Université Paris-Diderot Année 2019-2020
MI1-1 - Algèbre élémentaire I

Feuille de TD 4

Limites de fonctions, asymptotes

Exercice 1. Représentez graphiquement, dans chaque cas ci-dessous, une fonction qui satisfait les conditions suivantes.

(a) $\lim\limits_{0^-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{0^+} f(x) = 2$, $f(0) = 1$.

(b) $\lim\limits_{0^-} f(x) = 2^+$, $\lim\limits_{0^+} f(x) = 0^-$, $\lim\limits_{4^-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{4^+} f(x) = +\infty$, $f(5) = 1$, $f(0) = 2$.

Exercice 2. Calculer les limites suivantes, si elles existent :

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 - 2x$,

(b) $\lim\limits_{x\to 1} x^2 - 4x + 3$,

(c) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 - 2x$,

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-3}$,

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-1}$,

(f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-3}$,

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} 1 + x + \ln x$,

(h) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^4 e^x \ln^2 x$,

(i) $\lim\limits_{x\to +\infty} x e^{\frac{1}{x}}$,

(j) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^4-1}$,

(k) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,

(l) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(x^2-1)(x+2)}$,

(m) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^2+2}$,

(n) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1}$,

(o) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+x}{x-1}$,

(p) $\lim\limits_{x\to 1} \cos\left(e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}\right)$,

(q) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+\tan\frac{1}{x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}\right)}$,

(r) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$,

(s) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x^2} + x}{\sin x}$,

(t) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\dfrac{1}{x}$,

(u) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$,

(v) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)^{\frac{2}{x-1}}$,

Exercice 3. Calculer les limites suivantes, si elles existent :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 \sin x}{x^2+1}$,

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{3x-2}{\sqrt[3]{x}}\right)$,

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2-x}{x+2}}$,

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln x}{\ln x - 1}$,

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(xe^x)}{x}$,

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-2\ln x}{x+\ln x}$,

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{5x-1}\dfrac{2x^2+1}{x^2+2x-1}$,

(h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}+1}}{x^{\frac{1}{4}}\sqrt{\sqrt{x}+\frac{1}{x}+3}}$,

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x+x^2)}{1+x+x^2}$,

(j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$,

(k) $\lim\limits_{x\to0} xe^{\frac{1}{x}}$,

(l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{e^{\sqrt{x}}}$,

(m) $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln\left(x^2e^x\right)$,

(n) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$,

(o) $\lim\limits_{x\to1^+} (x-1)^{x-1}$,

(p) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{x}$,

(q) $\lim\limits_{x\to0^+} (\ln x)e^{-\frac{1}{x}}$,

(r) $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$,

(s) $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\frac{1}{\ln 3x}}$,

(t) $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln^2 x$,

Exercice 4. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes et dire si elles admettent des asymptotes verticales.

(a) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-9}$,

(b) $f(x) = \frac{2x^3-5}{x^2+x-6}$,

(c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$,

(d) $f(x) = \frac{x}{|x|}$,

(e) $f(x) = \tan(x) - \cos(x)$,

(f) $f(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{3-x}$,

(g) $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{\ln(|x-1|)}$.

Exercice 5. Dire si les fonctions suivantes admettent des asymptotes obliques/horizontales et les déterminer.

(a) $f(x) = x^2 - 2x$,

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x}$,

(c) $f(x) = 1 + x + \ln x$,

(d) $f(x) = 2 + \dfrac{\pi^x}{x^2}$,

(e) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$,

(f) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+2}$,

(g) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$,

(h) $f(x) = \dfrac{\cos(e^x)}{x^4-1}$,

(i) $f(x) = \dfrac{\ln(|x|)}{\sqrt{x^2-1}}$,

(j) $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$,

(k) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$,

(l) $f(x) = \dfrac{4x^5-4x^3+3}{x^4+3x^2-x+1}$,

(m) $f(x) = \dfrac{x^4+x}{x^3-1}$,

Continuité, dérivabilité, étude de fonctions

Exercice 6. 1. Montrer que la fonction suivante est continue sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x<0 \\ e^x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ ex^2 & \text{si } 1 \leq x. \end{cases}$$

2. Etudier la continuité de la fonction suivante.

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ x\ln(x)-x & \text{si } x>0. \end{cases}$$

3. Montrer que la fonction suivante est continue sur $[0,1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ x + \frac{x\ln(x)}{1-x} & \text{si } 0<x<1 \\ 0 & \text{si } x=1. \end{cases}$$

Exercice 7. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]-\infty,1[, \\ x^2 & \text{si } x \in [1,4], \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x \in]4,+\infty[. \end{cases}$$

(a) Montrer que f est strictement croissante.
(b) Tracer le graphe de la fonction f.
(c) f est-elle continue ?
(d) Montrer que f est bijective.
(e) Caractériser la bijection réciproque f^{-1} de f via une formule.

