Eberhard Karls Universität Tübingen

Informatik I Vorlesung

Wintersemester 2016/2017

Mitschrieb von
Julian Wolff

Aktueller Stand 31. Januar 2017

Inhaltsverzeichnis

Scheme: Ausdrücke, Auswertung und Abstraktion

REPL

Definition	DrRacket
Interaktion	REPL

Die Anwendung von Funktionen wird in Scheme ausschließlich in Präfixnotation durchgeführt:

Mathematik	Scheme
44-2	(-44 2)
f(x,y)	(f x y)
$\sqrt{81}$	(sqrt 81)
$\lfloor x \rfloor$	(floor x)
9^2	(expt 9 2)
3!	(! 3)

Allgemein: ⟨Funktion⟩⟨ argument⟩)

(+ 402) und (odd? 42) sind Beispiele für die Ausdrücke, die bei Auswertung einen Wert liefern. (Notation $\rightsquigarrow$) heißt Auswertung/Evaluation/Reduktion.

(+ 40 2) $\underset{Eval}{\rightsquigarrow}$ 42

(add? 42) $\underset{Eval}{\rightsquigarrow}$ #f

Interaktionsfenster:

$\underbrace{\text{Read} \rightsquigarrow \text{Eval} \rightsquigarrow \text{Print}}_{\text{Loop}}$ REPL

Literale

Literale stehen für einen konstanten Wert (auch: Konstante) und sind nicht weiter reduzierbar.

Literal		Signatur
#t #f	(true, false, Wahrheitswerte)	boolean
„ac“ „x“ „ “	(Zeichenketten)	string
0 1904 -42 007	(ganze Zahlen)	integer
0.42 3.1415 -273.15	(Fließkommazehlen)	real
1/2 3/4 -1/10	(rationale Zahlen)	rational
	(Bilder)	image

Zusammengesetzte Ausdrücke

Auswertung zusammengesetzte Ausdrücke (composite expression) in mehreren Schritten (Steps), "von innen nach außen", bis keine weitere Reduktion möglich ist:
(+(+20 20)(+ 1 1)) $\rightsquigarrow$ (+ 40 (+ 1 1)) $\rightsquigarrow$ (+ 40 2) $\rightsquigarrow$ 42

Beispiel:
$0.7 + (\frac{1}{2}/0.25) - (0.6/0.3) = 0.7$

⚠ Achtung: Scheme rundet bei Arithmetik mit Fließkommazahlen (interne Darstellung nicht präzise). Die Arithmetik mit rationalen Zahlen ist exakt.

Identifier

Ein Wert kann an einen Namen (identifier) gebunden werden, durch(define⟨id⟩⟨expression⟩)
Es erlaubt konsistente Wiederverwendung und dient der Selbstdokumentation von Programmen.

⚠ Achtung: Dies ist eine Spezialform und kein Ausdruck. Insbesondere besitzt diese Spezialform keinen Wert, sondern einen Effekt: der Name ⟨id⟩ wird durch den Wert von ⟨expression⟩ gebunden. Namen können in Scheme fast beliebig gewählt werden, solange

- die Zeichen ()[]{}”,′; #\ | nicht vorkommen
- der name nicht einem numerischen Literal gleicht
- keinen Whitespaße (Leerzeichen, Tabulatoren, Neuwlines) enthalten sind

Beispiel: Euro → US-$

⚠ Achtung: Groß-/Kleinschreibung ist in Identifiern nicht relevant.

Lambda-Abstraktion

Eine Lambda-Abstraktion (auch: Funktion, Prozedur) erlaubt die Formulierung von Ausdrücken, in denen mittels Parametern von konkreten Werten abstrahiert wird:
(lambda (⟨p_1⟩⟨p_2⟩...)⟨expr⟩)
expr ist der Rumpf und enthält Vorkommen der Paramenter ⟨p_i⟩.

(lambda...) ist eine Spezialform. Der Wert der Lambda-Abstraktion #⟨procedure⟩
Die Anwendung (auch: Applikation) der Lambda-Abstraktion führt zur Ersetzung aller Vorkommen der Parameter im Rumpf durch die angegebenen konkreten Argumente:

(lambda (days)(*days(*155 minutes-in-a-day)) 365)
$\overset{!}{\rightsquigarrow}$ (*365 (155 minutes-in-a-day))
$\rightsquigarrow$ ...
$\rightsquigarrow$ 81468000

Kommentare

In Scheme leitet ein Semikolon einen Kommentar ein, der bis zum Zeilenende reicht und von Racket bei der Auswertung ignoriert wird.
Prozeduren/Funktionen sollen im Programm eine ein- bis zweizeilige Kurzbeschreibung vorangestellt werden.

Signaturen

Eine Signatur prüft, ob ein Name ⟨id⟩ an einen Wert einer angegebenen Sorte gebunden wird. Signaturverletzungen werden protokolliert.
(: ⟨ id ⟩ ⟨signatur⟩)
Bereits eingebundene Signaturen sind:

- natural $\mathbb{N}$
- ingeger $\mathbb{Z}$
- rational $\mathbb{Q}$
- real $\mathbb{R}$
- number $\mathbb{C}$
- boolean
- string
- image

⚠ Der Doppelpunkt „ : “ ist eine Spezialform und hat daher keinen Wert, aber einen Effekt: Eine Signaturprüfung wird durchgeführt.

Prozedur-Signaturen

Prozedur-Signaturen spezifizieren Signaturen sowohl für die Parameter $\langle p_1 \rangle$, $\langle p_2 \rangle$, ... als auch für den Ergebniswert der Prozedur:

```
(:⟨id⟩ (⟨signatur-p1⟩ ⟨ signatur-p2⟩ ... → ⟨signatur-ergebnis⟩))
```

Prozedur-Signaturen werden bei jeder Anwendung der Funktion ⟨id⟩ auf Verletzung geprüft.

Testfälle

Testfälle dokumentieren das erwartende Ergebnis einer Prozedur für ausgewählte Argumente:

```
(check-expect ⟨e1⟩ \la$\text{e}_2$\ra)
```

Werte den Ausdruck $\langle e_1 \rangle$ aus und teste, ob der erhaltene Wert der Erwartung (=Wert des Ausdruck $\langle e_2 \rangle$) entspricht.
Einer Prozedurdefinition sollten Testfälle direkt vorangestellt werden.
„check-expect“ ist eine Spezialform und hat daher keinen Wert. Eine Testverletztung wird als Effekt protokolliert.

