RUNSER Laure

02.10.2020

Maths TD 3

Partie 1 Exercice 3

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$ car $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ et $x^3 \to 0$

donc $\boxed{f \text{ continue en } 0}$. ($f$ est aussi clairement continue pour $x \neq 0$; donc f continue sur $\mathbb{R}$.

2) $f'(0) := \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

Regardons si la limite existe

$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ on a $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

donc $\boxed{f'(0) = 0}$

3) Pour $x \neq 0$, on peut calculer la dérivée de f (produit de fct dérivables sur $\mathbb{R}^*$)

$$f'(x) = 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^3 \times \frac{-1}{x^2} \times -\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$

4) Un DL de f à l'ordre 2 est de la forme suivante : $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$

Or remarquons que $f(x) = o(x^2)$ car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Donc $f(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + o(x^2)$

Donc le DL est $\boxed{f(x) = 0 + o(x^2)}$

Remarque $f'(x)$ n'est pas dérivable en 0, c'est-à-dire que $f''(0)$ n'existe pas

MAIS on peut qd même écrire un DL.

Partie 2

Exercice 1

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$$

1) Mq f est monotone $\forall x \in [0;+\infty[$

On calcule

$$f'(x) = \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-(1+x)}{(1+x)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{x}{(1+x)^2} < 0 \ \forall x > 0}$$

Donc f est $\boxed{\text{strictement décroissante}}$ sur $[0;+\infty[$ car $f'(x) \leq 0$.

2) Par conséquent $\forall x > 0$ $f(x) < f(0) = 0$

Donc $\frac{x}{x+1} - \ln(1+x) < 0$

donc $\boxed{\frac{x}{x+1} < \ln(1+x)}$

Exercice 3

a) f dérivable de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ tq $\forall x \in]a,b[$ $\alpha < f'(x) < \beta$

mq $x < y \Rightarrow \alpha(y-x) < f(y) - f(x) < \beta(y-x)$

Théorème de Rolle et TAF

* f dérivable sur $]a,b[$ alors $\exists c \in]a,b[$ tq $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$\Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Donc par le th. des accroissements finis sur $]x,y[\subset]a,b[$

$\exists c \in]x,y[$ tq $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

comme $\alpha < f'(c) < \beta \Rightarrow \boxed{\alpha(y-x) < f(y) - f(x) < \beta(y-x)}$

b) 1) Mq $\forall x>0 \quad 1 < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$

On regarde les dérivées

(on borne la limite d'une fct par une autre)

Partie 3

Exercice 2

on rappelle $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

a) $g(x) = \ln(|x+1|) - \ln(|x-1|) - \frac{1}{x}$

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{1}{x^2}$$

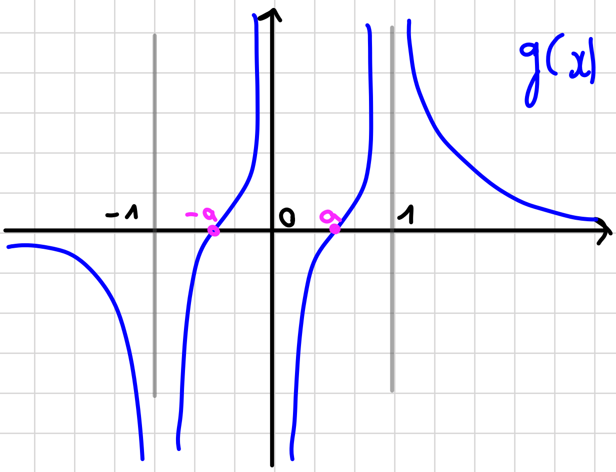
$$= -\frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x^2} = \frac{-2x^2+x^2-1}{x^2(x^2-1)} = \boxed{-\frac{x^2+1}{x^2(x^2-1)}}$$

Le signe de $g'(x)$ est déterminé par $-(x^2-1)$.

