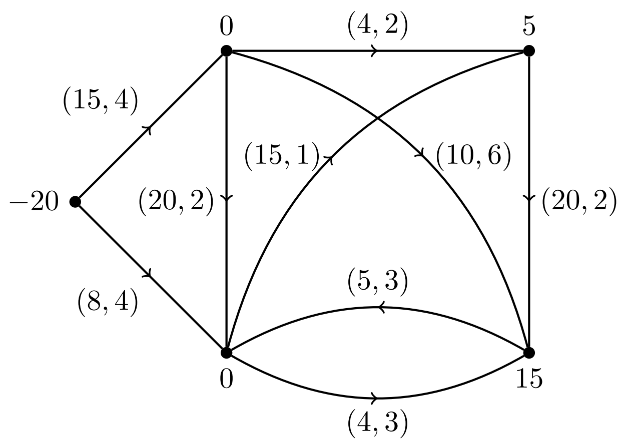
Mobilité (M2 IMPAIRS) TD3

Exercice 1. Circulation admissible de coût minimum

Question 1. En utilisant une réduction au problème de flot maximum, trouver une circulation admissible dans le réseau ci-dessous. Les étiquettes sur les arcs sont de la forme (c, b), où c est la capacité et b est le coût. Les étiquettes sur les sommets représentent les demandes.

Question 2. En utilisant l'algorithme de Klein, en déduire une circulation admissible de coût minimum dans le réseau.



Exercice 2. Transport du blé

Le blé est récolté dans le Midwest et stocké dans des silos à grains situés dans trois villes différentes : Kansas City, Omaha et Des Moines. Ces silos à grains alimentent trois minoteries situées à Chicago, St Louis et Cincinnati. Les céréales sont expédiées aux minoteries dans des wagons de chemin de fer, chaque wagon pouvant contenir une tonne de blé. Chaque silo à grains est en mesure de fournir le nombre suivant de tonnes (c'est-à-dire de wagons) de blé aux minoteries sur une base mensuelle, et chaque minoterie demande le nombre suivant de tonnes de blé par mois.

Silo	Offre
Kansas City	150
Omaha	175
Des Moines	275

Minoterie	Demande
Chicago	200
St. Louis	100
Cincinnati	300

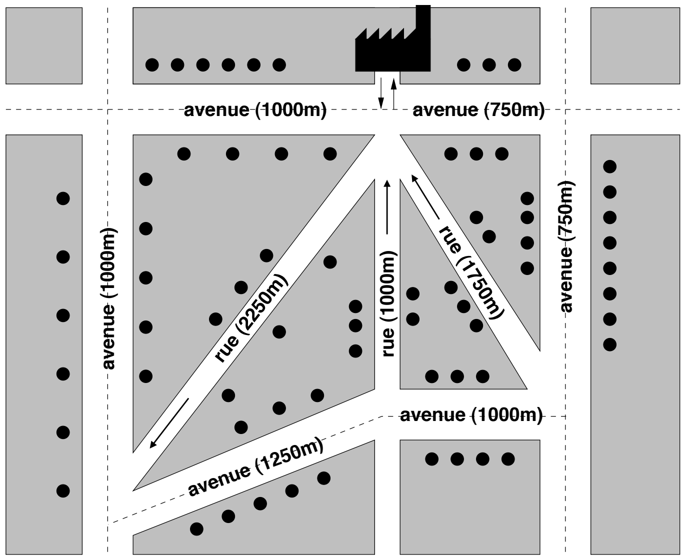
Le coût du transport d'une tonne de blé de chaque silo à grain (source) à chaque moulin (destination) diffère en fonction de la distance et du système ferroviaire. Ces coûts sont indiqués dans le tableau suivant. Par exemple, le coût du transport d'une tonne de blé de l'élévateur à grains d'Omaha à la minoterie de Chicago est de 7 $.

	Chicago	St. Louis	Cincinnati
Kansas City	6	8	10
Omaha	7	11	11
Des Moines	4	5	12

Le problème est de déterminer combien de tonnes de blé il faut transporter de chaque silo à grain à chaque minoterie sur une base mensuelle afin de minimiser le coût total du transport.

Exercice 3. **Ramassage des poubelles**

Voici le plan simplifié d'un quartier d'une ville. Une benne venant de l'usine d'incinération doit vider les 70 conteneurs indiqués sur le croquis et revenir à l'usine.



La circulation sur les avenues est dans les deux sens, mais les rues sont à sens unique (indiqué par des flèches). La vitesse du camion-benne à vide (ou entre deux ramassages) est de 30km/h et il est le même dans les deux sens. Il faut compter 30 secondes pour vider un conteneur. Chaque avenue a deux voies et il faut réaliser le ramassage indépendament de chaque coté, ce qui nécessite deux passages de la benne (un dans chaque sens). Le ramassage sur les trois rues se fait des deux cotés en même temps.

Question 1. Trouver un trajet optimal qui minimise le temps total du parcours nécessaire pour ramasser toutes les ordures. Combien de temps dure ce trajet au total (arrêts compris) ?

Exercice 4. **Digicode**

Comme on peut le constater lorsque l'on se trouve face à un digicode, l'appareil fonctionne (la plupart du temps) de la façon suivante : l'utilisateur compose une suite de lettres (ou de chiffres) afin de composer un mot qui soit le "sésame" de la porte concernée. Supposons par exemple que le mot recherché soit composé de cinq caractères. L'appareil va, à chaque nouveau caractère choisi par l'utilisateur, tester le mot constitué par les cinq derniers caractères tapés par la personne.

Ainsi, si l'utilisateur rentre la séquence 123456, la machine testera les mots 12345 et 23456. Le problème qui nous intéresse ici est de savoir quel est le nombre minimal de caractères qu'il faut taper afin que la machine teste tous les mots possibles, et qu'ainsi la porte s'ouvre à coup sûr.

Pour simplifier le problème, nous allons considérer un digicode à seulement deux lettres, notées A et B, sur lequel on recherche un mot de trois lettres. Les mots possibles sont ici : AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB.

Question 1. Dessiner un graphe orienté G dont les sommets sont les mots de deux lettres, avec un arc de u vers v si la dernière lettre de u et la première lettre de v sont égales. (Le graphe contient deux boucles.)

Question 2. Trouver un cycle eulérien dans G.

Question 3. Déduire un mot de 10 lettres qui contient tous les mots de 3 lettres.

Question 4. Prouver que plus généralement, étant donné un digicode à p lettres, il existe un mot de longueur $p^n + n - 1$ qui contient tous les mots de longueur n. (Dans la question précédente on a $p = 2$ et $n = 3$, et $2^3 + 3 - 1 = 10$.)