Erinnerung

Konstruktionsanleitung für Prozeduren:

- kurzbeschreibung (ein- bis zweizeiliger Kommentar mit Bezug auf PArameternamen und Ergebnis)
- Signatur (:⟨ name ⟩ (... →))
- Testfälle check-expect/ ceack-within
- Prozedurgerüst (define ⟨name⟩ (lambda ($\langle p_1 \rangle \langle p_2 \rangle$))
- Rumpf programmieren ⟨rumpf⟩)

Top-Down-Entwurf (Programmieren mit "Wunschdenken")

Beispiel: Sunset auf Tatooine (SW Episode IV)

Zeichne Szene zu Zeitpunkt t (t=0 ... 100)

(1) Himmel verfärbt sich von blau (t=0) zu rot (t=100)

(2) Sonne(n) versinkt (bei t=100 hinter Horizont)

(3) Luke starrt auf Horizont (bei jeden t)

Zeichne Szene von hinten nach vorne:

Abbildung 1: Frodo auf dem Weg nach Mord... äh ich meine natürlich Luke auf Tatooine

```
;Zeichne Tatooine Sunset zu Zeitpunkt t
(:tatooine (natural -> image))
(define tatooine
    (lambda (t)
        (overlay/pinhole (luke t)
                         (sun t )
                         (sky t ))))
```

Reduktionsregeln für Scheme ($\rightsquigarrow$)

Fallunterscheidung je nach Ausdruck:

- Literal l (1, #t, "Karotte", ...) $[eval_1]$
  l $\rightsquigarrow$ l (keine Reduktion möglich)
- Identifier ⟨id⟩ $[eval_{id}]$
  ⟨id⟩ $\rightsquigarrow$ Wert, an den ⟨id⟩ gebunden
- Lambda-Abstraktion $[eval_\lambda]$
  (lambda (...)...) $\rightsquigarrow$ (lanmbda (...)...)
- Applikation (f $e_1 e_2$...)
  - f, e_1, e_2, ... mittels $\rightsquigarrow$, erhalte f',e'_1, e'_2 ...
  -

Operation auf e'_1, e'_2... anwenden	Falls f primitive (eingebaute) Operation	[apply/prim]
Argumentwerte e'_1, e'_2, ... in den Rumpf einsetzen, den Rumpf mittels $\rightsquigarrow$ reduzieren	falls f' Lambda-Abstraktion	$[apply_\lambda]$

Wiederhole Anwendung von $\rightsquigarrow$ bis keine Reduktion mehr möglich ist.

<u>Beispiele:</u>

(+ 40 2)

$\underset{eval_{id}}{\rightsquigarrow}$ (#⟨procedure:+⟩ 40 2)

$eval_{lit} \cdot 2$

$\underset{applyprim}{\rightsquigarrow}$ 42

(sqr 9) $\underset{eval_{id}}{\rightsquigarrow}$ $(lambda(x)(*xx))$

$eval_{lit}$

$\underset{apply_\lambda}{\rightsquigarrow}$ (* 9 9)

$\underset{eval_{id}}{\rightsquigarrow}$ $(\#\langle procedure : *\rangle$ 9 9)

$eval_{lit*2}$

$\underset{apply_{prim}}{\rightsquigarrow}$ 81

Einschub: Lexikalische Bindung

Bezeichnen (lambda (x) (* x x)) und (lambda (r) (* r r)) die gleiche Funktion?
(... 9)$\overset{*}{\rightsquigarrow}$ 81
$\Rightarrow$ JA!
⚠ Das hat Einfluss auf das korrekte Einsetzten von Argumenten für Parameter ($s.apply_\lambda$).
Das bindende Vorkommen eines Identifiers $\langle x \rangle$ im Programmtext kann systematisch bestimmt werden: Suche strikt "von innen nach außen"bis zum ersten
(1) (lambda (x) ...)
(2) (define x ...)
Das ist das Prinzip der lexikalischen Bindung (⚠ Syntaxprüfung in DrRacket)

Übliche Notation in der Mathematik: Fallunterscheidung!

maximum $(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \text{ falls } x_1 \geq x_2 \\ x_2 \leftarrow \text{sonst} \end{pmatrix}$
Tests (auch Prädikate) sind Funktionen, die einen Wert der Signatur boolean liefern.
Typische Primitive in Tests:

```
(: = (number number -> boolean))
(: < (real real -> boolean))
(: string=? (string string -> boolean))
(: boolean=? (boolean boolean ->boolean))
(: zero? (number -> boolean))
```

Weiter: add?, even?, positive?, negative?, ...

Spezialform Fallunterscheidung (conditional)

(cond ($\langle t_1 \rangle \langle e_1 \rangle$)
($\langle t_2 \rangle \langle e_2 \rangle$)
...
($\langle t_n \rangle \langle e_n \rangle$)
(else $\langle e_{n+1} \rangle$)) <- optional
Führt die Tests in der Reihenfolge $\langle t_1 \rangle, \langle t_2 \rangle$, ... durch. Sobald $\langle t_i \rangle$ zu #t auswertet, werte Zweig $\langle e_i \rangle$ aus. $\langle e_i \rangle$ ist das Ergebnis der Fallunterscheidung. Wenn $\langle t_n \rangle$ #f liefert, dann liefere
$\begin{pmatrix} \text{Fehlermeldung "cond: alle Tests ergeben } \#f \text{ falls kein else- Zweig, sonst} \\ \langle_{n+1} \rangle \end{pmatrix}$
Die Signatur one-of lässt genau einen der n aufgezählten Werte zu:
(one-of $\langle e_1 \rangle \langle e_2 \rangle$ ... $\langle e_n \rangle$)
Reduktion von cond [$eval_{cond}$]

- (cond ($\langle t_1 \rangle$ $\langle e_1 \rangle$) ($\langle t_2 \rangle$ $\langle e_2 \rangle$) ...)

  (1) Reduziere $\langle t_1 \rangle$, erhalte $\langle t_1' \rangle$

  (2) $\langle e_1 \rangle$ falls $\langle t_1 \rangle = \#t$
  (cond ($\langle t_2 \rangle \langle e_2 \rangle$)...)

