Devoir maison de Mathématiques du 11 mai 2020

Nom : Le Franc
Prénom : Matthieu
N°Etudiant : 21800858
Groupe : Info 4

Exercice 1 : Soit $n \in [1;9]$

$3n \equiv 0 [3]$ $\quad m = 3n+3$

$m \equiv 0 [3]$ $\quad 3m \equiv 0 [9] \Rightarrow$ la somme des chiffres de "$3m$" $= 9$

Exercice 2 : 1) Pour trouver le PGCD(1544, 362), il existe la méthode de l'algorithme d'Euclide et le théorème de Bezout.

2) $1544x + 362y = PGCD(1544, 362)$
Nous souhaitons trouver $a, b \in \mathbb{Z}$. Pour cela, nous allons utiliser l'algorithme d'Euclide étendue.
Avant cela nous allons simplifier un peu l'expression en déterminant le PGCD(1544, 362).

$1544 = 4 \times 362 + 96$
$362 = 3 \times 96 + 74$
$96 = 1 \times 74 + 22$
$74 = 3 \times 22 + 8$
$22 = 2 \times 8 + 6$
$8 = 1 \times 6 + 2$ → dernier reste non nul $= 2$
$6 = 3 \times 2 + 0$ ⇒ $PGCD(1544, 362) = 2$

Nous allons maintenant chercher à déterminer des entiers $U, V \in \mathbb{Z} \mid 1544U + 362V = 2$

$P_0 = (a, 1, 0, b, 0, 1)$ $a = qb + r$
$P_1 = (1544, 1, 0, 362, 0, 1)$ $1544 = 4 \times 362 + 96 \Rightarrow q = 4$
$P_2 = (362, 0, 1, 1544 - 4 \times 362, 1 - 4 \times 0, 0 - 4 \times 1)$
$P_2 = (362, 0, 1, 96, 1, -4)$ $362 = 3 \times 96 + 74 \Rightarrow q = 3$
$P_3 = (96, 1, -4, 362 - 3 \times 96, 0 - 3 \times 1, 1 - 3 \times (-4))$
$P_3 = (96, 1, -4, 74, -3, 13)$ $96 = 1 \times 74 + 22 \Rightarrow q = 1$
$P_4 = (74, -3, 13, 96 - 1 \times 74, 1 - 1 \times (-3), -4 - 1 \times 13)$
$P_4 = (74, -3, 13, 22, 4, -17)$ $74 = 3 \times 22 + 8 \Rightarrow q = 3$
$P_5 = (22, 4, -17, 74 - 3 \times 22, -3 - 3 \times 4, 13 - 3 \times (-17))$
$P_5 = (22, 4, -17, 8, -15, 64)$ $22 = 2 \times 8 + 6 \Rightarrow q = 2$
$P_6 = (8, -15, 64, 22 - 2 \times 8, 4 - 2 \times (-15), 17 - 2 \times 64)$
$P_6 = (8, -15, 64, 6, 34, -145)$ $8 = 1 \times 6 + 2 \Rightarrow q = 1$
$P_7 = (6, 34, -145, 8 - 1 \times 6, -15 - 1 \times 34, 64 - 1 \times (-145))$
$P_7 = (6, 34, -145, 2, -49, 209)$ $6 = 3 \times 2 + 0 \Rightarrow q = 3$
$P_8 = (2, -49, 209, 6 - 3 \times 2, \ldots, \ldots)$
$P_8 = (2, -49, 209, 0, \ldots, \ldots)$ ⇒ $r = 0$, on s'arrête

$\underbrace{2}_{PGCD}$, $\underbrace{-49}_{U}$, $\underbrace{209}_{V}$

$PGCD(1544, 362) = 2$ Donc : $(U, V) = (-49, 209)$
et : $1544U + 362V = 2$
car : $1544 \times (-49) + 362 \times 209 = 2$

Donc l'équation $1544x + 362y = 2$
admet une solution particulière
car $1544x + 362y = c$ avec $PGCD(1544, 362) | c$
dans $\mathbb{Z}$

L'équation $ax \equiv c [b]$ admet des solutions :
$$S = (x_0 + kb', y_0 - ka')$$

$b' = \frac{1544}{2} = 772$

$a' = \frac{362}{2} = 181$

$$S = (-49 + 772k, 209 - 181k)$$

Exercice 3 :

1). Si d divise n^2 et $2n+1$, alors d divise n car : $d | n^2$ & $d | 2n+1$.

