RUNSER Laure

Étude des mb entiers

On note N les enties naturels (>0). Z les enties (relatifs).

Di a ∈ Z, on note la l sa relem abolue.

I/Divisibilité

 $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathcal{A}}$ Soient a, $\mathcal{B} \in \mathbb{Z}$. Si il existe $\mathcal{A} \in \mathbb{Z}$ tel qua $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ a

Ex: 418 mais 518

Alors on dit que:

* a divise b

* a est un diviseur de b

* b et un multiple de a

* alb

Prop: Soient a, b, c & Z

1) 110

2) 2/0

3) a/a

4) Si all at ble also ale Ctransitivité)

5) Si all et bla alos lal = 161 => a = +-b

6) Si all de alc, Vk, l E Z alos al (kb+lc)

def: Un nombre penie et un entier naturel qui a exactement l'diviseeurs positifs (1 et lui-même).

1 m'est PAS premier

Ex: l, 3, 5 ... sont promius

24 m'est pas premier car 6/24.

II/Division endidienne

Prop: Soint a, b EN, b # 0

Il existe un unique entier maturel q aspelé quotient de a par l, et un unique entir maturel r appelé rete de la division de a par l , telo pur.

Demonstration

* Existens . Di b > a , on pose q = 0 et r = a. Alas a = 0.b + a et a < b

· <u>Nimon</u>, on por $q = \max\{k \in \mathbb{N}, kb \leq a\}$ remamble fini

Par construction, $bq \leq a \leq b(q+1)$

* Micité: Noient q', r' qui salisfont les mêmes conditions.

On part supon a & a'

done on a O & r'-r < b

> On b1 n'-n

=> 1/-1 = 0 donc q'-q=0 ausni

Done (q, n) = (q', n')

Remerque: On peut étendre la division enclisierne au cos où a et/on le sont régalife

A de rede doit tipe être Positif sinon (q, a) n'est plus unique.

Ex: 11 = 3 - 3 + 2 -11 = -4 x 3 + 1

Remarque On a que bla soi le reste de la división de a par le est 0.

III / Aplication: écriture en las N

Ex: on lase 10 - 213 = 2 × 10° + 1 × 10' + 3 × 10°

Théorine : Soit N > 2 un entier.

Alors tout entier mateual ma 'écuit de façon surique

Demonstration

On fait la division de m par N: m = Nq. + n.

On poer in = 1.

Di q = 0 on s'arrit

Sinon on divise que par N: q0 = Nq. + 1.

et on pos in = na

Par construction: m=Nq.+i.

Si q = a on arrête.

Sinon on divise qu par N ...

Comme qo, qa, ... sont positifo et sont de plus en plus petito, au bout d'un moment on avrive à 0.

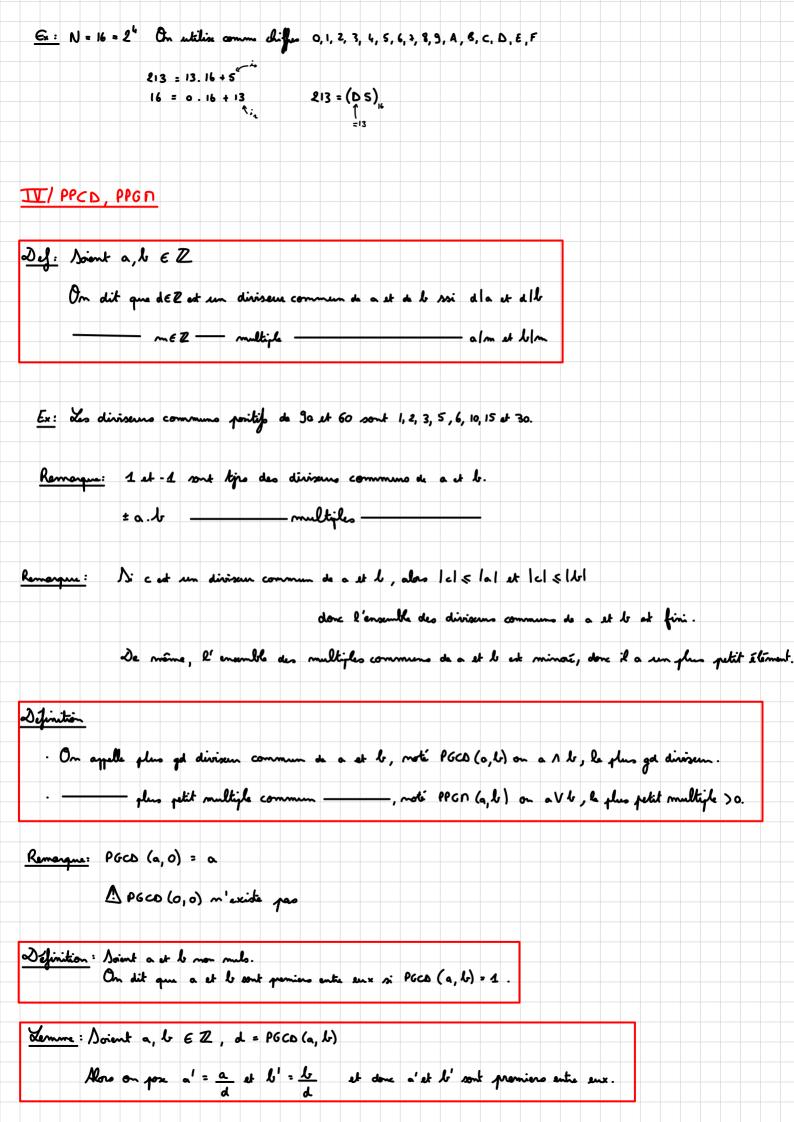
On peut monter que cette écriture est unique de la même manière que pour la division enclidionne.

