

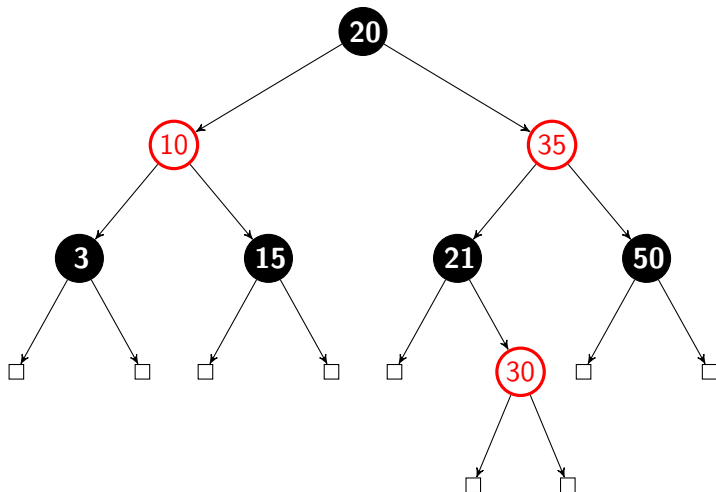
Arbori de căutare echilibrați.

SD 2015/2016

Arbori bicolori (*red-black trees*)

- ▶ *Symmetric binary B-tree*, Rudolf Bayer, 1972.
- ▶ Echilibrarea este menținută cu ajutorul unei colorări a nodurilor.
- ▶ Arborii roșu-negru sunt arbori binari de căutare care satisfac următoarele proprietăți:
 1. un nod este colorat cu roșu sau negru;
 2. rădăcina și nodurile frunză (*nil* – care fac parte din structură) sunt colorate cu negru;
 3. dacă un nod este roșu, atunci fiii săi sunt negri;
 4. drumurile de la un nod la nodurile de pe frontieră au același număr de noduri negre.

Arbori bicolori - exemplu



Lemă:

Orice subarbore al unui arbore bicolor are cel puțin $2^{bh(v)} - 1$ noduri interne, unde:

- ▶ *v rădăcina subarborelui,*
- ▶ *$bh(v)$ numărul de noduri negre aflate pe un drum de la v la un nod de pe frontieră, excluzându-l pe v ;*

Demonstrație.

La curs.



Teoremă:

Un arbore bicolor cu n noduri interne are înălțimea $h \leq 2 \log_2(n + 1)$.

Demonstrație.

Conform proprietății 4,

$$n \geq 2^{h/2} - 1 \quad \Rightarrow \quad h/2 \leq \log_2(n + 1) \quad \Rightarrow \quad h \leq 2 \log_2(n + 1).$$



Corolar:

Într-un arbore bicolor cu n noduri, operația de căutare are complexitatea timp $O(\log n)$.

Operația de inserare

- ▶ Se caută poziția de inserare și se inserează noua valoare ca în cazul arborilor binari de căutare obișnuiți.
- ▶ Se colorează noul nod cu roșu.
- ▶ Se restaurează proprietățile de arbore bicolor prin recolorare de noduri și aplicare de rotații simple.

Operația de inserare

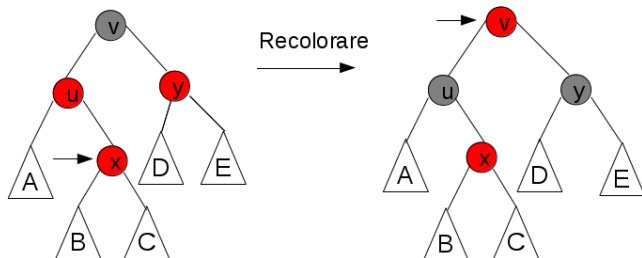
- ▶ Proprietatea 1: satisfăcută.
- ▶ Proprietatea 2 – satisfăcută (ambii fii ai nodului inserat sunt *nil*).
Dacă nodul inserat este rădăcina → recolorare în negru.
- ▶ Proprietatea 4 – satisfăcută (noul nod roșu înlocuiește o frunză).
- ▶ Poate să nu fie respectată proprietatea 3 - dacă părintele nodului este roșu.
 - ▶ Mută mai sus această situație prin recolorarea nodurilor până când poate fi reparată prin operații de rotație și recolorare.

