Mobilité (M2 IMPAIRS) TD6

Exercice 1. **Feux de circulation**

La figure ci-dessous représente les trajectoires de neuf voies $\{V_1, \ldots, V_9\}$ à un carrefour très fréquenté de Mexico. Chaque voie est pourvue de ses propres feux de signalisation.

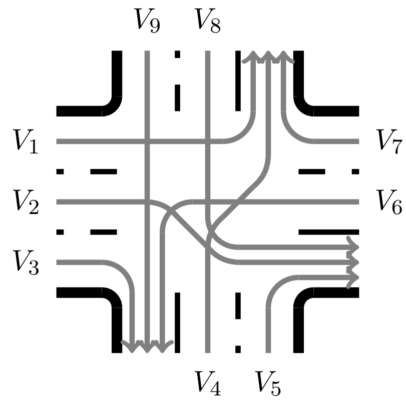


FIGURE 1 – Diagramme des neuf voies du carrefour. Le très grand nombre de véhicules empruntant ce carrefour (64 000 véhicules par jour en moyenne) conduit les autorités à réguler la circulation en phases, où à chaque phase les voies dont le feu est vert ne sont pas en conflit. Deux voies sont considérées en conflit si elles se croisent (par exemple V_1 et V_8) ou si elles ont la même destination (par exemple V_1 et V_7).

Les voitures d'une voie ne peuvent franchir le carrefour que lorsque leur feu est vert. La circulation est régulée par des cycles de 160 secondes, chaque cycle comportant 4 phases de durées 40 secondes comme suit :

Phase 1 : V_1, V_2 et V_3 sont au vert (les autres au rouge) ;
Phase 2 : V_4, V_5 et V_9 sont au vert (les autres au rouge) ;
Phase 3 : V_6 et V_7 sont au vert (les autres au rouge) ;
Phase 4 : V_8 est au vert (les autres au rouge).

Question 1. Le but est de minimiser le nombre de phases pour réguler le trafic. Modélisez la situation par un problème de graphe.

Question 2. Peut-on faire mieux que 4 phases pour réguler le trafic ?

Les voies V_2 et V_4 sont en fait très fréquentées, de sorte que les autorités souhaitent que V_2 et V_4 soient au vert deux fois par cycle et non plus une seule fois comme précédemment.

Question 3. Modifier le modèle pour prendre en compte cette contrainte ; donner un nouveau cycle ayant un nombre minimum de phases tel que V_2 et V_4 sont au vert deux fois dans le cycle. Justifier.

Exercice 2. **Produits chimiques**

Huit lots de produits chimiques doivent être expédiés par avion depuis Saint-Denis (île de la Réunion) à la station scientifique de Port-aux-Français (îles Kerguélen). Pour des raisons de sécurité, certains de ces produits chimiques ne peuvent pas être transportés dans le même container. En effet, les produits interagissent entre eux et il est risqué de les stocker dans un même container si les lots ne sont pas parfaitement étanches. Les produits sont notés $P_1, \ldots, P_8$. La table ci-dessous liste les interactions entre les produits chimiques. Par exemple, le produit P_1 peut être placé dans le même container que les produits P_3, P_4, P_7 et P_8, mais ne peut pas être placé avec P_2, P_5 ou P_6.

$P_1 : P_2, P_5, P_6$	$P_2 : P_1, P_3, P_5, P_7$	$P_3 : P_2, P_4, P_7$
$P_4 : P_3, P_6, P_7, P_8$	$P_5 : P_1, P_2, P_6, P_7, P_8$	$P_6 : P_1, P_4, P_5, P_8$
$P_7 : P_2, P_3, P_4, P_5, P_8$	$P_8 : P_4, P_5, P_6, P_7$	

Le prix de l'envoi d'un container est de 3000 euros. On peut supposer qu'il n'y a pas de contrainte de capacité sur les containers (c.-à-d. un container peut contenir un nombre maximum de n lots, avec $n \geq 8$).

Question 1. Donner le prix minimum de l'envoi des huit lots de produits chimiques ainsi que la répartition des lots de produits chimiques dans les containers. Justifier soigneusement. (Indice : ne réinventez pas la roue !).

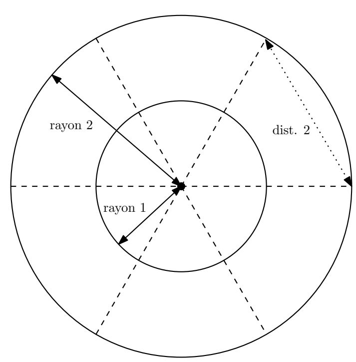
Exercice 3. **Approximation pour les antennes radio**

Une entreprise souhaite diffuser une nouvelle station de radio sur des antennes existantes. L'entreprise doit choisir combien de fréquences acheter, sachant que chaque fréquence coûte 1000€, et qu'elle veut bien sûr minimiser ses dépenses. Heureusement, une fréquence peut être utilisée sur plusieurs antennes, à condition que leurs zones de couvertures soient disjointes (sinon, il y a des interférences). Nous supposerons que la zone de couverture d'une antenne est un disque de rayon 1km autour de l'antenne.

Question 1. Modélisez ce problème par un graphe et donnez le nom du problème de graphe correspondant.

On remarque que les graphes obtenus ainsi ont une structure particulière, que l'on souhaite exploiter pour trouver un algorithme polynomial de 6-approximation pour le problème de coloration dans les graphes dits *de disques unitaires.*

Question 2. Le schéma suivant montre une antenne, entourée de sa zone de couverture (disque de rayon 1) puis d'un disque de rayon 2. On a découpé ce disque de rayon deux en six parties identiques. On peut prouver (on l'admettra ici) que, si deux points sont dans la même partie, alors leur distance est inférieure ou égale à 2. Prouver que $\Delta(G) \leq 6\omega(G) - 6$, où $\Delta(G)$ dénote le degré maximum du graphe, et $\omega(G)$ la taille de la plus grande clique.



Question 3. Colorions maintenant G avec un algorithme glouton, et appelons C le nombre de couleurs utilisées. Montrez que cet algorithme est une 6-approximation, c'est à dire que $C \leq 6 \cdot \text{OPT}$ où OPT est le nombre de couleurs optimal pour colorier le graphe.

Question 4. Montrez que, si l'on améliore légèrement l'algorithme précédent en décidant de colorier les antennes de gauche à droite, on obtient une 3-approximation.