FACULTAD DE INGENIERIA

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECÁNICA

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

1803

TECNICAS DE APROXIMACIÓN

Ricardo Nájera

Alberto Badel

Curso de Elementos Finitos

Febrero 25

2022

Partiendo de la ecuación diferencial dada, se procede a hallar la solución analítica, empleando los métodos vistos en el curso de ecuaciones diferenciales:

$$Ax^3\frac{d^2y(x)}{dx^2}+Bx^2\frac{dy(x)}{dx}+Cxy(x)=0$$

$$\boxed{\begin{aligned}A&=-2\\B&=4\\C&=20\end{aligned}}$$

$$2\le x\le 10$$

$$y(2)=1$$

$$y(10)=6$$

$$\therefore\ \boxed{-2x^3\frac{d^2y(x)}{dx^2}+4x^2\frac{dy(x)}{dx}+20xy(x)=0}\leftarrow Ecuación\ diferencial\ objetivo$$

$$\rightarrow Si\ y=x^r$$

$$y'=rx^{r-1}\qquad;\qquad y''=r(r-1)x^{r-2}$$

$$\boxed{x^2y''-2xy'-10y=0}\leftarrow Ecuación\ \ Cauchy-Euler$$

$$x^2r(r-1)x^{r-2}-2xrx^{r-1}-10x^r=0$$

$$r(r-1)x^r-2rx^r-10x^r=0$$

$$r^2-r-2r-10=0$$

$$r^2-3r-10=0\qquad\therefore\qquad r_1=5\ \ ,\ \ r_2=-2$$

$$\therefore y(x)=\ C_1x^5+C_2x^{-2}$$

$$\rightarrow 1=C_1(2)^5+C_2(2)^{-2}$$

$$1=32C_1+\frac{C_2}{4}\qquad (1)$$

$$\rightarrow 6=C_1(10)^5+C_2(10)^{-2}$$

$$6=100000C_1+\frac{C_2}{100}\qquad (2)$$

$$C_1=5{,}960076289\times10^{-5}$$

$$C_2=3{,}992371102$$

$$\therefore\quad y(x)=\ 5{,}960076289\times10^{-5}x^5+\frac{3{,}992371102}{x^2}$$

$$y(x)=\left(\frac{5{,}960076289\times10^{-5}x^7+3{,}992371102}{x^2}\right)\left(\frac{2499968}{2499968}\right)$$

$$\boxed{\boxed{y(x)=\frac{149x^7+9980800}{2499968x^2}}}\leftarrow Solución\ analítica$$

Luego para emplear los métodos de aproximación, se halló la función de prueba con 2 parámetros y la función residual:

$$-2x^3\frac{d^2y(x)}{dx^2}+4x^2\frac{dy(x)}{dx}+20xy(x)=0$$

$$con\ una\ función\ de\ prueba\ \hat{y}=ax^3+bx^2+cx+d$$

$$y(2)=1$$

$$y(10)=6$$

$$1=a(2)^3+b(2)^2+c(2)+d$$

$$8a+4b+2c\ +d=1 \qquad (1)$$

$$6=a(10)^3+b(10)^2+c(10)+d$$

$$1000a+100b+10c+d=6 \qquad (2)$$

De (1):

$$d=1-8a-4b-2c \qquad (3)$$

(3) en (2):

$$1000a+100b+10c+(1-8a-4b-2c)=6$$

$$992a+96b+8c=5$$

$$c=\frac{5}{8}-124a-12b \qquad (4)$$

(4) en (3):

$$d=1-8a-4b-2\left(\frac{5}{8}-124a-12b\right)=240a+20b-\frac{1}{4}$$

$$\boxed{\hat{y}=ax^3+bx^2+\left(\frac{5}{8}-124a-12b\right)x+\left(240a+20b-\frac{1}{4}\right)}\leftarrow Función\ de\ prueba$$

$$\frac{d\hat{y}}{dx}=\ 3ax^2+2bx+\left(\frac{5}{8}-124a-12b\right)$$

$$\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}=6ax+2b$$

$$R=-2x^3(6ax+2b)+4x^2\left(3ax^2+2bx+\left(\frac{5}{8}-124a-12b\right)\right)$$
$$+20x\left(ax^3+bx^2+\left(\frac{5}{8}-124a-12b\right)x+\left(240a+20b-\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$\boxed{R=20ax^4-2976ax^2+4800ax+24bx^3-288bx^2+400bx+15x^2-5x}$$
$$\uparrow Función\ residual$$

```
%% Técnicas de aproximación
%  Ricardo Nájera
%  Alberto Badel
%  2022

close all;
clear;
clc;
syms a b x;

dominio = [2 10];
y_analitica = (149*x^7 + 9980800)/(2499968*x^2 );
y_prueba = a*x^3 + b*x^2 + (5/8 - 124*a - 12*b)*x + (240*a + 20*b - 1/4);
R = 20*a*x^4 - 2976*a*x^2 + 4800*a*x + 24*b*x^3 - 288*b*x^2 + 400*b*x + 15*x^2 - 5*x;
```

MÉTODO DE COLOCACIÓN.

