Coada cu priorități.
Colecții de mulțimi disjuncte

SD 2015/2016

Conținut

- Coada cu priorităţi și “max-heap”.
- Colecţii de mulţimi disjuncte şi “union-find”.

Coada cu priorități - exemple

- Pasagerii unui avion
  - Priorități:
    - Clasa “buisness”
    - Persoane călatorind cu copii / cu mobilitate redusă
    - Ceilalți pasageri
- Avioane care se pregătesc de aterizare
  - Priorități:
    - Urgențe
    - Nivelul carburantului
    - Distanța față de aeroport

Coada cu priorităţi: tip de dată abstract

- Obiecte: structuri de date în care elementele sunt numite *atomi*; orice atom are un *câmp-cheie* numit *prioritate*.

- Elementele sunt memorate în funcție de prioritate și nu de poziția lor.

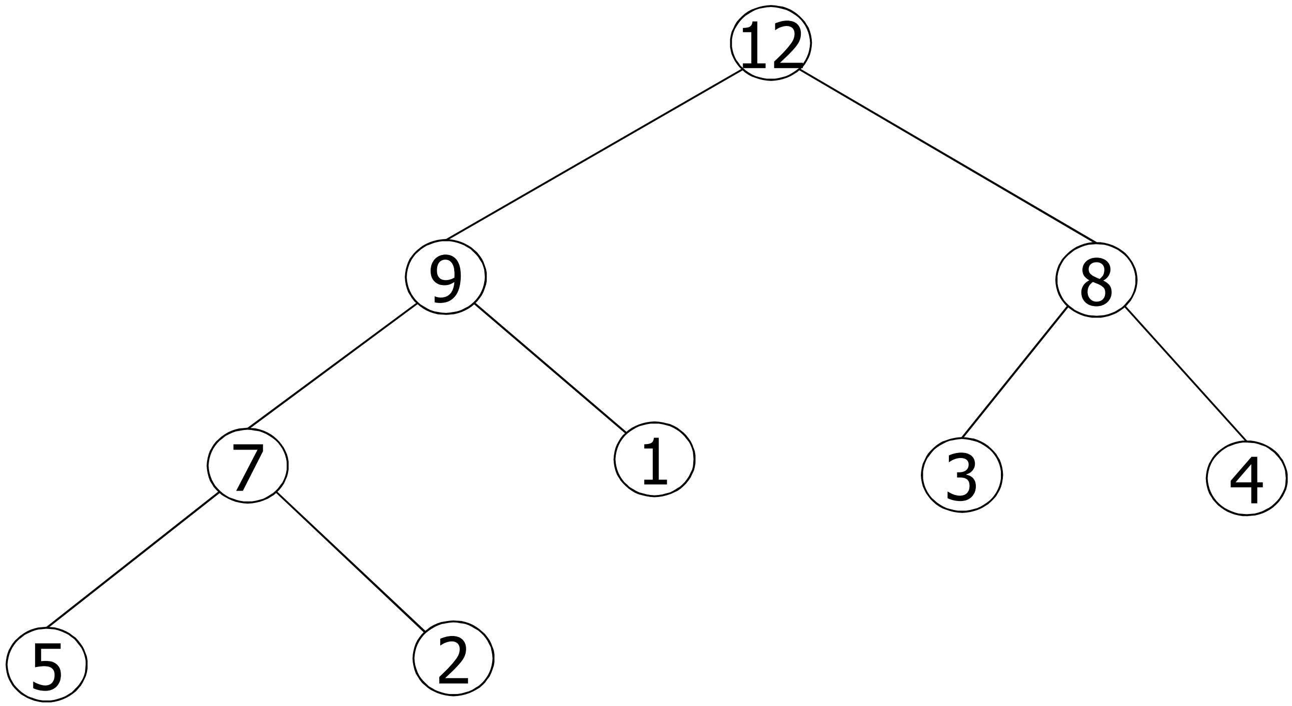
Coada cu priorităţi: operaţii

- citeste
  - intrare: o coadă cu priorităţi C
  - ieşire: atomul din C cu cheia cea mai mare
- elimina
  - intrare: o coadă cu priorităţi C
  - ieşire: C din care s-a eliminat atomul cu cheia cea mai mare
- insereaza
  - intrare: o coadă cu priorităţi C şi un atom **at**
  - ieşire: C la care s-a adăugat **at**

