

Quaderno delle regole - Fisica

Tommaso Bocchietti

2 febbraio 2024



Indice

1	Elettrostatica	4
1.1	Legge di Coulomb	4
1.2	Il campo elettrico	4
1.3	Flusso del campo elettrico / Teorema di Gauss	4
1.4	Forme di campo elettrico in casi noti	4
1.5	Energia potenziale elettrica	5
1.6	Potenziale elettrico	5
1.7	Circuitazione del campo elettrico lungo una linea chiusa orientata	5
1.8	Distribuzione delle cariche nei conduttori	5
1.9	Teorema di Coulomb	5
1.10	Capacità di un condensatore	6
1.11	Energia immagazzinata in un condensatore	6
1.12	Densità di energia in un condensatore	6
1.13	Proprietà fondamentali del campo elettrico	6
2	Campo magnetico	7
2.1	Relazione tra corrente elettrica e campo magnetico	7
2.1.1	Casi particolari	7
2.2	Forza magnetica	7
2.3	Forza di Ampère	7
2.4	Forza di Lorentz	7
2.5	Esperimento di Thomson	7
2.6	Flusso del campo magnetico	7
2.7	Circuitazione del campo magnetico	7
2.8	Proprietà magnetiche dei materiali	7
3	Corrente indotta	7
3.1	Legge di Faraday-Neumann	7
3.2	Legge di Lenz	7
3.3	Correnti di Foucault	7
4	Induttanza	7
4.1	Mutua induttanza	7
5	Corrente Alternata	7
5.1	Valori Efficaci e Valori Massimi	8
5.2	Trasformatore	8
6	Equazioni di Maxwell	8
6.1	Circuitazione di \vec{E} lungo \mathcal{L}	8
6.2	Circuitazione di \vec{B} lungo \mathcal{L}	8
6.3	Definizione di campo elettromagnetico	9
7	Onde elettromagnetiche	9
7.1	Velocità dell'onda	9
7.2	Onde elettromagnetiche piane	9
7.3	Energia e quantità di moto	9
7.4	Quantità di moto e pressione di radiazione	10
7.5	Polarizzazione di onde elettromagnetiche	10
8	Spettro elettromagnetico	10

9	Relatività ristretta	10
9.1	Velocità della luce e sistemi di riferimento	10
9.1.1	Esempio di uno shuttle in movimento che spara due raggi laser	11
9.2	L'esperimento di Michelson-Morley (1887)	11
9.3	Gli assiomi della teoria della relatività ristretta	11
9.4	La simultaneità	11
9.4.1	Esempio del treno e dei lampi di luce	11
9.5	La dilatazione dei tempi	11
9.5.1	Esempio dei laser in movimento	11
9.6	La contrazione delle lunghezze	12
9.6.1	Esempio del caso del muone	12
9.7	L'invarianza delle lunghezze perpendicolari al moto relativo	13
9.7.1	Esempio del treno e del tunnel	13
9.8	Le trasformazioni di Lorentz	13
9.9	L'intervallo invariante	13
9.10	Lo spazio-tempo di Minkowski	14
9.11	La composizione relativistica delle velocità	14
9.11.1	Esempio dell'astronave e della pallottola	14
9.12	L'equivalenza tra massa ed energia	14
9.13	La dinamica relativistica	15

1 Elettrostatica

L'elettrostatica studia le cariche elettriche stazionarie nel tempo. Gli elettroni hanno massa $m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ kg e carica negativa. I protoni hanno massa $m_p = 1.673 \times 10^{-27}$ kg e carica positiva. La carica elementare equivale a $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C.

Un corpo si dice isolante se i suoi elettroni sono dissolti e impossibilitati a muoversi, ma solo direzionarsi. È un conduttore se gli elettroni sono liberi di muoversi e spostarsi.

1.1 Legge di Coulomb

Per il calcolo della forza tra due cariche puntiformi si usa la legge di Coulomb:

$$F = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Dove $k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, con ϵ_0 = Costante dielettrica del vuoto = 8.854×10^{-12} C² N⁻¹ m⁻².

I materiali si possono caricare per strofinio, contatto o induzione. Gli isolanti, o dielettrici, si possono solo polarizzare (polarizzazione).

Costante dielettrica relativa $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$.

1.2 Il campo elettrico

Un campo vettoriale è una funzione che associa a ogni punto dello spazio, un vettore che specifica in modulo, direzione e verso, una data grandezza vettoriale.

Forza generata da un campo elettrico:

$$\vec{F} = q\vec{E} \rightarrow N = C \cdot \frac{N}{C}$$

Dove q = carica di prova.

