Cours du 1er octobre 2020

Mathématiques 3 (IF13E010).

Informations (Contrôle continu).

Le **Partiel (CC2)** sera organisé finalement le samedi 14 novembre prochain de 8h30 à 10h30.

Le **contrôle en TD n°1 (CC1)** prévu la semaine du 5/10 est reporté à la semaine du 12/10 (suivant les groupes le mercredi 16/10 ou le vendredi 18/10). Le programme de ce contrôle sera fixé jeudi en huit.

Rappels.

Notion de développement limité.

Une fonction numérique $y = f(x)$ définie sur l'intervalle $]x_0 - a, x_0 + a[$ $(a > 0)$ admet un développement limité en x_0 à l'ordre n $(n \geq 0)$ s'il existe une fonction polynôme $P(x)$ de degré au plus n telle que

$$f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \epsilon(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_i(x - x_0)^i +$$

$$\ldots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

où la fonction $\epsilon(x)$ admet 0 pour limite si x tend vers x_0 . Si l'on veut utiliser le vocabulaire introduit précédemment, f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 si et seulement s'il existe une fonction polynôme (de degré au plus n) $P(x)$ telle que $f(x) - P(x - x_0)$ soit négligeable devant $(x - x_0)^n$.

Rappels (suite)

Nous avons vu qu'un tel développement était unique lorsqu'il existe. On peut les multiplier par un scalaire, on peut les ajouter, les multiplier, les composer et même les intégrer terme à terme (voir des rappels ci-dessous).

Cas particulier d'existence.

Nous avons vu également que toute fonction dérivable à l'ordre n en un point x_0 , par la formule de Taylor-Young, admet nécessairement un développement limité à l'ordre n en x_0 .

Attention.

Une fonction peut très bien admettre un développement limité à l'ordre n en x_0 SANS ETRE DERIVABLE à l'ordre n (nous avons vu un exemple de fonction admettant un développement limité en 0 à l'ordre 2 sans être dérivable à l'ordre 2 en 0).

Détermination de développements limités.

Existence.

Les fonctions que nous allons étudier sont en général dérivables à tous les ordres en x_0 donc nous utiliserons très souvent cette propriété pour en déduire **l'existence** d'un développement limité en x_0 .

Détermination explicite.

Par contre, il est extrêmement rare de connaître une formule donnant la dérivée n-ème d'une fonction. On n'utilise donc pas **en général** la formule de Taylor-Young pour déterminer la valeur du développement limité.

Développements limités des fonctions classiques.

Exceptions.

Deux exceptions : la fonction exponentielle (en 0 par exemple)

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x) \ .$$

et la fonction x^α (en 1) :

$$(1+x)^\alpha = \ldots$$

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots + \frac{\alpha \times \ldots \times (\alpha - n + 1)}{n!} x^n + x^n \epsilon(x) \ .$$

On parle parfois, pour cette dernière identité, de formule du binôme généralisée. Elle est vérifiée quelque soit la valeur du réel α (non nul ; qu'elle soit entière ou réelle).

Fonctions trigonométriques ou hypergéométriques.

Comme on a $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, on peut utiliser les propriétés de combinaison linéaire des développements limités pour conclure que

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x) \ .$$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x) \ .$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x) \ .$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x) \ .$$

Identités remarquables.

On sait que

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n \ .$$

On peut ré-écrire cette formule comme suit :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + x^n \, \frac{x}{1-x}$$

d'où

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + x^n \epsilon(x) \ .$$

Remarque.

On aurait pu également utiliser la formule précédente (avec $\alpha = -1$).

Application immédiate de la composition.

En substituant $-x$ (resp. x^2 , resp. $-x^2$) dans le développement limité de $1/(1-x)$, on obtient facilement que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \ldots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + \ldots + x^{2n} + x^{2n+1} \frac{x}{1-x^2} \; .$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n+1} \frac{x}{1+x^2} \; .$$

Ces fonctions sont intéressantes car ce sont les dérivées respectives de $\ln(1+x)$, $\mathrm{Argth}(x)$ et $\mathrm{Arctan}(x)$.

Intégration.

