RUNSER Laure
n° 21955060
L2 info groupe 3

Mathématiques 4 : DM
Sujet du partiel du 11/03/2020
Exercices 1, 2, 4 et 6

15/03/2021

Exercice 1

On calcule le PGCD de 1124 et 1004 en utilisant le fait que PGCD (a, b) = PGCD (b, r) où r est le reste de la division euclidienne de a par b :

$$\begin{aligned}
PGCD(1124, 1004) &= PGCD(120, 1004) && \text{car } 1124 = 1 \times 1004 + 120 \\
&= PGCD(120, 44) && \text{car } 1004 = 8 \times 120 + 44 \\
&= PGCD(32, 44) && \text{car } 120 = 2 \times 44 + 32 \\
&= PGCD(32, 12) && \text{car } 44 = 1 \times 32 + 12 \\
&= PGCD(8, 12) && \text{car } 32 = 2 \times 12 + 8 \\
&= PGCD(8, 4) && \text{car } 12 = 1 \times 8 + 4 \\
&= 4 && \text{car } 8 = 4 \times 2
\end{aligned}$$

Comme $12 = 3 \times 4 = 3 \times PGCD(1124, 1004)$, l'équation $(*)$: $1124x + 1004y = 12$ admet des solutions.

Si on divise $(*)$ par 4, on obtient $(**)$: $281x + 251y = 3$ qui admet des solutions par le théorème de Bézout.

En effet, il suffit de prendre $(x, y) = (3u, 3v)$
où (u, v) est la solution de l'équation de Bézout $(***)$: $281u + 251v = 1$

On trouve cette solution (u, v) avec l'algorithme d'Euclide étendu :

$281 = 1 \times 251 + 30$ donc $30 = 281 - 251$

$251 = 8 \times 30 + 11$ donc
$$\begin{aligned}
11 &= 251 - 8 \times 30 \\
&= 251 - 8 \times (281 - 251) \\
&= -8 \times 281 + 9 \times 251
\end{aligned}$$

$30 = 2 \times 11 + 8$ donc
$$\begin{aligned}
8 &= 30 - 2 \times 11 \\
&= 281 - 251 - 2 \times (-8 \times 281 + 9 \times 251) \\
&= 17 \times 281 - 19 \times 251
\end{aligned}$$

$11 = 1 \times 8 + 3$ donc
$$\begin{aligned}
3 &= 11 - 8 \\
&= -8 \times 281 + 9 \times 251 - (17 \times 281 - 19 \times 251) \\
&= -25 \times 281 + 28 \times 251
\end{aligned}$$

$8 = 2 \times 3 + 2$ donc
$$\begin{aligned}
2 &= 8 - 2 \times 3 \\
&= 17 \times 281 - 19 \times 251 - 2 \times (-25 \times 281 + 28 \times 251) \\
&= 67 \times 281 - 75 \times 251
\end{aligned}$$

$3 = 2 \times 1 + 1$ donc
$$\begin{aligned}
1 &= 3 - 2 \\
&= -25 \times 281 + 28 \times 251 - (67 \times 281 - 75 \times 251) \\
&= -92 \times 281 + 103 \times 251
\end{aligned}$$

Donc une solution de (***) est $(-92, 103)$.

Donc une solution de (**) est $(x_0, y_0) = (-92 \times 3, 103 \times 3) = \boxed{(-276, 309)}$

La solution générale de l'équation homogène $281x + 251v = 0$ est de façon évidente $\boxed{(x_k, y_k) = (k \times 251, k \times 281), k \in \mathbb{Z}}$

Donc (**) admet comme solution

$$(x, y) = (x_0, y_0) + (x_k, y_k) = \boxed{(-279 + 251k, 309 + 281k), k \in \mathbb{Z}}$$

qui est aussi la solution de l'équation de départ (*) : $1124x + 1004y = 12$

Exercice 2

1) Faisons le tableau de congruences de $7^n + 1$ mod 8 en fonction de n, pour n impair :

n	7^n mod 8	$7^n + 1$ mod 8
1	$7 \equiv -1$	0
3	$-1 = (-1)^3$	0
5	$-1 = (-1)^5$	0
7	$-1 = (-1)^7$	0
...	...	...

