

Teoria probabilităților discrete - Curs 4

Olariu E. Florentin

Martie, 2016

Table of contents I

- 1 Caracteristici ale variabilelor aleatoare discrete
 - Media unei variabile aleatoare discrete
 - Dispersia unei variabile aleatoare discrete
- 2 Repartiții discrete remarcabile
 - Repartiția uniformă U_n
 - Repartiția Bernoulli și binomială $B(n, p)$
 - Repartiția geometrică $Geometric(p)$
 - Repartiția Poisson
 - Repartiția hipergeometrică
- 3 Repartiții comune ale variabilelor aleatoare discrete
 - Repartiții comune
- 4 Exerciții
 - Repartiții și caracteristici ale variabilelor aleatoare discrete
 - Repartiții discrete remarcabile.

Table of contents II

• Repartiții comune

5

Anexa 1

6

Bibliography

Media unei variabile aleatoare discrete

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix} \quad (1)$$

Definition 1.1

Fie X o variabilă aleatoare discretă cu repartiția (1), media variabilei X (dacă există) este

$$M[X] = \sum_i p_i x_i \quad (2)$$

- Media unei variabile aleatoare discrete este o sumă finită sau suma unei serii infinite (care poate converge sau nu) a valorilor ei, ponderate cu probabilitățile aferente.

Media unei variabile aleatoare discrete

Exemplu. Se aruncă două zaruri identice și se notează cu X valoarea maximă de pe cele două fețe. X este evident o variabilă aleatoare cu șase valori posibile: $1, 2, \dots, 6$. Funcția de masă de probabilitate este

$$\begin{aligned}
 f_X(1) &= P\{X = 1\} = P(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36}, \\
 f_X(2) &= P\{X = 2\} = P(\{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}) = \frac{1}{12}, \\
 f_X(3) &= P\{X = 3\} = P(\{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (3, 1)\}) = \frac{5}{36}, \\
 f_X(4) &= P\{X = 4\} = P(\{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 3), \dots\}) = \frac{7}{36}, \\
 f_X(5) &= P\{X = 5\} = P(\{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), \dots\}) = \frac{1}{4}, \\
 f_X(6) &= P\{X = 6\} = P(\{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), \dots\}) = \frac{11}{36}.
 \end{aligned}$$

Media unei variabile aleatoare discrete

Repartiția acestei variabile este

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{12} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{1}{4} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}.$$

Media variabilei este

$$M[X] = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36} \clubsuit$$

- Următoarele două propoziții enumeră câteva proprietăți ale mediei unei variabile aleatoare.

Media unei variabile aleatoare discrete

Proposition 1.1

Fie X o variabilă aleatoare discretă $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție reală. Atunci $h(X)$ este o variabilă aleatoare și

$$M[h(X)] = \sum h(x_i)p_i.$$

Proposition 1.2

- (i) *Dacă X este o variabilă aleatoare discretă, atunci $aX + b$ este o variabilă aleatoare și $M[aX + b] = aM[X] + b$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.*
- (ii) *Dacă X_1 și X_2 sunt variabile aleatoare discrete, atunci $X_1 + X_2$ este o variabilă aleatoare și $M[X_1 + X_2] = M[X_1] + M[X_2]$.*
- (iii) *Fie $X \geq 0$, atunci $M[X] \geq 0$ și $M[X] = 0$ numai dacă $X \equiv 0$.*

Media unei variabile aleatoare discrete

Exemplu. Se aruncă două zaruri. Să se determine media sumei celor două zaruri.

Soluție: Fie X_i rezultatul zarului i ; suma celor două zaruri poate fi scrisă ca $X = X_1 + X_2$, deci, conform propoziției 1.2, $M[X] = M[X_1] + M[X_2]$. Variabilele X_1 și X_2 sunt identic repartizate:

$$X_1, X_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \text{ de unde}$$

$$M[X_1] = M[X_2] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow M[X] = 7. \clubsuit$$

Dispersia unei variabile aleatoare discrete

Definition 2.1

Fie X o variabilă aleatoare. Se numește dispersia (sau varianța) lui X , media pătratului abaterii de la medie (dacă există):

$$D^2[X] = M[(X - M[X])^2] = \sum_i p_i (x_i - M[X])^2.$$

- Observăm că o condiție necesară pentru existența dispersiei este ca variabila să aibă medie. O metodă de calcul a dispersiei este dată de următorul rezultat.

