Teoria probabilităţilor discrete - Curs 3

Olariu E. Florentin

Martie, 2016

Table of contents

Formula de înmulţire

Proposition 1.1

Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ evenimente aleatoare oarecari, atunci

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

proof: Membrul drept al relaţiei de mai sus este egal cu

$$P(A_1) \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})} = P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

(după simplificările evidente). ■

Formula de înmulţire

Exemplu. într-o urnă sunt cinci bile albe şi cinci bile negre. Se scot trei bile, una câte una fără întoarcere.

(a) Care este probabilitatea obţinerii a trei bile albe?

(b) Dar a două bile albe şi una neagră?

Soluţie:

(a) Pentru prima întrebare fie $A_i =$" a i-a bilă extrasă este albă" $(i = \overline{1,3})$, atunci

$$P(A_1) = \frac{1}{2},\ P(A_2|A_1) = \frac{4}{9},\ P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{3}{8}$$

şi

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{24}.$$

Formula de înmulţire

(b) Pentru a două cerinţă probabilitatea cerută este

$$P\left(\left(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right) \cup \left(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3\right) \cup \left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3\right)\right) =$$

$$P\left(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right) + P\left(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3\right) + P\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3\right)$$

şi fiecare dintre aceste trei probabiltăţi se calculează cu formula de înmulţire. ♣

Formula de înmulţire

Exemplu. Într-o urnă sunt patru bile albe şi şase bile negre. Se scot trei bile, una câte una fără întoarcere.

(a) Care este probabilitatea obţinerii a trei bile negre?

(b) Care este probabilitatea ca prima şi a treia bilă să fie albe iar cea de-a doua neagră?

(c) Dar probabilitatea obţinerii a două bile negre şi una albă?

Soluţie:

(a) Pentru prima întrebare fie $A_i =$" a i-a bilă extrasă este neagră".

$$P(A_1) = \frac{6}{10},\ P(A_2|A_1) = \frac{5}{9},\ P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{4}{8} \text{ şi}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}.$$

Formula de înmulţire

(b) Pentru a două cerinţă probabilitatea cerută este

$$P\left(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3\right) = P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2|\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_3|\overline{A}_1 \cap A_2),$$

iar

$$P(\overline{A}_1) = \frac{4}{10}, P(A_2|\overline{A}_1) = \frac{6}{9}, P(\overline{A}_3|\overline{A}_1 \cap A_2) = \frac{3}{8}.$$

$$P\left(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3\right) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{10}.$$

Formula de înmulţire

(c) Pentru a treia cerinţă probabilitatea cerută este

$$P\left(\left(\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3\right)\cup\left(A_1\cap \overline{A}_2\cap A_3\right)\cup\left(A_1\cap A_2\cap \overline{A}_3\right)\right)=$$

$$P\left(\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3\right)+P\left(A_1\cap \overline{A}_2\cap A_3\right)+P\left(A_1\cap A_2\cap \overline{A}_3\right)$$

şi fiecare dintre aceste trei probabiltăţi se calculează cu formula de înmulţire. De exemplu

$$P(A_1\cap\overline{A}_2\cap A_3)=P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap\overline{A}_2)=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{1}{6}.\clubsuit$$

Schema hipergeometrică (sau schema bilei neîntoarse)

- Această schema probabilistică foloseşte următorul context: într-o urnă sunt n_1 bile albe şi n_2 bile negre, $n = n_1 + n_2$. Din urnă se extrag, fără întoarcere k bile (cele k bile sunt extrase simultan din urnă).

Proposition 1.1

Fie $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, astfel încât $k_1 \leqslant n_1$, $k_2 \leqslant n_2$ şi $k = k_1 + k_2$. Probabilitatea ca dintre cele k bile, exact k_1 să fie albe şi k_2 să fie negre este

$$\frac{\binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2}}{\binom{n}{k}}$$

Schema hipergeometrică (sau schema bilei neîntoarse)

- Mai general: într-o urnă sunt n_1 bile de culoare c_1, n_2 bile de culoare c_2, ..., n_p bile de culoare c_p (unde $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$). Din urnă se extrag, fără întoarcere k bile (extrase simultan).

