Algèbre linéaire.

Espaces vectoriels. Feuille n°1.

1. Systèmes libres. Systèmes générateurs.

Exercice 1:

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$a = (2,1,-3)\ ,\ b = (3,2,-5)\ ,\ c = (1,-1,1) \text{ et } d = (6,2,-7)\ .$$

Montrer que d est une combinaison linéaire des vecteurs a, b, c . Le système $\{a, b, c\}$ est-il générateur dans $\mathbb{R}^3$? Forme-t-il une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2:

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$a = (1,2,-1,-2)\ ,\ b = (2,3,0,-1)\ ,\ c = (1,2,1,3)\ ,\ d = (1,3,-1,0) \text{ et } e = (7,14,-1,2)\ .$$

Montrer que e est une combinaison linéaire des vecteurs a, b, c, d . Le système $\{a, b, c, d\}$ est-il générateur dans $\mathbb{R}^4$? Forme-t-il une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 3:

Montrer que les vecteurs (a, b) et (c, d) de $\mathbb{R}^2$ sont liés si et seulement si $ad - bc = 0$. Montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Exercice 4:

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $v = (1, 2)$ et $w = (-2, m)$.

— À quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il proportionnel au vecteur v ?

— En supposant que w *n'est pas* proportionnel à v , montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est une combinaison linéaire de v et w.

Exercice 5:

Pour chacune des suites de vecteurs suivantes, dans les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$, on indiquera s'il s'agit d'un suite libre, génératrice, d'une base ; si l'on montre que la suite est liée, on donnera une relation linéaire explicite entre les v_j. Le cas échéant, on devra discuter suivant le paramètre m.

— $v_1 = (2,3,4)\ ,\ v_2 = (-1,-5,-7)\ ,\ v_3 = (3,1,1)$,

— $v_1 = (1,-1,i)\ ,\ v_2 = (-1,i,1)\ ,\ v_3 = (i,1,-1)$,

— $v_1 = (1,2,-1,0)\ ,\ v_2 = (4,5,0,1)\ ,\ v_3 = (2,1,2,1)$,

— $v_1 = (1,-1,2,4)\ ,\ v_2 = (0,3,-1,5)\ ,\ v_3 = (-1,0,2,6)$,

— $v_1 = (4,3,3,6)\ ,\ v_2 = (1,1,-1,-2)\ ,\ v_3 = (4,2,10,m)$,

— $v_1 = (1,2,-1,-2)\ ,\ v_2 = (2,3,0,-1)\quad v_3 = (1,3,-1,0)\ ,\ v_4 = (1,2,1,m)$.

Exercice 6:

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. On considère les vecteurs $a = (2, 3, -1)$, $b = (1, -1, -2)$, $c = (3, 7, 0)$ et $d = (5, 0, -7)$. Montrer que $\mathrm{Vect}\big(a, b\big) = \mathrm{Vect}\big(c, d\big)$.

Exercice 7:

Parmi les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ énumérées ci-dessous, lesquelles sont libres ?

(a) $\mathcal{S}_1 = \{(1, 2, 1),\ (2, 3, 1),\ (0, 1, 1)\}$

(b) $\mathcal{S}_2 = \{(1, 2, 1),\ (2, 3, 1),\ (0, 1, 2),\ (3, 6, 4)\}$

(c) $\mathcal{S}_3 = \{(2, -3, 4),\ (3, -1, 7),\ (5, -4, 2)\}$

Exercice 8:

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v = (1, -2, -5)$ et $w = (-2, 4, m)$.

— À quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il proportionnel au vecteur v ?

— On suppose que w *n'est pas* proportionnel à v et l'on considère l'ensemble P de toutes les combinaisons linéaires de v et w. Montrer qu'on a

$$P = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ ax + by + cz = 0 \,\},$$

où a, b, c sont des nombres réels, non tout les trois nuls, que l'on déterminera.

Exercice 9:

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v_1 = (-2, 4, 1)$, $v_2 = (1, -2, 0)$ et $v_3 = (3, b, -1)$.

— À quelle condition sur le paramètre b le vecteur v_3 est-il une combinaison linéaire de v_1 et v_2 ?

— On suppose cette condition vérifiée. Montrer que v_1 est une combinaison linéaire de v_2 et v_3 et que v_2 est une combinaison linéaire de v_1 et v_3 .

— On suppose que cette condition n'est pas vérifiée. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire de v_1 , v_2 et v_3 .

