# Outils Logiques Groupe 3 & 4 – DM 3

Chaitanya Leena Subramaniam

à rendre avant le 1 mars 2021 par email à chaitanya@irif.fr
Les exercices étoilés « $\star - \star\star\star$ » sont facultatifs.

On notera les formules propositionnelles par $A, B, C \ldots$ et les variables propositionnelles par $x, y, z, \ldots$ On note $V$ l'ensemble des variables propositionnelles et $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ l'ensemble des valeurs de vérité.

**Définition.** Soit $v\colon V \longrightarrow \mathbb{B}$ une affectation, $x \in V$ une variable, et $b \in \mathbb{B}$ une valeur de vérité. On écrit $v[b/x]$ pour l'affectation définie comme suit, qu'on appelle la ***mise à jour de** $v$ **avec** $b$ **pour** $x$.*

$$\begin{aligned} v[b/x]\colon V &\longrightarrow \mathbb{B} \\ x &\mapsto b \\ y &\mapsto v(y) \text{ pour tout } y \neq x \end{aligned}$$

## Exercice 0 (Substitution)

($\star$ – Vous pouvez utiliser le résultat de cet exercice sans le démontrer.)

Soit $x \in V$ une variable, $B$ une formule et $v\colon V \longrightarrow \mathbb{B}$ une affectation. Soit $b = [\![B]\!]v$ dans $\mathbb{B}$. Montrer que :

(1) On a $[\![x]\!](v[b/x]) = [\![x[B/x]]\!]v$ dans $\mathbb{B}$.

(2) Pour toute variable $y \neq x$, on a $[\![y]\!](v[b/x]) = [\![y[B/x]]\!]v$ dans $\mathbb{B}$.

(3) Pour toute formule $A$, si $[\![A]\!](v[b/x]) = [\![A[B/x]]\!]v$, alors on a $[\![\neg A]\!](v[b/x]) = [\![(\neg A)[B/x]]\!]v$ dans $\mathbb{B}$.

(4) Pour toutes formules $A_1, A_2$, si $[\![A_i]\!](v[b/x]) = [\![A_i[B/x]]\!]v$ pour $i = 1, 2$, alors on a
   (a) $[\![A_1 \vee A_2]\!](v[b/x]) = [\![(A_1 \vee A_2)[B/x]]\!]v$ et
   (b) $[\![A_1 \wedge A_2]\!](v[b/x]) = [\![(A_1 \wedge A_2)[B/x]]\!]v$

   dans $\mathbb{B}$.

En déduire que pour toute formule $A$, on a $[\![A]\!](v[b/x]) = [\![A[B/x]]\!]v$. (Indice : faire une récurrence sur la taille de la formule $A$).

### Solution

(1) Par définition de $v[b/x]$, on a $[\![x]\!](v[b/x]) = v[b/x](x) = b$ et par définition de la substitution, on a $[\![x[B/x]]\!]v = [\![B]\!]v = b$.

(2) Par définition de $v[b/x]$, on a $[\![y]\!](v[b/x]) = v(y)$ et par définition de la substitution, on a $[\![y[B/x]]\!]v = [\![y]\!]v = v(y)$.

(3) Supposons $[\![A]\!](v[b/x]) = [\![A[B/x]]\!]v$. Alors on a :

$$\begin{aligned} [\![\neg A]\!](v[b/x]) &= NOT([\![A]\!](v[b/x])) && \text{(par déf. de } [\![-]\!]) \\ &= NOT([\![A[B/x]]\!]v) && \text{(par supposition)} \\ &= [\![\neg(A[B/x])]\!]v && \text{(par déf. de } [\![-]\!]) \\ &= [\![(\neg A)[B/x]]\!]v && \text{(par déf. de la substitution).} \end{aligned}$$

(4) Supposons $[\![A_i]\!](v[b/x]) = [\![A_i[B/x]]\!]v$ pour $i = 1, 2$. Alors on a :