Alors, il existe des entiers k et $k' \in \mathbb{Z}$ | $\begin{cases} n^2 = dk \\ 2n+1 = dk' \end{cases}$

Donc : $n^2 + 2n + 1 = dk + dk'$
$n^2 + 2n + 1 = d(k + k')$
$\Rightarrow d(k + k') | n^2 + 2n + 1$

Alors : $n = n^2 + 2n + 1$

Autrement dit : $n = a(2n+1) + b n^2$
$$= -2n^2 + n(2n+1)$$
$$= -\cancel{2n^2} + \cancel{2n^2} + n$$
$$n = n$$

2) $d \mid 2n+1$ et $d \mid n^2$

$d \mid 2n+1-2n$ et $d \mid 1$

Donc les uniques diviseurs communs de n^2 et $2n+1$ sont : $\{-1; 1\}$

n^2 et $2n+1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ sont donc premiers entre eux.

Exercice 4 :

1) $Z = 4 + 4i\sqrt{3}$ $\quad |Z| = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2}$
$$= 8$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{Re(Z)}{|Z|} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \\[2ex] \sin\theta = \dfrac{Im(Z)}{|Z|} = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$Z = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$

2) $Z^3 = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$, avec $Z \in \mathbb{C}$

Soit $\mathcal{E}$ module des racines :

$\mathcal{E} = \sqrt[3]{|8e^{i\frac{\pi}{3}}|} = \sqrt[3]{8} = 2$

Donc : $k \in \{0 ; 1 ; 2\}$

$\theta_0 = \frac{\frac{\pi}{3}}{3} + 0 = \frac{\pi}{9}$

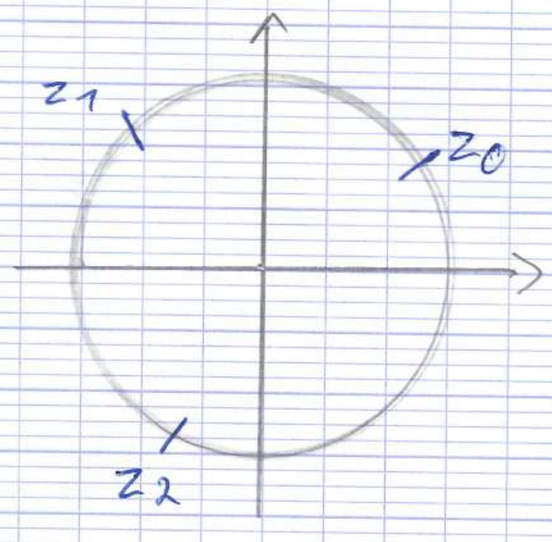
$\theta_1 = \frac{\frac{\pi}{3}}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{9}$

$\theta_2 = \frac{\frac{\pi}{3}}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{13\pi}{9}$

Donc : $S = \{z_0, z_1, z_2\}$

$= \{2e^{i\frac{\pi}{9}}, 2e^{i\frac{7\pi}{9}}, 2e^{i\frac{13\pi}{9}}\}$

3)



Exercice 5 :

