N 1

размер выборки $-n$

1) $N(a, \sigma^2)$ ОМП:

- $\theta(a, \sigma^2)$

$$L_x(\theta) = \prod_{i=1}^{n} P_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(\sigma^2 2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-a)^2}$$

$$\ell_x(\theta) = \ln L_x(\theta) = -\frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2$$

Для нахождения ОМП нужно максимизировать по a и σ^2

$$\frac{\partial \ell_x}{\partial a} = 0 \qquad \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(x_i-a)}_{\sum x_i - na} = 0 \Rightarrow \hat{a}_{\text{ОМП}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

$$\frac{\partial \ell_x}{\partial \sigma^2} = 0 \qquad -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2 = 0$$

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2 = 0$$

$$-\frac{n}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{1}{2\hat{\sigma}^4}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{a})^2}_{n\sigma^2} = 0 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2$$

- $\theta = \sigma^2$, a изв-но:

$$L_x(\theta) = \prod_{i=1}^{n} P_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(\sigma^2 2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-a)^2}$$

$$\ell_x(\theta) = \ln L_x(\theta) = -\frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2$$

$$\frac{\partial \ell_x(\theta)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2 = 0 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2$$

- для a, если σ^2 изв-но:

$L_x(\theta)$, $\ell_x(\theta)$ посчитаны в прошлых пунктах.

$$\frac{\partial \ell_x(\theta)}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(x_i-a)}_{\sum x_i - na} = 0 \rightarrow a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

a.g:

$$i = \mathbb{E}_a\left(\frac{\partial \ell_x(a)}{\partial a}\right)^2 = -E_a \frac{\partial^2 \ell_x(a)}{\partial a^2} = -E_a\left(-\frac{n}{\sigma^2}\right) = \frac{n}{\sigma^2}$$

$\hookrightarrow i^{-1} = \frac{\sigma^2}{n}$

2) Pois(θ). асимпт. дисп:

$$L_x = \prod_{i=1}^{n} P_\theta(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}$$

$$\frac{\partial \ell_x}{\partial \lambda} = \frac{\partial \ln L_x}{\partial \lambda} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \ln\lambda - n\lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i!\right)'_\lambda = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i - n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\ln(\lambda^{x_i} e^{-\lambda}) - \ln(x_i!)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\lambda^{x_i} + \ln e^{-\lambda} - \ln x_i!\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ln\lambda - n\lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i!$$

$$i = -\mathbb{E}_\lambda \frac{\partial^2 \ell_x(\lambda)}{\partial \lambda^2} = \left(\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right)'_\lambda = -E_\lambda\left(-\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = E_x\left(\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = n\cdot\frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda}$$

$\Rightarrow i^{-1} = \frac{\lambda}{n}$

№2 • дискрет. распр в-тей, кот. описывает вер-ть того, что СВ примет зн-е одной из к-категорий

$L_x(\theta) = \prod_{j=1}^{k} P_\theta(x_j = j) = \prod_{j=1}^{k} \theta_x.$ $\theta_j = \frac{n_j}{n}$ n_j – сколько элем-в в j-выборке, n – всего

$$\ell_x(\theta) = \ln L_x(\theta) = \sum_{j=1}^{k} \ln\theta_x.$$

Метод множит-й Лагранжа:

$\sum_{j=1}^{k} \theta_j = 1$ $\quad \theta_j \geq 0$

$\hookrightarrow \ell_x(\theta) = \sum_{j=1}^{k} \ln\theta_j + \lambda\left(1 - \sum_{j=1}^{k}\theta_j\right)$

$$\frac{\partial \ell_x}{\partial \theta} = \frac{n_j}{\theta_j} - \lambda = 0$$

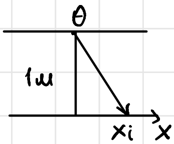
$\hat{\theta}_j = \frac{n_j}{\lambda} \rightarrow \lambda = \sum_{j=1}^{k} n_j = n$ и $\hat{\theta}_j = \frac{n_j}{n}$ $\qquad j \in [1, k]$

Сост-на, т.к. при $n \to \infty$

$$E(\hat{\theta}_j) = E\left(\frac{n_j}{n}\right) = \frac{1}{n}E(n_j) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{k} n_j \cdot \underset{\theta_j}{\underbrace{P_\theta(x_j = n_j)}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j\theta_j = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\sum_{j=1}^{k}\theta_j = \theta \Rightarrow \text{ЗБЧ выпол-ся}$$

