Nom : Le Frane
Prénom : Matthieu
N°Etudiant : 71800858

Outils logiques, DM noté n°3

Exercice 2 : On définit C_{ijk}, une case en i, j où on a une valeur k.

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & & i & \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 \\
j & 2 & 3 & 1 \\
 & 3 & 1 & 2 \\
\hline
\end{array}$$

exemple : C_{111} ou C_{122}

$$A_n = \bigvee_{1\leq i,j,k\leq n} C_{ijk}$$

On a la case à la position $i\,j$ avec $k \in [1, n]$.

$$B_n = \bigwedge_{1\leq k,i\leq n} \left(\bigwedge_{1\leq j_1,j_2\leq n} \left(\neg \left(C_{ij_1k} \vee C_{ij_2k} \right)\right)\right)$$

$\forall i, \forall k, \forall j_1, j_2 \mid j_1 \neq j_2$

À chaque ligne i, chaque nombre k ne peut être présent plus d'une fois.

$$C_n = \bigwedge_{1\leq j,k\leq n} \left(\bigwedge_{1\leq i_1,i_2\leq n} \left(\neg C_{i_1jk} \vee \neg C_{i_2jk} \right)\right)$$

On obtient donc une formule φ en CNF :

$$\varphi = \left(\bigwedge_{1\leq k,i\leq n} \left(\bigwedge_{1\leq j_1,j_2\leq n} \left(\neg \left(C_{ij_1k} \vee C_{ij_2k} \right)\right)\right)\right)$$
$$\wedge \left(\bigwedge_{1\leq j,k\leq n} \left(\bigwedge_{1\leq i_1,i_2\leq n} \left(\neg C_{i_1jk} \vee \neg C_{i_2jk} \right)\right)\right)$$
$$\wedge \left(\bigvee_{1\leq i,j,k\leq n} \left(C_{ijk} \right)\right)$$

Soit : 2) $\wedge$ 3) $\wedge$ 4)

Exercice 1: $A = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow x) \Rightarrow x$

1). $A = x \vee \neg((x \Rightarrow y) \Rightarrow x)$

$= x \vee \neg(x \vee \neg(x \Rightarrow y))$

$= x \vee \neg(x \vee \neg(y \vee \neg x))$

x	y	$\neg x$	$\neg y$	$x \vee \neg(x \vee \neg(y \vee \neg x))$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

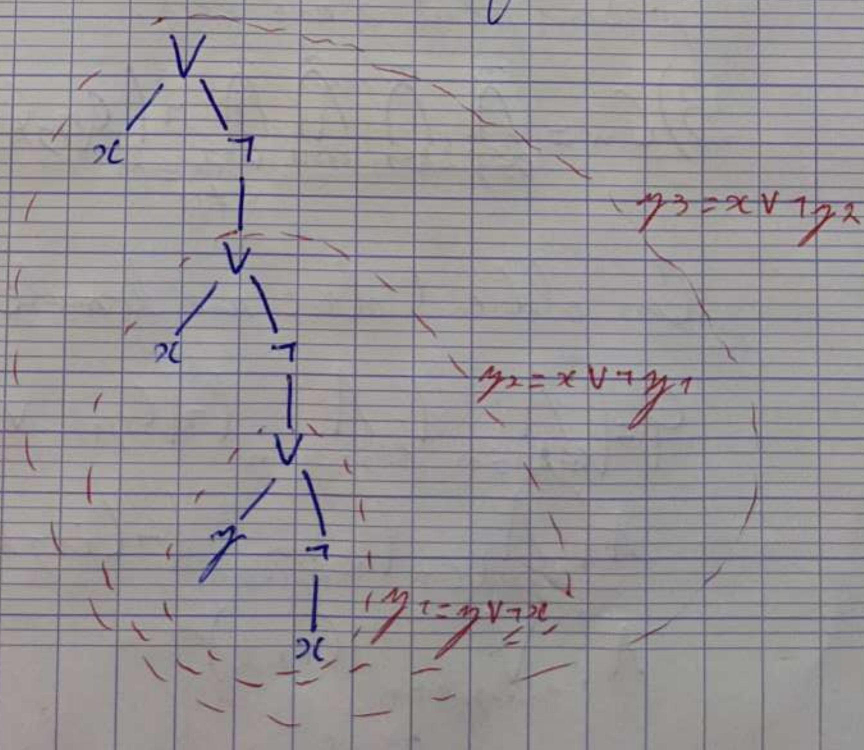
Une a une tautologie. La formule A est donc valide.

2). $A = x \vee \neg(x \vee \neg(y \vee \neg x))$

$= x \vee \neg x \wedge y \wedge \neg x$

$= x \vee \neg x \wedge y$

3). On construit l'arbre de la fonction A:



Soit : $y_3 \wedge (y_3 \Leftrightarrow (x \vee \neg y_2)) \wedge (y_2 \Leftrightarrow (x \vee \neg y_1))$
$\wedge (y_1 \Leftrightarrow (y \vee \neg x))$

4) La formule $Ts(A)$ calculée en 3) est équivalente en A car si l'on développe $Ts(A)$:

$y_3 \wedge (y_3 \Leftrightarrow (x \vee \neg y_2)) \wedge (y_2 \Leftrightarrow (x \vee \neg y_1)) \wedge (y_1 \Leftrightarrow (y \vee \neg x))$
$\Leftrightarrow x \vee \neg x \vee y \wedge ((\neg x \vee x \vee \neg y \vee x \vee \neg x \vee y)$
$\wedge (\neg x \vee x \vee \neg y \vee x \vee \neg x \vee y))$
$\wedge ((\neg x \vee y \vee x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y \vee x \vee \neg y))$
$\wedge ((\neg y \vee x \vee y \vee \neg x) \wedge (\neg y \vee x \vee y \vee \neg x))$

$\Leftrightarrow x \vee \neg x \vee y$.

Exercice 3 :

1) a). « chaque noeud a au moins une couleur entre 1 et k » :

- $\bigwedge_{a \in V_G} \left(\bigvee_{1 \leq i \leq k} x_{ai} \right)$

b). « chaque noeud a au plus une couleur 1 et k »

- $\bigwedge_{a \in V_G} \left(\bigwedge_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq k} \neg x_{ai_1} \vee \neg x_{ai_2} \right)$

c). « deux noeuds distincts et adjacents n'ont pas la même couleur »

- $\bigwedge_{\substack{(a,b) \in V_G \\ \text{avec } a \neq b}} \left(\bigvee_{1 \leq i_1, i_2 \leq k} \neg x_{ai_1} \vee x_{bi_2} \right)$

$\Psi_{G,k} =$ a). $\wedge$ b). $\wedge$ c).

2) $\{(D,C),(D,A),(D,B),(B,D),(B,A),(B,C),$
$(A,D),(A,B),(C,D),(C,B)\}$