RUNSER Laure

EA4 : TD3 Complexité et récursivité

Exercice 1

$\Theta_1(\log(n))$	Θ_2	$\Theta_3(n^2)$	$\Theta_4(n^4)$	$\Theta_5(4^n)$	Θ_6	Θ_7
$\log(\sqrt{n}) = \frac{1}{2}\log(n)$ $\log(n^4) = 4\log(n)$	$\log(n)^4$	$4^{\log(n)} = (2^2)^{\log(n)} = 2^{2\log(n)} = 2^{\log(n^2)} = n^2$ $n^2 + \log(n)$ $n^2 + \log(4^n)$	$n^2 + n^4$	$n^2 + 4^n$ 4^{n-1} 2^{2n}	$n^2 4^n$	4^{2n}

Si on n'est pas sûr → faire le quotient
↳ s'il est borné, c'est Θ
↳ si ça tend vers $+\infty$, c'est Ω (plus grand)
↳ ——————— 0, alors O (plus petit)

Exercice 2

$\overbrace{32}^{a}\ \overbrace{10}^{b} \times \overbrace{12}^{c}\ \overbrace{03}^{d}$

ac: 32×12 → 3×1, 5×3, 2×2

$(a+b)(c+d)$: 42×15 → 4×1, 6×6, 2×5

bd: 10×03 → 1×0, 1×3, 0×3

$$(a \times 10^k + b)(c \times 10^k + d) = ac \times 10^{2k} + (ad+bc)10^k + bd$$

idée : réduire le nb de multiplications
$(ad+bc) = (a+b)(c+d) - ac - bd$

on est obligé de les calculer de toute façon

Récursif : cas de base
= produit de 2 chiffres

On calcule :

$384 \times 10^4 + (630 - 384 - 30) \times 10^2 + 30 = 3\ 861\ 630$

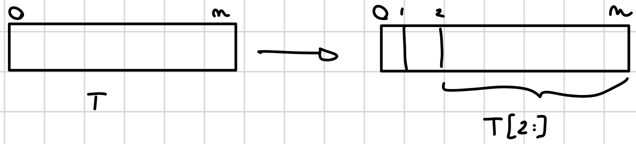
$3 \times 10^2 + (15 - 3 - 4) \times 10 + 4 = 384$ ← 3, 15, 4

$4 \times 10^2 + (36 - 10 - 4) \times 10 + 10 = 630$ ← 4, 36, 10

$0 \times 10^2 + (3 - 0 - 0) \times 10 + 0 = 30$ ← 0, 3, 0

Exercice 3

1)

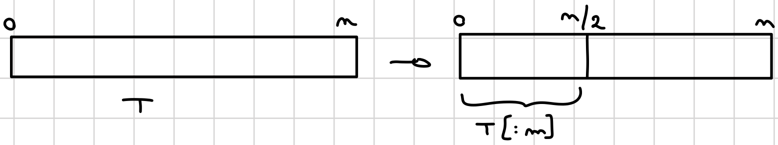


$$A_1(n) - \overbrace{A_1(0)}^{=0} = \underbrace{A_1(n) - A_1(n-2)}_{=1} + A_1(n-2) - \overbrace{A_1(0)}^{=0}$$

$$= \sum_{k=0}^{n/2-1} \underbrace{A_1(n-2k) - A_1(n-2(k+1))}_{=1} = \frac{n}{2} = \Theta(n)$$

$$A_1(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 + A_1(n-2) & \text{sinon} \end{cases}$$

2)



$$A_2(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 + A_2(n/2) & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $n = 2^k$, $k = \log(n)$ $A(2^k) = 1 + A(2^{k-1})$

on pose $v_k = A(2^k)$

$\rightsquigarrow A(n) = v_k = 1 + v_{k-1}$ → on sait résoudre une suite arithmétique de raison 1.

$v_k = \underbrace{v_0}_{cst} + k \times 1$ $A_2(n) = \Theta(\underbrace{\log(n)}_{=k})$

3) $$A_3(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ A_1(n) + A_3(n-1) + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

il faut compter cette addition aussi

$A_1(n) = \Theta(n)$ → n étapes et à chaque étape, coût en $\Theta(n)$

$\rightsquigarrow A_3(n) = \Theta(n^2)$

4) $$A_4(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ A_4(n/2) + A_4(n/2) + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $n = 2^k$ (ie $k = \log(n)$)
$v_k = A(2^k) = 2v_{k-1} + 1$ → suite arithmético-géométrique.

On cherche l tq $l = 2l + 1$ ie $l = -1$

et on pose $u_k = v_k - l = 2v_{k-1} + 1 - l = 2v_{k-1} + 1 - (2l+1)$

$= 2(v_{k-1} - l)$

$= 2u_{k-1}$ ⇒ (u_k) géométrique   On trouve $u_k = u_0 2^k$

Donc $v_k = u_k - l = u_0 2^k + 1$

Donc comme $k = \log(n)$

On a $A(n) = C \times n + 1 = \Theta(n)$