RUNSER Laure

ni3 Algèbre linéaire TD
Espaces vectoriels

06.11.2020

Exercice 4

1) w est proportionnel à v si $w = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante

$$\Rightarrow (-2, m) = (\lambda, 2\lambda)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 = \lambda \\ m = \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ m = -4 \end{cases}$$

Donc w proportionel à v ssi $\boxed{m = -4}$

Dans ce cas là, toute combinaison linéaire $x.v + y.w$ est sur la droite $y = 2x$.

Donc (v, w) n'est pas générateur de $\mathbb{R}^2$.

2) Si $m \neq -4$

$\forall (a, b)$ on veut x et y tq $x.v + y.w = (a, b)$

$$\Rightarrow x(1,2) + y(-2, m) = (a, b)$$

$$\Rightarrow (x, 2x) + (-2y, ym) = (a, b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y = a \\ 2x + my = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{avec } m \neq -4$$

On échelonne et on réduit

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 2 & m & b \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & m+4 & b-2a \end{array}\right) \xrightarrow{m+4 \neq 0} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & \frac{b-2a}{m+4} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & a + 2\frac{b-2a}{m+4} \\ 1 & 0 & \frac{b-2a}{m+4} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x = a + 2\dfrac{2-a}{m+4} = \dfrac{m}{m+4}a + \dfrac{2}{m+4}b \\ y = \dfrac{-2}{m+4}a + \dfrac{1}{m+4}b \end{array}$$

Donc $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ $\underline{\exists!}$ (x, y) tq $xv + yw = (a, b)$

Or (x, y) est une $\boxed{\text{base}}$ de $\mathbb{R}^2$.

Donc (x, y) est $\boxed{\text{générateur}}$.

Exercice 1

1) $d = a + b + c$ donc d combinaison linéaire de a, b, c.

2)