Cours du 24 septembre 2020

Mathématiques 3 (IF13E010).

Rappel

Nous venons de rappeler les propriétés des fonctions continues notamment les propriétés globales (théorème des valeurs intermédiaires notamment). Puis nous avons rappelé la définition de la notion de dérivée d'une fonction en un point et donné la définition de la notion de développement limité d'une fonction en un point à l'ordre n .

Nous avons, dans un premier temps, montré que la continuité en un point (ou le prolongement par continuité en un point) équivalait à l'existence d'un développement limité à l'ordre 0 en ce point puis que la dérivabilité d'une fonction en un point équivalait à l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 en ce point.

Contre-exemple.

La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

admet un développement limité en 0 à l'ordre 2 sans être dérivable en 0 à l'ordre 2 .

L'existence du ddéveloppement limité résulte immédiatement de ce ue

$$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \ .$$

Pour étudier la dérivée seconde en 0 , il convient tout d'abord de déterminer la dérivée première en 0 . Or, si $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \to_{x \to 0} 0 \ .$$

Contre-exemple (suite).

Donc $f'(0) = 0$. Par ailleurs, si $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^3 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{-2}{x^3} = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) .$$

Pour étudier l'existence de $f"(0)$, il nous faut étudier par définition

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) .$$

Le premier terme de cette somme tend vers 0 si x tend vers 0 . Mais le second terme n'a pas de limite (penser aux x tels que $1/x^2$ est un point où cos s'annule comme $\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2k\pi}}$ et aux x tels que $1/x^2$ est un point où cos vaut 1 ou -1).

Retour sur la dérivabilité.

Interprétation graphique.

Soient $M = (x, f(x))$ et $M_0 = (x_0, f(x_0))$ les points du graphe de f . Alors le rapport ci-dessus représente la pente de la droite joignant M_0 à M . Alors si f est dérivable en x_0 , cette droite a pour limite la droite d'équation

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

que l'on appelle tangente à la courbe en M_0 .

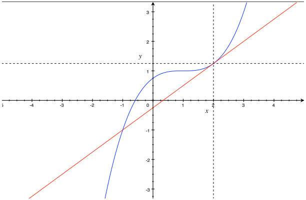

FIGURE – Un exemple de tangente en un point.

Propriétés et définition.

Remarque

Le nombre dérivé est unique s'il existe (comme toute limite).

Proposition

Soit f une fonction définie sur l'intervalle I . Soit x_0 un point de l'intérieur de I . Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

Définition

Soit f une fonction numérique. On suppose que f est définie sur l'intervalle I . On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I . On note $\mathcal{D}(I;\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I .

Opérations sur les nombres dérivés.

Théorème

Opérations sur les fonctions dérivables. Soient f et g des fonctions numériques. Soit λ un scalaire réel. Soit a un réel.

- *Si f et g sont dérivables en a alors la fonction $f+g$ est dérivable en a ; de plus on a*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \ ;$$

- *Si f est dérivable en a , alors la fonction λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$;*
- *Si f et g sont dérivables en a alors la fonction fg est dérivable en a et*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \ ;$$

Opérations sur les nombres dérivés (suite).

Théorème

Opérations sur les fonctions dérivables. Soient f et g des fonctions numériques. Soit a un réel.

- *Si f et g sont dérivables en a et si, de plus, $g(a)$ est non nulle alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et* $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$;
- *Si f est dérivable en a et g en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a de dérivée $g'(f(a))f'(a)$.*

Remarque

L'application de ces théorèmes permet de déterminer la dérivabilité de la plupart des fonctions classiques sur leur domaine de définition.

Propriétés globales.

Théorème

(de Rolle) Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I = [a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

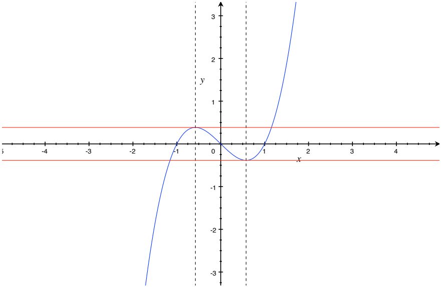

FIGURE – Le théorème de Rolle (un exemple).

Propriétés globales.

Théorème

(des accroissements finis) Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I = [a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

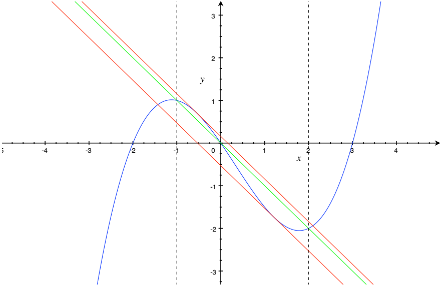

FIGURE – Le théorème des accroissements finis (un exemple).

