Um ensaio sobre o problema do transporte.

Fábio Alves Bocampagni

1. Introdução

Caracterizado por atribuir quantidade de uma mercadoria que será transportada de um determinado local de origem para um destino, o problema do transporte é um clássico PPL.

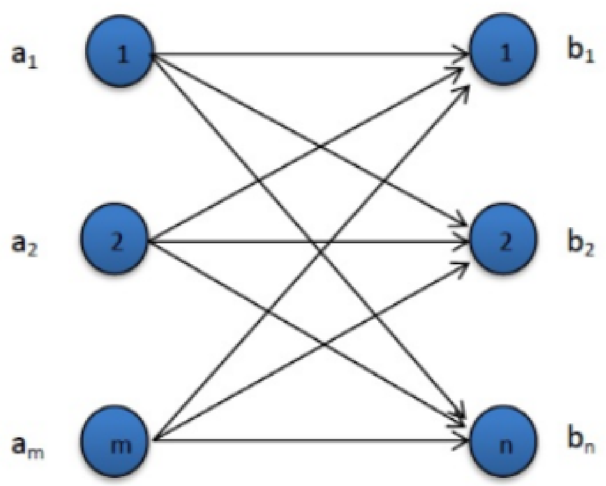
Existe um custo intrínseco em transportar mercadoria entre dois pontos do globo, assim como existe outro custo intrínseco em se produzir determinada mercadoria, assim o modelo é usado para minimizar o custo de transporte dadas as restrições de oferta e demanda.

Dado o seu carácter genérico, o problema pode ser derivado em diversos outros modelos equivalentes, onde muda-se de forma genérica os materiais e suas restrições de modelagem.

2. Entendendo o problema

A modelagem do problema do transporte começa entendendo, primeiramente, as equações ligadas a linha de produção das fábricas. Suponhamos que exista ψ vinícolas de um determinado tipo de vinho italiano e que toda semana transporta para λ armazéns nas principais cidades para varejo, distribuição e exportação. Supondo ainda que o custo unitário de transporte da vinícola i ao armazém j seja de c_{ij} unidades monetárias (reais, euros, dólares, francos suíços). A capacidade de produção de vinho italiano na vinícola i seja de a_i e que a demanda no armazém j seja de b_j.

Deseja-se determinar as quantidades x_{ij}, que representam quantas unidades de vinho da unidade i que vão para o armazém j para que o custo de transporte seja minimizado.



Para esse tipo de problema, teremos algumas restrições.

- Restrições relativas às capacidades de produção das vinícolas;
- Restrições relativas às demandas dos armazéns;
- Restrições de não negatividade.

2.1 Modelando o problema

Primeiramente iremos modelar a função objetivo, a qual queremos minimizar, que é uma relação entre o preço de transporte de uma unidade de vinho com a quantidade de vinhos. Como foi dito, temos ψ vinícolas e λ armazéns, então o custo de transporte da vinícola 1 para os λ será:

$$c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + \ldots + c_{1\lambda}x_{1\lambda}$$

Lembrando que c_{11} é o valor de transporte de uma unidade de vinho da vinícola 1 para o armazém 1 e que x_{11} representa a quantidade de vinhos que serão transportados da vinícola 1 para o armazém 1, logo o produto entre os dois termos, ou seja $c_{11}x_{11}$, nos diz o custo para transportar x_{11} unidades da vinícola 1 para o armazém 1.

Para a segunda vinícola, teremos o mesmo modelo mudando os indexes:

$$c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + \ldots + c_{2\lambda}x_{2\lambda}$$

Até chegarmos em ψ:

$$c_{\psi 1}x_{\psi 1} + c_{\psi 2}x_{\psi 2} + c_{\psi 3}x_{\psi 3} + \ldots + c_{\psi\lambda}x_{\psi\lambda}$$

Assim, nossa função objetiva é dada por:

$$Minimizar\ c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + \ldots + c_{1\lambda}x_{1\lambda} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + \ldots + c_{2\lambda}x_{2\lambda} + c_{\psi 1}x_{\psi 1} + c_{\psi 2}x_{\psi 2} + c_{\psi 3}x_{\psi 3} + \ldots + c_{\psi\lambda}x_{\psi\lambda}$$

Ou, com um pouco de simplificação, podemos notar que o somatório acima nada mais é do que:

$$\sum_{i=1}^{\psi}\sum_{j=1}^{\lambda} c_{ij}x_{ij}$$

A qual é nossa função objetiva que devemos minimizar.