maxHeap

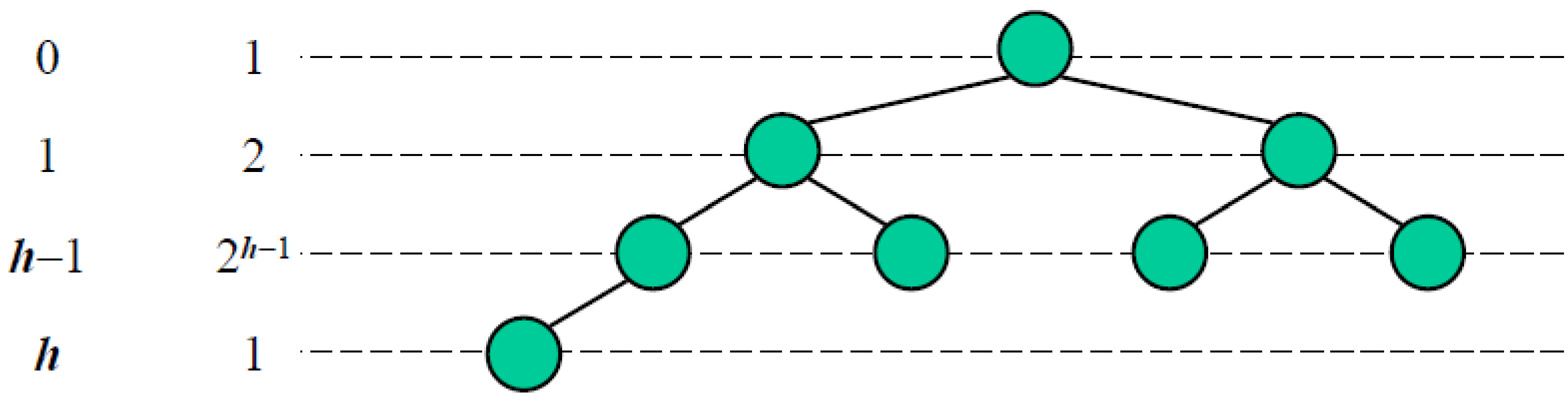
- Implementează coada cu priorități.
- Arbori binari cu proprietățile:
  - Nodurile memorează câmpurile “cheie”;
  - Pentru orice nod, cheia din acel nod este mai mare decât sau egală cu cheile din nodurile fiu;
  - Arborele este complet. Fie *h* înălțimea arborelui. Atunci,
    - Pentru $i = 0, \ldots, h-1$, sunt 2^i noduri cu adâncimea *i*
    - Pe nivelul $h-1$, nodurile interne sunt situate la stânga nodurilor externe;
  - Ultimul nod al unui maxHeap este nodul cel mai la dreapta pe nivelul *h*.

`maxHeap` - exemplu



Înălțimea unui `maxHeap`

- <u>Teoremă</u>: Un maxHeap care conține *n* chei are înălțimea *O(log n)*.
- <u>Demonstrație</u>:
  - Utilizăm proprietatea de arbore binar complet.
  - Fie *h* înălțimea unui maxHeap cu *n* chei.
  - Avem 2^i chei de adâncime *i*, pentru *i = 0, ..., h-1* și cel puțin o cheie de adâncime *h*: $n \geq 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{h-1} + 1 = 2^h$
  - Obținem: $h \leq \log n$