- (cond (else$\langle e_{n+1} \rangle$)) $\rightsquigarrow$ $\langle e_{n+1} \rangle$ ($\langle t_1 \rangle$, $\langle e_2 \rangle$, ... sind nicht ausgewertet
  sonst
  $\langle e_1 \rangle$ nicht ausgewertet)

- (cond) $\rightsquigarrow$ Fehler "cond alle Tests ergeben #f

Binäre Fallentscheidung:

$$\begin{array}{rcl} (\text{if } \langle t_1 \rangle\ \langle e_2 \rangle & & (\text{cond } (\ \langle t_1 \rangle \\ \langle e_3 \rangle) & \equiv & (\text{else } \langle e_2 \rangle)) \\ \langle e_1 \rangle)) & & \end{array}$$

Zusammengesetzte Daten

Daten können interessante intere Struktur (Komponenten) aufweisen.
Beispiel: Ein Star Wars Charakter:

name	"Luke Skywalker"
jedi?	#f
force	25

Beispiel:

```
;Ein Charakter (character) besteht aus
; - Name (name)
; - Jedi-Status (jedi?)
; - Staerke der Macht (force)
(define-record-procedures character
        make-charakter
        character?
        ( character-name
          character-jedi?
          character-force))

(make-character n j f) ⇝ ) ⟨)Tabelle⟩)) Konstruktion
(charcter-name ⟨Tabelle⟩) ⇝) n Selektor (komponenten auslesen)
(character-jedi? ⟨)Tabelle⟩)) ⇝) j
(character-force ⟨)Tabelle⟩)) ⇝) f
```

Records in Scheme

Record-Definition legst fest:

- Record-Signatur (Name)
- Konstruktor (bau aus komponenten einen Record)
- Prädikat (später)
- Liste von Selektoren (lesen je eine Komponente des Record)

(define-record-procedures $\langle t \rangle$ Signaturname
make-$\langle t \rangle$;Konstruktor
$\langle t \rangle$? ;Prädikat
($\langle t \rangle$-$\langle comp_1 \rangle$;Liste der Selektoren
... $\langle t \rangle$-$\langle comp_n \rangle$))
Liste der Selektoren legt Komponenten (Anzahl, Reihenfolge, Namen) fest. Signatur des Konstruktors/der Selektoren für Record-Signatur $\langle t \rangle$ mit n Komponenten $\langle comp_1 \rangle$ ... $\langle comp_n \rangle$:
(: make $\langle t \rangle$ ($\underbrace{\langle t \rangle}_{\text{n Komponentensignaturen}}$ ... $\langle t_n \rangle \rightarrow \langle t \rangle$))

(: $\langle t \rangle$-$\langle comp_1 \rangle$ ($\langle t \rangle \rightarrow \langle t_1 \rangle$))

$\forall$ string n, boolean j, natural f:
(character-name (make-character n j f)) $\rightsquigarrow$ n
(character-jedi? (make-character n j f)) $\rightsquigarrow$ j
(character-force (make-character n j f)) $\rightsquigarrow$ f

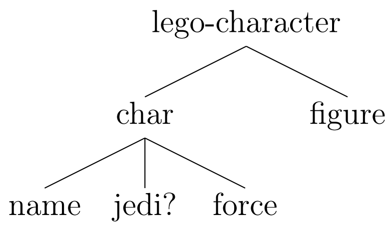
Aussagen üver die Interaktion von zwei (oder mehr) Funktionen: algebraische Eigenschaft.

Spezialform check-property

(check-property (for-all(($\langle id_1 \rangle\langle signatur_1 \rangle$) ... ($\langle id_n \rangle\langle signatur_n \rangle$)) $\langle expr \rangle$)) expr ist das Prädikat, das sich auf $\langle id_q \rangle$ ... $\langle id_n \rangle$ bezieht.
Test erfolgreich, falls $\langle expr \rangle$ für beliebige Bindungen für $\langle id_1 \rangle$ ... $\langle id_n \rangle$ immer #t ergibt.

Interaktion von Konstruktor und Selektor

(check-property (for-all ((n string) (j boolean) (f natural))) (string=? (character-name (make-character n j f)) n))



Beispiel: Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist mindestens so groß wie jede dieser Zahlen.
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N} : x_1 + x_2 \geq max(x_1, x_2)$
(check-property (for-all ((x_1 natural)
(x_2 natural))
($\geq$(+ x_1 x_2) (max x_1 x_2))))

Konstruktion von Funktionen $\langle f \rangle$, die zusammengesetzte Daten der Signatur $\langle t \rangle$ konsumiert.

- Welchen Record-Komponenten $\langle comp_i \rangle$ sind relevant für $\langle f \rangle$?
- $\Rightarrow$ Schablone:
  (:$\langle f \rangle$ (... $\langle t \rangle$ ... $\rightarrow$ ...))
  (define $\langle$ f $\rangle$
  (lambda (... r ...)
  ... (($\langle t \rangle$-$\langle comp_i \rangle$ r)...))
  (: not (boolean -> boolean))

Prozedur ⟨f⟩, die zusammengetzte Daten der Signatur ⟨t⟩ konstruiert/produziert.

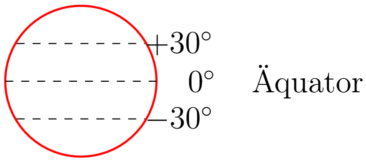
- Konstruktoraufruf für ⟨t⟩ muss enthalten sein!

```
(:⟨f⟩ ( ... -> ⟨t⟩))
 (define ⟨f⟩
  (lambda (...)
    (...(make-⟨t⟩ ...) ...))
```

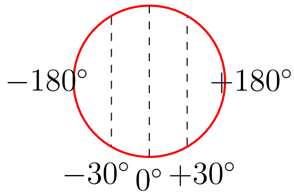
char	name jedi? force
figure	(BILD)

Längen/Breitengrade

Breitengrade (latitude)



Längengrade (longitude)



Sei ⟨p⟩ ein Prädikat mit Signatur (⟨t⟩ → boolean). Eine Signatur

```
(predicate ⟨p⟩)
```

gilt für jeden Wert x mit Signatur ⟨t⟩ für den zusätzlich (p⟨p⟩ x)⇝ #t gilt. Signatur (predicate ⟨p⟩) ist damit spezifischer (restriktiver) als Signatur ⟨t⟩.

