Tabele de dispersie

SD 2015/2016

Conținut

Tabele de simboluri

- Tabela de simboluri S cu n înregistrări;
- Fiecare înregistrare are asociată o cheie (unică);
- Operatii: $cauta(S, k)$, $insereaza(S, x)$, $sterge(S, x)$;
- Cum poate fi organizată structura de date S?

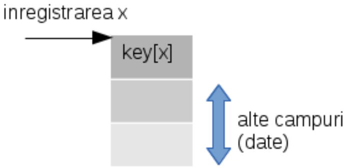


Tabela cu adresare directă

- $U = \{0, 1, ..., m-1\}$ mulțimea univers a cheilor;
- Un tablou $T[0..m-1]$:

$$T[k] = \begin{cases} x & \text{daca } x \in S \text{ și } x.cheie = k \\ NULL & \text{altfel.} \end{cases}$$

- Fiecare poziție (slot) din tablou corespunde unei chei din universul U.
- Dacă $|S| = n$, atunci $n \leq m$.

Tabela cu adresare directă - Operații

- Operații

  Function *cauta(t, k)*
  begin
  return $T[k]$
  end

  Procedure *insereaza(t, x)*
  begin
  $T[x.cheie] = x$
  end

  Procedure *sterge(t, x)*
  begin
  $T[x.cheie] = NULL$
  end

- Complexitatea timp a operațiilor: $\Theta(1)$

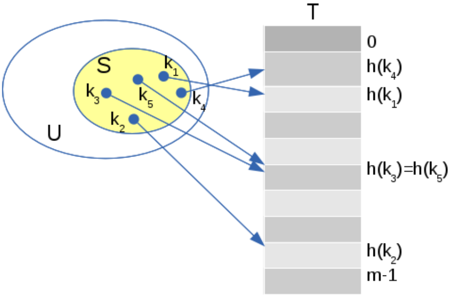
Tabela cu adresare directă

- Spațiul de memorare: $\Theta(|U|)$.
- Probleme:
  - cheile pot să nu fie numere întregi;
  - domeniul de valori al cheilor este foarte mare:
    - numere pe 64 de biți (18.446.744.073.709.551.616 chei diferite)
    - șiruri de caractere;
  - mulțimea de chei memorate este foarte mică relativ la U.
- Soluție: tabela de dispersie
  - o generalizare a noțiunii de tabelă cu adresare directă;
  - o structură de date eficientă pentru implementarea dicționarelor.

Conținut

Tabela de dispersie

- Utilizează o funcție de dispersie (*hash*) h pentru a asocia cheilor din universul U o valoare din mulțimea $\{0, 1, \cdots, m-1\}$.

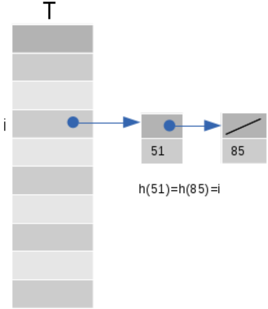


- Un element cu cheia k are asociată poziția $h(k)$ în tabela T.
- Funcția de dispersie reduce domeniul de valori a indicilor și implicit dimensiunea vectorului memorat.
- Coliziune: $\exists\ x_1, x_2 \in S$ astfel încât $h(x_1.cheie) = h(x_2.cheie)$

Conținut

Rezolvarea coliziunilor prin înlănțuire (dispersie externă)

- Înregistrările care au asociate același slot vor fi memorate într-o listă liniară. T devine tablou de pointeri.



- Soluție simplă, dar necesită spațiu suplimentar de memorie.

- Cazul cel mai nefavorabil: toate cheile au asociate același slot
  - timpul de acces: $\Theta(n)$.

Function *cauta(t, k)*
begin
    caută elementul cu cheia k în lista $T[h(k)]$
end

Procedure *insereaza(t, x)*
begin
    inserează x la începutul listei $T[h(x.cheie)]$
end

Procedure *sterge(t, x)*
begin
    șterge x din lista $T[h(x.cheie)]$
end

Dispersie externă – analiza complexității

- *Căutare*:
  Complexitatea în cazul cel mai nefavorabil depinde de lungimea listei.

- *Inserare*:
  Complexitatea în cazul cel mai nefavorabil: $O(1)$.