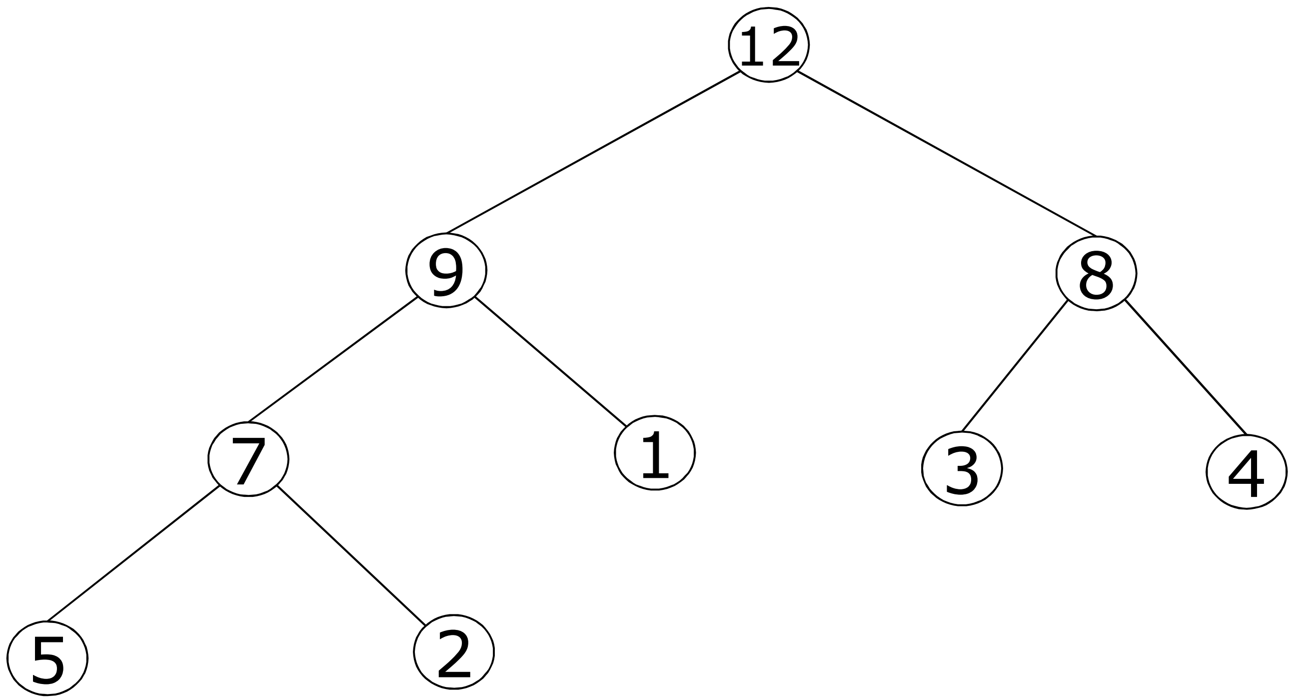


`maxHeap`: eliminarea

- Se elimină rădăcina heap-ului (corespunde elementului cel mai prioritar).

- Algoritmul are trei etape:
  - Se înlocuiește cheia rădăcinii cu cheia ultimului nod;
  - Se șterge ultimul nod;
  - Se reface proprietatea de maxHeap.

