Teoria probabilităţilor discrete - Curs 6

Olariu E. Florentin

Martie, 2016

Table of contents

Introducere

Acest capitol este dedicat introducerii unei noţiuni larg utilizate în diverse ramuri ale ştiiinţei (de la fizica statistică până la ştiinţele economice): *procesele aleatoare* sau *stochastice* (i.e., care variază în timp). Informal un proces stochastic este un model matematic al unui experiment probabilistic care evoluează în timp şi produce o secvenţă de valori numerice.

Spre exemplu un proces stochastic poate fi folosit pentru a modela:

- variaţia preţurilor unei acţiuni la bursă;
- poziţiile succesive pe radar ale unui avion comercial;
- variaţia nivelului de încărcare a traficului într-un nod de comunicaţii etc.

Introducere

Definition 0.1

Un proces stochastic este o familie de variabile aleatoare $(X(i))_{i \in I}$, *definite peste un spaţiu cu probabilitate.*

- Fiecare variabilă $X_i = X(i) : \Omega \to \mathbb{R}$ reprezintă o stare sau un pas al procesului; dacă mulţimea care le indexează, I, este discretă atunci avem de-a face cu un *proces stochastic discret*. În cele ce urmează vom presupune că $|I| \leqslant |\mathbb{N}^*|$.
- Vom discuta despre două tipuri de procese aleatoare:

1. *Procese de tip sosire:* mesaje recepţionate, clienţi care ajung la un server etc. Un model pe care îl vom studia mai în detaliu va fi *procesul Bernoulli*.
2. *Procese Markov:* sunt experimente probabilistice care evoluează în timp şi în care o stare viitoare depinde într-o anumită măsură (probabilistic) de ceea ce s-a întâmplat în trecut.

Procese Bernoulli

- Un proces Bernoulli poate fi văzut ca o secvenţă de aruncări independente ale unei monede, pentru care probabilitatea de a apărea stema este fixată: $p \in (0, 1)$.
- Paradigma aceasta a aruncării unei monede acoperă o largă varietate de contexte - este vorba de un experiment care poate avea două rezultate posibile "succes" sau "eşec" cu probabilităţi cunoscute p şi $(1 - p)$.
- Vom defini un proces Bernoulli ca un proces care modelează intrările (sosirile) unor clienţi într-un sistem unde urmează ca un un server (centru de servire) să le îndeplinească o cerere.

Procese Bernoulli

Definition 0.2

Considerăm un sistem de servire în care clienţii ajung independent şi sunt serviţi pe rând. Timpul este împărţit in intervale în număr discret, iar un succes este asociat cu sosirea în intervalul k a cel puţin unui client. Procesul Bernoulli este şirul de variabile Bernoulli independente $(X_k)_{k\geqslant 1}$:

$$P\{X_k = 1\} = P\{\textit{există o sosire în intervalul } k\} = p,$$

$$P\{X_k = 0\} = P\{\textit{nu există nici o sosire în intervalul } k\} = 1 - p.$$

Pentru un astfel de proces stochastic ne interesează numărul de intrări în sistem într-o anumită perioadă de timp sau timpul trecut până la prima sosire în sistem a unui client. În cazul unui proces Bernoulli răspunsul la aceste două chestiuni este dat cu uşurinţă:

Procese Bernoulli

Proposition 0.1

(i) *Fie S numărul de sosiri în primele n intervale de timp, atunci S este distribuită binomial cu parametrii n şi p, $B(n,p)$.*

(i) *Fie T numărul de interval trecute până la sosirea primului client în sistem, atunci T este o variabilă repartizată geometric cu parametrul p, $Geometric(p)$.*

proof: Este imediată, deoarece, pe de o parte, ştim că suma a n variabile Bernoulli independente cu acelaşi parametru este o variabilă binomială, iar, pe de altă parte, folosim definiţia unei variabile repartizate geometric. ∎

Procese Bernoulli

- Într-un proces Bernoulli ceea ce urmează să se întâmple nu depinde de ceea ce s-a întâmplat: viitorul nu depinde de trecut.
- Să presupunem că după n paşi ai procesului au fost observate valorile pentru $X_1, X_2, \ldots, X_n$; începând de la pasul $(n+1)$ înainte rezultatele $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ sunt variabile Bernoulli cu acelaşi parametru, independente, deci formează un proces Bernoulli, în plus sunt independente şi de rezultatele anterioare (pasului $(n+1)$).
- Pe de altă parte, $T-n$, numărul de intervale până la primul succes începând cu pasul $(n+1)$, are funcţia de masă de probabilitate

$$P(T-n=k|\,T\geqslant n+1)=p(1-p)^{k-1}=P(T=k), k\in\mathbb{N}^*.$$

Procese Bernoulli

Am demonstrat astfel

Proposition 0.2

(i) *(Fresh-start property) La orice moment* $n \geqslant 1$*, şirul de variabile aleatoare* $X_{n+1}, X_{n+1}, \ldots$ *(adică procesul viitor) formează un proces Bernoulli care este independent de secvenţa* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *(trecutul procesului).*

