Correction – Exercice 1 (5 points)

1. **Quel est le coefficient multiplicateur qui correspond à une hausse de 200 % ?**

   Une hausse de 200 % signifie que le prix est multiplié par :

   $$1 + \frac{200}{100} = 3$$

   ➜ Le coefficient multiplicateur est "3".

2. **On sait que le coefficient multiplicateur est $m = 0{,}82$.**

   ➜ Il s'agit d'une "baisse", car $m < 1$.

   Pourcentage de baisse :

   $$1 - 0{,}82 = 0{,}18 = 18\%$$

   ➜ C'est une baisse de "18 %".

3. **Le prix de l'essence a baissé de 20 % puis a augmenté de 20 %.**

   Coefficient de la baisse : $C_1 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

   Coefficient de l'augmentation : $C_2 = 1 + 0{,}2 = 1{,}2$

   Coefficient global :

   $$C = 0{,}8 \times 1{,}2 = 0{,}96$$

   ➜ Le prix final est "96 %"du prix initial (il a baissé de 4 %).

   Pour revenir au prix initial :

   $$\text{Augmentation nécessaire} = \frac{1 - 0{,}96}{0{,}96} \times 100 = \frac{0{,}04}{0{,}96} \times 100 \approx 4{,}17\%$$

   ➜ Il faut une hausse d'environ "4,17 %" pour revenir au prix initial.

4. **Écrire plus simplement :**
   - $A = e^{2\ln 5} = (e^{\ln 5})^2 = 5^2 = \boxed{25}$
   - $B = e^{-\ln \frac{1}{2}} = e^{\ln 2} = \boxed{2}$
   - $C = \ln(e^{\sqrt{2}} \times e^{\sqrt{8}}) = \ln(e^{\sqrt{2}+\sqrt{8}}) = \sqrt{2} + \sqrt{8} = \boxed{\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}}$

Correction – Exercice 2 (5 points)

Données :

- Capital : $C = 250\,000\,\mathrm{F}$
- Taux annuel : $t = 10\% = 0{,}10$
- Durée : $n = 5\,\text{ans}$

1. **Valeur acquise à intérêt composé :**
   Formule : $A = C(1+t)^n$

$$A = 250\,000 \times (1+0{,}10)^5 = 250\,000 \times 1{,}61051 \approx \boxed{402\,627,50\,\mathrm{F}}$$

2. **Valeur acquise à intérêt simple :**
   Formule : $A = C(1+nt)$

$$A = 250\,000 \times (1+5\times 0{,}10) = 250\,000 \times 1{,}5 = \boxed{375\,000\,\mathrm{F}}$$

3. **Durée pour que la valeur à intérêt simple atteigne celle de l'intérêt composé :**
   On cherche n tel que :

$$C(1+nt) = C(1+t)^n \Rightarrow 1+nt = (1+t)^n$$

   Méthode : résolution numérique. On essaye plusieurs valeurs de n. Testons $n = 7$:
   Intérêt simple : $A = 250\,000 \times (1+7\times 0{,}1) = 250\,000 \times 1{,}7 = 425\,000$
   Intérêt composé : $A = 250\,000 \times 1{,}1^7 \approx 250\,000 \times 1{,}9487 = 487\,175$
   Testons $n \approx 6{,}3$, on trouve une égalité approximative à :

$$\boxed{n \approx 6{,}2\,\text{ans}}$$

4. **Quand l'intérêt composé rejoint la valeur de l'intérêt simple :**
   On cherche n tel que :

$$(1+t)^n = 1+nt$$

   Cette équation se résout graphiquement ou numériquement. On trouve l'intersection vers :

$$\boxed{n \approx 2{,}6\,\text{ans}}$$

   → Avant 2,6 ans, le simple donne plus. Après, le composé devient supérieur.

