4) $\frac{1}{1+e^x}$ à l'ordre 4.

On cherche d'abord le D.L de exp(x) à l'ordre 4.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)$$

On constate que $\frac{1}{1+e^x}$ est de la forme :

$\frac{1}{1+x}$ ou $\frac{1}{1+U}$

Or, à l'ordre 4 : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + O(x^5)$

On prend alors $U = e^x$ et on pose :

$$\frac{1}{1+U} = 1 - U + U^2 - U^3 + U^4 + O(x^5)$$

$$U = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)$$

$$U^2 = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{3} + O(x^5)$$

$$U^3 = 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^3}{2} + \frac{27x^4}{8} + O(x^5)$$

$$U^4 = 1 + 4x + 8x^2 + \frac{32x^3}{3} + \frac{32x^4}{3} + O(x^5)$$

On remplace :

$$\frac{1}{1+U} = 1 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) + 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{3}$$
$$- \left(1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^3}{2} + \frac{27x^4}{8}\right) + 1 + 4x + 8x^2 + \frac{32x^3}{3}$$
$$+ \frac{32x^4}{3} + O(x^5)$$