(ii) *(Lipsa de memorie) Fie* $\overline{T}$ *momentul la care are loc primul succes după momentul* n*. Atunci* $\overline{T} - n$ *este variabilă repartizată geometric cu parametrul* p*, independentă de variabilele* $X_1, X_2, \ldots, X_n$*.*

Procese Bernoulli - exemple

Exemplu. Fie N primul moment la care avem un succes care urmează imediat unui alt succes:

$$N = \min\{i \,:\, X_{i-1} = X_i = 1\}$$

Care este probabilitatea ca în următoarele două intervale (momente de timp) să nu avem nici un succes:

$$P\{X_{N+1} = X_{N+2} = 0\} = ?$$

Soluţie: Intuitiv această probabilitate nu depinde de ceea ce s-a întâmplat în trecut, deci $P\{X_{N+1} = X_{N+2} = 0\} = (1-p)^2$. Riguros demonstraţia este următoarea

$$P\{X_{N+1} = X_{N+2} = 0\} = \sum_{n\geqslant 2} P\{N=n\}\cdot P\{X_{N+1} = X_{N+2} = 0 | N = n\} =$$

$$= \sum_{n\geqslant 2} P\{N=n\}\cdot P\{X_{n+1} = X_{n+2} = 0 | N = n\}.$$

Procese Bernoulli - exemple

$P\{X_{n+1} = X_{n+2} = 0 | N = n\}$ este aceeaşi cu probabilitatea necondiţionată, $P\{X_{n+1} = X_{n+2} = 0\}$, deoarece variabilele X_i cu $i = \overline{1, n+2}$ sunt independente. astfel

$$P\{X_{N+1} = X_{N+2} = 0\} = \sum_{n \geqslant 2} P\{N = n\} \cdot P\{X_{n+1} = X_{n+2} = 0\} =$$

$$= \sum_{n \geqslant 2} P\{N = n\}(1-p)^2 = (1-p)^2. \clubsuit$$

Exemplu. Un procesor execută două tipuri de job-uri: *cu prioritate* şi *fără prioritate* şi operează în intervale de timp discrete numite *segmente*. Un job cu prioritate apare (soseşte) cu probabilitate p la începutul fiecărui segment, independent de celelalte segmente, şi are nevoie de un întreg segment pentru a fi executat. Un job fără prioritate este întotdeauna la dispoziţie şi este executat dacă nici un job cu prioritate nu a intrat în sistem.

Procese Bernoulli - exemple

Un segment va fi numit *busy* dacă procesorul execută un job cu prioritate şi *idle* altfel. O secvenţă de segmente busy (sau idle) mărginită de două segmente idle (respectiv busy) se numeşte *perioadă busy* (respectiv *idle*).

Vom analiza câteva proprietăţi probabilistice ale intervalelor de timp disponibile pentru job-urile neprioritare. Mai precis determinăm funcţia de masă de probabilitate, media şi dispersia următoarelor variabile aleatoare:

(a) $T =$ numărul primului segment idle;

(b) $B =$ lungimea (numărul de segmente ale) primei perioade busy;

(c) $I =$ lungimea primei perioade idle;

(d) $Z =$ numărul de segmente de după primul segment al primei perioade busy până la primul segment idle inclusiv.

