RUNSER Laure
21955060

OL4 : DM 4

Exercice 1

1) $(\mathbb{Q}_+, >)$ est un ordre partiel. En effet, on a bien $\forall x, y \in \mathbb{Q}_+$ si $x > y$ et $y > z$, alors $x > z$

Par contre ce n'est pas un ordre bien fondé car il existe des suites infinies décroissantes dans $\mathbb{Q}_+$, comme par exemple $1 > \frac{1}{10} > \frac{1}{100} > \dots$

3) $(\mathcal{P}(E), >)$ avec E fini est un ordre partiel. En effet, $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ si $A > B$ et $B > C$, alors $A \subset B$ et $B \subset C$ donc $A \subset C$
de plus, $A \neq B$ et $B \neq C$ donc $A \neq C$
donc $A > C$

Comme E est fini, soit n son cardinal. Alors $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini de cardinal 2^n.

Donc toute suite décroissante $X_0 > X_1 > \dots$ est de taille au plus 2^n car la relation $>$ est transitive, et que $A > B \Rightarrow A \neq B$ (donc chaque élément apparaît au maximum une seule fois dans la suite).

Donc il n'existe pas de suite infinie sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$

et donc $(\mathcal{P}(E), >)$ est un ordre bien fondé.

2) $(X^*, >_p)$ est un ordre partiel : soient $u, v, w \in X^*$

Si $u >_p v$ et $v >_p w$ alors $u = va$, $a \in X^*$ et $v = wb$, $b \in X^*$

alors $u = wba = wc$, $c \in X^*$. Comme $u \neq v$ et $v \neq w$, on a $u \neq w$.

donc $u >_p w$ et la relation $>_p$ est transitive.

Montrons qu'il s'agit d'un ordre bien fondé.

Soit la structure de Σ-algèbre suivante sur $\mathbb{N}$:

$f_\varepsilon = 0 \in \mathbb{N}$

Pour toute lettre x de X, $f_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad f_x(n) = n + 1$

Soit $\mu : T_\Sigma \to \mathbb{N}$ le morphisme associé.

Alors on a $\forall x \in X$, $\mu(xw) = \mu(w) - 1$. Donc μ envoie un mot sur son nombre de lettres.

Alors $\forall u, v \in X^*$, si $u >_p v$ on a $\mu(u) > \mu(v)$ car u est forcément de longueur supérieure à v (car $u \neq v$ et v est un préfixe de u).

On peut donc conclure que $(X^*, >_p)$ est un ordre bien fondé.

Exercice 2

1) On a la formule $F = x \Leftrightarrow ((x \Rightarrow 0) \Rightarrow 0)$

On peut remplacer n'importe quelle sous-formule de F par une formule équivalente sans changer la validité de F.

Or $x \Rightarrow 0 \equiv 0 \vee \neg x \equiv \neg x$ par identité de la disjonction

donc $F \equiv x \Leftrightarrow (\neg x \Rightarrow 0)$

De même $\neg x \Rightarrow 0 \equiv 0 \vee \neg(\neg x) \equiv 0 \vee x \equiv x$ par identité de la disjonction.

Donc $F \equiv x \Leftrightarrow x \equiv (x \Rightarrow x) \wedge (x \Rightarrow x) \equiv x \Rightarrow x$ par idempotence de la conjonction.

Donc on a $F \equiv x \Rightarrow x \equiv \neg x \vee x$

On écrit la table de vérité de $F \equiv \neg x \vee x$

x	$\neg x$	$\neg x \vee x$
0	1	1
1	0	1

car $F \equiv \neg x \vee x$

Donc $\forall v : \mathcal{V} \to \mathbb{B}$, on a $[\![\neg x \vee x]\!]_v = [\![F]\!]_v = 1$

Donc $\boxed{\text{F est valide}}$.

2) On a la formule $F = (A \Rightarrow B) \vee A$

$\equiv (B \vee \neg A) \vee A$

$\equiv (y \vee \neg x) \vee x \ [A/x][B/y]$

Donc F est valide ssi $(y \vee \neg x) \vee x \ [A/x][B/y]$ est valide, c'est-à-dire si $\forall v : \mathcal{V} \to \mathbb{B}$, $[\![(y \vee \neg x) \vee x]\!]_v = 1$

Calculons la table de vérité de $(y \vee \neg x) \vee x$

x	y	$\neg x$	$y \vee \neg x$	$(y \vee \neg x) \vee x$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

que des 1 donc $\forall v$, $[\![F]\!]_v = 1$ donc $\boxed{\text{F est valide}}$.

3) On a la formule $F = ((x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow y)) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$

On remplace par des sous-formules équivalentes :

- $y \Rightarrow z \equiv z \vee \neg y$
- $x \Rightarrow y \equiv y \vee \neg x$
- $x \Rightarrow z \equiv z \vee \neg x$

On obtient $F \equiv ((x \Rightarrow (z \vee \neg y)) \Rightarrow (y \vee \neg x)) \Rightarrow (z \vee \neg x)$

De la même façon, $(x \Rightarrow (z \vee \neg y)) \equiv (z \vee \neg y) \vee \neg x$

Et donc $((x \Rightarrow (z \vee \neg y)) \Rightarrow (y \vee \neg x))$

$\equiv ((z \vee \neg y) \vee \neg x) \Rightarrow (y \vee \neg x)$

$\equiv (y \vee \neg x) \vee \neg((z \vee \neg y) \vee \neg x)$

$\equiv (y \vee \neg x) \vee (\neg(z \vee \neg y) \wedge \neg\neg x)$ par la loi de De Morgan

$\equiv (y \vee \neg x) \vee ((\neg z \wedge \neg\neg y) \wedge x)$ par la loi de De Morgan et idempotence de la négation.

