

# Quaderno delle regole - Matematica

Tommaso Bocchietti

28 gennaio 2024

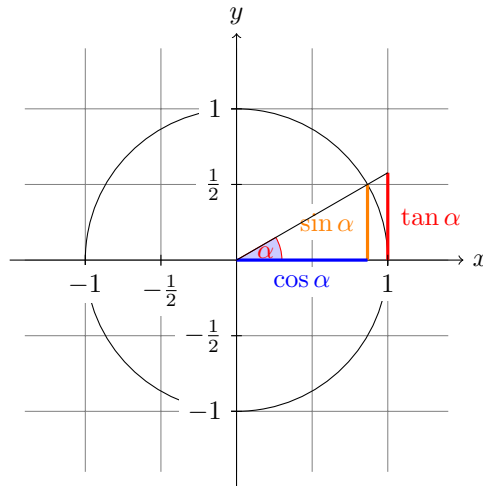


# Indice

<b>1</b>	<b>Goniometria</b>	<b>3</b>
1.1	Funzioni goniometriche . . . . .	4
1.2	Equazioni goniometriche . . . . .	5
1.2.1	Equazioni elementari . . . . .	5
1.2.2	Equazioni di 1° grado . . . . .	5
1.2.3	Equazioni di 2° grado . . . . .	6
1.3	Disequazioni goniometriche . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Trigonometria</b>	<b>6</b>
2.1	Teoremi sui triangoli rettangoli . . . . .	6
2.2	Teoremi sui triangoli qualunque . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Esponenziali e logaritmi</b>	<b>7</b>
3.1	Proprietà dei logaritmi . . . . .	7

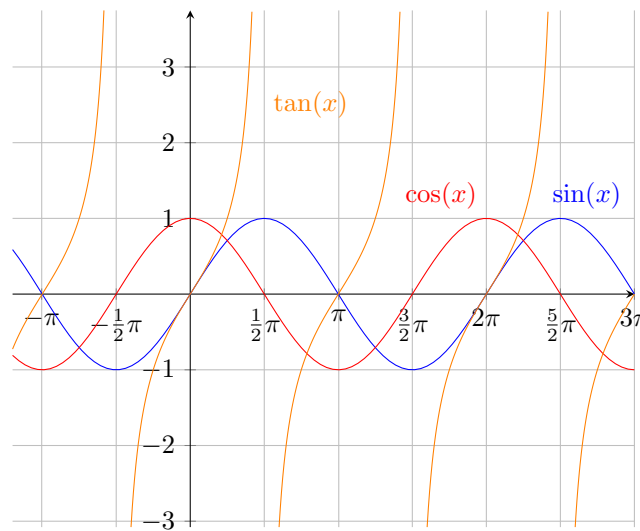
# 1 Goniometria

Un angolo può essere misurato in gradi o radianti, infatti si ha  $\alpha^\circ = \alpha[\text{rad}] \frac{180^\circ}{\pi}$ . Considerando una circonferenza goniometrica (raggio  $r = 1$ ), un angolo orientato  $\alpha$ , dal prolungamento del lato dell'angolo  $\alpha$ , otteniamo l'intersezione  $B$ , dove:



$$y_B = \sin(\alpha) \quad x_B = \cos(\alpha) \quad \frac{y_B}{x_B} = \tan(\alpha)$$

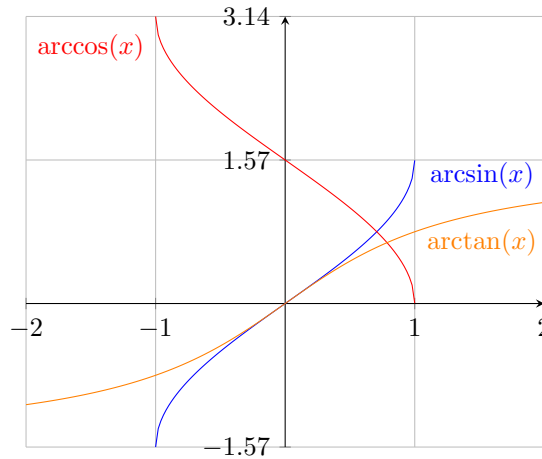
Al variare dell'angolo  $\alpha$ , le funzioni vengono così rappresentate:



Tutte queste funzioni sono periodiche, per cui  $f(x) = f(x + T)$ , dove  $T$  è il periodo della funzione. Angoli noti:

Angolo °	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
0	0	1	0
30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	1	0	$\infty$

Esistono poi le funzioni inverse, che permettono di trovare l'angolo  $\alpha$  a partire da un dato valore della funzione (es.  $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2} \rightarrow 30^\circ = \arcsin(\frac{1}{2})$ ).



