RUNSER Laure — Mathématiques 3 : Algèbre — 12.11.2020

Espaces Vectoriels TD n°2

Exercice 1

$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}$

On choisit :

- $v = (-1, 1, 1) \in P$ car $-1 - 2 \times 1 + 3 \times 1 = 0$
- $w = (1, 2, 1) \in P$ car $1 - 2 \times 2 + 3 = 0$

u et v ne sont pas colinéaire

Soit $u = av + bw$, $a, b \in \mathbb{R}$

- Montrons que $u \in P$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$u = av + bw = a(-1, 1, 1) + b(1, 2, 1) = (-a, a, a) + (b, 2b, b) = (-a+b, a+2b, a+b)$

Donc $x - 2y + 3z = \underbrace{-a+b}_{x} - 2\underbrace{(a+2b)}_{y} + 3\underbrace{(a+b)}_{z} = -a + b - 2a - 4b + 3a + 3b = 0$

Donc $u \in P$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$

- et inversement $\forall u = (x, y, z) \in P$, u peut s'écrire comme une combinaison linéaire de v et w.

Exercice 2

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } 2x - y - 2z = 0\}$

- $\forall u = (x, y, z) \in F$ $2x - y - 2z = 0 \iff x = \frac{1}{2}y + z$

Donc $u = (\frac{1}{2}y + z, y, z)$ avec $y, z \in \mathbb{R}$

$u = y\underbrace{\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)}_{v} + z\underbrace{\left(1, 0, 1\right)}_{w}$ où u et v est une famille génératrice de F.

Or $v = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) \in F$ car $2 \times \frac{1}{2} - 1 + 0 = 0$

et $w = (1, 0, 1) \in F$ car $2 - 2 = 0$

De plus v et w sont indépendants. Donc ils forment une base de F.

Exercice 3

$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{matrix} x-y=0 \\ z-t=0 \end{matrix}\}$

$\forall u \in F \begin{cases} x-y=0 \\ z-t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ z=t \end{cases}$ Donc $u = (y,y,t,t)$, $y,t \in \mathbb{R}$

Donc $u = y\underbrace{(1,1,0,0)}_{v} + t\underbrace{(0,0,1,1)}_{w}$ avec $v, w \in F$ une famille génératrice de F.

De plus v et w ne sont pas colinéaires, et forment donc une famille libre.

Donc $\{v, w\}$ est une base de F.

Exercice 4

On écrit F sous forme matricielle puis on échelonne et réduit la matrice.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-(L_1-2L_2)]{L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{matrix} x-3t=0 \\ y+3z+3t=0 \end{matrix}\}$$

Donc $\forall u \in F \begin{cases} x = 3t \\ y = -3z-3t \end{cases}$ donc $u = (3t, -3z-3t, z, t)$, $z,t \in \mathbb{R}$

$u = z\underbrace{(0,-3,1,0)}_{v \in F} + t\underbrace{(3,-3,0,1)}_{w \in F}$

Comme $\{v, w\}$ est une famille libre et génératrice de F, c'est une base de F.