21.10.21

LOS TD 5

Exercice 1

$\varphi = \{ \{P,Q,R\}, \{P,\neg Q,\neg R\}, \{P,\neg S\}, \{\neg Q,\neg R,\neg S\}, \{\neg P,\neg Q,R\}, \{T,U\}, \{T,\neg U\}, \{Q,\neg T\}, \{\neg R,\neg T\} \}$

$\downarrow [0/S]$ $\quad \neg S \in \text{Pure}(F)$

$\{ \{P,Q,R\}, \{P,\neg Q,\neg R\}, \{\neg P,\neg Q,R\}, \{T,U\}, \{T,\neg U\}, \{Q,\neg T\}, \{\neg R,\neg T\} \}$

split (T) $\quad [1/T]$ $\qquad$ $[0/T]$ $\quad$ split $(\neg T)$

$\{ \{P,Q,R\}, \{P,\neg Q,\neg R\}, \{\neg P,\neg Q,R\}, \{Q\}, \{\neg R\} \}$

$\downarrow [1/Q]$ $\quad Q \in \text{unit}(F)$

$\{ \{P,\neg R\}, \{\neg P,R\}, \{\neg R\} \}$

$\downarrow [0/R]$ $\quad \neg R \in \text{unit}(F)$

$\{ \{\neg P\} \}$

$\downarrow [0/P]$ $\quad \neg P \in \text{unit}(F)$

$\emptyset$

SAT $\to$ modèle $[0/P][1/Q][0/R][0/S][1/T]\underbrace{[1/U]}$

$\hookrightarrow U = 0$ ou 1 sans importance.

$\{ \{P,Q,R\}, \{P,\neg Q,\neg R\}, \{\neg P,\neg Q,R\}, \{U\}, \{\neg U\}, \{\neg R,\neg T\} \}$

$\downarrow [1/U]$ $\quad U \in \text{unit}(F)$

$\{ \{P,Q,R\}, \{P,\neg Q,\neg R\}, \{\neg P,\neg Q,R\}, \{\}, \{\neg R,\neg T\} \}$

$\downarrow$

On a $\{\}$ donc cette branche n'est pas SAT.

Exercice 2

a) `[[1;-2;-3];[-1;2;-3];[-1;-2;3]]`

b)
```
let rec is_clause f :
  math f with :
  | Prop P | Neg (Prop P) -> true
  | Or (F1, F2) -> is_clause (F1) && is_clause (F2)
  | _ -> false
```

c)
```
let rec is_cnf f :
  match f with :
  | Prop P | Neg (Prop P) -> true
  | And (F1, F2) -> is_cnf F1 && is_cnf F2
  | Or (F1, F2) -> is_clause (F1) && is_clause F2
  | _ -> false
```

d)
```
let lit_of_clause f =
  math f with :
  | Prop P -> [P]
  | Neg (P) -> [-P]
  | Or (F1, F2) -> List.rev_append (loop F1) (loop F2)
  | _ -> failwith "not a clause"
```

e)
```
let clauses_of_cnf f =
  math f with
  | And (F1, F2) -> List.rev_append clauses_of_cnf F1
                                    clauses_of_cnf F2
  | F1 -> if not is_clause F1
          then failwith "not CNF"
          else [F1]
```

f)
```
let dimacs_of_cnf f :
  if not is_cnf f then None
  else Some List.map lit_of_clause (clauses_of_cnf f)
```

Exercice 3

a) $P_{k,m}$ est vrai si le k-ième pigeon est dans le n-ième tiroir.

b) $\bigwedge_{i=1}^{k} \bigvee_{j=1}^{n} P_{ij}$ ✓

c) $\bigwedge_{j=1}^{m} \bigvee_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} \neg P_{i_1,j} \vee \neg P_{i_2,j}$ ✓

d) On écrit $P_{k,m}$ comme km et $\neg P_{k,m}$ comme $\overline{km}$

$$\varphi = \{\underbrace{\{00, 01\}, \{10, 11\}}_{b)}, \overbrace{\{\overline{00}, \overline{10}\}, \{\overline{01}, \overline{11}\}}^{c)}\}$$

split (00) — $[\top/00]$

$\{\{10, 11\}, \{\overline{10}\}, \{\overline{01}, \overline{11}\}\}$

$[\bot/10]$ unit $(\overline{10})$

$\{\{11\}, \{\overline{01}, \overline{11}\}\}$

$[\top/11]$ unit (11)

$\{\{\overline{01}\}\}$

$[\bot/01]$ unit $(\overline{01})$

$\emptyset \Rightarrow$ OK : $P_{0,0} = P_{1,1} = \top$

et $P_{0,1} = P_{1,0} = \bot$

split $(\overline{00})$ → pas besoin de faire ce côté, l'exercice ne demande pas de trouver toutes les interprétations qui SAT, une seule suffit.

e)

$$\varphi = \{\underbrace{\{00, 01\}, \{10, 11\}, \{20, 21\}, \{\overline{00}, \overline{10}\}}_{b)}, \overbrace{\{\overline{00}, \overline{20}\}, \{\overline{10}, \overline{20}\}, \{\overline{01}, \overline{11}\}, \{\overline{01}, \overline{21}\}, \{\overline{11}, \overline{21}\}}^{c)}\}$$

$[\top/00]$ split (00)

$\{\{10, 11\}, \{20, 21\}, \{\overline{10}\}, \{\overline{20}\}, \{\overline{10}, \overline{20}\}, \{\overline{01}, \overline{11}\}, \{\overline{01}, \overline{21}\}, \{\overline{11}, \overline{21}\}\}$

$[\bot/10]$ $[\bot/20]$ unit $(\overline{10})$ et unit $(\overline{20})$

$\{\{11\}, \{21\}, \{\overline{01}, \overline{11}\}, \{\overline{01}, \overline{21}\}, \{\overline{11}, \overline{21}\}\}$

$[\top/11]$ $[\top/21]$ unit (11) et unit (21)

$\{\{\overline{01}, \overline{11}\}, \{\overline{01}\}, \{\}\}$

↳ clause vide

split $(\overline{00})$ $[\bot/00]$

$\{\{01\}, \{10, 11\}, \{20, 21\}, \{\overline{10}, \overline{20}\}, \{\overline{01}, \overline{11}\}, \{\overline{01}, \overline{21}\}, \{\overline{11}, \overline{21}\}\}$

unit (01) $[\top/01]$

$\{\{10, 11\}, \{20, 21\}, \{\overline{10}, \overline{20}\}, \{\overline{11}\}, \{\overline{21}\}, \{\overline{11}, \overline{21}\}\}$

$[\bot/11]$ $[\bot/21]$ unit $(\overline{11})$ et unit $(\overline{21})$

$\{\{10\}, \{20\}, \{\overline{10}, \overline{20}\}\}$

$[\top/10]$ $[\top/20]$ unit (10) et unit (20)

$\{\{\}\}$

↳ clause vide

$$\boxed{\text{Toutes les branches finissent sur une clause vide} \Rightarrow \varphi \notin \text{SAT.}}$$

Exercice 4

a) NON

b)