

Teoria probabilităților discrete - Curs 5

Olariu E. Florentin

Martie, 2016

Table of contents

- 1 Repartiții comune și variabile aleatoare independente
 - Covarianța a două variabile
 - Variabile aleatoare independente
- 2 Variabile aleatoare - inegalități
 - Introducere
 - Inegalitățile lui Markov și Cebâșev
 - Inegalitatea lui Chernoff
 - Inegalitatea lui Hoeffding
- 3 Exerciții
 - Repartiții comune
 - Inegalitățile lui Markov și Cebâșev
- 4 Anexa 1
- 5 Bibliography

Covarianța a două variabile

discrete

Teoria probabilităților discrete

Teoria probabilităților discrete

Teoria

Definition 1.1

Fie X și Y două variabile aleatoare discrete ca mai sus, care admit medie fiecare.

(i) *Covarianța celor două variabile (dacă există) este definită prin*

$$\begin{aligned} \text{cov}[X, Y] &= M[(X - M[X])(Y - M[Y])] = \\ &= \sum_{i,j} (x_i - M[X])(y_j - M[Y]) P\{X = x_i \cap Y = y_j\}. \end{aligned}$$

(ii) *Corelația sau coeficientul de corelație a celor două variabile cu dispersii nenule este*

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}[X, Y]}{D[X]D[Y]}.$$

Repartiția comună și covarianța - exemplu

Exemplu. Se dau două urne: U_1 care conține două bile albe, două negre și trei bile roșii și U_2 care conține trei bile albe, două negre și o bilă roșie. Din prima urnă se extrage o bilă care se introduce în cea de-a doua urnă, iar apoi se extrage o bilă din cea de-a doua urnă. Se notează cu X numărul de bile albe obținute și cu Y numărul de bile negre obținute.

- (a) Să se determine repartiția comună a variabilelor X și Y .
- (b) Să se determine repartiția și apoi media variabilei XY .
- (c) Să se determine covarianța și corelația celor două variabile.

Soluție: Observăm că variabilele X și Y sunt dependente: sunt legate prin relația $X + Y \leq 2$. Notăm cu A_i evenimentul "a i -a bilă extrasă este albă", cu B_i evenimentul "a i -a bilă extrasă este neagră" și cu C_i evenimentul "a i -a bilă extrasă este roșie" ($i = \overline{1, 2}$).

Repartiția comună și covarianța - exemplu

		X			
		0	1	2	
Y	0	6/49	11/49	8/49	25/49
	1	?	?	0	?
	2	?	0	0	?
		?	?	8/49	

Covarianța a două variabile

discrete

Teoria probabilităților discrete

Teoria probabilităților discrete

Teoria

Proposition 1.1

Fie X și Y două variabile aleatoare discrete care admit medie. Atunci

- (i) $cov[X, Y] = M[XY] - M[X]M[Y]$.
- (ii) $D^2[X + Y] = D^2[X] + 2cov[X, Y] + D^2[Y]$.
- (iii) $-1 \leq \rho[X, Y] = \rho[Y, X] \leq 1$ și $\rho[X, X] = 1$ (i. e., $cov[X, X] = D^2[X]$).
- (iv) (exercițiu) $\rho[aX + b, Y] = \rho[X, Y]$, dacă $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$.
- (v) $cov[aX + bY + c, Z] = a \cdot cov[X, Z] + b \cdot cov[Y, Z]$, pentru $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- (vi) (exercițiu) $cov \left[\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m cov[X_i, Y_j]$.

Covarianța a două variabile - exemplu

Exemplu. Fie X_1, Y_1 și X_2, Y_2 două perechi de variabile aleatoare având următoarele tablouri de repartiție comună:

		X_1		
		1	2	
Y_1	2	1/4	1/4	1/2
	4	1/4	1/4	1/2
		1/2	1/2	

		X_2		
		1	2	
Y_2	2	1/2	0	1/2
	4	0	1/2	1/2
		1/2	1/2	

Arătați că $\rho[X_1, Y_1] \neq \rho[X_2, Y_2]$ și $cov[X_1, Y_1] \neq cov[X_2, Y_2]$.

