Outils Logiques Groupe 3 & 4 – DM 3

Chaitanya Leena Subramaniam

à rendre avant le 1 mars 2021 par email à chaitanya@irif.fr
Les exercices étoilés « $\star - \star\star\star$ » sont facultatifs.

On notera les formules propositionnelles par $A, B, C \ldots$ et les variables propositionnelles par $x, y, z, \ldots$ On note V l'ensemble des variables propositionnelles et $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ l'ensemble des valeurs de vérité.

Définition. Soit $v \colon V \longrightarrow \mathbb{B}$ une affectation, $x \in V$ une variable, et $b \in \mathbb{B}$ une valeur de vérité. On écrit $v[b/x]$ pour l'affectation définie comme suit, qu'on appelle la ***mise à jour de*** v ***avec*** b ***pour*** x.

$$\begin{aligned} v[b/x] \colon V &\longrightarrow \mathbb{B} \\ x &\mapsto b \\ y &\mapsto v(y) \text{ pour tout } y \neq x \end{aligned}$$

Exercice 0 (Substitution)

($\star$ – Vous pouvez utiliser le résultat de cet exercice sans le démontrer.)

Soit $x \in V$ une variable, B une formule et $v \colon V \longrightarrow \mathbb{B}$ une affectation. Soit $b = [\![B]\!]v$ dans $\mathbb{B}$. Montrer que :

(1) On a $[\![x]\!](v[b/x]) = [\![x[B/x]]\!]v$ dans $\mathbb{B}$.
(2) Pour toute variable $y \neq x$, on a $[\![y]\!](v[b/x]) = [\![y[B/x]]\!]v$ dans $\mathbb{B}$.
(3) Pour toute formule A, si $[\![A]\!](v[b/x]) = [\![A[B/x]]\!]v$, alors on a $[\![\neg A]\!](v[b/x]) = [\![(\neg A)[B/x]]\!]v$ dans $\mathbb{B}$.
(4) Pour toutes formules A_1, A_2, si $[\![A_i]\!](v[b/x]) = [\![A_i[B/x]]\!]v$ pour $i = 1, 2$, alors on a
  (a) $[\![A_1 \vee A_2]\!](v[b/x]) = [\![(A_1 \vee A_2)[B/x]]\!]v$ et
  (b) $[\![A_1 \wedge A_2]\!](v[b/x]) = [\![(A_1 \wedge A_2)[B/x]]\!]v$

  dans $\mathbb{B}$.

En déduire que pour toute formule A, on a $[\![A]\!](v[b/x]) = [\![A[B/x]]\!]v$. (Indice : faire une récurrence sur la taille de la formule A).

Exercice 1 (Implication)

Soit A, B des formules propositionnelles. Introduisons la notation suivante : on écrit $A \Rightarrow B$ (dit « A implique B ») pour la formule $B \vee \neg A$. On écrit $A \Leftrightarrow B$ pour la formule $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

(1) Calculer la table de vérité de $x \Rightarrow y$.
(2) Calculer la table de vérité de $x \Leftrightarrow y$.
(3) Calculer la table de vérité de $(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$. Qu'observez-vous ?

Exercice 2 (Validité)

Lesquelles des formules suivantes sont valides ? (Indice : calculer la table de vérité pour chacune.)

(1) $x \Rightarrow (x \vee y)$
(2) $x \Rightarrow (x \wedge y)$
(3) $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$
(4) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow x$
(5) $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x)$
(6) $x \vee (x \Rightarrow y)$

Montrer que si A, B sont des formules telles que $x, y \notin var(A)$ et $x, y \notin var(B)$, alors pour chacune des formules précédentes C, si C est valide, alors $C[A/x][B/y]$ est valide. (Indice : utiliser Exercice 0).

Exercice 3 (Équivalence logique)

Deux formules A, B sont **équivalentes** (noté $A \equiv B$) si pour toute affectation $v\colon V \longrightarrow \mathbb{B}$, on a $[\![A]\!]v = [\![B]\!]v$ dans $\mathbb{B}$.

(1) Montrer que si A et B sont équivalentes, alors pour toute formule C,

   (a) $A[C/x]$ et $B[C/x]$ sont équivalentes,

   (b) $C[A/x]$ et $C[B/x]$ sont équivalentes.

(2) Montrer que A et B sont équivalentes si et seulement si $A \Leftrightarrow B$ est valide. (Indice : commencer par montrer que $x \Rightarrow x$ est valide. Puis montrer que pour $y \notin (var(A) \cup var(B))$, $(y \Rightarrow A)[B/y]$ est valide.)

Remarque. Les résultats de ce DM nous permettent de *simplifier* des formules par équivalence logique : on se permet de remplacer des formules par des formules équivalentes plus simples. Par exemple $(x \vee \neg x) \vee (x \vee y) \equiv (x \vee y)$.