24.03.2021

Maths 4 : Amphi 8

Permutations et groupes symétriques

Soit $n \geq 1$ un entier, on note $[n] = \{1, 2, .., n\}$

Def On appelle n-ième groupe symétrique noté S_n le groupe des bijections de $[n]$ dans $[n]$, muni de la composition des applications. L'élément neutre Id est l'applicatO identité $Id(x) = x$

On rappelle que f est une bijectO de E vers E $\Leftrightarrow \forall b \in E, \exists! a \in E$ tq $f(a) = b$

(tout él de E a un unique antécédent par f)

On peut définir une applicatO f^{-1} tq $f^{-1}(b) = a$.

$$\Leftrightarrow f \circ f^{-1}(a) = f^{-1} \circ f(a) = Id(a) = a$$

Donc f^{-1} est l'inverse de f pour la composition.

Une bijection de $[n]$ dans $[n]$ est une façon de "mélanger" ces éléments : une permutation

On note :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & & f(n) \end{pmatrix}$$

Rmq : On note souvent les applications $f, g, \dots$
On note les permutatO en lettres grecques : $\sigma, \tau, \gamma, \dots$

Exemple : dans S_3, l'identité est $Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Une bijection $\sigma(1) = 3$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\sigma(2) = 1$
$\sigma(3) = 2$

Dans S_3, il y a 6 éléments : Id, σ, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Composition :
On a $\tau(1) = 1$
$\tau(2) = 3$
$\tau(3) = 2$

Alors $\sigma \circ \tau = \sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

on peut omettre le $\circ$

Prop : S_n a $n!$ éléments. C'est un groupe fini.

Théorème (HS, juste pour la curiosité)

Soit $(G, .)$ un groupe fini d'ordre n.

Alors il existe un morphisme injectif $f : G \to S_n$

Déf On appelle **k-cycle** (k entier) un élément de S_n tel qu'il existe $i_1, \dots, i_k$ tq

$\sigma(i_1) = i_2$, $\sigma(i_2) = i_3$, $\dots$, $\sigma(i_k) = i_1$ et tous les autres entiers sont fixés ($\sigma(i) = i$)

Un 2-cycle est appelé une **transposition**

On note $\sigma = (i_1 \; i_2 \; \dots \; i_k)$. L'ensemble $\{i_1, i_2, \dots i_k\}$ est appelé le **support** de σ.

Prop : Un k-cycle est d'ordre k.
En particulier, si τ est une transposition, $\tau^2 = Id$, $\tau = \tau^{-1}$

Prop : Deux cycles dont les supports sont disjoints commutent.

(car ils ne "touchent" pas les mêmes entiers.

Exemple :

$\sigma = (1 \; 2 \; 4)$
$\tau = (3 \; 5 \; 7)$

$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \xrightarrow{\sigma} (2, 4, 3, 1, 5, 6, 7) \xrightarrow{\tau} (2, 4, 5, 1, 7, 6, 3)$

m̂ résultat en faisant d'abord τ puis σ.