Um ensaio sobre o problema da dieta.

Fábio Alves Bocampagni

1. Introdução

Seu médico recomendou uma dieta alimentar e você julga necessário minimizar o custo da dieta, atendendo as orientações dadas por ele.

A dieta deve fornecer quantidades mínimas dos seguintes itens: calorias, cálcio, vitamina A, riboflavina e ácido ascórbico.

Sua necessidade diária para esses itens (na ordem acima) pode ser determinada lendo os valores numéricos correspondentes às cinco primeiras letras do seu nome na Tabela 1 .

São as seguintes as unidades utilizadas para os itens que compõem a dieta. 10^2 calorias, 10^{-2} gramas, 10^2 unidades internacionais, 10^{-1} miligramas e miligramas, respectivamente.

Tabela 1 Requisitos da dieta

	Dieta	Produto X			Dieta	Produto X
A	7	63		**N**	6	91
B	60	52		**O**	10	45
C	83	59		**P**	32	82
D	10	85		**Q**	51	98
E	39	82		**R**	47	67
F	59	58		**S**	20	97
G	38	50		**T**	66	28
H	30	69		**U**	78	54
I	65	44		**V**	81	33
J	27	26		**W**	81	59
K	91	30		**X**	61	61
L	68	43		**Y**	0	39
M	49	90		**Z**	86	83

Dieta

F - 59 x 10^2 **calorias**.

A - 7 x 10^{-2} **cálcio.**

B - 60 x 10^2 **vitamina A.**

I - 65 x 10^{-1} **riboflavina**.

O - 10 x 10^0 **ácido ascórbico.**

As possibilidades de escolha de alimentos é um pouco limitada porque você acha financeiramente vantajoso negociar com desconto em uma determinada loja, embora esta loja tenha pouca oferta. Lá, você pode encontrar: (1) farinha de trigo (enriquecida), (2) leite evaporado, (3) queijo cheddar, (4) fígado bovino, (5) repolho, (6) espinafre, (7) batata doce, (8) feijão (seco).

Os valores nutricionais por dólar gasto foram tabulados por Dantzig (que frequentava regularmente essa loja) e estão contemplados na Tabela 2, abaixo.

Além desses produtos, a loja apresenta um produto em pó , Produto X, vendido a granel, cujos valores nutricionais por unidade custo também são dados na Tabela 1 . As unidades (mesma ordem de itens anteriores) são de 10^3 calorias/dólar, 10^{-1} gramas/dólar, 10^3 unidades internacionais/dólar, 10^{-1} miligramas/dólar, miligramas/dólar. Seu médico codificou suas necessidades de dieta e as propriedades nutricionais do Produto X nas cinco primeiras letras do seu nome na Tabela 1.

Tabela 2 valores nutricionais de alimentos por dolar gasto

Mercadoria	Calorias (1000)	Proteinas (gramas)	Cálcio (gramas)	Ferro (mg)	VitaminaA (1000I.U.)	Tiamina (mg.)	Riboflavina (mg.)	Niacina (mg.)	Ăcido Ascórbico(mg.)
1.Farinhadetrigo(enriquecida)	44,7	1411	2.0	365	-	55.4	33.3	441	-
5. Farinha de milho	36.0	897	1.7	99	30.9	17.4	7.9	106	-
15. Leite evaporado (lata)	8.4	422	15.1	9	26.0	3.0	23.5	11	60
17. Margarina	20.6	17	0.6	6	55.8	0.2	-	-	-
19. Queijo (cheddar)	7.4	448	16.4	19	28.1	0,8	10.3	4	-
21. Pasta de amendoim	15.7	661	1.0	48	-	9.6	8.1	471	-
24. Bacon	41.7	0	0	0	0.2	-	5	5	-
30. Fígado (boi)	2.2	333	0.2	139	169.2	6.4	50.8	316	525
34. Lombo de porco assado	4.4	249	0.3	37	-	18.2	3.6	79	-
40. Salmão, rosa (lata)	5.8	705	6.8	45	3.5	1.0	4.9	209	-
45. Feijão verde	2.4	138	3.7	80	69.0	4.3	5.8	37	862
46. Repolho	2.6	125	4.0	36	7.2	9.0	4.5	26	5369
50. Cebola	5.8	166	3.8	59	16.6	4.7	5.9	21	1184
51. Batatas	14.3	336	1.8	118	6.7	29.4	7.1	198	2522
52. Espinafre	1.1	106	-	138	918.4	5.7	13.8	33	2755
53. Batata-doce	9.6	138	2.7	54	290.7	8.4	5.4	83	1912
64. Pêssegos, secos	8.5	87	1.7	173	86.8	1.2	4.3	65	257
65. Ameixas secas	12.8	99	2.5	154	85.7	3.9	4.3	65	257
68. Feijão verde, seco	17.4	1055	3.7	459	5.1	26.9	38.2	93	-
69. Feijão branco, seco	26.9	1691	11.4	792	-	38.4	24.6	217	-