Interprétation graphique.

Remarque

Interprétation géométrique. Entre deux points où le graphe de f coupe l'axe des x , il existe donc nécessairement (au moins) un point où la tangente est horizontale.

Remarque

Interprétation géométrique. Entre deux points du graphe de f , il existe donc nécessairement (au moins) un point où la tangente est parallèle à la corde.

Conséquences.

Corollaire

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle I . Elle y est croissante si et seulement si elle y admet une dérivée positive ou nulle.

Corollaire

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle I . On suppose qu'elle y admet une dérivée strictement positive. Alors f est strictement croissante.

Remarque

Naturellement, comme le montre le cas de la fonction x^2 , une fonction peut être strictement monotone sur $\mathbb{R}$ alors que sa dérivée s'annule en un point.

Conséquences (suite)

Corollaire

Théorème des accroissements finis (variante). Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I = [a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que la fonction dérivée $|f'|$ admet une borne supérieure M sur l'intervalle $]a, b[$. Alors

$$\forall x \in [a, b] \ , \ |f(x) - f(a)| \leq M|x - a| \ .$$

Remarque

On remarquera que les hypothèses du corollaire précédent sont satisfaites lorsque la fonction f admet une fonction dérivée sur l'intervalle $[a, b]$ tout entier qui est de plus continue sur l'intervalle $[a, b]$.

Dérivée d'ordre supérieur.

Nous allons donner une définition (par récurrence sur l'entier n). Soit f une fonction définie sur l'intervalle (ouvert) $I =]a, b[$. Si f est dérivable sur I , sa dérivée f' est aussi une fonction définie sur I . Si elle est elle-même dérivable, on appellera f" sa dérivée et on l'appelle la dérivée seconde de f . Plus généralement :

Définition

Soit f une fonction définie sur l'intervalle (ouvert) $I =]a, b[$. Soit $f^{(n)}$ sa dérivée d'ordre n sur I . Si cette fonction est elle-même dérivable, on note $f^{(n+1)}$ sa dérivée et on l'appelle dérivée $n+1$-ème de f sur I .

Définition

On note $\mathcal{C}^n(I; \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions admettant des dérivées sur I jusqu'à l'ordre n et dont la dérivée n-ième est continue sur I .

Opérations sur les dérivées n-èmes.

.

Théorème

Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur $I =]a - r, a + r[$. Alors

- *si f et g sont deux fonctions dérivables à l'ordre n en a , alors $f + g$ est dérivable à l'ordre n en a et*

$$(f+g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a) \ .$$

- *si λ est un réel et f une fonction dérivable à l'ordre n en a alors λf est dérivable à l'ordre n en a et*

$$(\lambda f)^{(n)}(x_0) = \lambda f^{(n)}(a) \ .$$

- *si f et g sont deux fonctions dérivables à l'ordre n en a , alors $f \times g$ est dérivable à l'ordre n en a .*

Opérations sur les dérivées n-èmes (suite).

.

Théorème

Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur $I =]a-r, a+r[$. Alors

- *si f et g sont deux fonctions dérivables à l'ordre n en a , si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable à l'ordre n en a .*
- *si f est dérivable à l'ordre n en a ainsi que g en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable à l'ordre n en a .*

Exemple

Les fonctions $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{th}(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Taylor-Young.

Théorème (Taylor-Young)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $I =]a-r, a+r[$ centré en le point a . On suppose que f ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont définies sur I . On suppose que f est dérivable à l'ordre $n+1$ en a . Alors

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \, h^i + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} \, h^{n+1} + h^{n+1}\epsilon(x)$$

où $\epsilon(x)$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 .

Un premier exemple.

Ainsi
$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\exp(a)}{i!}(x-a)^i + (x-a)^n \epsilon(x)$$
et, en particulier en 0 , puisque $\exp(0) = 1$,
$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + x^n \epsilon(x) \ .$$

Applications aux développements limités.

Théorème

Si f est définie sur l'intervalle I contenant le point x_0 . On suppose que f est dérivable à l'ordre $n-1$ sur un intervalle centré en x_0 . On suppose que f admet une dérivée d'ordre n en x_0 . Alors f admet un développement limité en x_0 à l'ordre n . De plus ce développement limité est donné par le polynôme de Taylor à l'ordre n en x_0 .

