Feuille 1 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Exercice 1.

1. Donner la liste des entiers positifs qui divisent 100.
2. Combien le nombre 6000000 a-t-il de diviseurs positifs ?
3. Combien 13! admet-il de diviseurs ?

Exercice 2. Combien d'entiers strictement compris entre 101 et 1001 sont divisibles par 7 ?

Exercice 3. La différence de deux nombres entiers est 538. Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 13 et le reste 22. Quels sont ces nombres ?

Exercice 4. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un entier impair par 4 ? En déduire que le reste du carré d'un entier impair dans la division euclidienne par 8 est 1.

Exercice 5. Les nombres a, b, c, d étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1. Si a divise b et b divise c, alors a divise c.
2. Si a divise b et c, alors a divise $2b + 3c$.
3. Si a divise b et c, alors $c^2 - 2b$ est multiple de a.
4. S'il existe u et v entiers tels que $au + bv = 4$ alors $\text{pgcd}(a, b) = 4$.
5. Si a est premier avec b, alors a est premier avec b^3.
6. Si a divise $b + c$ et $b - c$, alors a divise b et a divise c.
7. Si $7a - 9b = 1$ alors a et b sont premiers entre eux.
8. Si a divise b et b divise c et c divise a, alors $|a| = |b|$.
9. Si 19 divise ab, alors 19 divise a ou 19 divise b.
10. Si a est multiple de b et si c est multiple de d, alors $a + c$ est multiple de $b + d$.
11. « a et b premiers entre eux » équivaut à « $\text{ppcm}(a, b) = |ab|$ ».
12. Si a divise c et b divise d, alors ab divise cd.
13. Si 9 divise ab et si 9 ne divise pas a, alors 9 divise b.
14. Si a divise b ou a divise c, alors a divise bc.
15. « a divise b » équivaut à « $\text{ppcm}(a, b) = |b|$ ».
16. Si a divise b, alors a n'est pas premier avec b.
17. Si a n'est pas premier avec b, alors a divise b ou b divise a.
18. Si 4 ne divise pas bc, alors b ou c est impair.
19. Si a divise b et b ne divise pas c, alors a ne divise pas c.
20. Si 5 divise b^2, alors 25 divise b^2.
21. Si 12 divise b^2, alors 4 divise b.
22. Si 12 divise b^2, alors 36 divise b^2.
23. Si 91 divise ab, alors 91 divise a ou 91 divise b.

Exercice 6.

1. Montrer que le produit de trois nombres consécutifs est divisible par 6.
2. Montrer que le produit de quatre nombres consécutifs est divisible par 24.

Exercice 7. Pour chaque entier $n \in \{8, 16, 6, 12, 30, 90, 98, 72, 8100, 900\}$ trouver le plus petit entier positif m tel que n divise m^2.

Exercice 8. Ecrire le nombre 2017 en base 7.

Exercice 9. Soit n l'entier naturel dont l'écriture en base 9 est 512121. Ecrire n en base 10.

Exercice 10. Ecrire en base 7 le nombre qui s'écrit 713 en base 8.

Exercice 11.

1. Décomposer $10!$ en produit de facteurs premiers.
2. Trouver la plus grande puissance de 2 qui divise $100!$.
3. Trouver le nombre de zéros qui figurent à la fin de l'écriture décimale de $100!$.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère M_n l'entier dont l'écriture en base 2 est composée de n un. Par exemple, $M_3 = 111$. Donner l'écriture en base deux de M_n^2.

Exercice 13. Trouver le pgcd et le ppcm de $a = 2^3 \times 3^5 \times 7^2$ et $b = 2 \times 5^2 \times 7^3$.

Exercice 14. Soit n un entier tel que $10 \leq n \leq 100$. Montrer que n est un nombre premier si et seulement si $\text{pgcd}(n, 210) = 1$.

Exercice 15. Soit a, b, c des entiers non nuls.

1. Montrer que $\text{pgcd}(ca, cb) = |c| \, \text{pgcd}(a, b)$.
2. Montrer que $\text{pgcd}(a^2, b^2) = (\text{pgcd}(a, b))^2$.
3. Montrer que si $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et si c divise a, alors $\text{pgcd}(c, b) = 1$.
4. Montrer que $\text{pgcd}(a, bc) = 1$ si et seulement si $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a, c) = 1$.
5. Montrer que si $\text{pgcd}(a, b) = 1$ alors $\text{pgcd}(a + b, a - b) = 1$ ou 2 et $\text{pgcd}(a + b, ab) = 1$

Exercice 16. Soit n un entier positif. Que vaut $\text{pgcd}(n, n + 1)$ et $\text{ppcm}(n, n + 1)$?

Exercice 17.

1. Calculer le pgcd de 637 et 595.
2. Trouver les entiers x et y tels que $637x + 595y = 91$.
3. Trouver les entiers x et y tels que $637x + 595y = 143$.

Exercice 18. Résoudre les équations suivantes en nombres entiers :

1. $283x + 1722y = 31$.
2. $365x + 72y = 18$.
3. $101x + 150y = 15$
4. $282x + 678y = 66$.

Exercice 19. Résoudre le système dans $\mathbb{N}^2$ donné par $\text{pgcd}(a, b) = 12$ et $\text{ppcm}(a, b) = 360$.

Exercice 20. Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 9 et de somme 360.
De même avec pgcd 18 et produit 1620.

Exercice 21.

1. Déterminer une solution particulière dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $7x + 16y = 1$.
2. Donner toutes les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $7x + 16y = 1$.
3. Alice est au bord d'un lac, et possède deux récipients, un de 7 litres et l'autre de 16 litres.
   (a) En utilisant ce qui précède, montrer qu'Alice peut en remplissant ou en vidant le contenu des deux récipients un certain nombre de fois et dans un ordre approprié, obtenir exactement 1 litre d'eau dans l'un des deux récipients.
   (b) Donner une solution du problème qui utilise un nombre minimal de remplissage du récipient de 16 litres.
4. Alice possède maintenant un récipient de 14 litres et un autre de 21 litres. Peut elle obtenir exactement 1 litre d'eau ?

Exercice 22. Soit n un entier ≥ 1. Montrer qu'il existe n nombres entiers consécutifs qui ne sont pas premiers.
Indication : considérer $(n + 1)! + 2,\ (n + 1)! + 3, \ldots$

Exercice 23. Soit p un nombre premier tel que $11p + 1$ est le carré d'un entier. Déterminer p.

Exercice 24. Soit a et b deux entiers premiers entre eux (i.e. $\text{pgcd}(a, b) = 1$). On suppose que $ab = c^2$. Montrer que a et b sont eux-mêmes des carrés au signe près.

Exercice 25. Soit b un entier positif non nul. Montrer que l'entier qui s'écrit 10101 en base b n'est pas un nombre premier.

Exercice 26. Vérifier que si un entier positif n est à la fois un carré et un cube, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 7k$ ou $n = 7k + 1$.

Exercice 27. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a^9 = b^{25}$.

1. Touver u et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $25u + 9v = 1$.
2. Soit $c = a^u b^v$, montrer que $c^{25} = a$ et $c^9 = b$.
3. Soit $x \in \mathbb{Q}$, supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $x \in \mathbb{Z}$.
4. En déduire que $c \in \mathbb{N}^*$.
5. Plus généralement, soient m, n premiers eux entre tels que $a^m = b^n$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $c^n = a$ et $c^m = b$.