RUNSER Laure

M13 Algèbre linéaire TD — 06.11.2020

Espaces vectoriels n° 1

Exercice 4

1) w est proportionnel à v si $w = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante

$$\Rightarrow (-2, m) = (\lambda, 2\lambda)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 = \lambda \\ m = \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ m = -4 \end{cases}$$

Donc w proportionel à v ssi $\boxed{m = -4}$

Dans ce cas là, toute combinaison linéaire $x.v + y.w$ est sur la droite $y = 2x$.

Donc (v, w) n'est pas générateur de $\mathbb{R}^2$.

2) Si $m \neq -4$

$\forall (a, b)$ on veut x et y tq $x.v + y.w = (a, b)$

$$\Rightarrow x(1, 2) + y(-2, m) = (a, b)$$

$$\Rightarrow (x, 2x) + (-2y, ym) = (a, b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y = a \\ 2x + my = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{avec } m \neq -4$$

On échelonne et on réduit

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 2 & m & b \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & m+4 & b-2a \end{array}\right) \xrightarrow{m+4 \neq 0} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & \frac{b-2a}{m+4} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & a + 2\frac{b-2a}{m+4} \\ 1 & 0 & \frac{b-2a}{m+4} \end{array}\right) \Rightarrow \quad x = a + 2\,\frac{2-a}{m+4} = \frac{m}{m+4}a + \frac{2}{m+4}b$$

$$y = \frac{-2}{m+4}a + \frac{1}{m+4}b$$

Donc $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ $\underline{\exists !}$ (x, y) tq $xv + yw = (a, b)$

On (x, y) est une $\boxed{\text{base}}$ de $\mathbb{R}^2$.

Donc (x, y) est $\boxed{\text{générateur}}$.

Exercice 10

13.11.2020

$v_1 = (1,2,-1,0)$ $\quad$ $v_3 = (0,1,3,4)$ $\quad$ $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$

$v_2 = (4,8,-4,3)$ $\quad$ $v_4 = (2,5,1,4)$ $\quad$ Donc $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est génératrice dans F.

On échelonne et réduit la matrice. On veut en extraire une famille libre.

on écrit les vecteurs en COLONNE

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 5 \\ -1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} L_1 \\ L_2-2L_1 \\ L_3+L_1 \\ L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 pivots $\to$ Donc on sait que (v_1, v_2, v_3) est un système libre et générateur de F.

on enlève v_4.

si on avait :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors $\{v_1, v_3, v_4\}$ est libre et génératrice de F.

on enlève v_2.

Exercice 13

La famille n'est <u>pas libre</u> car $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et on a 4 vecteurs.

Une <u>relat° de dépendance linéaire</u> : $a v_1 + b v_2 + c v_3 + d v_4 = (0,0,0)$ avec $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$

On échelonne la matrice (on écrit les vecteurs en colonne)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \dots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 37/12 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + \frac{3}{4} d = 0 \\ b + \frac{1}{3} d = 0 \\ c + \frac{37}{12} d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3/4\, d \\ b = -1/3\, d \\ c = -37/12\, d \end{cases} \text{ avec } d \in \mathbb{R}$$

On choisit $d = 12$ alors $\begin{cases} a = -9 \\ b = -4 \\ c = -37 \end{cases}$

Donc $-9 v_1 - 4 v_2 - 37 v_3 + 12 v_4 = (0,0,0)$

relat° de dépendance non triviale

Exercice 14

a) $P_1(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$
$P_2(x) = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$
$P_3(x) = ux + 3$

$v_1 = (1, -2, 1) \quad v_2 = (4, 4, 1) \quad v_3 = (0, u, 3) \quad \in \mathbb{R}^3$

$a v_1 + b v_2 = v_3 \Rightarrow$ on cherche (a, b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 3 \end{pmatrix}$$

ici c'est ⊕ simple de regarder le système d'équat°

$$\begin{cases} a + 4b = 0 \\ -2a + 4b = u \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 3b = -3 \Rightarrow b = -1 \\ a = -4b = 4 \end{array}$$

$-2a + 4b = u \Rightarrow u = -8 - 4 = -12$

Donc il faut $\boxed{u = -12}$

alors $4v_1 - v_2 = v_3 \Rightarrow 4P_1(x) - P_2(x) = P_3(x)$

b) comme a)

c) si $u \neq -12$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & u \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ libre et génératrice
↳ c'est une base de $\mathbb{R}^3$

$\forall v \in \mathbb{R}^3$, v comb. linéaire de $\{v_1, v_2, v_3\}$

$\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, P ——— de P_1, P_2, P_3

Exercice 15

a) Si on pouvait trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $\cos(x) = \lambda . \sin(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \lambda \sin(x)$ (C'est une égalité de fct°)

↳ on met $x = 0$

Alors $\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\cos(0)} = \lambda \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\sin(0)}$ donc FAUX

Donc c n'est pas proportionnel à s.

2) Mq 1 n'est pas une combinaison linéaire de $\sin(x)$ et $\cos(x)$

$1 = a \sin(x) + b \cos(x)$ où $a, b \in \mathbb{R}$ Égalité de fct $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ $1 = a\cos(x) + b\sin(x)$

Pour $x = 0$: $1 = 0 + 1.b = b$ $\Rightarrow a = b = 1$ donc $1 = \cos(x) + \sin(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$
Pour $x = \frac{\pi}{2}$: $1 = a.1 + 0 = a$ ABSURDE (ex $x = \pi$: $1 = -a = -1$)

c) $\cos(2x)$ combinaison linéaire de $\cos(x)$ et $\sin(x)$? NON

$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ ———————————— ? OUI

↳ vérifier sur des valeurs particulières comme pour b).