Proposition 1.2

Fie $k_1, k_2, \ldots, k_p \in \mathbb{N}$*, astfel încât* $k_i \leqslant n_i$*,* $1 \leqslant i \leqslant p$ *şi* $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_p$*. Probabilitatea ca dintre cele* k *bile, exact* k_1 *să fie de culoare* c_1*,* k_2 *să fie de culoare* c_2*, ...,* k_p *să fie de culoare* c_p *este*

$$\frac{\binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n_p}{k_p}}{\binom{n}{k}}$$

Schema hipergeometrică

Exemplu. într-o urnă sunt 4 bile albe, 3 bile roşii, 5 bile negre şi 4 bile albastre. Din urnă se extrag fără întoarcere şapte bile.

(a) Care este probabilitatea ca dintre bilele extrase 2 să fie albe, 3 să fie negre şi 2 albastre?

(a) Care este probabilitatea ca dintre bilele extrase exact 4 să fie negre?

Soluţie:

$$(a)\ \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{3}{0}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{16}{7}},$$

$$(b)\ \frac{\binom{5}{4}\cdot\binom{11}{3}}{\binom{16}{7}}.\clubsuit$$

Schema lui Poisson

- Cadrul acestei scheme este următorul: considerăm un experiment aleator şi n evenimente aleatoare independente (asociate acestui experiment): $A_1, A_2, \ldots, A_n$ cu probabilităţi cunoscute:

$$P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, \ldots, P(A_n) = p_n.$$

Proposition 2.1

Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$; probabilitatea ca dintre cele n experimente să se realizeze exact k este egală cu coeficientul lui x^k din dezvoltarea polinomului

$$(p_1 x + q_1) \cdot (p_2 x + q_2) \cdot \ldots \cdot (p_n x + q_n),$$

unde $q_i = P(\overline{A}_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Schema binomială

- Considerăm un experiment aleator şi un eveniment aleator A cu probabilitate cunoscută $P(A) = p$. Experimentul se efectuează de n ori în mod independent.

Proposition 3.1

Probabilitatea ca evenimentul A să se realizeze de exact k ori $(0 \leqslant k \leqslant n)$ în cele n efectuări ale experimentului este $p^k(1-p)^{n-k}\binom{n}{k}$.

Schema binomială

Exemplu. Se aruncă două zaruri de 10 ori. Care este probabilitatea ca de exact 6 ori produsul celor două feţe să fie 12?

Soluţie: Fie $A =$"produsul feţelor este 12" (la o aruncare), $A = \{(2,6),(3,4$

de unde obţinem $P(A) = 4/36 = 1/9$. Probabilitatea ca A să se realizeze de exact 6 ori este

$$\frac{1}{9^6} \cdot \frac{8^4}{9^4} \cdot \binom{10}{6}. \clubsuit$$

Schema geometrică

- Această schemă probabilistică are următorul context: efectuăm un experiment aleator până când se realizează un eveniment aleator A (legat de acest experiment), cu probabilitate cunoscută $P(A) = p$.

Proposition 4.1

Probabilitatea ca evenimentul A să se realizeze exact la n-a efectuare a experimentului ($n \geqslant 1$) este $p(1-p)^{n-1}$.

Schema geometrică

Exemplu. O urnă conţine trei bile roşii, două negre şi patru bile albastre. Se scoate o bilă din urnă şi apoi se pune la loc. Se repetă experienţa până se obţine o bilă roşie sau una albastră. Care este probabilitatea ca abia la a patra extragere să se realizeze acest eveniment?

Soluţie: Fie $A =$"bila extrasă este roşie sau albastră", $P(A) = 7/9$. Probabilitatea ca evenimentul A să se producă abia la a patra extragere:

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{2^3}{9^3}. \clubsuit$$

Introducere

- Adesea după efectuarea unei experienţe aleatoare suntem interesaţi să determinăm valoarea unei funcţii ce are ca argument rezultatul experimentului: suma/produsul zarurilor, de câte ori apare stema la aruncarea unei monede etc.
- Aceasta deoarece rezultatul unui experiment este de multe ori unul cantitativ (i.e., se poate măsura într-un anume fel), este un număr întreg sau real.
- Rezultatul numeric al măsurării unui experiment aleator se numeşte *variabilă aleatoare* - deoarece este un rezultat care variază aleator: de la o efectuare la alta a experimentului nostru rezultatul poate fi altul conform şanselor corespunzătoare.
- Informal o variabilă aleatoare este o funcţie care asociază fiecărui eveniment aleator elementar un număr - care este rezultatul unei observaţii sau măsurători a evenimentului.