Proposition 2.1

Fie X o variabilă aleatoare care admite dispersie, atunci

$$D^2[X] = M[X^2] - (M[X])^2.$$

Dispersia unei variabile aleatoare discrete

Proposition 2.2

Fie X o variabilă aleatoare care admite dispersie, atunci

- (i) $D^2[X] \geq 0$ și $D^2[X] = 0$ dacă și numai dacă $X \equiv \text{const}$ (variabilă degenerată);
- (ii) $D^2[aX + b] = a^2 D^2[X]$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

Definition 2.2

Deviația standard a variabilei aleatoare X este

$$D[X] = \sqrt{D^2[X]}.$$

Repartiții discrete remarcabile - Repartiția uniformă U_n

- O variabilă aleatoare se spune că este distribuită **uniform** cu parametru $n \in \mathbb{N}^*$ dacă are repartiția

$$U_n: \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$$

- Este ușor de văzut că media și dispersia unei astfel de variabile sunt

$$M[X] = \frac{n+1}{2} \text{ și } D^2[X] = \frac{n^2-1}{12}.$$

- O astfel de repartiție am întâlnit în cazul aruncării unui zar.

Repartiții discrete remarcabile - Repartiția Bernoulli și binomială $B(n, p)$

- Să considerăm un experiment al cărui rezultat poate fi interpretat ca succes sau eșec. Fie X definită astfel

$$X = \begin{cases} 1, & \text{dacă experimentul are succes} \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

(Uzual experimentului i se asociază un eveniment aleator A (cu probabilitate cunoscută $P(A) = p$): succesul înseamnă realizarea acestui eveniment.)

- Funcția de masă de probabilitate este $f(0) = 1 - p$ și $f(1) = p$. O astfel de variabilă este repartizată **Bernoulli** și are repartiția

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

- Media și dispersia sunt

$$M[X] = p \text{ și } D^2[X] = p(1-p)$$

Repartiția Bernoulli și binomială $B(n, p)$

- Să presupunem acum că un astfel de experiment (cu rezultate posibile succes/eșec) este efectuat de n ori în mod independent și notăm cu X numărul de succese.
- Se spune că variabila X este repartizată **binomial** cu parametrii n și p . Utilizând schema binomială putem determina tabloul de repartiție al acestei variabile

$$B(n, p) : \left(\begin{matrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ C_n^0 (1-p)^n & C_n^1 p (1-p)^{n-1} & \dots & C_n^k p^k (1-p)^{n-k} & \dots & C_n^n p^n \end{matrix} \right),$$

- iar caracteristicile sunt $M[X] = np$ și $D^2[X] = np(1-p)$.

Proposition 2.1

Fie X_1, X_2, \dots, X_n variabile aleatoare independente repartizate Bernoulli cu parametrul $p \in (0, 1)$. Atunci $X = \sum_{i=1}^n X_i$ este o variabilă repartizată $B(n, p)$.

Repartiția Bernoulli și binomială $B(n, p)$ - exemple

Exemplu. Se aruncă un zar până apare de trei ori fața cu numărul 6.

- (a) Care este probabilitatea ca să fie necesare exact douăzeci de aruncări ale zarului?
- (b) Dacă zarul este aruncat de douăzeci de ori, care este numărul mediu de apariții ale feței șase?