Signaturnamen

Einführung eines neuen Signaturnamens ⟨new-t⟩ für die Signatur ⟨t⟩:

```
(define ⟨new-t⟩ (signature ⟨t⟩))
```

Beispiele:

```
(define farbe
  (signature (one-of "Karo" "Herz" "Pik" "Kreuz")))
(define latitude
  (signature (predicate latitude?)))
```

Übersetze eine Ortsangabe mittels Google Geocoding API in eine Position auf der Erdkugel:

```
(:geocoder (string ->(mixed geocode geocode-))
```

Ein geocode besteht aus:

	Signatur
Adresse (address)	string
Ortsangabe (loc)	location
Nordostecke (northeast)	location
Südwestecke (southwest)	location
Typ (type)	string
Genauigkeit (accuracy)	string

Gemischte Daten

Die Signatur mixed

```
(mixed ⟨t1⟩...⟨tn⟩)
```

ist gültig für jeden Wert, der mindestens eine Signatur $\langle t_1 \rangle$ ... $\langle t_n \rangle$ erfüllt.
Beispiel: Datendefinition:

- ein Geocode (Signatur geocode)
- eine Fehlermeldung (Signatur geocode-error)

```
(mixed geocode geocode-error)
```

Beispiel

```
(eingebaute Funktion string -> number)
(: string -> number (string -> mixed number (one-of #f)))
```

Das Prädikat ⟨t⟩? einer Record-Signatur ⟨t⟩unterscheidet Werte der Signatur ⟨t⟩von allen anderen Werten:

```
(: ⟨t⟩? (any -> boolean))
```

Auch: Prädikate für eingebaute Signaturen.
number?, complex?, real?, rational?, integer?, natural?, string?, boolean?

Prozeduren, die gemischte Daten der Singatuen $\langle t_1 \rangle$... $\langle t_n \rangle$konsumieren:

```
(: ⟨f⟩(()mixed ⟨t1⟩ ... ⟨t2⟩)-> ...))
(define ⟨f⟩
 (lambda (x)
  (cond((⟨t1⟩? x)...)
   ...
   ((⟨tn⟩? x)...))))
```

Mittels let lassen sich Werte an lokale Namen! binden:

```
(let ((⟨id1⟩ ⟨e2⟩) ... (⟨idn⟨ ⟨en⟩)) e)
```

Die Ausdrücke $\langle e_1 \rangle$... $\langle e_n \rangle$werden parallel ausgewertet.
⇒ $\langle id_1 \rangle$... $\langle id_n \rangle$können in ⟨e⟩(und nur dort!) verwendet werden.
Der Wert des let-Ausdruck ist der Wert von e. "nur dort": Verwendung nur in in ⟨e⟩, nicht in den in $\langle e_i \rangle$!
Lokal: Verwendung nicht außerhalb des (let...)
⚠Sprachlevel "Die Macht der Abstraktion"

```
(let    )≡(lambda ()   )
```

„Syntaktischer Zucker"= Dinge die nett sind aber ersetzt werden können.

```
(check-error ⟨e⟩ ⟨msg⟩)
```

erwartet Abbruch mit Fehlermeldung ⟨msg⟩. Erzwingen des Programmabbruches mittels (violation ⟨msg⟩)

Polymorphe Signaturen

Beobachtung: Manche Prozeduren arbeiten völlig unabhängig von den Signaturen ihrer Argumente:
parametrisch polymorphe Prozeduren (griechisch: vielgestaltig). Nutze Signaturvariablen:
Beispiele:

```
;Identitaet
(: id ( %a -> %a))
(define id (lambda (x) x))

;konstante Funktion (ignoriert zweites Argument)
(: const( %a %b -> %a)) "Anstatt %b kann auch any benutzt werden
   "
(define const
 (lambda (x y) x))

;Projektion (ein Argument auswaehlen)
(: proj ((one-of 1 2) %a %b -> (mixed %a %b)))
(define proj
 (lambda (i x y)
  (cond ((= i 1) x)
        ((= i 2) y))))
```

Beachte: Parametrisch polymorphe Prozeduren "wissen nichts"über ihre Argumente mit Signatur %a, %b, ... und können diese nur reproduzieren oder an andere polymorphe Prozeduren weiterreichen.
Eine polymorphe Signatur steht für die Signaturen, in denen die Signaturvariablen konistent durch konkrete Signaturen ersetzt werden.

Beispiel:

Wenn eine Prozedur (%a number %b -> %a) erfüllt, dann auch
(string number boolean -> string)
(boolean number natural -> boolean)
(string number string -> string)
(number number number -> number)

Polymorphe Paare und Listen

```
; Ein polymorphes Paar (pair) besteht aus
;- erster Komponente (first)
;- zweite Komponente (rest)
; wobei die komponenten jeweils beliebige Werte sind:

(define-record-procedures-parametric pair pair-of
 make-pair
 pair?
 (first
  rest))
```

(pair−of ⟨t_1 ⟩⟨t_2 ⟩)

ist eine Signatur für Paare, deren erste und zweite Komponente von der Signatur ⟨t_1⟩bzw. ⟨t_2⟩sind.

```
(: make-pair ( %a %b -> (pair-of %a %b)))
(: first ((pair-of %a %b) -> %a))
(: rest ((pair-of %a %b) -> %b))
```

Liste

Eine Liste von Werten der Signatur ⟨t⟩, (list-of ⟨t⟩), ist entweder

- leer (Signatur empty-list) oder
- ein Paar (Signatur pair-of) aus
  - einem Listenkopf (Signatur ⟨t ⟩) und
  - einer Restliste (Signatur (list-of ⟨t⟩)))

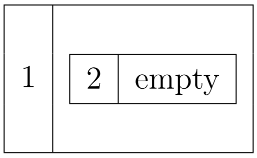
```
(define list-of
 (lambda (t)
  (signature (mixed empty-list
                    (pair-of t (list-of t))
                                          ))))
```

(list-of ⟨t⟩). Listen, deren Elemente die Signatur ⟨t⟩besitzen.
Die Signatur empty-list ist bereits in DrRacket vordefiniert.
Ebenfalls vordefiniert ist:

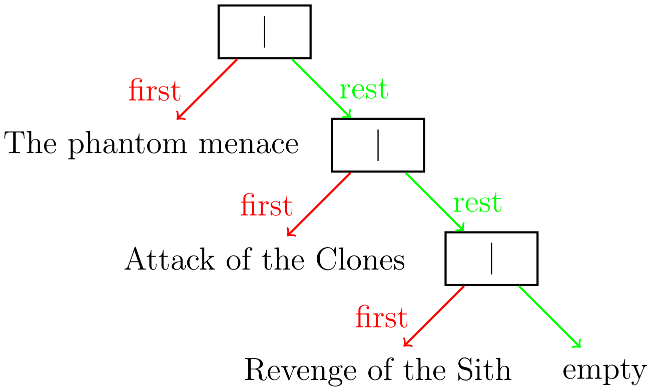
- (: empty empty-list)
- (: empty? (any -> boolean))