Covarianța a două variabile - exemplu

Soluție: Deoarece, după cum se observă din tablourile de mai sus, X_1 și X_2 (Y_1 și Y_2) au aceeași repartiție, $D[X_1] = D[X_2]$ și $D[Y_1] = D[Y_2]$, va fi deci suficient să arătăm: $cov[X_1, Y_1] \neq cov[X_2, Y_2]$.

$$M[X_1] = M[X_2] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, M[Y_1] = M[Y_2] = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Determinăm media variabilei $X_1 Y_1$ și apoi covarianța variabilelor X_1 și Y_1 :

$$X_1 Y_1 : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow M[X_1 Y_1] = 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{2},$$

$$cov[X_1, Y_1] = M[X_1 Y_1] - M[X_1]M[Y_1] = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0.$$

Covarianța a două variabile - exemplu

Apoi determinăm media variabilei $X_2 Y_2$ și covarianța variabilelor X_2 și Y_2 :

$$X_2 Y_2 : \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow M[X_2 Y_2] = 2 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{2} = 5,$$

de unde

$$\text{cov}[X_2, Y_2] = M[X_2 Y_2] - M[X_2]M[Y_2] = 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2} \clubsuit$$

Variabile aleatoare independente

Definition 2.1

Două variabile aleatoare X și Y se numesc independente dacă, pentru orice două mulțimi de valori A și B , a lui X , respectiv Y , avem

$$P\{(X \in A) \cap (Y \in B)\} = P\{X \in A\} \cdot P\{Y \in B\}.$$

Deoarece $P\{X = x_i \cap Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} = p_i \cdot q_j$, în acest caz, repartiția comună poate fi calculată mai simplu: $r_{ij} = p_i q_j$.

Theorem 2.1

Fie X și Y variabile aleatoare discrete independente. Atunci:

- (i) $M[XY] = M[X]M[Y]$.
- (ii) $D^2[X + Y] = D^2[X] + D^2[Y]$.
- (iii) $cov[X, Y] = 0$.

Variabile aleatoare independente - exemplu

Exemplu. Se aruncă două zaruri. Să se determine media produsului și dispersia sumei.

Soluție: Fie X_1 și X_2 rezultatele de pe cele două zaruri. Aceste două variabile sunt independente (dar și identic repartizate), deci

$$M[X_1 X_2] = M[X_1] M[X_2] = \frac{49}{4} \text{ și } D^2[X_1 + X_2] = D^2[X_1] + D^2[X_2]. \clubsuit$$

Introducere

- Rezultatele din această secțiune ne ajută să determinăm majoranți și minoranți pentru probabilitățile care implică o variabilă aleatoare, în cazul în care se cunosc media sau media și dispersia acesteia.

Inegalitatea lui Markov

Theorem 2.1

(Inegalitatea lui Markov.) Fie $X \geq 0$ o variabilă aleatoare cu media $M[X] = \mu$. Atunci

$$P\{X \geq t\} \leq \frac{\mu}{t}, \forall t > 0.$$

proof: în cazul în care variabila X este discretă și repartiția ei este

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix},$$

unde $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$. Să presupunem că $t \in (x_{k-1}, x_k]$ ($x_0 = -\infty$), atunci

$$\mu = M[X] = \sum_i p_i x_i \geq \sum_{i \geq k} p_i x_i \geq t \sum_{i \geq k} p_i = t \cdot P\{X \geq t\}.$$

Inegalitatea lui Markov

Proposition 2.1

Egalitatea are loc în inegalitatea lui Markov dacă și numai dacă

$$P\{X = 0\} + P\{X = t\} = 1.$$

proof: Dacă reluăm șirul de inegalități din demonstrația Teoremei 2.1, transformându-le în egalități, obținem

$$p_i x_i = 0, \forall i < k \text{ și } p_i x_i = p_i t, \forall t \geq k.$$

Deoarece în tabloul de repartiție considerăm doar valori posibile ale variabilei (i. e., $p_i > 0, \forall i$), urmează că

X are doar două valori $x_1 = 0$ și $x_2 = t$ sau are o singură valoare $X \equiv t$.



Inegalitatea lui Markov - exemplu

Exemplu. Fie $X \geq 0$ o variabilă aleatoare cu $M[X] = 1$. Să se majoreze probabilitățile

$$P\{X \geq 2\}, P\{X \geq 4\} \text{ și } P\{X \geq 2^k\}.$$

Soluție: Conform inegalității lui Markov

$$P\{X \geq 2\} \leq \frac{M[X]}{2} = \frac{1}{2}, \quad P\{X \geq 4\} \leq \frac{M[X]}{4} = \frac{1}{4},$$

$$P\{X \geq 2^k\} \leq \frac{M[X]}{2^k} = \frac{1}{2^k} \spadesuit$$

Observație. Probabilitatea ca o variabilă $X \geq 0$ cu medie finită, să aibă valori mai mari sau egale decât un număr t , foarte mare, devine foarte mică pe măsură ce t crește.

