Outils Logiques Groupe 3 & 4 – DM 1

à rendre avant le 8 février 2021 par email à chaitanya@irif.fr
Les exercices étoilés « $\star - \star\star\star$ » sont facultatifs.

Dans ce sujet, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble des entiers (relatifs), et $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombre réels.

Exercice 1

Pour chacun des ordres partiels suivants, dire s'il est un ordre bien fondé. Si oui, essayer de le justifier. Si ce n'est pas le cas, trouver une suite infinie décroissante.

1. Les entiers $(\mathbb{Z}, >)$ avec l'ordre habituel.
2. Les entiers naturels $(\mathbb{N}, >)$ avec l'ordre habituel.
3. $(\mathbb{Z}, >_{|-|})$ Les entiers avec l'ordre absolu ($n >_{|-|} m$ ssi $|n| > |m|$).
4. L'intervalle $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ avec l'ordre $>$ habituel.

Exercice 2

Pour deux entiers $m, n \in \mathbb{Z}$, on dit que m est un *diviseur propre* de n si $m \neq n$ et s'il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m \times k = n$. Introduisons la relation binaire $>_d$ sur $\mathbb{Z}$ telle que $n >_d m$ ssi m est un diviseur propre de n. Est-ce que $(\mathbb{Z}, >_d)$ est un ordre partiel ? Si oui, est-il bien fondé ?

Exercice 3

L'ensemble X^* des mots sur un ensemble X (appelé *l'alphabet*) est l'ensemble des suites finies d'éléments de X. On considére le système de réécriture suivant sur les mots sur l'alphabet $\{a, b\}$: pour tous $u, v \in \{a, b\}^*$, on a $uaabv \to uabbv$ et $uababv \to uaabv$. Est-il un système terminant ? Justifier.

Exercice 4

Pour deux ensembles A, B, on note $B \supsetneq A$ ssi $A \subset B$ et $A \neq B$. Soit X un ensemble quelconque.

1. Montrer que $(\mathcal{P}(X), \supsetneq)$ (l'ensemble de parties de X muni de la relation $\supsetneq$) est un ordre partiel.
2. Montrer que si X est fini (c'est-à-dire X a un nombre fini d'éléments distincts), alors $(\mathcal{P}(X), \supsetneq)$ est un ordre bien fondé.
3. ($\star\star$) Montrer qu'il en est de même pour X quelconque. (Indice : utiliser le Lemme de Kuratowski-Zorn.)