

Maths 4: TD 4 Théorie des groupes

23.03.2021

Exercice 2

commutativité: a-t-on $a * b = b * a$ pour tout $a, b \in G$?

ici $x * y = t \neq y * x = r$ Donc la loi n'est pas commutative.

loi de groupe: vérifions que

- 1) associativité: $(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in G$
- 2) el. neutre e : $e * a = a * e = a \quad \forall a \in G$
- 3) inverse: $\forall a \in G \exists a' \in G$ tq $a * a' = a' * a = e$

Vérifions 2): ici e est l'élément neutre. On le voit en examinant la table
 $e * a = a = a * e \quad \forall a \in G$

Vérifions 3): en lisant la table, on voit que $\forall a \in G, a * a = e$ qui est l'élément neutre.
Chaque élément est son propre inverse.

Vérifions 1): par exemple on a $(x * y) * z = t * z = x$ et $x * (y * z) = x * t = r$
Donc la loi n'est PAS associative.

Donc $(G, *)$ n'est pas un groupe.

Exercice 3

Notons $G = \{e, x\}$

On doit avoir $\begin{cases} x * e = e \\ e * x = x \\ x * x = e \end{cases}$ pour que e soit l'élément neutre

On a ou bien $x * x = e$ ou bien $x * x = x$

Supposons que $x * x = x$

Alors on a aussi $\underbrace{(x^{-1} * x)}_e * x \neq \underbrace{x^{-1} * x}_e = x^{-1} * \underbrace{(x * x)}_x$

contradiction car $x \neq e$

Donc c'est $x * x = e$

	e	x
e	e	x
x	x	e

On vérifie qu'on a bien les 3 axiomes:

2) OK: e est le neutre

3) OK: e inverse de e et x inverse de x

1) OK

deux façons pour vérifier:

a) faire le calcul: on vérifie tous les triplets

ou b) On constate que la table s'identifie avec la table suivante:

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

qui est la table de multiplication du groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$
qui est associative.

Donc c'est bien la table de multiplication
du groupe.

Exercice 4

Soit $G = \{e, x, y\}$

On note e l'élément neutre

x	e	x	y
e	e	x	y
x	x		
y	y		

Examinons les possibilités pour $x * x$

• si $x * x = x$ alors $x = e$
(voir ex précédent)

• supposons $x * x = e$. Alors $x = x^{-1}$

Il y a sur chaque ligne de la table de multiplication d'un groupe, chaque élément apparaît une fois et une seule.

↳ considérons la ligne associée à un élément $g \in G$
Cette ligne contient $g * h$ à la colonne associée à $h \in G$.

On l'application $\lambda_g : G \rightarrow G, h \mapsto g * h$ est bijective de réciproque $G \rightarrow G, k \mapsto g^{-1} * k$

$$\text{(on a } \lambda_g^{-1} \circ \lambda_g(h) = g^{-1} * (g * h) = (g^{-1} * g) * h = e * h = h \text{ et avec } \lambda_g \circ \lambda_g^{-1}(k) = k)$$

Donc si $x * x = e$, alors $x * y = y$
Mais alors $y = e$ CONTRADICTION
(multiplication à droite par y^{-1})

x	e	x	y
e	e	x	y
x	x	e	y
y	y		

• donc $x * x = y$

et alors $x * y = e$ car e doit apparaître sur la ligne

x	e	x	y
e	e	x	y
x	x	y	e
y	y	e	x

Dans chaque colonne aussi, chaque e doit apparaître une seule fois.

On a donc montré qu'un ensemble à 3 éléments admet au plus 1 structure de groupe après avoir choisi un élément neutre.

Il reste à vérifier qu'il existe au moins une structure de groupe, c'est-à-dire que cette table définit bien un groupe.

Deux possibilités:

a) vérifier en faisant le calcul pour les $3^3 = 27$ triplets.

ou b) On observe que la table s'identifie avec celle du groupe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$

Conclusion: Pour un ensemble à 3 éléments \rightarrow 3 lois de groupe correspondant aux 3 choix possibles pour l'élément neutre.

Exercice 5

Abrégeons $x \cdot y$ en xy la notation pour les produits dans G .

L'hypothèse est que $x^2 = e \quad \forall x \in G$

Autrement dit $x = x^{-1} \quad \forall x \in G$

Soient $x, y \in G$

$$\text{On a } xy = (xy)^{-1}$$

Exercice 6

$$\text{On a } yx = xy^2 \text{ et } xy = yx^2$$

$$\text{Donc } \underline{yx} = xyxy = yx^2y = \underline{yxxy}$$

On multiplie à gauche par $x^{-1}y^{-1}$

$$\Rightarrow \underline{e} = \underline{xy} \Rightarrow x^{-1} = y$$

$$\text{Or } \underline{yx} = xy^2 = \underline{xy}y \Rightarrow y = e \Rightarrow x = y^{-1} = e$$

On a bien $x = y = e = 1$.

