Outils Logiques Groupe 3 & 4 – DM 2 (Correction)

Chaitanya Leena Subramaniam

à rendre avant le 15 février 2021 par email à chaitanya@irif.fr

Exercice 1

Soit $\Sigma = \{a^0, b^1, x^1, \neg^2\}$ une signature. Pour chacune des expressions ci-dessous, dire si elle correspond à un élément de T_Σ. Justifier.

(1) x

(2) $(b, (\neg, a, x))$

(3) $(\neg, (b, (b, a)), a)$

(4) $(\neg, (\neg, b, a), a)$

(5) $(x, (\neg, a, (\neg, a, (x, a))))$

Solution

(1) Non, car $x^1 \in \Sigma$ est d'arité 1 et non 0.

(2) Non, car $x^1 \in \Sigma$ est d'arité 1 et non 0.

(3) Oui. D'abord, a est un élément de T_Σ car $a^0 \in \Sigma$ est d'arité 0. Donc (b, a) est un élément de T_Σ car $b^1 \in \Sigma$ est d'arité 1. De même pour $(b, (b, a))$. Donc enfin, $\neg^2 \in \Sigma$ étant d'arité 2, on conclut que $(\neg, (b, (b, a)), a)$ est un élément de T_Σ.

(4) Non, car $b^1 \in \Sigma$ est d'arité 1 et non 0.

(5) Oui. D'abord, $a^0 \in \Sigma$ est d'arité 0 et $x^1 \in \Sigma$ est d'arité 1, donc a et (x, a) sont des éléments de T_Σ. Donc, en suite, $(\neg, a, (x, a))$ et $(\neg, a, (\neg, a, (x, a)))$ sont des éléments de T_Σ car $\neg^2 \in \Sigma$ est d'arité 2. Donc enfin, $(x, (\neg, a(\neg, a, (x, a))))$ est un élément de T_Σ car $x^1 \in \Sigma$ est d'arité 1.

Exercice 2

Soit $\Sigma = \{\varepsilon^0, a^1, b^1\}$. Considérer la structure de Σ-algèbre suivante sur $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} &f_\varepsilon = 1 \\ &f_a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad ; \quad f_a(x) = 3 \times x \\ &f_b \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad ; \quad f_b(x) = x + 1 \end{aligned}$$

(1) Quel est l'alphabet X tel que T_Σ est en bijection avec l'ensemble X^* des mots sur X ? Par la suite nous allons identifier $X^* = T_\Sigma$.

(2) Soit $\mu \colon T_\Sigma \longrightarrow \mathbb{N}$ le morphisme d'algèbre depuis l'algèbre initiale $\underline{T_\Sigma}$. Quelle est la valeur de $\mu(abab)$? (Ici le mot $abab$ correspond à un arbre de syntaxe grâce au point précédent.)

(3) Montrer que pour tout mot $v \in T_\Sigma$, on a $\mu(abv) > \mu(bbav)$ pour l'ordre habituel sur $\mathbb{N}$. (Indice : calculer $\mu(abv), \mu(bbav)$ en fonction de $\mu(v)$.)

(4) Montrer que pour tous mots $u, v, w \in T_\Sigma$, si on a $\mu(v) > \mu(w)$, alors on a $\mu(uv) > \mu(uw)$. (Indice : pour cela, commencer en montrant que si on a $\mu(v) > \mu(w)$, alors on a $\mu(av) > \mu(aw)$ et $\mu(bv) > \mu(bw)$. Puis conclure.)

(5) En déduire que pour tous mots $u, v \in T_\Sigma$, on a $\mu(uabv) > \mu(ubbav)$.

(6) Soit $\to$ la relation suivante sur T_Σ : pour tous mots $u, v \in T_\Sigma$, on a

$$uabv \to ubbav$$

Montrer que la relation $\to$ termine.

Solution

(1) L'alphabet est $X = \{a, b\}$.

(2) Rappelons que $abab = (a, (b, (a, (b, \varepsilon))))$. On a

$$\begin{aligned}
\mu(abab) &= f_a(\mu(bab)) = f_a(f_b(\mu(ab))) \\
&= f_a(f_b(f_a(\mu(b)))) \\
&= f_a(f_b(f_a(f_b(\mu(\varepsilon))))) \\
&= f_a(f_b(f_a(f_b(f_\varepsilon)))) \\
&= 3 \times (3 \times (1 + 1) + 1) = 21.
\end{aligned}$$

(3) Pour tout $v \in T_\Sigma$, on a $\mu(abv) = f_a(f_b(\mu(v))) = 3\mu(v) + 3$ et $\mu(bbav) = f_b(f_b(f_a(\mu(v)))) = 3\mu(v) + 2$, donc $\mu(abv) > \mu(bbav)$ dans $\mathbb{N}$.

(4) Soit $v, w \in T_\Sigma$ deux mots tels que $\mu(v) > \mu(w)$ dans $\mathbb{N}$. Alors on a $\mu(av) = 3\mu(v) > 3\mu(w) = \mu(aw)$ et $\mu(bv) = \mu(v) + 1 > \mu(w) + 1 = \mu(bw)$ dans $\mathbb{N}$. Donc, par récurrence, pour tout mot $u \in T_\Sigma$, on a $\mu(uv) > \mu(uw)$.