Soluție: (a) Douăzeci de aruncări sunt suficiente numai dacă în primele nouăsprezece aruncări fața 6 apare de exact două ori și mai apare odată la ultima aruncare. Aceste două evenimente sunt independente, deci probabilitatea cerută (a intersecției lor) este

$$\binom{19}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{17} \cdot \frac{1}{6} \cong 0.035682$$

(b) Variabila X care numără de câte ori apare fața șase în douăzeci de aruncări este repartizată $B(20, 1/6)$. $M[X] = 20 \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{3} \cong 3.333\clubsuit$

Repartiția Bernoulli și binomială $B(n, p)$ - exemple

Exemplu. O variantă echivalentă a jocului numit *Roata norocului* este următoarea: un jucător pariază pe unul dintre numerele de la 1 la 6, apoi se aruncă trei zaruri și dacă apare numărul ales de jucător de k ori, acesta câștigă $k\$$ ($1 \leq k \leq 3$), iar dacă numărul ales nu apare pe nici un zar, atunci pierde 1\$. Jocul oferă șanse corecte jucătorului? Care este câștigul mediu?

Soluție: Fie X câștigul jucătorului, valorile lui X pot fi $\{-1, 1, 2, 3\}$. Variabila X are funcția de masă de probabilitate similară cu aceea a unei variabile binomiale. Deoarece probabilitatea ca pe fața unui zar să apară numărul ales este $1/6$, avem

$$P\{X = -1\} = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216},$$

Repartiția Bernoulli și binomială $B(n, p)$ - exemple

$$P\{X = 1\} = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216},$$

$$P\{X = 2\} = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216},$$

$$P\{X = 3\} = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}.$$

Jocul nu oferă șanse corecte celui care îl joacă deoarece probabilitatea de a pierde a acestuia este $125/216 > 1/2$, iar câștigul mediu este

$$M[X] = (-1) \cdot \frac{125}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216} + 2 \cdot \frac{15}{216} + 3 \cdot \frac{1}{216} = -\frac{17}{216} \spadesuit$$

Repartiții discrete remarcabile - Repartiția geometrică $Geometric(p)$

- Să considerăm acum un experiment aleator și un eveniment aleator A (cu $P(A) = p \in (0, 1)$) asociat acestui experiment. Variabila care notează numărul de repetări independente ale experimentului până la realizarea evenimentului A se spune că este repartizată **geometric** cu parametrul p .
- Tabloul de repartiție al unei astfel de variabile (vezi schema geometrică) este

$$G(p): \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & \cdots \\ p & p(1-p) & \cdots & p(1-p)^{n-1} & \cdots \end{pmatrix}$$

- Caracteristicile repartiției geometrice sunt

$$M(X) = \frac{1}{p} \text{ și } D^2(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Repartiția geometrică *Geometric(p)* - exemplu

Exemplu. Se aruncă în mod repetat două zaruri până se obține un produs egal cu 6. Care este media și dispersia numărului de aruncări?

Soluție: $A =$ "produsul zarurilor este egal cu 6"

$$A = \{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)\}, P(A) = \frac{4}{36}.$$

Fie $X =$ numărul de aruncări necesare realizării evenimentului A . X este repartizată geometric cu parametrul $p = 1/9$.

$$M[X] = \frac{1}{p} = 9, D^2[X] = \frac{1-p}{p^2} = \frac{8}{9}.$$

Sunt necesare, în medie, 9 aruncări pentru obținerea unui produs egal cu 6. ♣

Repartiții discrete remarcabile - Repartiția Poisson(λ)

- O variabilă aleatoare X este repartizată Poisson cu parametrul $\lambda > 0$ dacă funcția sa de masă de probabilitate este

$$f(k) = P\{X = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \forall k \geq 0.$$

- Tabloul de repartiție al unei astfel de variabile este

$$Poisson(\lambda) : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n & \dots \\ \lambda^0 \frac{e^{-\lambda}}{0!} & \lambda \frac{e^{-\lambda}}{1!} & \dots & \lambda^n \frac{e^{-\lambda}}{n!} & \dots \end{pmatrix},$$

- iar caracteristicile sunt

$$M[X] = \lambda \text{ și } D^2[X] = \lambda.$$

Repartiția Poisson(λ)

