Mobilité (M2 IMPAIRS) TD8

Exercice 1. Équilibre de Nash

Considérer le jeu à deux joueurs avec la matrice de gains suivante.

Joueur 1 \ Joueur 2	A	B	C
A	$0;3$	$6;2$	$1;1$
B	$2;3$	$0;1$	$7;0$
C	$5;3$	$4;2$	$3;1$

Question 1. L'un des deux joueurs a-t-il une stratégie dominante ?

Question 2. Trouver tous les équilibres de Nash.

Exercice 2. Le jeu de poulet

Deux personnes conduisent leur voiture directement l'une vers l'autre jusqu'à ce que l'une d'entre elles (ou les deux) dévie de la route ou qu'elles s'écrasent l'une contre l'autre.

Chaque joueur a donc deux stratégies : continuer (C) et dévier (D). Voici les gains : dévier tandis que l'autre ne dévie pas : -1 ; les deux dévient : 0 ; ni l'un ni l'autre ne dévie : -100 ; continuer pendant que l'autre dévie : 1.

Question 1. Construire la matrice de gains.

Question 2. L'un des deux joueurs a-t-il une stratégie dominante ?

Question 3. Existe-t-il des équilibres de Nash ? Si oui, lesquels ?

Exercice 3. Le dilemme du prisonnier

Deux suspects sont arrêtés par la police. Mais les agents n'ont pas assez de preuves pour les inculper, donc ils les interrogent séparément en leur faisant la même offre :

> *« Si tu dénonces ton complice et qu'il ne te dénonce pas, tu seras remis en liberté et l'autre écopera de dix ans de prison. Si tu le dénonces et que lui aussi te dénonce, vous écoperez tous les deux de cinq ans de prison. Si personne ne dénonce l'autre, vous serez condamnés tous les deux à six mois de prison. »*

Chaque suspect a donc deux stratégies : dénoncer (D) ou se taire (T).

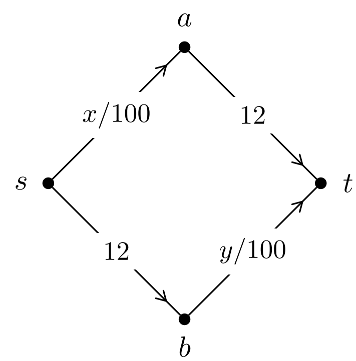
Question 1. Construire la matrice de gains.

Question 2. L'un des deux joueurs a-t-il une stratégie dominante ?

Question 3. Existe-t-il des équilibres de Nash ? Si oui, lesquels ?

Exercice 4. **Le paradoxe de Braess**

1000 voitures doivent se rendre de la ville s à la ville t. Chaque voiture peut emprunter deux itinéraires possibles : l'itinéraire supérieur passant par la ville a ou l'itinéraire inférieur passant par la ville b. Soit x le nombre de voitures empruntant l'arc (s, a) et y le nombre de voitures empruntant l'arc (b, t). Le graphe orienté ci-dessous indique que le temps de parcours par voiture sur l'arc (s, a) est de $x/100$ si x voitures utilisent l'arc (s, a), et de même, le temps de parcours de l'arc (b, t) est de $y/100$ si y voitures empruntent l'arc (b, t). Le temps de trajet de chacun des arc (a, t) et (s, b) est de 12, quel que soit le nombre de voitures empruntant ces arcs. Chaque conducteur choisit un itinéraire qui minimise son temps de trajet. Les conducteurs font des choix simultanés.



Question 1. Trouver les valeurs de x et de y à l'équilibre de Nash.

Le gouvernement construit une nouvelle route (à sens unique) de la ville a à la ville b. La nouvelle route ajoute le chemin s, a, b, t au réseau. Cette nouvelle route de a à b a un temps de trajet de 0, quel que soit le nombre de voitures qui l'utilisent.

Question 2. Trouver un équilibre de Nash pour le jeu joué sur le nouveau réseau. Quelles sont les valeurs d'équilibre de x et de y ? Quel est le coût total des trajets (la somme des temps de trajet totaux des 1 000 voitures) suite à la disponibilité de la nouvelle route ?

Supposons maintenant que les conditions sur les arcs (a, t) et (s, b) soient améliorées de sorte que les temps de trajet de chacun est réduit à 5. (La route de a à b est toujours disponible.)

Question 3. Trouver un équilibre de Nash pour le jeu joué sur le réseau avec les plus petits temps de trajet sur (a, t) et (s, b). Quelles sont les valeurs d'équilibre de x et y ? Quel est le coût total des trajets ? Que deviendrait-il du coût total du trajet si le gouvernement fermait la route de a à b ?