$\Rightarrow$ сост-на

№3



$$\Rightarrow P(x) = \frac{1}{\pi(1+(x_i-\theta)^2)}$$

$$L_x(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\pi(1+(x_i-\theta)^2)} = \frac{1}{\pi^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(x_i-\theta)^2}$$

↳ Одношаговые оценки:

- $n=1$

$$L_{x_1}(\theta) = \frac{1}{\pi}\ \frac{1}{1+(x_1-\theta)^2}$$

$$l_{x_1}(\theta) = \ln\frac{1}{\pi}\ \frac{1}{1+(x_1-\theta)^2} = -\left(\ln\frac{1}{\pi} + \ln\left(1+(x_1-\theta)^2\right)\right)$$

$$\frac{dl_{x_1}}{d\theta} = -\left(\frac{1}{\pi} + 1 + (x_1-\theta)^2\right)'_\theta = \frac{(x_1-\theta)}{1+(x_1-\theta)^2} = 0 \Rightarrow 2(x_1-\hat\theta)=0$$

$$\hat\theta = x_1$$

- $n=2$

$$L_{x_{1,2}}(\theta) = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{1+(x_1-\theta)^2}\cdot\frac{1}{1+(x_2-\theta)^2}$$

$$l_{x_1,x_2} = \ln\left(\frac{1}{\pi^2}\ \frac{1}{1+(x_1-\theta)^2}\cdot\frac{1}{1+(x_2-\theta)^2}\right) = -\left(\ln\frac{1}{\pi^2} + \ln(1+(x_1-\theta)^2) + \ln(1+(x_2-\theta)^2)\right)$$

$$\frac{dl_{x_{1,2}}}{d\theta} = -\left(\frac{2(x_1-\theta)}{1+(x_1-\theta)^2} + \frac{2(x_2-\theta)}{1+(x_2-\theta)^2}\right) = 0$$

↳ $\hat\theta = \dfrac{x_1+x_2}{2}$

- $\hat\mu$ - ано $\quad \hat\theta_0 = \hat\mu$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow \hat\theta_{k+1} = \hat\theta_k - \left(l''_x(\theta_k)\right)^{-1} l'_x(\theta_k))$$

↑ для $\frac{dl}{dx}$ - f

$$L_x(\mu) = \frac{1}{\pi^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(x_i-\mu)^2}$$

$$l_x(\mu) = \sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{1}{\pi}\ \frac{1}{1+(x_i-\mu)^2}\right) = -\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\pi + \ln(1+(x_i-\mu)^2)\right)$$

$$\frac{dl_x}{d\mu} = \left(-\sum_{i=1}^{n}\ln(1+(x_i-\mu)^2)\right)'_\mu = -\sum_{i=1}^{n}\frac{2x_i-2\mu}{1+(x_i-\mu)^2}$$

$x_i^2-2x_i\mu+\mu^2$

$$\frac{d^2l_x}{d\mu^2} = \left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{2x_i-2\mu}{1+(x_i-\mu)^2}\right)'_\mu = -\sum_{i=1}^{n} 2\,\frac{-(1+(x_i-\mu)^2) + (x_i-\mu)\cdot(2x_i-2\mu)}{(1+(x_i-\mu)^2)^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{2(1-(x_i-\mu)^2)}{(1+(x_i-\mu)^2)^2}$$

$$-1\cdot(1+(x_i-\mu)^2) - (x_i-\mu)(2x_i-2\mu) = -1-(x_i-\mu)^2 - 2(x_i-\mu)^2 = -(1-(x_i-\mu)^2)$$

$\hat{\theta}_1 = \hat{\mu} -$

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\mu} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i - \hat{\mu}}{1 + (x_i - \hat{\mu})^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1 - (x_i - \hat{\mu})^2}{(1 + (x_i - \hat{\mu})^2)^2}}$$

Изначально эту теорему мешает применить то, функция правдоп-я должна быть дифф-й по параметру. Но аналитически продифф. не можем.

Исп. одношаговые оценки и Th. с лекции (про $\hat{\theta}_0$-ано), смогли решить эту проб-лему.

В качестве $\hat{\theta}_0$ взяли выбороч. медиану