Rappresentazione grafica:

1.3 Flusso del campo elettrico / Teorema di Gauss

$$\text{Per superfici aperte : } \Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \vec{S} dS = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i$$

$$\text{Per superfici chiuse : } \Phi_\Omega(\vec{E}) = \frac{Q_{tot}}{\epsilon}, \text{ con } Q_{tot} = \text{carica totale contenuta in } \Omega$$

1.4 Forme di campo elettrico in casi noti

Ipotizzando di essere nel vuoto, e quindi di avere $\epsilon = \epsilon_0$, possiamo dare la definizione di \vec{E} per alcuni casi particolari.

- Carica puntiforme: $\vec{E} = k_0 \frac{Q}{r^2} \hat{r}$
- Piano infinito uniformemente carico: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$, con σ = densità di carica superficiale C m⁻²
- Filo infinito uniformemente carico: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$, con λ = densità di carica lineare C m⁻¹ e r = distanza dal filo
- Una sfera, al suo esterno: $\vec{E} = k_0 \frac{Q}{r^2} \hat{r}$ (essenzialmente una carica puntiforme)
- Una sfera conduttrice, al suo interno: $\vec{E} = 0$ perché le cariche si distribuiscono sulla superficie
- Una sfera dielettrica, al suo interno: $\vec{E} = r \cdot k_0 \frac{Q}{R^3} \hat{r}$, con Q = carica compresa nel volume di raggio r
- In un condensatore piano: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. All'esterno delle barriere, $\vec{E} = 0$

1.5 Energia potenziale elettrica

L'energia potenziale elettrica tra due cariche puntiformi è:

$$U = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r}$$

In generale: $U = L = \vec{F} \cdot \vec{s} = q\vec{E} \cdot \text{distanza dalla fonte di campo}$

1.6 Potenziale elettrico

Il potenziale elettrico è una funzione scalare che associa a ogni punto dello spazio un valore scalare che specifica l'energia potenziale elettrica di una carica di prova q in quel punto.

$$V = \frac{U}{q} = \frac{L}{q} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{q} = \vec{E} \cdot \vec{s}$$

In generale, definito $\Delta V = V_B - V_A$ differenza di potenziale, si ha:

$$\Delta V = -\vec{E} \cdot \Delta \vec{s} \rightarrow L = U_A - U_B = -q\Delta V$$

Partendo quindi da $U_{A \rightarrow B} = -q\Delta V = -q(V_B - V_A)$, abbiamo che il lavoro è positivo, e quindi le cariche si spostano autonomamente, se la carica q è:

- Positiva, e allora passa da potenziale maggiore a potenziale minore $\rightarrow V_A > V_B$
- Negativa, e allora passa da potenziale minore a potenziale maggiore $\rightarrow V_A < V_B$

Una superficie equipotenziale è il luogo dei punti dello spazio aventi lo stesso potenziale elettrico.

Un esempio è il condensatore piano, che forma tra le sue armature una serie di superfici equipotenziali.

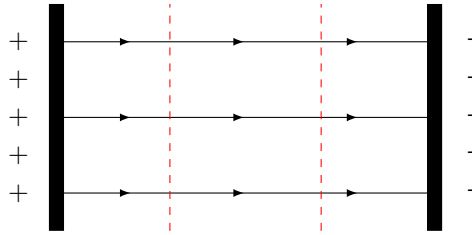


Figura 1: Condensatore piano con **superfici equipotenziali**

1.7 Circuitazione del campo elettrico lungo una linea chiusa orientata

È una legge che serve per dimostrare che il campo elettrico \vec{E} , rimane costante ed è quindi conservativo.

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E} \cdot \Delta \vec{s}_i$$

Visto che il campo elettrico è conservativo, deve valere che $\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} = 0$ sempre, ammesso che la linea \mathcal{L} sia chiusa.

1.8 Distribuzione delle cariche nei conduttori

Le cariche tendono sempre a mettersi sulle superfici esterne. L'interno dunque di un conduttore rimane con $\vec{E} = 0$, e $V_{interna} = V_{superficie}$ e dunque $\Delta V = 0$.

Il potere delle punte è un fenomeno correlato alla distribuzione delle cariche sui conduttori per cui si ha $S_{punta} \approx 0$ e quindi $\vec{E} = \frac{Q}{S\epsilon} = \infty$. Da questo ne deriva che alcune cariche possono essere espulse dal conduttore generando così un vento elettrico.

1.9 Teorema di Coulomb

Per calcolare il campo elettrico sulla superficie di un conduttore si ha $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon}$

1.10 Capacità di un condensatore

É definita come il rapporto tra la carica elettrica e il potenziale elettrico:

$$C = \frac{Q}{V} \text{ F} = \text{C V}^{-1}$$

Corrisponde alla quantità di carica che può contenere un conduttore.

