Mobilité (M2 IMPAIRS) TD4

Exercice 1. Colonie de vacances

Vous devez organiser une colonie de vacances partant de Strasbourg et à destination de Toulouse. Pour des raisons financières, vous avez décidé de transporter les 30 enfants sous votre responsabilité par bus. Hélas, ayant commencé l'organisation de ce voyage un peu tardivement, il n'y a plus de bus direct entre Strasbourg et Toulouse, il faudra donc faire des changements dans certaines villes. De plus, il ne reste que peu de places sur l'ensemble du réseau. Le tableau suivant résume le nombre de places restantes pour les différents bus :

Départ \ Arrivée	Paris	Lyon	Montpellier	Bordeaux	Genève	Toulouse
Strasbourg	15	9	×	×	8	×
Paris	×	11	3	×	×	×
Lyon	×	×	9	6	×	6
Montpellier	×	×	×	×	×	16
Bordeaux	×	×	4	×	×	9
Genève	×	×	×	9	×	×

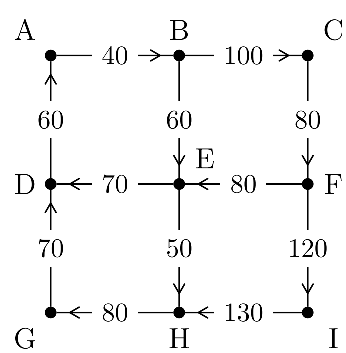
L'objectif est de savoir s'il est possible de transporter tous les enfants de Strasbourg jusqu'à Toulouse par bus sans louer de minivans pour certaines parties du trajet.

Question 1. Modéliser ce problème comme un problème de graphe et donner le graphe associé.

Question 2. Résoudre ce problème à l'aide d'un algorithme vu dans le cours (en donner le nom).

Exercice 2. Livraison de colis

Un livreur doit partir d'un dépôt, livrer des colis dans chaque rue et revenir au dépôt. Toutes les rues de la ville sont à sens unique, et sont représentées par les arcs du graphe orienté G ci-dessous. Les nombres sur les arcs représentent la longueur (en mètres) des rues. Le dépôt est représenté par le sommet D. Le livreur souhaite bien évidemment minimiser la distance totale de son tour.



Ce problème peut se réduire au problème de flot maximum de coût minimum dans un réseau R.

Question 1. Dessiner le réseau R pour ce problème. Indiquer le coût et la capacité de chaque arc.

Question 2. Trouver un $s-t$ flot maximum f dans R de coût minimum.

Question 3. Construire un super-graphe G^* de G où chaque arc $e \in E(G)$ apparaît $f(e)+1$ fois.

Question 4. Déduire un itinéraire optimal du livreur.

Exercice 3. Covoiturage

Un groupe de n personnes $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ partagent leurs véhicules pour aller travailler pendant m jours. Le jour i, un sous-ensemble S_i de P utilisent un véhicule commun pour aller travailler. Le conducteur ce jour-là sera un élément de S_i. Etant donné P et les sous-ensembles $S_1, \dots, S_m$, le problème est de choisir pour chaque i le conducteur du jour i de façon que la répartition soit équitable, c'est-à-dire qu'une personne j ne conduise pas plus de $\left\lceil \sum_{i:j\in S_i} \frac{1}{|S_i|} \right\rceil$ jours au total. Par exemple, s'il y a quatre personnes et trois jours avec $S_1 = \{p_1, p_2\}$, $S_2 = \{p_1, p_3, p_4\}$ et $S_2 = \{p_1, p_4\}$ alors la personne p_1 doit conduire au maximum $\lceil 1/2 + 1/3 + 1/2 \rceil = 2$ de ces trois jours alors que les autres conducteurs doivent conduire au maximum un de ces trois jours.

Question 1. Modéliser ce problème comme un problème de flot maximal.

Question 2. Monter qu'il existe toujours une répartition équitable.

Exercice 4. Chargement des navires

Une compagnie de transport maritime utilise un navire pouvant transporter au maximum r conteneurs. Le navire navigue sur une longue route entre deux ports, avec plusieurs arrêts dans des ports intermédiaires. Dans ces ports, des conteneurs peuvent être déchargés et d'autres conteneurs peuvent être chargés. Dans chaque port, il y a un nombre b_{ij} de conteneurs qui attendend d'être expédiée du port i au port $j > i$. Soit f_{ij} le revenu que la compagnie tire du transport d'un conteneur du port i au port j. L'objectif est de planifier le nombre de conteneurs à charger dans chaque port de manière à maximiser le revenu total sans jamais dépasser la capacité du navire.

Question 1. Modéliser le problème comme une circulation avec demandes de coût minimum. En particulier, préciser les sommets et les arcs du réseau, ainsi que les capacités et les coûts des arcs, et les demandes des sommets.