Ex:
Si N = 10, les (io, ia, ..., ik) sont jute les chiffres de l'écriture de m.

Remarque En général, on appelle ça écriture de m en lan N et on note (i, i, ... i,)

Ex: N=2 213 = 106.2+1
106 = 53.2+1
53 = 26.2+1

26 = 13.2+0 3 = 1.2+1 13 = 6.2+1 1 = 0.2+1 6 = 3.2+0 213 = (11010111)



Dist d'un divisur commun positif de a' et li'. Alas d' a' donc d' d a	Den							-	_																			-	
Alas d'la' donc d'dla De même d'dlb. Donc d'd est un divison commun de a et b. Comme d' > 4 , d'd > d Pais per lighter d et le plus gle divison commun. Donc d' = 1. Donc a' et l' sont premiere este sur. V/Paleul du PGCD, théorème de Boyent Semme petique per calcula le PGCD: Asient a, le 6 N mon mule et a le rete en la division de a per le Alas PGCD(a, b) = PGCD(a, b). Noire (q, a) le Goullat de la division enclétieme de a per le, et dem divison commun de a et le. Donc d'a = a - leq De même si d'le et d'q alore d'a = leq + a		monst	iation																										
Alas d'la' donc d'dla De même d'dlb. Donc d'd est un divison commun de a et b. Comme d' > 4, d' d > d Pais per ligation de et le plus gle divison commun. Done d' = 1. Done d' = 1. Done a' et l' sont premiere este sur. V/Palcul du PGCD, théorème de Brogent Semme petique per calcula le PGCD: Asient a, le 6 N mon mule et a le rete de la division de a per le. Alas PGCD(a, b) = PGCD(a, b). «Démontiation: Noit (q, a) le Goullat de la division auditions de a per le, et de un divison commun de a et le. Done d' = a - leq De même si delle et de qualro de la : leq + a	Λ.,																												
Done d'd est un diviseur commun de a et b. Conne d' > d , d' d > d Dais par legalise d et le plus get diviseur commun. Done d' = 1. Done a' et l' sont preview este eur. T/Esleul du PGCD, théorème de Bérgut Semme patique pour colculu le PGCO: Noint a, b & N non mule et a le rete de la division de a par le Alors PGCO(a, b) = PGCD(a, b). D'montation: Noit (q, a) le contest de la division enclisioner de a par le, et de un diviseur commun de a et le. Done d' a - a - b q De même si delle et d q alors d a = b q + a	انورا	r d.	un (dinise	m (~~~		لمع	ej	de	a'	此	<i>ኒ</i> ታ .																
Done d'd est un diviseur commun de a et b. Conne d' > d , d' d > d Dais par legalise d et le plus get diviseur commun. Done d' = 1. Done a' et l' sont preview este eur. T/Esleul du PGCD, théorème de Bérgut Semme patique pour colculu le PGCO: Noint a, b & N non mule et a le rete de la division de a par le Alors PGCO(a, b) = PGCD(a, b). D'montation: Noit (q, a) le contest de la division enclisioner de a par le, et de un diviseur commun de a et le. Done d' a - a - b q De même si delle et d q alors d a = b q + a	AQ.	n.a	م / ا م	, ,	احد	a 1 d	1.1.					λ.	<u>~</u>		4	ایما	b .												
Done d'd est un diviseur commun de a et b. Conne d' > d , d' d > d Dais par legalise d et le plus get diviseur commun. Done d' = 1. Done a' et l' sont preview este eur. T/Esleul du PGCD, théorème de Bérgut Semme patique pour colculu le PGCO: Noint a, b & N non mule et a le rete de la division de a par le Alors PGCO(a, b) = PGCD(a, b). D'montation: Noit (q, a) le contest de la division enclisioner de a par le, et de un diviseur commun de a et le. Done d' a - a - b q De même si delle et d q alors d a = b q + a							, ,	ς =	a'd				,			,													
Comme d' \geq 1, d' d \geq d' divisour commun. Donc d' = 1. Donc a' st b' sont previous entre sur. T/Bleul du PGCD, théorine de Birgent Movint a, b & N mon mule et a le alivision de a par le Alan PGCD(a, b) = PGCD(a, b). Novint a, b & N mon mule et a le acti de le division de a par le Alan PGCD(a, b) = PGCD(a, b). Novint (a, a) le coultant de la division enclidisons de a par le, et d' en divisour commun de a et le. Donc d' 1 = a - leq De nome si d' b' et d' q alan d' a = leq +1																													