Exercice 8. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble des points pour lesquels la fonction est dérivable, et calculer sa dérivée.

(a) $3e^x + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$,
(b) $\frac{e^x}{1+x}$,
(c) $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$,
(d) $\frac{x-\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$,
(e) $\frac{(2x-5)^3}{(8x^2-5)^3}$,
(f) x^x,
(g) $e^{\alpha\tan(x)}$,
(h) $\sin(\sin(\sin x))$,
(i) $\cos(\sin(\tan(\pi x)))$,
(j) $\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}$,
(k) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$,
(l) x^{x^x}.

Exercice 9. Calculer les dérivées des fonctions suivantes (en précisant sur quel domaine ce calcul est valable), donner une équation de la tangente en x_o, puis lorsque c'est possible déterminer la position de la tangente par rapport à la courbe à l'aide de la dérivée seconde.

(a) $x \mapsto x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x + 1$, $x_o = 0$.

(b) $x \mapsto (x-3)^{10}$, $x_o = 1$.

(c) $x \mapsto \cos(x) - \sin(x^2)$, $x_o = 0$.

(d) $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x_o = 1$.

(e) $x \mapsto \frac{1}{3x-5}$, $x_o = -1$.

(f) $x \mapsto x^3 \frac{1}{x^5}$, $x_o = 1$.

(g) $x \mapsto \sqrt{x^2 \sqrt[3]{x^{-10}}}$, $x_o = 1$.

(h) $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$, $x_o = 1$.

(i) $x \mapsto \ln(x^2+1)$, $x_o = 0$.

(j) $x \mapsto \sqrt{x + e^{x+1}}$, $x_o = 2$.

(k) $x \mapsto x\ln(x)$, $x_o = 1$.

(l) $x \mapsto \cos(e^{\sqrt{x}})$, $x_o = 1$.

(m) $x \mapsto |\cos(x)|$, $x_o = \pi$.

(n) $x \mapsto \sqrt{|x^2-1|}$n $x_o = 3$.

(o) $x \mapsto \tan(x^2-1)$, $x_o = 0$.

(p) $x \mapsto \arctan(e^x)$, $x_o = 0$.

Exercice 10. Considérons la fonction f définie par

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0.$$

(a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Calculer la dérivée de f puis montrer que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 11. Déterminer les extrema locaux et globaux sur l'intervalle I pour la fonction f dans les cas suivants :

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ et $I = [2,4]$,

(b) $f(x) = x\sqrt{1-x}$ et $I = [-1,1]$,

(c) $f(x) = \frac{3x-4}{x^2+1}$ et $I = [-2,2]$,

(d) $f(x) = (x^2+2x)^3$ et $I = [-2,1]$,

(e) $f(x) = x + \sin(2x)$ et $I = [0,\pi]$,

(f) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ et $I = [1,3]$.

Exercice 12. On veut étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Donner les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes (Ox) et (Oy).
2. Donner les limites en l'infini.
3. Calculer la dérivée de f. En déduire le tableau de variation de f.
4. Calculer f''. En déduire si f est convexe, concave et dans quels intervalles.
5. Tracer $\mathcal{C}_f$.

Exercice 13. On veut étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 2}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Donner les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes (Ox) et (Oy).
3. Donner les limites en l'infini.
4. Déterminer les asymptotes (verticales, horizontales/obliques).
5. Calculer la dérivée de f. En déduire le tableau de variation de f.
6. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 14. On veut étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Donner les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes (Ox) et (Oy).
2. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$, justifier votre réponse ?
3. Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et donner une équation des asymptotes si elles existent.
4. Etudier la dérivabilité de f. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle des tangentes aux points d'abscisse -1 et 1 ? Justifier votre réponse.
5. Calculer la dérivée de f sur $]-\infty, -1[$, $]1, +\infty[$, puis sur $]-1, 1[$. En déduire le tableau de variation de f.
6. Etudier la dérivabilité de f' et calculer f''. En déduire si f est convexe, concave et dans quels intervalles.
7. Tracer $\mathcal{C}_f$.

