

Théorème

L'ensemble des transpositions dans  $S_n$  est un ensemble générateur - ie toute permutation peut s'écrire comme un produit de transpositions.

Rmq : Cette décomposition n'est PAS unique

ex:  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_7$

$$\sigma(7) = 4$$

$$\sigma = \underbrace{(4 \ 7)}_{= Id} \circ (4 \ 7) \circ \sigma$$

$$\sigma = (4 \ 7) \circ \sigma' \quad \text{avec} \quad \sigma' = (4 \ 7) \circ \sigma$$

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \in S_6 \quad (\text{car } 7 \text{ reste à sa place}) \quad [\sigma' \in S_5 \text{ mais le fait que } 4 \text{ reste à sa place est une coïncidence}]$$

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_6 = (2 \ 6) \circ \sigma'' \quad \text{où} \quad \sigma'' = (2 \ 6) \circ \sigma'$$

$$\sigma'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in S_5$$

$$\sigma = (4 \ 7) \circ (2 \ 6) \circ \sigma''$$

$$\dots$$

$$\sigma = (4 \ 7)(2 \ 6)(1 \ 5)(2 \ 3)(1 \ 2) \quad (\text{on peut ne pas écrire } \circ)$$

Définition : Une inversion pour une permutation  $\sigma$  est une paire d'entiers  $(i, j)$  tq  $i < j$  mais  $\sigma(i) > \sigma(j)$ .

On appelle signature de  $\sigma$ ,  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{r(\sigma)}$  ou  $\gamma(\sigma)$  et le nbr d'inversion.

Une permutation est paire si  $\varepsilon(\sigma) = 1$ , impaire si  $\varepsilon(\sigma) = -1$ .

ex:  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{array}{l} 3 \ 4 \rightarrow 5 \ 4 \\ 3 \ 5 \rightarrow 5 \ 2 \\ 2 \ 5 \rightarrow 3 \ 2 \\ 4 \ 5 \rightarrow 4 \ 2 \end{array} \right\} 4 \text{ inversions donc } \sigma \text{ paire}$$

Théorème : La signature du produit de 2 permutations est le produit des signatures.

Autrement dit, soit  $\varepsilon$  le groupe  $\{\pm 1\}$  muni de la multiplication -  $\varepsilon : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$  est un morphisme de groupe.

Def: L'ensemble des permutations paires est le noyau de  $\varepsilon$ , c'est une sous-groupe de  $S_n$ .

On l'appelle groupe alterné  $A_n$ .

Par le th de Lagrange, on voit que la moitié des permutations sont paires.

Prop: La signature d'une transposition est  $-1$ .

Corollaire:  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^m$  où  $m$  est le nombre de transpositions dans la décomposition de  $\sigma$  en produit de transpositions.

ex  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2)(2\ 3)$  donc  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^2 = 1$  et  $\sigma$  est pair.

mais aussi  $\sigma = (2\ 3)(1\ 2)(2\ 3)(1\ 2)$  et  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^4 = 1 \rightarrow$  on a un nb pair qq soit la décomposition.

Définition Soit  $\sigma \in S_n$  et  $x \in [n]$  un entier

On appelle orbite de  $x$  sous l'action de  $\sigma$ , et on note  $O_\sigma(x)$  l'ensemble des entiers qu'on obtient en appliquant  $\sigma$  à  $x$  répétitivement.

$$O_\sigma(x) = \{\sigma^k(x), k \in \mathbb{Z}\}$$

Rmq: Soit  $l$  l'ordre de  $x$ .  $\sigma^l(x) = x$

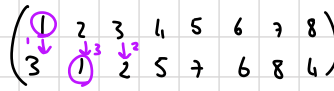
$$O_\sigma(x) = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{l-1}(x)\}$$

⚠ les éléments ne sont PAS forcément distincts

Rmq: Si  $y \in O_\sigma(x)$ ,  $\exists m \in \mathbb{Z}$  tq  $\sigma^m(x) = y$  et  $y = \sigma^{-m}(x)$  donc  $O_\sigma(x) = O_\sigma(y)$

Tout élément de  $[n]$  appartient à un unique orbite de  $\sigma$ .

ex:  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 7 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$



• orbite de 1 =  $\{1, 3, 2\}$  = orbite de 2 et de 3.

Prop: Soit  $\sigma \in S_n$  et  $k \geq 2$

$\sigma$  est un  $k$ -cycle si elle admet une seule orbite de  $k$  éléments, et toutes les autres ne contiennent qu'un seul élément.