Nom : Le Brane
Prénom Matthieu
N°Etudiant : 71800858

DM noté 1, Outils logiques

Exercice 2 :

1) $(x \Leftrightarrow ((x \Rightarrow 0) \Rightarrow 0))$

$\equiv (x \wedge (0 \vee \neg(0 \vee \neg x))) \vee (\neg(x \wedge (0 \vee \neg(0 \vee \neg x))))$

$\Leftrightarrow (x \wedge (0 \vee (1 \vee x))) \vee (\neg x \wedge (1 \vee (0 \vee \neg x))) = R$

x	y	$\neg x$	$\neg y$	$x \wedge (0 \vee (1 \vee x))$	$\neg x \wedge (1 \vee (0 \vee \neg x))$	R
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1

Vrai pour tous les cas, on a bien une tautologie.
Donc, formule valide.

2). $(A \Rightarrow B) \vee A$ pour déterminer si valide, on va effectuer une substitution en variable : $(x \Rightarrow y) \vee x$

$(x \Rightarrow y) \vee x \equiv (y \vee \neg x) \vee x$

x	y	$\neg x$	$y \vee \neg x$	$(y \vee \neg x) \vee x$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Formule valide

3) $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$

$\equiv \underbrace{(z \vee \neg x) \vee (\neg((y \vee \neg x)}_{=a} \vee \neg\underbrace{((z \vee \neg y) \vee \neg x)}_{=b})) = R$

x	y	z	$\neg x$	$\neg y$	$\neg z$	a	b	R
0	0	0	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	1

Formule non valide.

4). $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((x \wedge \neg y) \Rightarrow 0)$

$\equiv (y \vee \neg x) \Rightarrow (0 \vee \neg(x \wedge \neg y))$

$\equiv (0 \vee \neg(x \wedge \neg y)) \vee \neg(y \vee \neg x) = (\neg x \wedge y) \vee (\neg y \vee x) = R$

x	y	$\neg x$	$\neg y$	$\neg x \wedge y$	$\neg y \vee x$	R
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1

Formule valide.

Exercice 1 :

1). On souhaite montrer que $(\mathbb{Q}_+, >)$ est un ordre partiel.
Si on prend trois variables $x, y, z \in \mathbb{Q}$ et qu'on les poses tq $x > y$ et $y > z$, on peut dire que $x > y > z$ et donc, $x > z$.

On a donc une relation " $>$ " transitive. Alors $(\mathbb{Q}_+, >)$ est un ordre partiel.
$\mathbb{Q}_+$ minoré par 0 $\forall x \in \mathbb{Q}_+, x \geq 0$, alors toute suite décroissante est finie. On a donc également un ordre bien fondé.

2). Soit l'ensemble X^* sur un alphabet X avec la relation préfixe $>_p$.

On souhaite montrer que :

$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in X \wedge \forall_n \in \mathbb{N}\ x_n >_p x_{n+1}$

La suite est décroissante.

Montrons que $\exists m \mid \forall n, x_n \geq_p x_m$, soit (x_n) finie.

Par définition : $\forall n, x_n >_p x_{n+1} \Rightarrow \exists w \mid x_n = x_{n+1}.w$

En prenant le mot x_m, on a : $x_n > x_m\ \forall n$

Exercice 3 :

1). Soit $(S, >)$, un ordre bien fondé. On peut alors construire un ordre produit sur l'ensemble $S \times S$:
$$(x_1, x_2) >_{prod} (y_1, y_2)$$

ssi $(x >_1 x'$ et $y \geq_2 y')$ ou $(x \geq_1 x'$ et $y >_2 y')$

où $x, x', y, y' \in S$

2). On souhaite démontrer la définition :
$$S^{s+1} = S^s \times s \quad \forall S^s \text{ avec } s > 2 \text{ (} s \text{ fini)}$$

On va en faire la preuve par récurrence.

Si la définition est vraie pour un certain rang s, alors elle est vraie pour $s+1$ (hérédité)

Si la proposition est vraie pour un s quelconque, montrons le aussi pour $s+1$.

Pour $s = 3$: $S^{3+1} = S^3 \times S = S^{3+1} = S^4$

On voit ici que $S^{s+1} = S^s \times S = S^{s+1}$

Mise en évidence de l'hérédité.

Il y a ici une relation transitive et donc un ordre partiel. L'ordre est également toujours bien fondé car la suite est croissante finie.

Exercice 4: Soit $\Sigma = \{a^0, b^0, s^2, t^2\}$, une signature.
Soit $\to$ la relation sur T_Σ

Soit $(T_\Sigma, \to)$, un système de réécriture. Par définition, ce système / la relation, termine s'il n'existe pas une séquence $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dans $X \mid x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots$

Si un système termine, on ne peut pas avoir un $x \mid x \to x$.

On peut observer que si $X \to X' \in T_\Sigma$, alors:

$(s, X, Y) \to (s, X', Y)$ $\quad$ $(s, Y, X') \to (s, Y, X')$
$(t, X, Y) \to (t, X', Y)$ $\quad$ $(t, Y, X') \to (t, Y, X')$
avec $X, Y, Z \in T_\Sigma$.

On voit que pour chaque exemple de la relation, les éléments pointent vers la même chose.

C'est une contradiction à ce qui a été énoncé: si un système termine, on ne peut pas avoir un $x \mid x \to x$.

Donc, la relation ne termine pas.