Nom: Le Franc
Prénom: Matthieu
N°Etu: 71800858

Outils logiques - DM noté 2

Exercice 1: On considère, pour les questions suivantes la fonction $f : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ définie comme suit:

$f(0,0) = 0$
$f(1,0) = 1$
$f(0,1) = 1$
$f(1,1) = 0$

1). La fonction f est définissable car, d'après le cours: toute fonction $f : 2^n \to 2$, $n \geq 1$ est définissable par une formule A en DNF | $Var(A) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Donc $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ est définissable.

Comme formule A en DNF, on a: $A = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$ tel que $f = f_A$

2) On définit $A \oplus B$ comme la formule $(x \oplus y)[A/x, B/y]$

a). $$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash A, \Delta}{\Gamma, A \oplus B \vdash \Delta} \oplus L$$

$$\begin{aligned}
\Gamma, A \oplus B \vdash \Delta &\equiv ((\textstyle\bigwedge \Gamma) \wedge (A \oplus B)) \Rightarrow (\textstyle\bigvee \Delta) \\
&\equiv (\textstyle\bigvee \Delta) \vee \neg ((\textstyle\bigwedge \Gamma) \wedge (A \oplus B)) \\
&\equiv (\textstyle\bigvee \Delta) \vee \neg (\textstyle\bigwedge \Gamma) \vee \neg (A \oplus B) \\
&\equiv (\textstyle\bigvee \Delta) \vee \neg (\textstyle\bigwedge \Gamma) \vee \neg ((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)) \\
&\equiv (\textstyle\bigvee \Delta) \vee \neg (\textstyle\bigwedge \Gamma) \vee (\neg (A \wedge \neg B) \vee \neg (\neg A \wedge B)) \\
&\equiv (\neg (A \wedge \neg B) \vee \neg (\textstyle\bigwedge \Gamma) \vee (\textstyle\bigvee \Delta)) \\
&\quad \wedge (\neg (\neg A \wedge B) \vee \neg (\textstyle\bigwedge \Gamma) \vee (\textstyle\bigvee \Delta))
\end{aligned}$$

$\equiv (\neg A \land B \lor \neg(\bigwedge \Gamma) \lor (\bigvee \Delta)) \land (A \lor \neg B \lor \neg(\bigwedge \Gamma) \lor (\bigvee \Delta))$

$\equiv (\neg(A \land (\bigwedge \Gamma)) \lor (B \lor (\bigvee \Delta))) \land (\neg(B \land (\bigwedge \Gamma)) \lor (A \lor (\bigvee \Delta)))$

$\equiv (((\bigwedge \Gamma) \land A) \Rightarrow (B \lor (\bigvee \Delta))) \land (((\bigwedge \Gamma) \land B) \Rightarrow (A \lor (\bigvee \Delta)))$

$\equiv (\Gamma, A \vdash B, \Delta) \land (\Gamma, B \vdash A, \Delta)$

La règle $\oplus L$ est correcte car la conjonction des hypothèses est équivalente à la conclusion.

$$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \oplus B, \Delta} \oplus R$$

$\Gamma \vdash A \oplus B \equiv (\bigwedge \Gamma) \Rightarrow (A \oplus B) \lor (\bigvee \Delta)$

$\equiv ((A \oplus B) \lor (\bigvee \Delta)) \lor \neg(\bigwedge \Gamma)$

$\equiv ((A \land \neg B) \lor (\neg A \land B)) \lor (\bigvee \Delta) \lor \neg(\bigwedge \Gamma)$

$\equiv (\neg(\bigwedge \Gamma) \lor (\bigvee \Delta) \lor A \lor (\neg A \land B)) \land$
$(\neg(\bigwedge \Gamma) \lor (\bigvee \Delta) \lor \neg B \lor (\neg A \land B))$

$\equiv (\neg(\bigwedge \Gamma) \lor (\bigvee \Delta) \lor A \lor \neg A) \land (\neg(\bigwedge \Gamma) \lor (\bigvee \Delta) \lor A \lor B) \land$
$(\neg(\bigwedge \Gamma) \lor (\bigvee \Delta) \lor \neg B \lor \neg A) \land (\neg(\bigwedge \Gamma) \lor (\bigvee \Delta) \lor \neg B \lor B)$

$\equiv ((\bigwedge \Gamma) \Rightarrow (A \lor B \lor (\bigvee \Delta)) \land (((\bigwedge \Gamma) \land A \land B) \Rightarrow (\bigvee \Delta))$

$\equiv (\Gamma \vdash A, B, \Delta) \land (\Gamma, A, B \vdash \Delta)$

Encore une fois (comme pour $\oplus L$), on a la conjonction des hypothèses équivalente à la conclusion.
Donc $\oplus R$ bien correcte.

Exercice 2 :

1) $(A \oplus B) \Rightarrow (A \vee B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash B \quad A, B}\,Ax \qquad \dfrac{}{B \vdash A \quad A, B}\,Ax}{A \oplus B \vdash A, B}\,\oplus L}{A \oplus B \vdash A \vee B}\,\vee_R}{(A \oplus B) \Rightarrow (A \vee B)}\,\Rightarrow R$$

2) $(A \oplus B) \Rightarrow ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B))$

On a dans le ① fait la preuve d'axiomes que l'on réutilisera $(A \vdash B \quad A, B)$ $(B \vdash A \quad A, B)$, il nous restera à étudier l'autre partie de la formule pour faire sa preuve.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash B \quad A, B}\,Ax \qquad \dfrac{}{B \vdash A \quad A, B}\,Ax}{A \oplus B \vdash A, B}\,\oplus L}{A \oplus B \vdash A \vee B}\,\vee_R \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, B \vdash B, \neg A}\,Ax}{A \vdash B, \neg A, \neg B}\,\neg R \qquad \dfrac{\dfrac{}{B, A \vdash A, \neg B}\,Ax}{B \vdash A, \neg A, \neg B}\,\neg R}{A \oplus B \vdash \neg A, \neg B}\,\oplus L}{A \oplus B \vdash \neg A \vee \neg B}\,\vee_R}{A \oplus B \vdash (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)}\,\neg R}{(A \oplus B) \Rightarrow ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)}\,\Rightarrow R$$

On retrouve bien la preuve du " ou exclusif "

$$((A \lor B) \land (\neg A \lor \neg B)) \Rightarrow (A \oplus B)$$

3)

$$\dfrac{}{A \lor B,\ A, B \vdash A}\ Ax \qquad \dfrac{}{A \lor B,\ A, B \vdash B}\ Ax$$

$$\dfrac{}{A \lor B,\ \neg A, A, B}\ \neg L \qquad \dfrac{}{A \lor B,\ \neg B, A, B}\ \neg L$$

$$\dfrac{}{A,\ \neg A \lor \neg B \vdash A, B}\ Ax \qquad \dfrac{}{B,\ \neg A \lor \neg B \vdash A, B}\ Ax$$

$$\dfrac{}{A \lor B,\ \neg A \lor \neg B, A, B}\ \lor L \qquad \dfrac{}{A \lor B,\ \neg A \lor \neg B \vdash A, B}\ \lor L$$

$$\dfrac{}{A \lor B,\ \neg A \lor \neg B \ \vdash\ A \oplus B}\ \oplus R$$

$$\dfrac{}{(A \lor B) \land (\neg A \lor \neg B)\ \vdash\ A \oplus B}\ \land L$$

$$\dfrac{}{((A \lor B) \land (\neg A \lor \neg B)) \Rightarrow (A \oplus B)}\ \Rightarrow R$$