1.19) Revisitando o problema do exemplo 1.21, podemos ver que, sendo Y a v.a do número de lançamentos, no caso em específico encontramos $E(Y) = 6$.

Para encontrar a variância desse caso usaremos a esperança já encontrada, porém, precisamos da outra componente, Y^2.

$$E(Y^2) = E(Y^2|T)P(T) + E(Y^2|HT)P(HT) + E(Y^2|HH)P(HH)$$

$$= E((1+Y)^2)\frac{1}{2} + E((2+Y)^2)\frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{5}{2} + 12 + E(Y^2)\frac{3}{4} = 58$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

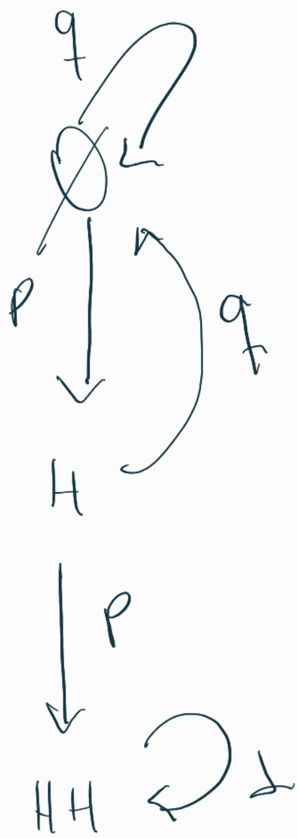
$$= 58 - 36 = \underline{\underline{22}}$$

1.19.2) Usando o simulador mencionado pode-se notar que chegasse muito proximo do valor encontrado de forma analitica.

Por simulação : 21.958
Por Analise : 22

1.19.3) Agora, precisamos criar a cadeia de Markov para o problema mencionado.

Por construção podemos considerar apenas os casos onde H são observados, caso um T seja observado, recomecaremos. Teremos a seguinte estrutura topologica:



tal estrutura encapsula toda a lógica por trás dos lançamentos e nos permite construir a seguinte matriz de transição:

$$P = \begin{array}{c|ccc} & \emptyset & H & HH \\ \hline \emptyset & q & p & 0 \\ H & q & 0 & p \\ HH & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Para acharmos a variância precisamos encontrar $E(Y)$ e $E(Y^2)$ onde Y é o número de lançamentos até HH.

Vale uma observação importante: Y foi definido como o número de lançamentos necessários, ou seja, considera-se o pior cenário, não o melhor haja vista que se quer chegar a um alvo, mesmo que não de primeira.

Logo, para chegar em HH:

1- Saímos de $\emptyset$ e voltamos para $\emptyset$.

2- Saímos de H e voltamos para $\emptyset$.

2- Saímos de H e como não há mais estados para errarmos, chegamos em HH.

$$E(Y) = E(Y|T)\,P_{\emptyset\emptyset} + E(Y|HT)\,P_{H\emptyset} + E(Y|HH)\,P_{HH}$$

$$E(Y|T)\frac{1}{2} + E(Y|HT)\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4}$$

$$\boxed{E(Y) = 6 \rightarrow E(Y^2) = 58 \rightarrow Var = 22}$$

Questão 02)

"Agora repita o exercício acima para o caso onde se quer calcular o número de tentativas até se chegar a <u>uma</u> cara (Geométrica padrão)."

Sabemos que $E(Y) = \frac{1}{p}$ em uma distribuição geométrica e que a variância também é conhecida e igual a $var(Y) = \frac{1-p}{p^2}$.

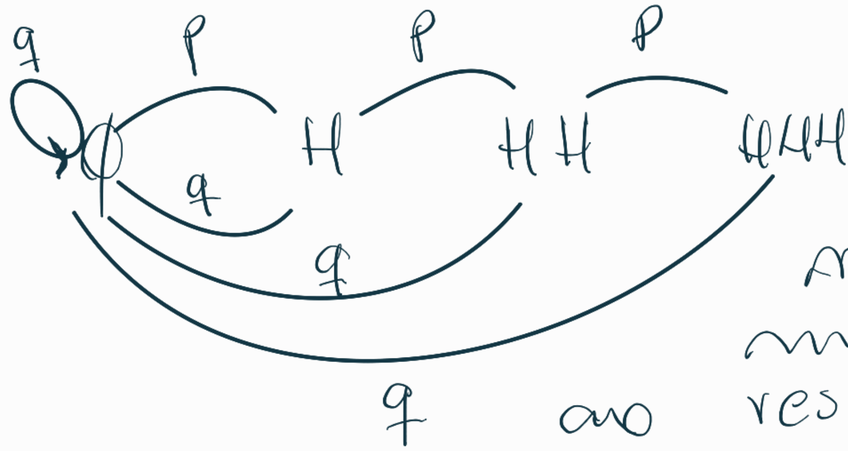
Dessa forma, basta construirmos a cadeia de Markov para o problema modelado como uma geométrica padrão.

