Exercice 6 :

1). $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (3 \times (-6) - 4 \times 1) - 2 \times (2 \times (-6) - 1 \times 1) - 1 \times (2 \times 4 - 1 \times 3)$$
$$= -18 - 4 - 2(-12 - 1) - 1 \times (8 - 3)$$
$$= -22 + 26 - 5$$
$$= -1$$

Donc : $\det(M) = -1$

2) M est une matrice inversible car son déterminant n'est pas nul.

3). $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (M \mid I_3)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$