Il periodo  $T$  di una funzione si ricava come:  $f(x) = \sin(\omega x) \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$   
 Relazioni fondamentali della goniometria:  $\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$  e  $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$

## 1.1 Funzioni goniometriche

### Addizione

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (1)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (2)$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \tan(\beta)} \quad (3)$$

### Sottrazione

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (4)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (5)$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \tan(\beta)} \quad (6)$$

$$(7)$$

### Duplicazione

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \quad (8)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \quad (9)$$

$$\tan(2\alpha) = 2 \tan(\alpha) \frac{1 - \tan^2(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} \quad (10)$$

### Bisezione

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}} \quad (11)$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}} \quad (12)$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos(\alpha)}}{\sqrt{1 + \cos(\alpha)}} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \quad (13)$$

## Parametriche

$$\sin(\alpha) = \frac{2 \tan(\frac{\alpha}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\alpha}{2})} \quad (14)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1 - \tan^2(\frac{\alpha}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\alpha}{2})} \quad (15)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{2 \tan(\frac{\alpha}{2})}{1 - \tan^2(\frac{\alpha}{2})} \quad (16)$$

Esistono anche

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \quad (17)$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \quad (18)$$

$$(19)$$

Ogni formula contenente la tangente ha le sue condizioni di esistenza. In generale essendo  $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$  si ha che  $\tan(\alpha)$  esiste se  $\cos(\alpha) \neq 0$ , ovvero se  $\alpha \neq K\pi$  con  $K \in \mathbb{Z}$ .

## 1.2 Equazioni goniometriche

Esistono diverse tipologie di equazioni goniometriche.

### 1.2.1 Equazioni elementari

Sfruttano il principio degli angoli associati:

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \arcsin(\frac{1}{2}) \\ \alpha = (\pi - \arcsin(\frac{1}{2})) \end{cases} \quad (20)$$

### 1.2.2 Equazioni di 1° grado

Qui distinguiamo due casi di omogenea (se tutti i termini sono dello stesso grado) e non omogenea.

**Omogenea**,  $c = 0$  Data l'equazione  $A \sin(\alpha) + B \cos(\alpha) = 0$ , la riconduco a una forma elementare dividendo i termini per  $\cos(\alpha)$  e ottenere così:

$$A \tan(\alpha) + B = 0 \rightarrow \tan(\alpha) = -\frac{A}{B} \quad (21)$$

**Non omogenea**,  $c \neq 0$  Data l'equazione  $A \sin(\alpha) + B \cos(\alpha) + C = 0$ , esistono tre modi per risolverla:

- Parametrico: pongo  $\sin(\alpha) = \frac{2T}{1+T^2}$  e  $\cos(\alpha) = \frac{1-T^2}{1+T^2}$ , con  $T = \tan(\frac{\alpha}{2})$ .
- Grafico: pongo  $Y = \sin(\alpha)$  e  $X = \cos(\alpha)$ , e metto a sistema

$$\begin{cases} AY + BX + C = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Le intersezioni trovate corrispondono alle soluzioni.

- Angolo aggiunto: considero l'equazione  $A \sin(\alpha) + B \cos(\alpha) + C = 0$  come se fosse la formula di addizione (1) di  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) = -C$ , dove  $\cos(\beta) = A$  e  $\sin(\beta) = B$ . Calcolo dunque il raggio della circonferenza come  $r = \sqrt{A^2 + B^2}$  e divido il tutto per  $r$ . Trovo dunque  $\alpha$  avendo il valore di  $\cos(\alpha)$  e  $\sin(\alpha)$ , e riduco a equazione elementare  $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{C}{r} \rightarrow \alpha = \arcsin(-\frac{C}{r}) - \beta$

Esempio angolo aggiunto:

$$\cos(\alpha) - \sqrt{3} \sin(\alpha) = 1 \rightarrow r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \quad (22)$$

$$\begin{cases} \cos(\beta) = \frac{1}{2} \\ \sin(\beta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \beta = \frac{5\pi}{6} \quad (23)$$

$$\sin(\alpha + \frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} \alpha + \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow \alpha = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \alpha + \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow \alpha = 0 + 2k\pi \end{cases} \quad (24)$$

### 1.2.3 Equazioni di 2° grado

Definite nella forma  $A \sin^2(\alpha) + B \cos(\alpha) \sin(\alpha) + C \cos^2(\alpha) + D = 0$ , si risolvono in maniera differente a seconda del valore di  $D$ .

**Caso 1,  $D = 0$**  Si raccoglie  $\sin(\alpha)$  o  $\cos(\alpha)$  se  $A = 0$  o  $C = 0$  rispettivamente, e si risolve come un'equazione di 1° grado. Altrimenti si divide per  $\cos^2(\alpha)$  e otteniamo  $A \tan^2(\alpha) + B \tan(\alpha) + C = 0$ , e si risolve come un'equazione di 2° grado ponendo  $x = \tan(\alpha)$ .