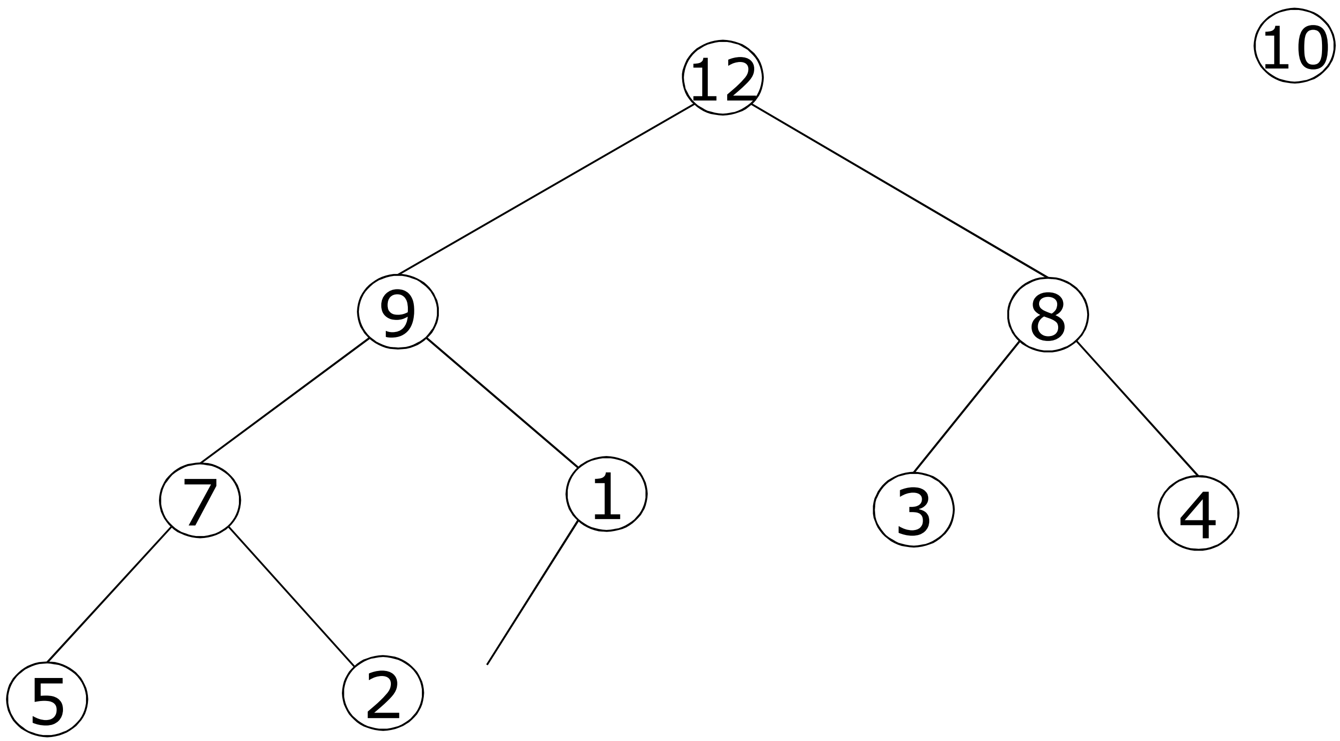
`maxHeap`: eliminarea



`maxHeap`: inserarea

- Se inserează noua cheie într-un nou nod.
- Algoritmul are trei etape:
  - Se adaugă noul nod ca cel mai din dreapta pe ultimul nivel;
  - Se inserează noua cheie în acest nod;
  - Se reface proprietatea de maxHeap.