On remarque que $7 \equiv -1$ mod 8

donc $7^n \equiv (-1)^n$ mod 8

donc $\forall n$ impair, $7^n \equiv -1$ mod 8

Donc $7^n + 1 \equiv 0$ mod 8

et donc $7^n + 1$ est divisible par 8 pour tout n impair.

2) Soit $x \in \mathbb{Z}$. Alors $x \equiv 0$ mod 4 ou $x \equiv 1$ mod 4 ou $x \equiv 2$ mod 4 ou $x \equiv 3$ mod 4

donc $x^2 \equiv 0$ mod 4 ou $x^2 \equiv 1$ mod 4 ou $x^2 \equiv 4 \equiv 0$ mod 4 ou $x^2 \equiv 9 \equiv 1$ mod 4.

On a donc $x^2 \equiv 0$ mod 4 ou $x^2 \equiv 1$ mod 4.

Faisons un tableau de congruences modulo 4, pour $a, b \in \mathbb{Z}$:

a^2 mod 4	b^2 mod 4	$a^2 + b^2$ mod 4	$a^2 + b^2 - 3$ mod 4
0	0	0	$-3 \equiv 1$
0	1	1	$-2 \equiv 2$
1	0	1	$-2 \equiv 2$
1	1	2	$-1 \equiv 3$

Donc $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $a^2 + b^2 - 3 \not\equiv 0$ [4].

Donc 4 ne divise jamais $a^2 + b^2 - 3$.

Exercice 4

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x \equiv 1 \mod 10 \\ 4x \equiv 9 \mod 15 \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1 \mod 10 \\ 4 \times 4x \equiv 4 \times 9 \mod 15 \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1 \mod 10 \\ 16x \equiv 36 \mod 15 \end{cases}$$

car $4 \times 4 = 16 \equiv 1 \mod 15$

donc 4 est l'inverse de 4 modulo 5.

On a donc $\mathcal{S} \iff \begin{cases} x \equiv 1 \mod 10 \\ x \equiv 6 \mod 15 \end{cases}$

$PGCD(10, 15) = 5$

Or on sait que si $a \equiv r \mod n$, $a \equiv r \mod d$ pour tout d diviseur de n.

Donc $\mathcal{S} \iff \begin{cases} x \equiv 1 \mod 2 & \text{car } 10 = 5 \times 2 \\ x \equiv 6 \mod 3 & \text{car } 15 = 5 \times 3 \end{cases} \iff \mathcal{S}' : \begin{cases} x \equiv 1 \mod 2 & (1) \\ x \equiv 0 \mod 3 & (2) \end{cases}$

Dans le nouveau système, les modules 2 et 3 sont premiers entre eux.
Il y a des solutions car $0 - 1 = -1$ divise $1 = PGCD(2,3)$
On commence par trouver une solution de l'équation de Bézout

$$2u + 3v = 1$$

$(u, v) = (-1, 1)$ est une solution.

Donc $x = 6 \times (-1) \times 2 + 1 \times 1 \times 3 = -12 + 3 = -9$ est solution de $\mathcal{S}$.

et donc l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$ est $\boxed{\{x \in \mathbb{Z} \text{ tq } x \equiv -9 \mod 6\}}$ car $6 = PPCM(2,3)$

Exercice 6

1) Théorème de Bezout :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z},\ (a, b) \neq (0,0),\ \exists u, v \in \mathbb{Z} \text{ tq } ua + vb = PGCD(a, b).$$

2) Soient $a, b, c \in \mathbb{N}$ non nuls et $d = PGCD(a,b)$.

Si c divise a et b, alors $a = kc$ et $b = k'c$ avec $k, k' \in \mathbb{Z}$

Alors $d = PGCD(a, b) = PGCD(kc, k'c) = c \times PGCD(k, k') = c \times k''$ avec $k'' \in \mathbb{Z}$

Donc c divise bien d.