2.2 Modelando as restrições do problema

Como foi mencionado, cada vinícola possui uma quantidade máxima de produção a_i *com i variando de* 1 à ψ. Logo, é sabido que a quantidade de vinhos x_{ij} não pode ser maior que a_i. Então, a primeira restrição diz que o somatório da quantidade de vinhos que serão transportados da vinícola i para o armazém j deve ser menor ou igual a quantidade máxima de produção da vinícola i.

Matematicamente falando, teremos:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + ... + x_{1\lambda} \leq a_1$$

Para a segunda vinícola, teremos o mesmo comportamento:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + ... + x_{2\lambda} \leq a_2$$

Até chegarmos em ψ:

$$x_{\psi 1} + x_{\psi 2} + x_{\psi 3} + ... + x_{\psi\lambda} \leq a_{\psi}$$

Teremos, portanto, o somatório que descreve tal restrição:

$$\sum_{j=i}^{\lambda} x_{ij} \leq a_i,\ i = 1,..., \psi$$

Ainda, é conhecido que a capacidade mínima de um armazém é de b_j, com j variando de 1 até λ. Logo, assumindo que a quantidade mínima de vinhos que devem chegar em cada armazém j é no mínimo b_j, podemos modelar a restrição da seguinte forma:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + ... + x_{\lambda 1} \geq b_1$$

É notório que se tomarmos todos os armazéns com todas as vinícolas no modelo descrito acima, teremos, o somatório:

$$\sum_{j=i}^{\psi} x_{ij} \geq b_i,\ i = 1,..., \lambda$$

Logo, podemos concluir o problema do transporte com a formulação:

$$Minimizar \sum_{i=1}^{\psi}\sum_{j=1}^{\lambda} c_{ij}x_{ij}$$

$$Sujeito\ a\colon \sum_{j=i}^{\lambda} x_{ij} \leq a_i,\ i = 1,..., \psi$$

$$\sum_{j=i}^{\psi} x_{ij} \geq b_i,\ i = 1,..., \lambda$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1,..., \psi, j = 1,...,\lambda$$

3. Variações do problema

Nota-se que as restrições e os custos para transportar uma unidade podem ser trocados de forma genérica, produzindo então novos modelos do problema. Portanto, variações do problema do transporte são bem comuns.

É possível modelar problemas mais próximos da realidade deixando de abstrair informações. O custo para transportar somente 1 item pode ser também um problema de programação linear se especificarmos como o custo de produção e o custo de transporte são feitos, dessa forma, ao invés de termos apenas o problema do transporte, teremos dois problemas de programação linear aninhados, o que resulta em uma gama muito mais difíceis de PPL.

4. Aplicações do problema do transporte e considerações finais.

Há tempos ocorrem mudanças na sociedade que demandam das organizações uma resposta rápida e eficiente e elas são desafiadas a superar obstáculos provenientes de tais mudanças. Dada a crescente tecnológica, conseguimos de forma exponencial aumentar a nossa produção de materiais. Assim, surgiu-se um problema logístico de transportar tais materiais. Nesse processo de adaptação das organizações é necessário maximizar os ganhos com os recursos existentes.

A logística, por sua vez, é crucial para a dispersão de produtos aos consumidores finais, é por meio do processo de distribuição que materiais chegam para a cadeia produtiva de um país e produtos acabados são disseminados para os clientes.

Dada a importância da questão logística de transporte de materiais acabados, ainda há o envolvimento de uma gama de tarefas que deve ser realizada de forma sincronizada para transportar e posicionar o estoque ao longo de uma cadeia de suprimentos, projetar e administrar sistemas para controlar a localização geográfica dos materiais e o transporte de produtos acabados ou inacabados. Entretanto, são necessárias ferramentas que apoiem essas atividades em busca dos objetivos organizacionais.

Entre essas se pode mencionar a Pesquisa Operacional que surgiu durante a Segunda Guerra Mundial. Com o objetivo de solucionar questões de origem logística, tática e estratégica dos militares, esses estudos marcaram a primeira aplicação da então chamada Operational Research ou Pesquisa Operacional.

5. Bibliografia

Programação linear - Ana Flávia Uzeda dos Santos Macambira
Nelson Maculan
Lucídio dos Anjos Formiga Cabral
Leizer de Lima Pinto

Linear and Nonlinear Programming - David G. Luenberger
Yinyu Ye