Outils Logiques Groupe 3 & 4 – DM Noté 2 (Correction)

Exercice 1 (7,5 points)

Considérer la fonction $f\colon \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ définie comme suit :

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ f(1,0) &= 1 \\ f(0,1) &= 1 \\ f(1,1) &= 0 \end{aligned}$$

(1) Pourquoi la fonction f est-elle définissable ? Trouver une formule A en DNF (forme normale disjonctive) telle que $f = f_A$.

(2) On définit $x \oplus y$ comme la formule en DNF définie dans (1), et pour des formules A, B quelconques on définit $A \oplus B$ comme la formule $(x \oplus y)[A/x, B/y]$. Considérer les règles d'inférence suivantes.

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta \quad \Gamma, B \vdash A, \Delta}{\Gamma, A \oplus B \vdash \Delta}\oplus_L \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta \quad \Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \oplus B, \Delta}\oplus_R$$

(a) Pour chacune des règles $\oplus_L, \oplus_R$ dire si elle est *correcte* (la validité de toutes les hypothèses implique la validité de la conclusion). Justifier.

(b) Pour chacune des règles $\oplus_L, \oplus_R$ dire si elle est *réversible* (la validité de la conclusion implique la validité de toutes les hypothèses). Justifier.

Solution

(1) Toute fonction booléenne (à savoir une fonction $g\colon \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$) est définissable. La fonction f est donc définissable. Pour construire une formule A en DNF telle que $f = f_A$ (cf. Chap. 2, Proposition 9 du polycopié), il suffit de prendre les deux monômes $(x \wedge \neg y)$ et $(\neg x \wedge y)$ correspondant à $f(1,0) = 1$ et $f(0,1) = 1$ respectivement, et de former leur disjonction. On a donc

$$A = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y).$$

(2) On a par définition $x \oplus y = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$. Rappelons que toutes les règles du calcul des séquents de Gentzen sont correctes et réversibles.

L'arbre ci-dessous est composé entièrement de règles du calcul des séquents de Gentzen, donc de règles correctes et réversibles.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma, A, \neg B \vdash \Delta}\neg_L}{\Gamma, A \wedge \neg B \vdash \Delta}\wedge_L \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma, B \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A, B \vdash \Delta}\neg_L}{\Gamma, \neg A \wedge B \vdash \Delta}\wedge_L}{\Gamma, (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vdash \Delta}\vee_L$$

La conclusion de l'arbre est donc équivalente à la conjonction de ses hypothèses. Comme sa conclusion et ses hypothèses sont exactement celles de la règle $(\oplus_L)$, on conclut que $(\oplus_L)$ est correcte et réversible.

L'arbre ci-dessous est composé entièrement de règles du calcul des séquents de Gentzen, donc de règles correctes et réversibles.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, A \vdash A, \Delta$}
\RightLabel{$\neg_R$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash A, \neg A, \Delta$}
\AxiomC{$\Gamma \vdash A, B, \Delta$}
\RightLabel{$\wedge_R$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash A, \neg A \wedge B, \Delta$}
\AxiomC{$\Gamma, A, B \vdash \Delta$}
\RightLabel{$\neg_R$}
\UnaryInfC{$\Gamma, A \vdash \neg B, \Delta$}
\RightLabel{$\neg_R$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \neg B, \neg A, \Delta$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma, B \vdash B, \Delta$}
\RightLabel{$\neg_R$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash B, \neg B, \Delta$}
\RightLabel{$\wedge_R$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash \neg B, \neg A \wedge B, \Delta$}
\RightLabel{$\wedge_R$}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash A \wedge \neg B, \neg A \wedge B, \Delta$}
\RightLabel{$\vee_R$}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B), \Delta$}
\end{prooftree}
$$

La conclusion de l'arbre est donc équivalente à la conjonction de ses hypothèses. Comme sa conclusion et ses hypothèses sont exactement celles de la règle ($\oplus_R$), on conclut que ($\oplus_R$) est correcte et réversible.

(2) **(solution alternative)** On peut aussi démontrer (a) et (b) à la main. Par exemple pour montrer la correction de ($\oplus_L$), on suppose une affectation v qui satisfait toutes les hypothèses de ($\oplus_L$) et on montre que cela entraîne que v satisfait la conclusion de ($\oplus_L$).

Exercice 2 (7,5 points)

Montrer la validité des formules suivantes en donnant pour chacune une preuve en calcul des séquents (vous pouvez étendre le calcul de séquents avec des règles qui sont correctes et réversibles [1]).

(1) $(A \oplus B) \Rightarrow (A \vee B)$

(2) $(A \oplus B) \Rightarrow ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B))$

(3) $((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \Rightarrow (A \oplus B)$

Solution

(1)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$A \vdash B, A, B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$B \vdash A, A, B$}
\RightLabel{$\oplus_L$}
\BinaryInfC{$A \oplus B \vdash A, B$}
\RightLabel{$\vee_R$}
\UnaryInfC{$A \oplus B \vdash A \vee B$}
\RightLabel{$\Rightarrow_R$}
\UnaryInfC{$\vdash (A \oplus B) \Rightarrow (A \vee B)$}
\end{prooftree}
$$

(2)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$A \vdash B, A, B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$B \vdash A, A, B$}
\RightLabel{$\oplus_L$}
\BinaryInfC{$A \oplus B \vdash A, B$}
\RightLabel{$\vee_R$}
\UnaryInfC{$A \oplus B \vdash A \vee B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$A, B \vdash B, \neg A$}
\RightLabel{$\neg_R$}
\UnaryInfC{$A \vdash B, \neg A, \neg B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$A, B \vdash A, \neg B$}
\RightLabel{$\neg_R$}
\UnaryInfC{$B \vdash A, \neg A, \neg B$}
\RightLabel{$\oplus_L$}
\BinaryInfC{$A \oplus B \vdash \neg A, \neg B$}
\RightLabel{$\vee_R$}
\UnaryInfC{$A \oplus B \vdash \neg A \vee \neg B$}
\RightLabel{$\wedge_R$}
\BinaryInfC{$A \oplus B \vdash (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$}
\RightLabel{$\Rightarrow_R$}
\UnaryInfC{$\vdash (A \oplus B) \Rightarrow ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B))$}
\end{prooftree}
$$

(3)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$A \vee B, A, B \vdash A$}
\RightLabel{$\neg_L$}
\UnaryInfC{$A \vee B, \neg A, A, B \vdash$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$A \vee B, A, B \vdash B$}
\RightLabel{$\neg_L$}
\UnaryInfC{$A \vee B, \neg B, A, B \vdash$}
\RightLabel{$\vee_L$}
\BinaryInfC{$A \vee B, \neg A \vee \neg B, A, B \vdash$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$A, \neg A \vee \neg B \vdash A, B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$B, \neg A \vee \neg B \vdash A, B$}
\RightLabel{$\vee_L$}
\BinaryInfC{$A \vee B, \neg A \vee \neg B \vdash A, B$}
\RightLabel{$\oplus_R$}
\BinaryInfC{$A \vee B, \neg A \vee \neg B \vdash A \oplus B$}
\RightLabel{$\wedge_L$}
\UnaryInfC{$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \vdash A \oplus B$}
\RightLabel{$\Rightarrow_R$}
\UnaryInfC{$\vdash ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \Rightarrow (A \oplus B)$}
\end{prooftree}
$$

1. Autrement appelées « règles dérivables ».