Exercice 10:

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. On considère le sous-espace F engendré par les vecteurs $(1, 2, -1, 0)$, $(4, 8, -4, -3)$, $(0, 1, 3, 4)$ et $(2, 5, 1, 4)$. Extraire de ce système générateur de F un système de vecteurs libres.

Exercice 11:

Décrire le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$a = (1, -1, 1, 0)\ ,\ b = (1, 1, 0, 1)\ ,\ c = (2, 0, 1, 1)\ .$$

Exercice 12:

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, le vecteur $x = (2, 3, 1, 5)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs

$$a = (1, 3, 1, 2), \qquad b = (2, 5, 1, 1), \qquad c = (3, 1, 4, 2), \qquad d = (3, 2, 5, 5)\ ?$$

Exercice 13:

Trouver une relation de dépendance linéaire entre les quatre vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$a = (3, 1, -1), \qquad b = (-1, 1, 2), \qquad c = (1, -1, 1), \qquad d = (5, -2, 3)$$

Exercice 14:

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ et les polynômes

$$P_1(x) = (x-1)^2 \quad , \quad P_2(x) = (2x+1)^2 \quad \text{et} \quad P_3(x) = ux + 3\,,$$

où u est un paramètre réel.

a) À quelle condition sur le paramètre u le vecteur P_3 est-il une combinaison linéaire de P_1 et P_2 ?

b) On suppose cette condition vérifiée. Montrer que P_1 est une combinaison linéaire de P_2 et P_3 et que P_2 est une combinaison linéaire de P_1 et P_3 .

c) On suppose que cette condition n'est pas vérifiée. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}_2[X]$ est une combinaison linéaire de P_1 , P_2 et P_3 .

Exercice 15:

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère les éléments c, s, u, v, w définis par

$$c(x) = \cos x\,,\ s(x) = \sin x\,,\ u(x) = \cos 2x\,,\ v(x) = 1\,,\ w(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4})\,,$$

quel que soit le réel x.

a) Montrer que s n'est pas proportionnel à c .

b) Montrer que v n'est pas une combinaison linéaire de c et s (Indication : raisonner par l'absurde et donner diverses valeurs à la variable x).

c) Est-ce-que u est une combinaison linéaire de c et s ? Même question pour w.

Exercice 16:

Montrer que les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \exp(x)$ forment un système indépendant dans$\mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Exercice 17:

On considère l'ensemble des suites numériques réelles qui vérifient

$$\forall n \geq 0 \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \ .$$

On note u la suite numérique réelle appartenant à ce sous-espace et vérifiant $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$. On note de même v la suite numérique réelle vérifiant $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$. Montrer que le système $\{u, v\}$ est un système libre et générateur de ce sous-espace vectoriel.

Exercice 18:

Soit E un espace vectoriel réel. On se donne u et v deux vecteurs de E . Montrer qu'ils forment un système libre si et seulement si le système formé par les vecteurs $u + v$ et $u - v$ est libre.

Exercice 19:

Soit E un espace vectoriel réel. Soient u, v et w trois vecteurs de E dont on suppose qu'ils forment un système libre.

a) Le vecteur $u+v+w$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $u+v$ et $v+w$?

b) Le système formé par les vecteurs $u+v+w$, $u+v$ et $v+w$ est-il libre ?

Exercice 20:

Dans cet exercice, on considère $\mathbb{R}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$ (cela signifie que les "scalaires" sont exclusivement des nombres rationnels).

a) Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas proportionnel à 1.

b) Soit x, y deux rationnels tels que $x + y\sqrt{2} \neq 0$. Montrer que le nombre réel

$$\frac{1}{x + y\sqrt{2}}$$

est une combinaison linéaire de 1 et $\sqrt{2}$.

c) Soit $\mathbf{K}$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de 1 et $\sqrt{2}$. Montrer que $\mathbf{K}$ est un corps pour les opérations d'addition et de multiplication usuelles.

2. Généralités. Sous-espaces vectoriels.

Exercice 1:

On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$. Soit F la partie de $\mathbb{R}^3$ formés des vecteurs (x, y, z) qui vérifient l'identité $2x - y - 2z = 0$. Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel.