- În general repartiția Poisson modelează apariția evenimentelor care se produc cu frecvență scăzută, într-un interval de timp fixat.
- Astfel de exemple de aplicații ale repartiției Poisson sunt: numărul de apeluri telefonice greșite dintr-o zi, numărul de particule emise de o sursă radioactivă într-un interval de timp dat, numărul de erori tipografice pe o pagină, numărul de nașteri pe oră într-o anumită zi etc.
- O parte dintre aplicațiile acestei repartiții se datorează faptului că pentru n suficient de mare și p suficient de mic (astfel încât np să fie o valoare rezonabilă) repartiția binomială $B(n, p)$ poate fi aproximată cu $Poisson(np)$.

Repartiția Poisson(λ) - exemplu

Exemplu. Într-o maternitate, nașterile au loc cu o rată de 2.1 pe oră.

(a) Care este probabilitatea ca într- oră să se nască patru copii?

(b) Dar ca într-o anumită oră să se nască cel puțin trei copii?

Soluție: Fie X numărul de nașteri pe oră, X este distribuită *Poisson*(2.1).

$$(a) P\{X = 4\} = \lambda^4 \frac{e^{-\lambda}}{4!} \cong 0.099231 \quad (\lambda = 2.1)$$

(b) Pentru a doua cerință putem evita calculul sumei unei serii astfel

$$\begin{aligned} P\{X \geq 3\} &= \sum_{k \geq 3} P\{X = k\} = 1 - \sum_{k=0}^2 P\{X = k\} = \\ &= 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} - P\{X = 2\} = \\ &= 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} \cong 0.350368 \quad (\lambda = 2.1). \clubsuit \end{aligned}$$

Repartiții discrete remarcabile - Repartiția hipergeometrică

- Reluăm contextul schemei bilei neîntoarse: într-o urnă sunt n bile de două culori (n_1 albe și n_2 neagre) și se extrag simultan m bile din urnă. Se notează cu X numărul de bile albe obținute; această variabilă se spune că este repartizată **hipergeometric**.
- Tabloul să de repartiție (vezi și schema bilei neîntoarse) este

$$X : \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & k & \dots & r \\ \frac{\binom{n_1}{0} \binom{n_2}{m}}{\binom{n}{m}} & \frac{\binom{n_1}{1} \binom{n_2}{m-1}}{\binom{n}{m}} & \dots & \frac{\binom{n_1}{k} \binom{n_2}{m-k}}{\binom{n}{m}} & \dots & \frac{\binom{n_1}{r} \binom{n_2}{m-r}}{\binom{n}{m}} \end{array} \right),$$

unde $r = \min \{m, n_1\}$.

- Media și dispersia ei sunt

$$M[X] = \frac{mn_1}{n}, D^2[X] = m \cdot \frac{n-m}{n-1} \cdot \frac{n_1}{n} \cdot \frac{n-n_1}{n}$$

Repartiții comune

- Fie X și Y două variabile aleatoare discrete cu repartițiile

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix} \text{ și } Y: \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m & \dots \end{pmatrix}.$$

Definition 1.1

Repartiția comună a celor două variabile este formată din mulțimea tripletelor

$$(x_i, y_j, P\{X = x_i \cap Y = y_j\})_{i,j}$$

Repartiții comune

- Dacă notăm cu $r_{ij} = P\{X = x_i \cap Y = y_j\}$ repartiția comună se poate reprezenta într-un tablou astfel:

	X				
	x_1	x_2	\dots	x_i	\dots
y_1	r_{11}	r_{21}	\dots	r_{i1}	q_1
y_2	r_{12}	r_{22}	\dots	r_{i2}	q_2
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots
y_j	r_{1j}	r_{2j}	\dots	r_{ij}	q_j
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots
	p_1	p_2	\dots	p_i	\dots

Repartiții comune

- Se observă că probabilitățile aferente celor două variabile pot fi obținute adunând probabilitățile din repartiția comună pe linii (pentru Y) respectiv pe coloane (pentru X):

$$\sum_i r_{ij} = q_j, \forall j \quad \text{și} \quad \sum_j r_{ij} = p_i, \forall i.$$

Repartiții comune - exemplu

Exemplu. Se dau două urne: U_1 care conține două bile albe, două negre și trei bile roșii și U_2 care conține trei bile albe, două negre și o bilă roșie. Din prima urnă se extrage o bilă care se introduce în cea de-a doua urnă, iar apoi se extrage o bilă din cea de a doua urnă. Se notează cu X numărul de bile albe obținute și cu Y numărul de bile negre obținute.