Inegalitatea lui Cebâșev

Theorem 2.2

(Inegalitatea lui Cebâșev.) Fie X o variabilă aleatoare cu media $M[X] = \mu$ și dispersia $D^2[X] = \sigma^2$. Atunci

$$P\{|X - \mu| \geq t\} \leq \frac{\sigma^2}{t^2}, \forall t > 0.$$

proof:

Considerăm variabila $Y = (X - \mu)^2$ care are $M[Y] = D^2[X]$, conform inegalității lui Markov,

$$P\{|X - \mu| \geq t\} = P\{(X - \mu)^2 \geq t^2\} \leq \frac{M[Y]}{t^2} = \frac{\sigma^2}{t^2}, \forall t > 0.$$



Inegalitatea lui Cebâșev

- O posibilă interpretare a acestei inegalități este următoarea: dacă o variabilă are o dispersie mică, atunci probabilitatea ca această variabilă să ia valori departe de medie este scăzută.
- Următoarea consecință a inegalității lui Cebâșev spune că probabilitatea ca o variabilă să ia o valoare depărtată de medie la cel puțin k deviații standard este cel mult $\frac{1}{k^2}$.
- În acest sens se poate spune că deviația standard este o măsură înprăstierii valorilor variabilei în jurul mediei.

Inegalitatea lui Cebășev

Corollary 2.1

Fie X o variabilă cu media $M[X] = \mu$ și dispersia $D^2[X] = \sigma^2 > 0$.

$$P\{|X - \mu| \geq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2}, \forall k > 0.$$

Proposition 2.2

Egalitatea are loc în inegalitatea lui Cebășev dacă și numai dacă

$$P\{X = \mu - t\} + P\{X = \mu\} + P\{X = \mu + t\} = 1.$$

proof: Inegalitatea lui Cebășev se bazează pe cea a lui Markov, deci vom avea egalitate dacă și numai dacă $P\{Y = 0\} + P\{Y = t^2\} = 1$.

$$\begin{aligned} P\{Y = 0\} &= P\{(X - \mu)^2 = 0\} = P\{X = \mu\}, \text{ iar} \\ P\{Y = t^2\} &= P\{(X - \mu)^2 = t^2\} = P\{|X - \mu| = t\} = \\ &= P\{X - \mu = t\} + P\{X - \mu = -t\}. \end{aligned}$$

Inegalitatea lui Cebășev - exemplu

Exemplu. Fie X o variabilă aleatoare cu $M[X] = 1$ și $D^2[X] = 4$. Să se majoreze probabilitățile

$$P\{X \geq 3\}, P\{|X - 1| \geq 6\} \text{ și } P\{X \leq -9\}.$$

Soluție: Conform inegalității lui Cebășev

$$P\{X \geq 3\} \leq P\{|X - 1| \geq 2\} \leq \frac{D^2[X]}{2^2} = 1,$$

$$P\{|X - 1| \geq 6\} \leq \frac{4}{9},$$

$$P\{X \leq -9\} \leq P\{|X - 1| \geq 10\} \leq \frac{1}{25} \clubsuit$$

Inegalitatea lui Chernoff

Theorem 3.1

Fie $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ variabile independente, repartizate Bernoulli fiecare cu parametrul p_i . Dacă notăm $X = \sum_{i=1}^n X_i$, $\mu = M[X]$, atunci

$$P\{X > (1 + \delta)\mu\} < \left[\frac{e^\delta}{(1 + \delta)^{1+\delta}} \right]^\mu \quad (\text{upper tail}), \forall \delta > 0 \text{ și}$$

$$P\{X < (1 - \delta)\mu\} < \left[\frac{e^{-\delta}}{(1 - \delta)^{1-\delta}} \right]^\mu \quad (\text{lower tail}), \forall \delta \in [0, 1).$$

Inegalitatea lui Chernoff

- Prima dintre inegalitățile de mai sus arată că suma unui număr finit de variabile Bernoulli independente scade exponențial pe măsură ce ne depărtăm (către dreapta) de media acestei sume:

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}} \right]^\mu = 0.$$

- Ambele inegalități de mai sus au forme mai simple după cum vom vedea mai jos.

