Sortare

SD 2015/2016

Conținut

Sortare bazată pe comparații

- sortare prin interschimbare
- sortare prin inserție
- sortare prin selecție
- sortare prin interclasare (merge sort)
- sortare rapidă (quick sort)

Sortare prin numărare

Sortare prin distribuire

Problema sortării

- Forma 1:
  - Intrare: n, $(v_0, \ldots, v_{n-1})$
  - Ieșire: $(w_0, \ldots, w_{n-1})$ astfel încât $(w_0, \ldots, w_{n-1})$ este o permutare a $(v_0, \ldots, v_{n-1})$ si $w_0 \leq \ldots \leq w_{n-1}$
- Forma 2:
  - Intrare: n, $(R_0, \ldots, R_{n-1})$ cu cheile $k_0, \ldots, k_{n-1}$
  - Ieșire: $(R'_0, \ldots, R'_{n-1})$ astfel încât $(R'_0, \ldots, R'_{n-1})$ este o permutare a $(R_0, \ldots, R_{n-1})$ și $R'_0.k_0 \leq \ldots \leq R'_{n-1}.k_{n-1}$
- Structura de date
  Tablou $a[0..n-1]$
  $a[0] = v_0, \ldots, a[n-1] = v_{n-1}$

Conținut

- Sortare bazată pe comparații
  - sortare prin interschimbare
  - sortare prin inserție
  - sortare prin selecție
  - sortare prin interclasare (merge sort)
  - sortare rapidă (quick sort)
- Sortare prin numărare
- Sortare prin distribuire

Sortare prin interschimbare (*bubble-sort*)

- Principiul de bază:
  - (i, j) cu $i < j$ este o inversiune dacă $a[i] > a[j]$
  - Cât timp există o inversiune $(i, i+1)$ interschimbă $a[i]$ cu $a[i+1]$

- Algoritm:

Procedure *bubbleSort(a, n)*
begin
    $ultim \leftarrow n - 1$
    while $(ultim > 0)$ **do**
        $n1 \leftarrow ultim{-}1$; $ultim \leftarrow 0$
        for $i \leftarrow 0$ **to** $n1$ **do**
            if $(a[i] > a[i+1])$ **then**
                swap$(a[i], a[i+1])$
                $ultim \leftarrow i$
end

Sortare prin interschimbare - exemplu

	3 2 1 4 7 (n1 = 2)
3 7 2 1 4 (n1 = 3)	**2 3** 1 4 7
3 **7 2** 1 4	2 **3 1** 4 7
3 **2 7** 1 4	2 **1 3** 4 7
3 2 **7 1** 4	2 1 **3 4** 7
3 2 **1 7** 4	2 1 **3 4** 7
3 2 1 **7 4**	
3 2 1 **4 7**	**2 1** 3 4 7 (n1 = 0)
3 2 1 4 **7**	**1 2** 3 4 7
	1 2 3 4 7

Sortare prin interschimbare

- Analiza
  - Cazul cel mai nefavorabil
    $a[0] > a[1] > ... > a[n-1]$
    Timp căutare: $O(n-1+n-2+...+1) = O(n^2)$
    $T_{bubbleSort}(n) = O(n^2)$
  - Cazul cel mai favorabil: $O(n)$

Conținut

- Principiul de bază:
  presupunem $a[0..i-1]$ sortat
  inserează $a[i]$ astfel încât $a[0..i]$ devine sortat

- Algoritm (căutarea poziției lui $a[i]$ secvențial):

Procedure *insertSort(a, n)*
begin
 for $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
  $j \leftarrow i–1$ // $a[0..i-1]$ sortat
  $temp \leftarrow a[i]$ // caut locul lui temp
  while $((j \geq 0)$ *and* $(a[j] > temp))$ **do**
   $a[j+1] \leftarrow a[j]$
   $j \leftarrow j–1$
  if $(a[j+1]! = temp)$ **then**
   $a[j+1] \leftarrow temp$
end