Fonte G.B. Dantzig , Linear programming and Extension, Princeton UniversityPress, Princeton, N.J., 1983

Produto X

F - 58 x 10^3 calorias/dólar (Calorias)

A - 63 x 10^{-1} gramas/dólar (Cálcio)

B - 52 x 10^3 unidades internacionais/dólar (Vitamina A)

I - 44 x 10^{-1} miligramas/dólar (Riboflavina)

O - 45 x 10^0 miligramas/dólar (Ácido Ascórbico)

A tabela após a inserção do *Produto X* ficará da seguinte forma:

Mercadoria	Calorias(1000)	Proteinas(gramas)	Cálcio(gramas)	Ferro(mg)	Vitamina A(1000I.U.)	Tiamina(mg.)	Riboflavina(mg.)	Niacina(mg.)	Ácido Ascórbi
Farinha de trigo (enriquecida)	44.7	1411.0	2.0	365.0	0.0	55.4	33.3	441.0	0.0
Farinha de milho	36.0	897.0	1.7	99.0	30.9	17.4	7.9	106.0	0.0
Leite evaporado (lata)	8.4	422.0	15.1	9.0	26.0	3.0	23.5	11.0	60.0
Margarina	20.6	17.0	0.6	6.0	55.8	0.2	0.0	0.0	0.0
Queijo (cheddar)	7.4	448.0	16.4	19.0	28.1	0.8	10.3	4.0	0.0
Pasta de amendoim	15.7	661.0	1.0	48.0	0	9.6	8.1	471.0	0.0
Bacon	41.7	0.0	0.0	0.0	0.2	0.0	5.0	5.0	0.0
Fígado (boi)	2.2	333.0	0.2	139.0	169.2	6.4	50.8	316.0	525.0
Lombo de porco assado	4.4	249.0	0.3	37.0	0.0	18.2	3.6	79.0	0.0
Salmão Rosa	5.8	705.0	6.8	45.0	3.5	1.0	4.9	209.0	0.0
Feijão verde	2.4	138.0	3.7	80.0	69.0	4.3	5.8	37.0	862.0
Repolho	2.6	125.0	4.0	36.0	7.2	9.0	4.5	26.0	5369.0
Cebola	5.8	166	3.8	59	16.6	4.7	5.9	21	1184
Batatas	14.3	336	1.8	118	6.7	29.4	7.1	198	2522
Espinafre	1.1	106	0	138	918.4	5.7	13.8	33	2755
Batata0doce	9.6	138	2.7	54	290.7	8.4	5.4	83	1912
Pêssegos secos	8.5	87	1.7	173	86.8	1.2	4.3	65	257
Ameixas secas	12.8	99	2.5	154	85.7	3.9	4.3	65	257
Feijão verde seco	17.4	1055	3.7	459	5.1	26.9	38.2	93	0
Feijão branco seco	26.9	1691	11.4	792	0	38.4	24.6	217	0
Produto X	58	0	6.3	0	52	0	4.4	0	45