Repartiţia unei variabile aleatoare discrete

Definition 2.1

Dat un experiment aleator $\mathbb{E}$ şi Ω mulţimea evenimentelor aleatoare elementare, o **variabilă aleatoare** *reală este o funcţie $X : \Omega \to \mathbb{R}$, astfel încât pentru orice $M \subseteq \mathbb{R}$, $X^{-1}(M)$ este un eveniment aleator.*

Definition 2.2

O **variabilă aleatoare** *se numeşte* **discretă**, *dacă imaginea ei are cardinal cel mult numărabil, adică $|X(\Omega)| \leqslant \aleph_0$. Altfel este numită* **variabilă aleatoare continuă**.

- Dacă spaţiul evenimentelor elementare aleatoare este discret (i.e., $|\Omega| \leqslant \aleph_0$), atunci o variabilă aleatoare asociată experimentului corespunzător nu poate fi decât discretă.

Repartiţia unei variabile aleatoare discrete

- Dacă $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, atunci mulţimea perechilor (x_i, p_i) formează distribuţia sau repartiţia variabilei aleatoare discrete X şi uzual se notează sub forma unui tabel:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix} \tag{1}$$

- Se utilizează notaţiile $P\{X = x_i\} = P(X = x_i) = p_i$. În mod evident suma (care poate fi şi o serie) a probabilităţilor din a doua linie a tabelului de repartiţie este 1:

$$\sum_i p_i = 1, 0 < p_i \leqslant 1, \forall\, i$$

Repartiţia unei variabile aleatoare discrete

Definition 2.3

Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *o variabilă aleatoare discretă*

(i) *Se numeşte* **funcţie de masă de probabilitate** *a variabilei aleatoare discrete* X *funcţia* $f_X : X(\Omega) \to [0, 1]$, *definită prin* $f(x_i) = p_i = P\{X = x_i\}$.

(ii) *Numim* **funcţie de repartiţie** *(sau* **de distribuţie***) a variabilei aleatoare* X *(care poate fi şi continuă), funcţia* $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$, *dată prin*

$$F(a) = P\{X \leqslant a\}$$

Repartiţia unei variabile aleatoare discrete

- Funcţia de masă de probabilitate sau funcţia de repartiţie definesc complet o variabilă aleatoare discretă: tot ceea ce intereseaza relativ la o astfel de variabilă sunt informaţiile legate de probabilităţile evenimentelor elementare, care pot fi furnizate de oricare dintre aceste două funcţii.
- O variabilă aleatoare X este numită şi **distribuţie** sau **repartiţie**, înţelegând prin aceasta clasa tuturor variabilelor aleatoare care au aceeaşi funcţie de repartiţie ca şi X.

Proposition 2.1

Fie $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ *funcţia de repartiţie a variabile aleatoare* X.

(i) F_X *este o funcţie crescătoare:* $F_X(a) \leqslant F_X(b)$, *pentru orice* $a < b$.

(ii) $\lim\limits_{a \to +\infty} F_X(a) = 1$ *şi* $\lim\limits_{a \to -\infty} F_X(a) = 0$.

Repartiţia unei variabile aleatoare discrete

- După cum am notat deja, probabilităţile legate de variabila X pot fi determinate utilizând funcţia sa de repartiţie.

Proposition 2.2

Dacă X este o variabilă aleatoare, atunci

$$P\{a < X \leqslant b\} = F_X(b) - F_X(a).$$

- Variabilele aleatoare discrete sunt date în general prin funcţia de masă de probabilitate, în timp ce variabilele aleatoare continue sunt date prin funcţia de repartiţie (sau, după cum vom vedea ulterior, prin funcţia de densitate de probabilitate).

Repartiţia unei variabile aleatoare discrete - exemple

Exemplu. Să presupunem că o variabilă aleatoare discretă X, are patru valori x_1, x_2, x_3, x_4, cu $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ şi probabilităţile

$$P\{X = x_1\} = 0.2, P\{X = x_2\} = 0.3,$$

$$P\{X = x_3\} = 0.1, P\{X = x_4\} = 0.4,$$

atunci funcţia de repartiţie X este definită prin

$$F_X(a) = \begin{cases} 0, & a < x_1 \\ 0.2, & a \in [x_1, x_2) \\ 0.5, & a \in [x_2, x_3) \\ 0.6, & a \in [x_3, x_4) \\ 1, & a \geqslant x_4 \end{cases} \quad \clubsuit$$

Repartiţia unei variabile aleatoare discrete - exemple

Exemplu. Într-o urnă sunt patru bile albe, trei roşii şi trei albastre. Se extrag din această urnă două bile simultan (sau fără întoarcere). Pentru fiecare bilă albă extrasă se câştigă 1$ şi se pierde 1$ pentru o bilă albastră. Fie X câştigul total; să se determine repartiţia lui X.

