31.03.2021

Maths 4 Amphi 9

> **Théorème**
> L'ensemble des transpositions dans S_n est un ensemble générateur.
> ie toute permutatO peut s'écrire comme un produit de transpositions.

<u>Rmq</u> : Cette décomposition n'est PAS unique

<u>ex:</u> $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_7$

$\sigma(7) = 4$

$\sigma = \underbrace{(4\ 7) \circ (4\ 7)}_{= Id} \circ \sigma$

$\sigma = (4\ 7) \circ \sigma'$ avec $\sigma' = (4\ 7) \circ \sigma$

$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \in S_6$ (car 7 reste à sa place) [$\sigma' \in S_5$ mais le fait que 4 reste à sa place est une coïncidence]

$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_6 = (2\ 6) \circ \sigma''$ où $\sigma'' = (2\ 6) \circ \sigma$

$\sigma'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in S_5$

$\sigma = (4\ 7) \circ (2\ 6) \circ \sigma''$

...

$\sigma = (4\ 7)(2\ 6)(1\ 5)(2\ 3)(1\ 2)$ (on peut ne pas écrire $\circ$)

> **Définition** : Une inversion pour une permutatO σ est une paire d'entiers (i, j) tq $i < j$ mais $\sigma(i) > \sigma(j)$
>
> On appelle signature de σ, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\gamma(\sigma)}$ ou $\gamma(\sigma)$ est le nb d'inversion.
>
> Une permutatO est paire si $\varepsilon(\sigma) = 1$, impaire si $\varepsilon(\sigma) = 1$.

<u>ex:</u> $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} 3\ 4 \to 5\ 4 \\ 3\ 5 \to 5\ 2 \\ 2\ 5 \to 3\ 2 \\ 4\ 5 \to 4\ 2 \end{array}\right\} \text{4 inversions donc } \sigma \text{ paire}$$

> **Théorème** : La signature du produit de 2 permutations est le produit des signatures.
>
> Autrement dit, soit ε le groupe $\{\pm 1\}$ muni de la multiplication. $\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\}$ est un morphisme de groupe.

Déf : L'ensemble des permutations paires est le noyau de ε, c'est une sous-groupe de S_n.

On l'appelle groupe alterné A_n.

Par le th de Lagrange on voit que la moitié des permutations sont paires.

Prop : La signature d'une transposition est -1.

Corollaire : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^m$ où m est le nombre de transpositions dans la décomposition de σ en produit de transpositions.

ex $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2)(2\ 3)$ donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^2 = 1$ et σ est paire.

mais aussi $\sigma = (2\ 3)(1\ 2)(2\ 3)(1\ 2)$ et $\varepsilon(\sigma) = (-1)^4 = 1$ $\to$ on a un nb pair qq soit la décomposition.

Définition Soit $\sigma \in S_n$ et $x \in [n]$ un entier

On appelle orbite de x sous l'action de σ, et on note $O_\sigma(x)$ l'ensemble des entiers qu'on obtient en appliquant σ à x répétitivement.

$$O_\sigma(x) = \{\sigma^k(x),\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Rmq : Soit l l'ordre de x. $\sigma^l(x) = x$

$$O_\sigma(x) = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{l-1}(x)\}$$

⚠ les éléments ne sont PAS forcément distincts

Rmq : Si $y \in O_\sigma(x)$, $\exists m \in \mathbb{Z}$ tq $\sigma^m(x) = y$ et $y = \sigma^{-m}(x)$ donc $O_\sigma(x) = O_\sigma(y)$

Tout élément de $[n]$ appartient à une unique orbite de σ.

ex : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 7 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

- orbite de $1 = \{1, 3, 2\}$ = orbite de 2 et de 3.

Prop : Soit $\sigma \in S_n$ et $k \geq 2$

σ est un k-cycle ssi elle admet une seule orbite de k éléments, et toutes les autres ne contiennent qu'un seul élément.