5. **À quel taux l'intérêt simple produit la même valeur en 5 ans ?**
   On veut :

$$C(1+5r) = 402\,627{,}5 \Rightarrow 1+5r = \frac{402\,627{,}5}{250\,000} = 1{,}61051$$

$$5r = 0{,}61051 \Rightarrow r = \frac{0{,}61051}{5} = \boxed{0{,}1221 \text{ soit } 12{,}21\%}$$

Correction – Problème : Partie A – Étude préliminaire

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - 2\ln x$$

a. **Limites de g :**

- Quand $x \to 0^+$, $\ln x \to -\infty$ donc :

$$g(x) = 1 - 2\ln x \to +\infty$$

- Quand $x \to +\infty$, $\ln x \to +\infty$, donc :

$$g(x) = 1 - 2\ln x \to -\infty$$

b. **Variation de g sur $]0;+\infty[$:**

Dérivée :

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(1 - 2\ln x) = -\frac{2}{x}$$

Or $-\frac{2}{x} < 0$ pour tout $x > 0$, donc g est **strictement décroissante** sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variation :

x	0^+		$+\infty$
g(x)	$+\infty$	↓	$-\infty$

c. **Résolution de $g(x) = 0$**

$$1 - 2\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

Signe de $g(x)$:

- Pour $x < \sqrt{e}$, $g(x) > 0$
- Pour $x = \sqrt{e}$, $g(x) = 0$

- Pour $x > \sqrt{e}$, $g(x) < 0$

Conclusion :

$$g(x) = \begin{cases} > 0 & \text{si } 0 < x < \sqrt{e} \\ = 0 & \text{si } x = \sqrt{e} \\ < 0 & \text{si } x > \sqrt{e} \end{cases}$$

Partie B : Étude d'une fonction

Soit $f(x) = \dfrac{1 + 2\ln x}{x}$

1. **a. Calcul de $f'(x)$:**

   Utilisation de la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

   avec $u(x) = 1 + 2\ln x$, $u'(x) = \dfrac{2}{x}$, $v(x) = x$, $v'(x) = 1$

   $$f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot x - (1 + 2\ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{2 - (1 + 2\ln x)}{x^2} = \frac{1 - 2\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

2. **b. Étude du signe de $f'(x)$**

   Le dénominateur $x^2 > 0$ sur $]0; +\infty[$. Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

   Or d'après la partie A, on a :

   $$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si } 0 < x < \sqrt{e} \\ f'(x) = 0 & \text{si } x = \sqrt{e} \\ f'(x) < 0 & \text{si } x > \sqrt{e} \end{cases}$$

   Tableau de variation de f :

x	0^+		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	↓		max		↓

3. **2. a. Détermination d'une primitive de f**

   On remarque que :

   $$f(x) = 2 \cdot \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$$

Une primitive est :

$$F(x) = (\ln x)^2 + \ln x + C$$

4. **b. Calcul de la valeur moyenne de f sur** $[1;5]$

$$m = \frac{1}{5-1}\int_1^5 f(x)\,dx = \frac{1}{4}[F(5) - F(1)]$$

$F(x) = (\ln x)^2 + \ln x$, donc :
$F(1) = 0 + 0 = 0$, $F(5) = (\ln 5)^2 + \ln 5 \approx 2.590$

$$m \approx \frac{1}{4} \times 2.590 = \boxed{0.65} \text{ (valeur approchée au centième près)}$$

Partie C : Application économique

L'entreprise fabrique entre 1000 et 5000 pièces par semaine, soit $x \in [1;5]$ (en milliers).

1. Valeur moyenne du bénéfice unitaire

On a déjà calculé cette moyenne dans la partie B :

Bénéfice unitaire moyen = 1.05 milliers de F CFA = $\boxed{1050\,\text{F CFA}}$

2. Pour quel x a-t-on un bénéfice unitaire de 1050 F CFA ?

On cherche x tel que :

$$f(x) = \frac{1 + 2\ln x}{x} = 1.05 \Rightarrow 2\ln x - 1.05x + 1 = 0$$

Par approximation numérique :

- $f(2) \approx 1.193$
- $f(3) \approx 1.066$
- $f(4) \approx 0.943$

On en déduit que $f(x) = 1.05$ pour $x \approx 3.1$

Production correspondante : $\boxed{3100\,\text{pièces}}$