Inegalitatea lui Chernoff

Corollary 3.1

Fie $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ variabile independente, repartizate Bernoulli fiecare cu parametrul p_i . Dacă notăm $X = \sum_{i=1}^n X_i$, $\mu = M[X]$, atunci

$$P\{X > (1 \pm \delta)\mu\} < \exp\left(\frac{-\delta^2 \mu}{2 + \delta}\right), \forall \delta \geq 0.$$

probabilităților discrete

Teoria probabilităților discrete

Teoria probabilităților discrete

Teoria probabilităților discrete

Teoria probabilităților discrete

Teoria

probabilităților discrete

Teoria probabilităților discrete

Teoria probabilităților discrete

Teoria probabilităților discrete

Teoria probabilităților discrete

Teoria

Inegalitatea lui Chernoff - o aplicație

Aplicație. Se aruncă de n ori o monedă și fie X_i o variabilă egală cu 1 dacă apare stema la a i -a aruncare și 0 altfel. $X = \sum_{i=1}^n X_i$ numără de câte ori apare stema în cele n aruncări. Știm că

$$M[X_i] = p_i = \frac{1}{2}, D^2[X_i] = p_i(1 - p_i) = \frac{1}{4},$$

$$\mu = M[X] = \sum_{i=1}^n M[X_i] = \frac{n}{2} \text{ și } \sigma^2 = D^2[X] = \sum_{i=1}^n D^2[X_i] = \frac{n}{4}.$$

(Aceasta este o altă metodă de a calcula caracteristicile unei variabile binomiale.)

Folosind inegalitatea lui Chernoff putem evalua probabilitatea ca variabila X să fie mai mare decât media astfel

Inegalitatea lui Chernoff - o aplicație

$$P\{X > \mu + \lambda\} = P\left\{X > \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \mu\right\} < \exp\left(\frac{-\lambda^2}{\lambda + 2\mu}\right).$$

Vom utiliza acum și inegalitățile lui Markov și Cebâșev:

$$P\{X \geq \mu + \lambda\} \leq \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{n}{n + 2\lambda} \text{ (Markov),}$$

$$P\{X \geq \mu + \lambda\} \leq P\{|X - \mu| \geq \lambda\} \leq \frac{\sigma^2}{\lambda^2} = \frac{n}{4\lambda^2} \text{ (Cebâșev).}$$

$$P\{X > \mu + \lambda\} < \exp\left(\frac{-\lambda^2}{\lambda + \sqrt{n}}\right) \text{ (Chernoff).}$$

Se observă că inegalitatea lui Markov este mai slabă decât aceea a lui Cebâșev, iar aceasta este mai slabă decât cea a lui Chernoff. Pe de altă parte însă, inegalitatea lui Markov (ca și cea a lui Cebâșev) nu necesită independența celor n variabile aleatoare; în al doilea caz însă, independența poate ușura calculul dispersiei lui X .

Inegalitatea lui Hoeffding

discrete

Teoria probabilităților discrete

Teoria probabilităților discrete

Teoria

Theorem 4.1

Fie X_1, X_2, \dots, X_n variabile aleatoare independente mărginite: $a_i \leq X_i \leq b_i$, $a_i \neq b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$ și $X = \sum_{i=1}^n X_i$. Atunci

$$P\{X - M[X] \geq \pm \delta\} \leq \exp\left(-\frac{2\delta^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right), \forall \delta \geq 0.$$

probabilităților discrete

teoria probabilităților discrete

teoria probabilităților discrete

Corollary 4.1

În condițiile teoremei avem

$$P\{|X - M[X]| \geq \delta\} \leq 2 \exp\left(-\frac{2\delta^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right), \forall \delta \geq 0.$$

Exerciții pentru seminar

- **Repartiții comune:** II.1, II.2, II.3, II.5, II.6, II.9.
- **Inegalitățile lui Markov și Cebâșev:** III.1, III.2, III.3, III.4, III.6.
- **Rezervă:** II.4, II.8, II.10, III.5.

Exerciții - covarianța variabilelor aleatoare

I.1. Demonstrați că $(X, Y$ și Z sunt variabile aleatoare)

(a) $\text{cov}[aX + bY + c, Z] = a \cdot \text{cov}[X, Z] + b \cdot \text{cov}[Y, Z], \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$

(b) $\text{cov}\left[\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{cov}[X_i, Y_j],$ pentru orice variabile aleatoare $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ și $(Y_j)_{1 \leq j \leq m}$ (inducție).