Soluţie: Valorile posibile ale variabilei X sunt $\{\pm 1, 0, \pm 2\}$; calculăm valorile funcţie de masă de probabilitate (schema bilei neîntoarse)

$$f_X(-2) = P\{X = -2\} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15},$$

$$f_X(-1) = P\{X = -1\} = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{9}{45} = \frac{3}{15},$$

Repartiţia unei variabile aleatoare discrete - exemple

$$f_X(0) = P\{X = 0\} = \frac{\binom{3}{2} + \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3},$$

$$f_X(1) = P\{X = 1\} = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15},$$

$$f_X(2) = P\{X = 2\} = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}.$$

Repartiţia unei variabile aleatoare discrete - exemple

repartiţia variabilei este

$$X : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \dfrac{1}{15} & \dfrac{3}{15} & \dfrac{5}{15} & \dfrac{4}{15} & \dfrac{2}{15} \end{pmatrix} ..\clubsuit$$

Exerciţii pentru seminar

- **Formula de înmulţire:** I.1, I.2, I.4.
- **Scheme probabilistice:** II.1, II.3, III.1, III.3, III.4, IV.1, IV.2, IV.4.
- **Variabile aleatoare discrete:** V.2, V.3.
- **Rezervă:** I.3, II.2, III.2, III. 5., IV.3, V.4.

Exerciţii - Formula de înmulţire

I.1. Într-o urnă sunt 6 bile albe, 4 albastre şi 2 roşii. Se extrag succesiv şi fără întoarcere trei bile. Care este probabilitatea ca:

(a) prima bilă să fie albă, iar celelalte două albastre?

(b) o bilă să fie albastră, iar celelalte două roşii?

I.2. O urnă conţine trei bile albe, două bile negre şi patru bile roşii. Se extrag succesiv şi fără întoarcere trei bile.

(a) Care este probabilitatea ca toate bilele să fie roşii?

(b) Dar probabilitatea ca două bile să fie negre şi una albă?

Exerciţii - Formula de înmulţire

I.3. Se dau trei urne. Prima conţine 3 bile albe şi 1 neagră, cea de-a doua conţine 4 bile albe şi 5 negre iar a treia conţine 1 bilă albă şi 4 negre. Din prima urnă se extrage o bilă şi se introduce în cea de-a doua, după care se extrage o bilă din cea de-a doua urnă şi se introduce în cea de-a treia; în sfârşit se extrage o bilă din ultima urnă. Care este probabilitatea ca:

(a) cele trei bile extrase să fie albe?
(b) primele două bile să fie negre şi ultima albă?
(c) măcar o bilă să fie albă?

I.4. O urnă conţine cinci bile albe şi şapte bile negre. De fiecare dată când o bilă este extrasă din urnă este înlocuită cu două bile de cealaltă culoare. Se fac trei extrageri. Determinaţi probabilitatea

(a) ca primele două bile extrase să fie de culori diferite.
(b) ca prima bilă extrasă să fie albă, iar următoarele două negre.

Exerciţii - Formula de înmulţire

I.5. Două bile sunt colorate cu verde sau albastru şi sunt apoi introduse într-o urnă. Oricare dintre cele două bile este colorată în verde cu probabilitate $1/3$.

(a) Dacă se ştie că s-a folosit culoarea albastră (i. e., cel puţin o bilă este albastră), care este probabilitatea ca amândouă bilele să fie albastre?

(b) Urna se răstoarnă şi o bilă albastră cade din urnă. Care este probabilitatea ca bila rămasă în urnă să fie verde?

I.6*. Urna U_1 conţine trei bile roşii, urna U_2 conţine două bile negre, iar urna U_3 conţine o bilă neagră şi o bilă roşie. Se alege la întâmplare şi uniform o urnă. Se extrage o bilă din urna aleasă şi este înlocuită cu o bilă de cealaltă culoare; apoi se mai extrage o bilă din urnă. Dacă prima bilă extrasă este roşie, care este probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie tot roşie?

Exerciţii - schema hipergeometrică

II.1. Dintr-un pachet de cărţi de joc se extrag la întâmplare patru cărţi.

(a) Care este probabilitatea ca exact două dintre ele să fie de culoare roşie?