Si $x^2>1 \quad g'(x)<0$

Si $x^2<1 \quad g'(x)>0$

x	$-\infty$		-1		0^- | 0^+		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	0



05.10.2020

b) $f(x) = (x^2-1)\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

$f(x) = (x^2-1)(\ln|1+x| - \ln|1-x|)$

$f'(x) = 2x(\ln|1+x| - \ln|1-x|) + (\cancel{x^2-1})\underbrace{\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x-1}\right)}$

$\ln|1-x| = \ln|x-1|$

dérivée : $\frac{1}{x-1} \times (x-1)'$

$= \frac{1}{x-1}$

$= \frac{(1-x)-(1+x)}{(1+x)(x-1)} = \frac{-2x}{\cancel{x^2-1}}$

$= 2x(\ln|1+x| - \ln|1-x|) - 2$

$(x\neq 0) \quad = 2x\left(\ln|1+x| - \ln|1-x| - \frac{1}{x}\right) = \boxed{2x\, g(x)}$

La fonction g admet deux zéros en a et $-a$ avec $a \in]0, 1[$

x	$-\infty$		$-a$		0		a		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

$$f(x) = (x^2-1)\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \qquad x \to 0 \qquad f(x) = (-1).\ln(1) = (-1).0 = 0$$

qd $x \to +\infty$

$$= (x^2-1)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = (x^2-1)\ln\Big(\underbrace{1+\frac{2}{x-1}}_{\frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+2}{x-1} = 1+\frac{2}{x-1}}\Big) \underset{+\infty}{\sim} (x^2-1).\frac{2}{x-1} = 2(x+1)$$

$f(x)$ est une fonction impaire

(donc $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$)

c) En $\underline{x=0}$ $\quad f(0) = (-1).\ln(1) = (-1).0 = 0$

$f'(0) = -2$ [voir bas de la page précédente)

$\boxed{y = -2x \text{ est la tangente}}$ en 0

On veut déterminer la position du graphe de f par rapport à la tangente

$$f(x) - (-2x) = (x^2-1)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + 2x$$

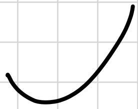
$$f''(x) = 2\left(\ln|x+1| - \ln|x-1|\right) + 2x\,\frac{-2}{x^2-1} \quad \text{(voir calcul de } f'(x)\text{)}$$

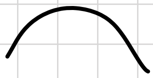
$$= 2\left(\ln|x+1| - \ln|x-1| - \frac{2x}{x^2+1}\right)$$

comme on est au voisinage de 0, on peut supposer que $x \in]-1, 1[$.

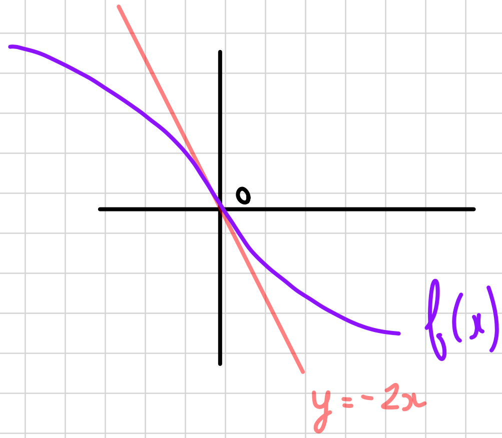
$$= 2\left(\ln(x+1) - \ln(1-x) - \frac{2x}{x^2+1}\right)$$

pour $x > 0$ $\quad 1 + x > 1 - x \quad \ln(1+x) > \ln(1-x)$

donc $\boxed{f''(x) > 0}$ donc f convexe 

pour $x < 0$ $\quad \boxed{f''(x) < 0}$ donc f concave 

Donc le graphe au voisinage de 0 :



d) $f'(x) = \overbrace{2x}^{\to 2}\left(\overbrace{\ln|x+1|}^{\to \ln(2)} - \overbrace{\ln|x-1|}^{\to -\infty}\right) - 2 \quad \forall x \neq 0$

en $x = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to 1} f'(x) = +\infty$

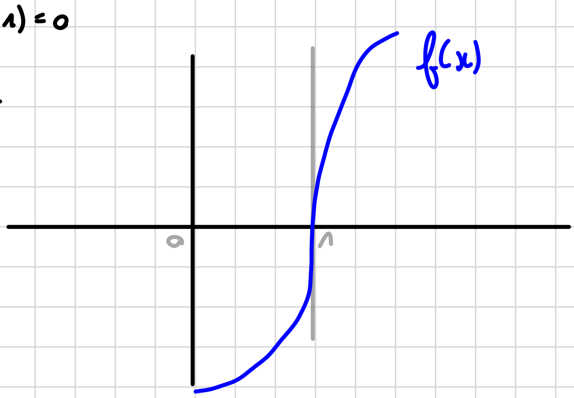
On pose $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2-1)\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$