Sortare prin inserție directă

- Exemplu

  3 **7** 2 1

  3 7 **2** 1

  2 3 7 **1**

  1 2 3 7

- Analiza
  - căutarea poziției i în $a[0..j-1]$ necesită $O(j-1)$ pași
  - cazul cel mai nefavorabil $a[0] > a[1] > ... > a[n-1]$

    Timp căutare: $O(1 + 2 + ... + n - 1) = O(n^2)$

    $T_{insertSort}(n) = O(n^2)$

  - Cazul cel mai favorabil: $O(n)$

Conținut

Sortare bazată pe comparații

- sortare prin interschimbare
- sortare prin inserție
- sortare prin selecție
- sortare prin interclasare (merge sort)
- sortare rapidă (quick sort)

Sortare prin numărare

Sortare prin distribuire

Sortare prin selecție

- Se aplică următoarea schemă:
  - pasul curent: selectează un element și-l duce pe poziția sa finală din tabloul sortat;
  - repetă pasul curent până când toate elementele ajung pe locurile finale.
- După modul de selectare a unui element:
  - Selecție naivă: alegerea elementelor în ordinea în care se află inițial (de la $n-1$ la 0 sau de la 0 la $n-1$)
  - Selecție sistematică: utilizare max-heap

Sortare prin selecție naivă

- In ordinea $n-1, n-2, ..., 1, 0$, adică:
  $(\forall i) 0 \leq i < n \implies a[i] = max\{a[0], ..., a[i]\}$

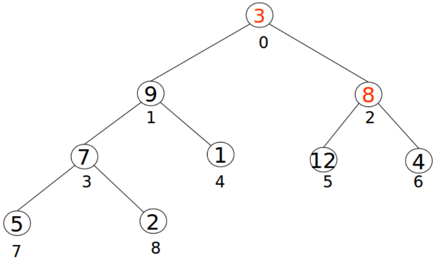
```
Procedure naivSort(a, n)
begin
    for i ← n − 1 to 1 do
        imax ← i
        for j ← i − 1 to 0 do
            if (a[j] > a[imax]) then
                imax ← j
        if (i! = imax) then
            swap(a[i], a[imax])
end
```

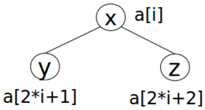
- Complexitatea timp in toate cazurile este $O(n^2)$

Etapa I

- organizează tabloul ca un max-heap: $(\forall k) 1 \leq k \leq n-1 \implies a[k] \leq a[(k-1)/2]$;
- inițial tabloul satisface proprietatea max-heap începând cu poziția $n/2$;
- introduce în max-heap elementele de pe pozițiile $n/2-1, n/2-2, \cdots, 1, 0$.

3	9	8	7	1	12	4	5	2
0	1	2	3	4	5	6	7	8

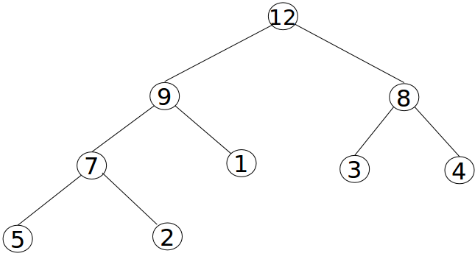




Heap sort (sortare prin selecție sistematică)

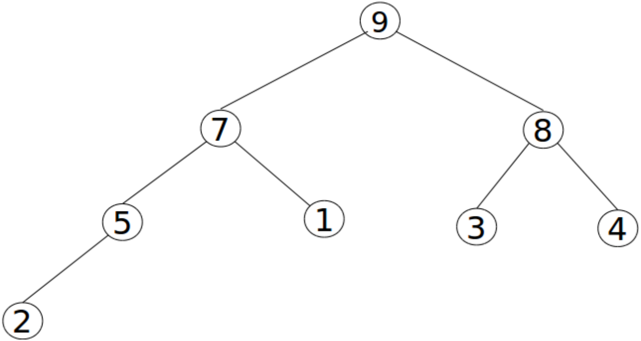
Etapa II

- selectează elementul maxim și-l duce la locul lui prin interschimbare cu ultimul;
- micșorează n cu 1 și apoi reface max-heapul;
- repetă pașii de mai sus până când toate elementele ajung pe locul lor.



