Cours du 7 septembre 2020

Mathématiques 3 (IF13E010).

Objectifs du cours

Le programme de ce cours est composé d'une partie d'analyse et d'une partie d'algèbre.
L'objectif du cours d'analyse est de définir la notion d'ordre de grandeur d'une fonction au voisinage d'un point ou au voisinage de $\pm\infty$ (afin de comparer deux phénomènes - par exemple, le temps de calcul d'un algorithme - soit au voisinage d'un point soit lorsque le paramètre croît indéfiniment). C'est par cela que nous commencerons.
L'objectif du cours d'algèbre est d'étudier la notion d'espace vectoriel et d'application linéaire (notions pouvant être utilisées pour fournir des codes correcteurs d'erreurs par exemple).

Limite d'une suite.

Rappelons que l'on dit que la suite u_n tend vers l (resp. $+\infty$ ou $-\infty$) si n tend vers $+\infty$ lorsque

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ ; n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon$$

(respectivement

$$\forall A > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ ; n > n_0 \Rightarrow u_n \ > \ A$$

ou

$$\forall A > 0 \ , \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ ; n > n_0 \Rightarrow u_n \ < - \ A \ )$$

Limite d'une fonction.

Soit $a > 0$. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]x_0 - a, x_0 + a[$ (sauf éventuellement en x_0). Rappelons que l'on dit que la fonction f tend vers l (resp. $+\infty$ ou $-\infty$) si x tend vers x_0 lorsque

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists \eta > 0 \ ; |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

(respectivement

$$\forall A > 0 \ , \ \exists \eta > 0 \ ; |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) \ > \ A$$

ou

$$\forall A > 0 \ , \ \exists \eta > 0 \ ; |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) \ < - \ A \ )$$

Notion de limite (suite)

On dit que l'on peut rendre $f(x)$ aussi proche de l que souhaité pourvu que x soit assez proche de x_0 .

Par exemple (une fonction).

La fonction $\frac{x+2}{x+3}$ tend vers 1 si x tend vers $+\infty$.

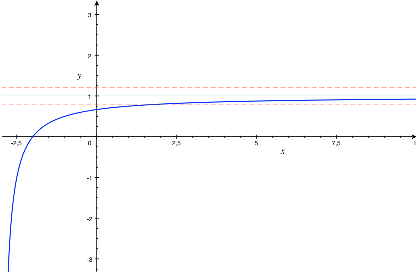

Figure – Un exemple de limite en $x = +\infty$

Notion de limite (suite)

Un (premier) exemple où la limite n'existe pas.

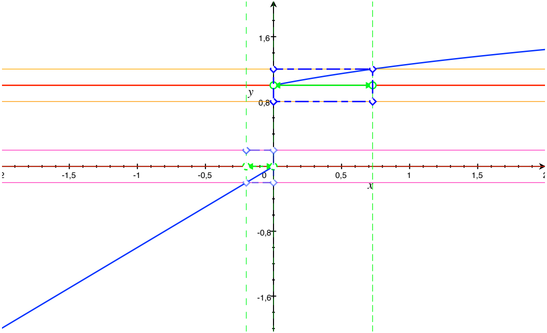

FIGURE – Un exemple de limite à droite et à gauche en $x = 0$

Notion de limite (suite)

Un (second) exemple où la limite n'existe pas.

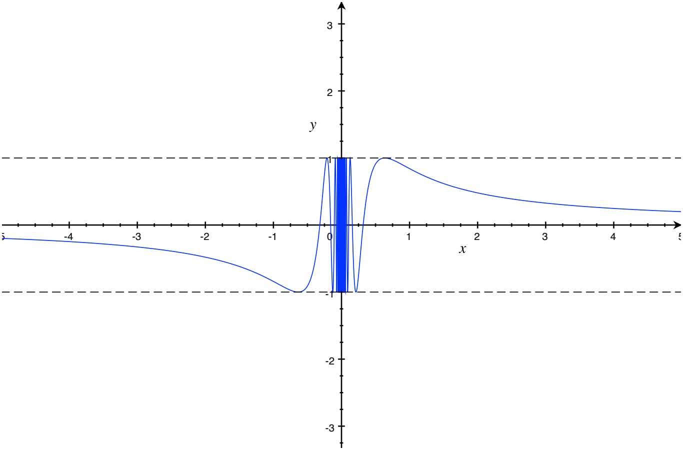

FIGURE – Graphe de la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Propriétés des limites.

