

Théorème: Soit  $\sigma \in S_n$

Alors  $\exists$  une décomposition de  $\sigma$  en produit de cycles à supports 2 à 2 disjoints.  
Elle est unique à l'ordre près.

Exemple

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 7 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{orbites} = \{1, 3, 2\}, \{4, 5, 7, 8\}, \{6\}$$

$$\text{Donc } \sigma = (1 \ 3 \ 2)(4 \ 5 \ 7 \ 8)$$

Théorème Soit  $\gamma$  un cycle de longueur  $k$

Alors  $\gamma$  s'écrit comme un produit de  $k-1$  transpositions.

En particulier, sa signature est  $(-1)^{k-1}$ .

Corollaire

$\sigma = \gamma_1 \dots \gamma_m$  un produit de cycles à supports disjoints

Alors  $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\ell(\gamma_1), \dots, \ell(\gamma_m))$  où  $\ell(\gamma)$  est la longueur de  $\gamma$