Feuille 3 : Groupes

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les systèmes de congruences suivants :

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 7 \\ x \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}, \quad \begin{cases} x \equiv 4 \pmod{21} \\ x \equiv 10 \pmod{33} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{17} \\ x \equiv 4 \pmod{11} \\ x \equiv 5 \pmod 6 \end{cases}.$$

Exercice 2. Soit $G = \{e, x, y, z, t\}$ un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$, dont la table de multiplication est donnée par

$\star$	e	x	y	z	t
e	e	x	y	z	t
x	x	e	t	y	z
y	y	z	e	t	x
z	z	t	x	e	y
t	t	y	z	x	e

La loi $\star$ est-elle commutative ? Est-ce une loi de groupe ?

Exercice 3. Soit G un groupe d'ordre 2. Ecrire sa table de multiplication.

Exercice 4. Quelles sont les structures de groupes possibles sur un ensemble à 3 éléments ? Et à 4 éléments ?

Exercice 5. Soit G un groupe tel que $g^2 = 1$ pour tout $g \in G$. Montrer que G est abélien.

Exercice 6. Soit G un groupe. Soit x, $y \in G$ tels que $yx = xy^2$ et $xy = yx^2$. Montrer que $x = y = 1$.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

1. Montrer que $\mathcal{U}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Montrer que $\mathcal{U}_n$ est un groupe cyclique d'ordre n.
3. Montrer que m divise n si et seulement si $\mathcal{U}_m \subseteq \mathcal{U}_n$.

Exercice 8. Trouver tous les ordres des éléments des groupes $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$ et $((\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*, \cdot)$.

Exercice 9. Soit G un groupe abélien. Montrer que l'ensemble $H = \{x \in G \mid \mathrm{ord}(x) \text{ est fini}\}$ est un sous-groupe de G.

Exercice 10. Montrer que $\{e^{2ir\pi} \mid r \in \mathbb{Q}\}$ muni de la multiplication est un groupe infini dans lequel tout élément est d'ordre fini.

Exercice 11. Soit G un groupe d'ordre 35. Montrer que G possède un élément d'ordre 5 et un élément d'ordre 7.

Exercice 12. On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ et $SL_2(\mathbb{Z})$ respectivement l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients entiers et l'ensemble de celles qui sont de déterminant 1.

1. Montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un groupe multiplicatif d'ordre infini. Est-il commutatif ?
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ordre de A, B et AB.

Exercice 13. Soit G un groupe. Montrer que si deux éléments x et y de G commutent et sont d'ordre a et b premier entre eux, alors l'ordre de xy est ab.

Exercice 14. Montrer que le groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ est cyclique.