16.11.2020

Exercice 16

$\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{ fct^O : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continues} \}$

↳ sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

- somme $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
- multiplicat^O par scalaire : $\mathbb{R} \times \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

On a $x^2, \cos(x), \exp(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Mq qu'elles forment un système libre.

$\Rightarrow$ Mq $\nexists\, a, b, c \in \mathbb{R}$ non tous nuls tq $a.x^2 + b.\cos(x) + c.\exp(x) = 0$

↖ égalité de fct^O
↳ doit être vraie $\forall x \in \mathbb{R}$

$*$ Si $x = 0$ $\quad a.0 + b.1 + c.1 = b + c = 0$

$*$ Si $x = \frac{\pi}{2}$ $\quad a\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + b.0 + c.\exp\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$*$ Si $x = -\frac{\pi}{2}$ $\quad a\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 + b + c.\exp\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow c.\underbrace{\left(\exp\left(\frac{\pi}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow a = 0$ et $b = 0$

$\Rightarrow a = b = c = 0$

Donc x^2, $\cos(x)$ et $\exp(x)$ forment un système libre.

Exercice 17

$E = \{ (u_n)_{n\geq 0} \mid u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \} \subset \underbrace{\{ (u_n)_{n \geq 0} \}}_{\text{ensemble des suites numériques}} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

↳ sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

(montrer que $u_n + v_n \in E$
et que $\lambda u_n \in E$).

Montrons que $\{u, v\}$ forment une base de E.

$u = (u_0, u_1, u_0 + u_1, \dots) = (1, 0, 1, 1, 2, \dots)$

$v = (v_0, v_1, v_0 + v_1, \dots) = (0, 1, 1, 2, 3, \dots)$

↳ c-à-d que $\forall w \in E \quad \exists!\, w$ tq $w = au + bv$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

· <u>existence :</u> on pose $w = (w_0, w_1, w_2, \dots)$

on pose $\begin{cases} a = w_0 \\ b = w_1 \end{cases}$

On compare $\underset{(w_0, w_1)}{\underset{\|}{w}}$ et $w_0 . u + w_1 v$
$'' \; w_0 (1,0) + w_1 (0,1) = (w_0, w_1)$

Donc w et $w_0 . u + w_1 . v$ ont les mêmes premières coordonnées.

Par la relatO de récurrence $r_{n+2} = r_{n+1} + r_n$ on a $w = w_0 \, u + w_1 v$

=> w s'écrit comme combinaison linéaire de u et v.

=> $\{u, v\}$ est générateur dans E.

<u>unicité :</u>

$w = a u + b v = c u + d v$

$\Rightarrow (a-c) u + (b-d) v = 0$ (u et v seraient dependents)

$\Rightarrow x u + y v = 0$ avec $x = a-c$ et $y = b-d$

$\Rightarrow x(1,0,1,1,\dots) + y(0,1,1,\dots) = 0$

$\Rightarrow (x, y, x+y, \dots) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ et $y = 0$

=> il n'existe pas de relatO de dependance entre u et v.

=> $\{u, v\}$ libre.

Donc E est un sev de dim 2 de $\{(u_n)_{n \geq 0}\} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Exercice 20

1) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Mq $\sqrt{2}$ et 1 ne sont pas proportionnels.

$\Rightarrow$ Mq $\nexists q \in \mathbb{Q}$ tq $\sqrt{2} = q \times 1 = q$ $\Rightarrow$ Mq $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. <u>OK</u>
(ou $\nexists p, q \in \mathbb{R}$ tq $p\sqrt{2} + q.1 = 0$)

Donc $\{\sqrt{2}, 1\}$ est un système libre dans $\mathbb{R}$.

2) $x, y \in \mathbb{Q}$ tq $x\sqrt{2} + y \cdot 1 \neq 0$ $\quad (\Leftrightarrow (x,y) \neq (0,0))$

On regarde $\dfrac{1}{x+y\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$

$$(\sqrt{A}+\sqrt{B})-(\sqrt{A}-\sqrt{B}) = A-B$$

$$(x+y\sqrt{2})(x-y\sqrt{2}) = x^2 - 2y^2$$

Donc $\dfrac{1}{x+y\sqrt{2}} = \dfrac{x-y\sqrt{2}}{x^2-2y^2} = \dfrac{x}{x^2-2y^2} \cdot 1 - \dfrac{y}{x^2-2y^2}\sqrt{2} = p \cdot 1 + q \cdot \sqrt{2}$ avec $p, q \in \mathbb{Q}$

3) $K = \{ p + \sqrt{2}\, q \in \mathbb{R} \mid p, q \in \mathbb{Q} \} \subset \mathbb{R}$

Mq K est un corps :

- l'addition par la somme vectorielle $(p+q\sqrt{2}) + (p'+q'\sqrt{2}) = (p+p') + (q+q')\sqrt{2}$ OK
- l'inverse $p + q\sqrt{2} \rightsquigarrow (-p) + (-q)\sqrt{2}$
- multiplication $(p+q\sqrt{2})(p'+q'\sqrt{2}) = \underbrace{p.p' + 2qq'}_{\in \mathbb{Q}} + \sqrt{2}(\underbrace{pq' + qp'}_{\in \mathbb{Q}}) = P + Q\sqrt{2} \in K$
- division $(p+q\sqrt{2})/(p'+q'\sqrt{2})$

$$= (p+q\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{p'+q'\sqrt{2}} = (p+q\sqrt{2}) \cdot (p''+q''\sqrt{2}) \text{ par la q° 2)}$$

$$= P + Q\sqrt{2} \in K$$

Donc K est un corps de $\mathbb{R}$.