- Per una sfera conduttrice: $C = 4\pi\epsilon_0 R$
- Per un condensatore piano: $C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$, con S = superficie delle armature e d = distanza tra le armature

1.11 Energia immagazzinata in un condensatore

Corrisponde al lavoro compiuto per caricare il condensatore

$$W_c = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CVJ$$

1.12 Densità di energia in un condensatore

É il rapporto tra l'energia immagazzinata e il volume del condensatore tra le pareti.

$$w_{\vec{E}} = \frac{W_c}{Sd} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \text{ J m}^{-3}$$

1.13 Proprietà fondamentali del campo elettrico

Si riportano qui le due proprietà fondamentali del campo elettrico:

- Flusso del campo elettrico da una superficie chiusa: $\Phi_{\Omega}(\vec{E}) = \frac{Q_{tot}}{\epsilon}$
- Circuitazione del campo elettrico lungo una linea chiusa orientata: $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} = 0$

2 Campo magnetico

2.1 Relazione tra corrente elettrica e campo magnetico

2.1.1 Casi particolari

2.2 Forza magnetica

2.3 Forza di Ampère

2.4 Forza di Lorentz

2.5 Esperimento di Thomson

2.6 Flusso del campo magnetico

2.7 Circuitazione del campo magnetico

2.8 Proprietà magnetiche dei materiali

3 Corrente indotta

3.1 Legge di Faraday-Neumann

3.2 Legge di Lenz

3.3 Correnti di Foucault

4 Induttanza

L'autoinduzione è il fenomeno per cui si genera una corrente indotta alla chiusura del circuito, che va a contrastare la corrente immessa. Quando il circuito si chiude, la corrente \vec{i} che inizia a circolare genera un campo magnetico $\Delta\vec{B}$ come se fosse una spira. La legge di Lenz afferma che, avendo $\Delta\vec{B}$, si crea un $B_{indotto}$, e di conseguenza una corrente indotta che contrasta \vec{i} . Questo fenomeno è ben visibile nei circuiti RL .

Definiamo l'induttanza come $L = \mu_0\mu_r \frac{N^2}{l} S$, misurabile in Henry ($H \rightarrow \frac{Wb}{A}$). Per un solenoide, all'interno si ha $\Phi(\vec{B}) = L \cdot i$, e avendo un $\Delta\Phi(\vec{B})$, possiamo determinare il valore della corrente che circola nel circuito usando le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}\text{Chiusura} \rightarrow i(t) &= \frac{fem}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \\ \text{Apertura} \rightarrow i(t) &= \frac{fem}{R} e^{-\frac{R}{L}t}\end{aligned}$$

4.1 Mutua induttanza

Quando la corrente indotta ha origine esterna (in un secondo circuito), si ha un fenomeno di mutua induttanza.

$$\begin{aligned}\Phi_2(\vec{B}_1) &= M \cdot i_1 & fem^{1 \rightarrow 2} &= -M \frac{di_1}{dt} \\ \Phi_1(\vec{B}_2) &= M \cdot i_2 & fem^{2 \rightarrow 1} &= -M \frac{di_2}{dt}\end{aligned}$$

5 Corrente Alternata

La corrente alternata (CA) è generata da una tensione che varia continuamente, ripetendosi dopo un periodo T . L'alternatore è lo strumento responsabile della produzione della CA, il cui simbolo è AC .

Le leggi fondamentali della CA sono espresse dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \text{fem}(t) &= f_0 \sin(\omega t), & f_0 &= B \cdot S \cdot \omega \\ i(t) &= i_0 \sin(\omega t), & i_0 &= \frac{f_0}{R} \\ \text{fem} &= -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = BS\omega \sin(\omega t), & (\text{se generata da un alternatore}) \end{aligned}$$

5.1 Valori Efficaci e Valori Massimi

La potenza istantanea $P(t) = R[i(t)]^2$ conduce a una potenza media $P_{\text{media}} = \frac{1}{2} Ri_0^2$. Definiamo i valori efficaci come $i_{\text{eff}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$ e $\text{fem}_{\text{eff}} = \frac{f_0}{\sqrt{2}}$. La potenza media assorbita da un circuito AC è quindi $P = i_{\text{eff}} \cdot \text{fem}_{\text{eff}}$.

Per la corrente domestica in Italia (50 Hz), con $\text{fem}_{\text{eff}} = 220 \text{ V}$, otteniamo $\text{fem}_0 = 325 \text{ V}$.

5.2 Trasformatore

Il trasformatore è un dispositivo che modifica i valori di tensione e corrente attraverso due bobine collegate da un conduttore. Il suo funzionamento è limitato alla corrente alternata e segue la relazione:

$$\frac{i_{2,\text{eff}}}{i_{1,\text{eff}}} = \frac{f_{1,\text{eff}}}{f_{2,\text{eff}}} = \frac{N_2}{N_1}$$

Dove 1 indica l'entrata/primario e 2 l'uscita/secondario, mentre N rappresenta il numero di spire del solenoide.