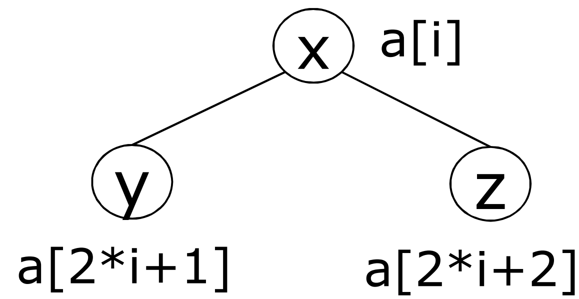
`maxHeap`: inserarea

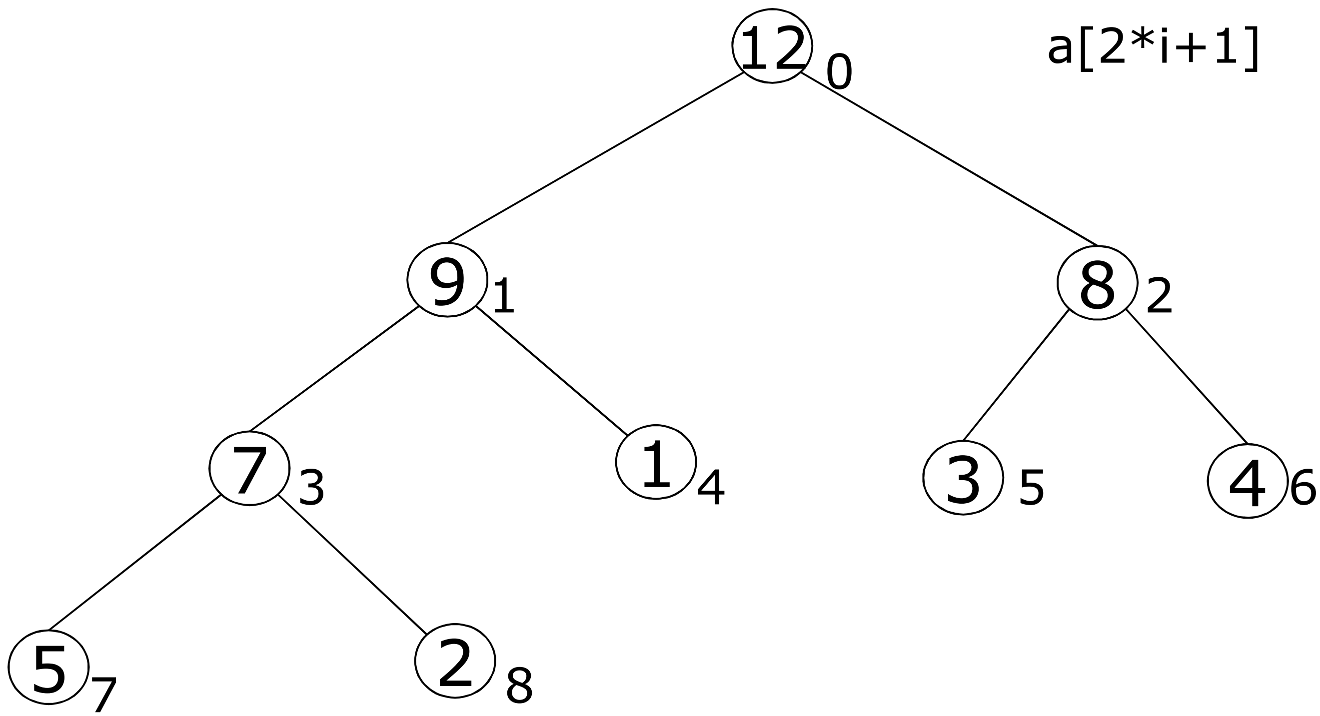


maxHeap:implementarea cu tablouri

$$(\forall k)\ 1 \le k \le n-1 \Rightarrow a[k] \le a[(k-1)/2]$$

12	**9**	**8**	**7**	**1**	**3**	**4**	**5**	**2**
0	1	2	3	4	5	6	7	8





maxHeap: inserare

```
procedure insereaza(a, n, cheie)
begin
   n ← n+1
   a[n-1] ← cheie
   j ← n-1
   heap ← false
   while ((j > 0) and not heap) do
      k ← [(j-1)/2]
      if (a[j] > a[k])
      then swap(a[j], a[k])
           j ← k
      else heap ← true
end
```

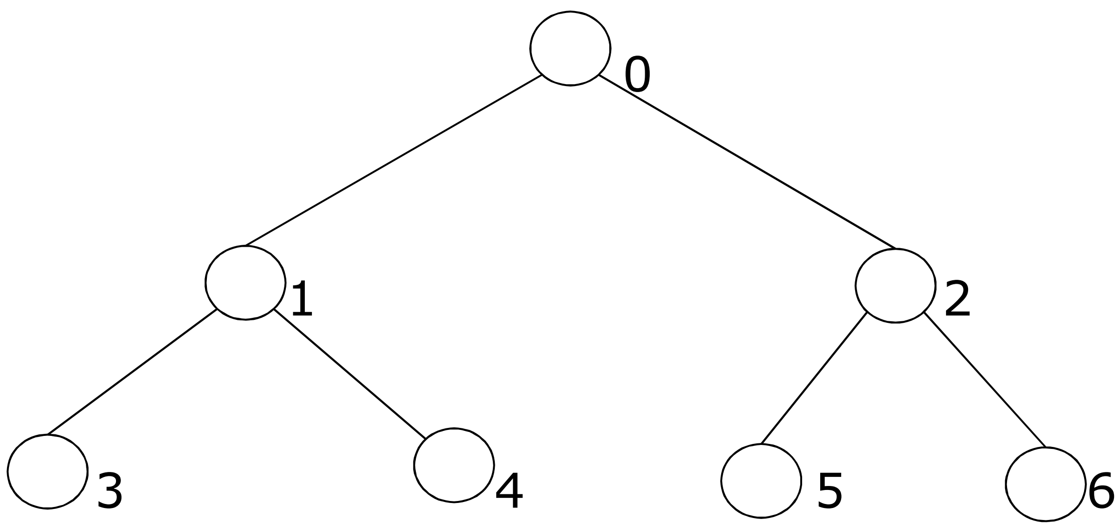
`maxHeap` - elimina

```
procedure elimina(a, n)
begin
    a[0] ← a[n-1]
    n ← n-1
    j ← 0
    heap ← false
    while ((2*j+1 < n) and not heap) do
        k ← 2*j+1
        if ((k < n-1) and (a[k] < a[k+1]))
        then  k ← k+1
        if (a[j] < a[k])
        then  swap(a[j], a[k])
              j ← k
        else  heap ← true
end
```

