Université Paris Cité

Théorie des jeux et trafic dans les réseaux

CM nº8 — Mobilité (M2 IMPAIRS)

Matěj Stehlík

1/3/2024

Exemple d'un jeu : examen ou présentation ? (1/3)

- Vous aurez un examen et une présentation à faire demain.
- Vous pouvez soit étudier pour l'examen, soit préparer la présentation (mais pas les deux).
- Si vous choisissez d'étudier, votre note attendue est de 18, tandis que si vous n'étudiez pas, votre note attendue est de 12.
- La présentation se fait en binôme.
- Si vous et votre binôme préparez tous les deux à la présentation, vous obtiendrez une note de 20.
- Si un seul d'entre vous se prépare (et que l'autre ne le fait pas), vous obtiendrez une note commune de 18.
- Si aucun de vous ne se prépare, votre note commune attendue est de 14.

Exemple d'un jeu : examen ou présentation ? (2/3)

- Votre binôme a également le même examen demain, et nous supposerons qu'il s'attend au même résultat : 18 s'il étudie, et 12 s'il n'étudie pas.
- Il doit également choisir entre étudier pour l'examen et préparer sa présentation.
- Nous supposerons qu'aucun d'entre vous n'est en mesure de contacter l'autre, et que vous ne pouvez donc pas discuter ensemble de ce qu'il convient de faire ; chacun d'entre vous doit prendre une décision indépendamment, en sachant que l'autre prendra également une décision.
- Vous souhaitez tous les deux maximiser la note moyenne que vous obtenez.

Exemple d’un jeu : examen ou présentation ? (3/3)

- Si vous vous préparez tous les deux à la présentation, vous obtiendrez tous les deux 20 à la présentation et 12 à l’examen, soit une moyenne de 16.
- Si vous vous préparez tous les deux pour l’examen, vous obtiendrez tous les deux 18 à l’examen et 14 à la présentation, soit une moyenne de 16.
- Si l’un de vous étudie pour l’examen tandis que l’autre prépare la présentation :
  - Celui qui prépare la présentation obtient 18 à la présentation mais seulement 12 à l’examen, soit une moyenne de 15.
  - Par contre, celui qui étudie pour l’examen obtient tout de même 18 à la présentation. Cette personne obtient également 18 à l’examen, en étudiant, et obtient donc une moyenne de 18.

Synthèse des différentes stratégies

		Votre binôme	
		Présentation	*Examen*
Vous	*Présentation*	$(17, 17)$	$(15, 18)$
	Examen	$(18, 15)$	$(16, 16)$

Définition d'un jeu

1. Il y a un ensemble de participants, que nous appelons les joueurs. (E.g. vous et votre binôme.)
2. Chaque joueur dispose d'un ensemble d'options sur la façon de se comporter ; nous appellerons ces options les *stratégies* possibles du joueur. (E.g. préparer la présentation ou étudier pour l'examen.)
3. Pour chaque choix de stratégie, chaque joueur reçoit un gain qui peut dépendre des stratégies choisies par tous. Les gains sont généralement des nombres, et chaque joueur préfère des gains plus importants à des gains plus faibles. (E.g. la note moyenne de l'examen et de la présentation.)

Solution de l’exemple (1/2)

- Si votre binôme décide d’étudier pour l’examen, vous obtiendrez un gain de 16 en étudiant également, et un gain de seulement 15 en préparant la présentation ; dans ce cas, vous devriez donc étudier pour l’examen.
- Si votre binôme décide de préparer la présentation, vous obtiendrez un gain de 17 en préparant également la présentation, mais un gain de 18 en étudiant pour l’examen ; donc, vous devriez étudier pour l’examen.
- Donc, vous devriez étudier pour l’examen dans tous les cas.
- Lorsqu’un joueur a une stratégie qui est strictement meilleure que toutes les autres options, indépendamment de ce que fait l’autre joueur, nous l’appellerons une *stratégie strictement dominante*.
- Étudier pour l’examen est aussi une stratégie strictement dominante pour votre binôme.

Solution de l'exemple (2/2)

- Le résultat est donc que vous étudiez tous les deux pour l'examen, et vous obtenez tous les deux une note moyenne de 16.
- Il y a quelque chose de frappant dans la conclusion.
- Si vous et votre partenaire parveniez à vous mettre d'accord pour vous préparer tous les deux à la présentation, vous obtiendriez chacun une note moyenne de 17.