Como iremos descrever os alimentos como variáveis em função dos nutrientes mínimos necessários, vamos transpor a matriz para que seja possível separar as variáveis em colunas, e assim, futuramente, fazer uma eliminação de coluna baseada na possível dependência linear.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	11	12	13	14	15
Mercadoria	Farinha de trigo (enriquecida)	Farinha de milho	Leite evaporado (lata)	Margarina	Queijo (cheddar)	Pasta de amendoim	Bacon	Fígado (boi)	Lombo de porco assado	Salmão Rosa	...	Repolho	Cebola	Batatas	Espinafre	Batata0doce
Calorias(1000)	44.7	36.0	8.4	20.6	7.4	15.7	41.7	2.2	4.4	5.8	...	2.6	5.8	14.3	1.1	9.6
Proteinas(gramas)	1411.0	897.0	422.0	17.0	448.0	661.0	0.0	333.0	249.0	705.0	...	125.0	166.0	336.0	106.0	138.0
Cálcio(gramas)	2.0	1.7	15.1	0.6	16.4	1.0	0.0	0.2	0.3	6.8	...	4.0	3.8	1.8	0.0	2.7
Ferro(mg)	365.0	99.0	9.0	6.0	19.0	48.0	0.0	139.0	37.0	45.0	...	36.0	59.0	118.0	138.0	54.0
Vitamina A(1000I.U.)	0.0	30.9	26.0	55.8	28.1	0.0	0.2	169.2	0.0	3.5	...	7.2	16.6	6.7	918.4	290.7
Tiamina(mg.)	55.4	17.4	3.0	0.2	0.8	9.6	0.0	6.4	18.2	1.0	...	9.0	4.7	29.4	5.7	8.4
Riboflavina(mg.)	33.3	7.9	23.5	0.0	10.3	8.1	5.0	50.8	3.6	4.9	...	4.5	5.9	7.1	13.8	5.4
Niacina(mg.)	441.0	106.0	11.0	0.0	4.0	471.0	5.0	316.0	79.0	209.0	...	26.0	21.0	198.0	33.0	83.0
Ácido Ascórbico(mg.)	0.0	0.0	60.0	0.0	0.0	0.0	0.0	525.0	0.0	0.0	...	5369.0	1184.0	2522.0	2755.0	1912.0

10 rows × 21 columns

Assim, podemos descrever, por exemplo, para as calorias as variáveis x_1= Farinha de trigo, x_2=Farinha de milho, e assim por diante, facilitando a visualização.

2. Modelando o problema

Primeiro, iremos decidir as variáveis de decisão. Devemos consumir uma quantidade mínima de alimentos em função de suprir uma quantidade mínima de vitaminas, consequentemente, teremos uma relação de quantidade de produtos que precisam ser comprados com uma quantidade mínima de vitaminas.

Seja d_1 o custo da unidade do produto 1, logo, o custo de compra do produto 1 será $d_1 x_1$, sendo x_1 a quantidade.

Queremos minimizar a função que pode ser expressada pelo somatório $\sum_{i=1}^{m} d_i x_i$, sendo m igual a quantidade de produtos no mercado.

Queremos minimizar os gastos, porém, se não comprarmos nada, não gastamos nada. Premissa a qual apesar de válida, não supri as necessidades do problema: Quantidade mínima de vitaminas. Logo, as quantidades mínimas de vitaminas serão uma restrição do problema.

Se somarmos a quantidade de cada elemento, é necessário ter um mínimo de vitaminas. Então, para cada somatório deveremos ter um valor maior ou igual a quantidade de vitaminas necessárias.

$$q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + ... + q_{1m}x_m \geq A_1$$

Definiremos q_{11} como uma constante que diz a quantidade de vitaminas 1 que o produto 1 possui. Essa quantidade é multiplicada pela quantidade do produto 1 e o somatório dos outros termos deve ser maior ou igual a quantidade mínima de vitaminas.

Colocando em uma notação que vá nos ajudar a descrever o problema, teremos:

$$\sum_{i=1}^{m} q_{ji}x_i \geq A_j \; com \; j = (1, 2,.., \#vitaminas)$$

Colocando na forma canônica, teremos:

$$Minimizar \sum_{i=1}^{m} d_i x_i$$
$$Sujeito \; a$$
$$\sum_{i=1}^{m} q_{ji}x_i \geq A_j \; com \; j = (1, 2,.., \#vitaminas)$$
$$A_j > 0 \; com \; j = (1, 2,.., \#vitaminas)$$
$$d_i \geq 0 \; com \; i = (1, 2,..., \#alimentos)$$

3. Criando uma especificação.

Os nutrientes fora da lista dada pelo médico terão uma restrição maior ou igual a zero, ou seja, iremos focar nos nutrientes que o médico nos pediu, porém, os outros serão facultativos, aparecerão caso haja combinação ótima que eles estejam contidos.

