Maximização de portfólios de investimento

Fábio Alves Bocampagni

1. Introdução

Em 1952, Harry M. Markowitz publicou no *The Journal of Finance* seu estudo sobre teoria moderna de finanças, com o nome de *Portfolio Selection*. Considerado a maior contribuição no entendimento do mercado financeiro e tomadas de decisão na época, protagonizou o nascimento da economia moderna.

Responsável por ser o primeiro trabalho a formalizar matematicamente a ideia de diversificação de investimento, buscando a maximização do retorno do portfólio esperado, maximizando o impacto do risco.

Em 1990, recebeu o Prêmio Nobel de Economia, com Merton Miller e William Sharpe, por suas contribuições para a análise das carteiras e métodos de finanças corporativas de investimento.

A teoria moderna de portfólios, atualmente, indica ao investidor o modo como o investimento pode ser realizado, minimizando o risco ou maximizando o retorno. Aplicando este conceito numa carteira de investimento diversificada, nota-se vantagem dos investimentos na maximização entre risco e retorno e não em investimentos no ativo de maior retorno.

2. Teoria moderna de portfólios de Markowitz

A teoria moderna de portfólios de Harry M. Markowitz sugere que os investimentos devem considerar simultaneamente o risco e o retorno numa alocação de fundos, através da diversificação de investimentos, de maneira a minimizar o risco e maximizar o retorno. Através dessa ideia, foi possível entender que um ótimo portfólio não é simplesmente uma combinação de bons títulos individuais, onde cada um deles tem características desejáveis de risco e retorno, como feito até a década de 1960.

Markowitz tem 3 principais pontos levados em conta, quando elaborado a teoria moderna de portfólios:

- Retornos esperados
- Risco (Desvio padrão)
- Correlação

Os retornos esperados de cada ativo são quanto o investidor espera ganhar ao comprar o determinado ativo, o qual é diferente para cada ativo. Varia diretamente com o risco esperado. Por exemplo, investir diretamente no tesouro direto é considerado um investimento de baixíssimo risco. Visto que, além de contar com a segurança do crédito de um banco conta também com a garantia do FGC, o fundo garantidor de crédito. Essa segurança (baixo risco), é acompanhada de um retorno menor em tempos de taxas básicas de juros baixas.

O risco, como visto, é diretamente associado ao retorno esperado. Quanto menor o risco, menor o retorno, e vice-versa. É medido pelo desvio padrão, estatística a qual mede qual o desvio do centro da média dos retornos, sendo considerado tanto para mais quanto para menos. Um desvio padrão muito alto pode estar associado a uma maior volatilidade, ou seja, uma maior incerteza. As ações que, por exemplo, apresentam um desvio padrão muito alto podem ter seus retornos no curto prazo oscilando bastante da sua média. Representado algebricamente por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N}}.$$

Correlação, no tema da discussão, é onde acontece uma revolução representada pela fronteira eficiente, conceito o qual discutiremos mais tarde. A estatística correlação mede o quanto os ativos se movem conjuntamente e pode variar de +1 a -1. Representada algebricamente por ρ_{xy}

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

3. Cálculo da taxa esperada de retorno para uma carteira de investimentos

O retorno esperado é determinado pelo montante ganho por unidade monetária investida. Em uma carteira de investimentos com dois ativos, por exemplo, A e B, seja $P_{A(0)}$ o preço atual do ativo do ativo A e $P_{A(1)}$ o preço esperado num certo período de tempo para A. A variação absoluta de $\overline{P_A}$ do preço de A é:

$$\overline{P_A} = P_{A(1)} - P_{A(0)}.$$

Para obter-se o ganho real esperado para o investimento, deve-se considerar o preço investido do ativo e o seu ganho absoluto, dado em percentual. Então, o lucro percentual esperado por L_A para o investimento A é:

$$L_A = \frac{\overline{P_A}}{P_{A(0)}}.$$

Para essa carteira de investimentos, seja L_B o lucro percentual esperado para B, $\overline{P_B}$ a variação do preço de B e $P_{B(0)}$ o preço atual de B, onde

$$L_B = \frac{\overline{P_B}}{P_{B(0)}}.$$

Se o risco entre os dois ativos forem iguais e $L_A > L_B$, é melhor investir em A. Se o risco entre os dois forem iguais, porém, $L_A < L_B$, então, melhor investir em B.