Exemple de jeu sans stratégies strictement dominantes (1/2)

- Deux entreprises (1 et 2) espèrent chacune faire affaire avec l'un des trois grands clients, A, B et C.
- Chaque entreprise a trois stratégies possibles : approcher A, B ou C.
- Les résultats de leurs deux décisions seront les suivants :

Exemple de jeu sans stratégies strictement dominantes (2/2)

- Si les deux entreprises s'adressent au même client, celui-ci accordera la moitié de ses affaires à chacune.
- L'entreprise 1 est trop petite pour attirer des clients par elle-même, donc si elle approche un client alors que l'entreprise 2 en approche un autre, alors l'entreprise 1 obtient un gain de 0.
- Si l'entreprise 2 approche le client B ou C de sa propre initiative, il obtiendra la totalité de leurs affaires. Cependant, A est un client plus important et ne fera affaire avec les entreprises que si les deux entreprises l'approchent.
- Comme A est un client plus important, faire des affaires avec lui vaut 8 (et donc 4 pour chaque entreprise en cas de partage), alors que faire des affaires avec B ou C vaut 2 (et donc 1 pour chaque entreprise en cas de partage).

Matrice des gains

		Entreprise 2		
		A	B	C
Ent. 1	A	$4,4$	$0,2$	$0,2$
	B	$0,0$	$1,1$	$0,2$
	C	$0,0$	$0,2$	$1,1$

- Pas de stratégie dominante.
- Pour l'entreprise 1 :
  - A est l'unique meilleure réponse à la stratégie A de l'entreprise 2.
  - B est l'unique meilleure réponse à B.
  - C est l'unique meilleure réponse à C.
- Pour l'entreprise 2 :
  - A est l'unique meilleure réponse à la stratégie A de l'entreprise 1
  - C est l'unique meilleure réponse à B
  - B est l'unique meilleure réponse à C
- Comment raisonner sur le résultat de ce jeu ?

L’équilibre de Nash (1/2)

- Même sans stratégies dominantes, les joueurs utilisent des stratégies qui sont les meilleures réponses les unes aux autres.
- Plus précisément, supposons que Joueur 1 choisisse une stratégie S et que Joueur 2 choisisse une stratégie T.
- La paire de stratégies (S, T) est un *équilibre de Nash* si S est la meilleure réponse à T, et T est la meilleure réponse à S.
- Si les joueurs choisissent des stratégies qui sont les meilleures réponses les unes aux autres, alors aucun joueur n’a intérêt à dévier vers une stratégie alternative
- Le système est alors en équilibre, sans aucune force le poussant vers un résultat différent.

L'équilibre de Nash (2/2)

- Pourquoi une paire de stratégies qui ne sont pas les meilleures réponses l'une à l'autre ne constituerait pas un équilibre ?
- Parce que les joueurs ne peuvent pas tous les deux penser que ces stratégies seront effectivement utilisées dans le jeu, puisqu'ils savent qu'au moins un joueur aurait intérêt à dévier vers une autre stratégie.
- Un équilibre de Nash peut donc être considéré comme un équilibre dans les opinions.
- Si chaque joueur pense que l'autre jouera effectivement une stratégie qui fait partie d'un équilibre de Nash, alors il a intérêt à jouer sa partie de l'équilibre de Nash.

L’équilibre de Nash dans le jeu à trois clients

- Si l’Entreprise 1 choisit A et l’Entreprise 2 choisit A, alors l’Entreprise 1 joue la meilleure réponse à la stratégie de l’Entreprise 2, et l’Entreprise 2 joue la meilleure réponse à la stratégie de l’Entreprise 1.
- Par conséquent, la paire de stratégies (A, A) forme un équilibre de Nash.
- Aucune autre paire de stratégies n’est la meilleure réponse à l’autre, donc (A, A) est le seul équilibre de Nash.

Comment trouver les équilibres de Nash ?

1. Vérifier toutes les paires de stratégies et demander (pour chaque paire) si les stratégies sont les meilleures réponses les unes aux autres.
2. Calculer la ou les meilleures réponses de chaque joueur à chaque stratégie de l'autre joueur, puis trouver les stratégies qui sont les meilleures réponses mutuelles.