Operația de inserare: restaurarea proprietății 3

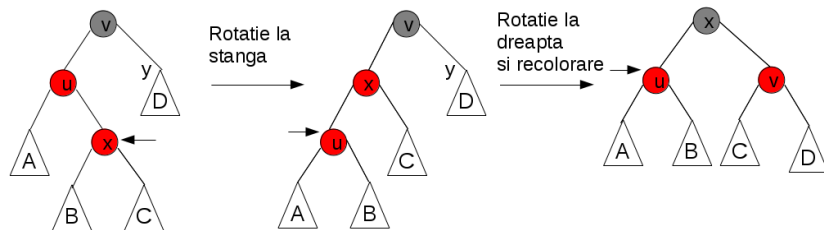
- ▶ **Caz 1:** “unchiul” nodului inserat este roșu →
Se recolorează “părintele” și “unchiul” în negru și “bunicul” în roșu.
- ▶ **Caz 2:** “unchiul” nodului inserat este negru și nodul inserat este fiul drept al unui fiu stâng →
Se aplică o rotație simplă la stânga între nodul curent și nodul părinte.
- ▶ **Caz 3:** “unchiul” nodului inserat este negru și nodul inserat este fiul stâng al unui fiu stâng →
Se aplică o rotație simplă la dreapta între nodul “părinte” și nodul “bunic” + se recolorează nodurile “părinte” (în negru) și “bunic” (în roșu).

Obs.: Operații similare se aplică pentru cazul simetric.