Procese Bernoulli

Soluţie: Este evident că T este o variabilă geometrică cu parametrul $(1-p)$ şi

$$P\{T=k\}=p^{k-1}(1-p), \forall k \geqslant 1; M[T]=\frac{1}{1-p}, D^2[T]=\frac{p}{(1-p)^2}.$$

Z şi B sunt la fel distribuite. în plus, dacă primul segment busy este al i-lea, atunci numărul, Z, de segmente care urmează până la primul segment idle inclusiv, urmează aceeaşi distribuţie cu T: începând cu segmentul $(i+1)$ avem un proces Bernoulli similar (start-fresh).
Pentru distribuţia lui I: dacă inversăm semnificaţia segmentelor idle şi busy, atunci, schimbând probabilităţile p şi $(1-p)$ între ele, rolul lui I este jucat de B, astfel I este distribuită geometric cu parametrul p:

$$P\{I=k\}=(1-p)^{k-1}p, \forall k \geqslant 1; M[T]=\frac{1}{p}, D^2[T]=\frac{1-p}{p^2}.\clubsuit$$

Lanţuri Markov discrete

- Spre deosebire de procesele Bernoulli, un lanţ Markov este un proces al cărui viitor depinde de trecut într-o anumită măsură.
- Efectul acesta al trecutului asupra viitorului este modelat prin intermediul stărilor procesului; aceste stări se schimbă conform unor probabilităţi date. În plus, ne vom limita la procese ale căror stări pot lua un număr finit de valori (numerice).

Lanţuri Markov discrete

Definition 1.1

(i) *Un* **lanţ Markov discret** *cu o mulţime finită de stări este un proces stochastic* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *format din variabile aleatoare* $X_n : \Omega \to S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ *care au* **proprietatea** *numită a* **lui Markov***:*

$$P\{X_{n+1} = s \big| X_1 = s_{i_1}, X_2 = s_{i_2}, \ldots, X_n = s_{i_n}\} =$$

$$= P\{X_{n+1} = s \big| X_n = s_{i_n}\}$$

(ii) *Un* **lanţ Markov** *se numeşte* **omogen** *(sau* **staţionar***) dacă*

$$P\{X_{n+1} = s_j \big| X_n = s_i\} = P\{X_n = s_j \big| X_{n-1} = s_i\} = p_{ij},$$

$$\forall\, n \geqslant 2, s_i, s_j \in S.$$

Lanţuri Markov discrete

- În cele ce urmează vom considera doar lanţuri Markov omogene, discrete şi cu un număr finit de stări.
- S se numeşte spaţiul stărilor, iar p_{ij} probabilităţile de tranziţie, matricea formată cu aceste probabilităţi $P = (p_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$ se numeşte *matricea de tranziţie probabilistă* a lanţului.

Un astfel de lanţ Markov se identifică prin:

- spaţiul stărilor $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$
- şi probabilităţile p_{ij} de trecere dintr-o stare în alta.

- Un lanţ Markov poate fi reprezentat printr-un *digraf al tranziţiilor probabiliste*: nodurile sunt stări posibile, iar între acestea avem arce cu probabilităţile corespunzătoare de tranziţie.

Lanţuri Markov discrete - exemple

Exemplu. Alice urmează un curs de săptămânal de "Teoria probabilităţilor", în fiecare săptămână ea fie rămâne în urmă, fie ajunge la zi cu materia corespunzătoare. Dacă într-o săptămână este în urmă cu materia, atunci probabilitatea ca ea să rămână în urmă şi în săptămâna următoare este 0.4, iar probabilitatea ca ea să ajungă la zi cu materia este 0.6. Dacă într-o săptămână Alice este la zi cu materia, atunci probabilitatea ca ea să rămână în urmă în săptămâna următoare este 0.2, iar cea ca să fie la zi şi în săptămâna următoare este 0.8.
Avem un lanţ omogen Markov şi discret cu două stări posibile: s_1 - Alice e la zi cu materia şi s_2 - ea a rămas în urmă. Probabilităţile de tranziţie sunt

$$p_{11} = 0.8, p_{12} = 0.2, p_{21} = 0.6, p_{22} = 0.4 \clubsuit$$

Lanţuri Markov discrete - exemple

Exemplu. O albină se mişcă pe o linie dreaptă câte o unitate în fiecare interval de timp astfel: la stânga cu probabilitate 0.3, la dreapta cu probabilitate 0.3 şi rămâne pe loc cu probabilitate 0.4 independent de mişcările făcute anterior. Doi paianjeni se află pe această dreaptă în poziţiile 1 şi m. Dacă albina ajunge într-unul din aceste puncte procesul se încheie.

Construim un lanţ Markov presupunând că albina se găseşte iniţial într-un punct între 1 şi m (pe o coordonată întreagă).

Stările lanţului sunt $1, 2, \ldots, m$ - poziţiile albinei. Probabilităţile de tranziţie nenule sunt:

$$p_{11} = p_{mm} = 1,$$

$$p_{ij} = \begin{cases} 0.3, & \text{dacă } j \in \{i-1, i+1\}, \\ 0.4, & j = i \end{cases}, \text{ pentru } i = \overline{2, m-1} \; \clubsuit$$

Probabilităţile unui drum şi ale tranziţiilor în n paşi

- Dat un lanţ Markov putem determina probabilitatea unei secvenţe de stări viitoare ale lanţului folosind formula de înmulţire.