(5) Soit $u, v \in T_\Sigma$ deux mots, alors par (3) on a que $\mu(abv) > \mu(bbav)$ dans $\mathbb{N}$. Donc, par (4), on a que $\mu(uabv) > \mu(bbav)$ dans $\mathbb{N}$.

(6) Par (5), $\mu\colon T_\Sigma \longrightarrow \mathbb{N}$ est une fonction de T_Σ dans un ordre bien fondé, telle que pour tous mots $w, w' \in T_\Sigma$ tels que $w \to w'$, on a que $\mu(w) > \mu(w')$ dans $\mathbb{N}$. Donc la relation $\to$ sur T_Σ termine.

Exercice 3

Considérons l'alphabet $\{a, b, c\}$.

(1) Définissez une signature Σ telle que T_Σ est en bijection avec l'ensemble $\{a, b, c\}^*$ des mots sur $\{a, b, c\}$.

(2) Définissez une structure de Σ-algèbre sur $\mathbb{N}$ telle que la fonction canonique $\mu\colon T_\Sigma \longrightarrow \mathbb{N}$ envoie un mot w sur le nombre de caractères dans w (la longueur du mot w).

(3) Définissez une structure de Σ-algèbre sur $\mathbb{N}$ telle que la fonction canonique $\mu\colon T_\Sigma \longrightarrow \mathbb{N}$ envoie un mot w sur le nombre de a et de c qui apparaissent dans w.

(4) Soit $\to$ la relation suivante sur $\{a, b, c\}^*$: pour tous mots $u, v \in \{a, b, c\}^*$, on a

$$uacv \to uabbv \qquad ucbav \to ucav \qquad uaav \to uabv$$

Montrer qu'il existe une fonction $f\colon \{a, b, c\}^* \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telle que pour tout pair de mots $w, w' \in \{a, b, c\}^*$, si on a $w \to w'$, alors on a $f(w) >_{lex} f(w')$. (Ici, $>_{lex}$ est l'ordre lexicographique habituel sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$).

(5) En déduire que la relation $\to$ termine.

Solution

(1) La signature est $\Sigma = \{\varepsilon^0, a^1, b^1, c^1\}$.

(2) Soit la structure de Σ-algèbre suivante sur $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&f_\varepsilon = 0 \in \mathbb{N} && \\
&f_a\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} && f_a(n) = n + 1 \\
&f_b\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} && f_b(n) = n + 1 \\
&f_c\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} && f_c(n) = n + 1
\end{aligned}$$

Soit $\mu_1\colon \underline{T_\Sigma} \longrightarrow \underline{\mathbb{N}}$ le morphisme canonique associé. Alors on a $\mu_1(aw) = \mu_1(bw) = \mu_1(cw) = \mu_1(w) + 1$ pour tout mot $w \in T_\Sigma$. Donc μ_1 envoie un mot sur le nombre de caractères dans ce mot.

(3) Soit la structure de Σ-algèbre suivante sur $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&g_\varepsilon = 0 \in \mathbb{N} && \\
&g_a\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} && g_a(n) = n+1 \\
&g_b\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} && g_b(n) = n \\
&g_c\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} && g_c(n) = n+1
\end{aligned}$$

Soit $\mu_2\colon \underline{T_\Sigma} \longrightarrow \underline{\mathbb{N}}$ le morphisme canonique associé. Alors on a $\mu_2(aw) = \mu_2(cw) = \mu_2(w) + 1$ et $\mu_2(bw) = \mu_2(w)$ pour tout mot $w \in T_\Sigma$. Donc μ_2 envoie un mot sur le nombre de a et de c dans ce mot.

(4) Soit $u, v \in T_\Sigma$ deux mots. Alors on a

$$\mu_2(uacv) > \mu_2(abbv) \qquad \mu_2(ucbav) = \mu_2(ucav) \qquad \mu_2(uaav) > \mu_2(uabv)$$

dans $\mathbb{N}$ par définition de μ_2.
On a aussi $\mu_1(ucbav) = \mu_1(ucav)$ dans $\mathbb{N}$ par définition de μ_1.
Donc on a

$$\begin{aligned}
(\mu_2(uacv), \mu_1(uacv)) &>_{lex} (\mu_2(abbv), \mu_1(abbv)) \\
(\mu_2(ucbav), \mu_1(ucbav)) &>_{lex} (\mu_2(ucav), \mu_1(ucav)) \\
(\mu_2(uaav), \mu_1(uaav)) &>_{lex} (\mu_2(uabv), \mu_1(uabv))
\end{aligned}$$

dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ pour l'ordre lexicographique habituel. On a donc que la fonction $(\mu_2(-), \mu_2(-))\colon T_\Sigma \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ qui envoie un mot w sur $(\mu_2(w), \mu_1(w))$ est telle que pour tous mots $w, w' \in T_\Sigma$ tels que $w \to w'$, on a que $(\mu_2(w), \mu_1(w)) >_{lex} (\mu_2(w'), \mu_1(w'))$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On conclut que la relation $\to$ sur T_Σ termine.