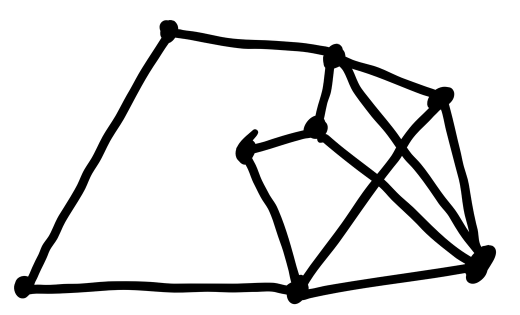
Contrôle TD 11 octobre . 2/3 des meilleurs notes + Term → moyenne.

Un graphe :



Soit X un ensemble fini, on note $\binom{X}{2}$ l'ensemble des partis à deux éléments.
(partis ⇝ sous ensemble)

On note u,v la partie $\{u,v\}$, ici l'ordre n'a pas d'importance $12=21$

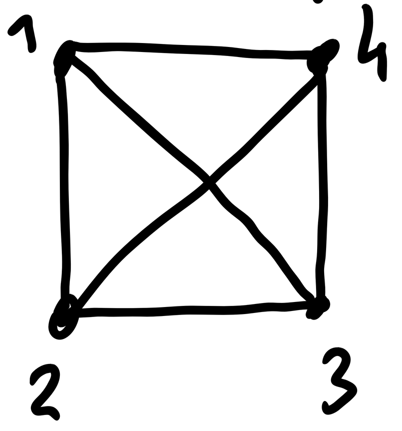
Exemple $\{1,2,3\}$ alors $\binom{X}{2} = (12, 23, 13)$

Def : • graphe ⟺ un couple $G=(V,E)$ formé par un ensemble fini V et un sous ensemble E de $\binom{V}{2}$.

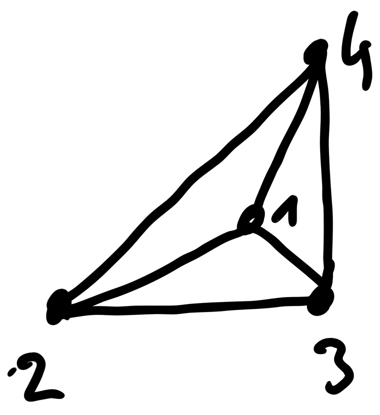
- V sommets de G noté $V(G)$
- E arrêtes de G noté $E(G)$

Les Graph sont utilisé pour des relations binaire ex : réseaux sociaux.
Il est possible d'avoir un graph orienté avec ~~ajout sur~~ arrêts $\xrightarrow{\text{devient}}$ arc

NB : La form des graphe n'a pas d'importance mais il est mieux de les simplifier ex :



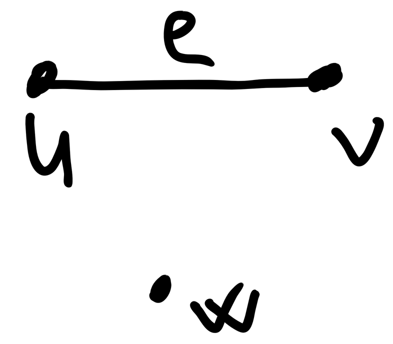
⇒



Qlqs def :

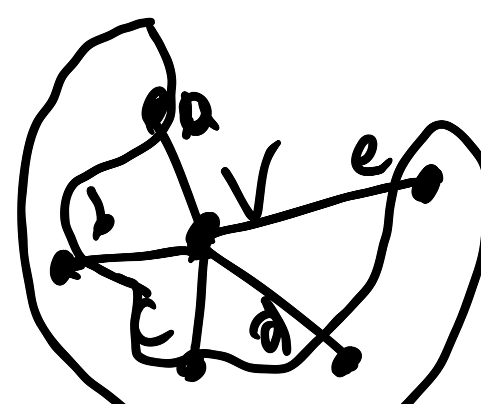
G un graph, u, v deux sommets et e une arrête.