Proposition 2.1

Dat un lanţ Markov $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$*, avem*

$$P\{X_1 = s_{i_1}, X_2 = s_{i_2}, \ldots, X_n = s_{i_n}\} = P(X_1 = s_{i_1})\cdot p_{i_1 i_2}\cdot p_{i_2 i_3}\cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n}.$$

proof:

$$\begin{aligned} P\{X_1 = s_{i_1}, X_2 = s_{i_2}, \ldots, X_n = s_{i_n}\} &= P(X_1 = s_{i_1})\cdot P(X_2 = s_{i_2} | X_1 = s_{i_1})\cdot \\ \ldots \cdot P\{X_n = s_{i_n} | X_1 = s_{i_1}, X_2 = s_{i_2}, \ldots, X_{n-1} = s_{i_{n-1}}\} &= \\ = P(X_1 = s_{i_1}) \cdot p_{i_1 i_2} \cdot p_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot p_{i_{n-1} i_n}, \end{aligned}$$

utilizând formula de înmulţire şi cea a lui Markov. Pentru a calcula această probabilitate trebuie cunoscută distribuţia pasului iniţial, X_1. ∎

Probabilităţile unui drum şi ale tranziţiilor în n paşi

- În multe probleme asociate lanţurilor Markov este necesar să cunoaştem distribuţia unei stări viitoare în funcţie de starea curentă.

Definition 2.1

Probabilităţile tranziţiilor în n paşi *sunt*

$$r_{ij}^{(n)} = P\{X_{n+1} = s_j | X_1 = s_i\}.$$

- Datorită omogenităţii $r_{ij}^{(n)}$ este probabilitatea ca după n paşi starea să devină s_j, dacă starea iniţială este s_i (indiferent care este momentul iniţial: $r_{ij}^{(n)} = P\{X_{n+k} = s_j | X_k = s_i\}$). Aceste probabilităţi se pot calcula folosind ecuaţia recursivă de mai jos.

Probabilităţile unui drum şi ale tranziţiilor în n paşi

Proposition 2.2

(Ecuaţia Chapman-Kolmogorov) Probabilităţile tranziţiilor în n paşi pot fi calculate folosind următoarea formulă recursivă

$$r_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} r_{ik}^{(n-1)} \cdot p_{kj}, \text{ pentru } n \geqslant 2, 1 \leqslant i, j \leqslant m, \text{ unde } r_{ij}^{(1)} = p_{ij}.$$

proof: Aplicăm varianta condiţionată a probabilităţii totale:

$$P\{X_{n+1} = s_j | X_1 = s_i\} = \sum_{k=1}^{m} P\{X_n = s_k | X_1 = s_i\}\cdot$$

$$\cdot P\{X_{n+1} = s_j | X_n = s_k, X_1 = s_i\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} P\{X_n = s_k | X_1 = s_i\} \cdot P\{X_{n+1} = s_j | X_n = s_k\} = \sum_{k=1}^{m} r_{ik}^{(n-1)} \cdot p_{kj}.$$

■

Probabilităţile unui drum şi ale tranziţiilor în n paşi

- Matricea pătratică de ordin m formată cu probabilităţile $r_{ij}^{(n)}$ (pentru un n fixat) se numeşte **matricea probabilităţilor de tranziţie în n paşi**.
- Din ecuaţia Chapman-Kolmogorov se poate obţine următorul rezultat (a cărui demonstraţie este lăsată ca exerciţiu).

Proposition 2.3

Matricea probabilităţilor de tranziţie în n paşi este P^n, unde P este matricea probabilităţilor de tranziţie.

Aceste matrici de tranziţie sunt *matrici stochastice*: au elemente care reprezintă probabilităţi şi suma elementelor de pe fiecare linie este 1.

Tipuri de stări

- Sunt anumite situaţii în care probabilităţile $r_{ij}^{(n)}$ converg pentru $n \to +\infty$, idiferent de starea iniţială i.

