

Algorithmique

TD n° 12

Exercice 1 :

Vous devez ranger tous les n livres d'une bibliothèque dans des étagères. Les étagères sont composées de tablettes qui peuvent contenir des livres jusqu'à une certaine hauteur. L'ordre des livres est fixé et ne peut pas être changé. Chaque tablette doit contenir un intervalle contigu de la séquence des livres. Il y a deux tableaux $H[1..n]$ et $E[1..n]$ qui contiennent les hauteurs et les épaisseurs des livres dans l'ordre. Toutes les tablettes ont la même longueur L . L'épaisseur totale de tous les livres sur une tablette ne peut pas excéder L .

1. Supposons que tous les livres ont la même hauteur h et que toutes les tablettes peuvent stocker des livres de cette hauteur. Donnez un algorithme glouton pour stocker les livres en utilisant le moins de tablettes possibles. Montrez qu'il est correcte.
2. Supposons maintenant que les livres peuvent avoir des hauteurs différentes et qu'on peut ajuster chaque tablette pour accueillir le livre le plus haut sur cette tablette. En particulier, la hauteur de chaque tablette vide peut être 0. Le problème est de stocker les livres de sorte que la somme totale des hauteurs des tablettes (appelé coût) soit le plus petit possible. Montrez que l'algorithme glouton précédent ne donne pas toujours la meilleure solution.
3. Donnez un algorithme pour trouver le meilleur coût.

Exercice 2 :

On considère deux tableaux d'entier positifs ou nuls $L[1..n]$ et $C[1..m]$. Une matrice M d'entiers positifs ou nuls de dimension $n \times m$ est appelée *compatible* avec L et C , si la somme des éléments de chaque ligne i est égale à $L[i]$ et que la somme des éléments de chaque colonne j est égale à $C[j]$. Un exemple d'une matrice compatible avec L et C est donné dans la figure 1.

L : \ C :	27	94	42	50
57	12	42	3	0
47	3	10	31	3
71	2	31	4	34
38	10	11	4	13

L : \ C :	20	15	30	5
22	?	?	?	?
13	?	?	?	?
4	?	?	?	?
31	?	?	?	?

FIGURE 1 – Une matrice compatible et un exemple à résoudre

1. Montrez que si M est compatible avec L et C , alors L et C doivent vérifier la propriété :

$$\sum_{i=1}^n L[i] = \sum_{j=1}^m C[j] \quad (1)$$

2. Montrez que si L et C satisfont la propriété (1), alors il existe une matrice M compatible avec L et C . Pour cela donnez un algorithme glouton qui construit une matrice M compatible avec L et C . Appliquez l'algorithme sur l'exemple de la figure 1.

Exercice 3 :

On considère deux tableaux d'entier positifs ou nuls $L[1..n]$ et $C[1..m]$ comme dans l'exercice précédent. Ici, on cherche une matrice *binaire* (c'est-à-dire composée de 0 et de 1) compatible avec L et C .

1. La propriété (1) de l'exercice précédent est toujours vraie pour chaque matrice binaire compatible. Par contre, même si on exige que $L[i]$ (resp. $C[j]$) soit toujours inférieur ou égal à n (resp. m), il y a des L et C vérifiant la propriété pour lesquels il n'y a pas de matrice binaire compatible. Donnez un exemple.
2. Proposez une propriété sur L et C plus forte de sorte qu'on soit sûr de pouvoir trouver une matrice binaire compatible. Pour cela donnez un algorithme glouton.