Unicité

Rappelons une propriété essentielle de la limite. Il y a unicité lorsque la limite existe.

Proposition

Si f admet une limite l en x_0 ou en $+\infty$ (resp. $-\infty$) alors cette limite l est unique.

(Indication de la) Démonstration. Si l'on suppose que l_1 et l_2 sont deux limites (par exemple en x_0) alors

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta_1 > 0 \ ; \ |x - x_0| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \epsilon$$

mais aussi

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta_2 > 0 \ ; \ |x - x_0| < \eta_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \epsilon \ .$$

Propriétés des limites.

Unicité (suite)

(Indication de la) Démonstration (suite). Comme on raisonne par l'absurde et que $l_2 \neq l_1$, on peut prendre $0 < \epsilon < |l_2 - l_1|/2$. Or, si l'on prend $0 < \eta < \eta_1$ et $0 < \eta < \eta_2$ (associés à un tel choix de ϵ) on a

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l_1| < \epsilon \text{ et } |f(x) - l_2| < \epsilon \ .$$

Ainsi

$$|l_2 - l_1| \leq |l_2 - f(x)| + |f(x) - l_1| < 2\epsilon < |l_2 - l_1| \ .$$

Et ceci est bien sûr impossible.

Opérations sur les limites.

Théorème

Opérations sur les limites (finies). Soient f et g des fonctions numériques. Soit λ un scalaire réel. Soit x_0 un réel.

- *Si f et g admettent des limites respectives l et l' lorsque x tend vers x_0 alors la fonction $f+g$ admet une limite en x_0 égale à $l+l'$;*
- *Si f admet l comme limite lorsque x tend vers x_0 , alors la fonction λf admet une limite en x_0 égale à λl ;*
- *Si f et g admettent des limites respectives l et l' lorsque x tend vers x_0 alors la fonction fg admet une limite en x_0 égale à ll' ; Si f et g admettent des limites respectives l et l' lorsque x tend vers x_0 et si, de plus, la limite l' est non nulle alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet une limite en x_0 égale à $\frac{l}{l'}$;*
- *Si f tend vers l alors $|f|$ tend vers $|l|$.*

Opérations sur les limites (suite).

Théorème

Opérations sur les limites (suite). Soient f et g des fonctions numériques. Soit x_0 un réel.

- *Si f admet une limite finie l et que g admet une limite infinie $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers x_0 alors la fonction $f+g$ admet une limite en x_0 égale à celle de g ;*
- *Si f et g admettent $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque x tend vers x_0 , alors la fonction $f+g$ admet une limite en x_0 égale à $+\infty$ (resp. $-\infty$) ;*
- *Si f admet une limite finie non nulle l et g admet une limite égale à $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers x_0 alors la fonction fg admet une limite infinie dont le signe est le produit des signes de l et de la limite de g ;*

Opérations sur les limites (suite).

Théorème

Soient f et g des fonctions numériques. Soit x_0 un réel.

- *Si f admet une limite finie non nulle l et g admet une limite égale à 0 lorsque x tend vers x_0 alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet une limite infinie en x_0 (on suppose que $g(x)$ ne s'annule pas sur un intervalle centré en x_0 et y garde un signe constant ou garde un signe constant sur chacun des intervalles bornés par x_0) ;*
- *Si f admet une limite finie l et g admet une limite égale à $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers x_0 alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet une limite nulle en x_0 .*
- *Si f admet une limite égale à $+\infty$ ou $-\infty$ et g admet une limite égale à $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers x_0 alors la fonction fg admet une limite infinie dont le signe est le produit des signes de la limite de f et de celle de g .*

Résumé.