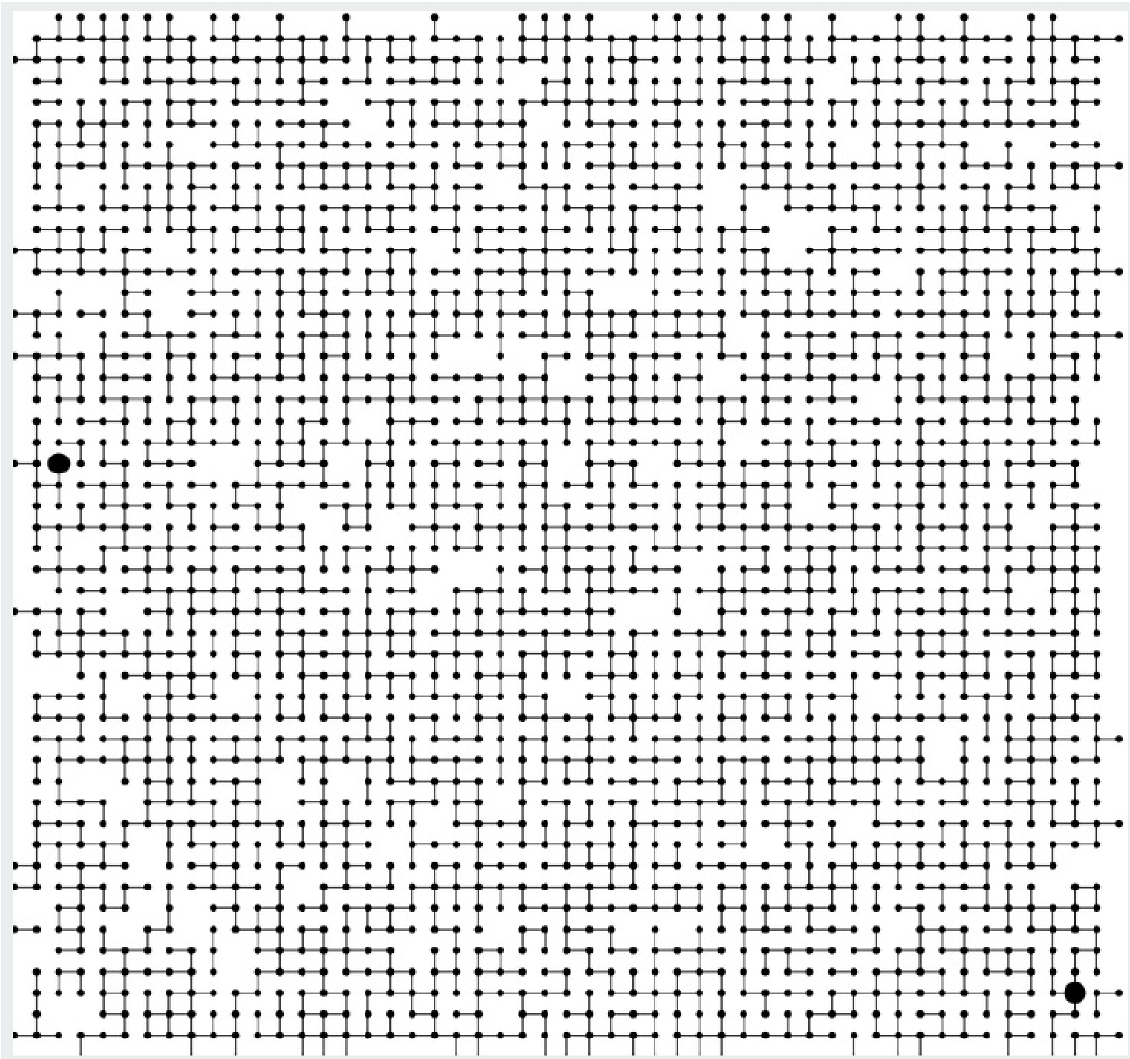
`maxHeap`: timp de execuţie

- Operaţiile inserare/eliminare necesită timpul

$$O(h) = O(\log n)$$



Colecții de mulțimi disjuncte



<u>Aplicații</u>:

- Rețele de calculatoare
- Pagini web (Internet)
- Pixeli într-o imagine digitală