Visualisierung von Listen

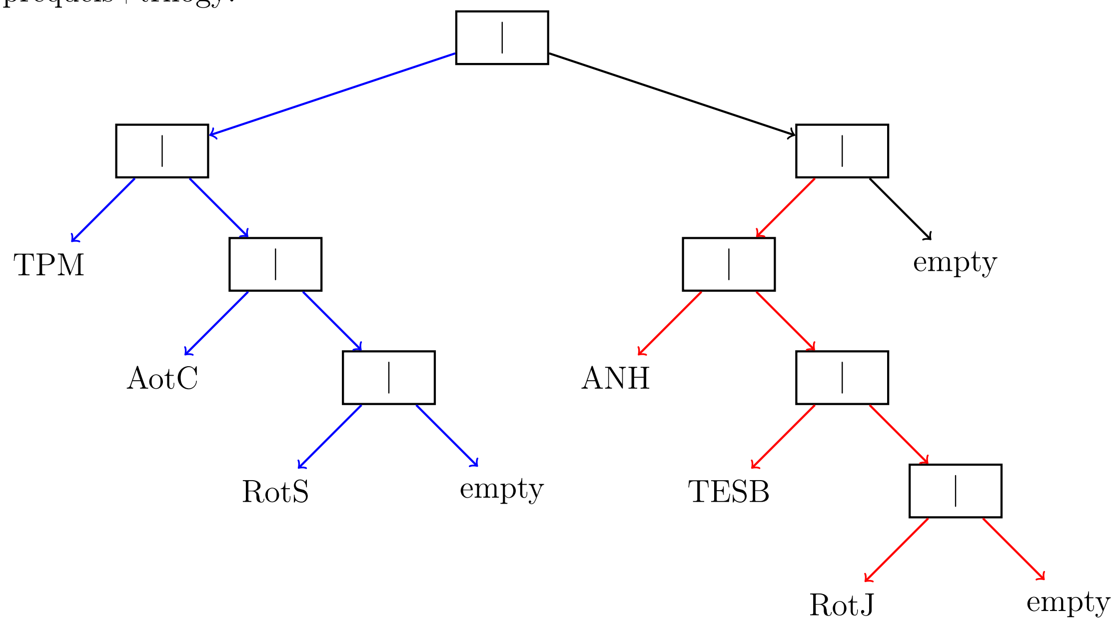
```
(make-pair 1 (make-pair 2 empty))
```

lightning  Notation skaliert schlecht

Spines (Rückrad)



prequels+trilogy:



Prozeduren über Listen

Schablonen für gemischte und zusammengesetzte Daten
Beispiel:

```
(: list-sum ((list-of number) -> number))

(check-expect (list-sum empty) 0)
(check-expect (list-sum (make-pair 40 (make-pair 2 empty))) 42)

(define list-sum
 (lambda (xs)
  (cond ((empty? xs) 0)
        ((pair?  xs) (+ (first xs) (list-sum (rest xs)))))))
```

Schablone für Funktion ⟨f⟩, die Liste xs konsumiert:

```
(: ⟨f⟩ ((list-of ⟨t1⟩) -> ⟨t2⟩))
(define ⟨f⟩
 (lambda (xs)
  (cond ((empty? xs) ... )
        ((pair?  xs) ... (first xs) ... (⟨f⟩ (rest xs)) ....))))
                                          Signatur t_1

                                             signatur t_2
```

Neue Sprachebene "Macht der Abstraktion"

- Signatur (list-of %a) eingebaut
- Neuer syntaktischer Zucker eingebaut:
  (list $\langle e_1\rangle\langle e_2\rangle$... $\langle e_n\rangle$)
  $\equiv$
  (m-p $\langle e_1\rangle$(m-p $\langle e_2\rangle$
  ...
  (m-p $\langle e_n$ empty) ..))
- Ausgabeformat für nicht-leere Listen
  #⟨list $\langle e_1\rangle\langle e_2\rangle$... $\langle e_n\rangle$⟩

cat

;Füge Listen xs, xy zusammen (concatenate)
Zwei Fälle (xs leer oder nicht-leer)

$$\begin{array}{llll}
1) & \overset{xs}{empty} & \overset{ys}{y_1 y_2 y_n} & \overset{(catxsxy)}{y_1 y_2 y_n} \\
2) & x_1 x_2 x_n & y_1 y_2 y_n & \underset{(cat(restxs)ys)}{\underset{restxs}{x_1 x_2 x_n} \underset{ys}{y_1 y_2 y_n}}
\end{array}$$

Bewertungen

- Die Länge von xs (hier n) bestimmt die Anzahl der rekursiven Aufrufe.
- Auf ys werden keine Selektoren angewandt.

Spezialform match vergleicht einen Wert ⟨e⟩mit gegebenen Patterns $\langle \text{pat}_1 \rangle \langle \text{pat}_2 \rangle$, ... $\langle \text{pat}_n$. Falls $\langle \text{pat}_1$, $1 \leq i \leq n$, das erste Pattern ist, das auf ⟨e⟩matchted, ist Zweig $\langle \text{e}_i \rangle$das Ergebnis (ansonsten wird die Aiswertung mit "keiner der Zewige passte") abgegeben.

```
(match ⟨e⟩
 (⟨pat_1⟩ ⟨e_1⟩)
 (⟨pat_2⟩ ⟨e_2⟩)
 (⟨pat_n⟩ ⟨e_n⟩))
```

Pattern Matching für $\langle \text{pat}_i \rangle$

- Literal ⟨l⟩:
  ⟨e⟩matched, falls $\langle \text{e} \rangle \rightsquigarrow \langle \text{l} \rangle$
- "Don't care"_ :
  ⟨e⟩matched immer
- Variable ⟨v⟩
  ⟨e⟩matched immer, danach ist ⟨v⟩an den Wert von ⟨e⟩n $\langle \text{e}_i \rangle$gebunden
- Record-Konstruktor $(\langle \text{c} \rangle \langle \text{pat}_{i1} \rangle \langle \text{pat}_{ik} \rangle)$, $k \geq \emptyset$
  ⟨e⟩matched, wenn es durch $(\langle \text{c} \rangle \langle \text{x}_1 \rangle \langle \text{x}_k \rangle)$ konstruiert wurde und $\langle \text{x}_j \rangle$auf $\langle \text{pat}_{ij}$ matched, $1 \leq j \leq k$

⚠ Fall 4 ermöglicht Pattern Matching auf komplex konstuierten Werten.

