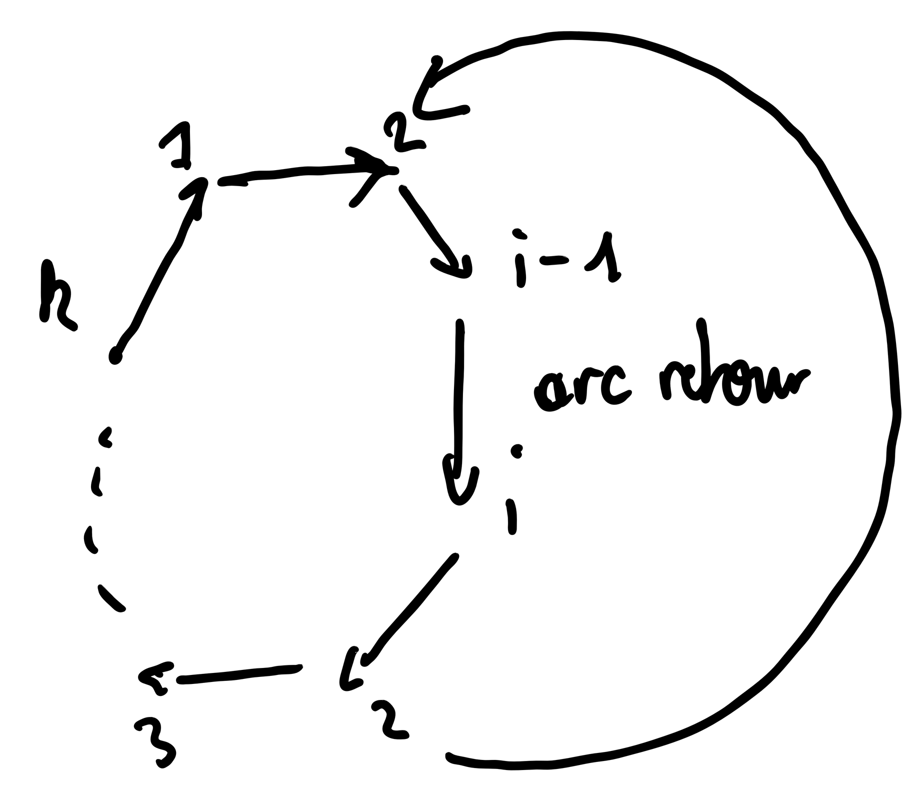
Exercice 1 :

1)



Soit i le premier sommet visité

pre (i) < pre(i-1) (car i premier sommet visité du cycle)

post(i-1) < post(i) (un parcours en profondeur depuis u pre et post visite les sommets accessibles depuis u avant de post visite u)

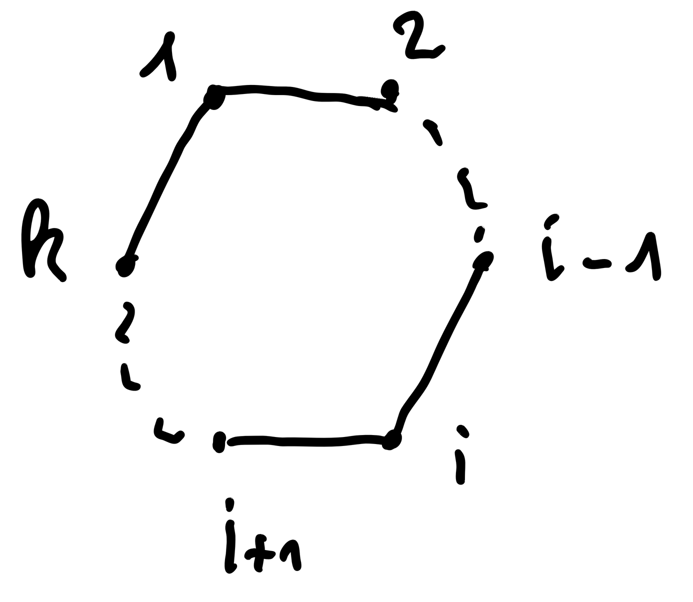
pre(v) < pre (u) uv ne peut être que

* Dans l'arbre de parcours
↳ impossible car v visité avant u. (Dans le parcours, un arc visite toujours un nouveau sommet)

* transverse
↳ " " car u accessible depuis v (par le cycle entre autre) => u sera visité depuis v

* retour

2) Par l'absurde. Supposons que l'on ait un tri topologique et un cycle pour notre graphe.



Soit i le sommet avec la plus petite valeur. $(i-1, n) \in E$

=> valeur (i-1) < valeur (i)
↑
def tri topologique

=> i n'a pas la plus petite valeur.

CCL Un graphe avec tri topologique et acyclique (DAG).

3) pre et post calculés suite à un parcours en profondeur

Par l'absurde, supposons que post décroissant n'est pas un tri topologique ∃ si < sj
<=> post(si) > post(sj)

Il existe (u, v) ∈ E : post (u) < post(v)
(si, sj)

u
↓ post(v) > post(u)
v

uv peut être que un arc retour → u, v arc retour cycle.

4) On fait un parcours en profondeur, et on prend l'ordre inverse de post

Complexité : $O(n^2)$ Matrice d'adjacence

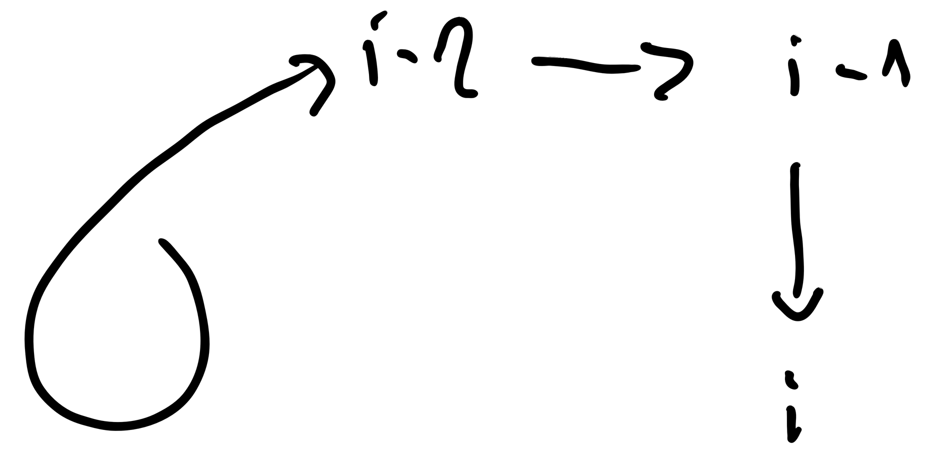
$O(n+m)$ Listes d'adjacence

Trier les sommets $O(\cancel{n} + m + n \log n)$

↳ n négligeable comparé à $n \log n$.

5)

6)



On part d'un sommet, et on remonte.
On continue jusqu'à revoir un sommet déjà visité. Ça arrivera car chaque sommet a un prédécesseur.

7) On conclut de 6) qu'il $\exists$ un sommet sans prédécesseur.

On commence par une source. (plus petit élément)

On continue dans le graphe sans ce sommet.

8)

9)