(b) Care este probabilitatea ca una dintre ele să fie de culoare neagră?

II.2. Într-o urnă sunt patru bile negre şi cinci bile albe; din urnă se extrag simultan patru bile. Care este probabilitatea ca

(a) două bile să fie albe şi două negre?

(b) toate bilele să fie negre?

(c) o bilă să fie albă şi trei negre?

Exerciţii - schema hipergeometrică

II.3. Într-o urnă sunt trei bile roşii, patru bile albastre şi cinci bile verzi; din urnă se extrag simultan patru bile. Care este probabilitatea ca

(a) două bile să fie roşii, una albastră şi una verde?

(b) o bilă să fie roşie, una albastră şi două verzi?

(c) trei bile să fie albastre şi una verde?

Exerciţii - schema binomială

III.1. Se aruncă o sută de monede.

(a) Care este probabilitatea ca pe cincizeci dintre ele să apară stema?

(b) Dar ca pe cel puţin cincizeci dintre ele să apară banul?

III.2. Se ştie ca hard-discurile produse de compania HDD au o probabilitate de 0.05 de a avea defecţiuni. Compania vine hard-discurile în pachete de câte 10 şi garantează că un astfel de pachet conţine cel mult un disc cu defecţiuni, altfel pachetul poate fi înlocuit. Care este probabilitatea ca un pachet să fie înlocuit?

Exerciţii - schema binomială

III.3. Un sportiv nimereşte o ţintă cu probabilitatea 0.5; el trage de 10 ori asupra ţintei. Care este probabilitatea ca

a) ţinta să fie atinsă de exact 5 ori?

a) ţinta să fie atinsă de cel puţin 2 ori?

III.4. Se aruncă două zaruri de 10 ori. Care este probabilitatea ca

a) de exact cinci ori suma celor două feţe să fie mai mare sau egală cu 6, dar cel de-al doilea zar să fie diferit de 4?

b) de cel mult opt ori suma celor două feţe să fie un număr prim?

III.5. Faţă de un adversar la fel de tare, ce este mai probabil să se câştige: două partide din patru sau trei partide din şase?

Exerciţii - schema binomială

III.6*. Un zar este aruncat până apare faţa şase a patra oară. Care este probabilitatea ca exact douăsprezece aruncări să fie necesare? Dar probabilitatea să fie necesare cel mult douăsprezece aruncări?

III.7.** Doi prieteni, ζ (zeta) şi ξ (xi), trebuie să plătească o cină, la care au luat parte împreună, cu un singur card de credit. Pentru a prelungi suspansul nu vor sa decidă pe baza aruncării unei singure monede. ζ propune să arunce fiecare o monedă de zece de ori şi să plătească cel care obţine de mai multe ori stema. ξ observă că în acest fel pot ajunge la egalitate şi propune o variantă: în caz de egalitate ζ să câştige, dar cu următoarea condiţie – ζ să arunce moneda de zece ori şi ξ de unsprezece ori. Este corectă această propunere?

III.8.** În contextul schemei binomiale: un experiment se repetă independent de n ori, se dă un eveniment A cu probabilitate p legat de acest experiment; care număr de realizări ale lui A este cel mai probabil?

Exerciţii - schema geometrică

IV.1. Dintr-un pachet de cărţi de joc se scoate câte o carte (care apoi se pune la loc în pachet) până când se obţine un as. Care este probabilitatea ca abia la a cincea extragere să se obţină un as?

IV.2. Se aruncă două zaruri de mai multe ori. Care este probabilitatea ca

(a) abia la a treia aruncare suma lor este cel puţin opt?

(b) produsul lor să fie cel puţin treizeci în primele două aruncări?

IV.3*. Doi jucători aruncă succesiv două zaruri. Câştigă cel care obţine primul suma mai mică sau egală cu 9. Care este probabilitatea de a câştiga jocul a primului jucător?

Exerciţii - schema geometrică

IV.4. Se aruncă două monede de mai multe ori. Care este probabilitatea

(a) ca abia la patra aruncare să apară stema pe ambele monede?

(b) ca abia la a patra aruncare să apară stema pe exact o monedă?

IV.5. Se extrage câte o carte dintr-un pachet de cărţi de joc şi apoi se pune la loc. Se repetă această experienţă. Care este probabilitatea

(a) ca abia la treia extragere să o bţinem o figură de treflă?

(b) ca în nici una din primele patru extrageri să nu obţinem vreun caro?

