Quaderno delle regole - Matematica

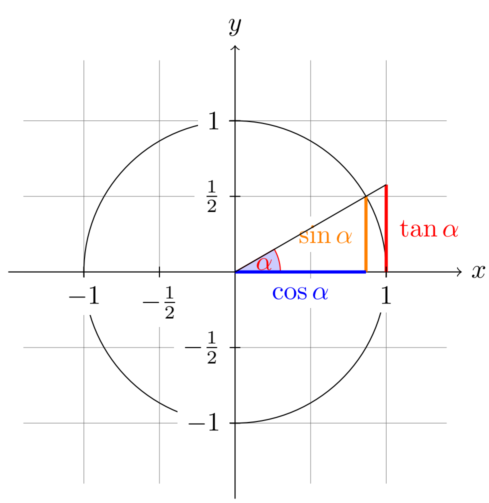
Tommaso Bocchietti

6 aprile 2023

Indice

1 Goniometria

Un angolo può essere misurato in gradi o radianti, infatti si ha $\alpha^\circ = \alpha[rad]\frac{180^\circ}{\pi}$. Considerando una circonferenza goniometrica (raggio $r = 1$), un angolo orientato α, dal prolungamento del lato dell'angolo α, otteniamo l'intersezione B, dove:

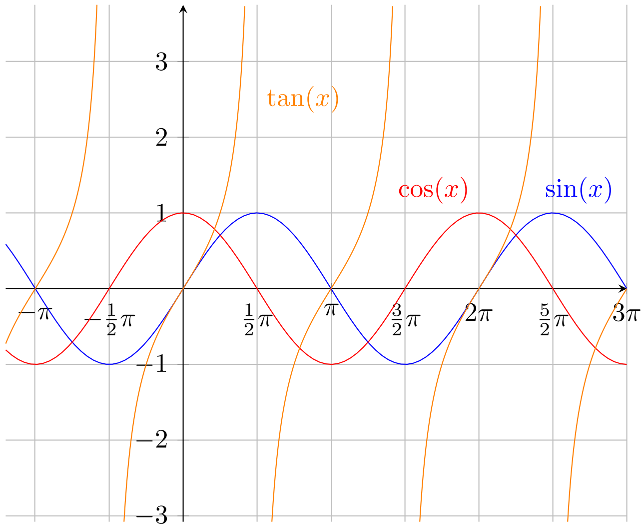


$y_B = \sin(\alpha) \qquad x_B = \cos(\alpha) \ \frac{y_B}{x_B} = \tan(\alpha)$

Al variare dell'angolo α, le funzioni vengono così rappresentate:

Tutte queste funzioni sono periodiche, per cui $f(x) = f(x + T)$, dove T è il periodo della funzione.

Angoli noti:



Angolo °	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
0	0	1	0
30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	1	0	∞

Esistono poi le funzioni inverse, che permettono di trovare l'angolo α a partire da un dato valore della funzione (es. $\sin(30°) = \frac{1}{2} \to 30° = \arcsin(\frac{1}{2})$).

Il periodo T di una funzione si ricava come: $f(x) = \sin(\omega x) \to T = \frac{2\pi}{\omega}$

Relazioni fondamentali della goniometria: $\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 0$ e $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} =$ tan(
alpha)

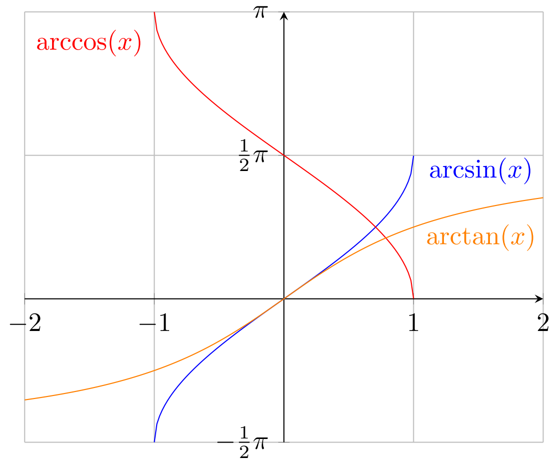
1.1 Funzioni goniometriche

Addizione

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

Sottrazione

- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$



- $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

Duplicazione

- $\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
- $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$
- $\tan(2\alpha)=2\tan(\alpha)\frac{1-\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$

Bisezione

- $\sin(\frac{\alpha}{2})=\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$
- $\cos(\frac{\alpha}{2})=\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$
- $\tan(\frac{\alpha}{2})=\frac{\sqrt{1-\cos(\alpha)}}{\sqrt{1+\cos(\alpha)}}=\frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}=\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$

Parametriche

- $\sin(\alpha)=\frac{2\tan(\frac{\alpha}{2})}{1+\tan^2(\frac{\alpha}{2})}$
- $\cos(\alpha)=\frac{1-\tan^2(\frac{\alpha}{2})}{1+\tan^2(\frac{\alpha}{2})}$

Esistono anche

- $\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$
- $\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$

Ogni formula contenente la tangente ha le sue condizioni di esistenza. In generale essendo $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ si ha che $\tan(\alpha)$ esiste se $\cos(\alpha) \neq 0$, ovvero se $\alpha \neq K\pi$ con $K \in Z$.