RUNSER Laure   Maths 3 : TD04 Développements limités   23.10.2020

Partie 1

Exercice 4

1) $\dfrac{1}{\sqrt{\sin x + \cos(x)}}$ en 0, ordre 3

$$= \left(\sin(x) + \cos(x)\right)^{-1/2}$$

$$\cos(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)$$

$$\sin(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^3)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^{-1/2}$$

$$= \left(1 + \underbrace{x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}_{\to 0}\right)^{-1/2}$$

$$= (1+u)^{-1/2}$$

$u \to 0$ donc $(1+u)^{-1/2} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)u + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)u^2}{2} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)u^3}{6} + o_0(x^3)$

$$= 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 - \frac{5}{16}u^3 + o_0(u^3)$$

$$\boxed{u \underset{0}{\sim} x \text{ donc } o_0(u^3) = o_0(x^3)}$$

remplacer u par l'expression

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right) + \frac{3}{8}\underbrace{\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o_0(x_3)\right)^2} - \frac{5}{16}\underbrace{\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o_0(x_3)\right)^3}_{= x^3 + o_0(x^3)} + o_0(x^3)$$

$$= (x+A)^2 = x^2 + 2xA + o_0(x^3)$$

$$= x^2 + 2x\,\frac{-x^2}{2} + o_0(x^3)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right) + \frac{3}{8}\left(x^2 - x^3 + o_0(x^3)\right) - \frac{5}{16}\left(x^3 + o_0(x^3)\right)$$

$$= \boxed{1 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{8}x^2 - \frac{29}{48}x^3 + o_0(x^3)}$$

2) $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) = \ln\left(\dfrac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{x}\right)$

→ si on développe jusqu'à l'ordre 4, ce n'est pas suffisant.

$$= \ln\left(1 \underbrace{- \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)}_{\to 0}\right)$$

$u \underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{6}$ donc $o_0(u^2) = o_0(x^4)$

$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o_0(u^2)$ → il suffit d'aller à l'ordre 2

$$= \left(\frac{-x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o_0(x^4)\right) - \frac{\left(-\frac{x^2}{6} + o_0(x^4)\right)^2}{2} + o_0(x^4)$$

$$= -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{-x^2}{6}\right)^2 + o_0(x^4)\right) + o_0(x^4) = \boxed{\frac{-x^2}{6} - \frac{1}{180}x^4 + o_0(x^4)}$$

3) $(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)$

il faut aller jusqu'à l'ordre 5 parce qu'on divise par x après

$= \exp\left(\frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right)\right)$

$= \exp\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)\right)$

$= \exp(1) \cdot \exp\underbrace{\left(\frac{-x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)\right)}_{\to 0}$

$u \underset{0}{\sim} -\frac{x}{2}$ donc $o_0(u^4) = o_0(x^4)$

$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o_0(u^4)$

[on simplifie l'énoncé et on s'arrête à l'ordre 2 parce que les gros coeff c'est long.]

$= e^1 \cdot \left(1 + u + \frac{u^2}{2} + o_0(u^2)\right)$

$= e^1 \cdot \left(1 + \left(\frac{-x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + \left(\frac{-x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^2 + o_0(x^2)\right)$

$= e^1 \cdot \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{8}x^2 + o_0(x^2)\right)$

$\boxed{= e^1 \cdot \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 + o_0(x^2)\right)}$

terme constant : e (et en $+\infty$, $\to 1$)

donc $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$

$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o_0(u^4)$

Exercice 6

5) $f(x) = \ln(\underbrace{2 + 2x + x^2}_{\to 2})$ à l'ordre 3 en 0.

$\to 2$: on ne peut pas faire le DL

$= \ln\left(2\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\right)$

$= \ln(2) + \ln\left(1 + \underbrace{x + \frac{x^2}{2}}_{\to 0}\right)$

9) $f(x) = \frac{3x^2 + 3x + 2}{1 + x^2} = (3x^2 + 3x + 2) \times \frac{1}{1 + \underbrace{x^2}_{\to 0}}$

$= (3x^2 + 3x + 2)\left(1 - x^2 + x^4 + o_0(x^4)\right)$

puis on fait juste le produit des polynômes

10) $f(x) = \frac{3x+1}{2 + 3x + x^2} = (3x+1) \times \frac{1}{2 + 3x + x^2}$

$= \underbrace{(3x+1)}_{} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2}_{\to 0}}$

un polynôme est déjà son propre DL

Exercice 9

1) $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) \times \sqrt{1+\frac{1}{x}} = \exp(t) \times \underbrace{\sqrt{1+t}}_{=(1+t)^{1/2}}$ $\quad t \to 0^+$ qd $x \to +\infty$

$$f(t) = \left(1+t+\frac{t^2}{2}+o_0(t^2)\right)\left(1+\frac{1}{2}t+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}t^2+o_0(t^2)\right)$$

$$= \left(1+t+\frac{t^2}{2}+o_0(t^2)\right) + \left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}t^2+o_0(t^2)\right)\left(-\frac{1}{8}t^2+o_0(t^2)\right)+o_0(t^2)$$

$$= 1+\frac{3}{2}t+\frac{7}{8}t^2+o_0(t^2)$$

$$= \boxed{1+\frac{3}{2}\times\frac{1}{x}+\frac{7}{8}\times\frac{1}{x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$