(a)

$$\begin{aligned}
[\![A_1 \vee A_2]\!](v[b/x]) &= OR([\![A_1]\!](v[b/x]), [\![A_2]\!](v[b/x])) && \text{(par déf. de } [\![-]\!]) \\
&= OR([\![A_1[B/x]]\!]v, [\![A_2[B/x]]\!]v) && \text{(par supposition)} \\
&= [\![(A_1[B/x]) \vee (A_2[B/x])]\!]v && \text{(par déf. de } [\![-]\!]) \\
&= [\![(A_1 \vee A_2)[B/x]]\!]v && \text{(par déf. de la substitution).}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
[\![A_1 \wedge A_2]\!](v[b/x]) &= AND([\![A_1]\!](v[b/x]), [\![A_2]\!](v[b/x])) && \text{(par déf. de } [\![-]\!]) \\
&= AND([\![A_1[B/x]]\!]v, [\![A_2[B/x]]\!]v) && \text{(par supposition)} \\
&= [\![(A_1[B/x]) \wedge (A_2[B/x])]\!]v && \text{(par déf. de } [\![-]\!]) \\
&= [\![(A_1 \wedge A_2)[B/x]]\!]v && \text{(par déf. de la substitution).}
\end{aligned}$$

Montrons que pour toute formule $A$, on a $[\![A]\!](v[b/x]) = [\![A[B/x]]\!]v$. On fait une récurrence sur la taille de $A$.

- Le cas de base est celle où $A$ est une variable (et donc de taille 1). On conclut grâce aux points (1) et (2) précédents.
- Il y a trois cas d'induction, où à chaque fois l'hypothèse d'induction nous donne le résultat pour toute formule de taille strictement plus petite que $A$ :
  - Dans le premier cas, $A = \neg B$. Comme $B$ est de taille strictement plus petite que $A$, on conclut grâce à l'hypothèse d'induction et au point (3) précédent.
  - Dans le deuxième cas, $A = A_1 \vee A_2$. Comme $A_1$ et $A_2$ sont de taille strictement plus petite que $A$, on conclut grâce à l'hypothèse d'induction et au point (4.a) précédent.
  - Dans le troisième cas, $A = A_1 \wedge A_2$. Comme $A_1$ et $A_2$ sont de taille strictement plus petite que $A$, on conclut grâce à l'hypothèse d'induction et au point (4.b) précédent.

## Exercice 1 (Implication)

Soit $A, B$ des formules propositionnelles. Introduisons la notation suivante : on écrit $A \Rightarrow B$ (dit « $A$ implique $B$ ») pour la formule $B \vee \neg A$. On écrit $A \Leftrightarrow B$ pour la formule $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

(1) Calculer la table de vérité de $x \Rightarrow y$.

(2) Calculer la table de vérité de $x \Leftrightarrow y$.

(3) Calculer la table de vérité de $(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$. Qu'observez-vous ?

### Solution

(1) Par définition, $x \Rightarrow y = y \vee \neg x$.

| $x$ | $y$ | $\neg x$ | $y \vee \neg x$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |

(2) Par définition $x \Leftrightarrow y = (y \vee \neg x) \wedge (x \vee \neg y)$.

| $x$ | $y$ | $\neg x$ | $\neg y$ | $y \vee \neg x$ | $x \vee \neg y$ | $x \Leftrightarrow y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

(3)

| $x$ | $y$ | $\neg x$ | $\neg y$ | $x \wedge y$ | $\neg x \wedge \neg y$ | $(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

On observe que les variables, ainsi que les dernières colonnes des deux tables sont identiques, donc on a que les formules $x \Leftrightarrow y$ et $(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$ sont équivalentes.

### Exercice 2 (Validité)

Lesquelles des formules suivantes sont valides ? (Indice : calculer la table de vérité pour chacune.)

(1) $x \Rightarrow (x \vee y)$

(2) $x \Rightarrow (x \wedge y)$

(3) $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$

(4) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow x$

(5) $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x)$

(6) $x \vee (x \Rightarrow y)$

Montrer que si $A, B$ sont des formules telles que $x, y \notin var(A)$ et $x, y \notin var(B)$, alors pour chacune des formules précédentes $C$, si $C$ est valide, alors $C[A/x][B/y]$ est valide. (Indice : utiliser Exercice 0).

#### Solution

1,3,5,6 sont valides.
Soit $C$ une formule valide. Pour toute affectation $v \colon V \longrightarrow \mathbb{B}$, on a :

$$\begin{aligned}
[\![C[A/x][B/y]]\!]v &= [\![C[A/x]]\!](v[[\![B]\!]v/y]) \\
&= [\![C]\!]\ (v[[\![B]\!]v/y]\ [[\![A]\!](v[[\![B]\!]v/y])/x]) \\
&= 1 && \text{(car } C \text{ est valide).}
\end{aligned}$$

Donc $C[A/x][B/y]$ est valide.

