Université Paris Cité

Le problème du chargement des navires

CM nº4 — Mobilité (M2 IMPAIRS)

Matěj Stehlík

2/2/2024

Le problème du chargement des navires

- Une compagnie de transport maritime utilise un navire pouvant transporter au maximum r conteneurs.
- Le navire navigue sur une longue route entre deux ports, avec plusieurs arrêts dans des ports entre les deux.
- Dans ces ports, la cargaison peut être déchargée et une nouvelle cargaison peut être chargée.
- Dans chaque port, il y a un nombre b_{ij} de conteneurs qui attend d'être expédiée du port i au port $j > i$.
- Soit f_{ij} le revenu que la compagnie tire du transport d'un conteneur du port i au port j.
- L'objectif est de planifier la quantité de marchandises à charger dans chaque port de manière à maximiser le revenu total sans jamais dépasser la capacité du navire.

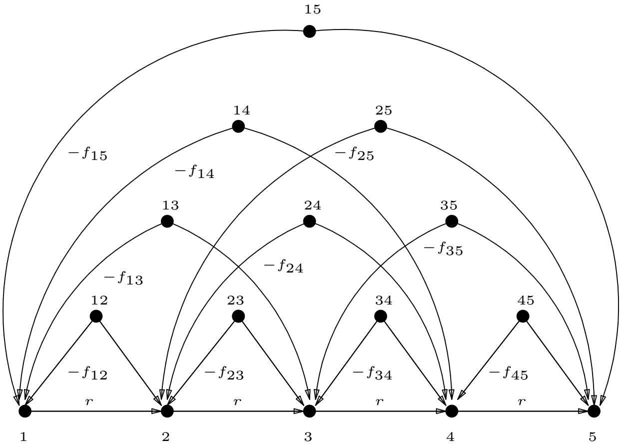
Réduction à circulation avec demandes de coût minimum

- Le problème peut être modélisé comme une circulation avec demandes de coût minimum.
- Soit n le nombre d'arrêts, y compris le port de départ et le port d'arrivée.
- Soit $G = (V, E)$ le réseau avec

$$\begin{aligned} V &= \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \cup \{v_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\} \\ E &= \{v_1 v_2, v_2 v_3, \ldots, v_{n-1} v_n\} \cup \{v_{ij} v_i : 1 \leq i < j \leq n\}. \end{aligned}$$

- La capacité des arcs $v_i v_{i+1}$ (où $1 \leq i \leq n-1$) est de r ; celle des autres arcs et de ∞.
- Le coût de l'arc $v_{ij} v_i$ est de $-f_{ij}$ (où $1 \leq i < j \leq n$), et le coût des autres arcs est de 0 (y compris les arcs $v_{ij} v_j$).
- La demande de v_{ij} est de $-b_{ij}$, et la demande de v_i est de $b_{1i} + b_{2i} + \cdots + b_{i-1,i}$.

Illustration pour $n = 5$



Le réseau G modélise le problème du chargement des navires (1/2)

- En effet, supposons que $t_{ij} \leq b_{ij}$ est le nombre de conteneurs que le navire transportera du port i au port j et que le navire n'est jamais chargé au-delà de sa capacité r.
- Le revenu total est de
$$I = \sum_{1 \leq i < j \leq n} t_{ij} f_{ij}.$$
- Soit x la circulation dans G définie comme suit :
  - le flot sur un arc de la forme $v_{ij}v_i$ est t_{ij}
  - le flot sur un arc de la forme $v_{ij}v_j$ est $b_{ij} - t_{ij}$
  - Le flot sur un arc de la forme $v_i v_{i+1}$ est la somme des t_{ab} pour lesquels $a \leq i$ et $b \geq i + 1$.

Le réseau G modélise le problème du chargement des navires (2/2)

- Puisque t_{ij} (pour tout $1 \leq i < j \leq n$) sont des nombres de conteneurs admissible, alors x respecte les demandes et les contraintes de capacité.
- Le coût de x est $-I$.
- Inversement, supposons que x est un flot admissible dans G de coût J.
- On construit une affectation de conteneurs admissible s_{ij} (pour tout $1 \leq i < j \leq n$), comme suit :
- Soit s_{ij} la valeur de x sur l'arc $v_{ij}v_i$.
- Le revenu est alors $-J$.