6 Equazioni di Maxwell

Nel 1865, Maxwell comprese che il campo elettrico e il campo magnetico si influenzavano reciprocamente. Egli propose delle equazioni basate sul flusso e sulla circuitazione di \vec{E} e \vec{B} per dimostrarlo.

6.1 Circuitazione di \vec{E} lungo \mathcal{L}

Partendo da $\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} = 0$, Maxwell dimostrò che tale circuitazione è legata alla forza elettromotrice $\text{fem}(\vec{B})$ attraverso:

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} = -\frac{\Delta\Phi_S(\vec{B})}{\Delta t}$$

Questo indica che un campo elettrico può essere generato da cariche elettriche o da campi magnetici variabili nel tempo.

6.2 Circuitazione di \vec{B} lungo \mathcal{L}

Partendo da $\oint_{\mathcal{L}} \vec{B} = \mu_0 \cdot I_{\text{concatenata}}$, Maxwell introdusse la corrente di spostamento $I_s = \varepsilon_0 \cdot \frac{\Delta\Phi_S(\vec{E})}{\Delta t}$. Quindi, la circuitazione diventa:

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B} = \mu_0 \cdot (I_c + I_s) = \mu_0 \cdot \left(I_c + \varepsilon_0 \cdot \frac{\Delta\Phi_S(\vec{E})}{\Delta t} \right)$$

Questo dimostra che un campo magnetico può essere generato da correnti elettriche o da campi elettrici variabili nel tempo.

6.3 Definizione di campo elettromagnetico

La combinazione delle equazioni di Maxwell porta alla definizione del campo elettromagnetico, in cui \vec{E} e \vec{B} si influenzano reciprocamente senza la necessità di un mezzo materiale.

$$\begin{aligned}\Phi_{\Omega}(\vec{E}) &= \frac{Q_{\text{tot}}}{\varepsilon} \\ \Phi_{\Omega}(\vec{B}) &= 0 \\ \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} &= -\frac{\Delta\Phi_S(\vec{B})}{\Delta t} \\ \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} &= \mu_0 \cdot \left(I_c + \varepsilon_0 \cdot \frac{\Delta\Phi_S(\vec{E})}{\Delta t} \right)\end{aligned}$$

La risoluzione di queste equazioni conduce alla definizione delle onde elettromagnetiche, come ad esempio la luce.

7 Onde elettromagnetiche

Le onde elettromagnetiche sono il risultato della propagazione simultanea di un campo magnetico \vec{B} e di un campo elettrico \vec{E} , perpendicolari tra loro. Il primo a provare l'esistenza di queste onde fu il fisico Hertz, che provocando una scintilla, riuscì a produrne un'altra in due punti diversi della stanza. La prima scintilla aveva prodotto un'onda elettromagnetica.

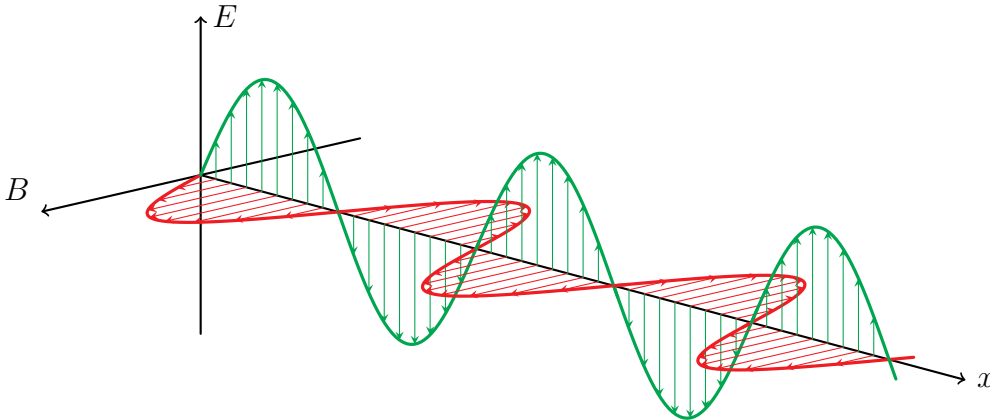


Figura 2: Onda elettromagnetica

7.1 Velocità dell'onda

La velocità dell'onda elettromagnetica è determinata da $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$, che nel vuoto diventa $v = c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$. L'indice di rifrazione del mezzo, n , è legato a $\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$.

7.2 Onde elettromagnetiche piane

Considerando un'antenna che genera onde sferiche a distanze significative, queste possono essere approssimate come onde piane. Le onde elettromagnetiche sono trasversali, con $\vec{E} \perp \vec{B}$ e $E = c \cdot B$ nel vuoto, indicando che $E \gg B$.

