30.09.21

LOS TD 2

Exercice 1

a) $P \wedge R \wedge C$ $\quad$ P = pâte ; R = raquette ; C = champi

b) matin = (café $\wedge$ tartine) $\vee$ thé

c) (Paris capitale) $\Rightarrow$ (Terre ronde)

d) (Rome capitale) $\Rightarrow$ (Terre ronde)

e) $\neg$(Terre ronde) $\Rightarrow$ (manger chapeau)

Exercice 2

			A	D	B	C	E	
P	Q	R	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow A$	$P \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow R$	$B \Leftrightarrow C$	$D \Rightarrow E$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

→ la formule est valide

Exercice 3

1) A oui

B NON

C NON

D NON

		φ	
P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

2) A NON

B NON

C NON

D oui

			A	φ	B	C	ψ
P	Q	R	$\neg Q \vee R$	$P \wedge A$	$P \wedge \neg Q$	$P \wedge \neg R$	$B \vee C$
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0	0

3)

A NON

B OUI

C NON

D NON

P	Q	R	φ: $P \Rightarrow Q$	A: $Q \vee R$	ψ: $P \Rightarrow A$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

4)

A NON

B OUI

C NON

D NON

P	Q	R	A: $P \wedge Q$	φ: $A \Rightarrow R$	B: $\neg Q \vee R$	ψ: $P \Rightarrow B$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0	1

Exercice 4

$\boxed{\Rightarrow}$ Mq ψ est conséquence logique de φ si $\varphi \Rightarrow \psi$ est valide

Supposons $\varphi \Rightarrow \psi$ valide

Alors $\left.\begin{array}{l} \text{soit } [\![\varphi]\!] = 1 \text{ et } [\![\psi]\!] = 1 \\ \text{soit } [\![\varphi]\!] = 0 \text{ et } [\![\psi]\!] = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi \vDash \psi.$

Alors $\forall I$, si $I \vDash \varphi$, alors $I \vDash \psi$

Donc ψ conséquence logique de φ.

$\boxed{\Leftarrow}$ Mq $\varphi \Rightarrow \psi$ est valide si ψ est csq logique de φ.

Supposons ψ csq logique de φ.

Alors $\forall I$, si $I \vDash \varphi$, $I \vDash \psi$

Donc $\varphi \Rightarrow \psi$ est valide

(le seul cas où $\varphi \Rightarrow \psi$ est fausse, c'est si $[\![\varphi]\!] = 1$ et $[\![\psi]\!] = 0$).

Exercice 5

a) $\boxed{\Rightarrow}$ Si φ et ψ sont valides, alors $\forall I,\ [\![\varphi]\!]^I = [\![\psi]\!]^I = 1$

Donc $\forall I,\ [\![\varphi \wedge \psi]\!]^I = \text{AND}\left([\![\varphi]\!]^I, [\![\psi]\!]^I\right) = \text{OR}(1,1) = 1$

Donc $\varphi \vee \psi$ est valide.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\varphi \wedge \psi$ est valide, alors $\forall I,\ 1 = [\![\varphi \wedge \psi]\!]^I = \text{AND}\left([\![\varphi]\!]^I, [\![\psi]\!]^I\right)$

Donc $\forall I$, on a $[\![\varphi]\!]^I = [\![\psi]\!]^I = 1$

Donc φ et ψ sont valides.

b) Soient A, B des propositions

Soit $\varphi = A \Rightarrow B$

$\psi = B \Rightarrow A$

A	B	φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

$\varphi \vee \psi$ est valide, mais ni φ ni ψ ne le sont.

c) Soient φ et ψ satisfiable :

- alors $\varphi \vee \psi$ est satisfiable, car soit φ soit ψ l'est.
- on ne peut rien dire pour $\varphi \wedge \psi$
  ↳ elle serait satisfiable si φ et ψ le sont pour une même interprétation.

Exercice 6