Université Paris Cité

Couplages stables, partage sans-envie

CM nº9 — Mobilité (M2 IMPAIRS)

Matěj Stehlík

8/3/2024

Problème des couplages stables

Problème

Étant donné n étudiants et n stages, où chaque étudiant a classé tous les stages par ordre de préférence, et chaque maître de stage a classé tous les étudiants, affecter les étudiants aux stages de sorte qu'il n'y ait pas de paires $(\text{étudiant}, \text{stage})$ qui préfèrent l'un à l'autre que leurs affectations actuelles. Lorsqu'il n'y a pas de telles paires, le couplage est considéré comme *stable*.

Exemple

Trois étudiants A,B,C et trois stages X,Y,Z ont les préférences suivantes :

A : Y,X,Z
B : Z,Y,X
C : X,Z,Y

X : B,A,C
Y : C,B,A
Z : A,C,B

Problème des mariages stables

Exemple

Trois étudiants A,B,C et trois stages X,Y,Z ont les préférences suivantes :

A :	Y,X,Z	X :	B,A,C
B :	Z,Y,X	Y :	C,B,A
C :	X,Z,Y	Z :	A,C,B

- Le couplage AX, BZ, CY n'est pas stable car :
  - C préfère Z à Y
  - Z préfère C à B.
- Le couplage AX, BY, CZ est stable.

L'algorithme de Gale–Shapley

Entrées : Deux ensembles finis H et F de la même taille ; une famille de listes de préférences

Sorties : Un couplage stable

Initialiser tous les $h \in H$ et $f \in F$ à célibataire

tant que $\exists$ h *célibataire* **faire**

  $f \leftarrow$ femme préf. de h parmi celles à qui il ne s'est pas déjà proposé

  si $\exists$ *un couple* (h', f) *fiancé* **alors**

    si f *préfère* h *à* h' **alors**

      h' devient célibataire

      (h, f) se fiancent

  sinon

    (h, f) se fiancent

Terminaison de l’algorithme : tout le monde est marié

- Supposons qu’Alice et Bob sont tous les deux non fiancés à la fin de l’exécution de l’algorithme.
- Bob a dû demander Alice en mariage à un moment donné (puisqu’un homme finira par demander tout le monde en mariage, si nécessaire) et, ayant été demandée en mariage, Alice sera forcément fiancée (à quelqu’un) par la suite.

Terminaison de l'algorithme : les mariages sont stables

- Supposons qu'Alice et Bob soient tous deux fiancés, mais pas l'un à l'autre.
- À la fin de l'exécution de l'algorithme, il est impossible qu'Alice et Bob se préfèrent l'un à l'autre plutôt qu'à leur partenaire actuel.
- Si Bob préfère Alice à son partenaire actuel, il doit avoir fait sa demande à Alice avant de la faire à son partenaire actuel.
- Si Alice a accepté sa proposition, mais n'est pas mariée avec lui à la fin, elle a dû le laisser pour quelqu'un qu'elle aime davantage.
- Si Alice a rejeté sa demande en mariage, elle était déjà avec quelqu'un qu'elle aimait plus que Bob.

Complexité de l'algorithme de Gale–Shapley

- La complexité de l'algorithme de Gale–Shapley est $O(n^2)$, où n est le nombre d'hommes ou de femmes.
- Puisque les listes de préférences ont une taille proportionnelle à n^2, la complexité est linéaire en termes de la taille de l'entrée.

Remarques

- Shapley a reçu le prix Nobel de l’économie en 2012 « pour la théorie des allocations stables et la pratique de la conception des marchés » ; Gale était décédé en 2008.
- Le problème des mariages stables a été énoncé (et résolu grâce à l’algorithme de Gale–Shapley) en 1962, avec en vue le problème de l’affectation des étudiants aux diverses formations universitaires.
- Le service Admission Post-Bac du ministère français de l’Enseignement supérieur a utilisé l’algorithme de Gale–Shapley entre 2009 et 2017.
- Dans l’admission Post-Bac, les formations étaient dans le rôle des « femmes » et les étudiants dans celui des « hommes ».

Partage de gâteau

- Alice et Bob souhaitent se répartir un gâteau composé de trois parfums différents (disons, chocolat, vanille, fraise).
- Méthode classique : « Alice coupe, Bob choisit »
- Alice partage le gâteau en deux morceaux qu'elle considère égaux.
- Bob choisit le morceau qu'il considère le plus avantageux.
- Comment partager entre 3 ou plus personnes ?