7.3 Energia e quantità di moto

Le onde elettromagnetiche trasportano energia e quantità di moto. Le forme di energia massime ($w_{E,B}$) e medie ($\overline{w_{E,B}}$) sono date da:

$$\begin{aligned}
w_E &= \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 \\
w_B &= \frac{1}{4\mu_0} B_0^2 \\
\overline{w_E} &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \\
\overline{w_B} &= \frac{1}{2\mu_0} B^2
\end{aligned}$$

La densità volumica di energia è data da $\overline{w} = \overline{w_E} + \overline{w_B}$. L'energia totale nello spazio è $\mathcal{E} = Ac\Delta t \overline{w}$. L'irradiazione $I = \frac{P}{A}$ implica $E_r = \frac{\mathcal{E}}{A\Delta t} = c\overline{w}$.

7.4 Quantità di moto e pressione di radiazione

La quantità di moto, p , è legata alla forza ricevuta da un corpo a causa della propagazione dell'onda: $p = \frac{\mathcal{E}}{c}$.

La pressione di radiazione, P_r , è definita come $P_r = \frac{E_r}{c}$, associando la forza per unità di area alla propagazione dell'onda.

7.5 Polarizzazione di onde elettromagnetiche

Un'onda è polarizzata se \vec{E} e \vec{B} hanno direzioni ben definite nello spazio. La luce non polarizzata è un insieme casuale di onde.

Il polarizzatore lineare filtra solo le onde con \vec{E} in una specifica direzione.

Le linee nere del polarizzatore, costituite da materiale conduttore, bloccano la componente orizzontale dell'onda, consentendo solo la componente verticale.

Se un fascio polarizzato attraversa un filtro inclinato rispetto a \vec{E} , la trasmissione è $E_r = E_r^{(0)} \cos^2(\alpha)$, permettendo solo la componente trasversale al filtro.

8 Spettro elettromagnetico

L'ampio spettro elettromagnetico comprende un insieme di frequenze delle onde elettromagnetiche, ognuna con caratteristiche specifiche. Questo spettro può essere suddiviso in sette categorie principali, ciascuna con una gamma di lunghezze d'onda distintiva.

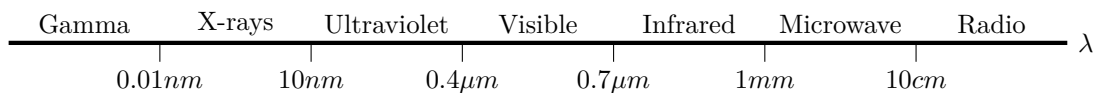


Figura 3: Spettro elettromagnetico

Con la conoscenza della lunghezza d'onda, è possibile calcolare la frequenza dell'onda elettromagnetica utilizzando la formula $f = \frac{c}{\lambda}$, in cui c rappresenta la velocità della luce. Un'importante porzione dello spettro è la luce visibile, con lunghezze d'onda comprese tra 400nm (viola) e 700nm (rosso). Questa fascia visibile è cruciale per la percezione umana dei colori, spaziando attraverso l'interessante intervallo di colori che va dal viola al rosso.

9 Relatività ristretta

9.1 Velocità della luce e sistemi di riferimento

Il valore $c = 3 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1}$ è un valore massimo e assoluto che non dipende dal sistema di riferimento (S.R.) considerato. Si ricorda che un S.R.I. (inerziale) è un sistema che si muove di moto rettilineo uniforme e quindi senza accelerazioni. Essendo c un invariante, allora o la meccanica di Newton/Galileo o l'elettromagnetismo sono sbagliate. La relatività corregge le formule della meccanica classica.

9.1.1 Esempio di uno shuttle in movimento che spara due raggi laser

9.2 L'esperimento di Michelson-Morley (1887)

Aveva lo scopo di dimostrare l'effetto del vento d'etere sulla velocità della luce c .

La Terra compiendo un moto di rivoluzione "naviga" in questa sostanza, in T_1 contro vento e in T_2 a favore. Quindi secondo Galileo $c_1 < c$ perché influenzato dal vento, e $c_2 > c$ perché velocizzato dall'etere. Per osservare la velocità, i fisici costruirono un'interferometro costituito da diversi specchi e una lastra semi-argentata che divide il raggio 1.

Il raggio R_1 si rifrange su S_{p-s} e si divide in R_2 e R_3 . Uno dei due viaggia controvento o a favore e quindi $\Delta t_2 = \frac{l}{v+c} + \frac{l}{v-c} = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$ e $\Delta t_3 = \frac{2l}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Si ottiene così una ipotetica fase tra i due raggi di:

$$\Delta\phi_{ipotesi} = \Delta t_2 - \Delta t_3 = \frac{2l}{c} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Essendo $R_4 = R_2 + R_3$, se c'è una certa fase allora si creeranno dei fronti so'onda su S. Da questi si ricava il v del vento d'etere.

Risultato negativo: c non varia quindi l'etere non influenzava la luce.