Exercice 15. Etudier la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. Utiliser son tableau de variation pour résoudre l'équation à deux inconnues : $x^y = y^x$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 16. On pose : $A = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$.

1. Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a - b)^3 + 3(a - b) = a^3 - b^3 + (3 - 3ab)(a - b)$.
2. Etudier : $f : x \mapsto x^3 + 3x$, et donner son tableau de variation.
3. Si $a = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7}$, $b = \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$, calculer ab et $a^3 - b^3$.
4. Prouver que $A = 2$.

Exercice 17. (Donné à un examen) Soit

$$f(x) = \ln(\sqrt{x+1} - 1)$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Résoudre $f(x) = 0$.
3. Calculer la limite $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.
4. Calculer la limite $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.
5. Calculer le dérivée de f. En déduire le tableau de variation de f.
6. Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. Representer $\mathcal{C}_f$ en respectant les résultats obtenus.
7. Dans cette question on note $g(x) = e^{2x} + 2e^x$.
   (a) Calculer $g(f(x))$ pour tout $x > 0$.
   (b) Ecrire $g(x) + 1$ sous forme de carré, puis montrer que $f(g(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 18. (Donné à un partiel) On veut étudier la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2-1} & x > 1 \\ \frac{x^2}{x-1} & x < 1 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $f(0)$.
3. Calculer les limites $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.
4. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.
5. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
6. Déterminer les asymptotes (verticales, horizontales/obliques) à $\mathcal{C}_f$.
7. Calculer la dérivée de f. En déduire le tableau de variation de f.
8. Placer sur un graphique les asymptotes et une esquisse de $\mathcal{C}_f$, en respectant les résultats obtenus.

Exercice 19. (Donné à un partiel) Soit la fonction à valeurs réelles $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer la dérivée de f et dresser son tableau de variation.
3. Calculer la dérivée seconde de f. Déterminer les intervalles où f est convexe.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$ et esquisser son graphe.
5. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, est elle injective ? surjective ? bijective ?
6. On considère la fonction $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, g(x) = f(x)$. La fonction g, est elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercices avancés

Exercice 20. Calculer les limites suivantes.

(a) $\lim\limits_{1} \dfrac{x^\beta - 1}{x^\alpha - 1}$, (b) $\lim\limits_{0} \dfrac{\sin(4x)}{\tan(5x)}$, (c) $\lim\limits_{0} \dfrac{e^{3x} - 1}{x}$,

(d) $\lim\limits_{0} \dfrac{e^x - 1}{x^3}$, (e) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$, (f) $\lim\limits_{0} \dfrac{5^x - 3^x}{x}$,

(g) $\lim\limits_{0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$, (h) $\lim\limits_{1} \dfrac{\ln x}{\sin(\pi x)}$, (i) $\lim\limits_{1} \dfrac{\cos(x)\ln(x-1)}{\ln(e^x - e)}$,

(j) $\lim\limits_{0} \dfrac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$, (k) $\lim\limits_{0} \dfrac{\tan(x) - x}{x^3}$, (l) $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$,

(m) $\lim\limits_{1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$, (n) $\lim\limits_{+\infty} \left(1 + \dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}$.

Exercice 21. Soit f la fonction de variable réelle définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

(a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

(b) Montrer que f se prolonge par continuité au point 0 en une fonction φ que l'on précisera.

(c) Montrer que φ est dérivable en 0 et donner l'équation de la tangente en 0 au graphe de φ.

(d) Étudier, au voisinage de 0, la position du graphe de φ par rapport à sa tangente.

Exercice 22. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ si } x \neq 1 \text{ et } f(1) = -\frac{\pi}{2}.$$

(a) Etudier la continuité de f.

(b) Montrer que f est dérivable en tout $x \neq 1$ mais n'est pas dérivable en 1.

(c) Montrer que f' a une limite finie quand x tend vers 1.

(d) Montrer que

$$\forall x > 1, \quad \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\frac{3\pi}{4} + \arctan x.$$