Exemplu (continuare) Reluăm exemplul cu lanţul Markov de mai sus care are matricea probabilităţilor de tranziţie

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}, P^2 = \begin{bmatrix} 0.76 & 0.24 \\ 0.72 & 0.28 \end{bmatrix}, P^3 = \begin{bmatrix} 0.752 & 0.248 \\ 0.744 & 0.256 \end{bmatrix},$$

$$\ldots, P^{10} = \begin{bmatrix} 0.7500 & 0.2502 \\ 0.7508 & 0.2505 \end{bmatrix}.$$

Se observă că matricea de tranziţie în n paşi tinde la o matrice constantă, fără ca starea iniţială i să conteze (coloane constante). ♣

Tipuri de stări

Exemplu (continuare) Reluăm exemplul cu albina şi cei doi paianjeni.

$$P = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}, P^{20} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.669 & 0.0004 & 0.0004 & 0.329 \\ 0.329 & 0.0004 & 0.0004 & 0.669 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}. \clubsuit$$

Observăm în acest caz că există limite ale anumitor probabilităţi de tranziţie în n paşi care depind de starea iniţială:

$$\lim_{n\to+\infty} r_{11}^{(n)} = 1, \lim_{n\to+\infty} r_{21}^{(n)} = 2/3,$$

$$\lim_{n\to+\infty} r_{31}^{(n)} = 1/3, \lim_{n\to+\infty} r_{41}^{(n)} = 0.$$

Tipuri de stări

- Clasificarea pe care o vom da stărilor priveşte frecvenţa pe temen lung cu care ele sunt vizitate.

Definition 3.1

(i) *O* **stare** s_j *este* **accesibilă** *din starea* s_i *dacă există un număr de paşi,* $n \geqslant 0$*, astfel ca* $r_{ij}^{(n)} > 0$*; fie* $A(s_i)$ *mulţimea stărilor care sunt accesibile din starea* s_i.

(ii) *O* **stare** s_i *este numită* **recurentă** *dacă pentru orice stare* s_j *care este accesibilă din* s_i*,* s_i *este de asemenea accesibilă din* s_j.

(iii) *O* **stare** *se numeşte* **tranzitorie** *dacă nu este recurentă.*

Tipuri de stări

- Să observăm că starea s_j este accesibilă din s_i dacă există un şir de stări $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_{n-1}}$ astfel încât

$$p_{ii_1}, p_{i_1 i_2}, \ldots, p_{i_{n-1}j} > 0,$$

altfel spus un drum din starea s_i în starea s_j este posibil.

- Starea s_i este recurentă dacă şi numai dacă $\forall\ s_j \in A(s_i) \Rightarrow s_i \in A(s_j)$. Dacă începem în starea recurentă s_i, atunci probabilitatea de a reveni în starea s_i în viitor este strict pozitivă (la fel ca şi probabilitatea ca starea s_i să fie vizitată în viitor de o infinitate de ori).
- Mai mult, dacă s_i este recurentă, atunci $A(s_i) = A(s_j)$, pentru orice $s_j \in A(s_i)$: plecând din s_i rămânem în $A(s_i)$.

Tipuri de stări

Definition 3.2

Dacă s_i este o stare recurentă, atunci toate stările accesibile din s_i formează o **clasa recurentă**.

- Se poate demonstra cu uşurinţă (exerciţiu): clasele recurente sunt clasele de echivalenţă relativ la următoarea relaţie (care este una de echivalenţă pe mulţimea stărilor recurente): $s_i \sim s_j$ dacă $A(s_i) = A(s_j)$.

Theorem 3.1

Un lanţ Markov poate fi descompus într-una sau mai multe clase recurente şi un număr ($\geqslant 0$) de stări tranzitorii.

- Următoarele proprietăţi ale stărilor sunt lăsate ca exerciţiu.

Tipuri de stări

Proposition 3.1

(i) *O stare recurentă este accesibilă din toate stările din clasa sa, dar nu şi din stări aflate într-o altă clasă recurentă.*

(ii) *O stare tranzitorie nu este accesibilă din nici o stare recurentă.*

(iii) *Dintr-o stare tranzitorie este accesibilă cel puţin o stare recurentă.*

- Teorema de descompunere a stărilor unui lanţ Markov omogen şi discret cu o mulţime finită de stări permite argumentarea unor raţionamente asupra acestor procese dar şi vizualizarea evoluţiei acestora:

Tipuri de stări

(i) dacă am intrat (sau chiar am început) într-o stare recurentă, atunci nu mai părăsim clasa acesteia şi toate stările din această clasă vor fi vizitate de o infinitate de ori.

(ii) dacă starea iniţială este una tranzitorie atunci vom merge printr-un număr finit de stări tranzitorii şi apoi vom intra, într-o clasă recurentă, fără să o mai părăsim.