9.3 Gli assiomi della teoria della relatività ristretta

- Le leggi e i principi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali (S.R.I.).
- La velocità della luce c nel vuoto è la stessa in tutti i S.R.I., indipendentemente dal moto del sistema o della sorgente da cui la luce è emessa.

9.4 La simultaneità

Definizione operativa: due eventi E_1/E_2 sono simultanei quando, preso $P_3 = \frac{P_1+P_2}{2}$, il segnale luminoso emesso da E_1 impiega lo stesso Δt_1 per raggiungere P_3 del segnale luminoso emesso da E_2 , $\Delta t_2 \rightarrow$
La simultaneità diventa però relativa se consideriamo più di un solo S.R.I.

9.4.1 Esempio del treno e dei lampi di luce

Presi E_1 e E_2 simultanei per il sistema di riferimento O_{terra} , essi non sono più simultanei per il sistema di riferimento $O_{movimento}$.

9.5 La dilatazione dei tempi

Due orologi sono sincronizzati se al tempo t_0 , l'orologio 1 lancia un segnale luminoso all'orologio 2, e questo, quando il raggio lo raggiunge segna $t = t_0 + \frac{d}{c}$

Se però abbiamo due S.R.I. in moto relativo, allora il tempo t non scorre più alla stessa velocità tra i due sistemi, ma che nel sistema in movimento il tempo scorre più lentamente rispetto a quello fermo.

9.5.1 Esempio dei laser in movimento

Dai disegni sopra, si nota come il cammino percorso dal laser cambi in base alla posizione dell'osservatore. In particolare:

- Osservatore a bordo del carrello laser (in movimento): $t = \frac{2d}{c}$
- Osservatore fermo: $t' = \frac{2d}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Si ha quindi che $\Delta t' > \Delta t$ e quindi che il tempo in un S.R.I. in movimento rispetto a un altro scorre più lentamente.

Si definiscono allora:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \text{tempo proprio} \\ \Delta t' &= \text{tempo improprio} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{coefficiente di dilatazione} \\ \beta &= \frac{v}{c}\end{aligned}$$

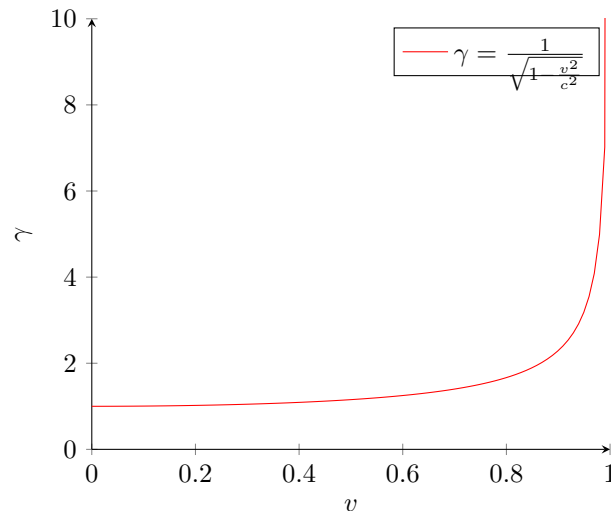
9.6 La contrazione delle lunghezze

Come conseguenza della dilatazione dei tempi, vi è anche la contrazione delle lunghezze. Essendo $\Delta x = v \cdot \Delta t'$ e $\Delta x' = v \cdot \Delta t$, si ha che:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} = \Delta x \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dove Δx è la lunghezza propria del segmento e $\Delta x'$ è la lunghezza impropria, ovvero la lunghezza del segmento visto dall'esterno e da fermo.

Abbiamo quindi che $\Delta t' = \gamma \cdot \Delta t$ e $\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma}$, con γ avente la seguente forma:



9.6.1 Esempio del caso del muone

Il muone è una particella che si forma nella parte alta dell'atmosfera e ha una vita media di $\Delta t = 2.2 \cdot 10^{-6}$ s. Data la sua elevata velocità $v = 0.998c$, per valutarne la possibile distanza Δx (vista dalla Terra) che può percorrere prima di decadere, si deve utilizzare la correzione relativistica. Si ha così che:

$$\begin{array}{l} \text{Meccanica classica} \\ \Delta x = v \cdot \Delta t = 0.998c \cdot 2.2 \cdot 10^{-6} \approx 660\text{m} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Relatività ristretta} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0.998c)^2}{c^2}}} = 15 \\ \Delta t' = \gamma \cdot \Delta t = 15 \cdot 2.2 \cdot 10^{-6} \approx 35\mu\text{s} \\ \Delta x = \gamma \cdot \Delta x' = v \cdot \Delta t' = 0.998c \cdot 35 \cdot 10^{-6} \approx 10\text{km} \end{array}$$

Da notare che con Δx abbiamo calcolato la distanza che il muone può percorrere prima di decadere vista da un osservatore fermo (sulla Terra), mentre con $\Delta x'$ abbiamo calcolato la distanza che il muone può percorrere prima di decadere vista da un osservatore in moto insieme al muone.