- *Ștergere*:
  $O(1)$ dacă avem liste liniare dublu înlănțuite; dacă lucrăm cu liste liniare simplu înlănțuite, trebuie întâi să căutăm x și să reținem predecesorul acestuia pentru a putea reface legatura.

Dispersie externă – analiza complexității în cazul mediu

- Ipoteza dispersiei uniforme simple: fiecare cheie $k \in U$ are o probabilitate egală de a fi memorată în oricare locație din tabela T și independent de locațiile altor chei.

- Factorul de încărcare al tabelei T este

$$\alpha = n/m,$$

unde n este numărul de chei ($|S|$), iar m numărul de locații (dimensiunea tabloului T).

- Timpul de calcul al funcției de dispersie este $\Theta(1)$.

Dispersie externă – analiza complexității în cazul mediu

Teoremă:
Considerând o tabelă de dispersie în care coliziunile sunt rezolvate prin înlănțuire, în ipoteza dispersiei uniforme simple, o căutare **fără succes** *are complexitatea timp în* **cazul mediu** $\Theta(1 + \alpha)$.

Teoremă:
Într-o tabelă de dispersie în care coliziunile sunt rezolvate prin înlănțuire, în ipoteza dispersiei uniforme simple, o căutare **cu succes** *are complexitatea timp în* **cazul mediu** $\Theta(1 + \alpha)$.

Corolar:
Dacă numărul de sloturi este cel puțin proporțional cu numărul de elemente ($n = O(m)$ *sau, echivalent,* $\alpha = O(1)$), *atunci operația de căutare are complexitatea, în* **medie**, $O(1)$.

Conținut

Funcția de dispersie

- *Deterministă*: pentru o cheie k, funcția trebuie să furnizeze întotdeauna aceași valoare $h(k)$.
- *Aleatoare*: vizează minimizarea coliziunilor.
- O funcție hash bună distribuie cheile uniform în locațiile tabelei.
- Ipoteza dispersiei uniforme simple este dificil de garantat, dar există tehnici euristice care funcționează bine în practică (atât timp cât deficiențele acestora pot fi evitate).

Funcții de dispersie – Metoda diviziunii

$$\boxed{h(k) = k \mod m}$$

- Presupunem că toate cheile sunt numere naturale.
  - dacă cheile nu sunt numere naturale, atunci trebuie gasită o modalitate de a le interpreta ca numere naturale;
  - *Exemplu:* presupunem un identificator de forma $(112, 116)$; în baza 128, acesta devine $(112 \times 128) + 116 = 14452$.
- Nu se alege pentru m o valoare care are un divizor mic d. Preponderența cheilor congruente modulo d poate afecta în mod negativ uniformitatea.
- Dacă $m = 2^r$, atunci valoarea funcției depinde doar de ultimii r biții ai lui k.
  - *Exemplu:* $k = 1011000111011010$ și $r = 6 \mapsto h(k) = 011010$.
- Se alege m un numar prim care nu este apropiat de o putere a lui 2 sau 10.

Funcții de dispersie – Metoda înmulțirii

$$\boxed{h(k) = \lfloor m(kA - \lfloor kA \rfloor) \rfloor}$$

- $A \in (0, 1)$ este o constantă.
- Valoarea lui m nu este critică (de obicei o putere a lui 2).

$$\boxed{h(k) = (kA \mod 2^w) rsh(w - r)}$$

- $m = 2^r$, (mașină în care cuvintele sunt pe w–biți).
- A este un numar impar din intervalul $(2^{w-1}, 2^w)$.
- rsh este operatorul de deplasare la dreapta pe biti.

Funcții de dispersie – Metoda înmulțirii

- *Exemplu:* $m = 2^3$ și cuvinte pe $w = 7$ biți.

$$
\begin{array}{lr}
 & 1011001 = A \\
\times & 1101011 = k \\
\hline
 & 1001010\underbrace{011}_{h(k)}0011
\end{array}
$$

- Nu se alege A prea aproape de 2^{w-1} sau 2^w.

- Knuth: $A = (\sqrt{5} - 1)/2$.

- Înmulțirea modulo 2^w este mai rapidă în comparație cu împărțirea; operatorul *rsh* este rapid.

Funcții de dispersie – Dispersia universală

$$\boxed{h(k) = [(ak + b) \mod p] \mod m}$$

- p număr prim cu $p > |U|$;
- a, b numere aleatoare din $\{0, ..., p-1\}$.

