Outils Logiques Groupe 3 & 4 – DM Noté 3 (Correction)

Exercice 1 (5 points)

Considérer la formule $A = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow x) \Rightarrow x$.

(1) A est-elle valide ?

(2) Mettez A en forme normale négative.

(3) Utiliser la transformation de Tseitin pour calculer une formule $ts(A)$ en CNF qui soit équi-satisfiable avec A, et de taille linéaire en la taille de A.

(4) La formule $ts(A)$ calculée en (3) est-elle équivalente à A ? Justifier.

Solution

(1) A est valide (démontré soit par table de vérité soit par suite d'équivalences).

(2) On a $A = \neg(\neg(\neg x \vee y) \vee x) \vee x$. Ce qui donne $A \equiv ((\neg x \vee y) \wedge \neg x) \vee x$ en NNF.

(3) Les applications successives de la transformation de Tseitin à A donnent :

$$\begin{aligned}
&\neg(\neg(\neg x \vee y) \vee x) \vee x \\
&\to_t (\neg(\neg z_1 \vee x) \vee x) \wedge (z_1 \Leftrightarrow (\neg x \vee y)) \\
&\to_t (\neg z_2 \vee x) \wedge (z_2 \Leftrightarrow (\neg z_1 \vee x)) \wedge (z_1 \Leftrightarrow (\neg x \vee y)).
\end{aligned}$$

Comme $\neg z_2 \vee x$ est en CNF on peut s'arrêter et transformer chaque membre de la conjonction externe en CNF, ce qui donne la formule en CNF

$$ts(A) = \{\{\neg z_2, x\}, \{\neg z_2, \neg z_1, x\}, \{z_2, z_1\}, \{z_2, \neg x\}, \{\neg z_1, \neg x, y\}, \{z_1, x\}, \{z_1, \neg y\}\}.$$

(4) On n'a pas une équivalence entre $ts(A)$ et A car $ts(A)$ n'est pas valide, en effet l'affectation $(1/z_2, 0/x)$ ne satisfait pas $ts(A)$.

Exercice 2 (5 points)

Pour $n \geq 1$, un *carré latin* de taille n est un tableau carré de n lignes et de n colonnes tel que chaque nombre de 1 à n apparaît exactement une fois sur chaque ligne et sur chaque colonne.
En voici un exemple pour $n = 3$.

2	3	1
1	2	3
3	1	2

Fixons n.

(1) Introduire des variables propositionnelles modélisant le fait qu'une case d'un tableau carré $n \times n$ contient une valeur entre 1 et n.

(2) Donner une formule A_n en CNF utilisant les variables introduites en (1) qui modélise la situation : *« chaque case du tableau contient une valeur de* 1 *à* n *».*

(3) Donner une formule B_n en CNF utilisant les variables introduites en (1) qui modélise la situation : *« chaque ligne contient exactement une fois chaque valeur de* 1 *à* n *».*

(4) Donner une formule C_n en CNF utilisant les variables introduites en (1) qui modélise la situation : *« chaque colonne contient exactement une fois chaque valeur de* 1 *à* n *».*

(5) Donner une formule φ en CNF, utilisant les variables introduites en (1), telle que les carrés latins de taille n correspondent exactement aux affectations v telles que $v \models \varphi$.

Solution

(1) On introduit les variables x_{ijk} pour $1 \leq i, j, k \leq n$. La variable x_{ijk} modélise *« la case* (i, j) *contient la valeur* k *»*.

(2)

$$A_n = \bigwedge_{1 \leq i,j \leq n} \left(\bigvee_{1 \leq k \leq n} x_{ijk} \right)$$

(3) *« chaque ligne contient chaque valeur au moins une fois »* :

$$B_n^1 = \bigwedge_{1 \leq i,k \leq n} \left(\bigvee_{1 \leq j \leq n} x_{ijk} \right)$$

« chaque ligne contient chaque valeur au plus une fois » :

$$B_n^2 = \bigwedge_{1 \leq i,k \leq n} \left(\bigwedge_{1 \leq j < j' \leq n} (\neg x_{ijk} \vee \neg x_{ij'k}) \right)$$

Enfin $B_n = B_n^1 \wedge B_n^2$.