Vers un algorithme de partage de gâteau pour n personnes

- Imaginons un gâteau rectangulaire à partager entre n personnes, qui peuvent avoir des opinions différentes sur ce qui a de la valeur sur un gâteau.
- Nous utilisons $n-1$ couteaux pour couper le long des plans parallèles au bord gauche du gâteau.
- L'ensemble des coupes est entièrement défini par les tailles relatives des morceaux.
- Supposons que la taille totale du gâteau soit de 1 et notons la taille physique du i-ième morceau par x_i ; il s'agit d'une mesure absolue, sans rapport avec les préférences des joueurs.
- On a donc $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$, où $x_i \geq 0$ pour tout i.

L'espace des partitions

- L'espace S des partitions possibles forme naturellement un $(n-1)$-simplexe standard dans $\mathbb{R}^n$.
- Chaque point de S correspond à une partition du gâteau par un ensemble de coupes.
- Lorsque $n = 3$, S est un triangle équilatéral :

Les préférences des joueurs

- Étant donné un ensemble de coupes, on dit qu'un joueur *préfère* un morceau donné s'il ne pense pas qu'un autre morceau soit meilleure.
- Nous supposons que cette préférence dépend du joueur et de l'ensemble de coupes, mais pas des choix faits par les autres joueurs.
- Étant donné un ensemble de morceaux, un joueur préfère toujours au moins un morceau, et peut (en cas d'égalité) préférer plusieurs morceaux selon notre définition.

Le théorème de partage du gâteau

Faisons les deux hypothèses suivantes :

1. « *Les joueurs ont faim.* » C'est-à-dire que les joueurs préfèrent tout morceau ayant une masse à un morceau vide.
2. « *Les ensembles de préférences sont fermés.* » Cela signifie que tout morceau préféré pour une séquence convergente d'ensembles de coupe est préférée à l'ensemble de coupe limite. Cette condition exclut l'existence de points uniques de gâteau ayant une désidérabilité positive.

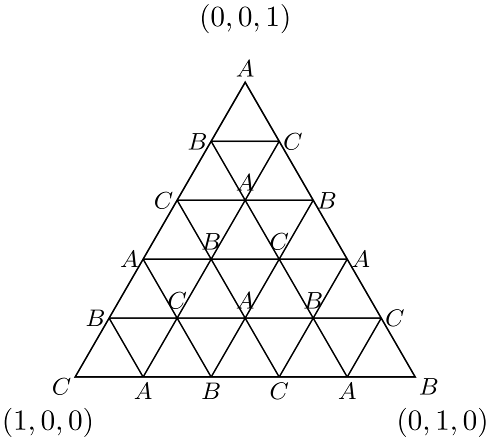
Théorème

Pour des joueurs affamés ayant des ensembles de préférences fermés, il existe un partage de gâteau sans envie, c'est-à-dire un ensemble de coupes pour lequel chaque personne préfère un morceau différent.

Le cas $n = 3$

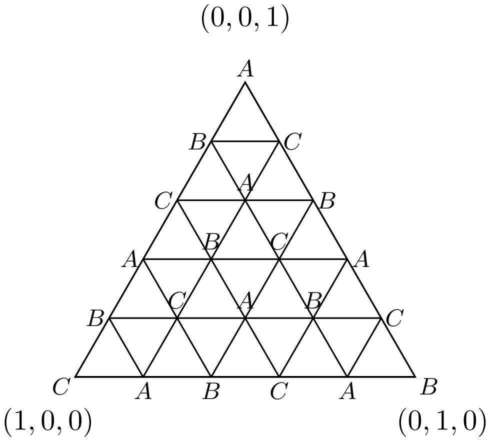
- Nous commençons par étudier ce qui se passe pour $n = 3$ personnes.
- Supposons que les joueurs s'appellent Alice, Betty et Charlie.
- Ils doivent partager un gâteau de taille totale 1, en utilisant 2 couteaux.
- Dénotons la taille physique des morceaux par x_1, x_2, x_3.
- Puisque $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ et $x_i > 0$ pour tout i, l'espace de coupes S est l'intersection du plan et le premier octant.
- Il s'agit simplement d'un triangle.