A taxa de retorno esperado $E(R)$ desses investimentos é a média ponderada dos retornos individuais, tendo como ponderadores a probabilidade de ocorrência dos retornos, algebricamente falando teremos:

$$E(R) = \rho_A L_A + \rho_B L_B$$

Cada retorno de ativo composto no portfólio de investimento é considerado como variável aleatória, dado que o mesmo não possui valor definido. O investimento ocorre em condições de incerteza, dessa forma, o retorno só pode ser mensurado efetivamente após o término do prazo de investimento. Considerando um portfólio com n ativos, o retorno esperado E(R), é:

$$E(R) = \sum_{i=1}^{n} p_i L_i$$

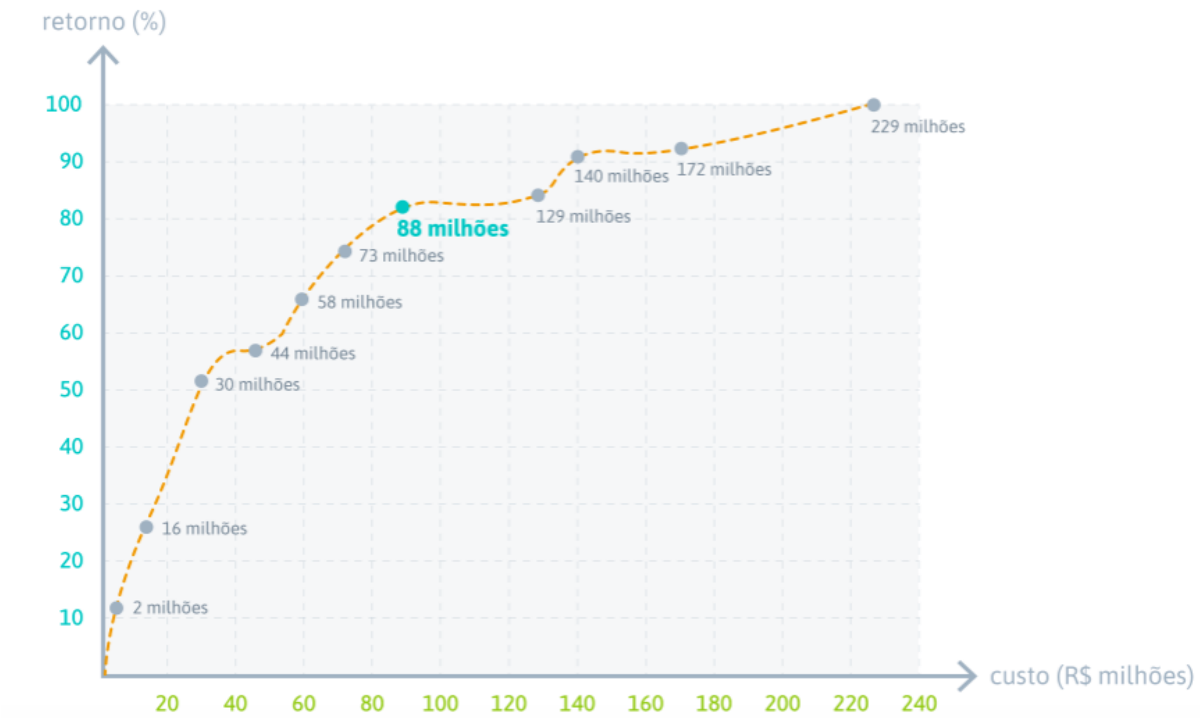
Já a taxa esperada de retorno para a carteira de investimento $R(R_{port})$ com n ativos é calculada pela média ponderada das taxas esperadas de retorno para cada investimento na carteira, em que os pesos são as proporções do valor total para o investimento. Algebricamente falando, teremos:

$$E(R_{port}) = \sum_{i=1}^{n} W_i E(R_i)$$

Sendo W_i o percentual do portfólio no ativo i e $E(R_i)$ a taxa de retorno esperada no ativo i.

4. Fronteira Eficiente

A fronteira eficiente é o conjunto de investimentos otimizados, que apresentam a melhor relação risco-retorno possível, potencializando a alocação dos recursos. Ela pode ser representada por um gráfico de curva, em que podemos visualizar as possíveis combinações eficientes entre risco e retorno.



Na imagem acima, é possível observar as combinações eficientes de retorno-custo de um projeto, representadas por pontos em uma curva. Cada combinação possui um percentual de retorno para um custo específico.

Ao visualizar esta curva, podemos verificar que vale a pena gastar até R$ 88 milhões neste projeto, pois com este investimento já obteríamos 82% do retorno possível. Ainda conforme o gráfico, para alcançar 100% do retorno no projeto, precisaríamos gastar mais R$ 141 milhões!

5. Aplicação da programação linear na seleção de carteiras de investimento

Suponhamos que queremos saber qual a combinação de ações, que minimize o risco de acordo com o retorno esperado de aproximadamente 9%, tendo como parâmetro cinco ações diferentes. Faz-se uso da pesquisa operacional e da teoria moderna de Portfólios de Markowitz para responder a pesquisa mencionada.