Colecţii de mulţimi disjuncte: tip de dată abstract

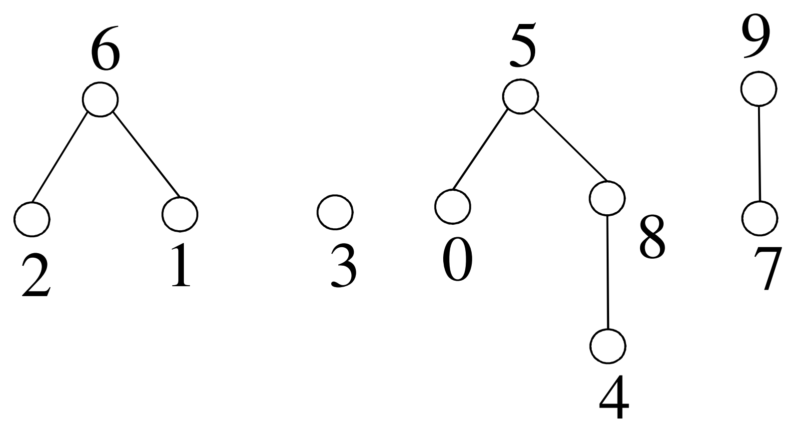
- obiecte: colecţii de submulţimi disjuncte (partiţii) ale unei mulţimi univers
- operaţii:
  - find()
    - intrare: o colecţie C, un element i din univers
    - ieşire: submulţimea din C la care aparţine i
  - union()
    - intrare: o colecţie C, două elemente i şi j din univers
    - ieşire: C in care componentele lui i şi resp. j sunt reunite
  - singleton()
    - intrare: o colecţie C, un element i din univers
    - ieşire: C la care componenta lui i are pe i ca unic element

Colecții de mulțimi disjuncte: “**`union-find`**”

- structura “union-find”
  - mulţimea univers = {0,1, ..., n-1}
  - submulţime = arbore
  - colecţie = pădure
  - reprezentarea unei păduri prin legătura părinte

Colecții de mulțimi disjuncte: “**`union-find`**”

- Exemplu:
  - n=10, {1,2,6},{3}, {0,4,5,8}, {7,9}



parinte	5	6	6	-1	8	-1	-1	9	5	-1
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Colecții de mulțimi disjuncte: “**`union-find`**”

```
procedure singleton(C, i)
begin
  C.parinte[i] ← -1
end
```

Colecții de mulțimi disjuncte: “union-find”

```
function find(C, i)
begin
  temp ← i
  while (C.parinte[temp] >= 0) do
    temp ← C.parinte[temp]
  return temp
end
```

Colecții de mulțimi disjuncte: "union-find"

```
procedure union(C, i, j)
begin
   ri ← find(i)
   rj ← find(j)
   if (ri != rj) then
     C.parinte[rj] ← ri
end
```

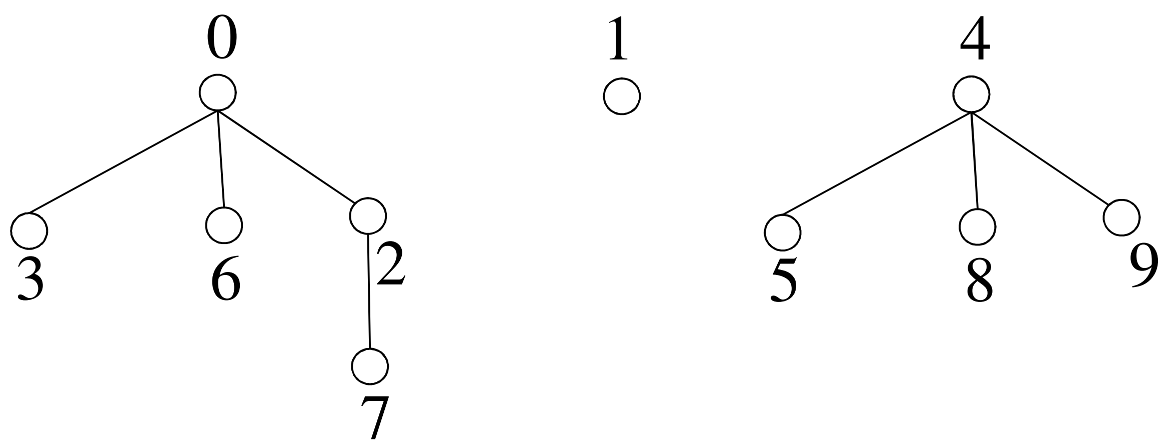
Structură "union-find" ponderată

- Soluție la problema arborilor dezechilibrați.

- Mecanism:
  – Memorarea numărului de vârfuri din arbore (cu semn negativ).
  – Aplatizarea arborilor.

