DMS, outils logiques

Exercice 33) $(\neg\neg A) \Rightarrow A$

Autrement dit : $A \Rightarrow A$

Une formule est prouvable (ou valide) s'il existe une preuve avec conclusion (racine) A.

D'après les règles du système de Hilbert :

$$\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow (A \Rightarrow A)}\,A_1 \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)}\,A_1 \quad \dfrac{}{(A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))}\,A_2}{(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)}\,R}{A \Rightarrow A}\,R$$

$(A \Rightarrow A)$, prouvable

$$\left(\dfrac{}{A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}\,A_1 \qquad \dfrac{}{(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))}\,A_2 \right)$$

1). $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C) = A_2 \quad (1)$

Règle du système de Hibert.

On peut en faire la preuve :

$((C \vee \neg B) \vee \neg A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

$(\Leftrightarrow)$ // $\Rightarrow ((A \Rightarrow C) \vee \neg(A \Rightarrow B))$

$(\Leftrightarrow)$ // $\Rightarrow ((C \vee \neg A) \vee \neg(B \vee \neg A))$

$(\Leftrightarrow)$ $(C \vee \neg A \vee \neg B \vee A \vee \neg C \vee B \vee A)$

$(\Leftrightarrow)$ $(C \vee \neg A \vee \neg B \vee A \vee \neg C \vee B)$

Substitution de variable :

$(z \vee \neg x \vee \neg y \vee x \vee \neg z \vee y)$

On voit ici que ce système a l'air vrai pour tout. On peut faire une table de vérité pour en être sûr.

x	y	z	$\neg x$	$\neg y$	$\neg z$	$z \vee \neg x \vee \neg y \vee x \vee \neg z \vee y$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1

Formule valide.

Exercice 1:

1). $$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta} \Rightarrow L$$

$$\Gamma \vdash A, \Delta \equiv (\bigwedge \Gamma) \Rightarrow A \vee (\bigvee \Delta)$$
$$\equiv \neg(\bigwedge \Gamma) \vee A \vee (\bigvee \Delta)$$

$$B, \Gamma \vdash \Delta \equiv (B \wedge (\bigwedge \Gamma)) \Rightarrow (\bigvee \Delta)$$
$$\equiv \neg(B \wedge (\bigwedge \Gamma)) \vee (\bigvee \Delta)$$
$$\equiv \neg B \vee \neg(\bigwedge \Gamma) \vee (\bigvee \Delta)$$

Donc: $(\Gamma \vdash A, \Delta) \vee (B, \Gamma \vdash \Delta)$

$$\equiv (\neg(\bigwedge \Gamma) \vee A \vee (\bigvee \Delta)) \vee (\neg B \vee \neg(\Delta \Gamma) \vee (\bigvee \Delta))$$
$$\equiv \neg(\bigwedge \Gamma) \vee (\bigvee \Delta) \vee A \vee \neg B$$
$$\equiv \neg(\bigwedge \Gamma) \vee (\bigvee \Delta) \vee \neg(\neg A \wedge B)$$
$$\equiv \neg(\bigwedge \Gamma) \vee \neg(A \Rightarrow B) \vee (\bigvee \Delta)$$
$$\equiv \neg((\bigwedge \Gamma) \wedge (A \Rightarrow B)) \vee (\bigvee \Delta)$$
$$\equiv ((\bigwedge \Gamma) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\bigvee \Delta)$$
$$\equiv A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \Rightarrow R$$

$$\Gamma, A \to B, \Delta \equiv (A \wedge (\bigwedge \Gamma)) \Rightarrow (B \vee (\bigvee \Delta))$$
$$\equiv \neg(A \wedge (\bigwedge \Gamma)) \vee B \vee (\bigvee \Delta)$$
$$\equiv \neg A \vee \neg(\bigwedge \Gamma) \vee B \vee (\bigvee \Delta)$$
$$\equiv \neg(\bigwedge \Gamma) \vee (A \Rightarrow B) \vee (\bigvee \Delta)$$
$$\equiv (\bigwedge \Gamma) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \vee (\bigvee \Delta))$$
$$\equiv \Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta$$

3)

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow \neg B, A \vdash A}\,Ax}{A \Rightarrow \neg B \vdash A, \neg A}\,\neg R
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{A, B \vdash A}\,Ax}{B \vdash A, \neg A}\,\neg R
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{B \vdash \neg A, B}\,Ax}{\neg B, B \vdash \neg A}\,\neg L
}{\quad}\,\Rightarrow L
}{A \Rightarrow B,\ A \Rightarrow \neg B \vdash \neg A}\,\Rightarrow L
$$