Rekursion über natürliche Zahlen

Die natürlichen Zaglen (vgl. gemischte Daten). Eine natüliche Zahl (natural) ist entweder

- die 0 (zero)
- die Nachfolger (succ) einer natülichen Zahl

$\mathbb{N} = \{0, (\text{succ } 0), (\text{succ } (\text{succ } 0)), ...\}$
Konstuktoren:

```
(: zero natural)
(define zero 0)

(: succ (natural -> natural))
(define succ
 (lambda (n)
   (+ n 1)))
```

Bedingte algebraische Eigenschaften (siehe check-property) ($= \Rightarrow \langle \text{p} \rangle \langle \text{e} \rangle$) Nur, wenn $\langle \text{p} \rangle \rightsquigarrow$ #t, wird der Ausdruck $\langle \text{e} \rangle$ausgewertet und getestet ob $\langle \text{e} \rangle \rightsquigarrow$# t.
Beispiel: Fakultätsfunktion n! ($n \in \mathbb{N}$) :
$0! = 1$
$n! = n \cdot (n-1)! \equiv (\text{succ } n)! = (\text{succ } n)! \cdot n!$

$$\begin{aligned} 3! &= 3 \cdot 2! \\ &= 3 \cdot (2 \cdot 1!) \\ &= 3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 0!)) \\ &= 3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 1)) \\ &= 6 \\ 10! &= 3628800 \end{aligned}$$

```
; Berechne n!
(: factorial (natural -> natural))
(define factorial
  (lambda (n)
    (cond ((= n 0) ...
          ((< n 0) (* (factorial (- n 1)) n))))))
```

Schablone für Funktionen ⟨f⟩, die natürliche Zahlen konsumieren.

```
(: ⟨f⟩ (natural -> ⟨t⟩))
(define ⟨f⟩
  (lambda (n)
    (cond ((= n 0) ...)
                  ((> n 0) ... (⟨f⟩ (- n 1) ... )))))
```

Satz:
Eine Funktion, die nach der Schablone für Listen oder natürliche zahlen geschrieben ist, terminiert immer. (=liefert immer ein Ergebnis)
Reduktion kann durchaus zur Konstruktion von Ausdrücken führen, die zunehmende Größe aufweisen (Für factorial bestimmt das Argument die Größe.) Wenn möglich, erzeuge Reduktionsprozesse, die konstanten Platzverbrauch - unabhängig von Funktionsargumenten -benötigen. Beobachtung (Assoziativität von *)

```
    (* 10 (* 9 (* 8 (* 7 (* 6 (factorial 5))))))
=   (* (* (* (* (* 10 9) 8) 7) 6) (factorial 5))
    (*          30240              (factorial 5))
```

⇒ Multiplikationen können vorgezogen werden.

Idee: Führe Multiplikation jeweils sofort aus. Schleife des Zwischenergebnis (akkumulierendes Argument) durch die Berechnung. Am Ende enthält der Akkumulator das Endergebnis.
Berechne 5!:

```
(: fac-worker (natural natural -> natural))
```

n	acc
5	1
4	5
3	20
2	60
1	120
0	120

```
(: fac-worker (natural natural -> natural))

(define fac-worker
  (lambda (n acc)
    (cond ((= n 0) acc)
                  ((> n 0) (fac-worker ( - n 1) (* acc n))))))
```

```
; Berechne n! [wrapper]
(: fac (natural -> natural))
(define fac
  (lambda (n)
    (fac-worker n 1)))
```

Ein Reduktionsprozess ist <u>iterativ</u>, falls seine Größe konstant bleibt.

Damit:	factorial	nicht iterativ
	fac-worker	iterativ

Wieso ist fac-worker iterativ? Der rekursive Aufruf ersetzt den aktuell reduzierten Ausdruck <u>vollständig</u>. Es gibt keinen <u>Kontext</u> (umgebenden Ausdruck), der auf das Ergebnis des rekursiven Aufrufs "wartet".
Kontext des rekursiven Aufrufes in

- factorial: (* n $\underbrace{\square}_{Hole}$)
- fac-worker: -keiner-

Ein Prozeduraufruf ist <u>endrekursiv</u> (tail call), wenn er keinen Kontext besitzt.
Prozeduren, die nur endrekursive Prozeduraufrufe enthalten, heißen selbst endrekursiv.

Endrekursive Prozeduren führen zu iterativen Reduktionen.

Beobachtung: Berechnung von (rev (from-to 1 1000)):

```
(rev (from-to 1 1000))

|.....1000 Aufrufe von make-pair....|
(cat (list 1000 999 ... 2) (list 1))
     |                   \
     |                    |______________
     |                                   |
     (cat (list 1000 999 ... 3) (list 2))
     |....999 Aufrufe von make-pair......|
```

⇒ Anzahl Aufrufe von make-pair 1000+999+998+...+1 auf einer Liste der Länge n:

$\sum_{i=1}^{n} = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$ Quadratisch in n

iterative Listenumkehr (backwards)

Konstruiere iterative Listenumkehr (backwards)

Berechnung von (backwards (list 1 2 3)).

```
(: backwars-worker ((list-of %a) (list-of %a) -> (list-of %a)))
```

	xs	acc	
	(list 1 2 3)	empty	
rest			(make-pair 1 acc)
	(list 2 3)	(list 1)	
rest			(make-pair 2 acc)
	(list 3)	(list 2 1)	
rest			(make-pair 3 acc)
	empty	(list 3 2 1)	

linear viele Aufrufe von make-pair!

letrec

Mit letrec lassen sich Werte an lokale Namen binden:

```
(letrec ((⟨id₁⟩⟨e₁⟩)
         ...
          (⟨idₙ⟩⟨eₙ⟩))
     ⟨e⟩)
```

Die Ausdrücke $\langle e_1\rangle ... \langle e_n\rangle$dürfen selbst auf die Namen $\langle id_1\rangle ... \langle id_n\rangle$beziegen. Den Wert des gesamten letrec-Ausdruck ist der Wert von $\langle e\rangle$.

Induktive Definitionen

Konstruktive Definition der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$:

Def. (Peano-Axiome)

(P1)	$0 \in \mathbb{N}$	Null
(P2)	$\forall n \in \mathbb{N}$: succ(n)$\in \mathbb{N}$	Nachfolger
(P3)	$\forall n \in \mathbb{N}$: succ(n)$\neq 0$	succ ist
(P4)	$\forall n, m \in \mathbb{N} : succ(m) = succ(n) \Leftarrow m = n$	injektiv (erzeugt neue Elemente)

(BILD TAFEL)

(P_5) Induktionsaxiom:

Für jede Menge $M \subseteq \mathbb{N}$:

Falls $0 \in M$ und $\forall n : (n \in M \Rightarrow succ(n) \in M)$,

dann M $=$ $\mathbb{N}$. "$\mathbb{N}$ enthält nicht mehr als 0 und die durch succ () generierten Elemente."