`subs(R,x,7)==0` Substituye $x_i = 7$ en la función residual e iguala a cero, generando la ecuación (1) en función de a y b.

`subs(R,x,3)==0` Substituye $x_i = 3$ en la función residual e iguala a cero, generando la ecuación (2) en función de a y b.

`solve(subs(R,x,7)==0, subs(R,x,3)==0)` Soluciona el sistema de ecuaciones generado por la ecuación (1) y la ecuación (2), entregando los valores de a y b.

Se substituyen los valores de a y b en la función de prueba, obteniendo:

```
%% Método de colocación
y_colocacion = subs(y_prueba, solve(subs(R,x,7)==0, subs(R,x,3)==0));
```

MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS.

`int(diff(R,a)*R, dominio)==0` Equivale a $\int_2^{10} \frac{dR}{da} R dx = 0$, que genera la ecuación (1) en función de a y b.

`int(diff(R,b)*R, dominio)==0` Equivale a $\int_2^{10} \frac{dR}{db} R dx = 0$, que genera la ecuación (2) en función de a y b.

`solve(int(diff(R,a)*R, dominio)==0,int(diff(R,b)*R, dominio)==0)` Soluciona el sistema generado por las ecuaciones (1) y (2), obteniendo los valores de a y b.

Se substituyen los valores de a y b en la función de prueba, obteniendo:

```
%% Método mínimos cuadrados
y_minimos = subs(y_prueba, solve(int(diff(R,a)*R, dominio)==0,int(diff(R,b)*R, dominio)==0));
```

MÉTODO DE GALERKIN.

`int(diff(y_prueba,a)*R, dominio)==0` equivale a $\int_2^{10} \frac{d\hat{y}}{da} R dx = 0$, que genera la ecuación (1) en función de a y b.

`int(diff(y_prueba,b)*R, dominio)==0)` equivale a $\int_2^{10} \frac{d\hat{y}}{db} R dx = 0$, que genera la ecuación (2) en función de a y b.

```
solve(int(diff(y_prueba,a)*R, dominio)==0,int(diff(y_prueba,b)*R, dominio)==0)
```

Soluciona el sistema generado por las ecuaciones (1) y (2), obteniendo los valores de a y b.

Se substituyen los valores de a y b en la función de prueba, obteniendo:

```
%% Método de Galerkin
y_Galerkin = subs(y_prueba,solve(int(diff(y_prueba,a)*R, dominio)==0,int(diff(y_prueba,b)*R, dominio)==0));
```

ELEMENTOS FINITOS

$$\boxed{-2x^3 \frac{d^2y(x)}{dx^2} + 4x^2 \frac{dy(x)}{dx} + 20xy(x) = 0}$$

$2 \leq x \leq 10$

$y(2) = 1$

$y(10) = 6$

Debilitamiento de la ED:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} w \left(-2x^3 \frac{d^2y(x)}{dx^2} + 4x^2 \frac{dy(x)}{dx} + 20xy(x) \right) dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-2wx^3 \frac{d^2y(x)}{dx^2} + 4wx^2 \frac{dy(x)}{dx} + 20wxy(x) \right) dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} -2wx^3 \frac{d^2y(x)}{dx^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} 4wx^2 \frac{dy(x)}{dx} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} 20wxy(x) dx$$

Para el primer término de la suma:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} -2wx^3 \frac{d^2y(x)}{dx^2} dx =$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} 2x^3 \frac{dw}{dx} \frac{dy(x)}{dx} \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} 6x^2 w \frac{dy(x)}{dx} \, dx - 2wx^3 \frac{dy(x)}{dx} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

Sea:

$u = -2wx^3$

$dv = \frac{d^2y(x)}{dx^2}$

$du = -2x^3 \frac{dw}{dx} - 6x^2 w$

$v = \frac{dy(x)}{dx}$

Por lo tanto, la ecuación debilitada es:

$$\sum_{i=1}^{n}\langle\int_{x_i}^{x_{i+1}} 2x^3\frac{dw}{dx}\frac{dy(x)}{dx}\ dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} 6x^2w\frac{dy(x)}{dx}\ dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} 4wx^2\frac{dy(x)}{dx}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} 20wxy(x)dx\ - 2wx^3\frac{dy(x)}{dx}\bigg|_{x_i}^{x_{i+1}}\rangle = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\langle\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} 2x^3\frac{dw}{dx}\frac{dy(x)}{dx} + 6x^2w\frac{dy(x)}{dx} + 4wx^2\frac{dy(x)}{dx} + 20wxy(x)\right)\ dx\rangle - 2wx^3\frac{dy(x)}{dx}\bigg|_{2}^{10} = 0$$

Con función de forma del elemento lineal:

$$\hat{y} = \ [H_1\ \ H_2]\begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1}\end{bmatrix}$$

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = [H_1{}'\ \ H_2{}']\begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1}\end{bmatrix}$$

$$w = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2\end{bmatrix}$$

$$\frac{dw}{dx} = \begin{bmatrix} H_1{}' \\ H_2{}'\end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\langle\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(2x^3\begin{bmatrix} H_1{}' \\ H_2{}'\end{bmatrix}[H_1{}'\ \ H_2{}']\begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1}\end{bmatrix} + 6x^2\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2\end{bmatrix}[H_1{}'\ \ H_2{}']\begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1}\end{bmatrix} + 4x^2\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2\end{bmatrix}[H_1{}'\ \ H_2{}']\begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1}\end{bmatrix} + 20x\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2\end{bmatrix}[H_1\ \ H_2]\begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1}\end{bmatrix}\right)dx\rangle = 0$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\langle\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(2x^3\begin{bmatrix} H_1{}' \\ H_2{}'\end{bmatrix}[H_1{}'\ \ H_2{}'] + 6x^2\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2\end{bmatrix}[H_1{}'\ \ H_2{}'] + 4x^2\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2\end{bmatrix}[H_1{}'\ \ H_2{}'] + 20x\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2\end{bmatrix}[H_1\ \ H_2]\right)dx\begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1}\end{bmatrix}\rangle = 0}$$

Se procede con esta ecuación diferencial debilitada a utilizar los métodos de elementos finitos (lineal y cuadrático):

Para una función de prueba de la forma (y = ax + b), se generan las siguientes funciones de forma:

```
% Función de forma del elemento lineal
H1 = (xii - x)/(xii-xi);
H2 = (x - xi)/(xii - xi);
```

función de forma del elemento cuadrático:

Para una función de la forma y =a + bx^2, se realiza este procedimiento para hallar las funciones de forma (H1 Y H2):

$y_i = a + bx_i^2$(ecuación 1)

$y_{i+1} = a + b{x_{i+1}}^2$(ecuación 2)

$\frac{y_i+a}{x_i^2} = b$ (ecuación 3)

Se reemplaza 3 en 2:

$$y_{i+1} = a + \left(\frac{y_i + a}{x_i^2}\right)(x_{i+1}^2)$$

Se opera la ecuación expuesta para hallar a:

$$y_{i+1} = a + \left(\frac{y_i x_{i+1}^2}{x_i^2}\right) - \left(\frac{a x_{i+1}^2}{x_i^2}\right)$$

$$y_{i+1} = a\left(1 + \frac{x_{i+1}^2}{x_i^2}\right) + \left(\frac{y_i x_{i+1}^2}{x_i^2}\right)$$

$$y_{i+1} = a\left(\frac{x_i + x_{i+1}^2}{x_i^2}\right) + \left(\frac{y_i x_{i+1}^2}{x_i^2}\right)$$

$$a = \frac{y_{i+1} - \left(\frac{y_i x_{i+1}^2}{x_i^2}\right)}{\left(\frac{x_i^2 + x_{i+1}^2}{x_i^2}\right)}$$

$$a = \frac{x_i^2 y_{i+1} - \left(y_i x_{i+1}^2\right)}{\left(x_i^2 + x_{i+1}^2\right)}$$

Se reemplaza a en b para obtener:

$$b = \frac{y_i + \left(-\frac{x_i^2 y_{i+1} - \left(y_i x_{i+1}^2\right)}{\left(x_i^2 + x_{i+1}^2\right)}\right)}{\left(x_i^2\right)}$$

$$b = \frac{y_i x_i^2 + \ y_i x_{i+1}^2 - x_i^2 y_{i+1} + y_i x_{i+1}^2}{\frac{x_i + x_{i+1}^2}{x_i^2}}$$

$$b = \frac{y_i x_i^2 - x_i^2 y_{i+1} + 2 y_i x_{i+1}^2}{x_i^2 (x_i^2 + x_{i+1}^2)}$$