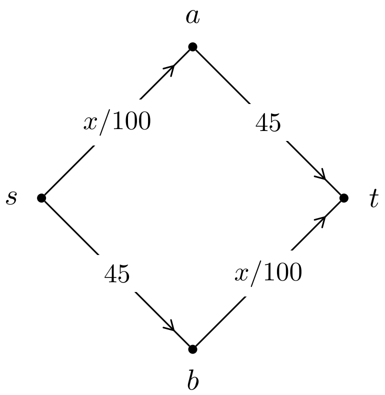
Trafic dans un réseau : introduction (1/2)

- Les déplacements dans un réseau de transport implique un raisonnement fondamentalement basé sur la théorie des jeux.
- Plutôt que de choisir un itinéraire de manière isolée, les individus doivent évaluer les itinéraires en présence de la congestion résultant des décisions prises par eux-mêmes et par tous les autres.
- Nous développons des modèles pour le trafic dans un réseau en utilisant les idées de la théorie des jeux.
- Nous découvrirons un résultat plutôt inattendu, connu sous le nom de paradoxe de Braess, qui montre que l'ajout de capacité à un réseau peut parfois ralentir le trafic.

Trafic dans un réseau : introduction (2/2)

- Nous représentons un réseau de transport par un graphe orienté
- Les arcs sont des autoroutes et les sommets sont des sorties où l'on peut entrer ou sortir d'une autoroute particulière.
- Il y a deux sommets spéciaux, que nous appelons s et t, et nous supposons que tout le monde veut aller de s à t.
- Par exemple, nous pouvons imaginer que s est une sortie en banlieue, t une sortie en centre-ville, et que nous sommes en présence d'un grand nombre de navetteurs matinaux.
- Enfin, chaque arc a un temps de parcours qui dépend de la quantité de trafic qu'il contient.

Exemple



- 4000 voitures souhaitent aller de s à t.
- Chaque voiture peut choisir entre deux routes.
- Si toutes les voiture empruntent la route qui passe par a, le temps de trajet est de 85 minutes pour tous.
- Il en va de même si tout le monde emprunte l'itinéraire inférieur.
- Si 2000 voitures empruntent la route qui passe par b, et 2000 voitures empruntent la route passant par b, alors le temps de trajet est de 65 minutes pour tous.

Lien avec la théorie des jeux

- Le modèle de trafic que nous avons décrit est en fait un jeu dans lequel les joueurs correspondent aux conducteurs, et les stratégies possibles de chaque joueur consistent en des itinéraires possibles de a à t.
- Dans notre exemple, chaque joueur n'a que deux stratégies ; cependant, des réseaux plus grands pourraient contenir de nombreuses stratégies pour chaque joueur.
- Le gain d'un joueur est le négatif de son temps de trajet (nous utilisons le négatif car les temps de trajet élevés sont mauvais).

Équilibre de Nash dans les réseaux de transport

Lemme

Un équilibre égal donne un équilibre de Nash.

- Avec un équilibre égal entre les deux routes, aucun conducteur n'a intérêt à passer à l'autre itinéraire.

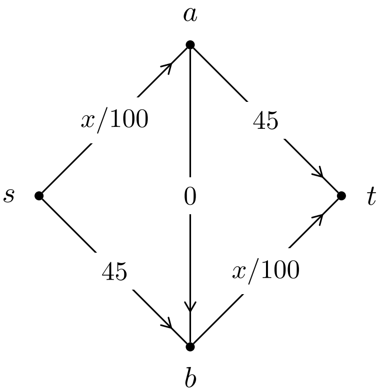
Équilibre de Nash dans les réseaux de transport

Lemme

Tous les équilibres de Nash ont un équilibre égal.

- Considérons une liste de stratégies dans laquelle x conducteurs utilisent la route passant par a et les $4000 - x$ conducteurs restants utilisent la route passant par b.
- Si $x \neq 2000$, les deux routes auront des temps de parcours inégaux, et tout conducteur empruntant l'itinéraire le plus lent sera incité à passer à l'itinéraire le plus rapide.
- Par conséquent, toute liste de stratégies dans laquelle $x \neq 2000$ ne peut pas être un équilibre de Nash, et toute liste de stratégies dans laquelle $x = 2000$ est un équilibre de Nash.

