POLITECNICO
MILANO 1863

Problema difficile

Tommaso Bocchietti

08/05/2023

Indice

1 Problema

Dati i seguenti tre problemi, risolverli e valutare la soluzione complessiva come sommatoria delle singole soluzioni:

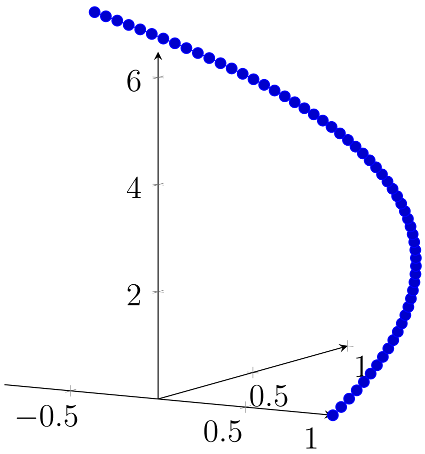
- Lunghezza della curva di equazione $x = \cos(t), y = \sin(t), z = \sqrt{6}t, 0 \leq t \leq \sqrt{7}$
- $|\vec{a} \times \vec{b}|$, con $\vec{a} = (1, \frac{1}{3}, 3 + 6\sqrt{\frac{2}{5}})$ e $\vec{b} = (3, 1, 9)$
- $\lim_{x \to 5\sqrt{3}} \frac{d}{dx} \ln(x^{\frac{4\sqrt{3}}{73}})$

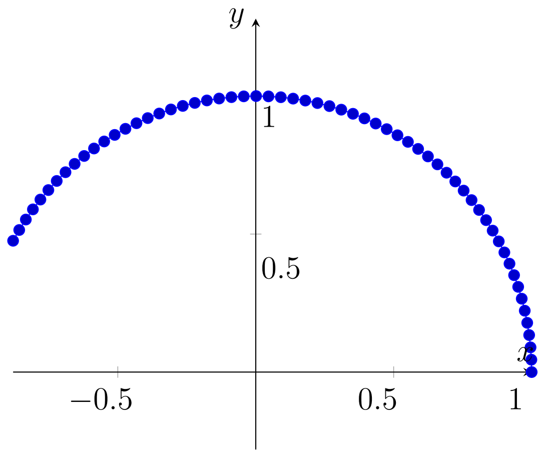
2 Soluzione

Si procede ora alla risoluzione dei tre problemi proposti.

2.1 Problema 1

Possiamo inizialmente visualizzare la curva di nostro interesse in un piano cartesiano tridimensionale:





Si procede ora al calcolo della lunghezza della curva come:

$$\int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \tag{1}$$

Si procede ora al calcolo delle derivate:

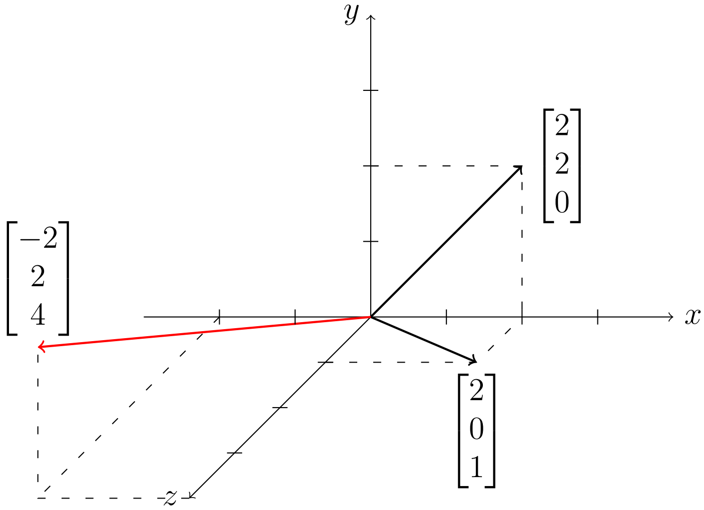
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sin(t) \\ \frac{dy}{dt} &= \cos(t) \\ \frac{dz}{dt} &= \sqrt{6} \end{aligned} \tag{2}$$

Si procede ora al calcolo della lunghezza della curva:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (\sqrt{6})^2} dt = \\ &= \int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{1+6} dt = \sqrt{7} \int_0^{\sqrt{7}} dt = \sqrt{7}\sqrt{7} = 7 \end{aligned} \tag{3}$$

2.2 Problema 2

Come prima, è possibile visualizzare i due vettori e il vettore prodotto in un piano cartesiano tridimensionale. Si sottolinea come la figura seguente non rappresenti la soluzione del problema, ma sia solo un aiuto visivo per la comprensione del problema.