25.03.2021

Exercice 4 (fin)

G groupe à 4 éléments, (G, \cdot)
 $G = \{e, x, y, z\}$

$$\text{ord}(x) = \min \{n \in \mathbb{N}^* \mid x^n = e\}$$

Rappel: si $H \subset G$ et H et G sont finis, $|H|$ divise $|G|$ (Lagrange)

soit $H = \langle x \rangle = \{e, x, \dots, x^{n-1}\}$ où $n = \text{ord}(x)$
donc $|H| = n$

Donc $\text{ord}(x) \in \{1, 2, 4\}$ $x \neq e$
 $\text{ord}(y) \in \{1, 2, 4\}$ $y \neq e$
 $\text{ord}(z) \in \{1, 2, 4\}$ $z \neq e$

- ① \exists un élément d'ordre 4 dans $G = \{e, x, y, z\}$
 Par symétrie, on peut supposer que c'est x .

Alors $\langle x \rangle \subset G \Rightarrow \langle x \rangle = G$ (tous les 2 d'ordre 4)

$$G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \quad G \rightarrow (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$$

\uparrow isomorphe à $x \mapsto \bar{1}$

- ② \nexists d'él d'ordre 4

Alors $\text{ord}(x) = \text{ord}(y) = \text{ord}(z) = 2$

donc $x^2 = e$, $y^2 = e$ et $z^2 = e$

	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e	z	y
y	y	z	e	x
z	z	y	x	e

il faut que chaque lettre apparaisse 1 fois sur la ligne et 1 fois sur la colonne

$$G \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$$

\nwarrow groupe de Klein

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \left\{ \underset{=e}{(\bar{0}, \bar{0})}, \underset{=x}{(\bar{0}, \bar{1})}, \underset{=y}{(\bar{1}, \bar{0})}, \underset{=z}{(\bar{1}, \bar{1})} \right\}$$

Donc en tout y'a 2 groupes.

Exercice 7 $m \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_m &= \{z \in \mathbb{C} \mid z^m = 1\} \\ &= \left\{ \exp\left(\frac{2ik\pi}{m}\right), k = 0, \dots, m-1 \right\} \end{aligned}$$

1) $\cap \mathcal{U}_m$ sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times)

Vérifier: ① $1 \in \mathcal{U}_m$ donc $\mathcal{U}_m \neq \emptyset$

② $x, y \in \mathcal{U}_m \Rightarrow xy \in \mathcal{U}_m$ stabilité par le produit

③ $x \in \mathcal{U}_m \Rightarrow x^{-1} \in \mathcal{U}_m$ stabilité par l'inverse

① $1^m = 1$ donc $1 \in \mathcal{U}_m$

② $x, y \in \mathcal{U}_m \Rightarrow (xy)^m = x^m y^m = 1 \times 1 = 1$
 donc $xy \in \mathcal{U}_m$ \uparrow car $x, y \in \mathcal{U}_m$

③ $x \in \mathcal{U}_m \Rightarrow (x^{-1})^m = (x^m)^{-1} = 1$

donc $x^{-1} \in \mathcal{U}_m$

2) $\Omega_q \mathcal{U}_m$ cyclique d'ordre m .

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_m &= \left\{ \exp(2i\pi k/m), k=0,1,\dots,m-1 \right\} \\ &= \left\{ \exp(\underbrace{2i\pi/m}_\omega)^k, \dots \right\} \\ &= \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{m-1}\}\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{U}_m = \langle \omega \rangle \subset \mathbb{C}^*$ et $\text{ord}(\omega) = m$.