Résumons les deux résultats précédents sous la forme suivante :

- Si f et g ont chacune une limite, alors en général la somme $f+g$ a pour limite la somme des limites (avec des conventions du type $l+\infty=+\infty$) sauf dans le cas où l'une des limites vaut $+\infty$ et l'autre vaut $-\infty$.
- Si f et g ont chacune une limite, alors en général le produit fg a pour limite le produit des limites (avec des conventions du type $l\times+\infty=+\infty$ pour $l\neq 0$) sauf dans le cas où l'une des limites est 0 et l'autre $+\infty$ ou $-\infty$.

Dans chacun des deux cas exceptionnels, toutes les situations peuvent se produire (pas de limite, limite finie ou infinie). On appelle donc "forme indéterminée" les expressions conduisant à l'étude de $+\infty-\infty$, $0\times\infty$ ou encore $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$. Nous verrons ultérieurement comment lever ces indéterminations sous certaines hypothèses.

Exemples de formes indéterminées.

.

Quelques formes indéterminées additives.

Nous allons donner, pour les deux principales formes indéterminées, des exemples montrant que tous les types de résultats sont possibles.
Les exemples $f(x) = 1/x$ et $g(x) = 1/x^2$ ou $g(x) = 2 + 1/x$ ou $g(x) = 1/x + \sin(1/x)$ lorsque x tend vers 0^+ donnent ainsi différentes limites lorsque l'on étudie $(f - g)(x)$ puisque $1/x - 1/x^2 = (x-1)/x^2$ tend vers $-\infty$ alors que $1/x - 1/x - 2 = -2$ tend vers -2 ou encore $-\sin(1/x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0 .

Exemples de formes indéterminées.

.

Quelques formes indéterminées multiplicatives.

De même, les exemples $f(x) = x$ et $g(x) = 1/x$ ou $g(x) = 1/x^2$ ou $g(x) = 1/\sqrt{x}$ ou encore $g(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$ donnent différentes limites pour la fonction $f(x)g(x)$ lorsque x tend vers 0 . En effet $f(x)g(x)$ vaut respectivement 1 , $1/x$, $\sqrt{x}$ ou $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, fonctions qui tendent vers une limite finie non nulle, une limite infinie, une limite nulle ou n'a pas de limite.

Nous allons apprendre à lever l'indétermination.

Passage à la limite.

.

Rappelons enfin les résultats suivants.

Théorème

(passage à la limite dans les inégalités) Soient f et g deux fonctions numériques définies sur le même intervalle I . On suppose que

$$\forall x \in I \ , \ f(x) \leq g(x) \ .$$

On suppose que f et g admettent une limite notée respectivement l et l' lorsque x tend vers x_0 . Alors on a $l \leq l'$.

Remarque

Attention on peut avoir $f(x) < g(x)$ mais $l = l'$. Ainsi

$$|\sin(x)| < |x| \text{ si } x \neq 0$$

mais les deux limites en 0 sont égales à 0 .

Fonctions équivalentes. Fonctions négligeables.

Définition

On dira que les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 (resp. si x tend vers $+\infty$ ou x tend vers $-\infty$) si et seulement si la limite de $f(x)/g(x)$ existe et vaut 1 lorsque x tend vers x_0 (resp. si x tend vers $+\infty$ ou x tend vers $-\infty$). On note

$f(x) \sim_{x \to x_0} g(x)$.

On a une définition analogue lorsque x tend vers $+\infty$, $-\infty$ ou ∞ .

Remarque

Il s'agit d'une relation d'équivalence ce qui signifie simplement que

- $f(x) \sim_{x \to x_0} f(x)$;
- $f(x) \sim_{x \to x_0} g(x) \Leftrightarrow g(x) \sim_{x \to x_0} f(x)$
- $f(x) \sim_{x \to x_0} g(x)$ et $g(x) \sim_{x \to x_0} h(x) \to f(x) \sim_{x \to x_0} h(x)$

Exemples.