Heap sort (sortare prin selecție sistematică)

9	7	8	5	1	3	4	2	12
0	1	2	3	4	5	6	7	8



Operația de introducere în heap

Procedure *insereazaAlTlea(a, n, t)*
begin
  $j \leftarrow t$
  $heap \leftarrow false$
  while $((2 * j + 1 < n)$ *and not heap*$)$ **do**
    $k \leftarrow 2 * j + 1$
    if $((k < n - 1)$ *and* $(a[k] < a[k+1]))$ **then**
      $k \leftarrow k + 1$
    if $(a[j] < a[k])$ **then**
      swap$(a[j], a[k])$
      $j \leftarrow k$
    else
      $heap \leftarrow true$
end

Heap sort (sortare prin selecție sistematică)

```
Procedure heapSort(a, n)
begin
    // construieste maxheap-ul
    for t ← (n − 1)/2 to 0 do
        insereazaAlTlea(a, n, t)
    // elimina
    r ← n − 1
    while (r > 0) do
        swap(a[0], a[r])
        insereazaAlTlea(a, r, 0)
        r ← r − 1
end
```

Heap sort - Exemplu

10	17	5	23	7	(n = 5)
10	**17**	<u>5</u>	<u>23</u>	<u>7</u>	
10	<u>23</u>	<u>5</u>	<u>17</u>	<u>7</u>	
23	10	5	17	7	
<u>23</u>	<u>17</u>	<u>5</u>	<u>10</u>	<u>7</u>	(max-heap n)

Heap sort - Exemplu

$\underline{23}$	$\underline{17}$	$\underline{5}$	$\underline{10}$	$\underline{7}$	(max-heap n)
$\underline{7}$	$\underline{17}$	$\underline{5}$	$\underline{10}$	23	
$\underline{17}$	$\underline{10}$	$\underline{5}$	$\underline{7}$	23	(max-heap n-1)
$\underline{7}$	$\underline{10}$	$\underline{5}$	17	23	
$\underline{10}$	$\underline{7}$	$\underline{5}$	17	23	(max-heap n-2)
$\underline{5}$	$\underline{7}$	$\underline{10}$	17	23	
$\underline{7}$	$\underline{5}$	$\underline{10}$	17	23	(max-heap n-3)
$\underline{5}$	7	10	17	23	
$\underline{5}$	7	10	17	23	(max-heap n-4)
5	7	10	17	23	

Heap sort - complexitate

- formarea heap-ului (pp. $n = 2^k - 1$)
  $\sum_{i=0}^{k-1} 2(k-i-1)2^i = 2^{k+1} - 2(k+1)$
- eliminarea din heap si refacerea heap-ului
  $\sum_{i=0}^{k-1} 2i2^i = (k-2)2^{k+1} + 4$
- complexitate algoritm de sortare
  $T_{heapSort}(n) = 2nlogn - 2n = O(nlogn)$

Conținut

Sortare bazată pe comparații

- sortare prin interschimbare
- sortare prin inserție
- sortare prin selecție
- sortare prin interclasare (merge sort)
- sortare rapidă (quick sort)

Sortare prin numărare

Sortare prin distribuire

Paradigma divide-et-impera

- $P(n)$: problemă de dimensiune n
- baza:
  - dacă $n \leq n_0$ atunci rezolvă P prin metode elementare
- divide-et-impera:
  - **divide** P în a probleme $P_1(n_1), ..., P_a(n_a)$ cu $n_i \leq n/b, b > 1$
  - **rezolvă** $P_1(n_1), ..., P_a(n_a)$ in aceeași manieră și obține soluțiile $S_1, ..., S_a$
  - **asamblează** $S_1, ..., S_a$ pentru a obține soluția S a problemei P

Paradigma divide-et-impera: algoritm

```
Procedure DivideEtImpera(P, n, S)
begin
    if (n ≤ n0) then
        determina S prin metode elementare
    else
        imparte P in P1, ..., Pa
        DivideEtImpera(P1, n1, S1)
        ...
        DivideEtImpera(Pa, na, Sa)
        Asambleaza(S1, ..., Sa, S)
end
```

