

Devoir maison - MI 3

Exercice 1:

1). $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4

On pose $u = \sin x$

$$u = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$$

Etant donné que u tend vers 0 lorsque x tend vers 0, on peut dire que:

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + O(u^5)$$

$$u^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + O(x^5)$$

$$u^3 = x^3 + O(x^5)$$

$$u^4 = x^4 + O(x^5)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc: } \exp(\sin x) &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2 - (x^4/3)}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5) \\ &= 1 + x + \frac{x^2 - (x^4/3)}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^5) \\ &= 1 + x + \frac{24x^2 - (24x^4/3)}{48} + \frac{2x^4}{48} + O(x^5) \\ &= \frac{1 + x + 24x^2 - 8x^4 + 2x^4}{48} + O(x^5) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{6x^4}{48} + O(x^5) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + O(x^5) \end{aligned}$$