

Exercice 1

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}$$

On choisit :

- $v = (-1, 1, 1) \in P$ car $-1 - 2 \times 1 + 3 \times 1 = 0$
- $w = (1, 2, 1) \in P$ car $1 - 2 \times 2 + 3 = 0$

v et w ne sont pas colinéaires

Soit $u = av + bw$, $a, b \in \mathbb{R}$

- Montrons que $u \in P \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

$$u = av + bw = a(-1, 1, 1) + b(1, 2, 1) = (-a, a, a) + (b, 2b, b) = (-a + b, a + 2b, a + b)$$

$$\text{Donc } x - 2y + 3z = \underbrace{-a + b}_x - 2 \underbrace{(a + 2b)}_y + 3 \underbrace{(a + b)}_z = -a + b - 2a - 4b + 3a + 3b = 0$$

$$\text{Donc } u \in P \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

- et inversement $\forall u = (x, y, z) \in P$, u peut s'écrire comme une combinaison linéaire de v et w .

Exercice 2

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - 2z = 0\}$$

$$\cdot \forall u = (x, y, z) \in F \quad 2x - y - 2z = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y + z$$

$$\text{Donc } u = \left(\frac{1}{2}y + z, y, z\right) \text{ avec } y, z \in \mathbb{R}$$

$$u = y \underbrace{\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)}_v + z \underbrace{(1, 0, 1)}_w \quad \text{où } v \text{ et } w \text{ est une famille génératrice de } F.$$

$$\text{On } v = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) \in F \text{ car } 2 \times \frac{1}{2} - 1 - 0 = 0$$

$$\text{et } w = (1, 0, 1) \in F \text{ car } 2 - 0 - 2 = 0$$

De plus v et w sont indépendants. Donc ils forment une base de F .

Exercice 3

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x - y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}\}$$

$$\forall u \in F \begin{cases} x - y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = t \end{cases} \text{ donc } u = (y, y, t, t), y, t \in \mathbb{R}$$

Donc $u = y \underbrace{(1, 1, 0, 0)}_v + t \underbrace{(0, 0, 1, 1)}_w$ avec $v, w \in F$ une famille génératrice de F .

De plus v et w ne sont pas colinéaires, et forment donc une famille libre.

Donc $\{v, w\}$ est une base de F .

Exercice 4

On écrit F sous forme matricielle puis on échelonne et réduit la matrice.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \\ -L_1 - 2L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x - 3t = 0 \\ y + 3z + 3t = 0 \end{cases}\}$$

$$\text{Donc } \forall u \in F \begin{cases} x = 3t \\ y = -3z - 3t \end{cases} \text{ donc } u = (3t, -3z - 3t, z, t), z, t \in \mathbb{R}$$
$$u = z \underbrace{(0, -3, 1, 0)}_v + t \underbrace{(3, -3, 0, 1)}_w$$

$v \in F \qquad w \in F$

Comme $\{v, w\}$ est une famille libre et génératrice de F , c'est une base de F .