Un tip important de clasă recurentă este descris în

Definition 3.3

O clasă recurentă se numeşte **periodică** *dacă stările care o compun pot fi partiţionate în* $k \geqslant 2$ *submulţimi* $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$, *astfel încât tranziţiile nu pot avea loc decât de la o submulţime la alta, în ordinea dată şi circular:*

$$\forall\, s_i \in \Sigma_h, p_{ij} > 0 \Rightarrow s_j \in \begin{cases} \Sigma_1, & \textit{dacă } h = k \\ \Sigma_{h+1}, & \textit{altfel} \end{cases}.$$

Tipuri de stări

- Se observă că dacă s_i face parte dintr-o clasă periodică, pentru orice $n \geqslant 1$ trebuie să existe cel puţin o stare s_j, astfel încât $r_{ij}^{(n)} = 0$. În felul acesta avem un criteriu după care o clasă recurentă, R, este neperiodică: există un $n \geqslant 1$ şi $s_i \in R$, astfel ca $r_{ij}^{(n)} > 0$, pentru orice $s_j \in R$.

Stabilitatea pe termen lung a lanţurilor Markov

- Pentru modelele bazate pe lanţuri Markov ne interesează cel mai adesea comportamentul pe termen lung, adică probabilităţile de tranziţie $r_{ij}^{(n)}$, pentru n foarte mare.
- Suntem interesaţi în această secţiune, în primul rând, de condiţiile în care $r_{ij}^{(n)}$ converge independent de starea iniţială s_i. Dacă există două clase recurente, atunci este evident că limitele acestor probabilităţi, dacă există, depind de starea iniţială (devreme ce o clasă recurentă nu poate fi părăsită).
- După cum vom vedea imediat, vom presupune că lanţul are o singură clasă recurentă plus, eventual, alte câteva stări tranzitorii.

Stabilitatea pe termen lung a lanţurilor Markov

Exemplu. Considerăm un lanţ Markov cu două stări $\{s_1, s_2\}$, astfel că din s_1 trecem în s_2 ($p_{12} = 1$) şi din s_2 în s_1 ($p_{21} = 1$). Deci, după un număr par de paşi revenim în starea din care am plecat:

$$r_{ii}^{(n)} = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases} \quad \clubsuit$$

- Acesta este un exemplu în care şirul $r_{ii}^{(n)}$ nu converge (oscilează) şi sigura clasă a lanţului este periodică. Pentru convergenţă ar trebui ca lanţul să nu conţină clase periodice. Următorul rezultat precizează condiţiile în care convergenţa are loc şi limita nu depinde de starea iniţială.

Stabilitatea pe termen lung a lanţurilor Markov

Theorem 4.1

Considerăm un lanţ Markov omogen, discret şi cu o mulţime finită de stări. Dacă lanţul conţine o singură clasă recurentă care este neperiodică (şi, eventual, stări tranzitorii), atunci fiecărei stări s_j *îi putem asocia o probabilitate de echilibru* π_j *cu următoarele proprietăţi:*

(i) $\lim\limits_{n \to +\infty} r_{ij}^{(n)} = \pi_j$, *pentru orice* i *şi* j.

(ii) $(\pi_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ *sunt soluţiile sistemului*

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m} \pi_k p_{kj} = \pi_j, & j = \overline{1, m} \\ \sum\limits_{k=1}^{m} \pi_k = 1 \end{cases}$$

(iii) $\pi_j = 0$, *dacă* s_j *este tranzitorie şi* $\pi_j > 0$, *dacă* s_j *este recurentă.*

Stabilitatea pe termen lung a lanţurilor Markov

- Probabilităţile π_j formează o distribuţie de probabilitate pe spaţiul stărilor: **distribuţia staţionară** - numită astfel deoarece, dacă X_1 are această distribuţie

$$P\{X_1 = s_j\} = \pi_j, \forall\, 1 \leqslant j \leqslant m, \text{ atunci}$$

$$P\{X_2 = s_j\} = \sum_{k=1}^{m} P\{X_1 = k\} p_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \pi_k p_{kj} = \pi_j, \forall\, 1 \leqslant j \leqslant m$$

şi, în mod similar, se arată că $P\{X_n = s_j\} = \pi_j, \forall\, 1 \leqslant j \leqslant m$.