Si procede ora al calcolo del prodotto vettoriale tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \frac{1}{3} & 3+6\sqrt{\frac{2}{5}} \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 3+6\sqrt{\frac{2}{5}} \\ 1 & 9 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 3+6\sqrt{\frac{2}{5}} \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \tag{4}$$

Si procede ora al calcolo dei determinanti:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 3+6\sqrt{\frac{2}{5}} \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}*9-(3+6\sqrt{\frac{2}{5}}) = -6\sqrt{\frac{2}{5}}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 3+6\sqrt{\frac{2}{5}} \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 1*9-3(3+6\sqrt{\frac{2}{5}}) = -18\sqrt{\frac{2}{5}} \tag{5}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1*1-\frac{1}{3}*3 = 1-1 = 0$$

Si procede ora al calcolo del prodotto vettoriale:

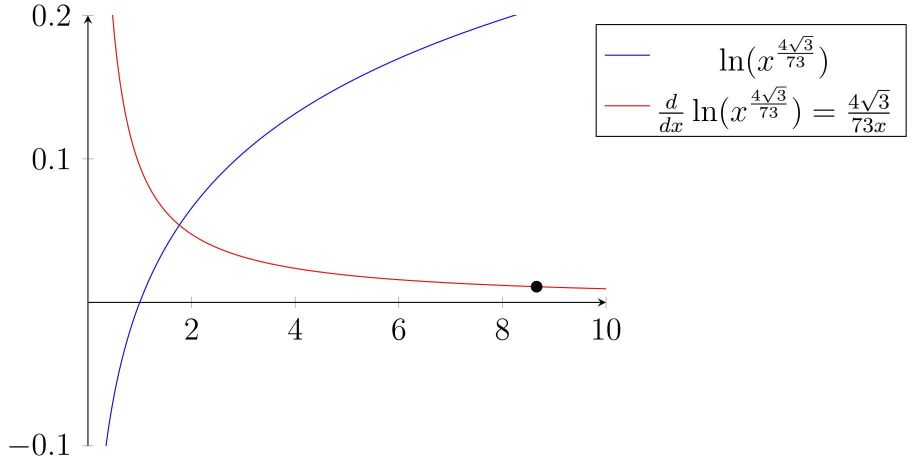
$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{i}(-6\sqrt{\frac{2}{5}}) - \vec{j}(-18\sqrt{\frac{2}{5}}) + \vec{k}*0 = (-6\sqrt{\frac{2}{5}})\vec{i} + (18\sqrt{\frac{2}{5}})\vec{j} \tag{6}$$

Si procede ora al calcolo del modulo del prodotto vettoriale:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{(-6\sqrt{\frac{2}{5}})^2+(18\sqrt{\frac{2}{5}})^2} = \sqrt{36\frac{2}{5}+324\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{720}{5}} = \sqrt{144} = 12 \tag{7}$$

2.3 Problema 3

Osserviamo graficamente il problema dato e notiamo si tratta di un limite elementare non essendoci punti di discontinuità:



Si procede ora al calcolo del limite:

$$\lim_{x\to 5\sqrt{3}} \frac{d}{dx}\ln(x^{\frac{4\sqrt{3}}{73}}) \tag{8}$$

Si procede ora al calcolo della derivata:

$$\frac{d}{dx}\ln(x^{\frac{4\sqrt{3}}{73}}) = \frac{4\sqrt{3}}{73}\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{4\sqrt{3}}{73}\frac{1}{x} \tag{9}$$

Si procede ora al calcolo del limite:

$$\lim_{x\to 5\sqrt{3}} \frac{4\sqrt{3}}{73}\frac{1}{x} = \frac{4\sqrt{3}}{73}\frac{1}{5\sqrt{3}} = \frac{4}{365} \tag{10}$$

3 Risultato

Il risultato dei tre problemi proposti è:

- $\int_\gamma f(t)dt = 7$
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = 12$
- $\lim_{x\to 5\sqrt{3}} \frac{d}{dx}\ln(x^{\frac{4\sqrt{3}}{73}}) = \frac{4}{365}$

Supponendo poi una unità di misura del risultato pari a $[anni]$, si ha:

$$7 + 12 + \frac{4}{365} = 19 + \frac{4}{365}[anni] \tag{11}$$

La soluzione del problema rispecchia così l'età di una delle due risolutrici...

Auguri di Buon Compleanno Alessia!