Outils Logiques Groupe 3 & 4 – DM 5

à rendre avant le 29 mars 2021 par email à chaitanya@irif.fr

Rappel : Le système de Gentzen (LK) consiste en les 7 règles dans la Table 3.1 (page 27) du polycopié.

Rappel : Le théorème fondamental (Proposition 10, page 27 du polycopié) du système de Gentzen (LK) dit qu'en tant que système de preuve, LK est correct et complet.

— (Correction.) Pour tout séquent $\Gamma \vdash \Delta$, s'il est prouvable [1] dans LK, alors la formule $(\bigwedge \Gamma) \Rightarrow (\bigvee \Delta)$ est valide.

— (Complétude.) Pour tout séquent $\Gamma \vdash \Delta$, si la formule $(\bigwedge \Gamma) \Rightarrow (\bigvee \Delta)$ est valide, alors le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable dans LK.

Exercice 1

Considérer les règles d'inférence suivantes :

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta} \Rightarrow_L \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \Rightarrow_R$$

(1) Pour chacune des deux, montrer que la conjonction de ses hypothèses est équivalente à sa conclusion.

(2) Montrer que LK étendu avec ces deux règles est toujours correct et complet.

(3) Trouver une preuve du séquent $(A \Rightarrow B, A \Rightarrow \neg B \vdash \neg A)$ dans le système LK étendu avec les deux règles précédentes.

Exercice 2

La règle suivante s'appelle « *coupure* » :

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad \Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} \text{Cut}$$

(1) Montrer que si les deux hypothèses de (Cut) sont prouvables dans LK, alors la conclusion l'est aussi. [2]

(2) En déduire que LK étendu avec cette règle est toujours correct et complet.

Exercice 3

Trouver des preuves dans LK qui montrent que les formules suivantes sont valides. Vous pouvez également utiliser les règles dans les Exercices 1 et 2 si vous le souhaitez (car vous venez de montrer que l'extension de LK avec elles est toujours correct et complet !)

(1) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

(2) $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$

(3) $(\neg\neg A) \Rightarrow A$

(4) $\neg\neg(A \vee \neg A)$

1. Ce que l'on appelle « prouvable » est exactement ce que le polycopié appelle « dérivable ».
2. Une telle règle s'appelle « admissible ».