$$P = \begin{vmatrix} q & p & 0 & 0 & \\ 0 & q & p & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & q & p & \\ & & \vdots & & \end{vmatrix}$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{m} y \cdot \underbrace{P_i}_{\text{Pmf}} = \frac{1}{p} \Rightarrow Var(Y) = \frac{1-p}{p^2}$$

1.20) a) Para responder a essa pergunta iremos construir uma cadeia de Markov que espera como estado final HHH.

Essa cadeia terá a seguinte topologia em grafo:



Nota-se que toda vez que não caminhamos em direção ao resultado voltamos ao começo pois um T invalida o que veio antes.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & \emptyset & H & HH & HHH \\
\hline
\emptyset & q & p & 0 & 0 \\
H & q & 0 & p & 0 \\
HH & 0 & q & 0 & p \\
HHH & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
\quad P =
$$

$$E(Y) = E(Y|T)P(T) + E(Y|HT)P(HT) + E(Y|HHT)P(HHT) + E(Y|HHH)P(HHH)$$

$E(Y) = 14 \quad (p = q = \frac{1}{2})$

b) Uma possível generalização segue do padrão de construção de $E(Y)$:

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{k} (i + E(Y)) \frac{1}{2^i} + k\left(\frac{1}{2^k}\right)$$

$$= 2 - 2^{1-k} + E(Y)(1 - 2^{-k})$$

$$= \underline{2^{k+1} - 2}$$

<u>Custo</u> <u>do</u> <u>namoro</u>

Podemos considerar 5 variáveis:

I - custo
G - Generoso, $\bar{G}$ - Não generoso
C - casado após tentativa e $\bar{C}$.

Queremos descobrir o custo médio total até encontrar a esposa e;

Qual a variância do custo total

Sabemos que a pessoa escolhe as configurações de maneira aleatória e que as configurações possuem probabilidades iguais de serem escolhidas.

Estratégia 1) Quando generoso, gasta 100 e casa com 30%.
Quando não generoso, gasta 10 e casa com probabilidade 10%.

<u>Custo Médio</u>

custo inicial

$$E(I) = 0 + 0.5\,E(G) + 0.5\,(\bar{G})$$

$$E(G) = 100 + (0.3 \times 0) + 0.7\,E(\bar{C})$$

$$E(\bar{G}) = 10 + E(\bar{C})$$

$$E(\bar{C}) = E(Y)$$

Resolvendo o sistema, teremos:

$E(I) = 0.5(100 + 0.7E(I)) + 0.5(10 + E(I))$
$E(I) = 50 + 0.35E(I) + 5 + \frac{E(I)}{2}$
$E(I) \approx 366$

Variância

Para esse cálculo iremos precisar do segundo momento de I: $E(I^2)$, que pode ser calculado pela esperança total:

$$E(I^2) = E(I^2|a)P(a) + E(I^2|b)P(b) + E(I^2|c)P(c).$$

Onde a corresponde ao evento de ser generoso e casar de primeira

b corresponde a ser generoso e não casar

c corresponde a não ser generoso.

$E(I^2|a) \sim 100$
$E(I^2|b) \sim 100 + I$
$E(I^2|c) \sim 10 + I$

$$E(I^2) = E(100^2)\cdot(0.3)(0.5) + E((100+I)^2)(0.7)(0.5) + E((10+I)^2)\cdot 0.5$$

$$= 100^2 \cdot (0.3)(0.5) + [100^2 + E(200I) +$$

$E(I^2)\Big](0.7)(0.5) + \Big[10 + E(20I) +$

$E(I^2)\Big](0.5)$

Simplificando:

$100^2 (0.3)(0.5) + \Big[100^2 + 200 \cdot 366 + E(I^2)\Big](0.7)$

$(0.5) + \Big[10 + 20 \cdot 366 + E(I^2)\Big] 0.5$

finalmente:

$$E(I^2) = 1500 + 29120 + 0.35\,E(I^2) + 3665 + \frac{E(I^2)}{2}$$

$$E(I^2) = 228567$$

$$Var(I) = E(I^2) - E(I)^2$$

$$= 94611$$

Agora para a segunda configuração:

Quando generoso gasta 1000 e casa com 80%.