1) $Z^5 = 1 \Rightarrow Z_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$

$k \in \{0; 1; \dots; n-1\} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

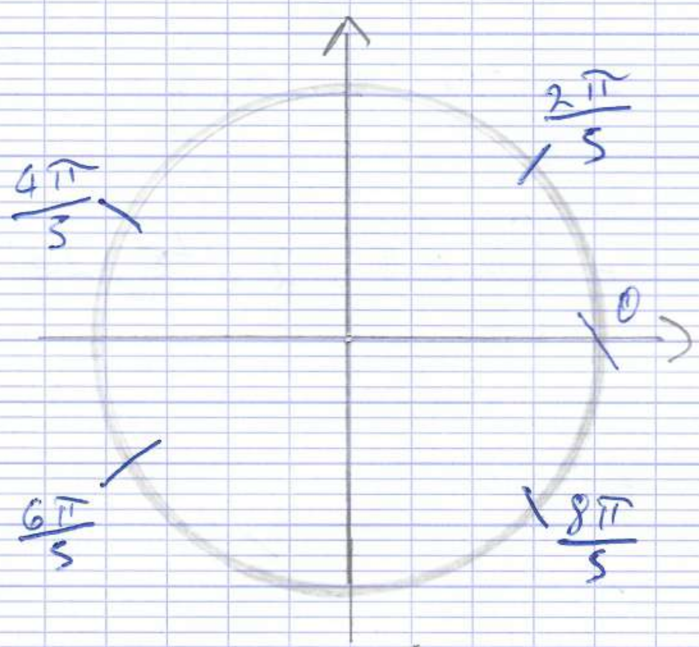
$Z_0 = e^{\frac{2i0\pi}{5}} = e^0 = 1$

$Z_1 = e^{\frac{2i\pi}{5}} = e^{\frac{2i\pi}{5}}$

$Z_2 = e^{\frac{2i2\pi}{5}} = e^{\frac{4i\pi}{5}}$

$Z_3 = e^{\frac{2i3\pi}{5}} = e^{\frac{6i\pi}{5}}$

$Z_4 = e^{\frac{2i4\pi}{5}} = e^{\frac{8i\pi}{5}}$



2) $\varepsilon = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$

$Z_0 = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{\left(\frac{2i\pi}{5}\right)}\right)$

$Z_1 = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right) \cdot 1$

$Z_2 = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right) \cdot \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$

$Z_3 = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right) \cdot \exp\left(\frac{3i\pi}{5}\right)$

$Z_4 = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right) \cdot \exp\left(\frac{4i\pi}{5}\right)$

3) D'après l'observation des points placés sur le cercle trigonométrique (1), on peut conjecturer que la somme des Z est égale à 0.

On l'observe par le calcul :

$\sum_{i=0}^{4} \varepsilon^i = \frac{1-\varepsilon^5}{1-\varepsilon} = \varepsilon^0 = e^1 = 0$

5) $\varepsilon^{-1} = e^{\frac{-2i\pi}{5}}$ $\varepsilon^{4} = e^{\frac{8i\pi}{5}}$

$\varepsilon^{-1} = \varepsilon^{4}$ car : $\frac{-2i\pi}{5} + 2\pi = \frac{8i\pi}{5}$

et $\frac{-2\pi}{5} \equiv \frac{8\pi}{5} [2\pi]$

Et : $(\varepsilon^{-1} = \varepsilon^{4}) \Rightarrow (\varepsilon^{-2} = \varepsilon^{3})$

7) $\varepsilon + \varepsilon^{-1} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

$\varepsilon^{-1} = \overline{\varepsilon}$ donc $\varepsilon^{-2} = \overline{\varepsilon}^{2} = \overline{\varepsilon^{2}}$

Alors : $\varepsilon^{2} + \varepsilon^{-2} = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

Donc : $\alpha = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

$\beta = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

8) $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\varepsilon^{1} + \varepsilon^{-1}}{2}$

$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\varepsilon^{2} + \varepsilon^{-2}}{2}$

Exercice 6 :

1) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (3 \times (-6) - 4 \times 1) - 2 \times (2 \times (-6) - 1 \times 1) - 1 \times (2 \times 4 - 1 \times 3)$$

$$= -18 - 4 - 2(-12 - 1) - 1 \times (8 - 3)$$

$$= -22 + 26 - 5$$

$$= -1$$

Donc : $\det(M) = -1$

2) M est une matrice inversible car son déterminant n'est pas nul.

3) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (M \mid I_3)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 22 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 22 & -8 & -5 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4) $\det(M) \neq 0$, alors quelque soit a, b, c : le système admet toujours une solution unique.