"Nichts sonst ist in $\mathbb{N}$"

Beweisschema der vollständigen Induktion

Sei P(n) eine Eigenschaft einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ (Prädikat):

```
(: P (natural -> boolean))
```

Ziel: Zeige $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

Definiere: $M := \{n \in \mathbb{N} | P(n) \text{ gilt}\} \subseteq \mathbb{N}$ "M enthält alle n, für die P(n) gilt."

Induktionsaxiom (P5) für M

Falls	Falls
$0 \in M$	P(0) (INDUKTIONSBASIS)
und	und
$\forall n : (n \in M \Rightarrow succ(n) \in M)$	$\forall n : (P(n) \Rightarrow P(succ(n)))$ (INDUKTIONSSCHRITT)
dann	dann
$M = \mathbb{N}$	$\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

Beispiel

1	$=1$
1+3	$=4$
1+3+5	$=9$
1+3+5+7	$=16$

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n}(2i+1)}_{\text{Summe der ersten n+1 ungeraden natürlichen Zahlen}} = (n+1)^2 \equiv P(n)$$

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

(1) Induktionsbasis P(0)

$\sum_{i=0}^{0}(2i+1) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 = (0+1)?\checkmark$

(2) Induktionsschritt: $\forall n : (P(n) \Rightarrow P(n+1))$

$\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) \underset{\sum}{=} \sum_{i=0}^{n}(2i+1) + 2(n+1) + 1$

$\underset{P(n)}{=} (n+1)^2 + 2n + 3$

$= n^2 + 4n + 4$

$= (n+2)^2\checkmark$

Beispiel

```
(define factorial
  (lambda (k)
      (if (= k 0) 1
        (* k (factorial (- k 1))))))
```

$P(n) \equiv$ (factorial n) = $\underline{\text{n!}}$ $\qquad$ $\underline{\text{X}}$: Racket-Repräsentation der Zahl X

Zeige : $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

(1) Induktionsbasis P(0)

(factorial 0) $\rightsquigarrow$((lambda (k) ...) $\underline{0}$)

$\rightsquigarrow$ (if (= 0 0) 1 ...)

$\rightsquigarrow$ (if #t 1 ...)

$\rightsquigarrow$ 1 = $\underline{0!}$

(2) Induktionsschritt

$\forall n : (P(n) \Rightarrow P(n+1))$:

(factorial $\underline{\text{n+1}}$)

$\rightsquigarrow$ ((lambda (k) ...) $\underline{\text{n+1}}$)

$\rightsquigarrow$ (if (= $\underline{\text{n+1}}$ 0)... (* ...))

$\rightsquigarrow$ (if #f ... (* ...))

$\rightsquigarrow$ (* $\underline{\text{n+1}}$ (factorial (- $\underline{\text{n+1}}$ 1))) $\qquad$ Annahme: - realisiert Differenz korrekt

$\rightsquigarrow$ (* $\underline{\text{n+1}}$ (factorial n))

$\underline{\text{P(n)}}$ (* $\underline{\text{n+1}}$ $\underline{\text{n!}}$) = ($\underline{\text{n+1}}$)! ✓ $\quad$ Annahme: + realisiert Multiplikation korrekt.

Beispiel

Jedes f, das sich an die Schablone für Funktionen über natürlichen Zahlen hält, liefert immer ein Ergebnis (terminiert immer).

Sei

```
(: f (natural -> %a ))
```

also definiert durch:

```
(define f
  (lambda (n)
    (if (= n 0)
        basis
        (step (f (- n 1)) n ))))
```

Bemerkung

```
(: basis %a)
(: step ( %a natural -> %a))          totale Funktion
```

Dann gilt:

P(n)≡ (f n) terminiert mit Ergebnis
der Signatur %a

<u>Beweis</u>

(1) Induktionsbasis P(0)

(f $\underline{0}$)

$\overset{*}{\leadsto}$ (if (= $\underline{0}$ 0) basis ...)

$\leadsto$ (if #t basis)

$\leadsto$ basis ✓

(2) Induktionsschritt $\forall n$:(P(n) ⇒ P(n+1))

(f $\underline{\text{n+1}}$)

$\leadsto$ (if (= $\underline{\text{n+1}}$ 0) ... (step...))

$\leadsto$ (if #f ... (step ...))

$\leadsto$ (step (f (- $\underline{\text{n+1}}$ 1)) $\underline{\text{n+1}}$)

$\leadsto$ (step $\underbrace{\text{(f } \underline{\text{n}}\text{)}}_{\text{terminiert mit Ergebnis R}}$ $\underline{\text{n+1}}$)

$\overset{P(n)}{\leadsto}$ (step R $\underline{\text{n+1}}$) terminiert ✓

<u>Def</u> (Listen)

Die Menge M* (= Listen mit Elementen aus M, (list-of M)) ist <u>induktiv</u> definiert:

(l1) empty $\in M*$

(l2) $\forall c \in M, xs \in M*)$: (make-pair x xs) $\in M$

(l3) Nichts sonst ist in M*

Schema der Listeninduktion

Sei P(xs) eine Eigenschaft von Listen über M:

```
(: P ((list-of M) -> boolean))
```

Falls $P(\text{empty})$

und $\forall x \in M, xs \in M*: (P(\text{xs}) \Rightarrow P((\text{make-pair x xs})))$

dann $\forall xs \in M*: P(\text{xs})$

Beispiel: Eigenschaften von cat (append).

```
(define cat
  (lambda (xs xs
    (cond ((empty? xs) ys)
          ((pair? xs) (make-pair (first xs)
                                 (cat (rest xs) ys))))))
```

(1)	(cat empty ys)	= ys
(2)	(cat xs empty)	= xs
(3)	(cat (cat xs ys) zs)	= (cat xs (cat ys zs))

"(M*, cat, empty) ist ein Monoid"

($\mathbb{N}$, +, 0)

($\mathbb{N}$, +, 1)

Beweise

(1) (cat empty ys) $\overset{*}{\rightsquigarrow}$ ys ✓

(2) P(xs) $\equiv$ (cat xs empty) = xs

Induktionsbasis P(empty): (cat empty empty) $\overset{(1)}{=}$ empty ✓

Induktionsschritt $\forall x \in M, xs' \in M*$: (P(xs') $\Rightarrow$ P((make-pair x xs')))