Démonstration. C'est exactement la formule de Taylor-Young.

Remarque

On voit donc qu'il y a beaucoup de fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en a . Cependant l'exemple de la fonction $\sin(1/x)$ ou $\ln(x)$ montre qu'il existe des fonctions n'ayant pas de développements limités (même à l'ordre 0) en 0 .

Retour sur les développements limités.

Développements limités obtenus par la formule de Taylor.

Il s'agit du cas où l'on connaît de façon explicite la dérivée n-ième de la fonction. Le plus simple est celui de la fonction exponentielle qui est égale à sa propre dérivée d'où

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)\ .$$

D'où

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)\ .$$

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x)\ .$$

Retour sur les développements limités (suite).

Développements limités obtenus par la formule de Taylor (suite).

Par la formule d'Euler, on en déduit aussi

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x) \; .$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x) \; .$$

Soit α un réel. La fonction x^α est indéfiniment dérivable en tout point non nul et sa dérivée n-ième est
$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha \times \ldots \times (\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}$ d'où

$$(1+x)^\alpha =$$

$$\ldots + 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha \times \ldots \times (\alpha - n + 1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x) \; .$$

Retour sur les développements limités (suite).

Développements limités obtenus par la formule de Taylor (suite).

Lorsque $\alpha = -1$, on va retrouver ci-dessous (par une autre méthode) le développement de $1/(1+x)$. Deux développements peuvent avoir un intérêt particulier : $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^n + x^n\epsilon(x) .$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \ldots + (-1)^n\frac{1\ldots(2n-1)}{2^n n!}x^n + x^n\epsilon(x) .$$

On notera que l'on apprend le développement limité de la fonction x^α au point 1 ou celui en 0 de la fonction $(1+x)^\alpha$.

Autres développements limités.

Développements limités issus de formules connues

On sait que

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n \ .$$

On peut ré-écrire cette formule comme suit :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + x^n \, \frac{x}{1-x} \ .$$

D'où également

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \ldots + (-1)^n x^n + x^n \, \frac{x}{1+x} \ .$$

Ainsi que

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + \ldots + x^{2n} + x^{2n+1} \, \frac{x}{1-x^2} \ .$$

Autres développements limités.

Développements limités issus de formules connues

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n+1}\,\frac{x}{1+x^2}\ .$$

Ces développements limités permettent également d'obtenir le développement limité de $1/x$ en tout point x_0 non nul. Penser que l'on peut écrire

$$\frac{1}{x_0+h} = \frac{1}{x_0}\frac{1}{1+\frac{h}{x_0}}\ .$$

Autres développements limités.

Développements limités obtenus par intégration.

Disons simplement ici que l'on montre que, pour toute fonction continue sur un intervalle I , il existe une unique fonction dérivable s'annulant en $x_0 \in I$ et dont la dérivée sur I est f . On la note

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt\ .$$

Ainsi, par exemple, a-t-on

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}\ .$$

Théorème

Soit f une fonction admettant en x_0 un développement limité à l'ordre n . Alors toute primitive F de f admet en x_0 un développement limité à l'ordre $n+1$.

Autres développements limités.

Développements limités obtenus par intégration.

On montre en effet (et nous admettrons ici) que, si

$$f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \epsilon(x) =$$

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x) \ ,$$

on a

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt =$$

$$a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + (x - x_0)^{n+1}\eta(x) \, .$$

Autres développements limités.

Développements limités obtenus par intégration.

Cette technique est donc adaptée aux fonctions dont on connaît une dérivée. Ainsi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x)$$

puisque la dérivée de cette fonction est $1/(1+x)$.
Mais

$$(\mathrm{Arcsin}(x))' = \frac{1}{\sin'(y)} = \frac{1}{\cos(y)}$$

(où $y = \mathrm{Arcsin}(x)$ et $x = \sin(y)$). Mais $\cos(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)} = \sqrt{1-x^2}$. Il nous suffit donc d'intégrer le développement limité de

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Opérations sur les DL.

Somme et produit.

Théorème

Soit λ un nombre réel. Soient $y = f(x)$ et $y = g(x)$ deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en x_0 . Alors la fonction $f(x) + g(x)$ (resp. $\lambda f(x)$, $f(x)g(x)$) admet un développement limité à l'ordre n en x_0 .

