Je passe les calculs car long et laborieux.
En développant on obtient donc :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^5)$$

5/ $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ à l'ordre 3

On commence par tout ramener au même dénominateur afin de simplifier la lisibilité :

$\frac{\sin(x)-x}{x\cdot\sin(x)}$ •) $x\cdot\sin(x) = x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$

$$= x^2\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)$$

$$\frac{\sin(x)-x}{x\cdot\sin(x)} = (\sin(x)-x) \times \frac{1}{x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)}$$

On pose $U = \frac{x^2}{6} + o(x^3)$

$$= (\sin(x)-x) \times \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}$$

On a donc : $\sin(x) - x \times \left(\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+U}\right)$ et on fait le DL :

$$\frac{1}{1-U} = 1 + U + U^2 + U^3 + o(U^4)$$
$$= 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{36} + \frac{x^6}{216} + o(x^7)$$

Alors : $\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1-U} = \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{36} + \frac{x^6}{216} + o(x^7)\right)$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{6} + \frac{x^2}{36} + \frac{x^4}{216} + o(x^5)$$

$$\frac{\sin(x)-x}{x\cdot\sin(x)} = (\sin(x)-x)\left(\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1-U}\right)$$