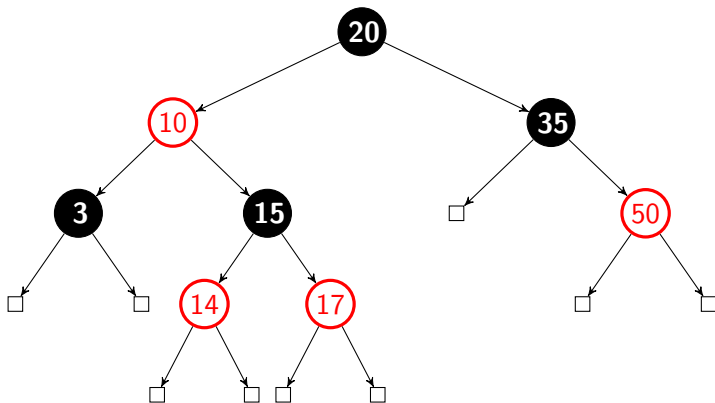
Operația de inserare - Caz 1



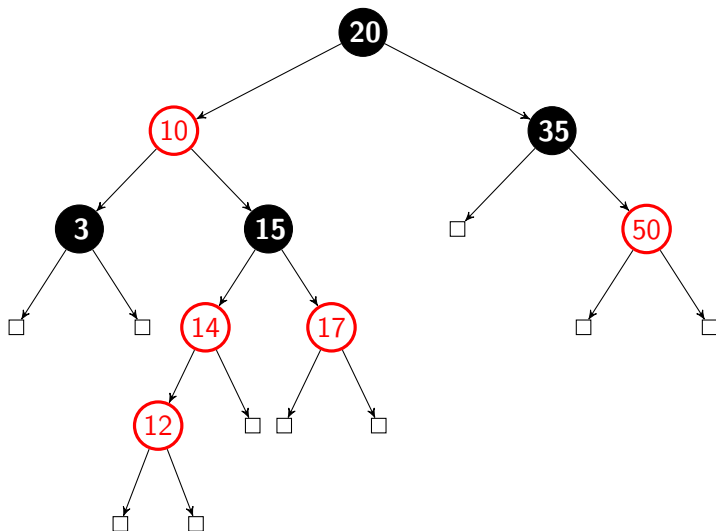
Operația de inserare - Caz 2 și 3



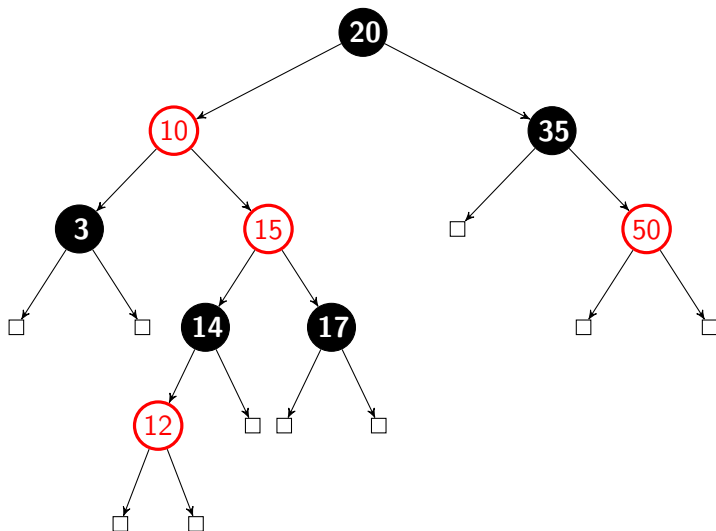
Inserare – exemplu: nodul 12



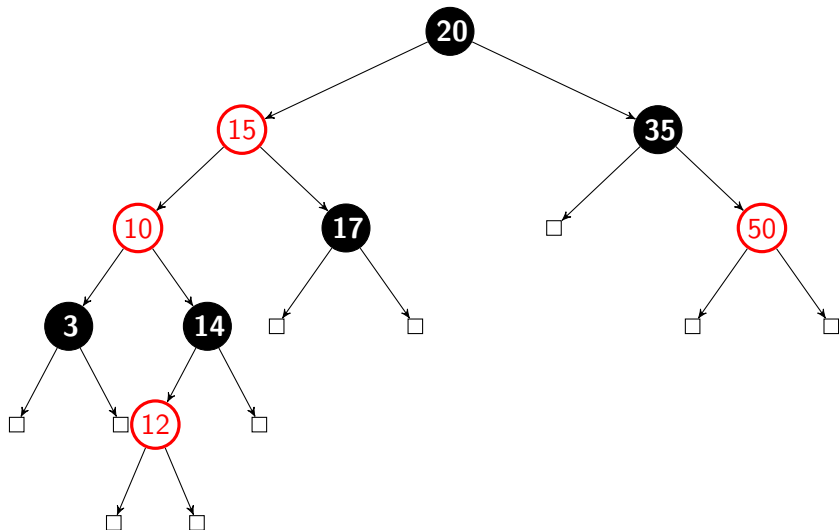
Inserare – CAZUL 1: recolorare



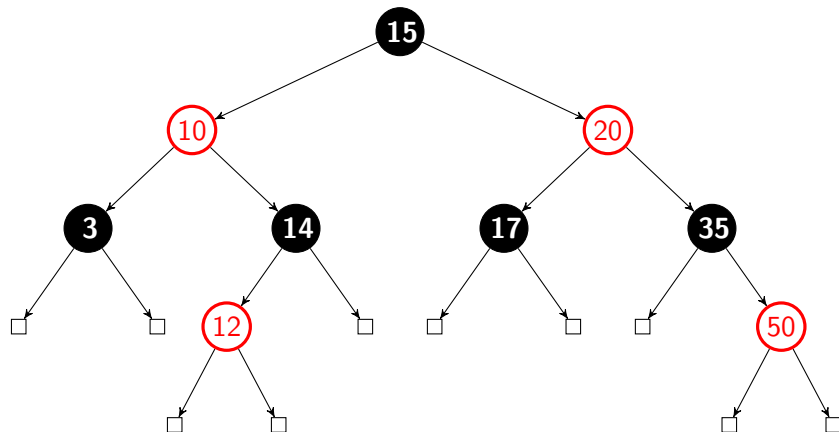
Inserare – CAZUL 2: rotație la stânga



Inserare – CAZUL 3: rotație la dreapta + recolorare



Inserare – Arborele roșu-negru valid



Operația de inserare: algoritm

Se consideră că fiecare nod a arborelui este o structură cu următoarele câmpuri:

- ▶ *cheie*: informația utilă a nodului;
- ▶ *culoare*: roșu / negru;
- ▶ *pred*: adresa nodului părinte (null pentru rădacină);
- ▶ *stg*: adresa fiului stâng;
- ▶ *drp*: adresa fiului drept.