Comme d' \geq 1, d' d \geq d. Thair par hyphise d at le plus get diviseur commun. Done d' = 1. Done a' st l' sont preview ente sur. T/Calcul du PGCD, théorine de Bérgent Movint a, le & N non mule et a le activisée de a jan le Alas PGCD(a, b) = PGCD(a, b). Novint a, le & N non mule et a le activisée de a jan le Alas PGCD(a, b) = PGCD(a, b). Novint (a, a) le coultant de la division enclidione de a jan le, et de un diviseur commun de a et le. Done d a = a - leq De nome si d b et d q alas d a = leq + a	2																												
Nair fan hyphias d eit le plus get diviseur commun. Done d'= 1. Done a' et l' sont preview ente ente. V/Edeul du PGCD, théorème de Birgont Memme pretique pour calcula le PGCD: Novent a, lo & N mon male et a le reste de la division de a par lo. Alone PGCD(a, b) = PGCD(a, b). Démontiation: Noit (q, a) le constant de la división enclidisme de a par lo, et d un diviseur commun de a et lo. Done d a = a - lo q De même si d b et d q calone d a = brq + a	2	صد	9,9	est	un i	divis	em	دهم	~~	un	de	•	sk	<i>ኤ</i> .															
Nair fan hyphias d eit le plus get diviseur commun. Done d'= 1. Done a' et l' sont preview ente ente. V/Edeul du PGCD, théorème de Birgont Memme pretique pour calcula le PGCD: Novent a, lo & N mon male et a le reste de la division de a par lo. Alone PGCD(a, b) = PGCD(a, b). Démontiation: Noit (q, a) le constant de la división enclidisme de a par lo, et d un diviseur commun de a et lo. Done d a = a - lo q De même si d b et d q calone d a = brq + a	م	hanne	4'	. 4		اه' اه	> 4																						
Done d'= 1. Done a' et l' sont premiere ente eur. I / Calcul du PGCD, Mécrène de Régent Semme protique pour calculu le PGCD: Noient a, le EN non muls et a la rete de la clivision de a par le Alas PGCD(a, b) = PGCD(a, b). Doint (q, a) le coultat de la clivision enclidisme de a par le, et d'un clivisen commen de a et le. Done d'= 1. Done d'= 1. Done d'= 1.																													
Done d'= 1. Done a' et l' sont premiere ente eur. I / Calcul du PGCD, Mécrène de Régent Semme protique pour calculu le PGCD: Noient a, le EN non muls et a la rete de la clivision de a par le Alas PGCD(a, b) = PGCD(a, b). Doint (q, a) le coultat de la clivision enclidisme de a par le, et d'un clivisen commen de a et le. Done d'= 1. Done d'= 1. Done d'= 1.	Jl.	ہم س	n hy	peken	d	cot	l.	ple		gd	نله	vise	m	com	mı	~ .													
Donc a' st l' sont gremien ente ens. I / Calcul du PGCD, théorème de Bérgent Element polique pour calculu le PGCD: Avient a, le & N mon mulo et a le rete de la clinion de a par le. Alors PGCD(a, b) = PGCD(x, b). Démontiation: Noit (q, x) le constat de la division enclidiente de a par le, et de un diviseur commen de a et le. Donc d x = a - leq De même si cl le et d q alors d a = leq + x										•																			
**Emma pratique pour calculu la PGCO: Noient a, br & N mon mulo et n la reste de la division de a per le. Alors PGCD(a, b) = PGCD(n, b). Démontration: Noit (q, n) la résultant de la division enclidiens de a per le, et d em diviseur commun de a et le. Done d n = a - b q De même ni d br et d q alors d a = b q + n	60 0	nc d	- 1	•																									
**Emma pratique pour calculu la PGCO: Noient a, br & N mon mulo et n la reste de la division de a per lo. Alors PGCD(a, b) = PGCD(n, b). Démontration: Noit (q, n) la coullant de la division enclidiens de a per lo, et de sen diviseur commen de a et lo. Done de l'n = a - b q De prême ni de lo et de l'q alors de l'a = b q + n	-Jo-	ر م'	at l	, son	* _~	emie		-te	Lux																				
Semme protique pour calcular la PGCO: Doient a, le E N mon mule et a la reste de la división de a per le. Alors PGCO(a, b) = PGCD(a, b). admonstration: Doit (q, a) le constat de la división enclidismen de a per le, et de un diviseur commun de a et le. adonc de la = a - leq ale même si de le et de la alors de la = leq +s					7																								
