Des méthodes en algèbre linéaire

---

① **Sous-espaces vectoriels**

★ **Comment montrer que F est un sev de E?**

- Méthode 1: On montre que
(1) $0_E \in F$
(2) F est stable par combinaison linéaire:

- Méthode 2: On détermine une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E telle que F = Vect($\mathcal{F}$)

- Méthode 3: On identifie une application linéaire f définie sur E telle que F = Kerf.

- Méthode 4: On remarque que F est l'intersection ou la somme de deux SEV.

Pour montrer que F est un EV on peut montrer qu'il est un SEV d'un EV de référence.

★ **Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires?**
Soit F et G deux SEV de E.

- Méthode 1: On montre que $F \cap G = \{0_E\}$ et E = F+G

- Méthode 2: On montre que tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.
On pourra être amené à raisonner par analyse-synthèse

- Méthode 3: Si on dispose d'une base $\mathcal{B}_1$ et F et d'une base $\mathcal{B}_2$ de G, on montre que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est une base de E

- Méthode 4: En dimension finie, si on a dim F + dim G = dim E alors on montre que $F \cap G = \{0_E\}$ OU que E = F+G

★ **Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux ?**

- Méthode 1: Par double-inclusion

- Méthode 2: En dimension finie, si on a $F \subset G$ et dim F = dim G alors F = G

---

② **Applications linéaires**
Soit f une application, $f: E \to F$ avec E et F deux $\mathbb{K}$-ev.

★ **Comment montrer que f est linéaire?**

- Méthode 1: On utilise la définition
® Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et x, $y \in E$, $f(\lambda x + \mu y) = \ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda f(x) + \mu f(y)$

- Méthode 2: On remarque que f est le résultats d'opérations sur des applications linéaires.

★ **Comment déterminer Kerf?**

- Méthode générale: On résout dans E, $f(x) = 0_F$

Si on connaît une matrice représentative A de f, cela revient à résoudre AX = 0

En dimension finie, connaître le rang de f permet de connaître dim Ker f en appliquant le théorème du rang

★ **Comment déterminer Imf ?**

- Méthode 1: Imf = $\{f(x), x \in E\}$ = ...

• Méthode 2: Si on connaît une famille génératrice de E (par exemple une base), $\mathcal{F} = (e_1,e_2,...,e_n)$ alors $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2),...f(e_n))$.
En particulier si A est une matrice représentative de f, Im f est engendré par les colonnes de A.

• Méthode 3: Si on peut prouver que f est surjective alors Imf = F.

En dimension finie, connaître Ker f f permet de connaître dim Im f en appliquant le théorème du rang

★ Comment montrer que f est un endomorphisme?

On montrer que f est linéaire et que E est stable par f: $\forall x\in E$, $f(x)\in E$ ou encore $\mathrm{Im} f \subset E$

Attention: f(E) = E signifie que f est un endomorphisme surjectif ce qui n'est pas toujours vrai.

★ Comment montrer que f est un isomorphisme?

On montre que f est linéaire et bijective.

• Méthode 1: On montre que, pour tout $y\in F$, $f(x) = y$ admet une unique solution dans E (on résout). Cela permet par ailleurs d'expliciter f^{-1}.

• Méthode 2: On montrer que $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$ et Imf = F

• Méthode 3: Si on dispose d'une base $\mathcal{B}$ de E, on montre que l'image de $\mathcal{B}$ par f est une base de F.

• Méthode 4: Si on est en dimension finie avec dim E = dim F = n, on montre que $\mathrm{Ker}\ f = \{0_E\}$ ou que rg f = n

• Méthode 5: Si A est une matrice représentative de A on montre que A est inversible. A^{-1} est alors la matrice représentative de f^{-1}.

★ Comment montrer que f est un automorphisme?

On montre que f est un endomorphisme bijectif.

★ Comment montrer que f est un projecteur?

On montre que f est un endomorphisme et que $f\circ f = f$

Ses éléments caractéristiques sont Ker f et $\mathrm{Im}\ f = \{x\in E, f(x) = x\}$.
On a $\mathrm{Im}\ f \oplus \mathrm{Ker}\ f = E$ et f est la projection sur Im f parallèlement à Ker f.

Dans une base adaptée à cette somme directe, la matrice de p est diag(1, ..., 1,0,…,0)

★ Comment montrer que f est une symétrie?

On montre que f est un endomorphisme et que $f\circ f = \mathrm{Id}_E$

Ses éléments caractéristiques sont
$\mathrm{Ker}\ (f - \mathrm{Id}_E) = \{x\in E, f(x) = x)$ et $\mathrm{Ker}\ (f + \mathrm{Id}_E) = \{x\in E, f(x) = -x\}$
On a $\mathrm{Ker}\ (f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\ (f + \mathrm{Id}_E) = E$ et f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}\ (f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à parallèlement à $\mathrm{Ker}\ (f + \mathrm{Id}_E)$.

Dans une base adaptée à cette somme directe, la matrice de p est diag(1, ..., 1,-1,…,-1)

★ Comment déterminer le rang de f

On suppose E de dimension finie.

• Méthode 1: On cherche une base de Im f et rg f = dim Im f

• Méthode 2: On cherche Ker f et on applique le théorème du rang

• Méthode 3: Si A est une matrice représentative de f alors rg f = rg A.

③ Familles de vecteurs, dimension.

Soit $\mathcal{F} = (e_1,e_2,\dots,e_p)$ une famille de vecteurs de E.

