07. 04. 2021 Maths 4 Amphi 10

Probas = "science du hasard"

1) Notions de base

Def: On appelle **univers** l'ensemble des résultats possibles d'un event.
On le note Ω

Rmq: En pratique on a souvent Ω fini.

Exemples:
- lancer une pièce : $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$
- lancer un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Définition: Un **événement** associé à Ω est un sous-ensemble de Ω
Un singleton est appelé un **événement élémentaire**.

Exemple
- lancé de dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - "faire un 6" = $\{6\}$
  - "résultat pair" = $\{2, 4, 6\}$
- si on lance 2 dés
  - "la somme des dés vaut 4" = $\{(1,3), (3,1), (2,2)\}$
  - "on obtient une paire" = $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

Si on fait l'expérience "pour de vrai"
$\rightsquigarrow \omega \in \Omega$

Def: On dit que $A \in \Omega$ est **réalisé** si $\omega \in A$

un événement (A) — le résultat obtenu (ω)

Définition: Soit Ω un univers, $A, B \in \Omega$ deux événements
- on dit que **A implique B** si $B \subset A$
- **"A ou B"** $\Leftrightarrow A \cup B$
- **"A et B"** $\Leftrightarrow A \cap B$
- **"contraire de A"** $\Leftrightarrow \bar{A}$ le complémentaire de A
- l'événement Ω est **certain**
  ϕ est **impossible**
- A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \phi$

Définition : Soit Ω un univers et $T \subset P(\Omega)$ ← l'ensemble des parties

T est une tribu si :
(ou σ - algèbre)

1) $\Omega \in T$
2) si $A \in T$, $\bar{A} \in T$
3) T est stable par union finie ou dénombrable
   ↳ si $A, B \in T$, $A \cup B \in T$
   ↳ si $(A_i)_{(i \in \mathbb{N})} \in T$ alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in T$

Rmq : On prend souvent $T = P(\Omega)$

Def : Soit Ω un univers et T une tribu sur Ω

Une loi de probabilité est une application P de $T \to [0, 1]$

1) $P(\Omega) = 1$

2) $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'événements incompatibles, avec $A_i \in T$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ ssi $i \neq j$

Alors $P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

On appelle (Ω, T, P) un espace probabilisé

Rmq : le 2) est vrai en particulier pour les familles finies
si $A \cap B = \emptyset$ $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

On peut déduire
1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2) $P(\emptyset) = 0$

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4) si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$

Ex : lancé de dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$T = P(\Omega)$

On vérifie qu'il $\exists$ une loi de proba uniquement déterminée par :

$P(\{i\}) = 1/6$

. "résultat pair" $= \{2, 4, 6\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$ ← tous incompatibles

$P(\{2, 4, 6\}) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$

L'ex illustre un phénomène général dans le cas où Ω est fini :

- la loi P est uniquement déterminé par sa valeur sur les singletons
  $P(A) = \sum_{x \in A} P(\{x\})$

En particulier, si les singletons sont équiprobables, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Astuce : Parfois c'est plus facile de calculer la proba de $\bar{A}$ que celle de A.