07.10.21 **LOS TD2**

Exercice 1

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

$\equiv (Q \vee \neg P) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

$\equiv [(\neg P \vee Q) \vee \neg(Q \vee \neg P)] \wedge [(Q \vee \neg P) \vee \neg(\neg P \vee Q)]$

$\equiv \boxed{[(\neg P \vee Q) \vee (\neg Q \wedge P)] \wedge [(Q \vee \neg P) \vee (P \wedge \neg Q)]}$

Exercice 2

a) $(P_1 \wedge Q_1) \vee (P_2 \wedge Q_2)$

$\equiv ((P_1 \wedge Q_1) \vee P_2) \wedge ((P_1 \wedge Q_1) \vee Q_2)$

$\equiv \boxed{(P_2 \vee P_1) \wedge (P_2 \vee Q_1) \wedge (Q_2 \vee P_1) \wedge (Q_2 \vee Q_1)}$

On a plusieurs manières.

b) $\forall$ clause $\mathcal{C}$:
- si $\mathcal{C} \neq$ valide : return false

return true

$\Leftrightarrow \forall \ell \in \mathcal{C}$, on n'a pas $\ell \in \mathcal{C}$ et $\neg \ell \in \mathcal{C}$ (car $\ell \vee \neg \ell$ = valide)

c) SAT si au $\ominus$ une clause est SAT.

$\hookrightarrow$ = on n'a pas $\ell \in \mathcal{C}$ et $\neg \ell \in \mathcal{C}$ (car $\ell \wedge \neg \ell \neq$ SAT)

Exercice 3

a) $\varphi = \neg(P \vee (Q \wedge R))$

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$\neg(P \vee (Q \wedge R))$
0	0	0			1
0	0	1			1
0	1	0			1
0	1	1	1	1	
1	0	0		1	
1	0	1		1	
1	1	0		1	
1	1	1	1	1	

peu importe la valeur de R

Donc $\varphi \equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R)$

peu importe la valeur de Q.

b) $\varphi = \neg(P \vee (Q \wedge R))$

$nnf(\varphi) = \neg P \wedge \neg (Q \wedge R)$

$= \neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R)$

$dnf(nnf(\varphi)) = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R)$

On retrouve bien la même formule.

Exercice 4

(transformation de Tseitin)

a) $\varphi = ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$

$\varphi = P \vee \neg((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P)$

$= P \vee \neg(P \vee \neg(P \Rightarrow Q))$

$= P \vee \neg(P \vee \neg(Q \vee \neg P))$

$nnf(\varphi) = \boxed{P \vee (\neg P \wedge (Q \vee \neg P))}$

b) On introduit des nouvelles variables :

$x_1 \Leftrightarrow \neg P$

$\equiv (x_1 \rightarrow \neg P) \wedge (\neg P \Rightarrow x_1)$

$\equiv (\neg P \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee P)$

$x_2 \Leftrightarrow Q \vee x_1$

$\equiv (x_2 \Rightarrow (Q \vee x_1)) \wedge ((Q \vee x_1) \Rightarrow x_2)$

$\equiv (Q \vee x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg(Q \vee x_1))$

$\equiv (Q \vee x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee (\neg Q \wedge \neg x_1))$

$\equiv (Q \vee x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg Q) \wedge (x_2 \vee \neg x_1)$

$x_3 \Leftrightarrow \neg P \wedge (Q \vee \neg P)$

$\equiv x_3 \Leftrightarrow x_1 \wedge x_2$

$\equiv (x_3 \Rightarrow (x_1 \wedge x_2)) \wedge ((x_1 \wedge x_2 \Rightarrow x_3))$

$\equiv ((x_1 \wedge x_2) \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee \neg(x_1 \wedge x_2))$

$\equiv (\neg x_3 \vee x_1) \wedge (\neg x_3 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2)$

$x_4 \Leftrightarrow \varphi$

$\equiv x_4 \Leftrightarrow P \vee x_3$

$\equiv (x_4 \Rightarrow (P \vee x_3)) \wedge ((P \vee x_3) \Rightarrow x_4)$

$\equiv (P \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_4 \vee \neg(P \vee x_3))$

$\equiv (P \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_4 \vee (\neg P \wedge \neg x_3))$

$\equiv (P \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_4 \vee \neg P) \wedge (x_4 \vee \neg x_3)$

On obtient une formule équisatisfiable :

$x_4 \wedge (x_4 \Leftrightarrow P \vee x_3) \wedge (x_3 \Leftrightarrow x_1 \wedge x_2) \wedge (x_2 \Leftrightarrow Q \vee x_1) \wedge (x_1 \Leftrightarrow \neg P)$

$\equiv x_4 \wedge (P \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_4 \vee \neg P) \wedge (x_4 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_3 \vee x_1) \wedge (\neg x_3 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (Q \vee x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg Q) \wedge (x_2 \vee \neg x_1)$
$\wedge (\neg P \vee \neg x_1) \wedge (x_1 \vee P)$

c) $\varphi = P \vee (\neg P \wedge (Q \vee \neg P))$

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$\neg P \wedge (Q \vee \neg P)$	$P \vee \dots = \varphi$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1

donc la loi de Pierce est valide.

Par contre, pour la loi équisatisfiable qu'on a trouvée :

$I_2 = [x_4/0$, le reste on s'en fiche$)$ ne satisfait pas la formule (qui n'est donc pas valide).

$I_1 = [x_4/1, P/1, x_3/1, x_1/0, Q/1, x_2/1)$ satisfait la formule.