

Exercice 1

a) On considère $\forall (i,j)$ avec $0 \leq i,j \leq m-1$ une proposition $P_{i,j}$ qui est vraie s'il y a une dame dans la case (i,j) , et fausse sinon.

b) Sur une ligne i , il y a au moins une dame : $L_i = \bigvee_{j=0}^{m-1} P_{i,j}$

Sur chaque ligne : $L_i = \bigwedge_{i=0}^{m-1} \left(\bigvee_{j=0}^{m-1} P_{i,j} \right)$

Sur une colonne $C_j = \bigvee_{i=0}^{m-1} P_{i,j}$

Sur chaque colonne : $C_j = \bigwedge_{j=0}^{m-1} \left(\bigvee_{i=0}^{m-1} P_{i,j} \right)$

c) Sur une ligne i , au \oplus une dame : $L_i = \bigwedge_{0 \leq j_1 \neq j_2 \leq m-1} (\neg P_{i,j_1} \vee \neg P_{i,j_2})$

Sur chaque ligne : $L_i = \bigwedge_{i=0}^{m-1} \left(\bigwedge_{0 \leq j_1 \neq j_2 \leq m-1} (\neg P_{i,j_1} \vee \neg P_{i,j_2}) \right)$ optimisation

$$\bigwedge_{i=0}^{m-1} \bigwedge_{j=0}^{m-2} \bigwedge_{j_2=j+1}^{m-1} (\neg P_{i,j} \vee \neg P_{i,j_2})$$

Sur une colonne : $C_j = \bigwedge_{0 \leq i_1 \neq i_2 \leq m-1} (\neg P_{i_1,j} \vee \neg P_{i_2,j})$

Sur chaque colonne : $C_j = \bigwedge_{j=0}^{m-1} \left(\bigwedge_{0 \leq i_1 \neq i_2 \leq m-1} (\neg P_{i_1,j} \vee \neg P_{i_2,j}) \right)$ optimisation

$$\bigwedge_{j=0}^{m-1} \bigwedge_{i=0}^{m-2} \bigwedge_{i_2=i+1}^{m-1} (\neg P_{i,j} \vee \neg P_{i_2,j})$$

d) Par rapport à la case (i,j) :

- Les cases de la diag en bas à droite sont les cases $(i+k, j+k)$ où $k \in \{1, \dots, \min(m-i-1, m-j-1)\}$
- — gauche — $(i+k, j-k)$ où $k \in \{1, \dots, \min(m-i-1, j)\}$
- — haut à droite — $(i-k, j+k)$ où $k \in \{1, \dots, \min(i, m-j-1)\}$
- — gauche — $(i-k, j-k)$ où $k \in \{1, \dots, \min(i, j)\}$

$$D_+ = \bigwedge_{0 \leq i,j \leq m-1} \left(\bigwedge_{k=1}^{\min(m-i-1, m-j-1)} (\neg P_{i,j} \vee \neg P_{i+k, j+k}) \wedge \bigwedge_{k=1}^{\min(m-i-1, j)} (\neg P_{i,j} \vee \neg P_{i+k, j-k}) \right)$$

(haut à gauche/droite fait doublon qd on fait varier i et j de 0 à m)

e) $F = L_- \wedge C_- \wedge L_+ \wedge C_+ \wedge D_+$

Exercice 2

a) $\varphi = \bigwedge_{1 \leq i \leq m} \left(\bigvee_{1 \leq j \leq m} P_{ij} \right)$ ✓

b) $\psi = \bigwedge_{1 \leq i \leq m} \bigwedge_{1 \leq j \leq m} \bigwedge_{1 \leq i_2 \leq m-1} (\neg P_{ij} \vee \neg P_{i_2 j_2})$ ✓

c) $\varphi \wedge \psi$ = chaque agent a accès à exactement 1 ressource. (\Rightarrow la relation d'accessibilité est fonction).

d) $\theta = \bigwedge_{1 \leq j \leq m} \left(\bigvee_{1 \leq i \leq m} P_{ij} \right)$ ✓

e) $\varepsilon = \bigwedge_{1 \leq j \leq m} \bigwedge_{1 \leq i \leq m} \bigwedge_{1 \leq i_2 \leq m-1} (\neg P_{ij} \vee \neg P_{i_2 j})$ ✓

f) fonction

- surjective: $\varphi \wedge \psi \wedge \theta$ (\forall ressource, \exists agent)
- injective: $\varphi \wedge \psi \wedge \varepsilon$ (\forall agent, \exists ressource)
- bijective: $\varphi \wedge \psi \wedge \theta \wedge \varepsilon$ (les 2 en m tps)

Exercice 3

a) P_{ijv} = la case (i,j) contient l'élément v . ✓

b)
$$B = \left(\bigwedge_{0 \leq i,j \leq n} \bigwedge_{0 \leq v \leq n} \bigwedge_{0 \leq v_2 \leq n-1} (\neg P_{ijv} \vee \neg P_{ijv_2}) \right) \wedge \left(\bigwedge_{0 \leq i,j \leq n} \left(\bigvee_{0 \leq k \leq n} P_{ijk} \right) \right)$$

\downarrow
 an \oplus un entier par case ✓

 \downarrow
 an \ominus un entier par case ✓

c)
$$L = \left(\bigwedge_{0 \leq i \leq n} \bigwedge_{0 \leq j \leq n} \bigwedge_{0 \leq j_2 \leq n-1} \bigwedge_{0 \leq k \leq n} (\neg P_{ijk} \vee \neg P_{ij_2k}) \right) \wedge \left(\bigwedge_{0 \leq i \leq n} \bigwedge_{0 \leq k \leq n} \left(\bigvee_{0 \leq j \leq n} P_{ijk} \right) \right)$$

k est an \oplus une fois sur chaque ligne.
 k est an \ominus une fois sur chaque ligne.

donc

$$\text{carré latin} = B \wedge L \wedge C$$

$$C = \left(\bigwedge_{0 \leq j \leq n} \bigwedge_{0 \leq i \leq n} \bigwedge_{0 \leq i_2 \leq n-1} \bigwedge_{0 \leq k \leq n} (\neg P_{ijk} \vee \neg P_{i_2jk}) \right) \wedge \left(\bigwedge_{0 \leq j \leq n} \bigwedge_{0 \leq k \leq n} \left(\bigvee_{0 \leq i \leq n} P_{ijk} \right) \right)$$

k est an \oplus une fois sur chaque colonne
 k est an \ominus une fois sur chaque colonne

d) P_{ijxy} : la case (i,j) contient le couple (x,y) .

$B \wedge L \wedge C$ en ne regardant que la 1^{ère} valeur du couple

e)
$$F = (c_1 \text{ carré latin}) \wedge (c_2 \text{ carré latin})$$

\downarrow
 même chose en ne regardant que la 2^e valeur du couple

$$\wedge (E = \text{chaque couple apparaît au moins une fois})$$

$$\wedge (D = \text{chaque couple apparaît au plus une fois})$$

$$E = \bigwedge_{0 \leq x,y \leq n} \left(\bigvee_{0 \leq i,j \leq n} P_{ijxy} \right)$$

$$D = \bigwedge_{0 \leq x,y \leq n} \bigwedge_{0 \leq i,j \leq n} \bigwedge_{\substack{0 \leq i_2,j_2 \leq n \\ (i,j) \neq (i_2,j_2)}} (\neg P_{ijxy} \vee \neg P_{i_2j_2xy})$$

Ejercicio 4

a)