Université Paris Cité

Algorithmes en ligne (online)

CM nº7 — Mobilité (M2 IMPAIRS)

Matěj Stehlík

23/2/2024

Online contre offline

Offline Toutes les données sont disponibles dès le début.

Online Il faut décider au fur et à mesure de l'arrivée des données.

Définition

Un algorithme online A est :

- α-*compétitif* si pour toute instance I, $A(I) \leq \alpha \cdot \mathrm{OPT}(I)$;
- *asymptotiquement* α-*compétitif* si pour toute instance I, $A(I) \leq \alpha \cdot \mathrm{OPT}(I) + K$, où K est une constante.

Exemple : Vélib

Exemple

- Louer un vélib pour une journée coûte 1 euro.
- Acheter un vélo coûte 250 euros.
- Comment ne pas trop dépenser, sachant qu'un jour ou l'autre on arrêtera le vélo ?

Donnée Suite des jours : V, V, V, V, V, F

Algorithme Louer le vélo 250 fois puis l'acheter

- Cet algorithme est 2-compétitif : l'algorithme optimal décide en fonction du nombre j de jours d'utilisation du vélo.
- Si $j \leq 250$ alors online $=$ OPT.
- Si $j > 250$ alors online $= 500$ et OPT $= 250$.

Le problème des k serveurs

Donnée Un espace métrique (par exemple, le plan), le nombre k de serveurs (réparateurs mobiles)

Requête Une suite de points $v_1, v_2, v_3 \ldots$

Problème Pour chaque v_i déplacer un serveur de façon à en mettre un en v_i, en minimisant la somme des déplacements.

- Modélise la gestion d'un service d'intervention : pas de retour à la base entre les interventions.
- Si la distance entre chaque paire de points est égale, il s'agit de la politique de cache.

Le problème des k serveurs

Théorème

Un algorithme online est au mieux k-compétitif.

Théorème (Koutsoupias & Papadimitriou 1995)

L'algorithme *work function* est $(2k-1)$-compétitif.

Conjecture (Manasse et al. 1988)

Il existe un algorithme online k-compétitif.

- Prouvé pour $k = 2$.

Problème de recherche linéaire (1/4)

- Un robot commence à l’origine de l’abscisse.
- Il peut parcourir une unité de distance par unité de temps le long de l’abscisse dans les deux directions.
- Un objet a été placé quelque part sur l’abscisse.
- Le robot peut changer de direction de déplacement instantanément, mais pour qu’il puisse déterminer qu’un objet se trouve à l’emplacement x_0, il doit être physiquement présent à cet emplacement.
- Comment le robot doit-il explorer l’abscisse afin de trouver l’objet le plus rapidement possible ?

Problème de recherche linéaire (2/4)

- Supposons que l'objet ait été placé à une distance d de l'origine.
- Si le robot savait si l'objet a été placé à droite de l'origine ou à gauche de l'origine, il pourrait commencer à se déplacer dans la bonne direction, trouvant l'objet en un temps d. Il s'agit d'une solution optimale « offline ».
- Comme le robot ne sait pas dans quelle direction il doit se déplacer pour trouver l'objet, il doit explorer les deux directions.
- Cela conduit à une stratégie naturelle de type « zig-zag ».
- Au départ, le robot choisit la direction positive et marche pendant 1 unité de distance dans cette direction.

Problème de recherche linéaire (3/4)

- Si aucun objet n'est trouvé, le robot retourne à l'origine, inverse la direction et double la distance.
- Nous appelons chaque déplacement dans une direction, puis retour à l'origine, une phase, et nous commençons à compter les phases à partir de 0.
- Ces phases sont répétées jusqu'à ce que l'objet soit trouvé.
- Dans la phase i, le robot visite l'emplacement $(-2)^i$ et parcourt la distance $2 \cdot 2^i$.
- Le pire cas est celui où un objet est situé juste à l'extérieur du rayon couvert dans une phase.

Problème de recherche linéaire (4/4)

- Le robot retourne alors à l'origine, double la distance et se déplace dans la "mauvaise direction", retourne à l'origine et découvre l'objet en se déplaçant dans la "bonne direction'.
- En d'autres termes, lorsqu'un objet est à une distance $d = 2^i + \varepsilon > 2^i$ dans la direction $(-1)^i$, la distance totale parcourue est de

$$2(1 + 2 + \cdots + 2^i + 2^{i+1}) + d \leq 2 \cdot 2^{i+2} + d < 8d + d = 9d.$$

- Ainsi, cette stratégie de doublement donne un algorithme 9-compétitif pour le problème de recherche linéaire.