**Caso 2,  $D \neq 0$**  Si riscrive  $D$  come  $D = D \sin^2(\alpha) + D \cos^2(\alpha)$ , e si arriva quindi ad avere  $A \sin^2(\alpha) + B \cos(\alpha) \sin(\alpha) + C \cos^2(\alpha) + D \sin^2(\alpha) + D \cos^2(\alpha) = 0$ . Proseguiamo dividendo per  $\cos^2(\alpha)$  e riportandoci dunque al caso sopra descritto.

## 1.3 Disequazioni goniometriche

Per risolvere una disequazione goniometrica, si ricava da prima la soluzione dell'equazione associata come descritto sopra, e si utilizza poi la circonferenza come grafico per determinare il segno.

$$(2 \sin(\alpha) + \sqrt{2})(2 \cos(\alpha) - 1) > 0 \quad (25)$$

$$\begin{cases} 2 \sin(\alpha) + \sqrt{2} > 0 \\ 2 \cos(\alpha) - 1 > 0 \end{cases} = \begin{cases} \sin(\alpha) > -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\alpha) > \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{5\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (26)$$

Dal grafico si vede che la soluzione è  $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3} \vee \frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{5\pi}{4}$ .

## 2 Trigonometria

La trigonometria è lo studio delle relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo. Preso per esempio il lato  $a$ , si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$a = \begin{cases} c \sin(\alpha) \\ c \cos(\beta) \\ b \tan(\alpha) \\ b \cot(\alpha) \end{cases}$$

Risolvere un triangolo significa trovare il valore di ogni suo lato e angolo.

### 2.1 Teoremi sui triangoli rettangoli

- Area di un triangolo:  $A = \frac{1}{2}ab \sin(\alpha)$  (due lati per l'angolo compreso)
- Misura di una corda:  $AB = 2r \sin(\alpha)$
- Raggio della circonferenza inscritta:  $r = \frac{a}{2 \sin(\alpha)}$

## 2.2 Teoremi sui triangoli qualunque

- Teorema dei seni:  $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$
- Teorema del coseno:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$ , dimostrabile essendo  $a^2 = HH'^2 + (AB - HB)^2 = (b \sin(\alpha))^2 + c^2 + (b \cos(\alpha))^2 - 2bc \cos(\alpha)$

## 3 Esponenziali e logaritmi

Si definisce funzione esponenziale ogni funzione del tipo  $f(x) = a^x$ , con  $a \in \mathbb{R}$  e  $a \geq 0$ .

Se  $a > 1$ , la funzione è sempre crescente, mentre se  $0 < a < 1$  è sempre decrescente.

È un'equazione esponenziale, una qualsiasi equazione che contiene almeno una potenza con l'incognita all'esponente:  $a^x = b$ , risolvibile con il logaritmo  $x = \log_a(b)$ . Per risolvere le disequazioni con gli esponenziali, si riporta tutto alla stessa base e si osserva se:

- $a > 1$ , allora si pongono gli esponenti uno maggiore dell'altro  $\rightarrow 2^{2x} > 2^3$ , Soluzione:  $2x > 3$
- $0 < a < 1$ , allora si pongono gli esponenti uno minore dell'altro  $\rightarrow \frac{1}{3}^{2x} > \frac{1}{3}^5$ , Soluzione:  $2x < 5$

Il logaritmo è l'esponente da dare alla base per ottenere l'argomento:  $\log_a(b) = x \iff a^x = b$ . Le condizioni di esistenza sono  $b > 0$  e  $a \neq 1 \wedge a > 0$

### 3.1 Proprietà dei logaritmi

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$$

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

Una equazione è logaritmica se compare l'incognita nell'argomento del logaritmo:  $\log_a(x)$ . Per risolvere le disequazioni, riportiamo entrambi i membri alla stessa base, sapendo che  $\log_a(b) = e^{\ln(\log_a(b))}$ , oppure sfruttando la definizione di logaritmo:  $a^x = b \iff x = \log_a(b)$ .

$$\log_3(x + 2) \geq 5 \rightarrow C.E. : x + 2 > 0 \quad (27)$$

$$x + 2 \geq 3^5 \rightarrow x \geq 3^5 - 2 \quad (28)$$

Per risolvere un'equazione esponenziale, si utilizzano i logaritmi e le sue proprietà:

$$7 \cdot 5^{2x} = 3^{x+1} \quad (29)$$

$$\log_1 0(7 \cdot 5^{2x}) = \log_1 0(3^{x+1}) \quad (30)$$

$$\log_1 0(7) + 2x \log_1 0(5) = (x + 1) \log_1 0(3) \quad (31)$$

$$x = \frac{\log_1 0(3) - \log_1 0(7)}{2 \log_1 0(5) - \log_1 0(3)} \quad (32)$$