Semme protique pour calcular la PGCO: Doient a, le E N mon mule et a la reste de la división de a per le. Alors PGCO(a, b) = PGCD(a, b). admonstration: Doit (q, a) le constat de la división enclidismen de a per le, et de un diviseur commun de a et le. adonc de la = a - leq ale même si de le et de la alors de la = leq +s	_ 150) 0				0			.																				
Doient a, b & N mon molo et n le nete de la division de a per le Alans PGCD (a, b) = PGCD (n, b). a) Emontration: Doit (q, n) le contrat de la division enclidienne de a per le, et d'un diviseur commun de a et le. Donc de l'n = a - le q a) Le même si de le et de la alons de la = leq + n	<u>V/Col</u>	cul	du f	GCD	<u>, A</u>	lioù	me o	<u>la. 1</u>	Serge	nt.																			
Doient a, b & N mon molo et n le nete de la division de a per le Alans PGCD (a, b) = PGCD (n, b). a) Emontration: Doit (q, n) le contrat de la division enclidienne de a per le, et d'un diviseur commun de a et le. Donc de l'n = a - le q a) Le même si de le et de la alons de la = leq + n																													
Doient a, b & N mon mole et n le nete de la division de a per le Alars PGCD (a, b) = PGCD (n, b). a) émontation: Doit (q, n) le contact de la division enclidienne de a per le, et d'un diviseur commun de a et le. Donc de l'n = a - le q a) e même si de le de l'a alors de l'a = leq + n	9																												
Donatation: Doit (9,2) le coultat de la division enclidionne de a par le, et d'un diviseur commun de a et le. Dona d'en = a - le q De même si d'elle et d'eg alors d'ea = leq +1	Remm		tig	por	calc	ulen	le	PGc	: <u>۵</u>																				
Done de la = a-leq De même si de le de																													
Done de la = a-leq De même si de le de										L ,	neute	gla	6	نه	visie	n da		100	J b.	AR	1 00	PGc	ه) ۵	, &)	= f) (6C)	ر) ۵	رل , ل	١.
Done de la = a-leq De même si de le de										L ,	مصلة	, da	. 6	di	visia	n da	•	100	J.	AR	no	PGc	ه) ۵	, ሁ)	e f) GC	ر) ۵	·, &)	١.
Done de la = a-leq De même si delb et delq alas dela = leq +a	•	Soien	لره ۱	bε						L .	redē	. da	. 6	نه	visie	n da	•	100	L.	AQ.	gra	PGc	۵(۵	,	= f) (GC)	ر) ۵	., 6)	١.
Done de la = a-leq De même si delb et delq alas dela = leq +a	•	Soien	لره ۱	bε						.	^edē	, da	. 6	di	visie	da	•	120	J.	Al	no.	PGC	D (a	, &)	= f) GC	ر) ۵	·, &)).
De même si all et alg alos dla = lg +n	کافسه	Soin La	tion:	b e	N ^	non ,	mels	Ak.	٨																			., . -)).
De même si all et alg alos dla = lg +n	کافسه	Soin La	tion:	b e	N ^	non ,	mels	Ak.	٨																			د , د -)).
	<u>2)6ma</u>	Noien	tion:	l e	nlta	non ,	mels	Ak.	٨																			., b)).
Done l'ensemble des diviseurs communs de a et le et ágel à l'ensemble des diviseurs commun de le et s.	<u>Démo</u>	Noien	tion:	b e L ses	mlta.	ron .	mulo.	st dini	2.0	•	.dis	lien	~															., 6)).
«Vonc x ensemble des diviseurs communs de a et le altégal a l'ensemble des diverseurs commun de le et 1.	<u>Démo</u>	Noien	tion:	b e L ses	mlta.	ron .	mulo.	st dini	2.0	•	.dis	lien	~															., 6)).
	<u>Dómo</u> D 2	Noien Noit One le min	tion: q,n): d.l. me si	L xx. = a -	mlta .l.q	t de	nulo	at dirii	n Sision	e. I a	rdid = d	lien	m d	la o	. 4*	ر مار ،	ek	۵.	un	dini	·sem	cov		- d	le a	et	.		
	<u>Dómo</u> D 2	Noien Noit One le min	tion: q,n): d.l. me si	L xx. = a -	mlta .l.q	t de	nulo	at dirii	n Sision	e. I a	rdid = d	lien	m d	la o	. 4*	ر مار ،	ek	۵.	un	dini	·sem	cov		- d	le a	et	.		