Fábio Bocampagni

118064213

Terceira Lista de Avaliação e desempenho.

As questões de 1 a 10 são as do pdf inicial onde pede-se as correções das questões.

Questão 1) Podemos pensar no número de tentativas até alcançar duas caras como uma palavra que contêm apenas símbolos do conjunto $\varphi = \{H, T\}$.

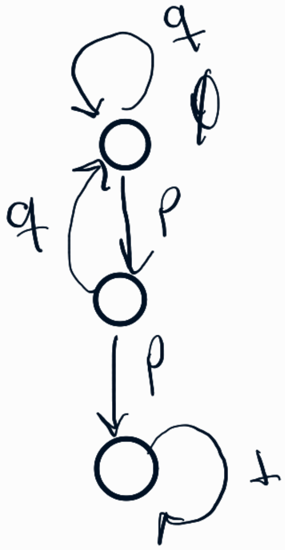
Por construção, toda ocorrência de T invalida o símbolo passado, mas conta como um passo "gasto". Dessa forma, podemos considerar o teorema da esperança total:

$$E(X) = \sum_i E(X \mid I_i)\, P_{I_i}$$

Onde I_i é o estado e P_{I_i} a probabilidade do referido estado.

Assim, confiramos as computações apresentadas.

Saindo do estado e_0, eu posso voltar para esse estado caso haja a realização de um t ou seguir para o próximo estado, ambos com probabilidade $\frac{1}{2}$.



Saindo do estado e_1, ou seja, tendo realizado uma cara, teremos:

A possibilidade de voltar para o estado vazio, ou passar para o estado final.

Analisando a resolução apresentada podemos notar que $e_{HH} = 1$ faz com que o número médio de passos até HH, saindo de HH seja 1.

Ora, se já estamos no estado alvo não precisamos dar mais nenhum passo.

Ainda, se usarmos a dica do enunciado podemos notar que se temos certeza de sempre tirar H, daríamos 2 passos saindo de um estado H, o que está errado.

O cenário ao lado demonstra o enunciado acima

Questão 2) Para calcular o segundo momento podemos, novamente utilizar o teorema da esperança total.

$$E(x^2) = \sum_i E(x^2 | I_i) P_i$$

Nesse caso, já com a correção do estado final teremos:

$$e_0 = E(x^2 | T) P_T + E(x^2 + H) P_H$$

$$= E((1 + x)^2) P_T + E((1 + x)^2) P_H$$

Nota-se que a expansão de

$E(x^2 | I) = E((1 + x)^2)$, o que não ocorre no enunciado.

Questão 3)

Podemos descobrir o valor médio de passos por meio do método de potências de P.

Assumindo que queremos sair de i, um estado genérico e chegar a y, o estado HH, podemos resolver a esperança da seguinte forma:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i P^{i}$$

Vale ressaltar que a matriz P não pode ser periódica.

$$M = \begin{array}{c|ccc} & \emptyset & H & HH \\ \hline \emptyset & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ H & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ HH & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Nota-se que M não é uma matriz regular, logo, não possui distribuição única estacionária.

$$M^2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad M^3 = \begin{vmatrix} 0.375 & 0{,}25 & 0{,}375 \\ 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}625 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

A célula $M_{\emptyset HH}$ possui valor muito próximo de 1 quando $i \to \infty$, logo, pode-se concluir a validade da resposta segundo o metodo da potência.

Questão 04) Podemos usar uma forma adaptada da distribuição geometrica. Se $X \sim Geo$, com suporte $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$, média $\frac{1}{p}$ e variância $\frac{1-p}{p^2}$, podemos condicionar uma Y tal que $Y = X-1$, ou seja, já que a geométrica nos da o número de tentativas até um sucesso, Y nos da o número de insucessos antes de um sucesso, assim, queremos a cdf de Y com parametro $<k$.

$$P(N<k) = \sum_{i=0}^{k} (1-p)^i p$$, sendo p a chance de um sucesso.

Questão 06) É preciso incluir a informação que o lado direito já ocorreu, ou seja, se $P(A|B)$, $P(B)$ já ocorreu, logo: $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$

Questão 7) Aqui, nota-se a confusão no uso da geométrica, que mos diz o tempo até a primeira ocorrência de sucesso dado n ensaios de bernoulli com probabilidade p.

$\frac{1}{p}$ é o número de tentativas que em média leva a realização de um sucesso, porem, conta-se nessa situação o sucesso realizado.

O suporte dessa distribuição é $n = \{1, 2, \ldots\}$ e cria uma variável aleatória Y geometricamente distribuída segundo os valores de X.

Assim, se $P(X=x) = (1-p)^{n-1} p$ com suporte $\{1, 2, 3, \ldots\}$, média $\frac{1}{p}$ e variância $\frac{1-p}{p^2}$, teremos um Y que é a distribuição de probabilidade do número de insucessos $Y = X - 1$, com suporte $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, média $\frac{(1-p)}{p}$ e variância $\frac{1-p}{p^2}$.

Logo, o número médio de insucessos é $\frac{(1-p)}{p}$.

Questão 08) B_1 e B_2 possuem o mesmo suporte e são indepentes. Suas médias são iguais a Np. Porém, a realização das duas em um dado instante discreto $t\geq 0$ pode diferir, logo, $B_1 \neq B_2$.