Operația de inserare: algoritm

Procedure *inserare*(t, x)

begin

$\text{insArbBinCautare}(t, x)$

$x \rightarrow \text{culoare} \leftarrow \text{rosu}$

while ($x \neq t$ and $x \rightarrow \text{pred} \rightarrow \text{culoare} == \text{rosu}$) **do**

if ($x \rightarrow \text{pred} == x \rightarrow \text{pred} \rightarrow \text{pred} \rightarrow \text{stg}$) **then**

$y \leftarrow x \rightarrow \text{pred} \rightarrow \text{pred} \rightarrow \text{drp}$

if ($y \rightarrow \text{culoare} == \text{rosu}$) **then**

 Caz 1

else

if ($x == x \rightarrow \text{pred} \rightarrow \text{drp}$) **then**

 Caz 2

 Caz 3

else

 similar cu ramura "then", doar că interschimbăm stg cu drp

$t \rightarrow \text{culoare} \leftarrow \text{negru}$

end

Operația de inserare: Caz 1

$x \rightarrow pred \rightarrow culoare \leftarrow \text{negru}$

$y \rightarrow culoare \leftarrow \text{negru}$

$x \rightarrow pred \rightarrow pred \rightarrow culoare \leftarrow \text{roșu}$

$x \leftarrow x \rightarrow pred \rightarrow pred$

Operația de inserare: Caz 2

$x \leftarrow x \rightarrow pred$
rotatie-stânga(t, x)

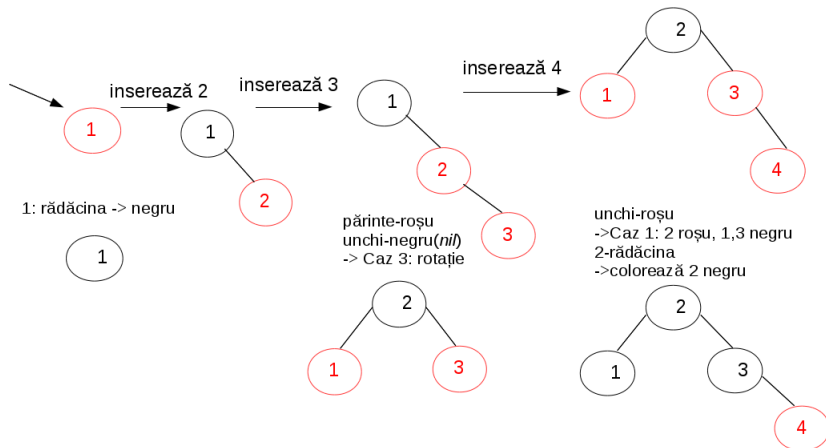
Operația de inserare: Caz 3

$x \rightarrow pred \rightarrow culoare \leftarrow \text{negru}$

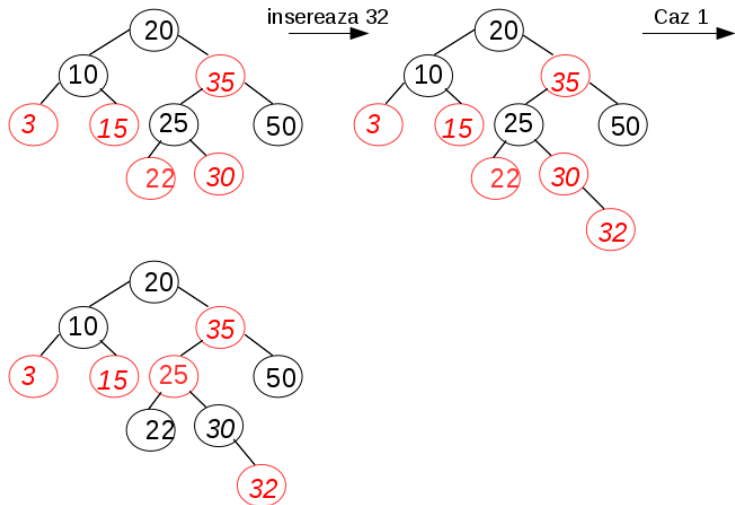
$x \rightarrow pred \rightarrow pred \rightarrow culoare \leftarrow \text{roșu}$

