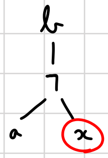
RUNSER Laure
21955060

OL4 DM2

## Exercice 1

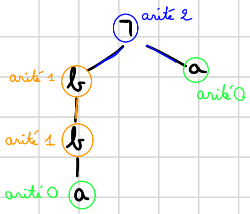
1) $\boxed{x \notin T_\Sigma}$ : $x$ est d'arité 1, or ici il n'a aucun arbre de syntaxe "fils".

2) On obtient l'arbre de syntaxe



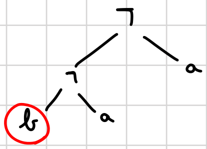

qui ne respecte pas l'arité de $x$. Donc $\boxed{(b, (\neg, a, x)) \notin T_\Sigma}$

3) On obtient l'arbre de syntaxe



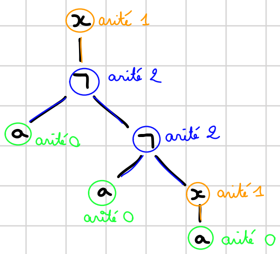

qui respecte l'arité de tous ces éléments.
Donc $\boxed{(\neg, (b, (b, a)), a) \in T_\Sigma}$

4)




ne respecte pas l'arité de $b$. Donc $\boxed{(\neg, (\neg, b, a), a) \notin T_\Sigma}$

5)




L'arbre de syntaxe respecte l'arité de tous ces éléments.
Donc $\boxed{\text{l'expression est un élément de } T_\Sigma}$.

## Exercice 2

1) $X = \{a, b\}$ . $T_\Sigma = \{a, b\}^* = X^*$

car on a : $\varepsilon$ = le mot vide
et $\forall w \in T_\Sigma$ , $(a, w)$ = le mot $aw$
$(b, w)$ = le mot $bw$

2) $\mu(abab) = f_a(\mu(bab)) = f_a(\underbrace{f_b(\underbrace{f_a(\underbrace{f_b(\overset{\text{car } f_\varepsilon = 1}{1})}_{1+1=2})}_{3\times 2=6})}_{6+1=7}) = f_a(7) = 3 \times 7 = 21$ Donc $\boxed{\mu(abab) = 21}$

3) $\forall v \in T_\Sigma$ $\mu(abv) = f_a(f_b(\mu(v))) = 3 \times (\mu(v) + 1) = 3 + 3\mu(v)$

$\mu(bbav) = f_b(f_b(f_a(\mu(v)))) = 1 + 1 + 3\mu(v)$

Or $\mu(v) > 0$ donc selon l'ordre habituel sur $\mathbb{N}$, $3 + 3\mu(v) > 2 + 3\mu(v) \Rightarrow \boxed{\mu(abv) > \mu(bbav)}$

4) $\forall u, v, w \in T_\Sigma$

Supposons que $\mu(v) > \mu(w)$

Alors $\mu(a\,v) = 3\,\mu(v) > 3\,\mu(w) = \mu(a\,w)$

et $\mu(b\,v) = 1 + \mu(v) > 1 + \mu(w) = \mu(b\,w)$

Donc $\forall u \in T_\Sigma$, on a $\boxed{\mu(u\,v) > \mu(w)}$ selon les relations ci-dessus, et car $u$ est composé uniquement des lettres $a$ et $b$.

5) Soient $u, v \in T_\Sigma$. On a montré que $\mu(a\,b\,v) > \mu(b\,b\,a\,v)$ dans la question 3.

Soient $v_1 = a\,b\,v$ et $v_2 = b\,b\,a\,v \in T_\Sigma$

Alors $\mu(v_1) > \mu(v_2)$.

Donc, d'après la question 4, $\mu(u\,v_1) > \mu(u\,v_2)$.

En conclusion, $\forall u, v \in T_\Sigma$, $\boxed{\mu(u\,a\,b\,v) > \mu(u\,b\,b\,a\,v)}$

## Exercice 3

1) $\Sigma = \{\varepsilon^0, a^1, b^1, c^1\}$ fonctionne.

2) $f_\varepsilon = 0$

$f_a, f_b, f_c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ avec $f_a(x) = f_b(x) = f_c(x) = x + 1$

3) $f_\varepsilon = 0$

$f_a, f_c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq $f_a(x) = f_c(x) = x + 1$

$f_b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq $f_b(x) = x$

4)