3) $\Omega_q \mathcal{U}_m \subseteq \mathcal{U}_n$ si $m \mid n$

\square On suppose $m \mid n \Leftrightarrow \exists k \text{ tq } mk = n$

Soit $z \in \mathcal{U}_m$

$$z^m = z^{mk} = (z^m)^k = 1^k = 1$$

donc $z \in \mathcal{U}_n$

On a bien $\mathcal{U}_m \subseteq \mathcal{U}_n$

\Rightarrow On suppose $\mathcal{U}_m \subseteq \mathcal{U}_n$ donc $m \leq n$

$$\begin{aligned}n &= qm + r \quad (\text{div. euclidienne de } n \text{ par } m) \\ 0 &\leq r \leq m-1\end{aligned}$$

$z \in \mathcal{U}_m \subseteq \mathcal{U}_n$ avec $\text{ord}(z) = m$ (z engendre le groupe)

$$\text{donc } 1 = z^m = z^{mq+r} = (z^m)^q z^r = 1^q z^r = z^r$$

$$\Rightarrow z^r = 1$$

donc $\text{ord}(z)$ divise r (si $r > 0$)

$$\Rightarrow r = 0$$

$$\Rightarrow m \mid n$$

$$\begin{aligned}r &\leq m = \min \{k \in \mathbb{N}^* \text{ tq } z^k = 1\} \\ \text{pb } z^r &= 1\end{aligned}$$

Exercice 8

$(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$ $\text{ord}(\bar{0}) = 1 \rightarrow$ c'est le neutre - L'ordre d'un élément ne peut pas être 0.

$$\text{ord}(\bar{1}) = 12$$

$$\text{ord}(\bar{2}) = 6 \quad \langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$$

$$\text{ord}(\bar{3}) = 4$$

$$\text{ord}(\bar{4}) = 3$$

$$\text{ord}(\bar{5}) = 12$$

$$\text{ord}(\bar{6}) = 2$$

$$\text{ord}(\bar{7}) = 12$$

$$\text{ord}(\bar{8}) = 3$$

$$\text{ord}(\bar{9}) = 4$$

$$\text{ord}(\bar{10}) = 6$$

$$\text{ord}(\bar{11}) = 12$$

Valeurs possibles : 1 et tout ce qui divise 12
 $\text{ord}(\bar{k}) \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

on cherche le 1^{er} produit divisible par 12
 $\text{ord}(\bar{k}) = \min \{n \in \mathbb{N}^* \mid n\bar{k} = \bar{0}\}$

Formule générale pour $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$\text{ord}(\bar{k}) = n / \text{PGCD}(k, n)$$

$$(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^* = \{ \bar{k} \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \mid \exists \bar{\ell} \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \ \bar{k}\bar{\ell} = \bar{1} \} \rightarrow \text{les inversibles pour la multiplication.}$$

$$= \{ \bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{11} \}$$

↳ groupe d'ordre 4

$$= \{ \bar{k} \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \mid \text{pgcd}(k, 12) = 1 \}$$

$$\text{ord}(\bar{1}) = 1 \quad \text{car } 1^1 \equiv 1 \pmod{12}$$

$$\text{ord}(\bar{5}) = 2 \quad \text{car } 5^2 = 25 \equiv 1 \pmod{12}$$

$$\text{ord}(\bar{7}) = 2 \quad \text{car } 7^2 = 49 \equiv 1 \pmod{12}$$

$$\text{ord}(\bar{11}) = 2$$

$$\text{ici } \text{ord}(\bar{k}) = \min \{ n \in \mathbb{N}^* \mid \bar{k}^n = \bar{1} \}$$

$$\text{ord}(\bar{k}) \in \{2, 4\}$$

$$\bar{k} \neq \bar{1}$$

↳ pour la multiplication

$$((\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$$

↳ pas un groupe cyclique
car pas d'el. d'ordre 4

30.03.2021

Exercice 9

G abélien : $xy = yx \ \forall (x, y) \in G^2$ la loi du groupe est commutative

$$H = \{ x \in G \mid \text{ord}(x) \text{ fini} \}$$

$$= \{ x \in G \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } x^n = e \}$$

↑ dépend de l'élément x

$M_q H$ est un sous-groupe de G .

ie \cap_q ① $e \in H$

② si $x \in H, y \in H$ alors $xy \in H$

③ si $x \in H$ alors $x^{-1} \in H$

1) $e \in H$ car $e^1 = e$ donc $\text{ord}(e) = 1$ (élément neutre est d'ordre fini).

$$3) \text{ si } x \in H, \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } x^n = e \Leftrightarrow (x^{-1})^n x^n = x^{-n} x^n = e$$

$$\Leftrightarrow e = x^{-n} = (x^{-1})^n$$

$$\text{donc } \text{ord}(x^{-1}) = n \text{ et } x^{-1} \in H$$

$$2) \ x \in H \text{ donc } \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } x^n = e$$

$$y \in H \text{ donc } \exists m \in \mathbb{N}^* \text{ tq } y^m = e$$

$$\text{alors } (xy)^{nm} = x^{nm} y^{nm} = (x^n)^m (y^m)^n = e^m e^n = e \text{ donc } xy \text{ est d'ordre fini et } xy \in H.$$

can G abélien

Q: si x et y d'ordre fini et $xy = yx$ $\text{ord}(xy) = \text{ord}(x) \times \text{ord}(y)$?

