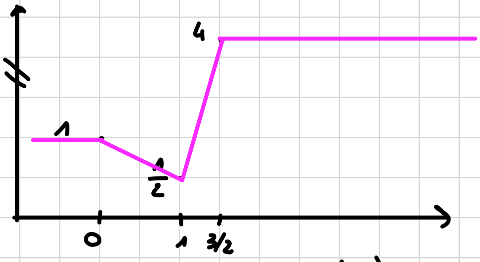
Maths TD 2 Limites & fct° continues

25.09.20



1) Continuité : généralités

Exercice 2

Trouver f | BORNÉE, CONTINUE telle que $f(0)=1$, $f(1)=\frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{3}{2}\right)=4$

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\leq 0 \\ 1-\frac{x}{2} & \text{si } 0\leq x\leq 1 \\ 7x-\frac{13}{2}x & \text{si } 1\leq x\leq \frac{3}{2} \\ 4 & \text{si } x\geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Exercice 3

f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R}$ $|f(x)|=2$

D'abord $f(x)=2$ et $f(x)=-2$ sont deux solutions.

Il faut montrer que ce sont les seules.

$\forall a\in\mathbb{R}$ $|f(a)|=2 \Rightarrow f(a)=2$ ou $f(a)=-2$

On montre qu'il n'existe pas $a,b\in\mathbb{R}$ tq $f(a)=2$ mais $f(b)=-2$.

↳ sinon, par le théorème des valeurs intermédiaires (f est continue),

$\exists c$ dans $]a,b[$ tq $f(c)=0$. Alors $|f(c)|=0\neq 2$ ABSURDE

Donc ce sont bien les seules fct°

Maths TD 02 2e séance

CC 1 : VENDREDI 9/10
sur les 2 premières feuilles de TD

28.09.2020

Opérations sur les équivalents

Composition à gauche : $f \underset{a}{\sim} g$ a-t'on $F(f) \underset{a}{\sim} F(g)$?

↳ PAS DE THÉORÈME GÉNÉRAL

si $F(f) = F(g + o_a(f))$

$= \dots$

$= F(g) + o_a(F(g))$

Alors OUI

Sites pour faire des graphes de fonctions

wolframalpha.com

mathstud.io

contre-exemple

$1+x \underset{0}{\sim} 1$

mais $\underbrace{\ln(1+x)}_{\underset{0}{\sim} x} \underset{0}{\not\sim} \underbrace{\ln(1)}_{=0}$

ex : $\ln(f) = \ln(g + o_a(g))$

$= \ln(g) + \ln(1 + o_a(g))$

si $\lim\limits_{x\to a} |\ln(g)| > 0$

alors $\ln(1 + o_a(g)) \to 0$

on a $\ln(1 + o_a(g)) = o(\ln(g))$

et donc l'équivalence

c'est le cas si $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 1$

↓

plus généralement, si $g(x)$ "ne s'approche pas de 1" !!

contre-exemple $1+x \underset{+\infty}{\sim} x$

mais $\dfrac{e^{1+x}}{e^x} = e \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{1+x}}{e^x} = e$

$\Rightarrow e^{1+x} \underset{+\infty}{\not\sim} e^x$

Pour pouvoir appliquer exp sur une relation $f \underset{a}{\sim} g$, il suffit que $\lim\limits_{x\to a} (f-g) = 0$

$\Rightarrow e^{f-g} \underset{x\to a}{\to} 1$

Partie 1

Exercice 4

f, g continues sur $\mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| = |g(x)|$

a) On suppose $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$. Mq $f = g$ ou $f = -g$

- Comme f ne s'annule pas, f ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$.

↳ car si on suppose $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$, alors par le TVI, $\exists c \in]a, b[$ tq $f(c) = 0$ ABSURDE

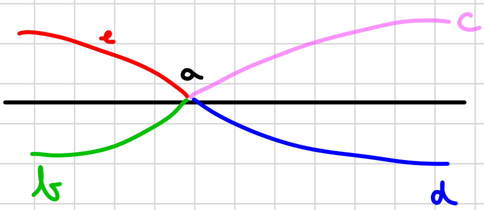
$\boxed{\text{comme } f \text{ est continue}}$

- $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| = |g(x)| \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ $f(g) = g(x)$ ou $f(x) = -g(x)$.

↳ car si $\exists a, b$ tq $f(a) = g(a)$ et $f(b) = -g(b)$, alors comme $f(a)$ et $f(b)$ ont le même signe, $g(a)$ et $g(b)$ ont des signes différents. Comme g est continue, on peut appliquer le TVI : $\exists c \in]a,b[$ tq $g(c)=0 \Rightarrow f(c)=0$ ABSURDE (f ne s'annule pas)

On conclut que $\left.\begin{array}{l} \text{soit } \forall x \in \mathbb{R}\ f(x)=g(x) \\ \text{soit } \forall x \in \mathbb{R}\ f(x)=-g(x) \end{array}\right\}$ c-à-d $f(x)=g(x)$ ou $f(x)=-g(x)$ (au niveau des fonctions)

b) On suppose que $\exists a \in \mathbb{R}$ tq $f(a)=0$



Il y a 2 couples de fonctions possibles

f	g
e c	b d
e d	b c

Exercice 5

a) $\text{Sup}(f,g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq g(x) \\ g(x) & \text{si } g(x) > f(x) \end{cases}$

aussi appelée max

But : mq $\text{Sup}(f,g)(x) = \dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$