El resultado hallado de b se reemplaza en y (cuadrática) para obtener:

$$y = \frac{x_i^2 y_{i+1} - y_i x_{i+1}^2}{x_i^2 + x_{i+1}^2} + \left(\frac{x_i^2 y_i - x_i^2 y_{i+1} + 2 y_i x_{i+1}^2}{(x_i^2 + x_{i+1}^2) x_i^2}\right)(x^2)$$

$$y = \left(\frac{x_i^2 - x^2}{(x_i^2 + x_{i+1}^2)}\right)(y_{i+1}) + \left(\frac{x^2 - x_{i+1}^2}{(x_i^2 + x_{i+1}^2)} + \frac{2(x_{i+1}^2)}{(x_i^2 + x_{i+1}^2) x_i^2}\right)(y_i)$$

$$y = \left(\frac{-x_i^2\left(x_{i+1}^2 - x^2\right) - 2(x_{i+1}^2)}{(x_i^2 + x_{i+1}^2) x_i^2}\right)(y_i) + \left(\frac{x_i^2 - x^2}{(x_i^2 + x_{i+1})}\right)(y_{i+1})$$

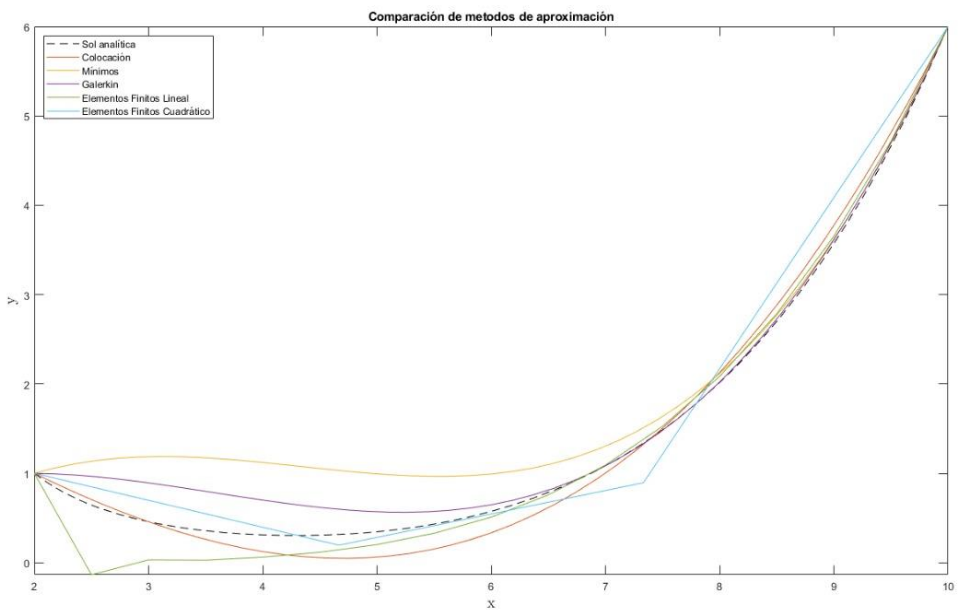
El resultado hallado de y corresponde a:

$$y = \begin{bmatrix} \frac{-x_i^2\left(x_{i+1}^2 - x^2\right) - 2(x_{i+1}^2)}{(x_i^2 + x_{i+1}^2) x_i^2} & \frac{x_i^2 - x^2}{(x_i^2 + x_{i+1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{bmatrix}$$