NON pas en général

par contre on a $\text{ord}(xy) = \text{ppcm}(\text{ord}(x), \text{ord}(y))$.

Exercice 10

$$G = \{e^{2i\pi n}, n \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}^*$$

• Montrons que G est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \cdot)

1) $1 \in G$ car $1 = e^{2i\pi \cdot 0}$, $0 \in \mathbb{Q}$

2) $x = \exp(2i\pi n) \in G$, $x' = \exp(2i\pi n') \in G$, avec $(n, n') \in \mathbb{Q}^2$

$$xx' = \exp(2i\pi(n+n')) \text{ avec } n+n' \in \mathbb{Q}$$

donc $xx' \in G$

3) $x = \exp(2i\pi n) \in G$, $n \in \mathbb{Q}$

$$x^{-1} = (\exp(2i\pi n))^{-1} = \exp(2i\pi(-n)) \text{ et } -n \in \mathbb{Q}$$

donc $x^{-1} \in G$

Donc G est un groupe (sous-groupe de \mathbb{C}^*)

• Soit $x \in G$, $x = \exp(2i\pi n)$, $n \in \mathbb{Q}$

Alors $n = \frac{p}{q}$, $\text{PGCD}(p, q) = 1$

$$x^q = \exp(2i\pi \frac{p}{q})^q = \exp(2i\pi \frac{p}{q} q) = \exp(2i\pi p) = \exp(2i\pi)^p = (\cos(2\pi) + i \sin(2\pi))^p = (1 + i \cdot 0)^p = 1$$

donc $\forall x \in G$, x est d'ordre fini ($\text{ord}(x) \leq q$)

• Soit $\{\omega_n = \exp(\frac{2i\pi}{n}), n \in \mathbb{N}^*\} \subset G$

\uparrow ensemble infini (car $\omega_n \neq \omega_{n'}$ si $n \neq n'$)

donc G est infini

Exercice 12

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \right\}$$

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (a, b, c, d) \in \mathbb{Z} \text{ avec } ad - bc = 1 \right\}$$

$$SL_2(\mathbb{Z}) \subset GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tq } \det A \neq 0\}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}$
c'est un groupe

o) $\mathcal{P}_q(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ est un groupe

1) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$

2) $(AB)C = A(BC)$ associativité du produit des matrices

3) $A, B \in GL_2(\mathbb{R})$ alors $AB \in GL_2(\mathbb{R})$

$$\text{car } \det(AB) = \underbrace{\det(A)}_{\neq 0} \underbrace{\det(B)}_{\neq 0} \neq 0$$

4) $A \in GL_2(\mathbb{R})$ $\det(A) \neq 0$ alors A est inversible

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \neq 0 \text{ donc } A^{-1} \in GL_2(\mathbb{R})$$

1) $M_2 SL_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$

1) $I_2 \in SL_2(\mathbb{Z})$

2) $A \in SL_2(\mathbb{R})$, $A' \in SL_2(\mathbb{Z})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

$$\det(AA') = \det(A) \times \det(A') = 1 \times 1 = 1$$

$$\text{et } AA' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + c'd & b'c + dd' \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$$

3) $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ $\det A = 1 \neq 0$ donc A inversible

$$A^{-1} \in GL_2(\mathbb{R}) \text{ et } \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = 1$$

$$\text{donc } A^{-1} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

• $\underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{Z} \right\}}_{\text{infini}} \subset SL_2(\mathbb{Z})$ donc $SL_2(\mathbb{Z})$ infini.

• $SL_2(\mathbb{Z})$ non abélien car

$$\begin{aligned} 2) \quad A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & AB &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ & & & & & \neq \\ & & & & & BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A^2 = \dots$$

$$A^3 = \dots$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \text{ord}(A) = 4$$

$$B^2 = \dots$$

$$B^3 = I_2 \text{ donc } \text{ord}(B) = 3$$

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (AB)^4 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Par récurrence } (AB)^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1} \cdot n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \text{ donc } AB \text{ d'ordre infini.}$$

Exercise 14

$$\begin{aligned} \left((\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*, \cdot \right) &= \left\{ \bar{k} \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, \text{PGCD}(k, 13) = 1 \right\} \\ &= \left\{ \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}, \bar{11}, \bar{12} \right\} \end{aligned}$$

$$\left| (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*, \cdot \right| = \left| \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \setminus \{ \bar{0} \} \right| = 12$$