$$= (\sin(x) - x) \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{6} + \frac{x^2}{36} + \frac{x^4}{216} + o(x^5) \right)$$

$$= \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) \right) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{6} + \frac{x^2}{36} + \frac{x^4}{216} + o(x^5) \right)$$

En éliminent les degrés ≥ 3, on a donc :

$$= -\frac{x}{6} - \frac{x^3}{36} + \frac{x^3}{120} + o(x^3)$$

$$= -\frac{x}{6} - \frac{10x^3}{360} + \frac{3x^3}{360} + o(x^4) = -\frac{x}{6} - \frac{7x^3}{360} + o(x^4)$$

6). $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 3

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^3)$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha - 1)\frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

On remplace :

$$(1+x)^{\frac{1}{1+x}} = 1 + (1 - x + x^2)x + (1 - x + x^2)(1 - x + x^2 - 1)\frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$= 1 + x - x^2 + x^3 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{2} \right)(x^2 - x) + o(x^3)$$

$$= 1 + x - x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{2} + \frac{x^6}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{2} + o(x^3)$$

$$= \frac{x^6}{2} - x^5 + x^4 + \frac{x^3}{2} - x^2 + x + 1 + o(x^3)$$

En conservant les degrés < 4 :

$$(x+1)^{\frac{1}{1+x}} = 1 + x - x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^4)$$