$\equiv (y \vee \neg x) \vee (\neg z \wedge y \wedge x)$ par idempotence de la négation et par associativité de la conjonction.

Donc $F \equiv ((y \vee \neg x) \vee (\neg z \wedge y \wedge x)) \Rightarrow (z \vee \neg x)$

$\equiv (z \vee \neg x) \vee \neg((y \vee \neg x) \vee (\neg z \wedge y \wedge x))$

$\equiv (z \vee \neg x) \vee (\neg(y \vee \neg x) \wedge \neg(\neg z \wedge y \wedge x))$ par la loi de De Morgan

$\equiv (z \vee \neg x) \vee ((\neg y \wedge \neg\neg x) \wedge (\neg\neg z \vee \neg y \vee \neg x))$ par la loi de De Morgan

$F \equiv (z \vee \neg x) \vee ((\neg y \wedge x) \wedge (z \vee \neg y \vee \neg x))$ par idempotence de la négation.

$F \equiv A \vee (B \wedge C)$

On écrit la table de vérité de cette formule

x	y	z	$\neg x$	$\neg y$	$\neg y \wedge x = B$	$z \vee \neg y \vee \neg x = C$	$B \wedge C$	$z \vee \neg x = A$	$A \vee (B \wedge C) = F$
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	$\boxed{0}$
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1

Pour $v : V \to \mathbb{B}$ tq $v(x) = 1$, $v(y) = 1$ et $v(0) = 0$, on a $[\![F]\!]_v = 0$ donc $\boxed{F \text{ n'est pas valide.}}$

4) On a la formule $F = (x \Rightarrow y) \Rightarrow ((x \wedge \neg y) \Rightarrow 0)$

On remplace les sous-formules dans les parenthèses colorées par des sous-formules équivalente sans changer la validité de F

- $(x \Rightarrow y) \equiv y \vee \neg x$
- $((x \wedge \neg y) \Rightarrow 0) \equiv 0 \vee \neg(x \wedge \neg y) \equiv \neg(x \wedge \neg y)$ par identité de la disjonction.

$\equiv \neg x \vee \neg\neg y$ par la loi de De Morgan

$\equiv \neg x \vee y$ par idempotence de la négation.

$\equiv y \vee \neg x$ par commutativité de la disjonction

On a donc $F \equiv (y \vee \neg x) \Rightarrow (y \vee \neg x)$

$F \equiv (y \vee \neg x) \vee \neg(y \vee \neg x) \equiv z \vee \neg z \; [y \vee \neg x / z]$

Donc $F \equiv \mathbb{1}$ par définition et donc $\boxed{F \text{ est valide.}}$

Exercice 3

1) $(S, >)$ est un ordre bien fondé, donc on peut définir l'ordre produit $(S \times S, >_{prod})$ qui est aussi un ordre bien fondé

tel que $(x, y) >_{prod} (x', y')$ si $(x > x')$ et $(y > y')$.

2) Redéfinissons l'ordre produit $(S^{k+1}, >_{prod})$ où $S^{k+1} := S^k \times S$:

Soient $(a, \dots, k, l)$ et $(a', \dots, k', l') \in S^{k+1}$.

Alors $(a, \dots, k, l) >_{prod} (a', \dots, k', l)$ si $(a, \dots, k) >_{prod} (a', \dots, k')$ selon l'ordre produit $(S^k, >_{prod})$ où $S^k = S^{k-1} \times S$

et $l > l'$

Montrons par récurrence que $(S^{k+1}, >_{prod})$ est un ordre bien fondé.

<u>Initialisation</u>: l'énoncé donne $(S, >)$ bien fondé.
Donc $(S \times S, >_{prod})$ est aussi bien fondé par la proposition 1.3.3 du poly.

<u>Hérédité</u>: Montrons que si $(S^k, >_{prod})$ est un ordre bien fondé, alors $(S^{k+1}, >_{prod})$ l'est aussi.

$(S^{k+1}, >_{prod}) = (S^k \times S, >_{prod})$

or $(S^k, >_{prod})$ est bien fondé par hypothèse de récurrence
et $(S, >)$ est bien fondé d'après l'énoncé.

Donc $(S^{k+1}, >_{prod})$ est bien fondé d'après la proposition 1.3.3 du poly.

Exercice 4

Dans la définition de la relation $\rightarrow$, il y a que $(s, Y, X') \rightarrow (s, Y, X')$
et $(t, Y, X') \rightarrow (t, Y, X')$

c'est-à-dire que $A \rightarrow A$ avec $A = (s, Y, X')$
et $B \rightarrow B$ avec $B = (t, Y, X')$

Or une telle relation ne peut pas terminer car il existe une suite infinie telle que $A \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow \dots$

Donc la relation $\rightarrow$ ne termine pas.