### Exercice 3 (Équivalence logique)

Deux formules $A, B$ sont **équivalentes** (noté $A \equiv B$) si pour toute affectation $v \colon V \longrightarrow \mathbb{B}$, on a $[\![A]\!]v = [\![B]\!]v$ dans $\mathbb{B}$.

(1) Montrer que si $A$ et $B$ sont équivalentes, alors pour toute formule $C$,
   (a) $A[C/x]$ et $B[C/x]$ sont équivalentes,
   (b) $C[A/x]$ et $C[B/x]$ sont équivalentes.

(2) Montrer que $A$ et $B$ sont équivalentes si et seulement si $A \Leftrightarrow B$ est valide. (Indice : commencer par montrer que $x \Rightarrow x$ est valide. Puis montrer que pour $y \notin (var(A) \cup var(B))$, $(y \Rightarrow A)[B/y]$ est valide.)

#### Solution

(1) Soit $A \equiv B$, et $C$ une formule. Pour toute affectation $v \colon V \longrightarrow \mathbb{B}$, on a
   (a) $[\![A[C/x]]\!]v = [\![A]\!](v[[\![C]\!]v/x]) = [\![B]\!](v[[\![C]\!]v/x]) = [\![B[C/x]]\!]v$. Donc $A[C/x] \equiv B[C/x]$.
   (b) $[\![C[A/x]]\!] = [\![C]\!](v[[\![A]\!]v/x]) = [\![C]\!](v[[\![B]\!]v/x]) = [\![C[B/x]]\!]$. Donc $C[A/x] \equiv C[B/x]$.

(2) (a) Soit $A \equiv B$. Il faut montrer que $A \Leftrightarrow B$ est valide. D'abord, on montre $x \Rightarrow x$ valide par table de vérité. Donc, en utilisant l'Exercice 2, $(x \Rightarrow x)[A/x]$ est valide, c-à-d $A \Rightarrow A$ est valide.
   En suite, comme $A \equiv B$, en utilisant le point (1.b) précédent, on a que $(y \Rightarrow A)[A/y]$ et $(y \Rightarrow A)[B/y]$ sont équivalentes. Donc comme la première est valide, la deuxième (à savoir $B \Rightarrow A$) l'est aussi. Le même raisonnement en échangeant $B$ et $A$ montre que $A \Rightarrow B$ est valide. Donc $A \Leftrightarrow B$ est valide.

(b) Soit $A \Leftrightarrow B$ valide. Il faut montrer que $A \equiv B$. Soit $v \colon V \longrightarrow \mathbb{B}$ une affectation quelconque. Il faut donc montrer que $[\![A]\!]v = [\![B]\!]v$.

Par l'Exercice 2, on a que $A \Leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$. Donc, comme $A \Leftrightarrow B$ est valide, on a que $[\![A \Leftrightarrow B]\!]v = OR([\![A \wedge B]\!]v, [\![\neg A \wedge \neg B]\!]v) = 1$. Donc au moins l'un de $[\![A \wedge B]\!]v$ et $[\![\neg A \wedge \neg B]\!]v$ est égal à 1.

— Dans le premier cas, on a $[\![A \wedge B]\!]v = AND([\![A]\!]v, [\![B]\!]v) = 1$, donc $[\![A]\!]v = [\![B]\!]v = 1$.

— Dans le deuxième cas, on a $[\![\neg A \wedge \neg B]\!]v = AND(NOT([\![A]\!]v), NOT([\![B]\!]v)) = 1$, donc $[\![A]\!]v = [\![B]\!]v = 0$.

Donc $[\![A]\!]v = [\![B]\!]v$. On conclut que $A \equiv B$.

(a) et (b) nous permettent de conclure que $A \equiv B$ si et seulement si $A \Leftrightarrow B$ est valide.

**Remarque.** Les résultats de ce DM nous permettent de *simplifier* des formules par équivalence logique : on se permet de remplacer des formules par des formules équivalentes plus simples. Par exemple $(x \vee \neg x) \vee (x \vee y) \equiv (x \vee y)$.