Outils Logiques Groupe 3 & 4 – DM 5 (Correction)

Rappel : Le système de Gentzen (LK) consiste en les 7 règles dans la Table 3.1 (page 27) du polycopié.

Rappel : Le théorème fondamental (Proposition 10, page 27 du polycopié) du système de Gentzen (LK) dit qu'en tant que système de preuve, LK est correct et complet.

— (Correction.) Pour tout séquent $\Gamma \vdash \Delta$, s'il est prouvable[1] dans LK, alors la formule $(\bigwedge \Gamma) \Rightarrow (\bigvee \Delta)$ est valide.

— (Complétude.) Pour tout séquent $\Gamma \vdash \Delta$, si la formule $(\bigwedge \Gamma) \Rightarrow (\bigvee \Delta)$ est valide, alors le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable dans LK.

Exercice 1

Considérer les règles d'inférence suivantes :

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta} \Rightarrow_L \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta} \Rightarrow_R$$

(1) Pour chacune des deux, montrer que la conjonction de ses hypothèses est équivalente à sa conclusion.

(2) Montrer que LK étendu avec ces deux règles est toujours correct et complet.

(3) Trouver une preuve du séquent $(A \Rightarrow B, A \Rightarrow \neg B \vdash \neg A)$ dans le système LK étendu avec les deux règles précédentes.

Solution

On rappelle que $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$.

(1) On peut écrire les deux arbres suivants dans LK.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg_L \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, \neg A \vee B \vdash \Delta} \vee_L \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, B, \Delta} \neg_R}{\Gamma \vdash \neg A \vee B, \Delta} \vee_R$$

On rappelle que pour chaque règle de LK, la conjonction de ses hypothèses est équivalente à la conclusion. Cela permet de conclure.

(2) On peut toujours remplacer une utilisation des règles $\Rightarrow_L, \Rightarrow_R$ par l'un des deux arbres précédents. Cela permet de transformer toute arbre de preuve de LK étendu avec $\Rightarrow_L, \Rightarrow_R$ en un arbre de preuve de LK. On conclut grâce à la correction et complétude de LK.

(3)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, A \Rightarrow \neg B \vdash A} \mathrm{Ax}}{A \Rightarrow \neg B \vdash \neg A, A} \neg_R \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B, A \vdash A} \mathrm{Ax}}{B \vdash \neg A, A} \neg_R \quad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B, A} \mathrm{Ax}}{B, \neg B \vdash A} \neg_L}{B, A \Rightarrow \neg B \vdash \neg A} \Rightarrow_L}{A \Rightarrow B, A \Rightarrow \neg B \vdash \neg A} \Rightarrow_L$$

1. Ce que l'on appelle « prouvable » est exactement ce que le polycopié appelle « dérivable ».

Exercice 2

La règle suivante s'appelle « *coupure* » :

$$\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad \Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\,\text{Cut}$$

(1) Montrer que si les deux hypothèses de (Cut) sont prouvables dans LK, alors la conclusion l'est aussi. [2]

(2) En déduire que LK étendu avec cette règle est toujours correct et complet.

Solution

(1) Par correction de LK, si $(A, \Gamma \vdash \Delta)$ et $(\Gamma \vdash A, \Delta)$ sont prouvables dans LK, alors les formules $A_1 = (A \wedge \bigwedge \Gamma) \Rightarrow \bigvee \Delta$ et $A_2 = (\bigwedge \Gamma) \Rightarrow (A \vee \bigvee \Delta)$ sont valides. On déduit que la formule $A_1 \vee A_2$ est valide, et un calcul facile montre que $A_1 \vee A_2 \equiv (\bigwedge \Gamma) \Rightarrow (\bigvee \Delta)$. On conclut que $(\Gamma \vdash \Delta)$ est valide. Par la complétude de LK, il est donc prouvable dans LK.

(2)

(Correction) On raisonne par récurrence sur la hauteur des arbres de preuve. La seule preuve de hauteur minimale est la preuve (Ax). Si une preuve π se termine par une règle (R),

$$\pi = \dfrac{\overset{\vdots\;\pi_1}{H_1} \quad \dots \overset{\vdots\;\pi_n}{H_n}}{C}\,\text{R}$$

on sait par induction que les hypothèses de (R) sont toutes valides car $\pi_1, \dots, \pi_n$ sont des arbres de preuve de hauteur strictement plus petite. Si (R) est une règle de LK, on conclut par la correction de LK. Si (R) est la règle (Cut), on conclut par le point (1) précédent que la conclusion C est valide.

(Complétude) Si le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est valide, alors par complétude de LK, il admet une preuve dans LK, ce qui est *a fortiori* une preuve dans LK étendu avec (Cut).

Exercice 3

Trouver des preuves dans LK qui montrent que les formules suivantes sont valides. Vous pouvez également utiliser les règles dans les Exercices 1 et 2 si vous le souhaitez (car vous venez de montrer que l'extension de LK avec elles est toujours correct et complet !)

(1) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

(2) $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$

(3) $(\neg\neg A) \Rightarrow A$

(4) $\neg\neg(A \vee \neg A)$

Solution

(1)

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \vdash A, C$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$A, B \vdash A, C$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$A, B \vdash B, C$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$A, B, C \vdash C$}
\RightLabel{$\Rightarrow_L$}
\BinaryInfC{$B \Rightarrow C, A, B \vdash C$}
\RightLabel{$\Rightarrow_L$}
\BinaryInfC{$A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A, B \vdash C$}
\RightLabel{$\Rightarrow_L$}
\BinaryInfC{$A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C$}
\RightLabel{$\Rightarrow_R$}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow C$}
\RightLabel{$\Rightarrow_R$}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_R$}
\UnaryInfC{$\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$}
\end{prooftree}$$

2. Une telle règle s'appelle « admissible ».

(2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B, A \vdash A, B}\,\mathrm{Ax}}{A \vdash B, B \Rightarrow A}\,{\Rightarrow_R}}{\vdash A \Rightarrow B, B \Rightarrow A}\,{\Rightarrow_R}}{\vdash A \Rightarrow B \vee B \Rightarrow A}\,{\vee_R}$$

(3)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\mathrm{Ax}}{\vdash \neg A, A}\,{\neg_R}}{\neg\neg A \vdash A}\,{\neg_L}}{\vdash \neg\neg A \Rightarrow A}\,{\Rightarrow_R}$$

(4)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\mathrm{Ax}}{\vdash \neg A, A}\,{\neg_R}}{\vdash \neg A \vee A}\,{\vee_R}}{\neg(\neg A \vee A) \vdash}\,{\neg_L}}{\vdash \neg\neg(\neg A \vee A)}\,{\neg_R}$$