Devoir maison 1

Nom : Le Franc
Prénom : Matthieu
N°Etudiant : 718 00 858
Groupe : 2

Exercice 1 :

$$\varphi_1 = ((P \vee Q) \Leftrightarrow R) \wedge ((\neg S) \Rightarrow (((P \wedge Q) \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow P))) \wedge \neg S$$

a). $nnf(\varphi_1) = ((\neg(P \vee Q) \vee R) \wedge (\neg R \vee (P \vee Q)) \wedge ((\neg S) \Rightarrow [((P \wedge Q) \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow P))) \wedge \neg S$

$= [((\neg P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge (\neg R \vee (P \vee Q))] \wedge [S \vee ((\neg(P \wedge Q) \vee R) \wedge (\neg Q \vee P))] \wedge \neg S$

$= [((\neg P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge (\neg R \vee (P \vee Q))] \wedge [S \vee (((\neg P \vee \neg Q) \vee R) \wedge (\neg Q \vee P))] \wedge \neg S$

$= [((\neg P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge (\neg R \vee P \vee Q)] \wedge [S \vee ((\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee P))] \wedge \neg S$

b). $cnf(nnf(\varphi_1)) = [((\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)) \wedge (\neg R \vee P \vee Q)] \wedge [((S \vee \neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (S \vee \neg Q \vee P))] \wedge \neg S$

$= (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (\neg R \vee P \vee Q) \wedge (S \vee \neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (S \vee \neg Q \vee P) \wedge \neg S$

Forme clausale de φ_1 :

$\{\{\neg P, R\}, \{\neg Q, R\}, \{\neg R, P, Q\}, \{S, \neg P, \neg Q, R\}, \{S, \neg Q, P\}, \{\neg S\}\}$

c).

$$\{\{\neg P, R\}, \{\neg Q, R\}, \{\neg R, P, Q\}, \{S, \neg P, \neg Q, R\}, \{S, \neg Q, P\}, \{\neg S\}\}$$

$$\Big\downarrow{\scriptstyle \neg S}$$

$$\{\{\neg P, R\}, \{\neg Q, R\}, \{\neg R, P, Q\}, \{\neg P, \neg Q, R\}, \{\neg Q, P\}\}$$

$$\Big\downarrow{\scriptstyle \neg P}$$

$$\{\{\neg Q, R\}, \{Q, \neg R\}, \{\neg Q\}\}$$

$$\Big\downarrow{\scriptstyle \neg Q}$$

$$\{\{\neg R\}\}$$

$$\Big\downarrow{\scriptstyle \neg R}$$

$$\emptyset$$

d). À la suite de l'exécution ~~de~~ DPLL, on obtient une clause vide, on a donc une interprétation satisfiable : $[\![R]\!]^I = 0$; $[\![Q]\!]^I = 0$; $[\![P]\!]^I = 0$; $[\![S]\!]^I = 0$

Exercice 2 : $\varphi_2 = (P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$

a). $mnf(\varphi_2) = \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R))$

$$= (P \wedge \neg Q) \vee ((Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \vee R))$$

$$= (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \vee R)$$

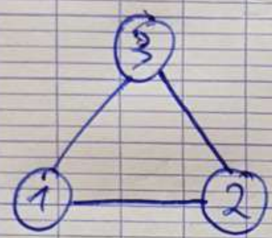
b).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash P, (Q \wedge \neg R), \neg P, R}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg Q, Q, \neg R, R}\,Ax \quad \dfrac{}{\neg Q, \neg R, \neg P, R}\,Ax}{\vdash \neg Q, (Q \wedge \neg R), \neg P, R}\,(\wedge)}{\vdash (P \wedge \neg Q), (Q \wedge \neg R), \neg P, R}\,(\wedge)}{\vdash (P \wedge \neg Q), (Q \wedge \neg R), (\neg P \vee R)}\,(\vee)}{\vdash (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \vee R)}\,(\vee)$$

c). Pour que la formule φ_2 soit valide, il faut que chaque branche du calcul des sequents soit fermée, qu'on ait donc des axiomes pour une ou plusieurs branche. Or, c'est le cas pour le cas de φ_2, nous avons une dérivation.
Donc, φ_2 est valide.

Exercice 3 :

a). $\varphi_{3,\le k} = \bigwedge_{1\le i\le k} \bigwedge_{\substack{v,v'\in V \\ v\neq v'}} (\neg P_{i,v} \vee \neg P_{i,v'})$



exemple : pour $k = 1$, on a les propositions $P_{1,1}$ $P_{1,2}$ $P_{1,3}$

avec une proposition pour chaque i, on a au plus une proposition $P_{i,v}$ vraie.
Donc $|S_I| \le k = 1$

b) $\varphi_{3,c} = \bigwedge_{(v,v')\in E} \left(\left(\bigvee_{1\le i\le k} P_{i,v}\right) \vee \left(\bigvee_{1\le i\le k} P_{i,v'}\right)\right)$

c). $\bigwedge_{1\le j\le k-1} \bigwedge_{\substack{v,v'\in V \\ v\neq v'}} (\neg Q_{j,v} \vee \neg Q_{j,v'}) \wedge \left(\left(\bigvee_{1\le j\le k-1} Q_{j,v}\right) \vee \left(\bigvee_{1\le j\le k-1} Q_{j,v'}\right)\right)$