OL4 CMTD 4    01.03.2021 (présentiel)

# Équivalence logique, DNF, CNF, satisfaisabilité, fonctions définissables

## I / Satisfiabilité

A est satisfiable s'il existe une affectation $v : V \to \mathbb{B}$ tq $[\![A]\!]_v = 1$

Exemple
Montrer que A est valide ssi $\neg A$ n'est pas satisfiable

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit A une formule valide. Montrons que $\neg A$ n'est pas satisfaisable, c'est-à-dire que qq soit $v : V \to \mathbb{B}$, on a $[\![\neg A]\!]_v = 0$    Mais $[\![\neg A]\!]_v = \text{NOT}\,\underbrace{[\![A]\!]_v}_{= 1 \text{ car A valide}} = \text{NOT}(1) = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $\neg A$ non satisfaisable. Mq A est valide.
Soit $v : V \to \mathbb{B}$ quelconque.
$[\![A]\!]_v = [\![\neg\neg A]\!]_v = \text{NOT}([\![\neg A]\!]_v) = \text{NOT}(0) = 1$
↳ car $\neg A$ pas satisfiable.

## II / Équivalence

A et B sont équivalents $(A \equiv B)$ si pour toute affectation $v : V \to \mathbb{B}$, on a $[\![A]\!]_v = [\![B]\!]_v$

Exemples page 20 du poly

Pour montrer que 2 formules sont équivalentes : $\neg(x \wedge y) \equiv \neg x \vee \neg y$

| $x$ | $y$ | $\neg x$ | $\neg y$ | $x \wedge y$ | $\neg(x \wedge y)$ | $\neg x \vee \neg y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

↳ Les colonnes sont les mêmes donc les deux formules sont équivalentes.

Propriété fondamentale de $\equiv$ : Si $A \equiv B$ et $C \equiv D$ alors $A[C/x] \equiv B[D/x]$

Morale : On peut remplacer une sous-formule par une formule équivalente tout en conservant l'équivalence logique.

Mq : $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \equiv \mathbb{1}$    la formule $\mathbb{1}$ (1 en gras) $= z \vee \neg z$

$(\neg y \Rightarrow \neg x) \Rightarrow (x \Rightarrow y)\,[A/x][B/y]$

$\equiv (\neg x \vee \neg\neg y) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$

$\equiv (\neg x \vee y) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$    par prop fondamentale

$\equiv (y \vee \neg x) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$    par définition

$\equiv x \Rightarrow y \Rightarrow (x \Rightarrow y) \quad = (x' \Rightarrow x')[x \Rightarrow y / x']$

On s'est ramené à montrer que $x' \Rightarrow x' \equiv \mathbb{1}$
Vrai car $x' \Rightarrow x' \equiv \neg x' \vee x'$

**Prop :**

* $A \equiv B$ ssi $A \Leftrightarrow B$ est valide

  ↳ $\equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

* $A$ est valide ssi $A \equiv 1$

* Si $A$ est valide et $A \equiv B$, alors $B$ est valide

* ——— satisfiable ——— satisfiable

**Exercice.** Mq $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ est valide

$A \Rightarrow (B \Rightarrow A) \equiv x \Rightarrow (y \Rightarrow x)\,[A/x][B/y]$ ← on n'était pas obligé de passer par une substitution. On aurait pu écrire la m̂ chose avec $A$ et $B$.

$\equiv x \Rightarrow (\neg y \vee x)$

$\equiv \neg x \vee (\neg y \vee x)$ ← on peut aussi faire la table de vérité à partir d'ici.

$\equiv \neg x \vee (x \vee \neg y)$

$\equiv \neg x \vee x \vee \neg y$

$\equiv 1 \vee \neg y \equiv 1$

Donc $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ est valide (car elle est équivalente à une formule valide).

## III/ Formes normales

Soit $\rightarrow_m$ la relation suivante sur $T_{\Sigma_{prop}}$ (= l'ensemble des formules) :

① $\neg\neg A \rightarrow_m A$ $\mu(\neg\neg A) = 3 \times \mu(\neg A) = 3 \times 3 \times \mu(A) > \mu(A)$ si $\mu(A) > 0$

vrai car $\mu > 0$ pour les variables et est strict ↗ pour les autres symboles

② $\neg(A \wedge B) \rightarrow_m \neg A \vee \neg B$ $\mu(\neg(A \wedge B)) = 3 \times (\mu(A) + \mu(B) + 1) > 3\mu(A) + 3\mu(B) + 1 = \mu(\neg A \vee \neg B)$

③ $\neg(A \vee B) \rightarrow_m \neg A \wedge \neg B$ même chose car $\wedge$ et $\vee$ ont la même interprétation avec le morphisme.

④ enfin si $A \rightarrow_m A'$, $B \rightarrow_m B'$

$\neg A \rightarrow_m \neg A'$

$B \wedge A \rightarrow_m B' \wedge A'$

$B \vee A \rightarrow_m B' \vee A'$

$A \vee B \rightarrow_m A' \vee B'$

$A \wedge B \rightarrow_m A' \wedge B'$

(on clôt par contexte)

Si $\mu(A) > \mu(A')$ alors … (faire pour chaque cas)

**Exercice :** Mq $\rightarrow_m$ termine

Rappelons que $\Sigma_{prop} = \{\neg^1, \wedge^2, \vee^2\} \cup \{x^0, y^0, \dots\}$

Définissons un morphisme $\mu : T_{\Sigma_{prop}} \longrightarrow \mathbb{N}$

$\mu_\neg : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mu_\neg(n) := 3n$

$\mu_\wedge : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\mu_\wedge(n,m) = n + m + 1$

$\mu_\vee : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\mu_\vee(n,m) = n + m + 1$

et $\forall x \in V$, $\mu_x \in \mathbb{N}$, $\mu_x = 1$

on regarde ce que donne le morphisme appliqué à la relation.

Donc $\rightarrow_m$ termine car $\forall A, B \in T_{\Sigma_{prop}}$ $A \rightarrow_m B \Rightarrow \mu(A) > \mu(B)$

$A$ est en forme normale négative (NNF) s'il n'existe pas de $A'$ tel que $A \underset{m}{\rightarrow} A'$

Autrement dit, toute occurrence de la négation dans $A$ est sur une variable.

Ex :

① $\neg x \vee (x \vee \neg y)$ → NNF

② $\neg x \vee \neg (x \wedge y)$ → pas NNF

③ $A \vee \neg B$ → ça dépend de $A$ et $B$

④ $x \Rightarrow (x \vee y) \equiv (x \vee y) \vee \neg x$ → NNF