- (a) Să se determine repartiția comună a variabilelor X și Y .
- (b) Să se determine repartiția și apoi media variabilei $X + Y$.

Soluție: Observăm că variabilele X și Y sunt dependente: sunt legate prin relația $X + Y \leq 2$. Notăm cu A_i evenimentul "a i-a bilă extrasă este albă", cu B_i evenimentul "a i-a bilă extrasă este neagră" și cu C_i evenimentul "a i-a bilă extrasă este roșie" ($i = \overline{1, 2}$).

Repartiții comune - exemplu

Y	X			
	0	1	2	
0	6/49	11/49	8/49	25/49
1	?	?	0	?
2	?	0	0	?
	?	?	8/49	

Exerciții pentru seminar

- **Caracteristici ale variabilelor aleatoare:** I.2, I.3, I.4, I.6, I.8, I.9, I.15, I.16.
- **Repartiții discrete remarcabile:** II.1, II.2, II.4, III.1, III.3, IV.1, IV.2, IV.3.
- **Repartiții comune:** V.1, V.3.
- **Rezervă:** I.1, I.5, I.6, I.12, II.3, III.2, IV.4, V.2.

Exerciții - repartiții și caracteristici ale variabilelor aleatoare discrete

I.1. Determinați media și dispersia fiecăreia dintre următoarele variabile aleatoare

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{5}{16} \end{pmatrix}, Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \text{ și } Z : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

I.2. O monedă falsificată are probabilitatea de a apare stema la o aruncare $2/3$. Moneda se aruncă de patru ori. Fie X variabila aleatoare care notează numărul maxim de apariții consecutive ale stemei. Să se determine repartiția, media și dispersia variabilei X .

Exerciții - repartiții și caracteristici ale variabilelor aleatoare discrete

I.3. Sunt alese două bile la întâmplare dintr-o urnă care conține opt bile albe, patru bile negre și două bile galbene. Să presupunem că o bilă neagră valorează 2\$, iar una albă 1\$. Se notează cu X câștigul obținut, să se determine repartiția, media și dispersia variabilei X .

I.4. Fie X diferența dintre numărul de apariții ale stemei și ale banului la aruncarea de trei ori a unei monede. Determinați repartiția și media variabilei aleatoare X .

I.5.

- (a) Se aruncă un zar și se notează cu X numărul de puncte obținute. Să se determine repartiția, media și dispersia variabilei X .
- (b) Se aruncă două zaruri. Care este media și dispersia sumei celor două zaruri? Dar ale produsului?

Exerciții - repartiții și caracteristici ale variabilelor aleatoare discrete

I.6. Se aruncă o monedă până apare banul sau până apare de cinci ori stema. Care este numărul mediu de aruncări care să îndeplinească această condiție?

I.7. Un zar se aruncă de două ori. Fie X_1 și X_2 rezultatele obținute. Se definesc $X = \min\{X_1, X_2\}$ și $Y = \max\{X_1 + X_2, X_1 \cdot X_2\}$. Să se determine repartițiile variabilelor X și Y .

I.8. Se dau trei urne. Prima conține o bilă albă și una neagră, cea de-a doua conține două bile albe și șase negre iar a treia o bilă albă și trei negre. Din prima urnă se extrage o bilă și se introduce în cea de-a doua, după care se extrage o bilă din cea de-a doua urnă și se introduce în cea de-a treia; în sfârșit se extrage o bilă din ultima urnă. Să se determine media și dispersia numărului de bile albe extrase.