Une triangulation de S



- On triangule S et on attribue la « propriété » à chacun des sommets comme dans la figure ci-dessous, où A représente Alice, B Betty et C Charlie.
- On attribua la propriété de manière à ce que chaque triangle élémentaire soit un triangle ABC.
- Une triangulation similaire à maille plus fine peut également être étiquetée de cette manière.

Étiquetage auxiliaire de la triangulation



- Demander au propriétaire de chaque sommet : « Quel morceau choisiriez-vous si le gâteau était coupé avec cet ensemble de coupes ? »
- Inscrire sur ce sommet le numéro de la part souhaitée.
- On obtient un étiquetage auxiliaire de la triangulation par des 1, des 2 et des 3.

Le lemme de Sperner

À faire au tableau...

L'étiquetage auxiliaire est un étiquetage de Sperner !

- Ce nouvel étiquetage est un étiquetage de Sperner !
- Au sommet $(1, 0, 0)$ de S, le premier morceau consiste du gâteau entier, et que les autres morceaux sont vides.
- Par l'hypothèse de la faim, le propriétaire de $(1, 0, 0)$ choisit toujours le morceau 1, quel que soit le propriétaire.
- De même, $(0, 1, 0)$ est étiqueté 2 et $(0, 0, 1)$ est étiqueté 3.
- Les bords du triangle correspondent à des coupes dans lesquelles un morceau est vide.
- Comme personne ne choisirait jamais ce morceau vide, il manque à chaque côté de S une étiquette correspondant au morceau vide.
- La condition d'étiquetage de Sperner est donc satisfaite.

L'existence de l'ensemble de coupes souhaité

- Par le lemme de Sperner, il doit y avoir un simplexe élémentaire $(1, 2, 3)$ dans la triangulation.
- Puisque chaque simplexe de ce type provient d'un triangle ABC, cela signifie que nous avons trouvé 3 ensembles de coupes très similaires dans lesquels des personnes différentes choisissent des parts de gâteau différentes.
- Pour démontrer l'existence d'un seul ensemble de coupes qui satisferait tout le monde avec des parts différentes, il suffit de rendre la triangulation de plus en plus fine...

Le cas de n joueurs

- La preuve précédente se généralise facilement pour n joueurs.
- La seule question qui se pose est celle du choix de la triangulation de S lorsque $n > 3$.
- La triangulation que nous avons proposée pour $n = 3$ ne se généralise pas facilement.
- Cependant, une triangulation qui fonctionne pour des dimensions arbitraires est une triangulation par subdivision barycentrique.
- En gros, cette procédure prend chaque simplexe élémentaire dans une triangulation et la subdivise en marquant les barycentres des faces dans chaque dimension et en les reliant pour former une nouvelle triangulation.
- La maille de cette triangulation peut être rendue arbitrairement petite en itérant cette procédure.

Un algorithme pour le partage de gâteau

- La preuve précédente produit un algorithme constructif qui trouve un partage de gâteau sans envie à ε près.
- C'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un ensemble de coupes dans lequel chaque personne reçoit un morceau qu'elle considère comme le meilleur jusqu'à une tolérance de ε dans la taille des morceaux.
- Il suffit de commencer la procédure avec une triangulation de maille inférieure à ε, et l'argument de la preuve du lemma de Sperner donne alors une méthode constructive pour trouver un simplexe élémentaire entièrement étiqueté par son propriétaire.
- En choisissant n'importe quel sommet de ce simplexe, on obtient un ensemble de coupes souhaitée.

Problème de partage de loyer

- Supposons que n colocataires ont décidé de louer un appartement à n chambres pour un loyer fixe.
- Chaque colocataire peut avoir des préférences différentes — l'un peut préférer une grande chambre, un autre peut préférer une chambre avec vue, etc.
- Existe-t-il une méthode permettant de répartir équitablement le loyer entre les chambres ?

Théorème dit de « l'harmonie locative »

Supposons que n colocataires d'un appartement de n chambres cherchent à décider qui loue quelle chambre et pour quelle part du loyer total. Les conditions suivantes sont satisfaites :

1. « *Bon appartement* » Dans n'importe quelle partition du loyer, chaque personne trouve une chambre acceptable.
2. « *Locataires avares* » Chaque personne préfère toujours une chambre gratuite (qui ne coûte pas de loyer) à une chambre non gratuite.
3. « *Ensembles de préférences fermés* » Une personne qui préfère une chambre pour une séquence convergente de prix préfère cette chambre au prix limite.

Il existe alors une partition du loyer telle que chaque personne préfère une chambre différente.