Exerciţii - repartiţii ale variabilelor aleatoare discrete

V.1*. O monedă falsificată are probabilitatea de a apare stema la o aruncare 2/3. Moneda se aruncă de patru ori. Fie X variabila aleatoare care notează numărul maxim de apariţii consecutive ale stemei. Să se determine repartiţia variabilei X.

V.2. Sunt alese două bile la întâmplare dintr-o urnă care conţine opt bile albe, patru bile negre şi două bile galbene. Să presupunem că o bilă neagră valorează 2$, iar una albă 1$. Se notează cu X câştigul obţinut; să se determine repartiţia variabilei X.

V.3. Fie X diferenţa dintre numărul de apariţii ale stemei şi ale banului la aruncarea de trei ori a unei monede. Determinaţi repartiţia şi funcţia de repartiţie ale variabilei aleatoare X.

V.4. Un zar se aruncă de două ori. Fie X_1 şi X_2 rezultatele obţinute.

(a) Să se determine repartiţia variabilei $X = \min\{X_1, X_2\}$.

(b) Să se determine repartiţia lui $Y = \max\{X_1 + X_2, X_1 \cdot X_2\}$.

Anexa 1

proof: (pentru Propoziţia 1.1) Evident numărul total de posibilităţi este $\binom{n_1+n_2}{k_1+k_2} = \binom{n}{k}$. Numărul de cazuri favorabile: există $\binom{n_1}{k_1}$ posibilităţi de a obţine exact k_1 bile albe şi pentru fiecare dintre aceste posibilităţi există $\binom{n-n_1}{k-k_1} = \binom{n_2}{k_2}$ posibilităţi ca restul de $k-k_1=k_2$ bile să fie negre. ∎

Anexa 1

proof: (Pentru Propoziţia 2.1) Fie $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ evenimentele care se realizează dintre cele n $(1 \leqslant i_j \leqslant n)$. Se mai realizează evenimentele de forma $\overline{A}_i$, cu $i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Aceste evenimente sunt independente; probabilitatea ca ele să se realizeze simultan este

$$\left(\prod_{j=1}^{k} p_{i_j}\right) \cdot \left(\prod_{i \notin \{i_1, i_2, \ldots i_k\}} q_i\right),$$ adunăm aceste probabilităţi:

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \left(\prod_{j=1}^{k} p_{i_j}\right) \cdot \left(\prod_{i \notin \{i_1, i_2, \ldots i_k\}} q_i\right),$$

dar această sumă se mai poate obţine adunând toate produsele de forma: pentru k dintre factorii polinomului alegem coeficientul lui x, iar pentru ceilalţi $(n - k)$ alegem termenul liber al binomului. Rezultatul este chiar coeficientul lui x^k din dezvoltarea polinomului.

∎

Anexa 1

proof: (pentru Propoziţia 3.1) Fie $\mathbb{E}$ experimentul aleator din enunţ. Putem modela un nou experiment aleator $\mathbb{E}'$ care ca consta din n efectuări independente ale experimentului $\mathbb{E}$. Relativ la acest nou experiment definim următoarele evenimente aleatoare: A_i - acel eveniment care se realizează când la a i-a efectuare (din cadrul lui $\mathbb{E}'$) a experimentului $\mathbb{E}$ se produce evenimentul A.
Ajungem astfel la o schemă Poisson, în care evenimentele independente $A_1, A_2, \ldots, A_n$ au fiecare aceeaşi probabilitate p. Probabilitatea cerută este coeficientul lui x^k din dezvoltarea binomului $[px + (1-p)]^n$. ■

Anexa 1

proof: (pentru Propoziţia 4.1) Notăm cu A_i evenimentul care se realizează dacă şi numai dacă evenimentul A se realizează la a i-a repetare a experimentului. Evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ sunt independente şi au aceeaşi probabilitate p. Probabilitatea ca evenimentul A să se realizeze exact la n-a efectuare e experimentului este

$$P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_{n-1} \cap A_n) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_{n-1}) \cdot P(A_n) =$$

$$= p(1-p)^{n-1}.$$

■

Bibliography

- Bertsekas, D. P., J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scietific, 2002.
- Gordon, H., *Discrete Probability*, Springer Verlag, New York, 1997.
- Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Scahaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1965.
- Ross, S. M., *A First Course in Probability* , Prentice Hall, 5th edition, 1998.
- Stone, C. J., *A Course in Probability and Statistics*, Duxbury Press, 1996.