22.03.2021 (présentiel)

OL4 CMTD7 Calcul des séquents

Rappel : Calcul des séquent (LK)

$(\Gamma \vdash \Delta) ::= (\bigwedge \Gamma) \Rightarrow (\bigvee \Delta)$

- les formules définies la semaine dernière : $\wedge_L, \wedge_R, \vee_L, \vee_R, \neg_L, \neg_R$

Théorème fondamental de LK :

LK est correct et complet.

Autrement dit : un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est valide ssi $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable / dérivable dans LK.

Exercice 32 du poly (modifié)

1) Mq $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ est valide

Dem : $[\![\Gamma, A \vdash A, \Delta]\!]_v$

$= [\![(A \wedge (\bigwedge \Gamma)) \Rightarrow (A \vee (\bigvee \Delta))]\!]_v$ — $A \Rightarrow B$ est eq à $\neg A \vee B$

$= [\![\neg (\bigwedge \Gamma) \vee \underbrace{\neg A \vee A}_{\equiv 1} \vee (\bigvee \Delta)]\!]_v$

Donc le séquent est valide.

2) Pour toute règle de LK, et toute affectation v, mq (v satisfait toutes les hypothèses de R) ssi (v satisfait la conclusion de R)

Dans le 1), on l'a fait pour Ax.

$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\wedge_L$ $\quad \Gamma, A, B \vdash \Delta \equiv (A \wedge B \wedge (\bigwedge \Gamma)) \Rightarrow (\bigvee \Delta)$

$\equiv ((A \wedge B) \wedge (\bigwedge \Gamma)) \Rightarrow (\bigvee \Delta)$

$\equiv \Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta$

$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\vee_L$: $\quad \Gamma, A \vee B \vdash \Delta \equiv \bigwedge(\{A \cup B\} \cup \Gamma) \Rightarrow (\bigvee \Delta)$

$\equiv ((A \vee B) \wedge (\bigwedge \Gamma)) \Rightarrow \vee (\bigvee \Delta)$

$= (\neg (A \vee B) \vee \neg (\bigwedge \Gamma)) \vee (\bigvee \Delta)$

$\equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee \neg (\bigwedge \Gamma) \vee (\bigvee \Delta)$ — on distribue le ET sur le OU

$\equiv \neg A \vee (\neg (\bigwedge \Gamma)) \vee (\bigvee \Delta)) \wedge (\neg B \vee (\neg (\bigwedge \Gamma) \vee (\bigvee \Delta))$

$\equiv (\neg (A \wedge (\bigwedge \Gamma) \vee (\bigvee \Delta)) \wedge ((B \wedge (\bigwedge \Gamma) \vee (\bigvee \Delta))$

$\equiv (\Gamma, A \vdash \Delta) \wedge (\Gamma, B \vdash \Delta)$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \wedge_R \quad : \quad \Gamma \vdash A \wedge B, \Delta \equiv (\wedge \Gamma) \Rightarrow (\vee(\{A \wedge B\} \cup \Delta))$$

$$\equiv (\wedge \Gamma) \Rightarrow ((A \wedge B) \vee (\vee \Delta))$$

$$\equiv (\wedge \Gamma) \Rightarrow ((A \vee (\vee \Delta)) \wedge (B \vee (\vee \Delta)))$$

$$\equiv \neg(\wedge \Gamma) \vee ((A \vee (\vee \Delta)) \wedge (B \vee (\vee \Delta)))$$

$$\equiv (\neg(\wedge \Gamma) \vee ((A \vee (\vee \Delta))) \wedge (\neg(\wedge \Gamma) \vee (B \vee (\vee \Delta)))$$

$$\equiv (\Gamma \vdash A, \Delta) \wedge (\Gamma \vdash B, \Delta)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee_R$$: même idée que $\wedge_L$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg_L \quad : \quad \Gamma, \neg A \vdash \Delta \equiv \wedge(\Gamma \cup \{\neg A\}) \Rightarrow \vee \Delta$$

$$\equiv \neg((\wedge \Gamma) \wedge (\neg A)) \vee (\vee \Delta)$$

$$\equiv \neg(\wedge \Gamma) \vee A \vee (\vee \Delta)$$

$$\equiv \neg((\wedge \Gamma) \vee \neg A) \vee (\vee \Delta)$$

$$\equiv \Gamma, \neg A \vdash \Delta$$

même chose pour $\neg_R$
(on remplace A par $\neg A$ partout ds les équivalences)

3) Montrer le théorème fondamental de LK.

a) <u>correctθ :</u> Si $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable dans LK, alors $\Gamma \vdash \Delta$ est valide.

b) <u>complétude :</u> Si $\Gamma \vdash \Delta$ valide, alors $\Gamma \vdash \Delta$ prouvable.

3) b) Démonstration par récurrence sur $\max\{\text{taille}(A) \mid A \in \Gamma \cup \Delta\}$

<u>cas de base :</u> Γ, Δ des ensembles de variables
Supposons $\Gamma \vdash \Delta$ valide, alors :

$$\bigwedge_{x \in \Gamma} x \Rightarrow \bigvee_{y \in \Delta} y \quad \text{valide}$$

Autrement dit $\left(\bigvee_{x \in \Gamma} \neg x\right) \vee \left(\bigvee_{y \in \Delta} y\right)$ est valide

Donc il existe $\underbrace{x \in (\Gamma \cap \Delta)}_{}$ car la clause $\left(\bigvee_{x \in \Gamma} \neg x\right) \vee \left(\bigvee_{y \in \Delta} y\right)$ est valide ssi $\exists x, \neg x$ dedans.
il y a une variable qui apparaît dans Γ et dans Δ

Donc $\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta} Ax$ est une preuve de LK.

<u>cas d'induction :</u> $n = k+1$, $k \geq 1$

$\exists A \in \Gamma \cup \Delta$ tq $A = \neg B$ ou $A = B_1 \wedge B_2$ ou $A = B_1 \vee B_2$ (il y a au moins une formule dans Γ ou Δ)

Donc $\Gamma \vdash \Delta$ est de la forme d'une des règles $\wedge_R, \wedge_L, \vee_R, \vee_L, \neg_R$ ou $\neg_L$
de la conclusion

Comme $\Gamma \vdash \Delta$ est valide par supposition, alors toutes les hypothèses de cette règle R sont valides.

Comme A est de taille maximale dans (Γ, Δ), alors la taille des hypothèses de R sont de taille plus petite.

On conclut par induction.

<u>Exercice 35 du poly</u>

Mq si Γ, Δ est dérivable (=prouvable), alors $\Gamma \vdash A, \Delta$ l'est aussi

<u>Démonstration</u>: Si $\Gamma \vdash \Delta$ prouvable, alors par le th. fondamental, $\Gamma \vdash \Delta$ est valide ($\bigwedge \Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta$ est valide)

Donc $\Gamma \vdash A, \Delta$ est valide aussi ($\bigwedge \Gamma \Rightarrow A \vee (\bigvee \Delta)$ est clairement valide).

Donc par le th. fondamental, $\Gamma \vdash A, \Delta$ est prouvable.