$$\sum_{k=1}^{m} \pi_k p_{kj} = \pi_j, j = \overline{1, m}$$

se numesc **ecuaţiile de echilibru** (consecinţă a ecuaţiei Chapman-Kolmogorov şi a existenţei limitelor din teorema de mai sus).

$$\sum_{k=1}^{m} \pi_k = 1 \text{ este } \textbf{ecuaţia de normalizare}.$$

Stabilitatea pe termen lung a lanţurilor Markov - exemple

Exemplu Considerăm un lanţ Markov finit şi omogen, cu două stări şi probabilităţile de tranziţie

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Soluţie: Ecuaţiile de echilibru sunt

$$\pi_1 = \pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} \text{ şi } \pi_2 = \pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22},$$

adică

$$\pi_1 = 0.8\pi_1 + 0.6\pi_2 \text{ şi } \pi_2 = 0.2\pi_1 + 0.4\pi_2.$$

Aceste două ecuaţii sunt echivalente amândouă cu ecuaţia

$$\pi_1 = 3\pi_2.$$

Folosind şi ecuaţia de normalizare $\pi_1 + \pi_2 = 1$, obţinem

$$\pi_1 = 0.75, \pi_2 = 0.25 \clubsuit$$

Stabilitatea pe termen lung a lanţurilor Markov - exemple

Exemplu. Un profesor "absent" are două umbrele pe care le foloseşte atunci când merge de acasă la birou sau invers. Dacă plouă şi dacă o umbrelă este la dispoziţie, atunci profesorul o ia şi o foloseşte; dacă nu plouă, atunci profesorul uită întotdeauna să ia umbrela. Să presupunem că de fiecare dată când profesorul trebuie să se deplaseze între cele două locaţii plouă cu probabilitate $p \in (0,1)$, independent de fiecare dată. Care sunt probabilităţile de echilibru?

Soluţie: Starea s_i: în locaţia unde se află profesorul se găsesc i umbrele, $i = \overline{0,2}$. Matricea probabilităţilor de tranziţie este:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 \end{bmatrix}$$

Stabilitatea pe termen lung a lanţurilor Markov - exemple

Se observă că lanţul are o singură clasă recurentă care este neperiodică, deci se poate aplica teorema de mai sus şi ecuaţiile de echilibru sunt

$$\pi_0 = (1-p)\pi_2, \pi_1 = (1-p)\pi_1 + p\pi_2 \text{ şi } \pi_2 = \pi_0 + p\pi_1.$$

rezolvând sistemul (împreună cu ecuaţia de normalizare) obţinem

$$\pi_0 = \frac{1-p}{3-p}, \pi_1 = \frac{1}{3-p}, \pi_2 = \frac{1}{3-p} \clubsuit$$

Exerciţii pentru seminar

- **Lanţuri Markov:** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
- **Rezervă:** 5, 9, 10, 11.

Lanţuri Markov - exerciţii

1. O metodă naivă de a prezice starea vremii este următoarea: starea meteo de mâine este aceeaşi cu cea de astăzi. Vom presupune că acest tip de predicţie este adevărat în 75% dintre cazuri. Pentru a simplifica să spunem că există doar două tipuri de vreme: "însorită" sau "ploioasă". Construiţi lanţul Markov al stărilor meteo, determinaţi digraful de tranziţie şi probabilităţile de echilibru ale stărilor.

2. Metoda anterioară de prezicere a stării vremii este modificată în cazul unui oraş însorit majoritatea timpului, astfel: probabilitatea de a trece de la o zi ploioasa la una însorită este 0.5, iar probabilitatea de a trece de la o zi însorită la una ploioasă este 0.1. Refaceţi calculele de mai sus şi determinaţi digraful de tranziţie în aceste condiţii.

3. Desenaţi digraful de tranziţie al unui lanţ Markov care să aibă mai multe clase recurente şi mai multe stări tranzitorii.

4. Desenaţi digraful de tranziţie al unui lanţ Markov care să aibă o clasă recurentă periodică şi două stări tranzitorii.

Lanţuri Markov - exerciţii

5. Desenaţi digraful de tranziţie al unui lanţ Markov care să aibă două clase recurente neperiodice şi o stare tranzitorie.

6. Se dă un lanţ Markov omogen cu patru stări a cărui matrice de tranziţie este următoarea:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

(a) Desenaţi digraful de tranziţie.

(b) Determinaţi clasele recurente şi stările tranzitorii.

(c) Există vreo clasă periodică?