Em função de resolver o problema, formula-se, via estatística, uma forma de encontrar os parâmetros necessários para o modelo matemático.

Sejam as ações das empresas Petrobrás, Eletrobrás, Bradesco, Vale do Rio Doce e CEMIG, com seu histórico **fictício** de dados, durante 10 meses:

Período	Petrobrás	Eletrobrás	Bradesco	Vale do Rio Doce	CEMIG
1	10,00%	15,00%	12,00%	18,00%	5,00%
2	12,00%	17,00%	13,00%	16,00%	8,00%
3	8,00%	4,00%	9,00%	3,00%	10,00%
4	7,00%	–8,00%	7,00%	4,00%	9,00%
5	9,00%	15,00%	9,00%	8,00%	5,00%
6	7,00%	22,00%	11,00%	10,00%	4,00%
7	8,00%	3,00%	9,00%	–3,00%	4,00%
8	6,00%	–14,00%	6,00%	15,00%	6,00%
9	9,00%	2,00%	8,00%	20,00%	8,00%
10	11,00%	15,00%	10,00%	16,00%	10,00%

Calcularemos, a princípio, o retorno esperado E(R) para cada ativo através da média aritmética ponderada, com distribuição equivalente de percentuais de investimento, haja vista que ainda não estão otimizados.

	Petrobrás	Eletrobrás	Bradesco	Vale do Rio Doce	CEMIG	TOTAL
Carteira	20%	20%	20%	20%	20%	100%
E (Rport)	1,74%	1,42%	1,88%	2,14%	1,38%	8,56%

Usaremos a covariância entre os pares de ativos para determinar uma matriz de covariâncias, utilizada para medir a força de relação entre cada ação.

	Petrobrás	Eletrobrás	Bradesco	Vale do Rio Doce	CEMIG
Petrobrás	0,03%				
Eletrobrás	0,12%	1,23%			
Bradesco	0,03%	0,20%	0,04%		
Vale do Rio Doce	0,06%	0,16%	0,04%	0,51%	
CEMIG	0,01%	–0,05%	–0,01%	0,02%	0,05%

E para determinar, finalmente, o retorno esperado da carteira $E(R_{port})$ e o risco da carteira $Var(R_{port})$, usaremos as expressões algébricas já mencionadas.

	Petrobrás	Eletrobrás	Bradesco	Vale do Rio Doce	CEMIG	TOTAL
Var (Rport)	0,01%	0,07%	0,01%	0,03%	0,00%	0,12%
E (Rport)	1,74%	1,42%	1,88%	2,14%	1,38%	8,56%

Com isso, podemos formular um modelo matemático capaz de resolver o enunciado.

- A variância da carteira é a medida de efetividade do objetivo e será expressa em porcentagem.
- As participações individuais de cada ativo são as variáveis controladas.
- Todas as relações dos fatores e os objetivos são determinadas pela Teoria moderna de portfólios de Markowitz.
- As variáveis de decisão são as participações individuais W_i, ou seja, o percentual de investimento em cada ativo.

Logo, podemos definir as restrições e posteriormente a forma canônica dos problemas operacionais.

- A soma das participações individuais W_i devem ser iguais a 100%.

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 = 1$$

- O retorno esperado deve ser maior ou igual a 9%.

$$1,74W_1 + 1,42W_2 + 1,88W_3 + 2,14W_4 + 1,38W_5 \geq 0,09$$

- O percentual de investimento em cada ativo W_i deve ser maior ou igual a zero.

$$W_i \geq 0$$

Com isso, obtemos a forma canônica:

$$Minimizar \quad z = W^t C_{i,j} W$$

$$Sujeito\ a \quad W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 = 1$$

$$1,74W_1 + 1,42W_2 + 1,88W_3 + 2,14W_4 + 1,38W_5 \geq 0,09$$

$$W_i \geq 0$$

onde $C_{i,j}$ é a matriz de covariância.

6. Discussão de resultados.

Utilizando o MATLAB chegamos à seguinte conclusão:

[0.0000,0.0000,0.7755,0.0161,0.2084]

O que refere-se a uma carteira, de retorno mínimo de 9%, a qual consiste de aproximadamente 77.5% Bradesco, 1,61% Vale do Rio Doce e 20,84% no CEMIG.

Lembrando que os resultados são baseados nos parâmetros de retorno potencial e risco dos ativos.

7. Bibliografia.

Programação Linear - Ana Flavia Uzeda dos Santos Macambira
Nelson Maculan
Lucídio dos Anjos Formiga Cabral
Leizer de Lima Pinto

Otimização combinatória e programação Linear - Marcos C. Goldbarg
Henrique P. L. Luna