I.9. O anumită familie regală are copii atâta vreme cât nu a apărut un băiat sau sunt mai puțin de trei copii în familie. Să se determine media și dispersia numărului de fete într-o astfel de familie.

Exerciții - repartiții și caracteristici ale variabilelor aleatoare discrete

(Probabilitatea ca un nou născut să fie fată este $1/2$.)

I.10. O monedă se aruncă până când apare stema de patru ori sau până apare banul de patru ori (oricare apare mai întâi). Determinați media și dispersia numărului de aruncări necesare.

I.11. Patru bile se repartizează uniform și independent în trei urne. Notăm cu X numărul de urne ocupate și cu Y numărul de bile din cea de-a doua urnă. Să se determine repartițiile și mediile celor două variabile.

I.12. Se dau trei urne. Prima conține două bile albe și două negre, cea de-a doua conține cinci bile albe și trei negre, iar a treia conține trei bile albe și trei negre. Se extrage câte o bilă din fiecare urnă. Se cer repartiția, media și dispersia numărului de bile negre obținute.

I.13*. Cinci numere distincte sunt distribuite aleator uniform la cinci jucători numerotați de la 1 la 5. Când doi dintre jucători își compară numerele, câștigă cel care are numărul mai mare.

Exerciții - repartiții și caracteristici ale variabilelor aleatoare discrete

Mai întâi jucătorii 1 și 2 își compară numerele, apoi câștigătorul dintre ei cu jucătorul 3 și așa mai departe. Fie X variabila aleatoare care numără de câte ori jucătorul 1 este câștigător. Determinați repartiția și media lui X .

I.14*. A și B joacă următorul joc: A scrie pe o hârtie unul dintre numerele 1 sau 2 și B trebuie să ghicească numărul scris. Dacă numărul scris este i și B îl ghicește atunci B primește i \$ de la A . Dacă B greșește, atunci îi plătește 0.75\$ lui A .

- (a) Să presupunem că B alege 1 cu probabilitate p și 2 cu probabilitate $(1 - p)$. Determinați câștigul mediu al lui B , dacă A scrie (i) numărul 1, respectiv (ii) numărul 2.
- (b) Să presupunem acum că A alege să scrie 1 cu probabilitate q și 2 cu probabilitate $(1 - q)$. Determinați pierderea medie al lui A , dacă B alege (i) numărul 1, respectiv (ii) numărul 2.

Exerciții - repartiții și caracteristici ale variabilelor aleatoare discrete

I.15. Fie X o variabilă aleatoare care admite medie și dispersie ($M[X] = \mu$ și $D^2[X] = \sigma^2 > 0$). Calculați media și dispersia variabilei $\frac{X - \mu}{\sigma}$ (aceasta este *operația* numită *de standardizare*).

I.16. Arătați că $D^2[X + Y] + D^2[X - Y] = 2D^2[X] + 2D^2[Y]$.

I.17. Fie X și Y două variabile aleatoare independente cu aceeași medie și dispersie. Arătați că $M[(X - Y)^2] = 2D^2[X]$.

I.18. Dacă X și Y au aceeași dispersie, atunci

$$M[(X + Y)(X - Y)] = M[X + Y]M[X - Y].$$

Exerciții - repartiția binomială

II.1. Se aruncă două monede de șapte ori. De câte ori se obține în medie stema pe amândouă monedele?

II.2. O sursă de biți generează 0 și 1 aleator cu probabilitatea 0.6 și 0.4, respectiv.

(a) Care este probabilitatea ca într-o secvență de șapte biți să apară doi de 1 și cinci de 0?

(b) Care este numărul mediu de biți egali cu 0 într-o secvență de cinci biți?

II.3. La începutul secolului XIX încercarea de a contacta pe cineva prin telefon avea o probabilitate de succes egală cu 0.75. Care era numărul mediu de succese din douăsprezece încercări de a contacta pe cineva prin telefon?

