OL4 12/04/2021 (présentiel)

Rattrapage du lundi de Pâques ? → on verra + tard

Pas de partiel

DM noté cette semaine + un autre après les vacances

Résolution

↳ est ce que CNF est satisfiable ? (mais ne donne pas d'affectat° qui satisfait.

Exercice

Mq si - $A \vee D$ valide et $B \vee \neg D$ est valide, alors $A \vee B$ est valide

Indice : Soit v une affectat°

v satisfait $B \vee \neg D$ et $A \vee D$

Donc $[\![A \vee D]\!]v = 1$ et $[\![B \vee \neg D]\!] = 1$

$\Rightarrow$ $[\![OR(A,D)]\!]v = 1$ et $OR([\![B]\!]v, [\![\neg D]\!])$ $v = 1$

On sait aussi que $[\![\neg D]\!]v = NOT([\![D]\!]v)$

Si $[\![D]\!]v = 1$, $[\![\neg D]\!] = 1$ donc $[\![B]\!]v = 1$ et $[\![A \vee B]\!]v = 1$

Si $[\![D]\!] = 0$ $[\![\neg D]\!] = 1$ $[A]v = 1$ et donc $[\![A \vee B]\!]v = 1$

On conclut que $\dfrac{A \vee D \quad B \vee \neg D}{A \vee B}$ est dérivable/admissible

Formule CNF $F = \{c_1, c_2, \dots\}$

On suppose 2 clauses non triviales $c_1 \vee x$ et $c_2 \vee \neg x$, $x \notin c_1, c_2$

Alors on peut ajouter une nouvelle clause $c_1 \vee c_2$ (et enlever c_1 et c_2 de la formule)

$F = \{c_1 \vee c_2, \dots\}$

<u>exemple</u> : $F = \{\{x\}, \{\neg x\}\} = \{\phi\} = 0 \rightarrow F$ n'est pas satisfiable.

↑ clause vide

$$\dfrac{A \vee D \quad B \vee \neg D}{A \quad B \quad A \vee B}\ res$$

Terminologie

* Soit b une valeur de vérité et C une clause

On définit $C[b/x] = \begin{cases} 1 \text{ si } b=1 \text{ et } x \in C \text{, ou } b=0 \text{ et } \neg x \in C \\ \text{on enlève le littéral } l \text{ de } C \text{ si } b=0 \text{ et } l=x \text{ ou si } b=1 \text{ et } l=\neg x \\ C \text{ si } x \notin var(C) \end{cases}$

<u>Exercice</u> : Calculer $[1/z]$ ds $\{x,y,\neg z\} = \{x,y\}$
$[0/w]$ ds $\{x,y,\neg w\} = 1$

<u>Def</u> : $[b/x]A$ (A une formule en CNF)

$[b/x]C$ où $C \in A$ et $x \in C, x \neq 1$

<u>Exemple</u> :

Calcule $[1/z]$ puis $[0/x]$ dans $\{\{x,y,\neg z\},\{x,y,w,z\}\}$

$= (1/z)\{\{y,\neg z\}\{y,w,z\}\}$

$= \{\{y\}\{1\}\}$

$= \{\{y\}\}$

Def : clause c est unitaire si elle ne contient qu'un seul littéral

Def : Soit A en CNF et $x \in var(A)$ on dit que x apparaît positivement ds A si $\neg x$ n'apparaît pas dans A

Symétriquement, x apparaît négativement si aucune clause de A ne contient un littéral $l=x$!

x est monotone dans A si soit x est positive dans A, soit x est négative

Si inverse : non-monotone.

Algorithme de résolution.

Soit $x \in A$ (formule en CNF)
le résolvant $(R_x)A$ ... rattraper la def

<u>Exercice</u> : $A = \{\{x,\neg y,\neg z\},\{x,y,z\},\{x,\neg y\},\{\neg x,\neg z\}\}$

Calculer $R(x) = \{\{\neg y,\neg z, \neg z\},\{\cancel{y,z,\neg z}\},\{\cancel{\neg y,\neg z}\}\}$ ← toutes les combi de clauses qui contiennent x pour l'une et $\neg x$ pour l'autre.

clause triviale — doublon avec la 1ère

donc $R(x) = \{\{\neg y,\neg z\}\}$

Algo de résolution res

A en CNF	res(A)
① $\emptyset$	1
② clause vide $\{\emptyset\}$	0
③ x monotone dans A	$c \in A$ tq $x \notin c$ (donc le résolvant vu que x est monotone, on ne peut pas faire de paires)
④ $\{x\} \in A$ (clause unitaire)	$res((1/x)\,A)$ → il faut que $x=1$ si $A = x \wedge \dots$ est valide
⑤ $\{\neg x\} \in A$	$res((0/x)\,A)$ → même chose
⑥ si $x \in var(A)$ non-monotone, sans clause unitaire	$res(R(A))$ → on calcule le résolvant uniquement dans ce cas

C'est un ordre de priorité → on évite le + possible de calculer le résolvant

Th : $res(A) = 1$ ssi A est satisfiable

__Exercice :__

A en CNF et $x \in var(A)$

On veut savoir la validité de $A \Rightarrow x \equiv \neg A \vee x$ → équivalent à $A \wedge (\neg x)$ est non-satisfiable

__Exercice :__

$A = \{\{x, y, \neg z\}, \{x, y, w, z\}, \{x, \neg y, w\}, \{\neg x, \neg z\}\}$

Est-ce que $A \Rightarrow w$ est valide ?

⇔ est-ce que $A \wedge \neg w$ satisfiable ?

officieux pour gagner du tps : $x = 1$, $\neg x = \bar{1}$, $y = 2$, ...

$A \wedge \neg w = 12\bar{3}, 1243, 1\bar{2}4, \bar{1}\bar{3}, \bar{4}$ ← notat° officieuse pour gagner du temps

__cas ⑤__ avec $\neg w$ $\quad w = 0$

On obtient $12\bar{3}, 1203, 1\bar{2}0, \bar{1}\bar{3}, 1$

$= 12\bar{3}, 123, 1\bar{2}, \bar{1}\bar{3}$

__cas ⑥__ avec x

$2\bar{3}\bar{3}, \underbrace{233}_{\text{triviale}}\!\!\bar{}, \bar{2}\bar{3} = 2\bar{3}, \bar{2}\bar{3}$

cas ⑥ avec y

On obtient $\bar{3}\bar{3} = \bar{3}$

cas ④ avec z $\quad z = 0$

On a $1 = \emptyset$ $\quad$ cas ① ⇒ SATISFIABLE