(c) $D^2\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n D^2[X_i] + 2 \sum_{i < j} \text{cov}[X_i, X_j],$ pentru orice variabile aleatoare $X_1, X_2, \dots, X_n.$

Exerciții - repartiții comune și variabile independente.

II.1. Să presupunem că X și Y au următoarea repartiție comună

		Y		
		-3	2	4
X	1	0.2	?	0.2
	3	0.3	0.05	0.05

- Determinați repartițiile individuale ale variabilelor X și Y .
- Calculați $cov[X, Y]$ și $\rho[X, Y]$.
- Sunt X și Y independente?

Exerciții - repartiții comune și variabile independente.

II.2. O monedă este aruncată de trei ori. Fie X o variabilă egală cu 1 dacă apare stema și 0 dacă apare banul la prima aruncare, iar Y o variabilă egală cu numărul de apariții ale stemei. Determinați:

- Repartiția comună acelor două variabile.
- Repartițiile individuale ale lui X și Y și covarianța lor.

II.3. Fie X o variabilă aleatoare cu următoarea distribuție și $Y = X^2$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Determinați

- Repartiția lui Y și repartiția comună acelor două variabile.
- Covarianța și corelația celor două variabile.

Exerciții - repartiții comune și variabile independente.

II.4. Fie X și Y două variabile aleatoare independente cu următoarele distribuții

$$X: \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad Y: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinați repartiția comună a celor două variabile și covarianța lor.
- (b) Determinați repartiția și media variabilei $X + Y$.

II.5. Într-o urnă sunt trei bile roșii și cinci bile negre. Se extrage din urnă o bilă și se înlocuiește cu o bilă de culoare diferită. Apoi se extrage încă o bilă. Se notează cu X numărul de bile roșii și cu Y numărul de bile negre extrase.

- (a) Să se determine repartiția comună a variabilelor X și Y .
- (b) Variabilele X și Y sunt independente?

Exerciții - repartiții comune și variabile independente.

II.6. Într-o urnă sunt patru bile albe (două numerotate cu 1 și două numerotate cu 2) și trei bile negre (două numerotate cu 1 și una numerotată cu 2). Din urnă se extrag succesiv și fără întoarcere două bile. Fie X numărul de bile albe obținute și Y numărul de bile numerotate cu 2.

- (a) Să se determine repartiția comună a variabilelor X și Y .
- (b) Variabilele X și Y sunt independente?

II.7. O monedă se aruncă de trei ori. Se notează cu X numărul de steme care apar la primele două aruncări și cu Y numărul de steme care apar la ultima aruncare. Să se determine

- (a) repartițiile variabilelor X și Y .
- (b) repartiția comună a variabilelor X și Y . (Sunt X și Y independente?)
- (c) repartiția variabilei $X + Y$.

Exerciții - repartiții comune și variabile independente.

II.8. Variabilele X și Y au repartiția comună dată mai jos.

		X			
		-1	1	2	3
Y	-1	0	1/36	1/6	1/12
	0	1/18	0	1/18	0
	1	0	1/36	1/6	1/12
	2	1/12	0	1/12	?

- Să se calculeze $P(X \geq 2 \text{ și } Y \leq 0)$.
- Sunt variabilele X și Y independente?
- Să se determine repartiția variabilei $X + Y$.

II.9. Se aruncă două monede A și B de trei ori; moneda B este falsificată: probabilitatea de a apărea stema este 0.4. Fie X variabila care numără de câte ori apare stema pe moneda A și Y cea care numără de câte ori apare stema pe moneda B .

Exerciții - repartiții comune și variabile independente.

- (a) Sunt variabilele X și Y independente?
- (b) Să se determine repartiția comună a variabilelor X și Y .
- (c) Să se calculeze probabilitățile $P(X = Y)$, $P(X > Y)$ și $P(X + Y \geq 4)$.

II.10. Repartiția comună a două variabile X și Y este dată prin

$$p(X = x_i \cap Y = y_j) = \begin{cases} kx_i y_j, & x_i = \overline{1, 2}, y_j = \overline{1, 3} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}, \text{ unde } k \in \mathbb{R}.$$

- (a) Să se determine k .
- (b) Să se determine repartițiile celor două variabile X și Y .
- (c) Sunt variabilele X și Y independente?

Exerciții - Markov și Cebășev

III.1. O variabilă aleatoare $X \geq 0$ are media și dispersia egale amândouă cu 20. Folosind inegalitățile lui Markov și Cebășev ce se poate spune despre probabilitatea $P\{X \geq 40\}$? Dar despre $P\{-60 \leq X \leq 100\}$?