In altre parole, al muone sembrerà di aver percorso una distanza decisamente minore rispetto a quella calcolata dall'osservatore fermo (contrazione delle lunghezze). In maniera duale, al muone sembrerà

di essere in vita per un tempo decisamente maggiore rispetto a quello calcolato dall'osservatore fermo (dilatazione dei tempi).

In definitiva, si ha dunque che se per il muone la distanza che percorre è solo di 660m, dalla terra il muone percorre una distanza di circa 10km.

9.7 L'invarianza delle lunghezze perpendicolari al moto relativo

Si sottolinea ora che la contrazione delle lunghezze avviene solo per le lunghezze parallele al moto relativo, ovvero lungo la direzione del moto. Per le lunghezze perpendicolari al moto, invece, non vi è alcuna contrazione.

9.7.1 Esempio del treno e del tunnel

Un esempio classico che prova logicamente l'invarianza delle lunghezze perpendicolari al moto relativo è quello del treno che attraversa un tunnel. È infatti un assurdo pensare che il passaggio o meno del treno all'ingresso della galleria dipenda dalla velocità del treno stesso.

9.8 Le trasformazioni di Lorentz

Sono delle equazioni per ottenere le coordinate spazio-temporali di un punto materiale in un S.R.I. (S'), partendo dalle coordinate di un altro S.R.I. (S). Le trasformazioni di Galileo vengono qui sostituite da quelle di Lorentz:

Galileo	Lorentz (dirette e inverse)
$x' = x - vt$	$x' = \gamma \cdot (x - vt)$
$y' = y$	$y' = y$
$z' = z$	$z' = z$
$t' = t$	$t' = \gamma \cdot \left(t - \frac{\beta}{c} x \right)$
	$x = \gamma \cdot (x' + vt')$
	$t = \gamma \cdot \left(t' + \frac{\beta}{c} x' \right)$

Dove ogni grandezza avente l'apice è relativa al S.R.I. S' , mentre quelle senza apice sono relative al S.R.I. S .

9.9 L'intervallo invariante

Se consideriamo uno spostamento nello spazio, esso può essere rappresentato in infiniti piani cartesiani, con stessa origine O .

Per entrambe le rappresentazioni avremo $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta X^2 + \Delta Y^2$, e quindi si può vedere che nonostante il S.R. considerato, l'intervallo Δs^2 è una misura invariante.

In fisica, consideriamo la quaterna ordinata (x, y, z, t) con il nome di "Evento". Avendo quindi due eventi E_1 e E_2 in un dato S.R., possiamo calcolare l'intervallo invariante come:

$$\Delta \sigma^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta s^2$$

Dove Δs^2 è la distanza spaziale tra i due eventi e $\Delta \sigma^2$ è l'intervallo invariante tra i due eventi.

In base al segno di $\Delta \sigma^2$, possiamo classificare gli eventi in:

- $\Delta \sigma^2 > 0$: Eventi casualmente connessi. Se E_1 lancia un segnale, esso riesce a raggiungere E_2 . Si può quindi dire che esiste un S.R. dove $\Delta s = 0$ e $\Delta t = \frac{\sqrt{\Delta s^2}}{c}$.
- $\Delta \sigma^2 < 0$: Eventi casualmente non connessi. Un segnale lanciato da E_1 non può raggiungere E_2 . Si può quindi dire che esiste un S.R. dove $\Delta s = \sqrt{-\Delta \sigma^2}$.
- $\Delta \sigma^2 = 0$: Solo un segnale luminoso a velocità c può collegare i due eventi, ovvero raggiungere E_2 partendo da E_1 .

9.10 Lo spazio-tempo di Minkowski

Ad ogni Evento, oltre che definirlo tramite le coordinate spaziali (x, y, z) , va definito da un quadrivettore spazio-temporale (x, y, z, t) , dove quindi alla definizione 3D se ne aggiunge una, diventando una definizione spazio-tempo in 4D. Gli eventi sono definiti da $\Delta\sigma$.

Il diagramma di Minkowski è la rappresentazione grafica di eventi, e gli assi sono definiti come $ct(x)$ o $ct(y)$ o $ct(z)$, mentre l'evento E è rappresentato come punto $E(x_0, ct_0)$.