7. Un profesor dă teste care pot fi dificile, medii sau uşoare. Dacă, la un moment dat, dă un test dificil, următorul test va fi dificil, mediu sau uşor, cu aceeaşi probabilitate. Dacă, însă dă un test mediu sau uşor, atunci următorul test va fi dificil cu probabilitate 0.5 şi mediu sau uşor cu aceeaşi probabilitate 0.25.

Lanţuri Markov - exerciţii

Construiţi un lanţ Markov corespunzător şi determinaţi probabilităţile de echilibru ale stărilor. (*Indicaţie: stările vor fi: ultimul test dat a fost dificil, mediu, respectiv uşor.*)

8. Un muzeu are în custodie trei pânze de Renoir, două de Cézanne şi una de Monet, dar are spaţiu pentruy a expune doar una dintre aceste pânze. Astfel că tabloul expus este schimbat în fiecare lună cu unul dintre celelalte cinci aleator şi uniform. Găsiţi matricea de tranziţie a acestul lanţ Markov.

9. Refaceţi exerciţiul anterior în următoarele condiţii: următorul tablou expus este ales aleator şi uniform dintre tablourile unui alt pictor (diferit de cel curent).

Lanţuri Markov - exerciţii

10. Un hipermarket poate vinde în fiecare zi o cantitate foarte mare de bunuri, o cantitate medie sau o cantitate mică; în anumite zile hipermarketul se inchide pentru reaprovizionare. Dacă o zi are vânzări foarte mari atunci a doua zi va fi de aprovizionare, cu probabilitate 0.8 sau va fi o zi cu vânzări mici, cu probabilitate 0.2. După o zi cu vânzări medii urmează o zi cu vanzări mari (cu probabilitate 0.4) sau una cu vânzări medii (0.6). După o zi cu vânzări mici sau dupa o aprovizionare urmează o zi cu vânzări mici, medii sau mari cu probabilitate 0.3, 0.3, respectiv 0.4.

(a) Construiţi un lanţ Markov, desenaţi digraful de tranziţie şi arătaţi că există o singură clasă recurentă, neperiodică.

(b) Determinaţi probabilităţile de echilibru ale stărilor.

Lanţuri Markov - exerciţii

11. (Difuzia Ehrenfest) într-o urnă avem n bile, unele albe şi unele negre. La fiecare pas, fie, cu probabilitate $p \in (0, 1)$, scoatem din urnă o bilă şi o înlocuim în urnă cu o bilă de cealaltă culoare, fie nu facem nimic, cu probabilitate $(1 - p)$. Scrieţi ecuaţiile de echilibru. Care sunt probabilităţile de echilibru pentru $n = 3$?
(*Indicaţie: starea* s_i *va fi: în urnă sunt* i *bile albe,* $0 \leqslant i \leqslant n$.)
12*. Un profesor superstiţios care lucrează într-o clădire circulară cu m uşi (m impar), nu foloseşte niciodată de două ori la rând aceeaşi uşă. El foloseşte cu probabilitate p (respectiv $(1 - p)$) uşa alăturată în sens orar (respectiv antiorar) uşii utilizate ultima oară. Care este probabilitatea ca o anumită uşă să fie utilizată într-un viitor foarte îndepărtat?
(*Indicaţie: starea* s_i*: ultima uşă utilizată a fost uşa* i*; trebuie găsite probabilităţile de echilibru* π_i.)

Lanţuri Markov - exerciţii

13*. Considerăm un lanţ Markov cu două stări s_1 şi s_2, cu probabilităţile de tranziţie ($p, q \in (0,1)$):

$$p_{11} = 1 - p, p_{12} = p, p_{21} = q \text{ şi } p_{22} = 1 - q.$$

(a) Arătaţi că cele două stări formează o clasă recurentă neperiodică.

(b) Utilizând ecuaţia lui Chapman-Kolmogorov, demonstraţi prin inducţie că

$$r_{11}(n) = \frac{q}{p+q} + \frac{p(1-p-q)^n}{p+q}, r_{12}(n) = \frac{p}{p+q} - \frac{p(1-p-q)^n}{p+q},$$

$$r_{21}(n) = \frac{q}{p+q} - \frac{q(1-p-q)^n}{p+q}, r_{22}(n) = \frac{p}{p+q} + \frac{q(1-p-q)^n}{p+q}.$$

14. Arătaţi că adunând primele $(m-1)$ ecuaţii de echilibru o obţinem pe a m-a.

Bibliography

- Bertsekas, D. P., J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scietific, 2002.
- Gordon, H., *Discrete Probability*, Springer Verlag, New York, 1997.
- Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Scahaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.