III.2. Se dă o variabilă aleatoare $X \geq 0$ cu $M[X] = D^2[X] = 1$. Majorați sau minorați, corespunzător, folosind inegalitățile lui Markov și Cebășev, următoarele probabilități:

$$P\{X \geq 2\}, P\{|X - 1| \geq 2\}, P\{X \leq -3\}$$

III.3. Probabilitatea de a apărea stema la o aruncare a unei monede falsificate este 0.3. Moneda este aruncată de 300 de ori. Majorați probabilitatea ca stema să apară de cel puțin 100 de ori.

III.4. Probabilitatea de a apărea stema la o aruncare a unei monede falsificate este 0.2. Moneda este aruncată de n ori. Găsiți un majorant pentru probabilitatea ca stema să apară în cel puțin 50% din cazuri.

Exerciții - inegalitățile lui Markov și Cebășev

III.5. Se aruncă o monedă de n ori. Fie X numărul de apariții ale stemei. Găsiți câte un majorant (cât mai mic) pentru

(a) $P\{|X - n/2| > \sqrt{n}\}$ și $P\{X > n/2 + \sqrt{n}\}$;

(b) $P\{|X - n/2| > 5\sqrt{n}\}$ și $P\{X > n/2 + 5\sqrt{n}\}$.

III.6. Fie X o variabilă repartizată a Poisson cu parametrul λ . Estimați probabilitatea ca X să devieze de la medie cu cel puțin $2\sqrt{\lambda}$.

III.7*. (Borel-Cantelli) Fie $(A_n)_{n \geq 1}$ un șir de evenimente cu $\sum_{n \geq 1} P(A_n) < +\infty$. Arătați că probabilitatea ca cel mult k dintre aceste evenimente să se producă este cel puțin

$$1 - \frac{\sum_{n \geq 1} P(A_n)}{k}.$$

(Indicație: Folosiți inegalitatea lui Markov pentru o variabilă care numără câte din evenimente se realizează.)

Anexa 1

dem.: (pentru Propoziția 1.1) Vom considera doar cazul în care variabilele sunt amândouă finite. Pentru relația (i)

$$\begin{aligned} cov[X, Y] &= M[(X - M[X])(Y - M[Y])] = \\ &= M[XY - M[Y]X - M[X]Y + M[X]M[Y]] = \\ &= M[XY] - 2M[X]M[Y] + M[X]M[Y] = M[XY] - M[X]M[Y]. \end{aligned}$$

Pentru cea de-a doua relație

$$\begin{aligned} D^2[X + Y] &= M[(X + Y)^2] - M^2[X + Y] = \\ &= M[X^2 + 2XY + Y^2] - (M^2[X] + 2M[X]M[Y] + M^2[Y]) = \\ &= (M[X^2] - M^2[X]) + 2(M[XY] - M[X]M[Y]) + (M[Y^2] - M^2[Y]) = \\ &= D^2[X] + 2cov[X, Y] + D^2[Y]. \end{aligned}$$

Anexa 1

În continuare, pentru (iii), deoarece $0 \leq D^2[tX + Y] = t^2 D^2[X] + 2t \cdot cov[X, Y] + D^2[Y]$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, trebuie ca discriminantul acestei ecuații de gradul doi să fie mai mic sau egal cu zero:

$$\Delta = 4cov^2[X, Y] - 4D^2[X]D^2[Y] \leq 0 \Leftrightarrow |cov[X, Y]| \leq D[X]D[Y].$$

Apoi, $cov[X, X] = \frac{1}{2} (D^2[2X] - 2D^2[X]) = D^2[X]$.

Proprietatea (v):

$$\begin{aligned} cov[aX + bY + c, Z] &= M[aXZ + bYZ + cZ] - M[aX + bY + c]M[Z] = \\ &= aM[XZ] + bM[YZ] + cM[Z] - (aM[X] + bM[Y] + c)M[Z]. \blacksquare \end{aligned}$$

Anexa 1

dem.: (pentru teorema 2.1) Vom considera, ca și mai sus, doar cazul în care variabilele sunt amândouă finite. Pentru (i):

$$\begin{aligned}
 M[XY] &= \sum_z z P\{XY = z\} = \sum_z z \cdot \left(\sum_{z=x_i y_j} P\{X = x_i \cap Y = y_j\} \right) = \\
 &= \sum_{i,j} x_i y_j P\{X = x_i \cap Y = y_j\} = \sum_{i,j} x_i y_j P\{X = x_i\} P\{Y = y_j\} = \\
 &= \left(\sum_i x_i P\{X = x_i\} \right) \cdot \left(\sum_j y_j P\{Y = y_j\} \right) = M[X] M[Y].
 \end{aligned}$$

Anexa 1

Din această relație rezultă, în particular, (iii): $cov[X, Y] = M[XY] - M[X]M[Y] = 0$.

