

Exercice 1

1)

x	y	$\neg x$	$y \vee \neg x = x \Rightarrow y$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

2)

x	y	$\neg y$	$y \Rightarrow x$	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1

3)

x	y	$x \wedge y$	$\neg x$	$\neg y$	$\neg x \wedge \neg y$	$(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1

On observe que l'expression est vraie si et seulement si x et y ont la même valeur de vérité.

Exercice 2

1)

x	y	$\neg x$	$x \vee y$	$x \Rightarrow (x \vee y)$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

La formule est valide car elle est vraie pour toute valeur de x et y .

2)

x	y	$\neg x$	$x \wedge y$	$x \Rightarrow (x \wedge y)$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

La formule n'est pas valide car elle n'est pas vraie pour $x = 1$ et $y = 0$.

3)

x	y	$\neg y$	$y \Rightarrow x$ $\neg y \vee x$	$\neg x$	$x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$ $\neg x \vee (\neg y \vee x)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1

La formule est valide.

4)

x	y	$\neg x$	$x \Rightarrow y$ $\neg x \vee y$	$\neg(\neg x \vee y)$	$(x \Rightarrow y) \Rightarrow x$ $\neg(\neg x \vee y) \vee x$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1

La formule n'est pas valide.

5)

x	y	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow x$	$(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

La formule est valide.

6)

x	y	$x \Rightarrow y$	$x \vee (x \Rightarrow y)$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

La formule est valide.

7) $C[A/x][B/y]$ est valide si $\llbracket C[A/x][B/y] \rrbracket v = 1$ ou $\llbracket C[A/x][B/y] \rrbracket v = \llbracket C \rrbracket (v[A/x][B/y])$ d'après l'exercice 0.de plus, on sait que C est valide, donc $\llbracket C \rrbracket v = 1$ quelles que soient les valeurs de x et y .donc $\llbracket C[A/x][B/y] \rrbracket v = 1$ et donc $C[A/x][B/y]$ est valide.

Exercice 3

1) a) Si A et B sont équivalentes, alors $\llbracket A \rrbracket v = \llbracket B \rrbracket v$.

Cette égalité est notamment vraie quelle que soit la valeur de x .

Donc si on remplace x par la même expression C dans A et dans B , $\llbracket A[C/x] \rrbracket v = \llbracket B[C/x] \rrbracket v$.

b) On a $\llbracket C \rrbracket v = \llbracket C \rrbracket v$ pour toute valeur de x .

or A est équivalente à B . Donc $\llbracket A \rrbracket v = \llbracket B \rrbracket v$

$$\text{Donc } \llbracket C[A/x] \rrbracket v = \llbracket C[B/x] \rrbracket v$$

Donc les deux expressions sont équivalentes.

2)

Montrons que $x \Rightarrow x$ est valide en calculant sa table de vérité:

x	$\neg x$	$\neg x \vee x$
0	1	1
1	0	1

$\llbracket \neg x \vee x \rrbracket v = 1$ quelle que soit la valeur de x .

Donc $x \Rightarrow x$ est valide.