Exercice 1. Postier

Un postier nouvellement nommé en milieu rural se demande comment organiser sa tournée pour pédaler le moins possible sur sa bicyclette. Il dispose de la carte de la zone à couvrir, et de vagues souvenirs de ses cours de théorie des graphes. Bien évidemment, pour assurer la distribution du courrier, il doit passer par toutes les rues. Le postier part de la poste pour commencer sa tournée et doit reposer sa bicyclette à la poste à la fin de la tournée.

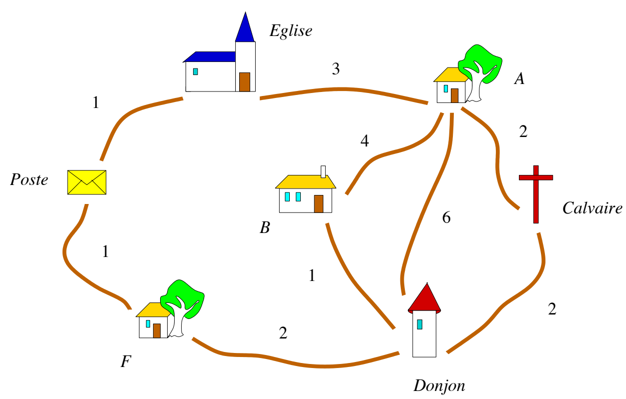
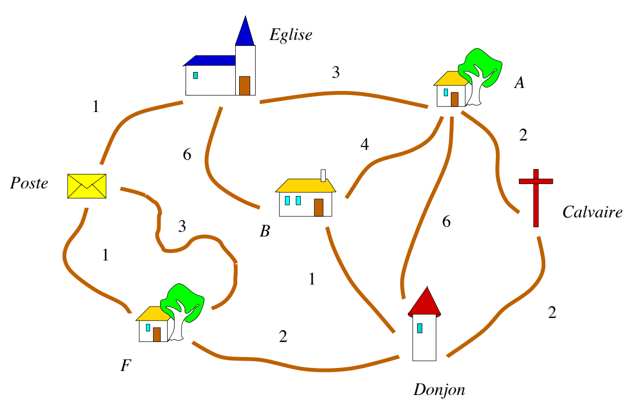


Figure 1 – Les valuations sur les chemins indiquent leur longueur en kilomètre.

Question 1. Comment le postier peut-il trouver une tournée de distance minimale dans ce cas ?

De nouvelles maisons viennent de se construire sur la route entre l'église et le hameau B, et sur le chemin des aiguilles entre la poste et le lieu dit F. Les routes que doit maintenant desservir notre postier sont représentées ci-dessous.



Supposons que notre postier ait opté pour une tournée T. On peut alors associer à cette tournée la graphe multiple $G_T = (V, E_T)$ où chaque arête est représentée autant de fois que la rue correspondante est parcourue par le postier.

Question 2. Que peut on dire de la tournée du postier dans G_T ? Quelle est sa longueur ?

Exercice 2. **Tour des Cyclades**

Pour célébrer l'obtention de votre master, vous allez faire un voyage en voilier dans les Cyclades (un archipel de Grèce) cet été. Vous allez louer un voilier à l'île de Syros et ensuite vous souhaitez faire escale aux îles de Milos, Mykonos, Naxos, Paros et Santorin (pas forcément dans cet ordre) avant de retourner à Syros. Le tableau ci-dessous indique les distances (en milles nautiques) entre les différentes îles.

	Milos	Mykonos	Naxos	Paros	Santorin	Syros
Milos	$\times$	70	59	52	65	49
Mykonos	70	$\times$	24	27	74	25
Naxos	59	24	$\times$	16	54	31
Paros	52	27	16	$\times$	67	23
Santorin	65	74	54	67	$\times$	74
Syros	49	25	31	23	74	$\times$

Pour trouver le meilleur itinéraire, vous utilisez l'heuristique Nearest-Neighbour vue dans le cours de Mobilité : à chaque étape, aller à l'île non-visitée la plus proche.

Question 1. Quel est l'itinéraire trouvé par l'heuristique Nearest-Neighbour ?

Non satisfait avec la solution trouvée, vous décidez d'utiliser l'algorithme Double-Tree pour trouver un meilleur itinéraire.

Soit G le graphe complet à six sommets, dont les sommets correspondent aux îles, et le poids de chaque arête correspond à la distance entre les îles. (*Il n'est pas nécessaire de le dessiner.*)

Question 2. Trouver un arbre couvrant de poids minimum T de G.

Question 3. En déduire un itinéraire pour votre voyage.

Vous vous rappelez que l'algorithme de Christofides a une meilleure garantie d'approximation que Double Tree.

Question 4. Trouver (à la main) un couplage M de poids minimum dans G tel que $T + M$ est eulérien.

Question 5. En déduire un itinéraire pour votre voyage.

Exercice 3.

Prouver que les facteurs d'approximation de l'algorithme Double-Tree et de l'algorithme de Christofides ne peuvent pas être améliorés. C'est-à-dire :

Question 1. Construire une instance de TSP euclidéen à n sommets (où n tend vers ∞) tel que l'algorithme Double-Tree trouve un cycle hamiltonien de longueur $2 \cdot \mathrm{OPT}$, où OPT est la longueur minimum d'un cycle hamiltonien de l'instance.

Question 2. Construire une instance de TSP euclidéen à n sommets (où n tend vers ∞) tel que l'algorithme de Christofides trouve un cycle hamiltonien de longueur $1.5 \cdot \mathrm{OPT}$, où OPT est la longueur minimum d'un cycle hamiltonien de l'instance.