Comme on a $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$, on peut écrire

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x) \ .$$

De façon analogue, (leurs fonctions dérivées étant connues)

$$\mathrm{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n}\epsilon(x) \ .$$

$$\mathrm{Argth}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n}\epsilon(x) \ .$$

$$\mathrm{Arcsin}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{1.3.\ldots.(2n-3)\,x^{2n-1}}{2.4.\ldots.(2n-2)(2n-1)} + x^{2n}\epsilon(x)$$

$$\mathrm{Argsh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}1.3.\ldots.(2n-3)\,x^{2n-1}}{2.4.\ldots.(2n-2)(2n-1)} + x^{2n}\epsilon(x) \ .$$

Quotient.

Fonctions Tangente et Tangente hyperbolique.

On a (merci "SAGE") :

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + x^{10}\epsilon(x)$$

$$\mathrm{th}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + x^{10}\epsilon(x)$$

(en principe, on retient les deux premiers termes !)

Remarque.

On constate donc que les coefficients du développement limité de la fonction $\mathrm{Arctan}(x)$ sont connus par une formule mais pas ceux de la fonction $\tan(x)$.

Un ultime exemple.

Soit la fonction $x \mapsto (1+x)^{\ln(2+x)} = \exp(\ln(1+x)\ln(2+x))$. Cette fonction est définie dès que $x > -1$. Elle est également continue et dérivable à tous les ordres sur l'intervalle $]-1, +\infty[$. Donc on sait qu'elle admet un développement limité à tous les ordres en tout point de cet intervalle.

Déterminons son développement limité à l'ordre 3 en 0 . On a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x) .$$

Par ailleurs

$$\ln(2+x) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + x^3\epsilon(x) .$$

Un ultime exemple (suite).

Étudions donc d'abord

$$\ln(1+x)\ln(2+x) =$$

$$\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x)\right)\left(\ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + x^3\epsilon(x)\right) .$$

Nous ne gardons donc que les termes de degré 1 à 3 :

$$\ln(1+x)\ln(2+x) = \ln(2)\,x + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln(2)x^2}{2}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(-\frac{x^3}{8} - \frac{x^3}{4}\right) + x^3\epsilon(x) .$$

Soit $\ln(1+x)\ln(2+x) = \ln(2)\,x + \dfrac{1-\ln(2)}{2}\,x^2 - \dfrac{3}{8}\,x^3 + x^3\epsilon(x)$.

Un ultime exemple (suite).

Comme $\ln(1+x)\ln(2+x)$ tend vers 0 si x tend vers 0 , nous pouvons alors composer avec le développement limité de $\exp(u)$ lorsque u tend vers 0 soit

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + u^3\epsilon(u) \ .$$

Alors

$$(1+x)^{\ln(2+x)} = 1 + \left(\ln(2)\,x + \frac{1-\ln(2)}{2}\,x^2 - \frac{3}{8}\,x^3 + x^3\epsilon(x)\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\ln(2)^2x^2}{2}\left(1 + \frac{1-\ln(2)}{2\ln(2)}\,x\right)^2 + \frac{\ln(2)^3x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

Un ultime exemple (suite).

Finalement

$$(1+x)^{\ln(2+x)} = 1 + \ln(2)\,x + \frac{1-\ln(2)+\ln(2)^2}{2}\,x^2 + \dots$$

$$\dots + \left(-\frac{3}{8} + \frac{\ln(2)(1-\ln(2))}{2} + \frac{\ln(2)^3}{6}\right)\,x^3 + x^3\epsilon(x)\ .$$

Soit

$$(1+x)^{\ln(2+x)} = 1 + \ln(2)\,x + \frac{1-\ln(2)+\ln(2)^2}{2}\,x^2 + \dots$$

$$\dots \frac{-9+12\ln(2)-12\ln(2)^2+4\ln(2)^3}{24}\,x^3 + x^3\epsilon(x)\ .$$

Applications des développements limités.

Comparaison **locale** de fonctions.

Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n $(n \geq 2)$ en x_0 . On pose $x = x_0 + h$ .Donc

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)h + \ldots + a_n h^n + h^n \epsilon(x)$$

où $\epsilon(x)$ tend vers 0 si x tend vers x_0 . Une telle fonction est donc dérivable en x_0 . Son graphe y admet donc une tangente d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. L'écart entre le graphe de la fonction et cette tangente est donc donnée par

$$f(x) - y = -f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + f'(x_0)h + \ldots$$

$$\ldots + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n h^n + h^n \epsilon(x)$$

$$\text{soit } f(x) - y = a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n h^n + h^n \epsilon(x) \text{ .}$$

Comparaison locale (suite).

Supposons tout d'abord que le coefficient a_2 **ne soit pas nul**. Nous pouvons alors écrire

$$f(x) - y = a_2 h^2 + h^2 \epsilon(x) = a_2 h^2 \left(1 + \frac{\epsilon(x)}{a_2}\right) \ .$$

Alors

$$\lim_{x \to x_0} \left(1 + \frac{\epsilon(x)}{a_2}\right) = 1 \ .$$

En particulier, si x est assez proche de x_0 , cette expression est strictement positive et l'expression $f(x) - y$ est donc du signe de a_2 . Bref, si $a_2 > 0$, le graphe de la fonction est situé au dessus de sa tangente et, si $a_2 < 0$, le graphe de la fonction est situé au dessous de sa tangente.

Exemples.

Exponentielle.

On a

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \ .$$

Donc le graphe de l'exponentielle est situé au dessus de sa tangente $y = 1 + x$ au voisinage de 0 .

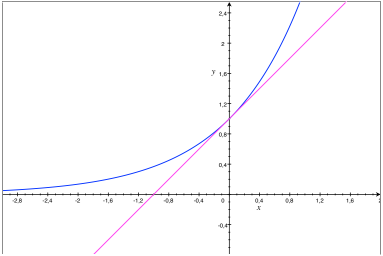

FIGURE – Position du graphe vis à vis de la tangente en 0 .

Exemples (suite).

Logarithme.

On a

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + h^2\epsilon(x) \ .$$

Donc le graphe du logarithme est situé au dessous de sa tangente $y = x - 1$ au voisinage de 1 .

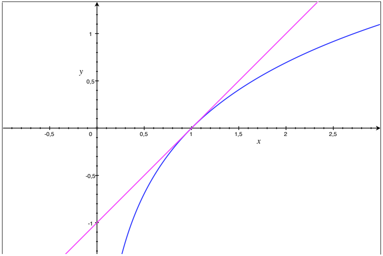

FIGURE – Position du graphe vis à vis de la tangente en 0 .

Comparaison locale (suite).

Supposons maintenant que le coefficient a_2 **soit nul** mais que le coefficient a_3 ne le soit pas. Nous pouvons alors écrire

$$f(x) - y = a_3 h^3 + h^3 \epsilon(x) = a_3 h^3 \left(1 + \frac{\epsilon(x)}{a_3}\right) \ .$$

Alors $\lim_{x \to x_0} \left(1 + \frac{\epsilon(x)}{a_3}\right) = 1$. En particulier, si x est assez proche de x_0 , cette expression est strictement positive et l'expression $f(x) - y$ est donc du signe de $a_3 h^3$. Bref, si $a_3 > 0$, le graphe de la fonction est situé au dessous de la tangente si $x < x_0$ puis au dessus de sa tangente si $x < x_0$. Si $a_2 < 0$, le graphe de la fonction est situé d'abord au dessus de sa tangente puis en dessous. On dit que le graphe traverse sa tangente et on parle de point d'inflexion.

Exemples (suite).

Sinus.

On a

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^4\epsilon(x) \ .$$

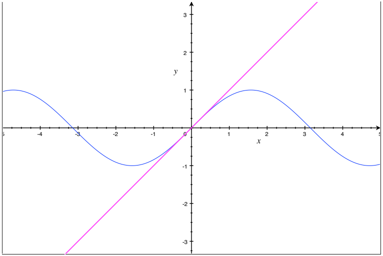

FIGURE – Position du graphe vis à vis de la tangente en 0 .

Comparaison locale (cas général).

Position d'une courbe en un point vis à vis de la tangente en ce point.