Quando não generoso gasta 10 e casa com 10%.

$E(I) = 0 + (0.5\, E(G)) + (0.5\, E(\bar{G}))$
$E(G) = 1000 + (0.8 \times 0) + (0.2\, E(\bar{C}))$
$E(\bar{G}) = 10 + E(\bar{C})$
$E(\bar{C}) = E(I)$

$$E(I) = 0 + [0.5(1000 + 0.2\, E(I))] + [0.5(10 + E(I))]$$

$E(I) = 1262.5$

Agora, para a variância calculemos o segundo momento:

$$E(I^2) = E(I^2 | a) P(a) + E(I^2 | b) P(b) + E(I^2) P(c)$$

$E(I^2 | a) \sim 1000$
$E(I^2 | b) \sim 1000 + I$
$E(I^2 | c) \sim 10 + I$

$$E(I^2) = E(1000^2)(0.8)(0.5) + E((1000 + I)^2)(0.2)(0.5) + E((10 + I)^2)\, 0.5$$
$$= 1000^2 (0.4) + [1000^2 + 2000 \cdot 1262.5 + E(I^2)](0.2)(0.5) + [10^2 + 20 \cdot 1262.5 + E(I^2)]\, 0.5 = 1912940$$

Logo, teremos a variância como:

$$Var(I) = E(I^2) - E(I)^2$$
$$= 319033.75$$

Como podemos notar a segunda abordagem, em média, irá gastar mais do que a primeira sendo assim preferível escolher a primeira no lugar da segunda, além disso, nota-se que a variância da segunda opção é maior, aumentando a incerteza quanto ao valor gasto até se casar.

Vale a pena ressaltar que cenários diferentes pedem escolhas diferentes:
A segunda opção tem uma chance maior de se casar por rodada, então a depender da estratégia, pode-se ser proveitoso escolher a segunda opção

Por exemplo, a segunda configuração, em um limiar baixo tem mais chances de sucesso que a primeira, fato o qual pode, ou não, justificar o maior custo.

1.27) O total gasto por dia pode ser entendido por $N \times \psi$, onde ψ é a variável aleatória que representa quanto cada cliente gasta.

$$E(N \times \psi) = E(N)\,E(\psi) = 200 \times 15 = 3000$$

$$Var(N \times \psi) = Var(\psi)^2 E(N) + Var(N)^2 E(\psi)^2$$

$$= 361800$$

Como N e ψ são indepentes, pode-se calcular a variância de $N \times \psi$ dessa forma.

Uma outra forma, talvez um pouco mais intuitiva de encontrar a esperança é considerar o cenário onde indexamos ψ como uma série.

$$E(N\psi \mid N) = \sum_{K=1}^{N} E(\psi_k) = N\,E(\psi)$$

Por definição: $E(E(X \mid Y)) = E(X)$

Logo:

$$E(N \times \psi) = E(N\,E(\psi)) = E(N)\,E(\psi)$$

2.1) a) Como temos estados conexos, basta olharmos na cadeia P_{ij}, nesse caso, $P_{23} = 0.6$.

b) Pela propriedade da perda de memória da cadeia de Markov podemos simplificar a expressão para:

$$P(X_9 = 2 \mid X_7 = 3)$$

Nesse caso, como não podemos passar diretamente de X_7 para X_9, utilizaremos

$$P(X_9 = 2 \mid X_7 = 3) = \frac{P(X_7 = 3, X_9 = 2)}{P(X_7 = 3)}$$

$$= \frac{(\alpha P^7)_3 \, P^2_{32}}{(\alpha P^7)_3} = P^2_{32} = 0{,}27$$

c) Novamente precisamos utilizar a probabilidade conjunta em função de encontrar o resultado:

$$P(X_0=3 \mid X_1=1) = \frac{P(X_1=1, X_0=3)}{P(X_1=1)}$$

$$= \frac{\alpha I_3 P_{31}}{\alpha P_1} \Rightarrow \frac{\alpha_3 P_{31}}{(\alpha P)_1} = 0.882$$

d) Para calcular a esperança basta utilizarmos a forma padrão:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} i\,p(X=i)$$

Ao passo que para calcular o segundo momento utilizaremos:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{k} i^2 p(X=i)$$