$\text{rotatie-dreapta}(t, x \rightarrow pred \rightarrow pred)$

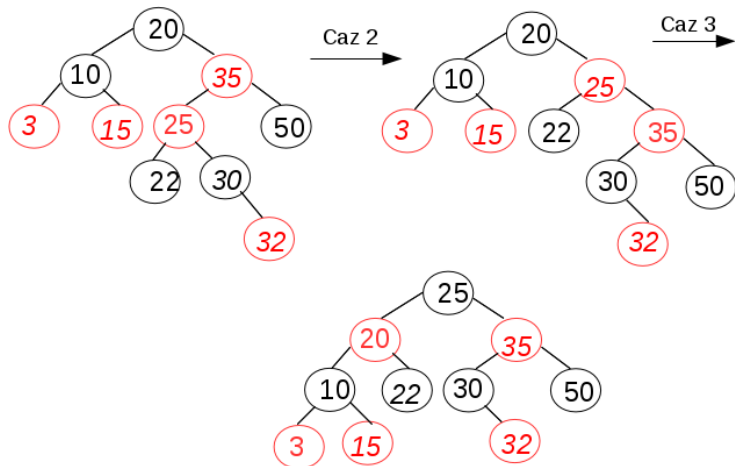
Operația de inserare - exemplul 2



Operația de inserare - exemplul 3



Operația de inserare - exemplul 3



Operația de ștergere

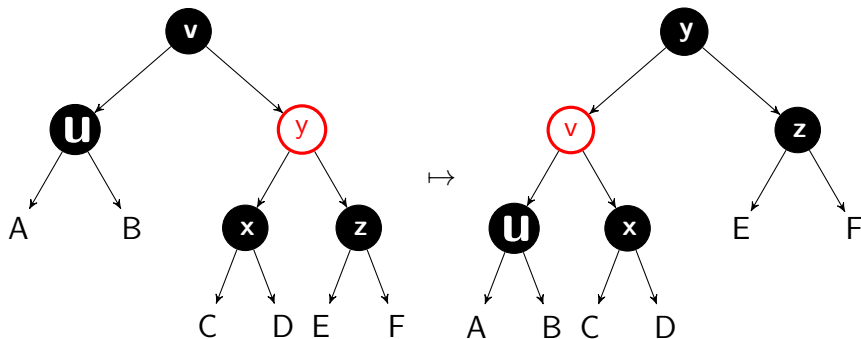
- ▶ Similară cu operația de ștergere de la arborii binari de căutare obișnuiți.
- ▶ Se va ține cont că nodurile “null” fac parte din structură.
- ▶ În urma ștergerii este posibil ca proprietatea 4 să nu mai fie respectată.
- ▶ Se restaurează proprietățile de arbore bicolor prin recolorare de noduri și aplicare de rotații simple.

Operația de ștergere: restaurarea proprietății 4

- ▶ **Caz 1:** Se transformă într-unul din cazurile 2), 3), 4) printr-o rotație.
- ▶ **Caz 2:** Nodul pentru care nu este satisfăcută proprietatea este deplasat spre rădăcină cu un nivel prin recolorarea unui nod.
- ▶ **Caz 3:** Se transformă în cazul 4) printr-o interschimbare de culori și o rotație.
- ▶ **Caz 4:** În acest caz se restabilește proprietatea de arbore bicolor pentru întreg arborele.

