习题1.1 证明总结感知机收敛算法的式(1.19)至式(1.22)是与(1.5)和(1.6)一致的.

证明: ① 根据(1.19)式和(1.20)式有

$$y(n)=\begin{cases}+1 & w^T(n)x(n)>0\\ -1 & w^T(n)x(n)<0\end{cases}$$

② 根据1.21式,有.

$$\therefore d(n)=\begin{cases}+1 & 若x(n)属于类\varphi_1\\ -1 & 若x(n)属于类\varphi_2\end{cases}$$

③ 则1.22式即为

当$x(n)$属于φ_1类, $w^T(n)x(n)>0$时

$$w(n+1)=w(n)+\eta[d(n)-y(n)]x(n)=w(n)+\eta[1-1]x(n)=w(n)$$

当$x(n)$属于φ_1类; $w^T(n)x(n)<0$时.

$$w(n+1)=w(n)+\eta[d(n)-y(n)]x(n)=w(n)+\eta[1+1]x(n)=w(n)+\eta x(n)$$

当$x(n)$属于φ_2类, $w^T(n)x(n)>0$时.

$$w(n+1)=w(n)+\eta[d(n)-y(n)]x(n)=w(n)+\eta[-1-1]x(n)=w(n)-\eta x(n).$$

当$x(n)$属于φ_2类, $w^T(n)x(n)<0$时.

$$w(n+1)=w(n)+\eta[d(n)-y(n)]x(n)=w(n)+\eta[-1+1]x(n)=w(n)$$

④ 综上.

当$x(n)$属于φ_1类 $w^T(n)x(n)>0$, 或$x(n)$属于φ_2类, $w^T(n)x(n)<0$时. $w(n+1)=w(n)$

当$x(n)$属于φ_1类 $w^T(n)x(n)<0$ $w(n+1)=w(n)+\eta x(n)$

当$x(n)$属于φ_2类 $w^T(n)x(n)>0$ $w(n+1)=w(n)-\eta x(n)$

故式(1.19)至式(1.22)与(1.5)和(1.6)一致.

习题1.2 假如图1.1中的感知器信号流图的硬限幅器被如下的sigmoid非线性函数所替代

$$\varphi(v)=\tanh(\frac{v}{2}), \quad v为诱导局部域.$$

感知器的分类决策定义如下:

如果其输出$y>\xi$则观察向量x属于类φ_1,这里ξ是阈值。反之,x属于φ_2.

证明如此构造的决策边界是一个超平面。

证明: v是诱导局部域. 即 $v=\sum_{i=1}^{m}x_iw_i+b$.

超平面定义为:
$$\sum_{i=1}^{m}w_ix_i+b=0$$

$$y=\varphi(v)=\tanh(\frac{v}{2})=\tanh(\sum_{i=1}^{m}\frac{w_i}{2}x_i+\frac{b_i}{2})=\begin{cases}\varphi_1, & y>\xi\\ \varphi_2, & y<\xi\end{cases}$$

故决策边界为: $y=\xi$. 即

$$\tanh(\sum_{i=1}^{m}\frac{w_i}{2}x_i+\frac{b_i}{2})=\xi$$

即
$$\frac{e^{\frac{v}{2}}-e^{-\frac{v}{2}}}{e^{\frac{v}{2}}+e^{-\frac{v}{2}}}=\xi \Rightarrow \frac{(1-\xi)e^{\frac{v}{2}}}{(1+\xi)e^{-\frac{v}{2}}}=1$$

$$\therefore 2\cdot\frac{v}{2}=\log\frac{1+\xi}{1-\xi}$$

$$\Rightarrow v=\log\frac{1+\xi}{1-\xi}$$

即 $\sum_{i=1}^{m}w_ix_i+b=\log\frac{1+\xi}{1-\xi}$. 令 $b^*=b-\log\frac{1+\xi}{1-\xi}$

即 $\sum_{i=1}^{m}w_ix_i+b^*=0$. $\therefore$ 构造的决策边界是超平面.