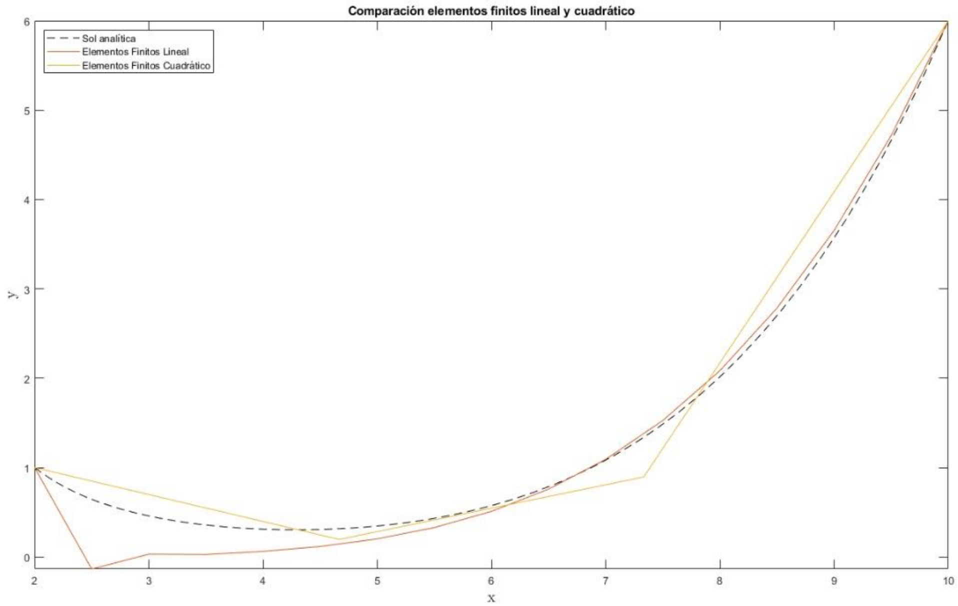
Para la programación en MATLAB se ingresa los resultados hallados de las funciones de forma H1 Y H2, que corresponden a:

```
% Función de forma del elemento cuadrático
H1 = (((-xi^2)*(xii^2 - x^2))-2*xii^2)/(xi^2*(xi^2-xii^2));
H2 = (xi^2 - x^2)/(xi^2 + xii^2);
```

Con estas funciones de forma se procede a usar el método de elementos finitos conocido, para obtener las siguientes gráficas:



se observa que la gráfica que representa la función cuadrática se ve formada por secciones que son líneas rectas, aunque estas realmente son tramos parabólicos. Esto se da ya que Matlab al usar puntos para graficar, este los une con líneas rectas.



se observa que la segunda imagen mostrada corresponde a un comparativo entre las curvas obtenidas de los métodos de elementos finitos lineal y cuadrático.

Para la curva de elementos finitos lineal, se usó 16 elementos. Debido a que si se usa más de este número esta se aleja del resultado analítico. Igualmente pasa si se usa menos de esta cantidad específica de elementos. Luego, para el método con elementos cuadráticos, se usó 3 (elementos) debido a que: menos y más de este valor, se aleja del resultado analítico. Cabe resaltar que al ser una función cuadrática se requiere una cantidad menor de estos, comparado con el método lineal. Es decir, el método cuadrático logra una mejor aproximación para valores de paso mayores, a los usados en el método lineal.

Se calculó los errores de las funciones utilizando la ecuación correspondiente al (Error Medio Cuadrático), en donde se obtuvo los siguientes valores:

RMSE_col	0.1713
RMSE_efcuad	0.2294
RMSE_eflin	0.2493
RMSE_gal	0.2252
RMSE_min	0.4801

Cada uno de los expuestos respectivamente corresponden a: error cuadrático medio de (Colocación, Elementos finitos cuadráticos, Elementos finitos lineales, Galerkin y por último mínimos cuadrados.

Se obtuvo un menor error para el método de colocación. Esto es debido a que los puntos utilizados generaron un ajuste particularmente más cercano a la solución otorgada por los demás métodos. Sin embargo, este método es el menos preciso.

```
%Calculo de errores

x = 2:((10-2)/100):10;
y_analitica_err = (149*x.^7 + 9980800)./(2499968*x.^2 );
yColError = polyval(sym2poly(y_colocacion),x);
yMinError = polyval(sym2poly(y_minimos),x);
yGalError = polyval(sym2poly(y_Galerkin),x);

RMSE_col = sqrt(mean((y_analitica_err - yColError).^2));
RMSE_min = sqrt(mean((y_analitica_err - yMinError).^2));
RMSE_gal = sqrt(mean((y_analitica_err - yGalError).^2));


y_analitica_errLin = (149*xGraphLineal.^7 + 9980800)./(2499968*xGraphLineal.^2 );
RMSE_eflin = sqrt(mean((y_analitica_errLin - yElemFinitos_lineal').^2));

y_analitica_errCuad = (149*xGraphCuadr.^7 + 9980800)./(2499968*xGraphCuadr.^2 );
RMSE_efcuad = sqrt(mean((y_analitica_errCuad - yElemFinitos_Cuadratico').^2));
```

Con los métodos utilizados en MATLAB para obtener las funciones solución de los procedimientos de (Colocación, Galerkin y mínimos cuadrados), se obtuvo funciones simbólicas de estas soluciones, que luego fue requerido transformar a polinomios usando la función “Sym2poly” para luego evaluar el vector x en dichos polinomios; generando finalmente un vector y. Ese vector de valores es el usado para la ecuación de error medio cuadrático, correspondiente a cada método.