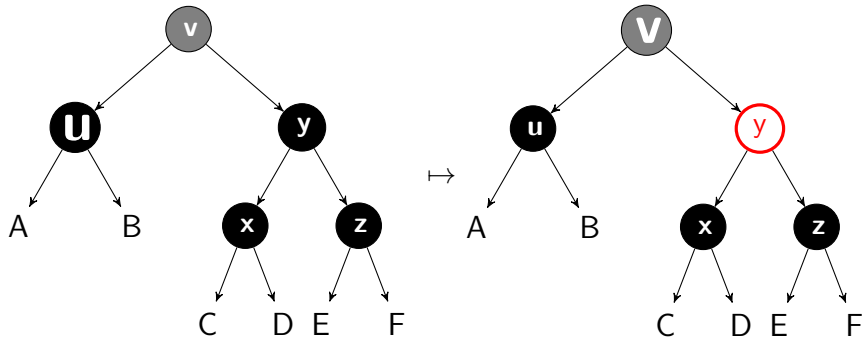
Ștergere – CAZUL 1

Caz 1: Se transformă într-unul din cazurile 2), 3), 4) printr-o rotație.



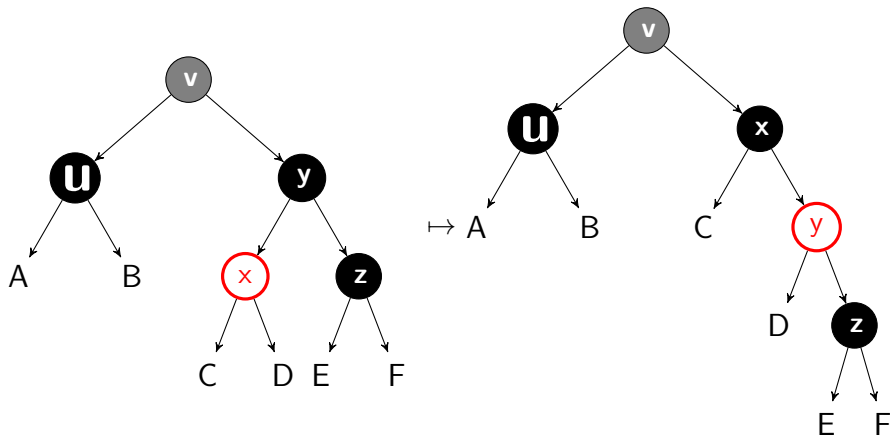
Ștergere – CAZUL 2

Caz 2: Nodul pentru care nu este satisfăcută proprietatea este deplasat spre rădăcină cu un nivel prin recolorarea unui nod.



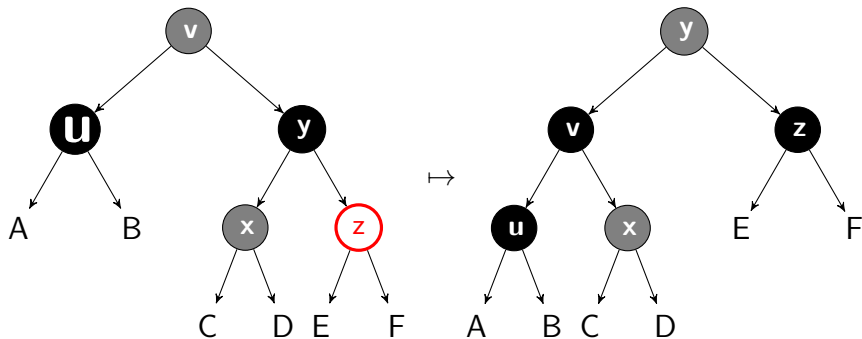
Ștergere – CAZUL 3

Caz 3: Se transformă în cazul 4) printr-o interschimbare de culori și o rotație.



Ștergere – CAZUL 4

Caz 4: În acest caz se restabilește proprietatea de arbore bicolor pentru întreg arborele.



- ▶ Complexitatea algoritmilor de inserare / ștergere: $O(\log n)$.

Corolar:

Clasa arborilor bicolori este $O(\log n)$ -stabilă.

- ▶ Complexitatea algoritmilor de inserare / ștergere: $O(\log n)$.

Corolar:

Clasa arborilor bicolori este $O(\log n)$ -stabilă.

- ▶ Utilizări:
 - ▶ System symbol tables.
 - ▶ Kernel Linux (Completely Fair Scheduler).