Si $f(x) > g(x)$: $\text{Sup}(f,g)(x) = f(x)$

et $|f(x)-g(x)| = f(x)-g(x)$

Alors $\dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = \dfrac{2f(x)}{2} = \boxed{f(x) = \text{Sup}(f,g)(x)}$ OK

Si $g(x) > f(x)$: $|f(x)-g(x)| = g(x)-f(x)$

Alors $\dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = \dfrac{2g(x)}{2} = \boxed{g(x) = \text{Sup}(f,g)(x)}$ OK

De la même manière $\boxed{\text{Inf}(f,g)(x) = \dfrac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}}$

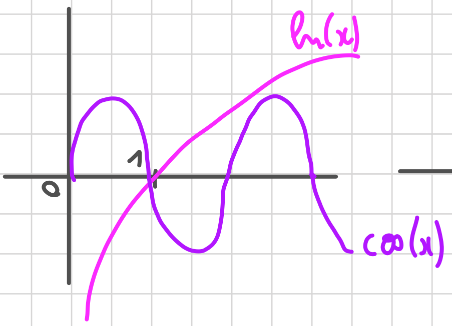
b) Si f et g sont continues en $x_0 \in I$, $|f-g|$ et $|f+g|$ aussi

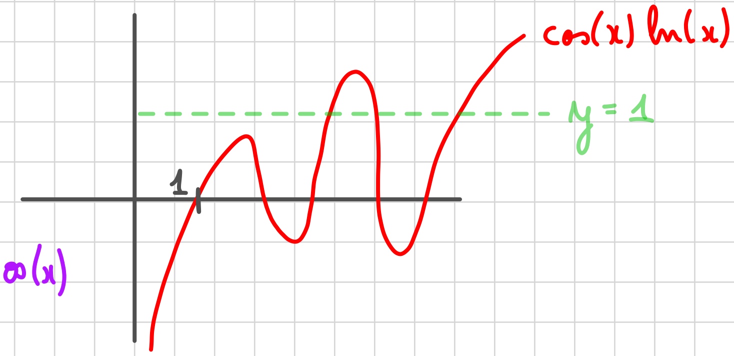
Alors $\text{Sup}(f,g)(x)$ et $\text{Inf}(f,g)(x)$ sont une somme/différence/quotient de fonctions continues.

Donc $\boxed{\text{elles sont continues}}$.

Partie 2

Exercice 1 $\quad \exists!\, x \in]0;+\infty[$ tq $f(x) = \cos(x)\ln(x) = 1$





- $\cos(x)$ et $\ln(x)$ continues sur $]0;+\infty[$ donc par produit $f(x) = \cos(x)\ln(x)$ aussi
- $\cos(x) \in [-1, 1]$ avec $\begin{cases} \cos((2k-1)\pi) = -1 \\ \cos(2k\pi) = 1 \end{cases}$

donc $f((2k-1)\pi) = -\ln((2k-1)\pi)$

$f(2k\pi) = \ln(2k\pi)$

$\forall k \geq 1$ un entier on a :

(1) $\quad 2k\pi \geq 2\pi > e \quad$ donc $\ln(2k\pi) > \ln(e) = 1$

(2) $\quad (2k-1)\pi \geq \pi > 1$

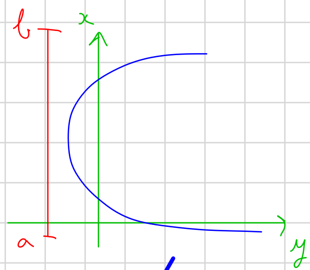
$\ln((2k-1)\pi) > \ln(1) = 0 \quad$ donc $\quad -\ln((2k-1)\pi) < 0$

- Donc sur l'intervalle $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, $\begin{cases} f((2k-1)\pi) < 0 < 1 \\ f(2k\pi) > 1 \end{cases}$

Par le TVi :

$\exists\, c \in](2k-1)\pi, 2k\pi[$ tq $f(c) = 1$

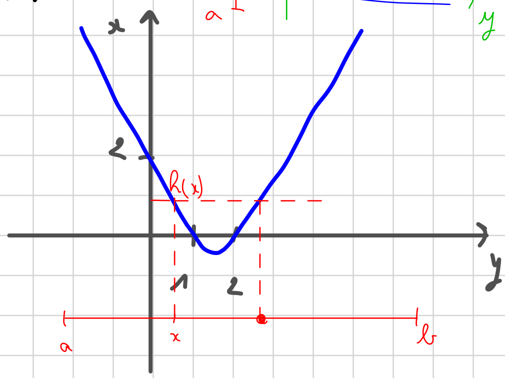
C'est donc une solution pour l'équation $f(x) = 1$



Exercice 3 $\quad h(x) = x^2 - 3x + 2$

si $a < b < \frac{3}{2}$ ou $\frac{3}{2} \leq a < b$

h se restreint à une bijection.



$h(x) = y$ qd y-a-t'il une bijection ?

$$\left[x^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = y$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = y$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = y + \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{y + \frac{1}{4}}$$

Donc si $a < b \leq \frac{3}{2}$ pour que x soit dans $[a, b]$, on n'a qu'un seul choix.

$$x = \frac{3}{2} - \sqrt{y + \frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{la réciproque } h^{-1}(y) = \frac{3}{2} - \sqrt{y + \frac{1}{4}}}$$

si $\frac{3}{2} \leq a < b$ la réciproque sera donnée par $h^{-1}(y) = \frac{3}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}}$