$\to (x^2-1)(\ln|x+1| - \ln|x-1|) = \underbrace{(x^2-1)\ln|1+x|}_{\substack{\to 0 \cdot \ln(2) \\ = 0}} \underbrace{-(x^2-1)\ln|x-1|}_{\to 0}$

chgt de variable
$x = 1+t$ pour $t \to 0$
$(2t+t^2)\ln|t| \to 0$

On pose $f(1) = 0$

D'où :



e) $f(x) = (x^2-1)\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

$f(x)$ impaire donc c'est juste le contraire en $-\infty$

$y = ax + b$ est une asymptote de $f(x)$ en $+\infty$

si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax+b) = 0$

$$f(x) = (x^2-1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

On suppose $x > 1$

$$f(x) = (x^2-1)\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$$

$$= (x^2+1)\left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x-1}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= 2x+2-\underbrace{(x^2-1)\frac{2}{(x-1)^2}}_{=2\frac{x+1}{x-1} = 2+\frac{4}{x-1}} + \underbrace{(x^2-1)\cdot o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 0}$$

$$= 2x - \underbrace{\frac{4}{x-1}}_{\to 0} + o_{+\infty}(1) = 2x + o_{+\infty}(1)$$

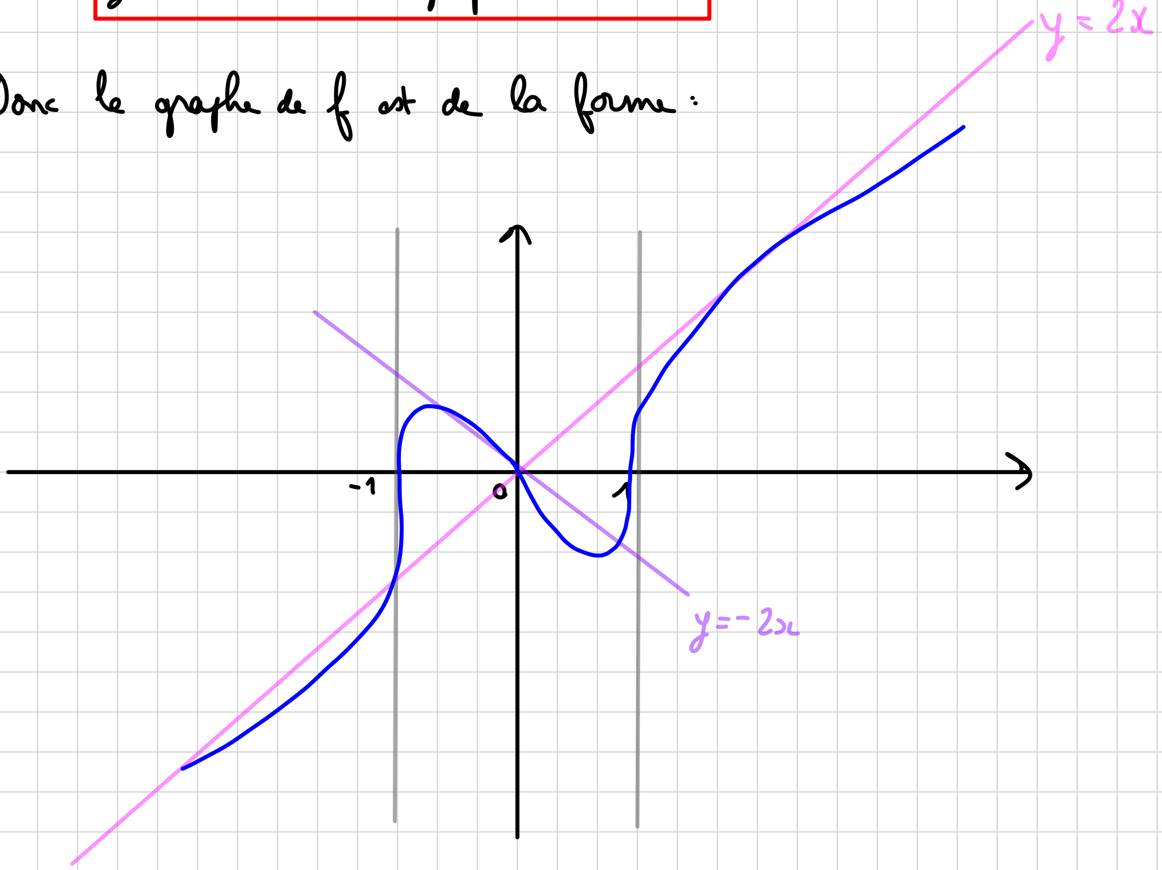
Donc $\boxed{y = 2x \text{ est une asymptote en } +\infty}$

