08.03.2021 (présentiel) — OL4 : CNTD 5

Littéral := Une formule de la forme x ou $\neg x$ (où $x \in \mathcal{V}$)

Rmq : Comme on a $\neg\neg x \equiv x$, on dira que si l est un littéral, alors $\neg l$ l'est aussi.

Q : Est ce que tout littéral est en NNF ?

↳ A : OUI car $x, \neg x$ a toutes occurences de la négation sur une variable ⇒ donc NNF.

I/ Forme normale disjonctive (DNF)

Monôme : une conjonction finie de littéraux

(= des variables séparées par des $\wedge$).

Exemples : $A = x \wedge (\neg x \vee y)$ n'est PAS un monôme

$B = x \wedge (x \wedge \neg y)$ est un monôme

$= \bigwedge_{B \in \{x, x, \neg y\}} B$ où chaque formule de $\{x, x, \neg y\}$ est un littéral

DNF : Une formule est en DNF si elle est une disjonction finie de monômes.

↳ $A = \bigvee_{B \in \{\dots\}} B$ tq chaque $B = \bigwedge_{l \in \{\dots\}} l$ où les l sont des littéraux

autrement dit : $A = \bigvee_{i=1}^{m} \left(\bigwedge_{j=1}^{n} l_{i,j} \right)$

Exemples :

$A = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge z \wedge y)$ est en DNF

$A = \bigvee_{B \in \left\{ \bigwedge_{l \in \{x, y\}} l ,\ \bigwedge_{l \in \{\neg x, \neg y\}} l ,\ \bigwedge_{l \in \{\neg x, z, y\}} l \right\}} B$

II/ Forme normale conjonctive (CNF)

Clause : une disjonction finie de littéraux

CNF : Une formule est en CNF si elle est une conjonction finie de clauses.

Q :

1) Un monôme est-il :

- en DNF ? A : OUI $A = \bigwedge_{i=1}^{n} l = \bigvee_{B \in \{A\}} B$
- en CNF ? A : OUI $A = \bigwedge l$ où l sont des littéraux, donc des clauses.

2) Une clause est-elle :

- en DNF ? A : OUI $A = \bigvee l$ où l est un littéral, donc un monôme
- en CNF ? A : OUI $A = \bigwedge_{B \in \{A\}} B$

3) Si A et B sont en DNF, est ce que :

- $A \wedge B$ est en DNF ? A : NON, pas forcément.
  $A = x$, $B = x \vee y$ $\quad A \wedge B = x \wedge (x \vee y)$ pas DNF
- $A \vee B$ est en DNF ? A : OUI
  $A = \bigvee_{i=1}^{m} m_i$, $B = \bigvee_{j=1}^{m'} m_j$ $\quad A \vee B = \bigvee_{i=1}^{m+m'} m_k$

4) A et B en CNF

$A \wedge B$ en CNF ? OUI

$A \vee B$ en CNF ? NON

3) Fonctions définissables

Soit A une formule et $|var(A)| \leq n$ (A a au plus n variables)

Définissons $f_A : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$

$$f_A(b_1, \dots, b_n) := [\![A]\!] \left({}^{b_1}/_{x_1}, {}^{b_2}/_{x_2}, \dots, {}^{b_n}/_{x_n} \right)$$

où $var(A) \subset \{x_1, \dots, x_n\}$

Q : $A = (x \vee \neg y) \wedge (\neg y)$

x	y	$\neg y$	$x \vee \neg y$	A
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

$f_A : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$

On voit que $var(A) \subset \{x, y, z\}$

$$f_A(b_1, b_2, b_3) = [\![A]\!] \left({}^{b_1}/_{x}, {}^{b_2}/_{y}, {}^{b_3}/_{z} \right)$$
$$= [\![A]\!] \left({}^{b_1}/_{x}, {}^{b_2}/_{y} \right)$$

b_3 n'influe pas sur le résultat car il n'y a que 2 variables dans A.

Une fonction booléenne $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ est <u>définissable</u> si il existe une formule A, $|var(A)| \leq n$ telle que $f_A = f$