u et v sont adjacents si $uv \in E(G)$



u et w ne sont pas adjacents

e est incidente à u et à v $(u \in e)$
⇝ e incidente à u



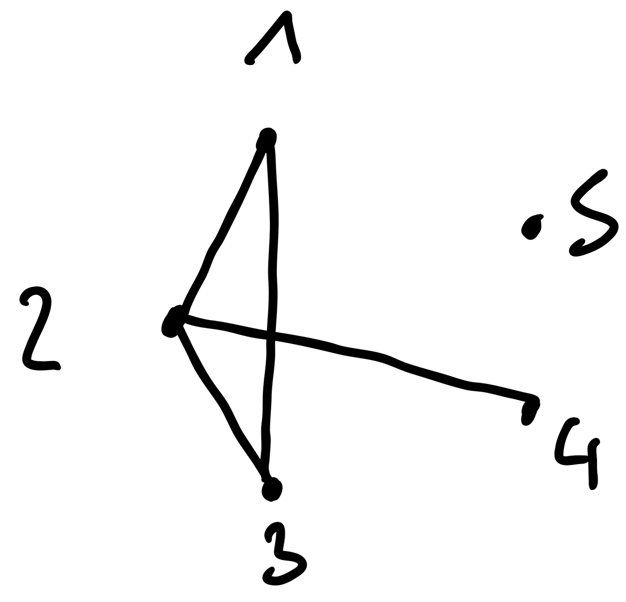
$N(v)$ (neighbourhood)
$S(v) = \{a, b, c, d, e\}$

sous graphe de G si $W \subseteq V$ et $F \subseteq E$

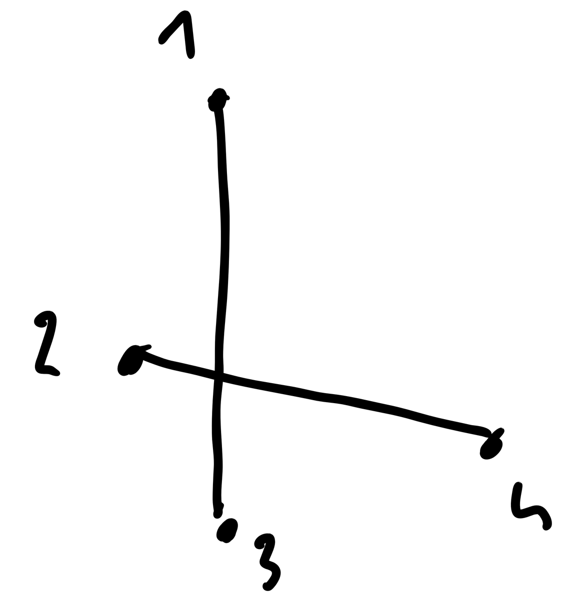
Sous graphe couvrant (contient tous les sommets) de G si $W = G$ (retirer les arêtes)

Sous graphe induit (retirer les ~~sont~~ sommets)

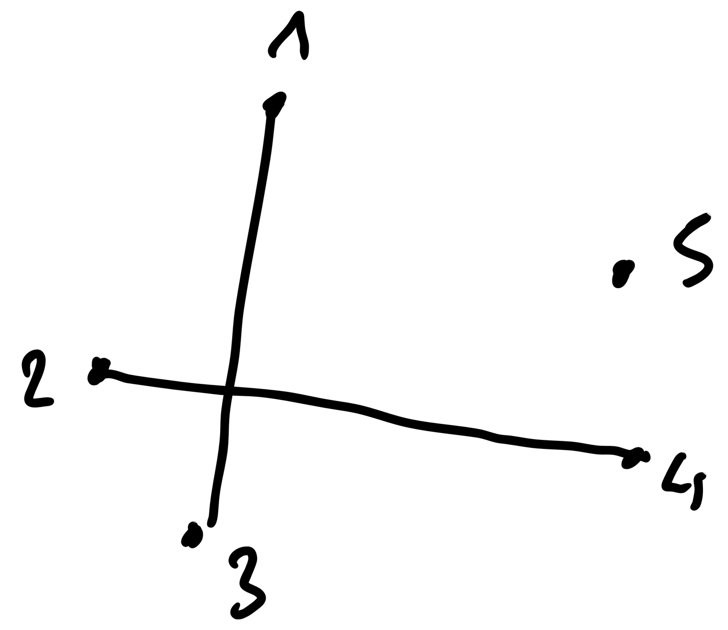
ex :



