$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & -7 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - 3A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & -7 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} - 3 \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$+ 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2/.

$$\begin{array}{r|l} X^n & X^3 - 3X^2 + 2X \\ \hline -(-3X^n + 2X^{n-1}) & X^{n-3} \\ \hline = 3X^n - 2X^{n-1} & \end{array}$$

Donc $r = 3X^n - 2X^{n-1}$

3/. D'après, A, A^2, A^3 : on peut envisager que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -(2)^n & 1 & -(2)^n - 1 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

4/. La matrice A n'est pas inversible car $\det(A) = 0$

Exercice 14 :

1/.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & m^2 - 3 & 2 \end{pmatrix}$$