5) $$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ 2x + 3y + z = b \\ x + 4y - 6z = c \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 2 & 3 & 1 & b \\ 1 & 4 & -6 & c \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & -1 & 3 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & c-a+2(b-2a) \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = a \\ -y + 3z = b - 2a \\ z = c + 2b - 5a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+4a-2b=0 \\ -y-13a+5b+3c=0 \\ z=-5a+2b+c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-26a+10b+6c+4a-2b=0 \\ y=-13a+5b+3c \\ z=-5a+2b+c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=22a-8b+6c \\ y=-13a+5b+3c \\ z=-5a+2b+c \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+3y+z=1 \\ x+4y-6z=1 \end{cases}$$

On connait les valeurs de x, y, z (déterminés dans la question 5)

Donc : $$\begin{cases} x=22-8-5 \\ y=-13+5+3 \\ z=1+2-5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=-5 \\ z=-2 \end{cases}$$

Exercice 7 :

1). $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 40 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$$

2) On peut déduire une forme A^n $\forall n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & b \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Si $n > 1$: $b = (A_{3,1})^{n-1} + (A_{3,3})^{n-1}$
Sinon : $b = 1$

3) Initialisation :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 & 1^1 + 3^1 \\ 0 & (-2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que A^n est vrai.

Montrons que A^{n+1} est vraie :

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1^{n+1} & 0 & (A_{(3,1)})^n + (A_{(3,3)})^n \\ 0 & (-2)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (A_{(1,3)})^{n-1} + (A_{(3,3)})^{n-1} \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & (A_{(1,3)})^{n} + (A_{(3,3)})^{n} \\ 0 & (-2)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

L'hérédité est vraie : CQFD

Exercice 8 : $P(X) = X^5 + 2X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 1$
On remarque que $X = -1$ est une racine du polynôme car $P(-1) = 0$
On peut donc factoriser le polynôme par $(X+1)$ dans $\mathbb{R}[X]$

$$\begin{array}{r|l} X^5 + 2X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 1 & (X+1) \\ \hline -(X^5 + X^4) \qquad\qquad\qquad\qquad & X^4 + X^3 - X - 1 \\ \hline X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 1 & \\ -(X^4 + X^3) \qquad\qquad\quad & \\ \hline -X^2 - 2X - 1 & \\ -(-X^2 - X) \qquad & \\ \hline -X - 1 & \\ -(-X - 1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Alors : $P(X) = (X^4 + X^3 - X - 1)(X+1)$

On refactoriser par $(X+1)$:

$$
\begin{array}{r|l}
X^4+X^3-X-1 & (X+1) \\ \cline{2-2}
-(X^4+X^3) & X^3-1 \\ \cline{1-1}
-X-1 & \\
-(-X-1) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Alors : $P(X) = (X^3-1)(X+1)^2$

On refactorise cette fois par $(X-1)$

$$
\begin{array}{r|l}
X^3-1 & (X-1) \\ \cline{2-2}
-(X^3-X^2) & X^2+X+1 \\ \cline{1-1}
X^2-1 & \\
-(X^2-X) & \\ \cline{1-1}
X-1 & \\
-(X-1) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Donc : $P(X) = (X-1)(X+1)^2(X^2+X+1)$

Dans $\mathbb{C}[X]$: X^2+X+1

$\Delta = b^2+4ac = 1-4\times1\times1 = -3$

$\Delta < 0$, alors : $x_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$

Donc : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2} \\ x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2} \end{cases}$

16/16

Exercice 9 :

1) $\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+2} = \frac{5}{4} U_{n+1} - \frac{3}{8} U_n \end{cases}$

$U_{n+2} - \frac{5}{4} U_{n+1} + \frac{3}{8} U_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$x^2 - \frac{5}{4} x + \frac{3}{8} = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{5}{4}\right)^2 - 4 \times 1 \times \frac{3}{8}$

$= \frac{25}{16} - \frac{12}{8} = \frac{1}{16}$

$x_1 = \dfrac{\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{1}{16}}}{2} = \dfrac{\frac{5}{4} - \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{2}$

$x_2 = \dfrac{\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{1}{16}}}{2} = \frac{3}{4}$

$U_n = \alpha \left(\frac{3}{4}\right)^n + n\,\beta \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$\begin{cases} U_0 = 6 = \alpha^0 + \beta^0 = 6 \\ U_1 = 4 = \alpha\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \beta\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 4 \end{cases}$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$