(4) *« chaque colonne contient chaque valeur au moins une fois »* :

$$C_n^1 = \bigwedge_{1 \leq j,k \leq n} \left(\bigvee_{1 \leq i \leq n} x_{ijk} \right)$$

« chaque colonne contient chaque valeur au plus une fois » :

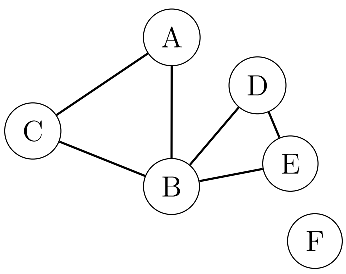
$$C_n^2 = \bigwedge_{1 \leq j,k \leq n} \left(\bigwedge_{1 \leq i < i' \leq n} (\neg x_{ijk} \vee \neg x_{i'jk}) \right)$$

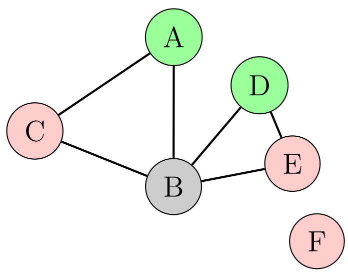
Enfin $C_n = C_n^1 \wedge C_n^2$.

(5) On peut prendre $\varphi = A_n \wedge B_n \wedge C_n$. Grâce au principe des tiroirs on peut aussi prendre $\varphi = A_n \wedge B_n^2 \wedge C_n^2$.

Exercice 3 (5 points)

Soit $G = (V_G, E_G)$ un graphe non-dirigé fini (c-à-d V_G est fini). On dit que G est k-*coloriable* s'il existe une fonction $c \colon V_G \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ (appelée un k-*coloriage*) telle que pour chaque $(a, b) \in E_G$ tels que $a \neq b$, on a $c(a) \neq c(b)$ (autrement, deux noeuds distincts et *adjacents* ne peuvent pas avoir la même couleur).
Voici un exemple d'un 3-coloriage d'un graphe avec ensemble de noeuds $\{A, B, C, D, E, F\}$.





Fixons un graphe non-dirigé fini $G = (V_G, E_G)$ et un ensemble de k couleurs $\{1, \ldots, k\}$. On se donne des variables propositionnelles $x_{a,i}$, modélisant « le noeud a a la couleur i », pour chaque $a \in V_G$ et $1 \leq i \leq k$.

(1) Donner une formule en CNF utilisant les variables $x_{a,i}$ modélisant chacune des situations suivantes :

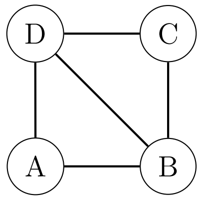
   (a) « chaque noeud a au moins une couleur entre 1 et k ».

(b) « chaque noeud a au plus une couleur entre 1 et k ».

(c) « deux noeuds distincts et adjacents n'ont pas la même couleur ».

Donner une formule $\psi_{G,k}$ en CNF telle que les k-coloriages de G correspondent exactement aux affectations v telles que $v \vDash \psi_{G,k}$.

(2) Utiliser l'algorithme DPLL pour trouver un 3-coloriage du graphe non-dirigé suivant.



Solution

(1) (a)

$$A_{G,k} = \bigwedge_{a \in V_G} \left(\bigvee_{1 \leq i \leq k} x_{a,i} \right)$$

(b)

$$B_{G,k} = \bigwedge_{a \in V_G} \left(\bigwedge_{1 \leq i < i' \leq k} (\neg x_{a,i} \vee \neg x_{a,i'}) \right)$$

(c)

$$C_{G,k} = \bigwedge_{1 \leq i \leq k} \left(\bigwedge_{(a,b) \in E_G, a \neq b} (\neg x_{a,i} \vee \neg x_{b,i}) \right)$$

Chacune des trois formules précedentes est finie car G est un graphe fini. On pose enfin $\psi_{G,k} = A_{G,k} \wedge B_{G,k} \wedge C_{G,k}$.