★ **Comment déterminer le rang de $\mathcal{F}$**

• Méthode 1: En cherchant une base de Vect($\mathcal{F}$). rg($\mathcal{F}$) = dim Vect($\mathcal{F}$)

• Méthode 2: Si A est une matrice représentative de $\mathcal{F}$ alors rg($\mathcal{F}$) = rg A.

★ **Comment montrer qu'une famille est libre?**

• Méthode 1: Avec la définition
Dans certains cas, on peut être amené à raisonner par récurrence

• Méthode 2: En dimension finie, $\mathcal{F}$ est libre ssi rg($\mathcal{F}$) = p = card($\mathcal{F}$)

• Méthode 3: On reconnaissant une famille échelonnée

• Méthode 4: On remarque que $\mathcal{F}$ est extraite d'une famille libre

Rappels:
Si $\mathcal{F} = (e_1)$ avec $e_1 \neq 0_E$ alors $\mathcal{F}$ est libre.
Si $\mathcal{F} = (e_1,e_2)$ avec e_1 et e_2 non colinéaires alors $\mathcal{F}$ est libre.
Au-delà de trois vecteurs on doit proposer une justification.

★ **Comment montrer qu'une famille est génératrice de F ?**

• Méthode 1: On montre que F = vect(e_1, e_2, …, e_p)

® Soit $x \in F$, $x = \dots = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$

• Méthode 2: En dimension finie, $\mathcal{F}$ est génératrice de F ssi rg($\mathcal{F}$) = n = dim F

★ **Comment montrer qu'une famille est une base?**

• Méthode 1: On montre que $\mathcal{F}$ est libre et génératrice.

• Méthode 2: On montre que, pour tout $x \in E$, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$ admet une unique solution dans $\mathbb{K}^n$ Cela permet en plus de trouver les coordonnées de x.

• Méthode 3: En dimension n, si card($\mathcal{F}$) = n alors $\mathcal{F}$ est une base de ssi $\mathcal{F}$ est libre OU génératrice.

• Méthode 4: En dimension n, $\mathcal{F}$ est une base ssi card($\mathcal{F}$) = rg($\mathcal{F}$) = n

• Méthode 5: Si A est une matrice représentative de $\mathcal{F}$, on montre que A est inversible.

• Méthode 5: Si A est une matrice représentative de $\mathcal{F}$, on montre que A est inversible.

• Méthode 6: On remarque que $\mathcal{F}$ est la concaténation de deux bases de deux SEV supplémentaires.

★ **Comment trouver une base de F?**

On cherche une famille génératrice de F en écrivant F = vect(….), puis on se demande si elle est libre. Si la réponse est oui c'est une base de F.
Si la réponse est non alors l'un des vecteurs de la famille est CL des autres et on le supprime puis on réexamine la liberté.

★ **Comment trouver un supplémentaire de F en dimension finie?**

On détermine une base de F puis on complète cette famille libre avec des vecteurs d'une base de E (base canonique par exemple) pour obtenir une nouvelle base de E. Les vecteurs ajoutés engendrent le supplémentaire.

★ **Comment déterminer la dimension de F ?**

- Méthode 1: On détermine une base $\mathcal{B}$ de F. dim F = card($\mathcal{B}$).
- Méthode 2: On utilise la formule de Grassmann ou le théorème du rang
- Méthode 3: On remarque que F est isomorphe à un EV de dimension finie connue.

---

④ **Matrices représentatives**

★ **Comment écrire la matrice d'une famille de vecteurs ?**

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et F une famille de E, la matrice de F dans $\mathcal{B}$ s'obtient en remplissant chaque colonne avec les coordonnées des vecteurs de F dans $\mathcal{B}$.

★ **Comment écrire la matrice d'une application linéaire ?**

Soit f :E→F linéaire, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F.
La matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est la matrice de la famille f($\mathcal{B}$) dans la base $\mathcal{C}$.
Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, on détermine les coordonnées de $f(e_1)$, $f(e_2)$, …$f(e_n)$ dans la base $\mathcal{C}$ et on remplit les colonnes de la matrice.

On pourra être amené à choisir des bases pertinentes pour obtenir une matrice particulière, par exemple diagonale.

★ **Comment expliciter l'endomorphisme canoniquement associé, trouver Ker A et Im A ?**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'endomorphisme canoniquement associé est f :$\mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ défini par f(X) = AX avec X matrice de $x \in \mathbb{K}^p$ dans la base canonique.

On peut alors déterminer Ker A = Ker f et Im A = Im f

★ **Comment déterminer le rang**

Méthode 1 : On ne change pas le rang d'une matrice en lui appliquant des OEL et/ou des OEC. On pourra dons la transformer en une matrice échelonnée dont le rang est évident, par exemple en appliquant la méthode du pivot sur les lignes ou sur les colonnes.

Méthode 2 : Le rang de A est le rang de ses vecteurs colonnes dans K^p, ou pourra remarquer des propriétés des colonnes pour trouver le rang

Méthode 3 : On déterminer Ker A et on applique le théorème du rang.

★ **Comment changer de base**

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ alors P est la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. Ses colonnes contiennent les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$
P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$

Soit $x \in E$ et on a $\boxed{\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(x) = P\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(x)}$

Soit f :E→F linéaire, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$deux bases de F
On écrit les matrices de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$
On détermine Q^{-1}
On a $\boxed{\mathcal{M}at_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = Q^{-1}.\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).P}$

Si f est un endomorphisme de E, si M = $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$ et N = $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(E)$ alors N = $P^{-1}MP$

Pour les calculs matriciels je vous renvoie à la fiche méthode donné avec le chapitre