Supposons que la fonction f admette en $x = x_0$ un développement limité à un ordre suffisant pour que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + (x - x_0)^p \epsilon(x)$$

où l'on suppose que a_p est le premier coefficient non nul (pour $p \geq 2$). Comme, dans cette situation, on sait que l'on peut prolonger par continuité f en posant $a_0 = f(x_0)$ et que f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = a_1$ on voit que le graphe de f admet la droite $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ comme tangente aussi

$$f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) = (x - x_0)^p \left(a_p + \epsilon(x)\right) \ .$$

Comparaison locale (cas général, suite).

Position d'une courbe en un point vis à vis de la tangente en ce point (suite).

Si p est pair, on voit donc (puisque $\epsilon(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0) que cet écart est toujours du signe de a_p . On dit que le graphe de f (au voisinage de x_0) ne traverse pas la tangente. Si p est impair, on voit au contraire que cet écart change de signe suivant que x est ou non supérieur à x_0 . On dit que le graphe de f (au voisinage de x_0) traverse la tangente.

Extrema local. Cas particulier.

Si la tangente est horizontale ($a_1 = 0$), cela signifie que f admet un minimum ou un maximum local si p est pair. Rappelons que le principe de la démonstration du théorème de Rolle est de montrer qu'en un point où f dérivable atteint ses bornes, la dérivée s'annule. Nous venons donc de trouver une propriété "réciproque".

Autres applications.

Recherche d'équivalent (sur un exemple).

Cherchons un équivalent de $\sin(x) - \ln(1+x)$. Chaque fonction est équivalente à x (lorsque x tend vers 0). Si on les retranche on sait donc que le résultat tendra aussi vers 0 mais on souhaite avoir un équivalent (savoir comment le résultat tend vers 0). Mais

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^4\epsilon(x) \text{ et } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x) \ .$$

Soit

$$\sin(x) - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + x^3\epsilon(x) \ .$$

Bref

$$\sin(x) - \ln(1+x) \sim_{x\to 0} \frac{x^2}{2} \ .$$

Applications des développements limités : étude à l'infini.

Développement asymptotique.

La notion de développement limité est adaptée à l'étude locale d'une fonction (lorsque la variable x approche x_0). Comment utiliser ces résultats lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$?

Notation.

Si x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, $1/x$ tend vers 0^+ ou 0^- . De même, si $|x|$ tend vers $+\infty$, $h = 1/x$ tend vers 0 . On posera donc régulièrement dans cette section $h = 1/x$.

Étude à l'infini (suite).

Définition

Soit $y = f(x)$ une fonction numérique définie sur $[A, +\infty[$ ou $]-\infty, -A]$. On dit que f admet un développement asymptotique en $+\infty$ (ou $-\infty$) à l'ordre n ($n \geq 0$) s'il existe des coefficients $a_{-p}, \dots, a_{-1}$ et une fonction polynôme $P(x)$ de degré au plus n telle que

$$f(x) = a_{-p}h^{-p} + \dots + a_{-1}h^{-1} + P(h) + h^n\epsilon(x)$$

où la fonction $\epsilon(x)$ admet 0 pour limite si x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Si l'on veut utiliser le vocabulaire introduit précédemment, f admet un développement asymptotique à l'ordre n en x_0 si et seulement si il existe des coefficients $a_{-p}, \dots, a_{-1}$ et une fonction polynôme $P(x)$ telle que $f(x) - \left(a_{-p}h^{-p} + \dots + a_{-1}h^{-1} + P(h)\right)$ soit négligeable devant h^n .

Exemple d'étude.

Étudions le comportement de $\sqrt{x^2+x+1}$ lorsque x tend vers l'infini. On commencera par mettre $|x|$ en facteur (histoire de traiter les cas $+\infty$ et $-\infty$ en même temps). Soit donc

$$\sqrt{x^2+x+1} = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

puis on fera un développement limité de la racine carrée en $h = \frac{1}{x}$.
Il est visible que l'on obtient des termes en $|x|^n$ (pour $n \leq 1$).
Nous n'avons donc plus un polynôme en $1/|x|$. On parle donc de développement asymptotique. Terminons :

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

est de la forme $\sqrt{1+h}$ où $h = \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$.