Se per esempio consideriamo un raggio di luce che parte in $x_0 = -3m$ al tempo $t_0 = 1s$ e viaggia a $v = c$, allora rispetto a un uomo fermo in $x_0 = 0m$, avremo:

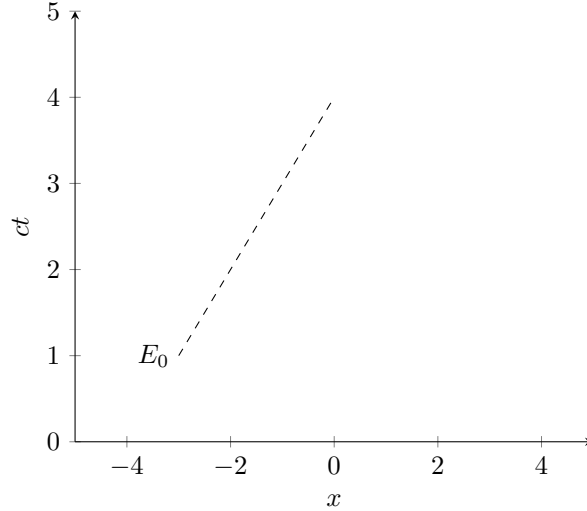


Figura 4: Diagramma di Minkowski applicato al caso 1D

Grazie al diagramma di Minkowski è quindi possibile calcolare dove si troverà il fascio dopo un certo tempo Δt o un certo spazio Δx .

9.11 La composizione relativistica delle velocità

Così come per le coordinate, anche per le velocità Galileo non è più corretto. Per calcolare u' , ovvero la velocità di E ma rispetto a S' , si ha che:

Galileo

$$u' = u - v$$

Lorentz (dirette e inverse)

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

9.11.1 Esempio dell'astronave e della pallottola

Per comprendere meglio il concetto di composizione relativistica delle velocità, consideriamo il seguente esempio. Supponiamo di avere un'astronave che viaggia a u e che spara una pallottola a velocità v , entrambe misurate da un osservatore fermo sulla Terra. Per calcolare la velocità della pallottola rispetto all'astronave, avremo che $v' = \frac{v-u}{1-\frac{uv}{c^2}}$ e non più $v' = v - u$ come in meccanica classica.

9.12 L'equivalenza tra massa ed energia

Con relatività si associa energia alla massa, infatti $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$. La massa e l'energia prese singolarmente non sono più invarianti, ma ora vale il principio della conservazione massa-energia.

La massa a riposo m_0 , è la massa caratteristica del corpo quando $v = 0$, mentre la massa relativistica m è la massa del corpo in movimento.

Si ha quindi che $E_0 = m_0 \cdot c^2$ e $E = m \cdot c^2$, con $m = \gamma \cdot m_0$.

9.13 La dinamica relativistica

Consideriamo ora corpi in movimento a velocità v , possiamo affermare che l'energia totale è $E = \gamma m_0 c^2$, che $K = (\gamma - 1)m_0 c^2$, che $p_r = \gamma m_0 v$ e dunque si capisce che in un sistema isolato, a conservarsi è il quadrivettore energia-quantità di moto, in quanto:

$$m_0^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = \text{invariante}$$

Dal grafico di $E(v)$, risulta chiaro che è impossibile portare un corpo con $m_0 > 0$ alla velocità della luce c , in quanto servirebbe energia infinita.

L'unica cosa che viaggia alla velocità della luce c è la luce stessa, ovvero i fotoni, che infatti non hanno massa $\rightarrow E = \gamma m_0 c^2 = \gamma \cdot 0 \cdot c^2 = 0$.

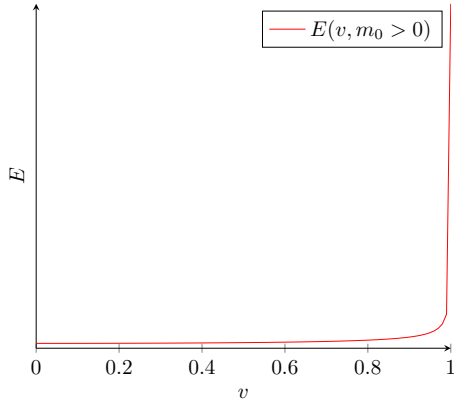


Figura 5: Grafico di E in funzione di v per $m_0 > 0$

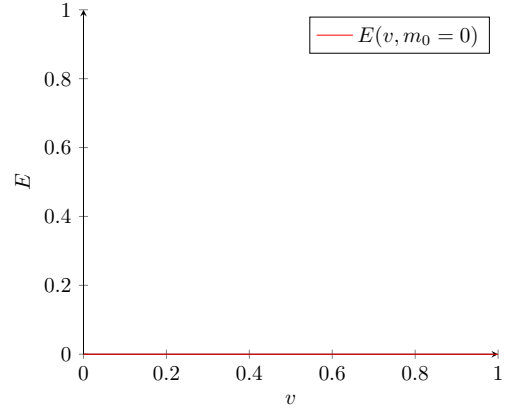


Figura 6: Grafico di E in funzione di v per $m_0 = 0$