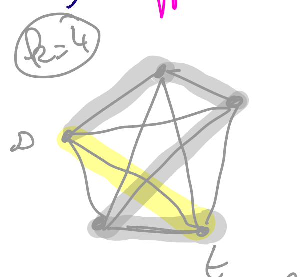
Séance du 29/10/21

Exercice 3 : 1) On raisonne par l'absurde.

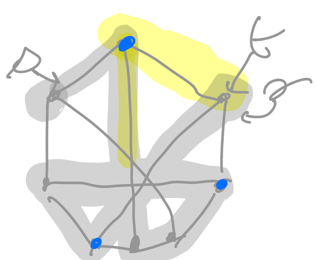
Soit γ un chemin maximal $(v_0, \dots, v_k)$ avec $v_0 = s$ et $v_k = t$.
Supposons qu'il existe un sommet u voisin de t tel que $u \notin \gamma$.
Alors $(v_0, \dots, v_k, u)$ est une marche dont aucun sommet n'est répété : c'est donc un chemin qui contient strictement γ, ce qui contredit la maximalité de γ.

Par conséquent, tous les voisins de t dans G sont sur γ.

2) Rappel : k-régulier = tous les sommets ont même degré $(k \geq 2)$



cycle de longueur 5?

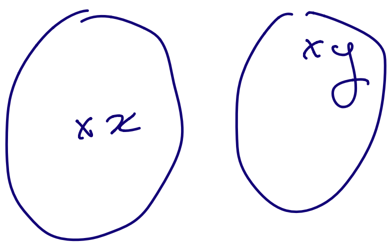


k=3 ns
cycle de longueur 4

Considérons γ un chemin maximal $(v_0, \dots, v_k)$, $v_0 = s$ et $v_k = t$ comme précédemment. Tous les voisins de t sont dans γ d'après la question précédente.
Soit $i = \min\{ j \mid v_j \text{ voisin de } t \}$

Alors $(v_i, \dots, \underbrace{v_k}_{t}, v_i)$ est un cycle (car $(v_i, \dots, v_k)$ est un chemin) et tous les voisins de t sont sur ce cycle : il contient au moins $\underbrace{k}_{\text{voisins de } t} + \underbrace{1}_{t}$ éléments.

Ex 1 : Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un graphe à n sommets où le degré de chacun d'eux est $\geq \frac{n-1}{2}$ qui ait au moins deux composantes connexes. Considérons x et y deux sommets dans deux composantes connexes distinctes.



• Combien y a-t-il de sommets au minimum dans la composante connexe de x ?

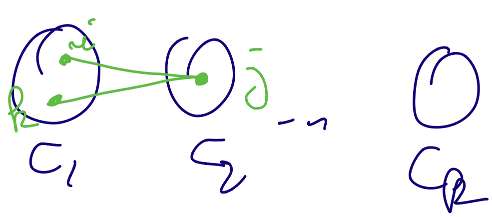
x est de degré au moins $\frac{n-1}{2}$.

Sa composante connexe contient tous ses voisins, soit au moins $\underbrace{\frac{n-1}{2}}_{\text{voisins de } x} + \underbrace{1}_{x}$ sommets

De même, dans la composante connexe de y, il y a au moins $\frac{n-1}{2}+1$ sommets. Si le graphe n'était pas connexe, il contiendrait alors au moins $\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\times 2$ sommets, soit $n+1$ sommets, ce qui est impossible.

Par conséquent, le graphe est connexe.

Exercice 2 : 1) indice : Considérer les composantes connexes de G non connexe



de $\bar{G}$

Soit G un graphe non connexe. Montrons que alors $\bar{G}$ est connexe. Pour ce faire, on considère les k composantes connexes de G $(k \geq 2)$

- Soit $i \in C_1$, $j \in C_2$. Montrons que i et j sont dans la même composante connexe de $\bar{G}$

Comme i et j sont dans deux comp. connexes $\neq$ $\{i, j\} \notin E(G)$ donc $\{i, j\} \in \bar{G}$ et ces sommets sont dans la même composante connexe de $\bar{G}$.

- Soit $i, k \in C_1$. Montrons que i et k sont dans la même composante connexe de $\bar{G}$

Soit j un sommet de C_2, alors d'après ce qui précède $\{i, j\} \in \bar{G}$ et $\{j, k\} \in \bar{G}$ donc (i, j, k) est un chemin dans $\bar{G}$ de i à k et ces sommets sont dans la même composante connexe de $\bar{G}$.

Exercice 4 pour la prochaine fois, en se servant du résultat de l'exercice 3.1)