Exemple d'étude (suite).

Or

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}\,h + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}\,h^2 + h^2\epsilon(h)$$

soit

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon(h)\ .$$

Bref

$$\sqrt{x^2+x+1} = |x| + \frac{|x|}{2x} + \frac{3|x|}{8x^2} + \frac{1}{x}\epsilon(h)\ .$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, on a donc

$$\sqrt{x^2+x+1} = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \frac{1}{x}\epsilon(h)\ .$$

Bref la droite $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe en $+\infty$ (la courbe se situant au dessus).

Exemple d'étude (suite).

Rappelons qu'une droite asymptote est une droite d'équation $y = ax + b$ telle que $f(x) - ax - b$ tende vers 0 si x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Par ailleurs le positionnement sera donné par le signe du premier terme non nul négligé. Ici on a donc

$$\sqrt{x^2 + x + 1} - x - \frac{1}{2} = \frac{3}{8x}\left(1 + \frac{8}{3}\epsilon(h)\right) \ .$$

Par contre, si x tend vers $-\infty$, on a

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + \frac{1}{x}\epsilon(h) \ .$$

Donc, cette fois, la droite $y = -x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe en $-\infty$ (la courbe se situant toujours au dessus).

Exemple d'étude (suite).

Voici ce que donne le graphe de cette fonction :

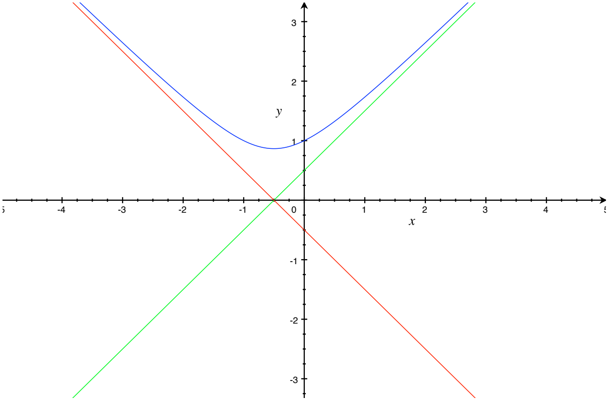

FIGURE – Un exemple d'asymptote(s) oblique(s).

Autre exemple d'étude.

Cherchons à comparer les fonctions $\sqrt{x^2+x+1}$ et $\sqrt[3]{x^3+x+1}$ en $+\infty$. Nous allons opérer de façon identique. On sait que, d'après ce qui précède,

$$\sqrt{x^2+x+1} = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \frac{1}{x}\epsilon(h) \ .$$

Mais, de façon analogue,

$$\sqrt[3]{x^3+x+1} = x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \dots$$

$$\dots + x\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)^2+h^4\epsilon(h)\right)$$

Autre exemple d'étude (suite).

donc

$$\sqrt[3]{x^3+x+1} = x + \frac{1}{3x} + \frac{1}{x}\epsilon(h)\ .$$

Ainsi

$$\sqrt[3]{x^3+x+1} - \sqrt{x^2+x+1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{24x} + \frac{1}{x}\epsilon(h)\ .$$

Cette courbe a donc, quant à elle, une asymptote horizontale en $+\infty$ et elle se situe en dessous. Vous pourrez étudier en exercice ce qui se passe en $-\infty$. Mais, on a (en utilsant ce qui précède)

$$\sqrt[3]{x^3+x+1} - \sqrt{x^2+x+1} = \dots$$

$$\dots x + \frac{1}{3x} + \frac{1}{x}\epsilon(h) - \left(-x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + \frac{1}{x}\epsilon(h)\right) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{x}\epsilon(h)\ .$$

Autre exemple d'étude (suite).

