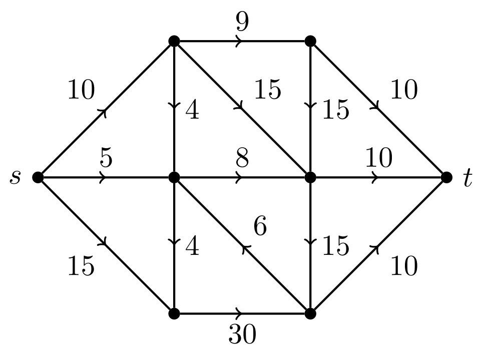
Mobilité (M2 IMPAIRS) TD2

Exercice 1.

Question 1. Appliquer l'algorithme de Ford–Fulkerson pour trouver un flot maximum dans le réseau G ci-dessous.

Question 2. En déduire une coupe minimum dans G.

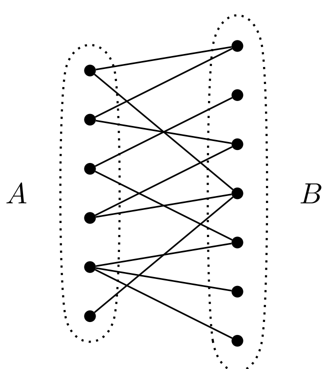
Question 3. Vérifiez vos réponses avec les fonctions et procédures du TP1.




```
G = [[0, 10, 5, 15, 0, 0, 0, 0],
     [0, 0, 4, 0, 9, 15, 0, 0],
     [0, 0, 0, 4, 0, 8, 0, 0],
     [0, 0, 0, 0, 0, 0, 30, 0],
     [0, 0, 0, 0, 0, 15, 0, 10],
     [0, 0, 0, 0, 0, 0, 15, 10],
     [0, 0, 6, 0, 0, 0, 0, 10],
     [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]]
```

Exercice 2. **Flot maximum et couplage maximum dans un graphe biparti**

Question 1. Dans un problème de flot maximum, démontrer que si toutes les capacités des arc sont des nombres entiers, alors il existe nécessairement un flot maximum entier (càd tel que le flot envoyé sur chaque arc est un entier).



Considérons le graphe biparti $G = (V, E)$ ci-contre, et notons A et B la bipartition des sommets de G (càd $V = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$). Un *couplage* de G est un ensemble d'arêtes $M \subseteq E$ tel que tout sommet de V appartient à au plus une arête de M. Le problème de couplage maximum consiste à déterminer un couplage M tel que $|M|$, le nombre d'arêtes du couplage, est maximum.

Le problème de couplage maximum modélise des problématiques d'affectation de tâches. On peut par exemple imaginer que l'ensemble A représente un ensemble de machines, et l'ensemble B représente un ensemble de tâches. Il y a une arête entre une machine et une tâche si elle sont compatibles, càd si la machine peut réaliser la tâche. Un couplage maximum donne une affectation de machines à des tâches de sorte à ce que le nombre de tâche réalisées soit maximum.

Question 2. En orientant les arêtes de A vers B et en rajoutant deux sommets s et t ainsi que des arêtes partant de s et des arêtes allant vers t, démontrer que le problème du couplage maximum dans G est équivalent à la recherche d'un flot maximum entier dans un certain graphe orienté H (on précisera la construction de H en fonction de G et les capacités des arêtes de H).

Question 3. À l'aide de l'algorithme de Ford–Fulkerson, trouver un couplage maximum dans G.

Exercice 3. **Sélection de projets**

Une entreprise doit sélectionner des projets parmi un ensemble de 8 projets afin de maximiser le profit, sachant que le profit de certains projets peut être négatif. Le tableau ci-dessous résume le profit lié à chaque projet, ainsi que les projets préalables.

projet	**profit**	**projets préalables**
p_1	4	p_5, p_6
p_2	6	p_3, p_6
p_3	2	p_7
p_4	3	p_3, p_8
p_5	-2	
p_6	-3	p_5
p_7	-5	
p_8	-8	

On va résoudre le problème à l'aide des flots.

Question 1. Dessiner le graphe G tel que :

- les sommets sont les projets $p_1, \ldots, p_8$, ainsi qu'un sommet source s et un sommet puits t ;
- si le profit lié au projet p_i et positif, alors il y a un arc (s, p_i) de capacité égale au profit de p_i ;
- si le profit lié au projet p_j et négatif, alors il y a un arc (p_j, t) de capacité égale au négatif du profit de p_j ;
- si p_i et préalable à p_j, alors il y a un arc (p_i, p_j) de capacité ∞.

Question 2. Trouver un s–t flot maximum dans G.

Question 3. Trouver une s–t coupe de capacité minimum G.

Supposons que la s–t coupe est de la forme (A, B), où $s \in A$ et $t \in B$. Alors, l'ensemble $A \setminus \{s\}$ représente les projets qui maximisent le profit.