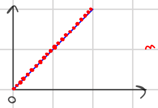
RUNSER Laure
21955060

OL4 : DM n° 1 pour le 08/02/2021

Exercice 1

1) Les entiers $(\mathbb{Z}, >)$ avec l'ordre habituel n'est pas un ordre bien fondé car la suite $3 > 2 > 1 > 0 > -1 > \cdots$ est infinie.

2) Les entiers naturels $(\mathbb{N}, >)$ avec l'ordre habituel est un ordre bien fondé : on ne peut pas trouver de suite infinie décroissante.
$\forall x \in \mathbb{N}$, $x > x-1 > x-2 > \cdots > 0$ or 0 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$ donc il n'existe pas de $y \in \mathbb{N}$ tq $0 > y$.
Donc la suite décroissante est finie.

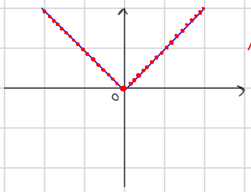


n'importe quelle suite converge vers 0.

3) $(\mathbb{Z}, >_{|\cdot|})$ avec l'ordre ($n >_{|\cdot|} m$ ssi $|n| > |m|$) est un ordre bien fondé : on ne peut pas trouver de suite décroissante infinie.

$\forall x \in \mathbb{Z}^+$ on a $x = |x|$ donc $x > x-1 \cdots > 0$ Or 0 est le plus petit élément de $\{|y|, y \in \mathbb{Z}\}$. Donc $\nexists y \in \mathbb{Z}$ tq $0 > |y|$
Donc cette suite est finie.

$\forall x \in \mathbb{Z}^-$ on a $|x| = -x$ donc $x >_{|\cdot|} x-1 >_{|\cdot|} \cdots >_{|\cdot|} 0$ Or 0 est le plus petit élément de $\{|y|, y \in \mathbb{Z}\}$ donc la suite est finie.



toutes les suites convergent vers 0.

4) L'intervalle $[0,1] \subset \mathbb{R}$ avec l'ordre $>$ habituel n'est pas un ordre bien fondé.
$\forall x \in]0,1]$, $\exists y \in]0,1]$ tq $x > y$ donc on peut construire une suite décroissante infinie.

Par exemple la suite $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n / 10$ est infinie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.

Exercice 2

$(\mathbb{Z}, >_d)$ est un ordre partiel bien fondé.

$\forall m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$, soit $n \nmid m$, alors les deux éléments ne sont pas comparables.

soit $n \mid m$, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $m = k n$.

C'est un ordre partiel car
$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$, si $x >_d y$ et $y >_d z$
alors $|x| > |y| > |z|$ donc $x >_d z$

a) si n est premier : alors le seul diviseur propre de n est 1.
On a alors la suite finie $m >_d n >_d 1$ car 1 n'a pas de diviseurs propres (il n'est divisible que par lui-même)

b) si n n'est pas premier : alors on choisit un de ses diviseurs propres et on recommence.
On obtiendra une suite finie car :
1) les diviseurs propres sont forcément strictement inférieurs au nombre qu'ils divisent.
2) d'après le théorème fondamental de l'arithmétique, tout entier $\in \mathbb{Z}$ est le produit de plusieurs nombres premiers, donc on arrivera forcément dans le cas a).

Donc $(\mathbb{Z}, >_d)$ est un ordre partiel bien fondé car :

1) $>_d$ est une relation d'ordre car elle est binaire et transitive.

2) on ne peut pas trouver de suite décroissante infinie (on tombe toujours sur 1) donc l'ordre est bien fondé.

Exercice 3

C'est un système terminant.
On a 2 réécritures :

A) $u\,aab\,v \rightarrow u\,abb\,v$

B) $u\,abab\,v \rightarrow u\,aab\,v$

On remarque que si on applique B, alors on peut appliquer A au tour d'après.
Cela revient à faire la relation de réécriture C) $u\,abab\,v \rightarrow u\,abb\,v$.

Donc $\forall$ mot $x \in X^*$

- soit x est dans une forme terminale
- soit on applique A $\Rightarrow$ alors le nombre de a diminue de 1.
- soit on applique C $\Rightarrow$ alors le nombre de a diminue de 1 et le mot perd une lettre.

Donc le système termine puisqu'on ne peut jamais "récupérer" les lettres a, qui sont nécessaires pour faire les réécritures (les motifs qu'on remplace contiennent des a).

Donc le système de réécriture est terminant.

Exercice 4

1) Il faut montrer que $\supsetneq$ est une relation transitive.

$\forall A, B, C \subset \mathcal{P}(X)$ si $A \subsetneq B$ et $B \subsetneq C$ Alors $A \subset B$ et $B \subset C$ donc $A \subset C$
et comme $A \neq B$ et $B \neq C$, alors $A \neq C$ donc $A \subsetneq C$

Donc $(\mathcal{P}(X), \supsetneq)$ est un ordre partiel.

2) Si X a un nombre fini n d'élément distincts, alors $\mathcal{P}(X)$, l'ensemble des parties de X, est aussi un ensemble fini.

Alors $\mathcal{P}(X)$ admet un plus petit élément : l'ensemble vide.

Si on essaye de former une chaîne décroissante à partir de $Y \in \mathcal{P}(X)$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_i\}$, $1 \leq i \leq n$

On peut enlever des éléments au fur et à mesure, mais on tombera toujours sur $Y \supsetneq \dots \supsetneq \{y_j\} \in \mathcal{P}(X)$, $1 \leq j \leq i$ $\supsetneq \emptyset \in \mathcal{P}(X)$

Et il n'existe pas d'ensemble Z tel que $\emptyset \supset Z$ et $\emptyset \neq Z$

Donc il n'y a pas de suite infinie décroissante.

Donc $(\mathcal{P}(X), \supsetneq)$ est un ordre bien fondé.