(2) Soit G le graphe donné. On a donc $V_G = \{a, b, c, d\}$; introduisons les variables $x_a^i, x_b^i, x_c^i, x_d^i$ pour $1 \leq i \leq 3$. La formule en CNF modélisant les 3-coloriages de G est donc [1]

$$\begin{aligned}
\psi_{G,3} = \{ & (x_a^1 x_a^2 x_a^3), (x_b^1 x_b^2 x_b^3), (x_c^1 x_c^2 x_c^3), (x_d^1 x_d^2 x_d^3), \\
& (\bar{x}_a^1 \bar{x}_a^2), (\bar{x}_a^1 \bar{x}_a^3), (\bar{x}_a^2 \bar{x}_a^3), (\bar{x}_b^1 \bar{x}_b^2), (\bar{x}_b^1 \bar{x}_b^3), (\bar{x}_b^2 \bar{x}_b^3), \\
& (\bar{x}_c^1 \bar{x}_c^2), (\bar{x}_c^1 \bar{x}_c^3), (\bar{x}_c^2 \bar{x}_c^3), (\bar{x}_d^1 \bar{x}_d^2), (\bar{x}_d^1 \bar{x}_d^3), (\bar{x}_d^2 \bar{x}_d^3), \\
& (\bar{x}_a^1 \bar{x}_b^1), (\bar{x}_b^1 \bar{x}_c^1), (\bar{x}_b^1 \bar{x}_d^1), (\bar{x}_c^1 \bar{x}_d^1), (\bar{x}_a^1 \bar{x}_d^1), \\
& (\bar{x}_a^2 \bar{x}_b^2), (\bar{x}_b^2 \bar{x}_c^2), (\bar{x}_b^2 \bar{x}_d^2), (\bar{x}_c^2 \bar{x}_d^2), (\bar{x}_a^2 \bar{x}_d^2), \\
& (\bar{x}_a^3 \bar{x}_b^3), (\bar{x}_b^3 \bar{x}_c^3), (\bar{x}_b^3 \bar{x}_d^3), (\bar{x}_c^3 \bar{x}_d^3), (\bar{x}_a^3 \bar{x}_d^3) \}
\end{aligned}$$

Appliquons l'algorithme DPLL à $\psi_{G,3}$.

— On est obligé d'appliquer la règle (6) car il n'y a pas de variable monotone ni de clause unitaire. On commence par choisir l'affectation $(1/x_a^1)$, la formule se simplifie donc en

$$\begin{aligned}
\{ & (x_b^1 x_b^2 x_b^3), (x_c^1 x_c^2 x_c^3), (x_d^1 x_d^2 x_d^3), \\
& (\bar{x}_a^2), (\bar{x}_a^3), (\bar{x}_a^2 \bar{x}_a^3), (\bar{x}_b^1 \bar{x}_b^2), (\bar{x}_b^1 \bar{x}_b^3), (\bar{x}_b^2 \bar{x}_b^3), \\
& (\bar{x}_c^1 \bar{x}_c^2), (\bar{x}_c^1 \bar{x}_c^3), (\bar{x}_c^2 \bar{x}_c^3), (\bar{x}_d^1 \bar{x}_d^2), (\bar{x}_d^1 \bar{x}_d^3), (\bar{x}_d^2 \bar{x}_d^3), \\
& (\bar{x}_b^1), (\bar{x}_b^1 \bar{x}_c^1), (\bar{x}_b^1 \bar{x}_d^1), (\bar{x}_c^1 \bar{x}_d^1), (\bar{x}_d^1), \\
& (\bar{x}_a^2 \bar{x}_b^2), (\bar{x}_b^2 \bar{x}_c^2), (\bar{x}_b^2 \bar{x}_d^2), (\bar{x}_c^2 \bar{x}_d^2), (\bar{x}_a^2 \bar{x}_d^2), \\
& (\bar{x}_a^3 \bar{x}_b^3), (\bar{x}_b^3 \bar{x}_c^3), (\bar{x}_b^3 \bar{x}_d^3), (\bar{x}_c^3 \bar{x}_d^3), (\bar{x}_a^3 \bar{x}_d^3) \}
\end{aligned}$$

1. On utilise la notation $(x_a^1 x_a^2 x_a^3)$ pour la clause habituellement notée $\{x_a^1, x_a^2, x_a^3\}$ et $\bar{x}_a^1$ pour $\neg x_a^1$.