Como foi mencionado, será usado a transposição da matriz para que seja mais fácil a visualização da ordem das variáveis pois a forma que nós enxergamos os sistemas lineares é por via de variáveis colunas.

Todas as células que não sejam numéricas receberão o valor zero como forma de padronização da matriz.

Será possível variáveis assumirem valores reais. Assim, haverá alimentos em fração de dólar, assumindo linearidade na hora das equivalências.

4. Ferramentas

Usaremos Python para resolver o sistema linear pois há uma quantidade imensa de suporte para a linguagem, assim como ferramentas que suportam implementação da especificação do Simplex, como a linprog do SciPy. Há uma rotina chamada linprog, a qual possui um parâmetro chamado *method,* o qual nos permite utilizar o simplex como forma de resolução do sistema linear de entrada.

linprog(method='simplex')

```
scipy.optimize.linprog(c, A_ub=None, b_ub=None, A_eq=None, b_eq=None, bounds=None,
method='simplex', callback=None, options={'maxiter': 5000, 'disp': False,
'presolve': True, 'tol': 1e-12, 'autoscale': False, 'rr': True, 'bland': False},
x0=None)
```

Linear programming: minimize a linear objective function subject to linear equality and inequality constraints using the tableau-based simplex method.

Linear programming solves problems of the following form:

$$\begin{aligned} \min_x \ & c^T x \\ \text{such that } & A_{ub} x \leq b_{ub}, \\ & A_{eq} x = b_{eq}, \\ & l \leq x \leq u, \end{aligned}$$

where x is a vector of decision variables; c, b_{ub}, b_{eq}, l, and u are vectors; and A_{ub} and A_{eq} are matrices.

Alternatively, that's:

minimize:

```
c @ x
```

such that:

```
A_ub @ x <= b_ub
A_eq @ x == b_eq
lb <= x <= ub
```

Como pode-se notar, linprog é uma rotina simples. Teremos a matriz unidimensional c, a qual irá representar nossa função objetivo.

Teremos uma matriz A_ub, a qual será a representante das nossas inequações de restrições, assim como o vetor de inequações de restrição b_ub.

Teremos A_eq, que basicamente representa a matriz de igualdade de restrições e seu vetor b_eq, que representa o vetor de igualdade de restrição.

lb e ub serão definidos pela dupla ou lista de duplas *bound*, o que basicamente diz as restrições de não negatividade ou limitantes de cada variável do problema.

5. Implementando a especificação.

A implementação foi feita usando jupyter notebook, o qual pode ser encontrado aqui.

6. Resultados

Como pode ser visto na implementação da especificação, tivemos um custo de aproximadamente 17 centavos de dólar. Os itens do array x (olhar implementação) representam a quantidade de cada alimento, como aparece na primeira tabela deste documento. Ou seja, para o alimento farinha de trigo enriquecida, teremos uma quantidade de 0.129 unidades, aproximadamente. Para o fígado de boi 0.04281229 unidades. O restante dos alimentos não serão comprados.

Para a vitamina A pura, iremos isolar as restrições apenas da Vitamina A, assim como seu vetor de restrição. Assim, aplicando o método simplex que pode ser visto no Jupyter Notebook mencionado acima, teremos aproximadamente 0.006 centavos de dólar. O que nos indica que pagaríamos até esse valor para suprir somente a vitamina A, ignorando as outras vitaminas.

Para a Riboflavina pura, faremos uma analogia ao método de resolução usado para a Vitamina A e teremos cerca de 12 centavos de dólar gasto como resposta.

8. Bibliografia

Programação Linear - Ana Flavia Uzeda dos Santos Macambira
Nelson Maculan
Lucídio dos Anjos Formiga Cabral
Leizer de Lima Pinto

Otimização combinatória e programação Linear - Marcos C. Goldbarg
Henrique P. L. Luna