Mikael.Rabie@inf.fr.

Fonction $f \underset{\in}{=} O(g)$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = c \geqslant 0,$$

$f(x) \leqslant C.g(x)$ pour x assez grand

$f \underset{\in}{=} \Theta(g)$

$f = O(g)$ et $g = O(f)$

Exercice 1:

1) $f_1 = 3n^2 + 4n - 6 \in O(n^2)$ Ok

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_1(n)}{n^2} = 3 \quad f_1 \in O(n^2)$$

2) $f_2 = 3n^2 + 4n - 6 \in O(n^3)$ Ok

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_2(n)}{n^3} = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n^2} + \frac{4}{n^4} - \frac{6}{n^3} = 0$$

3) $f_3 = 3n^2 + 4n - 6 \in \Theta(n^2)$ Ok

- montrer que $f = O(g) \rightsquigarrow (Q.1)$
- $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{f_3(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{3n^2 + 4n + 6} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3 + \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2}} = \frac{1}{3}$

4) $f_4 = 3n^2 + 4n - 6 \in \Theta(n^4)$ N

- $\lim \frac{3n^2 - 4n - 6}{n^4} = 0$
- $\lim \frac{n^4}{f_4} = \frac{n^4}{3n^2 - 4n - 6} = \frac{n^2}{3 - \frac{4}{n} - \frac{6}{n^2}} = +\infty$

Donc $f_4 \notin \Theta(n^4)$

5) $\lim \frac{f_5}{n^3} = 3 \quad \lim \frac{n^3}{f_5} = \frac{1}{3}$

6) $\lim \frac{3n^2 + 2^n}{2^n} = \lim \frac{3n^2}{2^n} + 1 = 1$ (par croissance comparé).

Donc $f_6 = \Theta(2^n)$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+2^{3n+2}}{2^n} = \lim \underbrace{\frac{3n^2}{2^n}}_{\text{vers } 0} + \underbrace{\frac{2^{3n+2}}{2^n}}_{\text{vers } 2^{3n+2-n} = 2^{2n+2}} = +\infty$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+2^{3n^2}}{2^{n^3}} = \lim \underbrace{\frac{3n^2}{2^{n^3}}}_{\text{vers } 0} + \underbrace{2^{3n^2-n^3}}_{\text{vers } 0} \rightsquigarrow \text{vers } -\infty = 0$

11. $\lim \frac{3^n}{2^n} = \lim \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$

Donc $3^n \notin O(2^n)$

12. $\lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim \frac{(n+1)\times n!}{n!} = +\infty$

Donc $(n+1)! \notin O(n!)$

Exercice 2:

1. $\log n$: combien de fois il faut diviser par 2 pour atteindre 1.

```
s=0
for(int i=n; i> 1; i=i/2)  ~> log n
   for(int j= 0; j< i;j+1)  ~> i
      s= s+1
```

i=n	n
n/2	n/2
n/4	n/4
⋮	⋮
	1

Complexité $2n = \Theta(n)$

$N = \underbrace{n}_{n} + \underbrace{n/2 + n/4 + \dots + 1}_{n}$

Donc $2n$

$\rightsquigarrow \sum_{k=0}^{\log n} \frac{n}{2^k} = n \sum_{0}^{\log n} \frac{1}{2^k}$

$= \sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$

$= 2$

2. $s = 0$

for (int i = 1 ; i < n; i = i*2) $\rightarrow \log n$

for (int j = 0; j < n ; j = j+1) $\rightarrow n$

s = s+1

Complexité : $n \log n$

3. $s = 0$

for (int i = n; i > 0 ; i = i - 1)

for (int j = i; j > 0; j = j - 1)

s = s + 1

Complexité $\frac{n^2}{2}$ $\Theta(n^2)$

i	j
n	n
n-1	n-1
n-2	n-2
⋮	⋮
1	1

$\sum_{k=1}^{n} k$

$N = n + (n-1) + (n-2) ...$

$= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$

4. $s = 0$

for (int i = 1; i < n ; i = i*2) $\rightarrow \log n$ itérations

for (int j = 1; j < n; j = j*2) $\rightarrow \log n$ itérations

s = s+1

Complexité $\Theta(\log^2 n)$

$\log n$ ssi $*2$ ou $/2$

$\log n \left\{ \begin{array}{cc} i & \log n \\ 1 & \log n \\ 2 & \vdots \\ 4 & \vdots \\ \vdots & \\ n & \log n \end{array} \right.$

$\rightarrow \log n \times \log n = \log^2 n$

Exercice 3 :

1) Liste d'adjacences $O(|S| + |A|)$
$(|V| + |E|)$

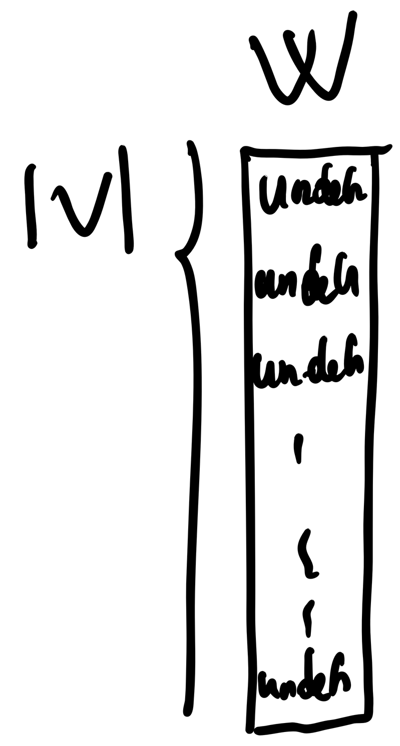
Matrice $O(|S|^2)$
$(|V|^2)$

X ensemble d'éléments

$|X| \rightarrow$ nbr d'éléments de X

2) Trier efficacement un tableau de taille n $\Theta(n \log n)$

ligne 4 $\Rightarrow$ $|A| \log |A|$ étapes
$|E| \log |E|$



$W[i]$: le plus petit poids d'une arrête sortant de i.

Complexité lignes 7 et 8 : $|A|$: on parcourt le tableau des arêtes triées
$|E|$

Complexité algo : Θ $(|E| \log |E| + |V|)$
$(|A| \log |A| + |S|)$

3. for (i,j) in E (pas trié)
    if $(W[i] = \text{undef} \;||\; W[i] > w(i,j))$
        $W[i] = w(i,j)$

Exercice 41

1. V : Villes de France — sommet
   E : villes connectées (routes) — arrête
   $w(i,j)$: coût d'essence de i vers j — (poids sur les arrêtes

2. Pour chaque parcours complet, on calcule son coût.
   On prend le parcours le moins coûteux.

3. $|V| \times (|V|!)$ opérations || permutation