Sortare prin interclasare (*Merge sort*)

- generalizare: $a[p..q]$
- baza: $p \geq q$
- divide-et-impera
  - divide: $m = [(p + q)/2]$
  - subprobleme: $a[p..m]$, $a[m + 1..q]$
  - asamblare: interclasează subsecvențele sortate $a[p..m]$ și $a[m + 1..q]$
    - inițial memorează rezultatul interclasării în *temp*
    - copie din $temp[0..p - q + 1]$ în $a[p..q]$
- complexitate:
  - timp : $T(n) = O(n\ log\ n)$
  - spațiu suplimentar: $O(n)$

Interclasarea a două secvențe sortate

- problema:
  - date $a[0] \leq a[1] \leq \cdots \leq a[m-1]$, $b[0] \leq b[1] \leq \cdots \leq b[n-1]$, să se construiască $c[0] \leq c[1] \leq \cdots \leq c[m+n-1]$ a.î. $(\forall k)((\exists i)c[k] = a[i]) \vee (\exists j)c[k] = b[j])$ iar pentru $k! = p$, $c[k]$ și $c[p]$ provin din elemente diferite
- soluția
  - inițial: $i \leftarrow 0$, $j \leftarrow 0$, $k \leftarrow 0$
  - pasul curent:
    - daca $a[i] \leq b[j]$ atunci $c[k] \leftarrow a[i]$, $i \leftarrow i + 1$
    - daca $a[i] > b[j]$ atunci $c[k] \leftarrow b[j]$, $j \leftarrow j + 1$
    - $k \leftarrow k + 1$
  - condiția de terminare: $i > m - 1$ sau $j > n - 1$
  - daca e cazul, copie în c elementele din tabloul neterminat

Conținut

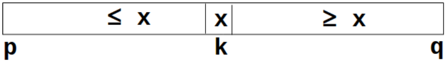
Sortare bazată pe comparații
- sortare prin interschimbare
- sortare prin inserție
- sortare prin selecție
- sortare prin interclasare (merge sort)
- sortare rapidă (quick sort)

Sortare prin numărare

Sortare prin distribuire

Sortare rapidă (Quick sort)

- generalizare: $a[p..q]$
- baza: $p \geq q$
- divide-et-impera
  - divide: determină k între p și q prin interschimbări a.î. după determinarea lui k avem:
    - $p \leq i \leq k \implies a[i] \leq a[k]$
    - $k < j \leq q \implies a[k] \leq a[j]$



  - subprobleme: $a[p..k-1]$, $a[k+1..q]$
  - asamblare: nu există

Quick sort: partiționare

- inițial:
  - $x \leftarrow a[p]$ (se poate alege x arbitrar din $a[p..q]$)
  - $i \leftarrow p + 1; j \leftarrow q$
- pasul curent:
  - dacă $a[i] \leq x$ atunci $i \leftarrow i + 1$
  - dacă $a[j] \geq x$ atunci $j \leftarrow j - 1$
  - dacă $a[i] > x > a[j]$ si $i < j$ atunci

    $swap(a[i], a[j])$

    $i \leftarrow i + 1$

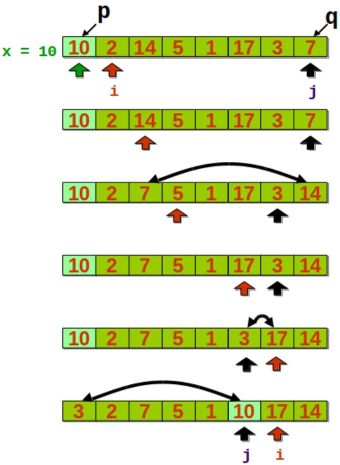
    $j \leftarrow j - 1$
- terminare:
  - condiția $i > j$
  - operații