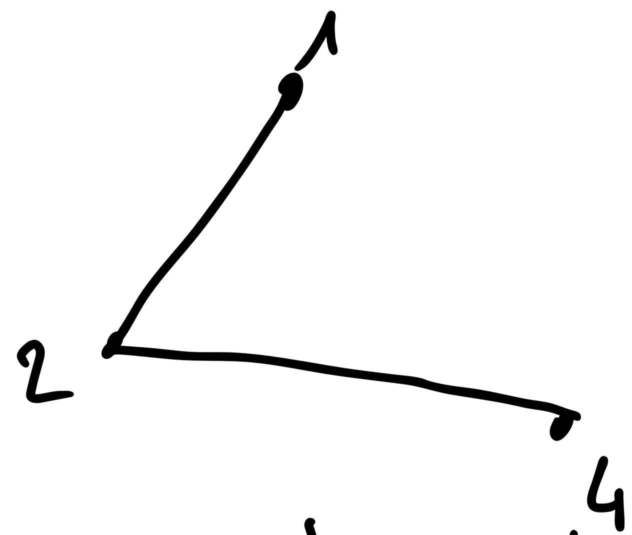
G



sous graph de g

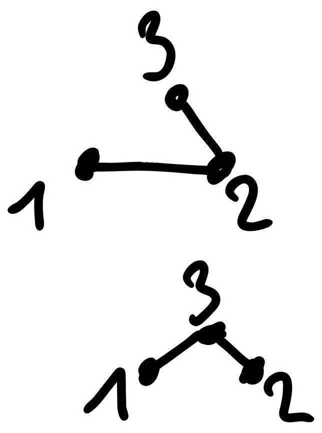


sous graph couvrant de G



sous graph induit de G

NB: Un sous graph induit et couvrant est le graph lui même

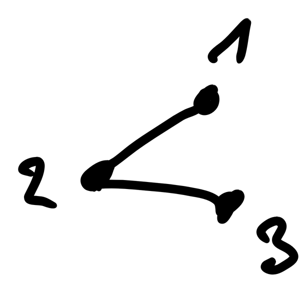
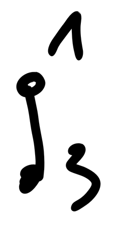
ex graph : $G(\{1,2,3\},\{12,23\})$ 

$H(\{1,2,3\},\{13,23\})$

$\underbrace{\{1,2,3\}}_{\text{sommets}}$, $\underbrace{\{13,23\}}_{\text{arrêtes}}$

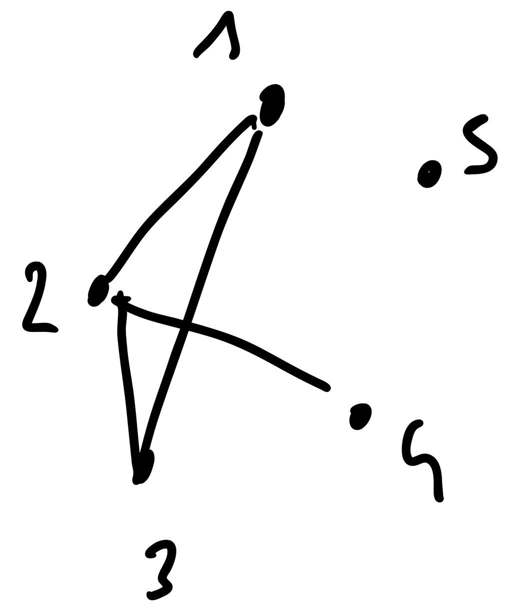
Souvent pas distinction entre deux graph ou uniquement le nom des sommets change (=isomorphe)

Les deux graph ci dessus sont isomorphe.

