Matthieu
Le Franc
N°Etu : 71800858

Devoir maison - MI3

Exercice 1 :

1) . exp(sin x) à l'ordre 4

On pose $u = \sin x$

$u = x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)$

Etant donné que u tend vers 0 lorsque x tend vers 0, on peut dire que :

$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^5)$

$u^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)$

$u^3 = x^3 + o(x^5)$

$u^4 = x^4 + o(x^5)$

Donc : $\exp(\sin x) = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2 - (x^4/3)}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$

$= 1 + x + \frac{x^2 - (x^4/3)}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$

$= 1 + x + \frac{24x^2 - (24x^4/3)}{48} + \frac{2x^4}{48} + o(x^5)$

$= \frac{1 + x + 24x^2 - 8x^4 + 2x^4}{48} + o(x^5)$

$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{6x^4}{48} + o(x^5)$

$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^5)$

2). $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 2

On a : $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

Donc : $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \left(2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{2}}$

On met $\sqrt{2}$ en facteur :

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + o(x^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

On réutilise le D.L à l'ordre 2 de $\sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16}\right)^2 + o(x^2)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16}\right) - \frac{1}{8}\cdot\frac{x^2}{16} + o(x^2)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(1 + \frac{x}{8} - \frac{5x^2}{128}\right) + o(x^2)$$

En développant la racine :

$$\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\,x}{8} - \frac{5\sqrt{2}\,x^2}{128} + o(x^2)$$

3) $\frac{\cos(x)}{1+\tan(x)}$ à l'ordre 4

On fait le D.L de $\cos(x)$ et de $\tan(x)$ à l'ordre 4

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^5)$$

On fait la division euclidienne de $\frac{\cos(x)}{1+\tan(x)}$

$$\begin{array}{l|l}
1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} & 1 + x + \frac{x^3}{3} \\
\hline
-(\cancel{1} + x + x^3/3) & 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{6} + \frac{29x^4}{24} \\
\hline
-\cancel{x} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} & \\
-(-\cancel{x} - x^2 - \frac{x^4}{3}) & \\
\hline
\cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{3} + \frac{27x^4}{72} & \\
-(\cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6}) & \\
\hline
-\cancel{\frac{5x^3}{6}} + \frac{27x^4}{72} + \frac{x^5}{6} & \\
-(-\cancel{\frac{5x^3}{6}} - \frac{5x^4}{6} - \frac{5x^6}{18}) & \\
\hline
\frac{522x^4}{432} + \frac{x^5}{6} - \frac{5x^6}{18} & \\
= \frac{29x^4}{24} + \frac{x^5}{6} - \frac{5x^6}{18} &
\end{array}$$

(On s'arrête ici afin de ne pas dépasser l'ordre 4)

Donc : D.L en 0 à l'ordre 4 de :

$$\frac{\cos(x)}{1+\tan(x)} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{6} + \frac{29x^4}{24} + o(x^5)$$

4) $\dfrac{1}{1+e^x}$ à l'ordre 4.

On cherche d'abord le D.L de $\exp(x)$ à l'ordre 4.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)$$

On constate que $\dfrac{1}{1+e^x}$ est de la forme :

$\dfrac{1}{1+x}$ ou $\dfrac{1}{1+U}$

Or, à l'ordre 4 : $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + O(x^5)$

On prend alors $U = e^x$ et on pose :

$$\frac{1}{1+U} = 1 - U + U^2 - U^3 + U^4 + O(x^5)$$

$$U = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$U^2 = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{3} + o(x^5)$$

$$U^3 = 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^3}{2} + \frac{27x^4}{8} + o(x^5)$$

$$U^4 = 1 + 4x + 8x^2 + \frac{32x^3}{3} + \frac{32x^4}{3} + o(x^5)$$

On remplace :

$$\frac{1}{1+U} = 1 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) + 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{3}$$
$$- \left(1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^3}{2} + \frac{27x^4}{8}\right) + 1 + 4x + 8x^2 + \frac{32x^3}{3}$$
$$+ \frac{32x^4}{3} + o(x^5)$$

Je passe les calculs car long et laborieux.
En développant on obtient donc :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^5)$$

5/ $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ à l'ordre 3

On commence par tout ramener au même dénominateur afin de simplifier la lisibilité :

$\frac{\sin(x) - x}{x \cdot \sin(x)}$ •) $x \cdot \sin(x) = x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$

$$= x^2\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)$$

$$\frac{\sin(x) - x}{x \cdot \sin(x)} = (\sin(x) - x) \times \frac{1}{x^2\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)}$$ On pose $U = \frac{x^2}{6} + o(x^3)$

$$= (\sin(x) - x) \times \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}$$

