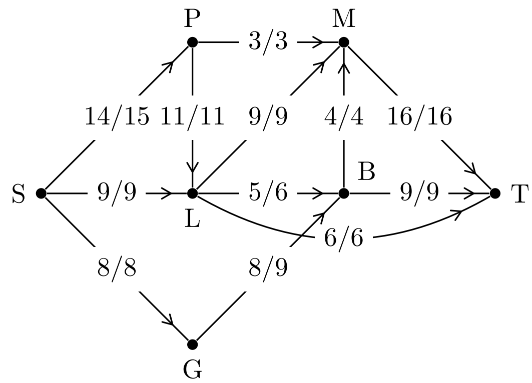
Question 1. Modéliser ce problème comme un problème de graphe et donner le graphe associé.

On peut représenter le problème par un graphe orienté. Les sommets représentent les villes, et un arc de u vers v représente un bus de u vers v. La capacité de chaque arc représente le nombre de places restantes dans chaque bus. On cherche alors à trouver un flot maximum (entier) de S à T dans le réseau suivant :



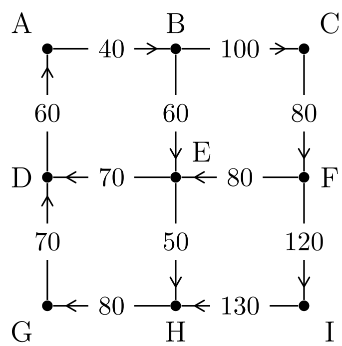
Question 2. Résoudre ce problème à l'aide d'un algorithme vu dans le cours (en donner le nom).

En appliquant l'algorithme de Ford–Fulkerson, on trouve un flot maximum de valeur 31. Il est donc possible de transporter tous les enfants (et vous même) de Strasbourg à Toulouse.



Exercice 4. **Livraison de colis**

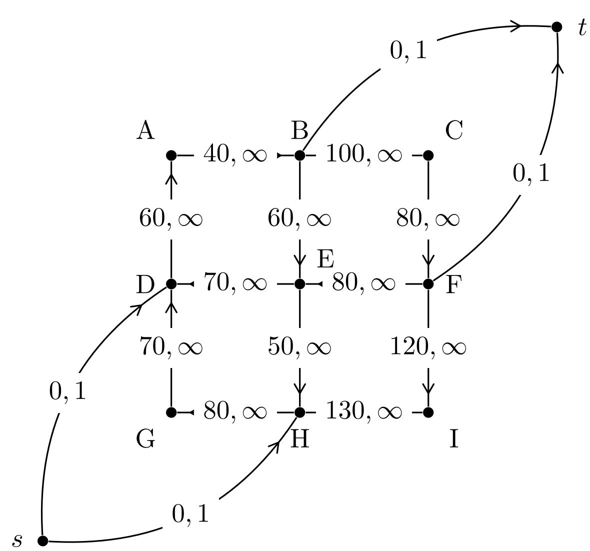
Un livreur doit partir d'un dépôt, livrer des colis dans chaque rue et revenir au dépôt. Toutes les rues de la ville sont à sens unique, et sont représentées par les arcs du graphe orienté G ci-dessous. Les nombres sur les arcs représentent la longueur (en mètres) des rues. Le dépôt est représenté par le sommet D. Le livreur souhaite bien évidemment minimiser la distance totale de son tour.



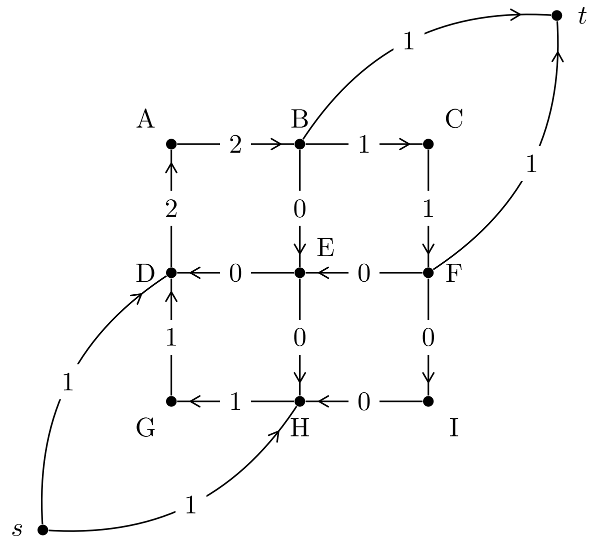
Ce problème peut se réduire au problème de flot maximum de coût minimum dans un réseau R.