Pentru (ii) folosim Propoziția 1.1 sau procedăm direct:

$$\begin{aligned} D^2[X + Y] &= M[(X + Y)^2] - (M[X + Y])^2 = \\ &= M[X^2 + 2XY + Y^2] - (M[X] + M[Y])^2 = \\ &= M[X^2] + 2M[XY] + M[Y^2] - M^2[X] - 2M[X]M[Y] - M^2[Y] = \\ &= M[X^2] - M^2[X] + M[Y^2] - M^2[Y] = D^2[X] + D^2[Y]. \blacksquare \end{aligned}$$

Anexa 1

dem.: (pentru teorema 3.1) Fie $t > 0$, atunci, conform inegalității lui Markov, avem

$$P\{X > (1 + \delta)\mu\} = P\{e^{tX} > e^{t(1+\delta)\mu}\} < \frac{M[e^{tX}]}{e^{t(1+\delta)\mu}}.$$

Folosind independența variabilelor

$$\begin{aligned} M[e^{tX}] &= M\left[\exp\left(t \sum_{i=1}^n X_i\right)\right] = M\left[\prod_{i=1}^n e^{tX_i}\right] = \\ &= \prod_{i=1}^n M[e^{tX_i}] = \prod_{i=1}^n [p_i e^t + (1 - p_i)], \end{aligned}$$

Astfel

$$P\{X > (1 + \delta)\mu\} < \frac{\prod_{i=1}^n [1 + p_i(e^t - 1)]}{e^{t(1+\delta)\mu}}.$$

Anexa 1

Folosind inegalitatea $x + 1 < e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, obținem

$$P\{X > (1 + \delta)\mu\} < \frac{\prod_{i=1}^n [\exp(p_i(e^t - 1))]}{e^{t(1+\delta)\mu}} = \frac{\exp\left(\sum_{i=1}^n p_i(e^t - 1)\right)}{e^{t(1+\delta)\mu}},$$

deci

$$P\{X > (1 + \delta)\mu\} < \frac{\exp \mu(e^t - 1)}{\exp t\mu(1 + \delta)}, \forall t > 0.$$

Căutăm minimul funcției $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin $f(t) = (e^t - 1)\mu - t\mu(1 + \delta)$:

$$f'(t) = \mu(e^t - 1 - \delta), f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \ln(1 + \delta),$$

Anexa 1

f este descrescătoare pe intervalul $(0, \ln(1 + \delta)]$ și crescătoare pe intervalul $[\ln(1 + \delta), +\infty)$.

Astfel, obținem, în final

$$P\{X > (1 + \delta)\mu\} < \left[\frac{e^\delta}{(1 + \delta)^{1+\delta}} \right]^\mu.$$

O demonstrație similară se poate face pentru cealaltă inegalitate din teoremă. ■

Anexa 1

proof: (pentru corolarul 3.1) Putem rescrie majorantul din Teorema 3.1 astfel

$$\left[\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}} \right]^\mu = (\exp[\delta - (1+\delta)\ln(1+\delta)])^\mu.$$

Se poate arăta că $\ln(1+\delta) > \frac{2\delta}{1+\delta}$, $\forall \delta > 0$, de unde

$$\delta - (1+\delta)\ln(1+\delta) \leq \frac{-\delta^2\mu}{2+\delta}.$$



Anexa 1

dem.: (pentru teorema 4.1) Este suficient să abordăm doar una dintre inegalități:

$$\begin{aligned}
 P\{X - M[X] \geq \delta\} &= P\{e^{tX} \geq e^{t(\delta + M[X])}\} \stackrel{(\text{Markov})}{\leq} \frac{M[e^{tX}]}{e^{t(\delta + M[X])}} \leq \\
 &\stackrel{(\text{indep.})}{\leq} \exp[-t(M[X] + \delta)] \cdot \prod_{i=1}^n M[e^{tX_i}] = e^{-t\delta} \cdot \prod_{i=1}^n M[e^{tX_i}] e^{-tM[X_i]}.
 \end{aligned}$$