On a donc : $\sin(x) - x \times \left(\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+U}\right)$ et on fait le D.L :

$$\frac{1}{1-U} = 1 + U + U^2 + U^3 + o(U^4)$$
$$= 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{36} + \frac{x^6}{216} + o(x^7)$$

Alors : $\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1-U} = \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{36} + \frac{x^6}{216} + o(x^7)\right)$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{6} + \frac{x^2}{36} + \frac{x^4}{216} + o(x^5)$$

$$\frac{\sin(x) - x}{x \cdot \sin(x)} = (\sin(x) - x)\left(\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1-U}\right)$$

$$= (\sin(x)-x)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{6}+\frac{x^2}{36}+\frac{x^4}{216}+o(x^5)\right)$$

$$= \left(-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{120}+o(x^6)\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{6}+\frac{x^2}{36}-\frac{x^4}{216}+o(x^5)\right)$$

En éliminant les degrés ≥ 3, on a donc :

$$= -\frac{x}{6}-\frac{x^3}{36}+\frac{x^3}{120}+o(x^3)$$

$$= -\frac{x}{6}-\frac{10x^3}{360}+\frac{3x^3}{360}+o(x^4) = -\frac{x}{6}-\frac{7x^3}{360}+o(x^4)$$

6). $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 3

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+o(x^3)$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

On remplace :

$$(1+x)^{\frac{1}{1+x}} = 1+(1-x+x^2)x+(1-x+x^2)(1-x+x^2-1)\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

$$= 1+x-x^2+x^3+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{2}\right)(x^2-x)+o(x^3)$$

$$= 1+x-x^2+x^3+\frac{x^4}{2}-\frac{x^5}{2}+\frac{x^6}{2}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{2}-\frac{x^5}{2}+o(x^3)$$

$$= \frac{x^6}{2}-x^5+x^4+\frac{x^3}{2}-x^2+x+1+o(x^3)$$

En conservant les degrés < 4 :

$$(x+1)^{\frac{1}{1+x}} = 1+x-x^2+\frac{x^3}{2}+o(x^4)$$

Exercice 2 :

1). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x.\cos(x)}{\sin(x) - x}$ on fait le D.L à l'ordre 4 :

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$

On remplace : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}{x - \frac{x^3}{6} - x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{x - x - (x^3/6) + x^3/2}{-x^3/6} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-x^3/6}{-x^3/6} - \frac{x^3/2}{x^3/6}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{6}{6} - \frac{2}{6} = -2$

2). $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ on fait le D.L à l'ordre 2 :

$\sin(x) = x + o(x^2)$

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x \to 0} (1)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1^x} = 1$

3). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x}$ on fait le D.L à l'ordre 4

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$; $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{\tan(x) - x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - x}{x + \frac{x^3}{3} - x}$$

$$= \lim_{x \to 0} -\frac{x^3}{6} \Big/ \frac{x^3}{3} = -\frac{1}{2}$$

4). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x) - e^{x^2}}{x\tan(x) - x^2}$ on fait le D.L à l'ordre 1 :

$\cos(x) = 1$; $\tan(x) = x$; $e^{x^2} = 1 + x^2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - e^{x^2}}{x\tan(x) - x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - (1 + x^2)}{x - x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x + x^2} = -\infty$$

Exercice 4 : On pose $U_n(x) = (x^2-1)^n$ et $Q_{n,k} = U_n^{(k)}$

On va étudier les propriétés de $P_n = Q_{n,n} = (x^2-1)^n$
Etant donné que U_n est un polynôme de degré $2n$
Donc, $P_n = U_n^{(n)}$ est un polynôme de degré n.

. U_n admet alors $\{-1; 1\}$ comme racines d'ordre n

. $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, U_n^{(k)}(-1) = U_n^{(k)}(1) = 0$

Chaque $Q_{n,k}$ avec $0 \leq k \leq n-1$, s'annule en ± 1.

On va tenter de montrer par récurrence sur k que $Q_{n,k}$ s'annule k fois au moins sur $]-1; 1[$ si $k=0$

$\exists -1 < x_1 < \dots < x_k < 1 \mid Q_{n,k}(x_1) = \dots = Q_{n,k}(x_k) = 0$

On va appliquer le théorème de Rolle sur les intervalle $[-1; x_1]; [x_1; x_2]; \dots; [x_k; 1]$

Ainsi $Q_{n,k+1} = Q'_{n,k}$ s'annule en $k+1$ points distincts de $]-1; 1[$.

Cela permet de prouver la propriété au rang $k+1$.

$P_n = Q_{n,n}$ s'annule en n points distincts de $]-1; 1[$.
De plus, $\deg P_n = n$

Pour conclure : on peut dire que P_n est un polynôme de degrés n dont toutes les racines sont réelles, distinctes, et $\in]-1; 1[$ avec n zéros distincts.