Indication. C'est immédiat pour la somme ou le produit par un scalaire réel (prendre la somme des parties polynomiales ou le produit par le scalaire réel). Pour le produit, il suffit de même de prendre les termes d'ordre au plus n dans le produit de ces deux polynômes (les autres termes étant partie du reste puisque divisibles par $(x - x_0)^{n+1}$).

Exemple.

$$f(x) = \sin(x)\ln(1+x) \ .$$

On sait que

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} + x^{2n+2}\epsilon_1(x) \ .$$

A l'ordre 4 par exemple

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4\epsilon_1(x).$$

De même, on sait que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon_2(x) \ .$$

Exemple (suite).

Bref

$$f(x) = \sin(x)\ln(1+x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\epsilon_1(x)\right)$$

$$\dots\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon_2(x)\right) \ .$$

En développant, on trouve successivement

$$f(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + x^5\epsilon_2(x)\dots$$

$$\dots - \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{12} - \frac{x^6}{18} + \frac{x^7}{24} + x^7\epsilon_2(x) + x^4\epsilon_1(x)\ln(1+x)$$

puis

$$f(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + x^4\epsilon(x) \ .$$

Exemple (suite).

en négligeant tous les termes d'ordre supérieur strictement à 4 (puisqu'ils sont négligeables devant x^4). On voit que le reste s'écrit

$$-\frac{x^5}{4}+x^5\epsilon_2(x)+\frac{x^5}{12}-\frac{x^6}{18}+\frac{x^7}{24}+x^7\epsilon_2(x)+x^4\epsilon_1(x)\ln(1+x)\ .$$

Composition.

Théorème

Soient $y=f(x)$ une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en x_0 . Posons $y_0=f(x_0)$. Soit $g(x)$ une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en y_0 . Alors la fonction $g\circ f(x)$ admet un développement limité à l'ordre n en x_0 .

Example.

Donnons tout d'abord un exemple d'application immédiate. La fonction $\exp(x^2)$ est la composée du monôme x^2 et de la fonction $\exp(x)$. Comme on a

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

on aura par composition immédiate

$$\exp(x^2) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2n}}{n!} + x^{2n} \epsilon(x) \ .$$

La parité nous permet même d'affirmer que

$$\exp(x^2) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2n}}{n!} + x^{2n+1} \epsilon(x) \ .$$

Un autre exemple.

Considérons

$$f(x) = \exp(\cos(x)) .$$

Cette fonction va avoir un développement limité à tous les ordres en 0 . En effet $\cos(x)$ a un développement limité à tous les ordres en 0 . Comme $\cos(0) = 1$ et que exp a un développement limité à tous les ordres en 1 , on peut conclure. Etudions le cas de l'ordre 3 . Or $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon(x)$ soit

$$\exp(\cos(x)) = \exp\left(1 - \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon(x)\right) = e \times \exp\left(-\frac{x^2}{2} + x^3\epsilon(x)\right)$$

où l'on peut alors utiliser que

$$\exp(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + h^3\eta(h)$$

Un autre exemple.

(suite)

avec $h = -\frac{x^2}{2} + x^3\epsilon(x)$. Mais h est d'ordre 2 en x . Donc il suffit de garder les termes de degré au plus 3 en x soit

$$\exp(\cos(x)) = e \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon(x)\right)$$

puisque les termes en h^2 ou h^3 sont à placer dans le reste. Bref

$$\exp(\cos(x)) = e - \frac{ex^2}{2} + x^3\epsilon(x) \; .$$

Quotient.

Quotient.

Théorème

Soient $y = f(x)$ et $y = g(x)$ deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en x_0 . On suppose que $g(x_0) \neq 0$. Alors la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$ admet un développement limité à l'ordre n en x_0 .

Fonction Tangente

La fonction

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x) .$$

admet un développement limité en 0 à l'ordre n (quel que soit n).

Example.

Cela résulte de ce que sin et cos ont des développements limités à tous les ordres en 0 et que $\cos(0) = 1 \neq 0$. Déterminons le pour $n = 3$.

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)}{1 - \frac{x^2}{2} + x^4\eta(x)} .$$

Mais

$$x - \frac{x^3}{6} = x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} = x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^3}{3}$$

soit

$$x - \frac{x^3}{6} = \left(x + \frac{x^3}{3}\right) \times \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + x^4 R(x) .$$

Example.

D'où

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x) .$$

On notera que, comme tan est impaire, on a

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^4\epsilon(x) .$$

Il est remarquable de savoir qu'il n'y a pas de formules donnant les coefficients de ce développement limité en fonction de l'ordre.