L'ajout d'une nouvelle route



- La mairie décide de construire une nouvelle autoroute très rapide de a à b.
- Son temps de parcours est 0, quel que soit le nombre de voitures qui l'empruntent.
- (L'effet résultant se produise même avec des temps de parcours plus réalistes).
- La nouvelle autoroute devrait réduire le temps de parcours de s à t.
- Mais est-ce le cas ?

Le paradoxe de Braess

- Voici la surprise : il existe un équilibre de Nash unique dans ce nouveau réseau autoroutier, mais il entraîne un temps de trajet plus long pour tout le monde !
- À l'équilibre, tous les conducteurs utilisent la nouvelle route passant par a et b ; en conséquence, le temps de trajet de chaque conducteur est de 80 minutes (puisque $4000/100 + 0 + 4000/100 = 80$).
- Il s'agit d'un équilibre : tout autre itinéraire prendrait maintenant 85 minutes.
- L'équilibre est unique, car la seule stratégie dominante (indépendante de l'état actuel du trafic) est de passer par a et b.

Intuition pour le paradoxe de Braess

- En d'autres termes, une fois que l'autoroute rapide de a à b est construite, l'itinéraire passant par a et b agit comme un « tourbillon » qui attire tous les conducteurs vers lui, au détriment de tous.
- Le comportement « égoïste » des conducteurs empêche le retour à l'équilibre qui était meilleur pour tous.
- Ce phénomène est appelé *paradoxe de Braess*.

Exemples réels du paradoxe de Braess

- À Séoul (Corée du Sud), une accélération du trafic autour de la ville a été observée lorsqu'une autoroute à six voies a été supprimée dans le cadre du projet de restauration de Cheonggyecheon.
- À Stuttgart à la fin des années 1960 : après l'ajout d'une voie supplémentaire pour les voitures le trafic devint embouteillé. A tel point que la municipalité dû fermer la voie nouvellement créée. Résultat, disparition des embouteillages.
- En 1990, la fermeture de la 42e rue à New York a permis de réduire les embouteillages dans cette zone.
- En 2011 en Californie, suite de la fermeture de l'Interstate 405, le fort trafic diminua dans une large zone.

Optimalité sociale

Définition

Un choix de stratégies (une par chaque joueur) est *socialement optimal* s'il maximise la somme des gains des joueurs.

Exemple

Dans le jeu d'examen–présentation, l'optimum social est atteint lorsque vous et votre binôme vous préparez tous les deux à la présentation, ce qui produit un gain total de $90 + 90 = 180$.

- Un équilibre n'est pas forcément socialement optimal.

Deux questions sur les modèles de trafic

- Un modèle de trafic est simplement le choix d'un itinéraire par chaque conducteur.
- Le coût social d'un modèle de trafic donné est la somme des temps de trajet encourus par tous les conducteurs lorsqu'ils utilisent ce modèle de trafic.
- Deux question naturelles se posent :
    - Existe-t-il toujours un modèle de trafic en équilibre ?
    - Si oui, existe-t-il un tel modèle dont le coût social n'est pas beaucoup plus élevé que l'optimum social ?

Dynamique de la meilleure réponse

- Partir de n'importe quel modèle de trafic.
- S'il s'agit d'un modèle en équilibre, on a terminé.
- Sinon, il y a au moins un conducteur dont la meilleure réponse, étant donné ce que font tous les autres, est un chemin alternatif.
- On choisit un tel conducteur et on lui demande d'emprunter ce chemin alternatif.
- On obtient ainsi un nouveau modèle de trafic et on vérifie à nouveau s'il est en équilibre.
- Si ce n'est pas le cas, on demande à un autre conducteur de choisir sa meilleure réponse, et on continue ainsi.

Le prix de l'anarchie pour les modèles de trafic

Théorème (Roughgarden et Tardos 2001)

Étant donné un réseau de transport avec des fonctions de latence *linéaires*, la dynamique de la meilleure réponse s'arrête à un équilibre dont le coût social est au plus $4/3$ fois le coût social optimal.