Exerciții - repartiția binomială

II.4. Un individ susține că are *ESP* (percepții extra-senzoriale); este testat în felul următor: o monedă este aruncată de zece ori și i se cere să ghicească în avans rezultatele. Șapte din cele zece răspunsuri se dovedesc a fi corecte. Care este probabilitatea de a fi dat un răspuns cel puțin la fel de bun dacă nu ar fi avut *ESP*?

II.5. Un canal de comunicare transmite mesaje sub forma unor biți, dar datorită interferențelor electrostatice un bit transmis este receptat eronat cu probabilitate 0.2. Se transmite un mesaj format dintr-un singur bit; pentru a reduce erorile de receptare în loc de 0 se transmite 00000 și 11111 în loc de 1. Dacă receptorul folosește metoda majorității pentru a decoda mesajul, care este probabilitatea ca mesajul să fie decodat greșit? (Se presupune că biții sunt transmiși independent.)

Exerciții - repartiția binomială

II.6.** Un vânzător de ziare cumpără *New York Times* cu 0.50\$ și îl vinde cu 0.75\$, dar exemplarele nevândute nu le poate returna. Cererea pentru acest ziar urmează o distribuție binomială cu parametrii $n = 8$ și $p = 0.25$. Care este numărul (≤ 8) aproximativ de exemplare pe care trebuie să le cumpere pentru a-și maximiza profitul mediu?

Exerciții - repartiția geometrică

III.1. Care este numărul mediu de de aruncări a două zaruri necesar obținerii unui produs mai mic strict decât 7? Dar a unei sume pare?

III.2. Se extrag cărți dintr-un pachet (cu întoarcere). Care este numărul mediu de extrageri necesar obținerii unei trefle?

III.3. 1% din biții transmiși de-a lungul unei căi de comunicație sunt recepționați eronat. Biții se transmit până la apariția primei erori. Care este numărul mediu de biți transmiși?

Exerciții - repartiția Poisson

IV.1. Între orele 7 și 8 numărul mediu de accidente de pe o autostradă este 0.7. Care este probabilitatea ca într-o zi între orele 7 și 8

- a) să se producă cel puțin trei accidente?
- b) să se producă exact un accident?

IV.2. O companie de transport are trei mașini pe care le închiriază diversilor clienți câte o zi întreagă. Numărul de cereri pentru mașini pe zi este distribuit Poisson cu media $\lambda = 1.5$. Să se calculeze proporția zilelor în care

- (a) nici o mașină nu este cerută;
- (b) este nevoie să se refuze cereri de închiriere.

Exerciții - repartiția Poisson

IV.3. Numărul de defecte de fabricație într-un cablu de fibră optică urmează o distribuție Poisson: în 100m de cablu numărul mediu de defecte este 1.5

- (a) Care este probabilitatea ca în 100m de cablu să existe exact două defecte de fabricație?
- (b) Care este probabilitatea ca în 100m de cablu să existe cel puțin patru defecte de fabricație?

IV.4. Numărul de incidente aviatice lunare este de 3.5. Care este probabilitatea ca în luna următoare

- (a) să aibă loc exact 2 accidente?
- (b) să aibă loc cel mult un accident?

Exerciții - repartiția Poisson

IV.5*. Fie X o variabilă aleatoare repartizată Poisson cu parametrul $\lambda \in \mathbb{N}^*$. Studiați monotonia funcției $i \mapsto P\{X = i\}$. Pentru ce valoare a lui i își atinge această funcție maximul?

IV.6*. Fie X o variabilă aleatoare repartizată Poisson cu parametrul λ . Arătați că

$$P\{X \text{ este par}\} = \frac{1}{2} (e^\lambda + e^{-\lambda}).$$

(Folosiți dezvoltarea în serie Taylor, convergentă pe toată axa reală, $e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$.)

IV.7*. Fie X o variabilă Poisson cu parametrul λ . Calculați $M[X!]$.

