

Outils Logiques Groupe 3 & 4 – DM Noté 1

à rendre avant le 15 mars 2021 par email à chaitanya@irif.fr

Exercice 1 (5 points)

Pour chacune des relations suivantes, dire si c'est un ordre partiel, et si oui, si c'est un ordre bien fondé. Justifier.

- (1) $(\mathbb{Q}_+, >)$ Les nombres rationnels non-négatifs (c'est-à-dire supérieur ou égal à 0) avec l'ordre habituel.
- (2) L'ensemble X^* des mots sur un alphabet X avec la relation préfixe : pour tous mots $u, v \in X^*$, $u >_p v$ si $u \neq v$ et s'il existe un $w \in X^*$ tel que $u = vw$.
- (3) L'ensemble de parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E fini, avec l'ordre croissant : pour tous $S, T \in \mathcal{P}(E)$, $S > T$ si $S \subset T$ et $S \neq T$.

Exercice 2 (5 points)

On notera les formules propositionnelles par $A, B, C \dots$ et les variables propositionnelles par x, y, z, \dots . Lesquelles des formules suivantes sont valides ? Justifier.

- | | |
|---|---|
| (1) $x \Leftrightarrow ((x \Rightarrow \mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{0})$ | (3) $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$ |
| (2) $(A \Rightarrow B) \vee A$ | (4) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((x \wedge \neg y) \Rightarrow \mathbf{0})$ |

Exercice 3 (2,5 points)

Soit $(S, >)$ un ordre bien fondé.

- (1) Rappeler la définition de l'ordre produit sur l'ensemble $S \times S$.
- (2) Si on définit $S^{k+1} := S^k \times S$, étendre la définition de l'ordre produit à tous les S^k pour $k > 2$ (k fini). Est-il toujours bien fondé ? Justifier.

Exercice 4 (2,5 points)

Soit $\Sigma = \{a^0, b^0, s^2, t^2\}$ une signature. Soit \rightarrow la relation suivante sur T_Σ : pour tous $X, Y, Z \in T_\Sigma$,

$$(s, (t, X, Y), Z) \rightarrow (t, (s, X, Z), (s, Y, Z)) \quad (s, X, (t, Y, Z)) \rightarrow (t, (s, X, Y), (s, X, Z))$$

et si $X \rightarrow X'$ dans T_Σ , alors

$$\begin{array}{ll} (s, X, Y) \rightarrow (s, X', Y) & (s, Y, X') \rightarrow (s, Y, X') \\ (t, X, Y) \rightarrow (t, X', Y) & (t, Y, X') \rightarrow (t, Y, X'). \end{array}$$

La relation \rightarrow termine-t-elle ? Justifier.