Vale ressaltar que x é a distribuição da cadeia e é calculada por:

$$p(X_n) = p_j^n \alpha$$

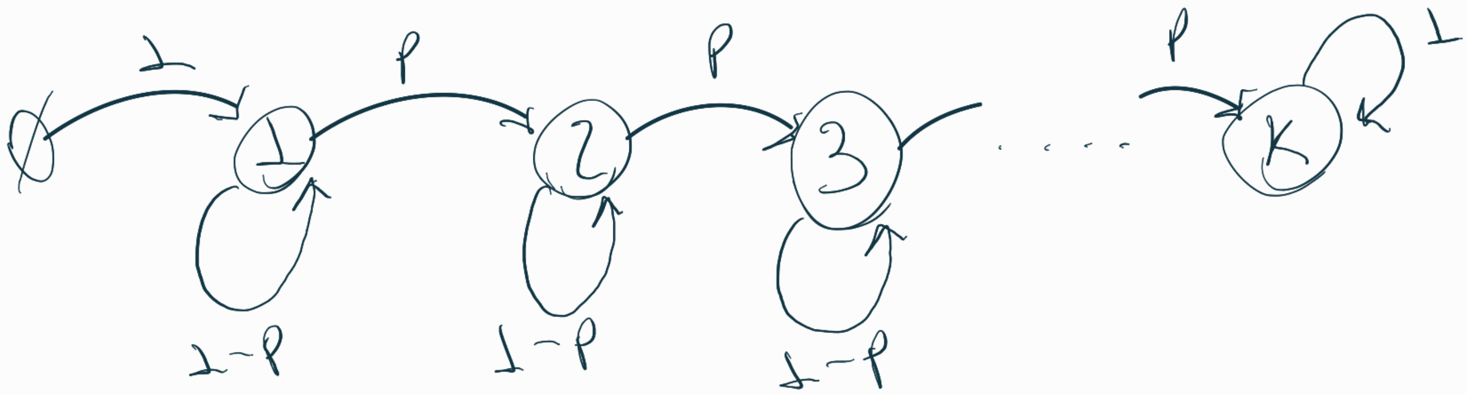
$$E(X_2) = (0.182, 0.273, 0.545)(1, 2, 3)$$
$$= 2.363$$

$$E(X_2^2) = 6.179$$

$$Var(X_2) = 6.179 - 5{,}583$$
$$= \underline{0.596}$$

2.14) Considerando o problema

podemos notar que a realização das músicas é independe da realização passada, ou seja, são independentes. Além disso, a realização da mesma música me faz voltar para o mesmo estado porque se pede o número de músicas únicas tocadas.



Assim podemos construir a matriz de transições P:

$$
P: \begin{array}{c|cccccc}
 & \emptyset & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & K \\
\hline
\emptyset & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & \vdots \\
1 & 0 & q & p & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\
2 & 0 & 0 & q & p & 0 & & \vdots \\
3 & 0 & 0 & 0 & q & p & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & & & \ddots & \vdots \\
k & \cdots & & & & & \cdots & 1
\end{array}
$$

Agora para segunda parte precisamos de P^6_{04}.

$$P^6_{04} = \frac{195}{512} = 0.381$$

Questão 08)

Seja X_n a quantidade de tentativas necessárias para pegar todos os n cupons:

temos pela dica que o valor esperado do número de tentativas é:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

O conjunto de variáveis aleatórias $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ representam o número de tentativas para pegar cada cupom considerando que o anterior foi pego.

Assim, buscamos encontrar

$$E(X) = E(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$\sum_{k=1}^{5} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \simeq 9.$$

Logo, para encontrar os 5 cupons será necessário abrir 9 caixas.

2.16) Para provarmos que $P^n = P$ para $\forall\, n \geq 1$, utilizaremos indução.

Provaremos primeiro o caso base, ou seja, $P^1 = P$, o que é verdade por definição.

Agora, por indução em n:

$$P^n_{ij} = \sum_k P^{n-1}_{ik} \, P_{kj} = \sum_k P_k P_j = P_j$$

2.17) λ é autovalor associado a matriz P se e somente se existir um $x \mid P(X=x) = \lambda x$.

Por definição, sabemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ij} = 1 \,, \quad j = \{1, \ldots, n\}$$

Para cada linha da matriz P, o somatório dos itens da linha equivale a 1.

temos o vetor $v = [1, 1, 1, \dots]^T$ faz a soma de todas as linhas.

$$Pv = \lambda v, \quad (\lambda = 1)$$

→ Isso implica que λ é autovalor associado a P, com autovetor v.

Por definição, um autovetor a esquerda exige que:

$$P^T v^T = \lambda v^T.$$

Como estamos invertendo a matriz estocástica, agora suas colunas somam 1 e v^T agora soma as colunas.
Com isso, chegamos ao mesmo resultado.

Logo, v é autovetor a esquerda e a direita.