Exerciții - repartiții comune

V.1. Să presupunem că X și Y au următoarea repartiție comună

		Y		
		-3	2	4
X	1	0.1	0.2	0.2
	3	0.3	?	0.1

Determinați repartițiile individuale ale variabilelor X și Y .

V.2. O monedă este aruncată de trei ori. Fie X o variabilă egală cu 1 dacă apare stema și 0 dacă apare banul la prima aruncare, iar Y o variabilă egală cu numărul de apariții ale stemei în toate aruncările. Determinați repartiția comună acelor două variabile.

Exerciții - repartiții comune

V.3. Fie X o variabilă aleatoare cu următoarea distribuție și $Y = X^2$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Determinați repartiția lui Y și repartiția comună a celor două variabile.

V.4. Într-o urnă sunt trei bile roșii și cinci bile negre. Se extrage din urnă o bilă și se înlocuiește cu o bilă de culoare diferită. Apoi se extrage încă o bilă. Se notează cu X numărul de bile roșii și cu Y numărul de bile negre extrase. Să se determine repartiția comună a variabilelor X și Y .

Anexa 1

proof: (pentru Propoziția 1.1) Fie $Y = h(X): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$; Y este evident o variabilă aleatoare discretă. Funcția de masă de probabilitate a lui Y este $f_Y: Y(\Omega) = h(X(\Omega)) \rightarrow [0, 1]$, unde

$$f_Y(y_j) = P\left(\bigcup_i \{h(x_i) = y_j\}\right) = \sum_{h(x_i)=y_j} P\{X = x_i\} = \sum_{h(x_i)=y_j} f_X(x_i),$$

Astfel

$$\begin{aligned} M[Y] &= \sum_j y_j f_Y(y_j) = \sum_j y_j \sum_{h(x_i)=y_j} f_X(x_i) = \\ &= \sum_j \sum_{h(x_i)=y_j} h(x_i) f_X(x_i) = \sum_i h(x_i) f_X(x_i). \end{aligned}$$



Anexa 1

proof: (pentru Propoziția 1.2) (i) este imediată

Pentru (ii) putem proceda astfel, reinterpretând formula pentru medie: pentru o variabilă aleatoare discretă X avem

$$M[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega), \text{ de unde}$$

$$M[X_1 + X_2] = \sum_{\omega \in \Omega} [X_1(\omega) + X_2(\omega)] P(\omega) =$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} X_1(\omega)P(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} X_2(\omega)P(\omega) = M[X_1] + M[X_2].$$

(iii) Dacă $x_i \geq 0$, pentru orice i , atunci $p_i x_i \geq 0$, $\forall i$ și

$$M[X] = \sum_i p_i x_i \geq 0.$$



Anexa 1

proof: (pentru Propoziția 2.1)

$$\begin{aligned}
 D^2[X] &= \sum_i p_i (x_i - M[X])^2 = \sum_i p_i (x_i^2 - 2x_i M[X] + (M[X])^2) = \\
 &= \sum_i p_i x_i^2 - 2 \left(\sum_i p_i x_i \right) M[X] + \sum_i p_i (M[X])^2 = \\
 &= M[X^2] - 2M[X] \cdot M[X] + (M[X])^2 = M[X^2] - (M[X])^2.
 \end{aligned}$$

proof: (pentru Propoziția 2.2) (i) este evident ca $D^2[X] \geq 0$ și că $D^2[X] = 0$ dacă și numai dacă $x_i = M[X]$, $\forall i$, i.e. X este constantă (și egală cu media sa).

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad D^2[aX + b] &= M[(aX + b - aM[X] - b)^2] = M[a^2(X - M[X])^2] = \\
 &= a^2 M[(X - M[X])^2].
 \end{aligned}$$

Bibliography



Bertsekas, D. P., J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scietific, 2002.



Gordon, H., *Discrete Probability*, Springer Verlag, New York, 1997.



Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Scahaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.



Ross, S. M., *A First Course in Probability*, Prentice Hall, 5th edition, 1998.



Stone, C. J., *A Course in Probability and Statistics*, Duxbury Press, 1996.