习题1.3. 感知器可以用来执行很多逻辑函数，说明它对二进制逻辑函数与(AND)、或(OR)和非(COMPLEMENT)的实现过程。

感知器的一个基本局限是不能执行异或(EXCLUSIVE OR)函数，解释造成这个局限的原因。

证明：与(AND)的逻辑表

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$f(x)=w_1x_1+w_2x_2+b$$

即 $\begin{cases} w_2+b<0 \\ w_1+b<0 \\ w_1+w_2+b>0 \\ b<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1+w_2+b>0 \\ w_1+w_2+2b<0 \\ b<0 \end{cases}$

故 $-b<w_1+w_2<-2b$

令 $b=-1$，$w_1=0.8$，$w_2=0.5$ 时，感知器可以实现AND.

或(OR)的逻辑表 $y=f(x)=w_1x_1+w_2x_2+b$.

x_1	x_2	y
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

即 $\begin{cases} b<0 \\ w_1+b>0 \\ w_2+b>0 \\ w_1+w_2+b>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b<0 \\ w_1+w_2+2b>0 \\ w_1+w_2+b>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b<0 \\ w_1+w_2>-2b \end{cases}$

令 $b=-1$，$w_1=1.8$，$w_2=1.1$ 时，感知器可以实现OR

非(COMPLEMENT)的逻辑表 $y=f(x)=w_1x_1+b$.

x_1	y
0	1
1	0

即 $\begin{cases} b>0 \\ w_1+b<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b>0 \\ w_1<-b \end{cases}$

则令 $b=2$，$w_1=-3$ 时，感知器可以实现非.

异或的逻辑表. $y=f(x)=w_1x_1+w_2x_2+b$.

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

即 $\begin{cases} b<0 \\ w_2+b>0 \\ w_1+b>0 \\ w_1+w_2+b<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b<0 \\ w_1+w_2>-2b \\ w_1+w_2<-b \end{cases}$

所以 $-2b<w_1+w_2<-b$

又 $\because -b<-2b$.

故此方程组无解.

$\therefore$ 感知器不能实现异或.

习题1.4. 考虑两个一维高斯分布类 C_1 和 C_2，它们方差都为1，它们均值为

$u_1=-10$

$u_2=+10$.

这两个类本质上是线性可分的，设计一个分类器分离这两个类。

解：$\because$ 两个类本质上线性可分，故可使用感知器进行分离. 设

$$y=f(x)=w_1x_1+w_2x_2+b \Rightarrow \begin{cases} >0 & 类C_1 \\ <0 & 类C_2 \end{cases}$$

故 $\begin{cases} w_1\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+10)^2}{2}}+b>0 \\ w_2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{2}}+b<0 \end{cases} \Rightarrow w_2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{2}}<w_1\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+10)^2}{2}}$

$\because \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-10)^2}{2}}>0$ 故 $w_2<w_1\cdot e^{-\frac{(x+10)^2}{2}+\frac{(x-10)^2}{2}}=w_1\cdot e^{-20x}$

故该感知器为 $\begin{cases} w_1 \\ w_2<w_1e^{-20x} \\ b>-w_1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+10)^2}{2}} \end{cases}$

习题1.5. 式(1.37)和式(1.38)定义贝叶斯分类器在高斯环境下的权值向量和偏置. 当协方差矩阵C由$C=\sigma^2 I$定义时, 求此分类器的构式. 这里σ^2是常数, I是单位矩阵.

解:
$$y = w^T x + b$$
$$w = C^{-1}(\mu_1-\mu_2) = \sigma^{-2} I(\mu_1-\mu_2)$$
$$b = \frac{1}{2}(\mu_2^T C^{-1}\mu_2 - \mu_1^T C^{-1}\mu_1) = \frac{1}{2}(\mu_2^T\mu_2 - \mu_1^T\mu_1)$$