Apesar disso, ambas possuem, de fato a mesma média, logo:

$$E(B_1 + B_2) = E(B_1) + E(B_2) = 2Np$$

Questão 09)

A variância tem uma propriedade com constantes que não é mostrado nos cálculos da resolução apresentada.

$$Var(cX) = c^2 var(X).$$

$$\text{Logo, } Var(2X_1) = 4Var(X_1).$$

Questão 10) A falta de memória não nos ajuda nesse caso pois não estamos em um processo de transição de estados e sim calculando o valor esperado de uma va haja vista uma condição.

Sabemos que X é uma exponencial de média λ. Assim, $E(X) = \lambda$.

$$E(X \mid X > 10) = \sum_{i} i \, P(X = i \mid X > 10)$$

X ---

X ---

As próximas questões referem-se ao conteúdo postado diretamente no classroom.

2) Nota-se a clara distinção no video das características de cada tipo de cadeia e como podemos resolvê-las.

Apesar do capítulo 3 ser muito longo, ele traz consigo novas ferramentas para resolução de cadeias e ainda complementa idéias de capítulos anteriores.

A cadeia, caso tenha apenas estados recorrentes é chamada de irredutível, ou seja se saio de i a chance de voltar para i em um número finito de passos é 1.

Do contrário, se caso exista um estado transiento, ou seja, chance de retorno a i < 1, chamamos de cadeia redutível.

Considerando o caso da cadeia redutível podemos usar o método da potência se todo conjunto de estados é aperiodióco, ou seja, período = 1.

Podemos entender esse conjunto de estados como subgrafos de um dado grafo G.

Se temos 1 subgrafo, temos um ciclo com todos os vértices e chamamos de irredutível. Do contrário, redutível e possui mais que 1 subgrafo. Se para cada um desses subgrafos a partir de qualquer múltiplo de K ser impossível estar em um dado conjunto de estados, então a cadeia é periódica. Se não for, podemos resolver pelo método da potência.

Consideremos novamente o caso da cadeia irredutível.

Se ela for periódica P^n quando $n \to \infty$ não converge, logo, não podemos usar o método da potência apenas eliminação Gaussiana.

Se ela for aperiódica, podemos usar os dois metodos

Questão 3.3, Dobrow)

Para sabermos se uma matriz é regular precisamos que exista um n tal que para algum $n \geq 0$ a matriz seja positiva.

Uma matriz ser positiva significa que $\forall\, i, j \quad P_{ij} \geq 0$.

Dessa forma, todas as matrizes são regulares sendo que Q só é regular para $0 < p < 1$.

Questão 3.5, Dobrow)

a) todos o vetores não negativos da forma (x, k, y, z, k) tal que $3x + z + y = 1$ são distribuições estacionários.

b) $\lim_{n \to \infty} P^n = \begin{vmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix}$

Se comecarmos nos estados 1, 2 ou 5 temos chances iguais de chegar ao estado 1, 2 ou 5. Caso contrário, comecemos nos estados 3 ou 4, ficaremos lá para sempre.

c) Como podemos observar a matriz final depende da distribuição inicial, logo, não há de haver uma distribuição limitante.

Ainda, como a matriz não possui todas as linhas iguais, sua existência não contradiz a não existência da dist. limitante. Se as linhas fossem iguais com a matriz final dependendo da dist. inicial, haveria uma contradição.

3.15)

Grau	# quadrados
2	4
3	8
4	20
6	16
8	16

a soma do grau dos vertíces é

$2 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 20 + 6 \cdot 16 + 8 \cdot 16 = 336$, assim

o valor esperado do número de passos para retornar a um canto é $\frac{336}{2} = 168$

3.16) Similarmente,

B: 40

Q: $\frac{1456}{21} = 69.33$

K: 140

R: 69

3.14)

$$P^n = \begin{pmatrix} 1/2^n & 1 - \frac{1}{2^n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n = \begin{pmatrix} 2 & +\infty \\ 0 & +\infty \end{pmatrix}$$

Podemos ver que o primeiro estado é transiente e o segundo recorrente.

$$P = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P^2 = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

. Como temos zero no mesmo lugar, P não é regular.

. Mesmo assim, ainda existe uma distribuição estacionária π.

3.22) T é o primeiro retorno ao estado 1, para a cadeia que começou em 1.

Se a cadeia retorna para 1 após pelo menos n passos, então a cadeia transisiona para 2 e continua lá por $n-2$ passos. Isso ocorre com prob. $p(1-p)^{n-2}$

b) $$E(T) = \sum_{n=1}^{\infty} P(T \geq n) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} p(1-q)^{n-2}$$

$$= \frac{1}{\pi_1}$$

3.46)

$$\bar{P}_{ij} = \frac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i}, \quad \forall i,j$$

É reversível se e somente se

$$\bar{P}_{ij} = P_{ij}$$

Seja π a dist. estacionária da cadeia original

$$(\pi \bar{P})_j = \sum \pi_i \bar{P}_{ij} = \sum \pi_i \frac{\pi_j P_{ij}}{\pi_i}$$

$$= \pi_j$$

3.49) Supondo que i é transiente e j é absorvente.

A partir de i a cadeia ou move-se para j e continua lá, ou move para um outro estado absorvente $k \neq j$ e não é absorvido em j, ou move-se para outro estado transiente.

$$B_{ij} = P_{ij} + \sum P_{it} B_{tj}$$

$$= R_{ij} + \sum Q_{it} B_{tj}$$

$$\left(B = (I-Q)^{-1} R \right)$$