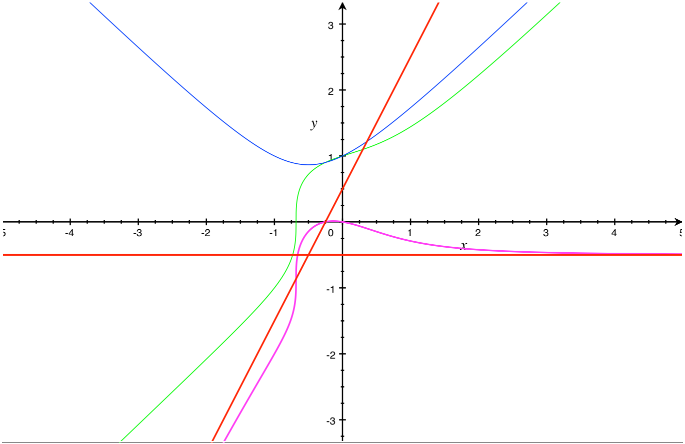

FIGURE – Un second exemple d'asymptote(s).

Développements asymptotiques généralisés.

Il est clair que seules des fonctions très particulières sont comparables à un polynôme au voisinage d'un point. Il est facile de trouver des fonctions qui ne leur sont pas comparables.
Par exemple on sait que $x^n \ln(x)$ tend vers 0 quelque soit n strictement positif lorsque x tend vers 0 . De la même façon, $\exp(x)$ tend vers l'infini plus vite que tout polynôme.
On est donc parfois amené à effectuer des développements comportant des termes plus généraux que les monômes x^n . On parle alors de développement asymptotique généralisé.
Nous ne traiterons qu'un exemple.

Exemple.

La fonction $\ln(1+x+x^2)$ est définie sur $\mathbb{R}$ comme il est facile de le voir. On cherche à étudier son comportement à l'infini. Comme ci-dessus on commencera par mettre en facteur $|x|$ d'où l'expression :

$$\ln(1+x+x^2) = 2\ln(|x|) + \ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) .$$

Puis on utilisera le théorème de composition pour aboutir à un développement. A l'ordre 4 par exemple, on obtient

$$\ln(1+x+x^2) = 2\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{2}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} + \frac{\epsilon(x)}{x^4} .$$

Application.

Soit $y = f(x)$ une fonction numérique définie sur $[A, +\infty[$ ou $]-\infty, -A]$ admettant un développement asymptotique en $+\infty$ (ou $-\infty$) à l'ordre n ($n \geq 0$) c'est à dire qu'il existe des coefficients $a_{-p}, \ldots, a_{-1}$ et une fonction polynôme $P(x)$ de degré au plus n telle que

$$f(x) = a_{-p}h^{-p} + \ldots + a_{-1}h^{-1} + P(h) + h^n\epsilon(x)$$

où la fonction $\epsilon(x)$ admet 0 pour limite si x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Alors on dira que la courbe

$$\gamma(x) = a_{-p}x^p + \ldots + a_{-1}x + a_0$$

(où a_0 est le coefficient constant de P) est asymptote à la courbe $y = f(x)$. En effet $\lim_{x \to +\infty} f(x) - \gamma(x) = 0$. On retrouve le cas des droites asymptotes lorsque $p = 1$ et $f(x) - a_{-1}x - a_0$ tend vers 0 si x tend vers $+\infty$.

Example.

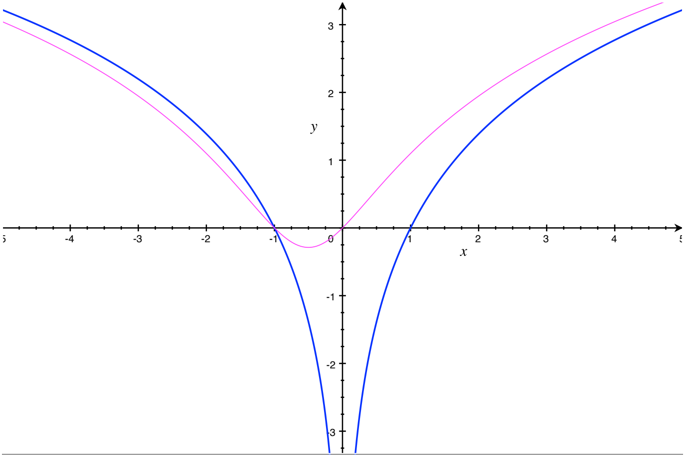

FIGURE – Un exemple de courbes asymptotes.