Question 1. Dessiner le réseau R pour ce problème. Indiquer le coût et la capacité de chaque arc.

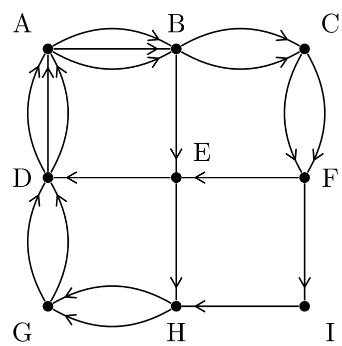
(Dans le réseau ci-dessous, une étiquette x, y sur un arc signifie que le coût de l'arc est de x et que sa capacité est de y.)



Question 2. Trouver un $s-t$ flot maximum f dans R de coût minimum.



Question 3. Construire un super-graphe G^* de G où chaque arc $e \in E(G)$ apparaît $f(e)+1$ fois.

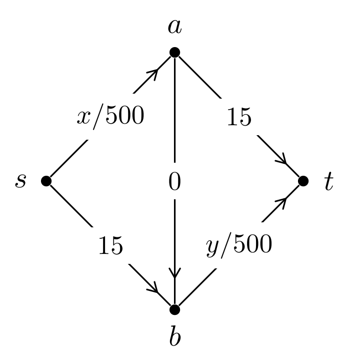


Question 4. Déduire un itinéraire optimal du livreur.

Par exemple : D,A,B,C,F,I,H,G,D,A,B,C,F,E,H,G,D,A,B,E,D

Exercice 5. Trafic dans les réseaux

Considérer le réseau routier ci-dessous. Les étiquettes sur les arcs indiquent le temps de trajet de chaque arc (en minutes), où x et y représentent le nombre de voitures empruntant l'arc (s,a) et (b,t), respectivement.



N voitures souhaitent partir de s et arriver à t. Chaque conducteur choisit l'un des trois itinéraires suivants afin de minimiser son temps de trajet.

1. s, a, t
2. s, b, t
3. s, a, b, t

Question 1. Trouver un équilibre de Nash (combien de voitures prennent l'itinéraire 1, 2 et 3) si $N = 2000$. Quel est le temps de trajet pour chaque voiture ?

> Quand $N = 2000$, à l'équilibre de Nash, tout le monde prend l'itinéraire 3. (s, a, b, t). On a $x = y = 2000$ et le temps de trajet est alors de 8 minutes pour tout le monde.

Question 2. Même question avec $N = 4000$.

> Quand $N = 4000$, à l'équilibre de Nash, tout le monde prend l'itinéraire 3. (s, a, b, t). On a $x = y = 4000$ et le temps de trajet est alors de 16 minutes pour tout le monde.

Question 3. Même question avec $N = 6000$.

> Quand $N = 6000$, à l'équilibre de Nash, 6000 voitures prennent l'itinéraire 1. (s, a, b, t). On a $x = y = 6000$ et le temps de trajet est alors de 24 minutes pour tout le monde.

Question 4. Pour laquelle des trois valeurs de N (2000, 4000 et 6000) serait-il mieux de fermer la route (a, b) ? Justifier.

> Pour $N = 2000$ la fermeture de la route (a, b) augmenterait le temps de trajet (de 8 à 17 minutes). Pour $N = 4000$ la fermeture de la route (a, b) augmenterait le temps de trajet (de 16 à 23 minutes). Pour $N = 6000$ la fermeture va diminuer le temps de trajet : 3000 voitures prendront l'itinéraire 1. (s, a, t) et 3000 voitures prendront l'itinéraire 2. (s, b, t). Le temps de trajet est alors de 21 minutes pour tout le monde (contre 24 minutes avant le fermeture). Il vaut donc mieux fermer la route (a, b) quand $N = 6000$.