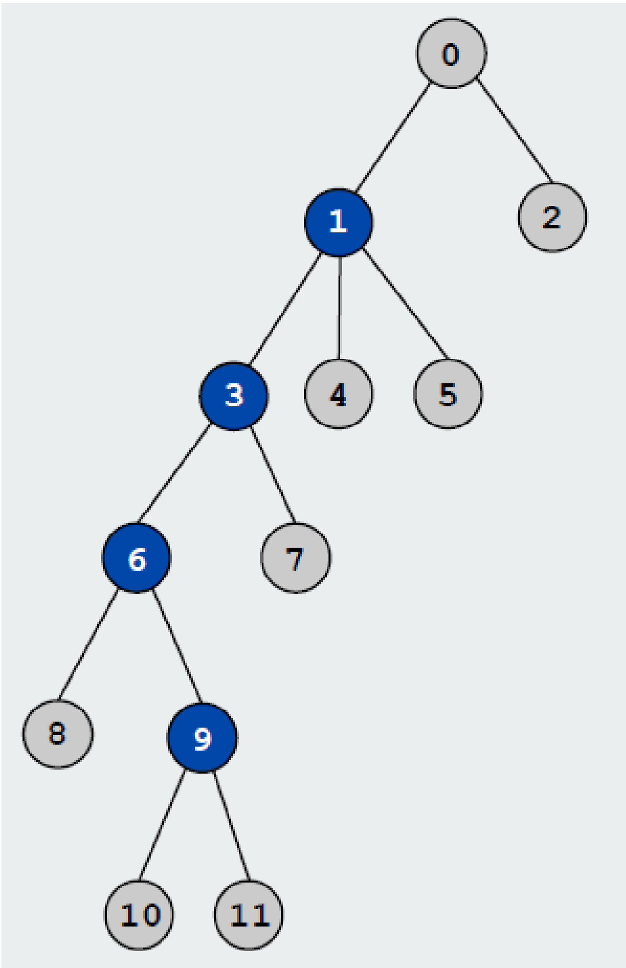
Structură “union-find” ponderată

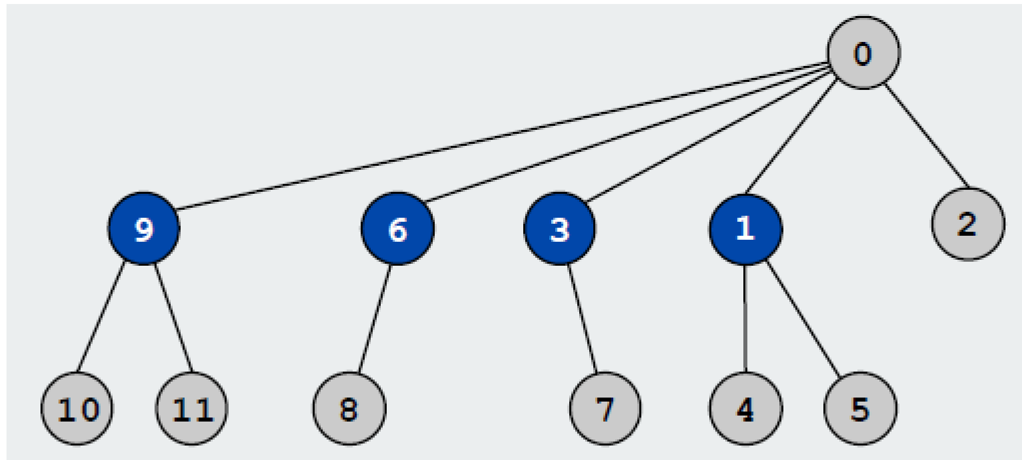
- Exemplu:



parinte									
-5	-1	0	0	-4	4	0	2	4	4
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Aplatizarea arborilor





find(9)

Structură “union-find” ponderată

```
procedure union(C, i, j)
begin
   ri ← find(i); rj ← find(j)
   while (C.parinte[i] >= 0) do
      temp ← i; i ← C.parinte[i]; C.parinte[temp]← ri
   while (C.parinte[j] >= 0) do
      temp ← j; j ← C.parinte[j]; C.parinte[temp]← rj

   if (C.parinte[ri] > C.parinte[rj])
     then C.parinte[rj] ← C.parinte[ri]+C.parinte[rj]
          C.parinte[ri] ← rj
     else C.parinte[ri] ← C.parinte[ri]+C.parinte[rj]
          C.parinte[rj] ← ri
end
```

Structură “union-find” ponderată

- *<u>Teoremă</u>: Pornind de la o colecție vidă, orice secvență de M operații “union” și “find” asupra a N elemente are complexitatea O(N+M lg*N).*
  - *lg*N* = numărul de logaritmări până se obține 1.