AAL TD 2 Expressions rationnelles et automates

25.09.2020

$\Sigma = \{a, b, c\}$

Exercice 1

1^er CC dans 2 semaines (au TD 4)

$L_1 : e_1 = (a + c + baa)^*$

$L_2 : e_2 = ((b+c)^* a (b+c)^* a (b+c)^* a (b+c)^*)^*$

Montrons que $\mathcal{L}(e_2) = L_2$ par double inclusion

$\boxed{\subset}$ Soit $u \in \mathcal{L}(e_2)$: clair car u a un nombre de a multiple de 3.
donc $u \in L_2$

$\boxed{\supset}$ Soit $u \in L_2$, $|u|_a \equiv 0 \mod 3 \Rightarrow u = u_1 u_2 \dots u_k v$

où chaque u_i - contient exactement 3 a.
- se termine par a.
et v ne contient que des b etc.

Chaque u_i vérifie l'expression rationnelle $(b+c)^* a (b+c)^* a (b+c)^* a$

et v ———————— $(b+c)^*$

donc u ———————— $((b+c)^* a (b+c)^* a (b+c)^* a)^* (b+c)^*$

donc $u \in \mathcal{L}(e_2)$

OK

$L_3 : e_3 = ((b+c)^* a (b+c)^* a (b+c)^* a (b+c)^* a)^* ((b+c)^* a (b+c)^* a (b+c)^* a (b+c)^*)$

Exercice 2

1) (a) $(aa)^* a + (aa)^* = a^*$

(b) $(a + \varepsilon) a^* b = a^* b$

au ⊖ 1 occurrence

(c) $(a + \varepsilon)(\varepsilon + aa)^{\oplus} a = a(aa)^* a + \varepsilon(aa)^* a = aa^* = a^+$ (on ne peut pas avoir ε)

2) (a) $(a^2 + a^3)^* = (a^2 a^*)^*$

$\boxed{\subset}$ Soit $u \in (a^2 + a^3)^*$ Alors $u = (a^2)^* \subset (a^2 a^*)^*$
ou $u = (a^3)^* = (a^2 a)^* \subset (a^2 a^*)^*$ donc $u \subset (a^2 a^*)^*$

$\boxed{\supset}$ Soit $u \in (a^2 a^*)^*$
Soit $u = (a^2)^*$
Soit $u = (a^2 a)^* = (a^3)^*$

Soit $u = (a^2 a^n)^*$
Si n pair $u = (a^2 a^{2k})^* = (a^{2(k+1)})^* = (a^2)^*$
Si n impair $u = (a^2 a^{2k+1})^* = (a^2 a^{2k} a)^* = (a^{2k+1} a)^* = (a^2 a)^* = (a^3)^*$

OK

$(a^2+a^3)^* = \varepsilon + aa^+$ car
$\begin{cases} \varepsilon \text{ est obtenu par l'étoile} \\ a^2 \text{ et } a^3 \text{ obtenus en répétant 1 fois} \\ a^{\underset{i\geq 1}{2i+1}} \text{ est bien dans } a^3(a^2)^* \\ a^{\underset{i\geq 0}{2i}} \text{ est dans } (a^2)^* \text{ et est donc dans } (a^2+a^3)^* \end{cases}$

↳ $\varepsilon, aa, a^3, a^4, a^5, \dots$

Exercice 3

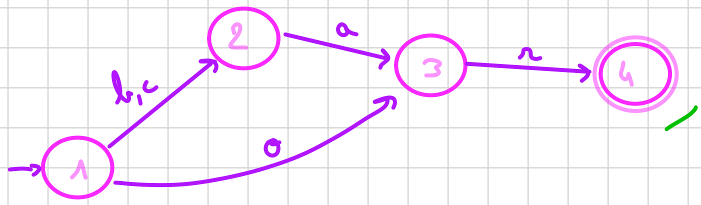
1) Les mots acceptés sont : a, aab, aaaa, bb, baa

Donc $\mathcal{L} = \{a, aab, aaaa, bb, baa\}$

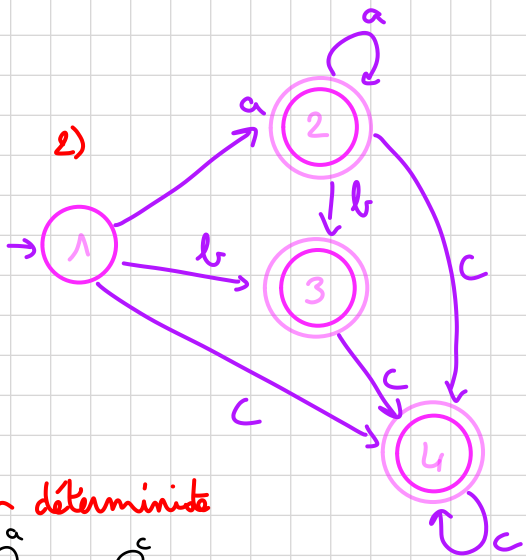
2) $e = b + ab^*(a+c)$

Exercice 4

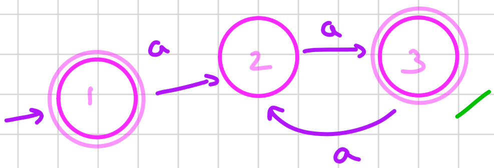
1)



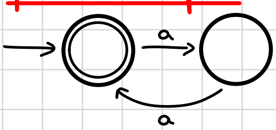
2)



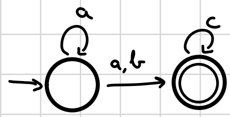
3)



plus simple



2) non déterministe



Exercice 5

1)

	aab	abbb	aba
C_1	$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{a} 3 \xrightarrow{b} 5$	NON	$1 \xrightarrow{a} 3 \xrightarrow{b} 4 \xrightarrow{a} 5$
C_2	$0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 2$	$0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{b} 2$	NON

2) C_1 : $a + (a(a+\varepsilon)b(a+\varepsilon))$ [ou $e = a+ab+aba+aab+aaba$]

↳ pour les langages finis, il faut juste lister les éléments (sauf s'il y en a trop)

C_2 : $a(a+b)^*b$