    $k \leftarrow i - 1$

    $swap(a[p], a[k])$

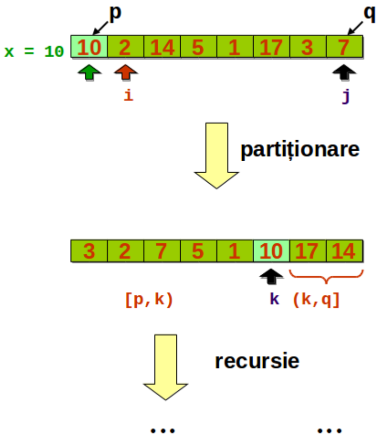
Quick sort: partiționare - exemplu

Procedure *partitioneaza(a, p, q, k)*
begin
    $x \leftarrow a[p]$
    $i \leftarrow p + 1$
    $j \leftarrow q$
    while $(i <= j)$ **do**
        if $(a[i] <= x)$ **then**
            $i \leftarrow i + 1$
        if $(a[j] >= x)$ **then**
            $j \leftarrow j - 1$
        if $(i < j)$ *and* $(a[i] > x)$ *and* $(x > a[j])$
        then
            $swap(a[i], a[j])$
            $i \leftarrow i + 1$
            $j \leftarrow j - 1$
    $k \leftarrow i - 1$
    $a[p] \leftarrow a[k]$
    $a[k] \leftarrow x$
end

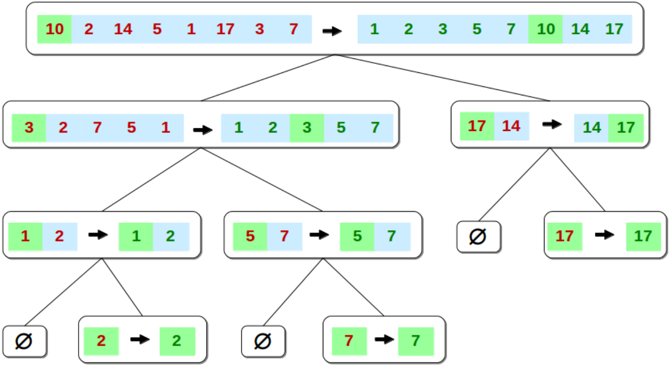


Quick sort: recursie - exemplu

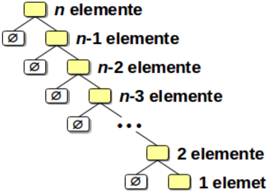
Procedure *quickSort(a, p, q)*
begin
    while $(p < q)$ **do**
        $partitioneaza(a, p, q, k)$
        $quickSort(a, p, k-1)$
        $quickSort(a, k+1, q)$
end



Quick sort: arbore de recursie

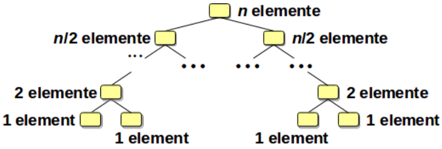


Quick sort - complexitate

- Alegerea pivotului influențează eficiența algoritmului
- Cazul cel mai nefavorabil: pivotul este cea mai mică (cea mai mare) valoare. Timp proporțional cu $n + n - 1 + ... + 1$.
- $T_{quickSort}(n) = O(n^2)$
- Arborele de recursie: 

Quick sort - complexitate

- Un pivot “bun” împarte tabloul în două subtablouri de dimensiuni comparabile
- Înălțimea arborelui de recursie este $O(log\ n)$
- Complexitatea medie este $O(n\ log\ n)$



Conținut

Sortare prin numărare

- Ipoteză: $a[i] \in \{1, 2, \ldots, k\}$
- Se determină poziția fiecărui element în tabloul sortat numărând câte elemente sunt mai mici decât acesta

```
Procedure countingSort(a, b, n, k)
begin
    for i ← 1 to k do
        c[i] ← 0
    for j ← 0 to n − 1 do
        c[a[j]] ← c[a[j]] + 1
    for i ← 2 to k do
        c[i] ← c[i] + c[i − 1]
    for j ← n − 1 to 0 do
        b[c[a[j]] − 1] ← a[j]
        c[a[j]] ← c[a[j]] − 1
end
```

