

TD n°1

Langages et expressions rationnelles

Exercice 1 Soient A , B et C les langages dénotés respectivement par les expressions rationnelles $(bb \mid aba)^*$, $(b \mid aba)^*$ et $(ab \mid abb)^*$. Donner les trois plus courts mots de $A \cup B$, de $A \cup C$, de $A \cap B$, de $A \cap C$, et finalement de $B \cap C$.

Exercice 2 Pour chacune des expressions rationnelles suivantes, donner une description en français du langage dénoté :

1. $0(11)^*0$;
2. $(1 \mid 01 \mid 001)^*(\epsilon \mid 0 \mid 00)$;
3. $0^*(10^*10^*10^*)^*$.

Exercice 3 Pour chacun des langages sur l'alphabet $\{0,1\}$ suivants, écrire une expression rationnelle le dénotant et construire un automate déterministe le reconnaissant :

1. tous les mots de longueur paire ;
2. tous les mots contenant 0 ;
3. tous les mots avec un nombre impair de 1 ;
4. tous les mots qui n'ont pas plus de deux 0 consécutifs ;
5. tous les mots ne contenant pas 010 ;
6. tous les mots dont l'avant-dernière lettre est un 1 ;
7. tous les mots qui représentent un entier (non-signé) pair (resp. multiple de 4, resp. de 3).

déterminiser et éliminer les ϵ -transitions

Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, I, F)$ un automate non-déterministe avec ϵ -transitions.
Pour $P \subseteq Q$, on définit :

$$\epsilon\text{-cl\^oture}(P) = \{q \in Q \mid \exists p \in P, q \in \delta^*(p, \epsilon)\}.$$

On construit l'automate déterministe $\mathcal{A}' = (\Sigma, 2^Q, \delta', I', F')$ avec

- $I' = \epsilon\text{-cl\^oture}(I)$,
- $\delta'(P, a) = \bigcup_{p \in P} \epsilon\text{-cl\^oture}(\delta(p, a))$,
- $F' = \{P \subseteq Q \mid P \cap F \neq \emptyset\}$.

Il convient de construire les états de \mathcal{A}' au fur et à mesure.

Exercice 4 On considère l'expression rationnelle $\mathcal{E}_1 = (a \mid \epsilon)(b \mid \epsilon)ab(a \mid \epsilon)(b \mid \epsilon)$.

1. Construire un automate \mathcal{A}_1 qui reconnaît le langage dénoté par \mathcal{E}_1 .
2. Déterminiser et éliminer les ϵ -transitions de l'automate \mathcal{A}_1 selon la méthode ci-dessus.
3. Faire de même avec l'expression rationnelle $\mathcal{E}_2 = (a \mid ba)^*(b \mid ba)$.

Exercice 5 Pour chacun des langages suivants, démontrer qu'il est rationnel ou montrer qu'il ne l'est pas.

1. $\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
2. $\{a^m b^n \mid m < n\}$
3. $\{a^m b^n \mid m \neq n\}$
4. $\{u^2 \mid u \in \{a, b\}^*\}$
5. $\{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
6. $\{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$
7. $\{a^p \mid p \text{ premier}\}$
8. $\{u \in \{a, b\}^* \mid u \text{ palindrome}\}$