Rappelons ici les limites qui ont été apprises au lycée en utilisant ce nouveau vocabulaire.

- $\sin(x) \sim_{x\to 0} x$ puisque $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$;
- $\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x$ puisque $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;
- $\exp(x) - 1 \sim_{x\to 0} x$ puisque $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$;
- $1 - \cos(x) \sim_{x\to 0} \frac{x^2}{2}$ puisque $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

On a

$$x + x^2 \sim_{x\to 0} x \text{ mais } x + x^2 \sim_{x\to +\infty} x^2 \ .$$

En effet

$$\frac{x+x^2}{x} = 1 + x \to 1 \text{ si } x \to 0 \text{ mais } \frac{x+x^2}{x^2} = 1 + \frac{1}{x} \to 1 \text{ si } x \to +\infty \ .$$

Propriétés de l'équivalence.

.

Proposition

Si f est équivalente à g lorsque x tend vers x_0 et si l'une ou l'autre des deux fonctions admet une limite alors l'autre a la même limite.
Si f et g ont la même limite l **finie non nulle**, *alors f est équivalente à g lorsque x tend vers x_0 .*

Remarque

L'hypothèse "finie non nulle" dans le dernier résultat est essentielle puisque, sans cette hypothèse, on se trouve face à une forme indéterminée.

Proposition

Si f_1 est équivalente à g_1 et f_2 est équivalente à g_2 lorsque x tend vers x_0, alors $f_1 f_2$ est équivalente à $g_1 g_2$ lorsque x tend vers x_0 .

Notion de fonction négligeable devant une autre fonction.

Définition

On dit que la fonction f est négligeable devant la fonction g lorsque x tend vers x_0 (ou que f est un infiniment petit par rapport à g ou encore que g est un infiniment grand par rapport à f) si et seulement si le rapport

$$\frac{f(x)}{g(x)} \text{ resp. } \frac{g(x)}{f(x)}$$

tend vers 0 (resp. ∞) lorsque x tend vers x_0 . On note $f(x) = g(x)\epsilon(x) = o(g(x))$ (petit "o" de $g(x)$).

Remarque

On a une définition analogue lorsque x tend vers $+\infty$, $-\infty$ ou ∞ .

Exemples.

Les résultats dits de "croissance comparée" s'expriment parfaitement en termes de cette définition :

- L'exponentielle est un infiniment grand par rapport à toute puissance de x (si x tend vers $+\infty$) puisque

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty \ ;$$

- Le logarithme népérien est un infiniment petit par rapport à toute puissance de x (si x tend vers $+\infty$) puisque

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \ ;$$

Exemples.

Les résultats dits de "croissance comparée" s'expriment parfaitement en termes de cette définition :

- L'exponentielle est un infiniment petit par rapport à toute puissance de x (si x tend vers $-\infty$) puisque

$$\lim_{x \to -\infty} x^n \exp(x) = 0 \; ;$$

- Le logarithme népérien est un infiniment petit par rapport à toute puissance de x (si x tend vers 0^+) puisque

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0 \text{ si } n \geq 1 \; .$$

Exemples issus des séances du 7/09.

La fonction $\frac{x+2}{x+3}$ tend vers 1 si x tend vers $+\infty$. En effet

$$\frac{x+2}{x+3} = \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x}} \ .$$

Donc, avec le langage, introduit plus haut,

$$x+2 \sim_{x\to+\infty} x+3 \sim_{x\to+\infty} x \ .$$

Exemples issus des séances du 7/09.

L'expression $n + \sin(n)$ tend vers $+\infty$ si n tend vers $+\infty$. En effet

$$n + \sin(n) = n\left(1 + \frac{\sin(n)}{n}\right) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} n + \sin(n) =$$

$$\left(\lim_{n \to +\infty} n\right) \times 1 = +\infty$$

puisque $\left|\frac{\sin(n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \to 0$ si $n \to +\infty$. Mais on en conclut également que

$$n + \sin(n) \sim_{n \to +\infty} n \ .$$