9/9

Exercice 4 : On pose $U_n(x) = (x^2-1)^n$ et $Q_{n,k} = U_n^{(k)}$

On va étudier les propriétés de $P_n = Q_{n,n} = (x^2-1)^n$
Etant donné que U_n est un polynôme de degré $2n$
Donc, $P_n = U_n^{(n)}$ est un polynôme de degré n.

. U_n admet alors $\{-1; 1\}$ comme racines d'ordre n

. $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, U_n^{(k)}(-1) = U_n^{(k)}(1) = 0$

Chaque $Q_{n,k}$ avec $0 \leq k \leq n-1$, s'annule en ± 1.

On va tenter de montrer par récurrence sur k que $Q_{n,k}$ s'annule k fois au moins sur $]-1; 1[$ si $k=0$

$\exists -1 < x_1 < \dots < x_k < 1 \mid Q_{n,k}(x_1) = \dots = Q_{n,k}(x_k) = 0$

On va appliquer le théorème de Rolle sur les intervalle $[-1; x_1]; [x_1; x_2]; \dots; [x_k; 1]$

Ainsi $Q_{n,k+1} = Q'_{n,k}$ s'annule en $k+1$ points distincts de $]-1; 1[$.

Cela permet de prouver la propriété au rang $k+1$.

$P_n = Q_{n,n}$ s'annule en n points distincts de $]-1; 1[$.
De plus, $\deg P_n = n$

Pour conclure : on peut dire que P_n est un polynôme de degrès n dont toutes les racines sont réelles, distinctes, et $\in]-1; 1[$ avec n zéros distincts.