Outils Logiques Groupe 3 & 4 – DM 2

Chaitanya Leena Subramaniam

à rendre avant le 15 février 2021 par email à chaitanya@irif.fr

Exercice 1

Soit $\Sigma = \{a^0, b^1, x^1, \neg^2\}$ une signature. Pour chacune des expressions ci-dessous, dire si elle correspond à un élément de T_Σ. Justifier.

(1) x

(2) $(b, (\neg, a, x))$

(3) $(\neg, (b, (b, a)), a)$

(4) $(\neg, (\neg, b, a), a)$

(5) $(x, (\neg, a, (\neg, a, (x, a))))$

Exercice 2

Soit $\Sigma = \{\varepsilon^0, a^1, b^1\}$. Considérer la structure de Σ-algèbre suivante sur $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} &f_\varepsilon = 1 \\ &f_a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad ; \quad f_a(x) = 3 \times x \\ &f_b \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad ; \quad f_b(x) = x + 1 \end{aligned}$$

(1) Quel est l'alphabet X tel que T_Σ est en bijection avec l'ensemble X^* des mots sur X ? Par la suite nous allons identifier $X^* = T_\Sigma$.

(2) Soit $\mu \colon T_\Sigma \longrightarrow \mathbb{N}$ le morphisme d'algèbre depuis l'algèbre initiale $\underline{T_\Sigma}$. Quelle est la valeur de $\mu(abab)$? (Ici le mot $abab$ correspond à un arbre de syntaxe grâce au point précédent.)

(3) Montrer que pour tout mot $v \in T_\Sigma$, on a $\mu(abv) > \mu(bbav)$ pour l'ordre habituel sur $\mathbb{N}$. (Indice : calculer $\mu(abv), \mu(bbav)$ en fonction de $\mu(v)$.)

(4) Montrer que pour tous mots $u, v, w \in T_\Sigma$, si on a $\mu(v) > \mu(w)$, alors on a $\mu(uv) > \mu(uw)$. (Indice : pour cela, commencer en montrant que si on a $\mu(v) > \mu(w)$, alors on a $\mu(av) > \mu(aw)$ et $\mu(bv) > \mu(bw)$. Puis conclure.)

(5) En déduire que pour tous mots $u, v \in T_\Sigma$, on a $\mu(uabv) > \mu(ubbav)$.

(6) Soit $\to$ la relation suivante sur T_Σ : pour tous mots $u, v \in T_\Sigma$, on a

$$uabv \to ubbav$$

Montrer que la relation $\to$ termine.

Exercice 3

Considérons l'alphabet $\{a, b, c\}$.

(1) Définissez une signature Σ telle que T_Σ est en bijection avec l'ensemble $\{a, b, c\}^*$ des mots sur $\{a, b, c\}$.

(2) Définissez une structure de Σ-algèbre sur $\mathbb{N}$ telle que la fonction canonique $\mu \colon T_\Sigma \longrightarrow \mathbb{N}$ envoie un mot w sur le nombre de caractères dans w (la longueur du mot w).

(3) Définissez une structure de Σ-algèbre sur $\mathbb{N}$ telle que la fonction canonique $\mu \colon T_\Sigma \longrightarrow \mathbb{N}$ envoie un mot w sur le nombre de a et de c qui apparaissent dans w.

(4) Soit $\to$ la relation suivante sur $\{a,b,c\}^*$: pour tous mots $u,v \in \{a,b,c\}^*$, on a

$$uacv \to uabbv \qquad ucbav \to ucav \qquad uaav \to uabv$$

Montrer qu'il existe une fonction $f\colon \{a,b,c\}^* \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ telle que pour tout pair de mots $w, w' \in \{a,b,c\}^*$, si on a $w \to w'$, alors on a $f(w) >_{lex} f(w')$. (Ici, $>_{lex}$ est l'ordre lexicographique habituel sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$).

(5) En déduire que la relation $\to$ termine.