RUNSER Laure — AAL TD 05 - Algo de Glushkov et de Thompson — 16.10.2020

Exercice 1

1) $e_1 = (a + ba + bba)^*$

$e_1' = (a_1 + b_2 a_3 + b_4 b_5 a_6)^*$

état	successeurs
0	1, 2, 4, fin
1	1, 2, 4, fin
2	3
3	1, 2, 4, fin
4	5
5	6
6	1, 2, 4, fin

états	a	b
⇄ 0	1	2,4
← 1	1	2,4
2	3	\
← 3	1	2,4
4	\	5
5	6	\
← 6	1	2,4

2) $e_2 = (a + ba + bba)^* (\varepsilon + b + bb)$

$e_2' = (a_1 + b_2 a_3 + b_4 b_5 a_6)^* (\varepsilon + b_7 + b_8 b_9)$

états	successeurs
0	a_1, b_2, b_4, b_7, b_8, fin
1	- - - - - - - - - - - -
2	a_3
3	- - - - - - - - - - - -
4	b_5
5	a_6
6	- - - - - - - - - - - -
7	fin
8	b_9
9	fin

état	a	b
⇄ 0	1	2, 4, 7, 8
← 1	1	2, 4, 7, 8
2	3	\
← 3	1	2, 4, 7, 8
4	\	5
5	6	\
← 6	1	2, 4, 7, 8
← 7	\	\
8	\	9
← 9	\	\

7) $e_7 = b(ab)^* + (ba)^* b$ — **en simplifiant :** $e_7 = b(ab)^*$ puis Glushkov

$e_7' = b_1 (a_2 b_3)^* + (b_4 a_5)^* b_6$

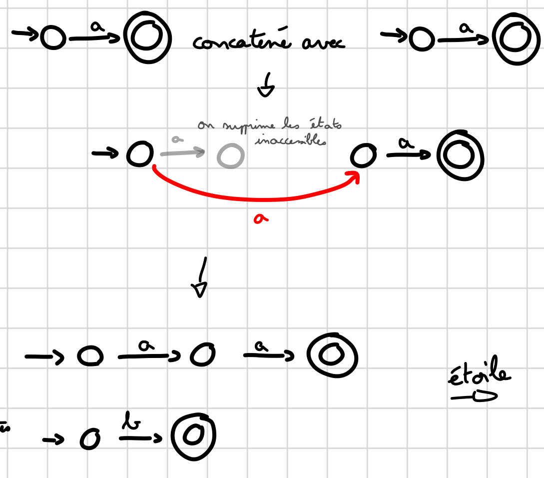
état	successeurs
0	b_1, b_4, b_6
1	a_2, fin
2	b_3
3	a_2, fin
4	a_5
5	b_4, b_6
6	fin

états	a	b
→ 0	\	1, 4, 6
← 1	2	\
2	\	3
← 3	2	\
4	5	\
5	\	4,6
← 6	\	\

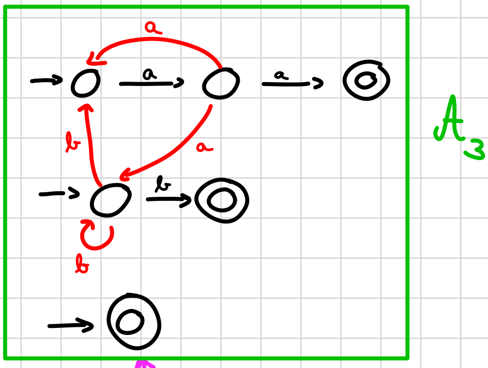
3) Avec une version alternative de Thompson : utiliser les constructions des propriétés de clôture

PAS AU PARTIEL

$e_3 = (aa + b)^*$



(concaténatO : si q_0 terminal alors les états initiaux du 2^e automate restent initiaux)

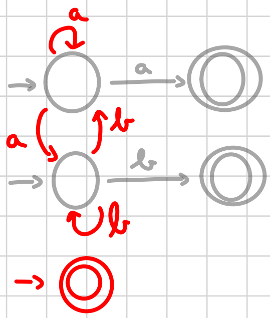


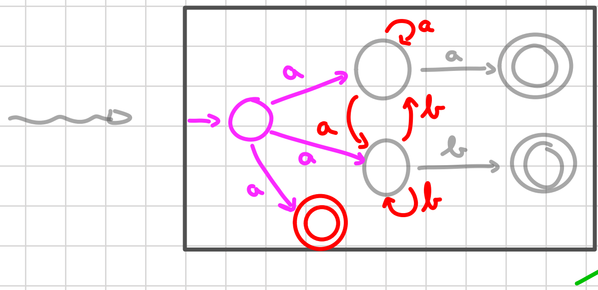
pour $*$, il faut aussi accepter le mot vide