Le graph complémentaire :  et 

∃ 3 façons de représenter un graph sur pc :
- matrice d'adjacence
- matrice incidence
- liste d'adjacence

Matrice d'adjacence



lecture ↓
1 2 3 4 5

$$\Rightarrow M \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

/!\ la matrice dépend de la numérotation.

$M_{ij} = 1$ ssi $v_i v_j \in E(G)$

Matrice d'incidence

lecture → 1 2 3 4 5

$$\Downarrow \qquad N \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$N_{ij} = 1$ ssi $v_i \in e_j$

Liste d'adjacence

$\Downarrow$

1 : [2, 3]
2 : [1, 3, 4]
3 : [1, 2]
4 : [2]
5 : []

Le degrés d'un sommet nbr d'arrête incidente à ce sommet.

Si $d_G(v) = 0$ isolé.
$d_G(v) = 1$ feuille.

$d(1) = 2$
$d(2) = 3$
$d(3) = 2$
$d(4) = 1$
$d(5) = 0$

Théorème : la Σ des $°$ = 2 x nbr d'arrête.
Soit G un graphe, alors $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$

Preuve :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

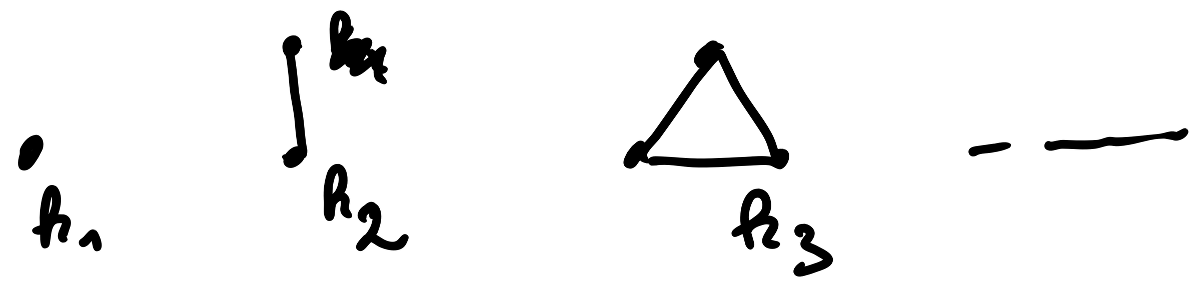
$S = \sum d(v)$

$= 2|E(G)|$

ici $1+3+2+2+1+1 = 10$

donc il y a 5 arêtes car $10 = 2 \times 5$.

Un graph est dit complet si $k \geq 1$ ex :



3 types de graph

- Un multigraph (boucle)
- un graph orienté (flèches)
- un hypergraphe (nbr de voisin non limité)

- Opérations élémentaires : opérations avec des coûts constants. (accéder à un tab, addition ...)
- Complexité temporelle (dans le pire cas) : le pire nbr d'opérations élémentaire $T(n)$ avec n taille entrée (nbr bit stocké et instance en temps normal mais pas dans ce cours) où n est le nbr de sommet pour nous (ou nbr d'arêtes dans certains cas).
- O : est la notation lorsqu'on s'intéresse à une complexité de $\to +\infty$. (temporel).
  ($\exists$ aussi complexité spatial)

Exemple : Entrée : graph n sont sous forme de matrice adjacence A.
Sortie : degré moyen de G
Début
somme_degre $\leftarrow 0$;
pour i de 0 à $n-1$ faire
    pour j de 0 à $n-1$ faire
        somme_degre $\leftarrow$ somme_degre $+ A[i][j]$
retourner somme_degré / n

Notation O : Cf. cours L_2.

$f \in O(g) \Leftrightarrow f$ ne grandit pas plus vite que g

$f \in \Omega(g) \Leftrightarrow f$ grandit au moins aussi vite que g

$f \in \Theta(g) \Leftrightarrow f$ et g grandissent à la même vitesse.

Avec O il faut se baser sur la plus grande des complexités cad x est négligeable par rapport à x^2

- ne pas compter : les constantes les puissant les plus faibles.

NB : les fonctions exp domine les polynômes : 2^n domine n^{100}

les polynomes dominent les logarithmes : n domine $(\log n)^3$