- Cazul cel mai nefavorabil, $k_1 \neq k_2$, $Pr_{a,b}\{h(k_1) = h(k_2)\} = 1/m$.

Conținut

Rezolvarea coliziunilor prin adresare deschisă

- *Dispersie internă*
- Toate elementele sunt memorate în interiorul tabelei T; nu este utilizat spațiu suplimentar de memorie, în afara tabelei de dispersie.
- Functia de inserare examinează tabela până când este găsită o locație liberă.
- Funcția de dispersie depinde atât de cheie cât și de numărul examinarii:

$$\boxed{h : U \times \{0, 1, ..., m-1\} \mapsto \{0, 1, ..., m-1\}}$$

- Secvența de examinări $h(k,0), h(k,1), \cdots, h(k,m-1) >$ trebuie să fie o permutare a $\{0, 1, .., m-1\}$.
- Dezavantaje: tabela se poate umple; ștergerea poate deveni dificilă.

Dispersie internă – Operații

Function *cauta(t, k)*
begin
    $i \leftarrow 0$
    repeat
        $j \leftarrow h(k, i)$
        if $T[j] == k$ **then**
            return j
        else
            $i \leftarrow i + 1$
    until $T[j] == NULL\ OR\ i == m$;
    return $NULL$
end

```
Procedure insereaza(t, k)
begin
    i ← 0
    repeat
        j ← h(k, i)
        if T[j] == NULL then
            T[j] ← k
            return j
        else
            i ← i + 1
    until i == m;
    return −1
end
```

Dispersie internă – Strategii pentru examinare

Examinare liniară:

$$\boxed{h(k,i) = (h'(k) + i) \mod m}$$

- $h'(k)$ o funcție de dispersie uzuală.
- Pentru o cheie k, secvența de examinare este

$$h'(k),\ h'(k)+1,\ h'(k)+2, \ldots,\ m-1,\ 0,\ 1, \ldots,\ h'(k)-1.$$

- Avantaj: metodă simplă.
- Dezavantaj: grupare primară (*primary clustering*) – se formează șiruri lungi de locații ocupate; crește timpul mediu de căutare.

Dispersie internă – Strategii pentru examinare

Examinare pătratică:

$$\boxed{h(k,i) = (h'(k) + c_1 i + c_2 i^2) \mod m}$$

- $h'(k)$ o funcție de dispersie uzuală.
- Pentru o cheie k, prima locație examinată este $h'(k)$, iar următoarele poziții examinate sunt decalate cu cantități ce depind într-o manieră pătratică de poziția anterior examinată.
- Dezavantaj: grupare secundară – dacă două chei au aceeași poziție de start a examinării, atunci secvențele de verificare coincid.
- Funcționează mai bine decât verificarea liniară.

Dispersie internă – Strategii pentru examinare

Dispersie dublă:

$$\boxed{h(k,i) = (h_1(k) + ih_2(k)) \mod m}$$

- $h_1(k)$ si $h_2(k)$ două funcții de dispersie uzuale.
- Pentru o cheie k, prima locație examinată este $h_1(k)$, iar următoarele poziții examinate sunt decalate față de poziția anterioară cu $h_2(k)$ mod m.
- Această metodă produce în general rezultate foarte bune, cu condiția ca $h_2(k)$ să fie relativ prim cu m. O modalitate de a realiza acest lucru este să considerăm m o putere a lui 2 și să alegem $h_2(k)$ astfel încât să rezulte doar numere impare.

Dispersie internă – Analiza complexității

Ipoteza dispersiei uniforme: fiecare cheie are aceeași probabilitate de a avea oricare din cele $m!$ permutări ca secvență de examinări.

Teoremă:

Într-o tabelă de dispersie cu adresare deschisă, în ipoteza dispersiei uniforme, cu factor de încărcare $\alpha < 1$, numărul mediu de verificări este cel mult

- $\frac{1}{1-\alpha}$ *pentru operația de căutare fără succes, și*
- $\frac{1}{\alpha} ln \frac{1}{1-\alpha}$ *pentru operația de căutare cu succes.*

Corolar:

Daca α este constant, atunci accesarea unei tabele de dispersie cu adresare deschisă necesită în medie un timp constant, $\Theta(1)$.