Autre exemple : $e = a(a+b)^*$

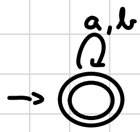
$(a+b)$

$(a+b)^*$



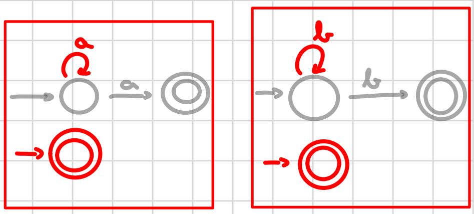


Autre exemple : $e_6 = (a^* b^*)^*$

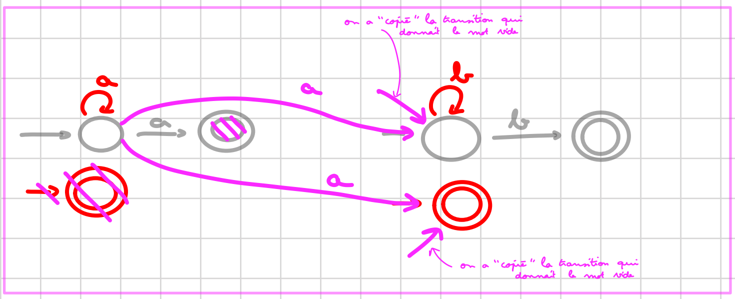


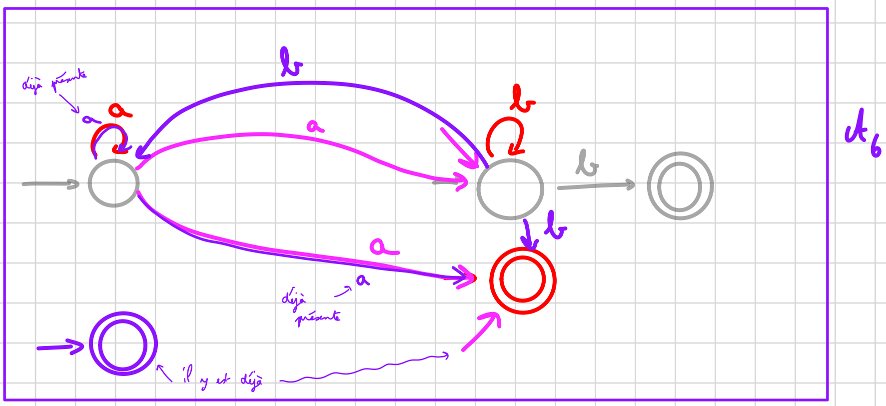
de façon simple

a^*



b^*





Exercice 6

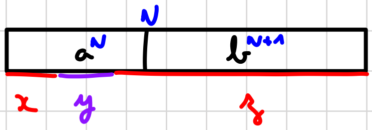
1) $\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ rationnel, $e = a^* b^*$

2) $\{a^m b^n \mid m < n\}$ pas rationnel

Par l'absurde.

Si $\mathcal{L} \in Rec$, le lemme de l'étoile donne N. On choisit $u = a^N b^{N+1} \in \mathcal{L}$ et $|u| > N$

Le lemme donne $u = xyz$ avec $y \neq \varepsilon$ et $|xy| \leq N$



Alors $y = a^i$ pour $0 < i \leq N$ car $|xy| \leq N$

Or pour $k = 2$: $xy^2z = a^{N+i} b^{N+1} \notin \mathcal{L}$ car $N + i \geqslant N + 1$

CONTRADICTION donc $\mathcal{L} \notin Rec$.

7) $\{a^m b^n \mid m \geqslant n\}$ presque le complémentaire de 2) $= \{a^m b^n \mid m \geqslant n\} \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{tous les mots qui ne sont} \\ \text{pas de la forme } a^* b^* \end{array} \right\}$

$\overline{\mathcal{L}_7} \cap \mathcal{L}(a^* b^*) = \mathcal{L}_2$ $\leftarrow \notin Rec$

$\overline{\mathcal{L}_2} \cap \mathcal{L}(a^* b^*) = \mathcal{L}_7$

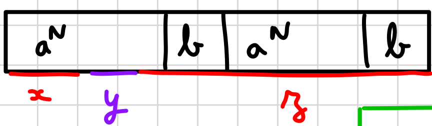
Si $\mathcal{L}_7 \in Rec$ Alors $\overline{\mathcal{L}_7}$ aussi et $\overline{\mathcal{L}_7} \cap \mathcal{L}(a^* b^*) \in Rec$ donc $\mathcal{L}_2 \in Rec$

CONTRADICTION

16) $\{u^2 \mid u \in \{a, b\}^*\}$

Si $\mathcal{L}_{16} \in Rec$, le lemme de l'étoile donne N. On choisit $v = \underbrace{a^N b}_{u} \underbrace{a^N b}_{u} \in \mathcal{L}, |v| \geqslant N$

Le lemme donne $v = xyz$ tq $\left\{ \begin{array}{l} y \neq \varepsilon \\ |xy| \leq N \end{array} \right.$



$y = a^i$ pour $0 < i \leq N$

donc $xy^2z = a^{N+i} b a^N b \notin \mathcal{L}$ CONTRADICTION donc $\mathcal{L} \notin Rec$

Ex 2

× 3

$(aa)^*$ ✓ 4

× 5

× 6

× 7

× 8

× 9

✓ 10 $\leftarrow$ langage fini donc Rat

✓ 12

× 13 ✗

× 14 ✗

× 16 ✗