Pentru a majora în continuare, studiem funcția $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, dată prin $f(t) = e^t$:

$$f'(t) = f''(t) = e^t > 0, \forall t \in \mathbb{R}_+, \text{ deci } f \text{ este concavă pe } \mathbb{R}_+, \text{ i. e.,}$$

$$f[\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2] \leq \lambda f(t_1) + (1 - \lambda)f(t_2), \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+, \lambda \in [0, 1].$$

Anexa 1

Deoarece $X_i \in [a_i, b_i]$, putem scrie $X_i = \lambda a_i + (1 - \lambda)b_i$, unde $\lambda = \frac{X_i - a_i}{b_i - a_i} \in [0, 1]$. Astfel,

$$e^{tX_i} = \exp[t\lambda a_i + t(1 - \lambda)b_i] \leq \lambda e^{ta_i} + (1 - \lambda)e^{tb_i} \text{ de unde}$$

$$M[e^{tX_i}] \leq M[\lambda e^{ta_i} + (1 - \lambda)e^{tb_i}] = e^{ta_i} M\left[\frac{X_i - a_i}{b_i - a_i}\right] + e^{tb_i} M\left[\frac{b_i - X_i}{b_i - a_i}\right],$$

$$M[e^{t(X_i - M[X_i])}] \leq e^{-tM[X_i]} \left(e^{ta_i} \cdot \frac{M[X_i] - a_i}{b_i - a_i} + e^{tb_i} \cdot \frac{b_i - M[X_i]}{b_i - a_i} \right).$$

Vom arăta că expresia de mai sus este mai mică sau egală cu

$$\exp\left[\frac{t^2(b_i - a_i)^2}{8}\right].$$

Anexa 1

Pentru aceasta notăm $\theta = t(b_i - a_i)$ și $\alpha = \frac{M[X_i] - a_i}{b_i - a_i}$, considerăm funcția $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ (obținută prin logaritmare expresiei de mai sus):

$$g(\theta) = -\theta\alpha + \ln(1 - \alpha + \alpha e^\theta) - \frac{\theta^2}{8}$$

și arătăm că $g(\theta) \leq 0$, $\forall \theta \in \mathbb{R}_+$.

$$g'(\theta) = -\alpha - \frac{\theta}{4} + \frac{\alpha e^\theta}{(1 - \alpha) + \alpha e^\theta} = -\alpha - \frac{\theta}{4} + \frac{\alpha}{(1 - \alpha)e^{-\theta} + \alpha},$$

$$g''(\theta) = \frac{1}{4} + \frac{\alpha(1 - \alpha)e^{-\theta}}{[(1 - \alpha)e^{-\theta} + \alpha]^2} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{(1 - \alpha)e^{-\theta} + \alpha} \cdot \frac{(1 - \alpha)e^{-\theta}}{(1 - \alpha)e^{-\theta} + \alpha} \leq$$

Anexa 1

$$\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)e^{-\theta} + \alpha} + \frac{(1-\alpha)e^{-\theta}}{(1-\alpha)e^{-\theta} + \alpha} \right)^2 = 0$$

Conform formulei lui Taylor există un $\theta_0 \in [0, \theta]$, astfel în cât

$$g(\theta) = g(0) + g'(0)\frac{\theta}{1!} + g''(\theta_0)\frac{\theta_0^2}{2!} \leq 0.$$

Astfel

$$M \left[e^{t(X_i - M[X_i])} \right] \leq \exp \left[\frac{t^2(b_i - a_i)^2}{8} \right], \forall i$$

și de aici

$$P\{X - M[X] \geq \delta\} \leq \exp \left[\frac{t^2}{8} \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 - t\delta \right], \forall t \geq 0.$$

Anexa 1

Exponentul de mai sus este o funcție de gradul doi în t , care-și atinge
 minimul pentru $t = \frac{4\delta}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}$:

$$\exp \left[-\frac{t^2}{8} \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 - t\delta \right] \geq \exp \left[-\frac{2\delta^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} \right]$$

Bibliography



Bertsekas, D. P., J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scietific, 2002.



Hoeffding, W., *Probability inequalities for sums of bounded random variables*, J. of the Amer. Statistical Assoc. vol. 58, issue 301, pp. 13-30, 1963.



Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Scahaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.



Ross, S. M., *A First Course in Probability*, Prentice Hall, 5th edition, 1998.



Stone, C. J., *A Course in Probability and Statistics*, Duxbury Press, 1996.