Complexitate: $O(k + n)$

Sortare prin numărare – exemplu ($k = 6$)

	0	1	2	3	4	5	6	7
a	3	6	4	1	3	4	1	4

liniile 5-6

	1	2	3	4	5	6
c	2	0	2	3	0	1

liniile 7-8

	1	2	3	4	5	6
c	2	2	4	7	7	8

	0	1	2	3	4	5	6	7
b							4	

	1	2	3	4	5	6
c	2	2	4	6	7	8

liniile 9-11, j = 7

	0	1	2	3	4	5	6	7
b		1					4	

	1	2	3	4	5	6
c	1	2	4	6	7	8

liniile 9-11, j = 6

	0	1	2	3	4	5	6	7
b		1				4	4	

	1	2	3	4	5	6
c	1	2	4	5	7	8

liniile 9-11, j = 5

---

tabloul sortat:

	0	1	2	3	4	5	6	7
b	1	1	3	3	4	4	4	6

Conținut

Sortare prin distribuire

- Ipoteză: Elementele $a[i]$ sunt distribuite uniform peste intervalul $[0, 1)$
- Principiu:
  - se divide intervalul $[0, 1)$ în n subintervale de mărimi egale, numerotate de la 0 la $n - 1$;
  - se distribuie elementele $a[i]$ în intervalul corespunzător: $\lfloor n \cdot a[i] \rfloor$;
  - se sortează fiecare pachet folosind o altă metodă;
  - se combină cele n pachete într-o listă sortată.

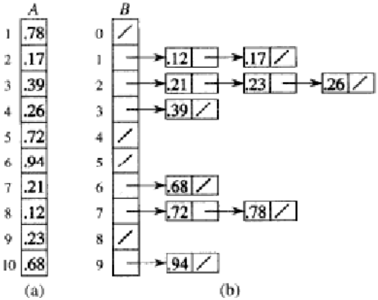
Sortare prin distribuire

- Algoritm:

Procedure *bucketSort(a, n)*
begin
  for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
    $insereaza(B[\lfloor n \cdot a[i] \rfloor], a[i])$
  for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
    sortează lista $B[i]$
  concatenează în ordine listele $B[0], B[1], \cdots, B[n-1]$
end

Complexitatea medie: $O(n)$

Sortare prin distribuire – exemplu



(Cormen T.H. et al., Introducere în algoritmi)

Algoritm		**Caz**	
	favorabil	mediu	nefavorabil
bubbleSort	n	n^2	n^2
insertSort	n	n^2	n^2
naivSort	n^2	n^2	n^2
heapSort	$n\ log\ n$	$n\ log\ n$	$n\ log\ n$
mergeSort	$n\ log\ n$	$n\ log\ n$	$n\ log\ n$
quickSort	$n\ log\ n$	$n\ log\ n$	n^2
countingSort	$-$	$n + k$	$n + k$
bucketSort	$-$	n	$-$

Când utilizăm un anumit algoritm de sortare?

- O metodă de sortare este *stabilă* dacă păstrează ordinea relativă a elementelor cu chei identice

- Recomandări
  - *Quick sort*: când nu e nevoie de o metodă stabilă și performanța medie e mai importantă decât cea în cazul cel mai nefavorabil; $O(n \log n)$ complexitatea timp medie, $O(\log n)$ spațiu suplimentar
  - *Merge sort*: când este necesară o metodă stabilă; complexitate timp $O(n \log n)$; dezavantaje: $O(n)$ spațiu suplimentar, constanta mai mare decât cea a QuickSort
  - *Heap sort*: când nu e nevoie de o metodă stabilă și ne interesează mai mult performanța în cazul cel mai nefavorabil decât în cazul mediu; timp $O(n \log n)$, spațiu $O(1)$
  - *Insert sort*: când n e mic

Când utilizăm un anumit algoritm de sortare?

- In anumite condiții, este posibilă o sortare în $O(n)$
- *Counting sort*: valori dintr-un interval
- *Bucket sort*: valorile sunt distribuite aproximativ uniform