— Les variables x_a^2, x_a^3 sont maintenant monotones (négatives), et les clauses $(\bar{x}_b^1), (\bar{x}_d^1)$ sont unitaires. En appliquant successivement les règles (3) et (5) de DPLL, on procède donc à étendre notre affectation par $(1/x_a^1, 0/x_a^2, 0/x_a^3, 0/x_b^1, 0/x_d^1)$, la formule se simplifie en

$$\begin{aligned}\{&(x_b^2 x_b^3), (x_c^1 x_c^2 x_c^3), (x_d^2 x_d^3),\\ &(\bar{x}_b^2 \bar{x}_b^3),\\ &(\bar{x}_c^1 \bar{x}_c^2), (\bar{x}_c^1 \bar{x}_c^3), (\bar{x}_c^2 \bar{x}_c^3), (\bar{x}_d^2 \bar{x}_d^3),\\ &(\bar{x}_b^2 \bar{x}_c^2), (\bar{x}_b^2 \bar{x}_d^2), (\bar{x}_c^2 \bar{x}_d^2),\\ &(\bar{x}_b^3 \bar{x}_c^3), (\bar{x}_b^3 \bar{x}_d^3), (\bar{x}_c^3 \bar{x}_d^3)\}\end{aligned}$$

— On est obligé d'appliquer (6), étendons notre affectation donc en $(1/x_a^1, 0/x_a^2, 0/x_a^3, 0/x_b^1, 0/x_d^1, 1/x_b^2)$. La formule se simplifie en

$$\begin{aligned}\{&(x_c^1 x_c^2 x_c^3), (x_d^2 x_d^3),\\ &(\bar{x}_b^3),\\ &(\bar{x}_c^1 \bar{x}_c^2), (\bar{x}_c^1 \bar{x}_c^3), (\bar{x}_c^2 \bar{x}_c^3), (\bar{x}_d^2 \bar{x}_d^3),\\ &(\bar{x}_c^2), (\bar{x}_d^2), (\bar{x}_c^2 \bar{x}_d^2),\\ &(\bar{x}_b^3 \bar{x}_c^3), (\bar{x}_b^3 \bar{x}_d^3), (\bar{x}_c^3 \bar{x}_d^3)\}\end{aligned}$$

— La variable x_b^3 est maintenant monotone (négative) et les clauses $(\bar{x}_c^2), (\bar{x}_d^2)$ sont unitaires. En appliquant successivement (3) et (5), on étend notre affectation en $(1/x_a^1, 0/x_a^2, 0/x_a^3, 0/x_b^1, 0/x_d^1, 1/x_b^2, 0/x_b^3, 0/x_c^2, 0/x_d^2)$. La formule se simplifie en

$$\begin{aligned}\{&(x_c^1 x_c^3), (x_d^3),\\ &(\bar{x}_c^1 \bar{x}_c^3),\\ &(\bar{x}_c^3 \bar{x}_d^3)\}\end{aligned}$$

— La clause (x_d^3) est unitaire. On étend notre affectation en $(1/x_a^1, 0/x_a^2, 0/x_a^3, 0/x_b^1, 0/x_d^1, 1/x_b^2, 0/x_b^3, 0/x_c^2, 0/x_d^2, 1/x_d^3)$ et la formule se simplifie en

$$\begin{aligned}\{&(x_c^1 x_c^3),\\ &(\bar{x}_c^1 \bar{x}_c^3),\\ &(\bar{x}_c^3)\}\end{aligned}$$

— La clause $(\bar{x}_c^3)$ est unitaire. On étend notre affectation en $(1/x_a^1, 0/x_a^2, 0/x_a^3, 0/x_b^1, 0/x_d^1, 1/x_b^2, 0/x_b^3, 0/x_c^2, 0/x_d^2, 1/x_d^3, 0/x_c^3)$ et la formule se simplifie en

$$\{(x_c^1)\}$$

— Enfin la variable x_c^1 est monotone (positive). On étend notre affectation en $v = (1/x_a^1, 0/x_a^2, 0/x_a^3, 0/x_b^1, 0/x_d^1, 1/x_b^2, 0/x_b^3, 0/x_c^2, 0/x_d^2, 1/x_d^3, 0/x_c^3, 1/x_c^1)$ et on conclut que la formule est **satisfaisable** (satisfaite par v) car elle se simplifie en $\emptyset$ (l'ensemble vide).

Le 3-coloriage v obtenu par l'algorithme DPLL est donc