$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2$

$\left(\frac{2}{x-1}\right)^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{x^2}$

donc $o_{+\infty}\left(\left(\frac{2}{x-1}\right)^2\right) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

b) Donc le graphe de f est de la forme :



Partie 4

Exercice 3

Formule de Taylor-Young $f(a+h)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}h^i+\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}h^{n+1}+o_a(h^{n+1})$

a) $f(x)=e^x \quad f'(x)=e^x$ et $f^{(n)}(x)=e^x$ et $f^{(n)}(0)=e^0=1$

donc $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o_0(x^3)$

b) $f(x)=\ln(1+x)$

$f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$ $\qquad f^{(3)}(x)=(-1)(-2)(x+1)^{-3}$

$f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}=(-1)(1+x)^{-2}$

$f(0)=\ln(1)=0 \quad f'(0)=1 \quad f''(0)=1 \quad f^{(3)}(0)=2$

Donc

$\ln(1+x)=0+1.x+\frac{-1}{2}x^2+\frac{2}{6}x^3+o_0(x^3)$

$=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o_0(x^3)$

Donc pour $\ln(x)$ en 1

$\ln(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+o_0(x^3)$

On a donc

$\frac{\ln(1-x)-x}{x^2}=\frac{\cancel{x}-\frac{\cancel{x^2}}{2}+o(x^2)\cancel{-x}}{\cancel{x^2}}=\boxed{\frac{-1}{2}+o_0(1)}$

Partie 4 09.10.2020

Exercice 3 (suite)

3) $f(x) = \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4 \varepsilon(x)$

donc $\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{x} = 1$ et $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$

et $\frac{f(x) - x}{x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{6} - x}{x^3} = \frac{1}{6}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = \frac{1}{6}$

4) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} x^2 + x^3 \varepsilon(x)$

Exercice 3 (suite)

Formule de Taylor-Young

$$f(x) = f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0).x^2}{2} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o_0(x^n) \rightsquigarrow \text{DL en } 0 \text{ à l'ordre } n.$$

1) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o_0(x^n)$

2) $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}x^n + o_0(x^n)$

donc DL de $\ln(x)$ en 1 :

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}(x-1)^n + o_0((x-1)^n)$$

Voir séance précédente

3) $f(x) = \sin(x)$ — $f(0) = 0$

$f'(x) = \cos(x)$ — $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin(x)$ — $f''(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = -\cos(x)$ — $f^{(3)}(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin(x) = f(x)$ — $f^{(4)}(0) = 0$

↳ dérivée périodique de période 4

donc

$\sin(x) = 0 + 1.x + 0.\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)$

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)}$$

alors $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x + o_0(x)}{x} = \boxed{0}$

et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = \boxed{\frac{-1}{6}}$

De même pour $g(x) = \cos(x)$

$g(0) = 1$

$g'(0) = 0$

$g''(0) = -1$

$g^{(3)}(0) = 0$

donc $\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o_0(x^{2n})}$

4) $f(x) = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{1/2}$

Regardons $g(t) = (1+t)^\alpha$ $\qquad g(0) = 1$

$g'(t) = \alpha.(1+t)^{\alpha-1}$ $\qquad g'(0) = \alpha$

$g''(t) = \alpha(\alpha-1)(1+t)^{\alpha-2}$ $\qquad g''(0) = \alpha(\alpha-1)$

$g^{(3)}(t) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+t)^{\alpha-3}$ $\qquad g^{(3)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$

donc $g(t) = (1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2\times 1} t^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3\times 2\times 1} t^3 + \dots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o_0(x^n)$

Rq : Le DL peut être simplifié

- si $\alpha \in \mathbb{N}, \alpha > 0$: $(1+t)^\alpha$ est un polynôme

  Alors $(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} t^k$ où $\binom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))}{k(k-1)(k-2)\cdots\times 1}$

- si $\alpha = -1$: $(1+t)^\alpha = \dfrac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \dots + (-1)^n t^n + o_0(t^n)$

---

donc pour $f(x) = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{1/2}$

chgt de variable : $t = -x^2$ $\qquad f(t) = (1+t)^{1/2}$

$$= 1 + \frac{1}{2} t + o_0(x^3)$$

$$\boxed{f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^3)}$$

comme $t = x^2$
on a $t^2 = x^4 = o_0(x^3)$
donc pas besoin des termes
d'ordre supérieur à 1
pour un DL à l'ordre 3