Exercice 2:

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels :

$$E_1 = \{ (x,y) \,:\, 2x - y = 0 \} \quad , \quad E_2 = \{ (x,y) \,:\, 2x - y = 1 \}$$

$$E_3 = \{ (x,y) \,:\, x^2 - y^2 = 0 \} \quad , \quad E_4 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,?$$

Exercice 3:

On considère l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est un espace vectoriel réel. Les sous-ensembles suivants sont-il des sous-espaces vectoriels ?

$$E_1 = \{ f \,:\, f(0) = 1 \} \,,\, E_2 = \{ f \,:\, f(1) = 0 \} \,,\, E_3 = \{ f \,:\, f(1) = 2f(0) \} \,,$$

$$E_4 = \{ f \,:\, f(1) = f(0) + 2 \} \quad , \quad E_5 = \{ f \,:\, (\forall x \in \mathbb{R})\, f(x) \leq 0 \}$$

et enfin l'ensemble E_8 des polynômes de degré 3. Considérons le sous-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables. Les sous-ensembles

$$E_6 = \{f \,:\, f' + f = 0\} \quad , \quad E_7 = \{f \,:\, f' + f = 1\}$$

sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

Exercice 4:

Soit E un espace vectoriel réel et F un sous-espace vectoriel strict de E (c'est à dire distinct de E). On note C le complémentaire de F dans E .

a) Montrer que

$$\forall x \in F \ , \forall y \in C \ ; x + y \in C \ ;$$

b) En déduire que C n'est pas un sous-espace vectoriel de E et que le sous-espace engendré par C est E tout entier.

c) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On suppose que $F \not\subset G$ et que $G \not\subset F$. Montrer que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 5:

Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E, tels que : (i) $F + H = G + H$; (ii) $F \cap H = G \cap H$; (iii) $F \subset G$. Montrer que $F = G$. Le résultat subsiste-t-il si l'on supprime une des hypothèses ?

Exercice 6:

On considère l'ensemble des suites numériques réelles qui vérifient

$$\forall n \geq 0 \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \ .$$

Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites numériques réelles.

Exercice 7:

Soit a, b deux nombres réels tels que $a^2 + 4b = 0$. Soit S l'ensemble des suites $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+2} = a w_{n+1} + b w_n \ .$$

Montrer que les suites $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\frac{a}{2})^n \quad et \quad v_n = n(\frac{a}{2})^n$$

appartiennent à S et que toute suite appartenant à S est une combinaison linéaire de u et v.

Exercice 8:

Dans cet exercice, on considère $\mathbb{R}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$ (cela signifie que les "scalaires" sont exclusivement des nombres rationnels).

— Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas proportionnel à 1.

— En déduire que le système $\{1, \sqrt{2}\}$ est libre sur $\mathbb{Q}$.

3. Généralités. Exemples d'espaces vectoriels

Exercice 1:

On considère l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ qui valent 0 en $x = 1$. On le note $\mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. S'agit-il d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Même question avec l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ qui valent 2016 en $x = 1$.

Exercice 2:

On considère l'ensemble des suites numériques réelles (applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$). On le note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On note $u\ ; n \mapsto u(n) = u_n$ une telle application. S'agit-il d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Même question avec l'ensemble des suites numériques réelles qui vérifient que $u_0 = 0$ et avec l'ensemble des suites numériques réelles qui vérifient que $u_{10} = 2016$.

Même question avec l'ensemble des suites numériques réelles qui vérifient que

$$\forall n \geq 0\ ; u_{n+1} = \alpha u_n + 1$$

(où $\alpha \in \mathbb{R}$).

Exercice 3:

Soit n un entier naturel. Soient $(a_0, \ldots, a_n)$ un ensemble de $n+1$ réels. On appelle fonction polynomiale réelle la fonction

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i\ .$$

Montrer que l'ensemble des fonctions polynomiales réelles est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En est-il de même pour l'ensemble des fonctions polynomiales qui valent 1 en $x = 0$?

Exercice 4:

Notons $\mathcal{F}_2$ l'ensemble des fonctions vectorielles (à valeurs dans $\mathbb{R}^2$) de la variable réelle t . On notera $F\ : t \mapsto F(t) = (F_1(t), F_2(t))$ une telle fonction. S'agit-il d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$? Soit n un entier naturel non nul. Que peut-on dire de l'ensemble $\mathcal{F}_n$ des fonctions vectorielles (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) de la variable réelle t ?

Exercice 5:

Soit a une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble $\mathcal{E}_a$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient $f'(x) = a(x)f(x)$. Montrer que $\mathcal{E}_a$ est un espace vectoriel réel.

Soit b une seconde fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont on suppose qu'elle n'est pas identiquement nulle. On considère l'ensemble $\mathcal{E}_{a,b}$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient $f'(x) = a(x)f(x) + b(x)$. Est-ce un espace vectoriel ?

Exercice 6:

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit une addition par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x',y') \in \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y'),$$

et une multiplication externe par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lambda \cdot (x,y) = (\lambda x, 0).$$

Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ vérifie tous les axiomes d'espace vectoriel sauf un.