(cat (make-pair x xs') empty)

$\overset{*}{\rightsquigarrow}$ (make-pair) (HIER FEHLT NOCH WAS)

$\overset{*}{\rightsquigarrow}$ (make-pair x (cat xs' empty))

$\overset{I.V.}{=}$ (make-pair x xs')

(3) P(xs) $\equiv$ (cat (cat xs ys) zs) = (cat xs (cat ys zs))

ys, zs $\in M*$ beliebig

Induktionsbasis P(empty) (cat (cat empty ys) zs)

$\overset{(1->)}{=}$ (cat ys zs)

$\overset{(1<-)}{=}$ (cat empty (cat ys zs)) ✓

Induktionsschritt $\forall x \in M, xs' \in M*$: (P(xs') $\Rightarrow$ P ((make-pair x xs')))

(cat (cat (make-pair x xs') ys) zs)

$\overset{*}{=}$ (cat (make-pair x (cat xs' ys)) zs)
$\overset{*}{\rightsquigarrow}$ (make-pair x (cat (cat xs' ys) zs))
$\overset{I.V.}{=}$ (make-pair x (cat xs' (cat ys zs)))
$\overset{*}{\rightsquigarrow}$ (cat (make-pair x xs') (cat ys) zs)) ✓

<u>Beispiel:</u> Interaktion von length/cat

```
(define length
  (lambda (xs)
    (cond ((empty? xs) 0)
          ((pair? xs) (+1 (length (rest xs)))))))
```

ys ∈ M* beliebig P(xs) ≡ (length (cat xs ys)) = (+ (length xs)(length ys))
Indultionsbasis P(empty)
(length (cat emtpy) ys))
$\overset{(1)}{=}$ (length ys)
$\overset{(+)}{=}$ (+ 0 (length ys)) ✓

Induktionsschritt $\forall x \in M, xs' \in M*$: (P(xs') ⇒ P ((make-pair x xs')))
(length (cat (make-pair x xs') ys))
$\overset{*}{\rightsquigarrow}$ (length (make-pair x (cat xs' ys)))
$\overset{*}{\rightsquigarrow}$ (+ 1 (length (rest (make-pair x (cat xs' ys)))))
$\rightsquigarrow$ (+1 (length (cat xs' ys)))
$\overset{I.V.}{=}$ (+1 (+ (length xs') (length ys)))
$\overset{(+)Assoziativ}{=}$ (+ (+ 1 (length xs')) (length ys))
$\overset{*}{\rightsquigarrow}$ (+ (length (make-pair $\underset{\text{beliebig}}{\text{x}}$ xs')) (length ys)) ✓

Prozeduren höherer Ordnung (HIGHER-ORDER FUNCTIONS)

Abstraktion von Funktionsparametern

```
;Extrahiere die Elemente xs, die das Praedikat p? erfuellen

(: filter (( %a -> boolean)(list-of %a) -> (list-of %a)))
(define filter
  (lambda (p? xs)
    (cond ((empty? xs) empty)
          ((pair? xs)(if (p? (first xs))
                         (make-pair (first xs)
                                    (filter p? (rest xs)))
                         (filter p? (rest xs)))))))
```

Prozeduren höherer Ordnung (Higher-Order Procedures H.O.P)
H.O.P. ...

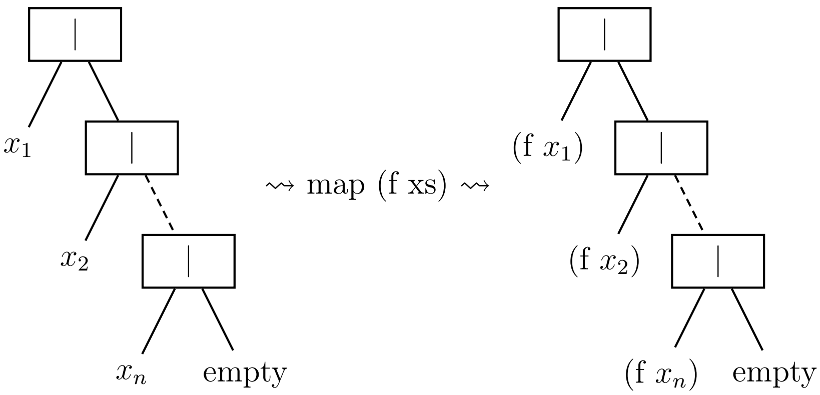
(1) akzeptieren Prozeduren als Parameter und/oder

(2) liefern eine Prozedur als Ergebnis.

filter ist vom Typ (1)
H.O.P. vermeiden Duplizierung von Code und führen zu

- kompakteren Programmieren
- verbesserte Lesbarkeit
- verbesserte Wartbarkeit

Beispiel (map f xs)



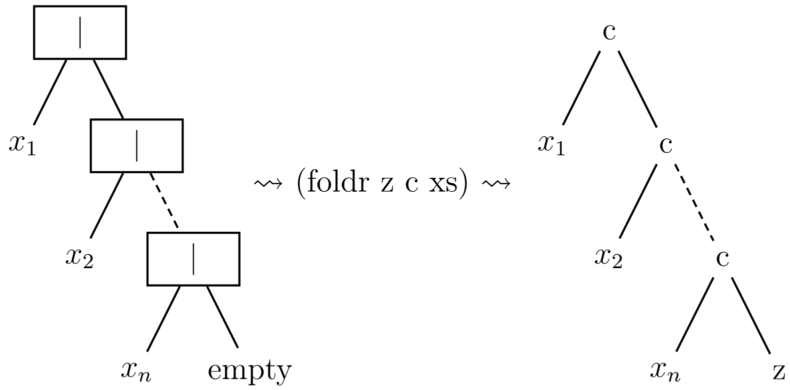

```
; Wende f auf alle Elemente von xs an
(: map (( %a -> %b)  (list-of %a) -> (list-of %b)))
(define map
  (lambda (f xs)
    (cond ((empty? xs) empty)
          ((pair? xs) (make-pair (f (first xs)) (map f (rest xs)
             ))))))
```

Hinweis

Verwende einfache Lambda-Abstraktion direkt als anonyme Funktion, wenn eine globale Benennung (via define) nicht gerechtfertigt erscheint (z.B. bei lokaler/einmaliger Benutzung).

Listenfaltung

Allgemeinere Transformation von Listen: Listenfaltung (list folding).
Idee: die Listenkonstruktion make-pair und empty werden systematisch ersetzt:

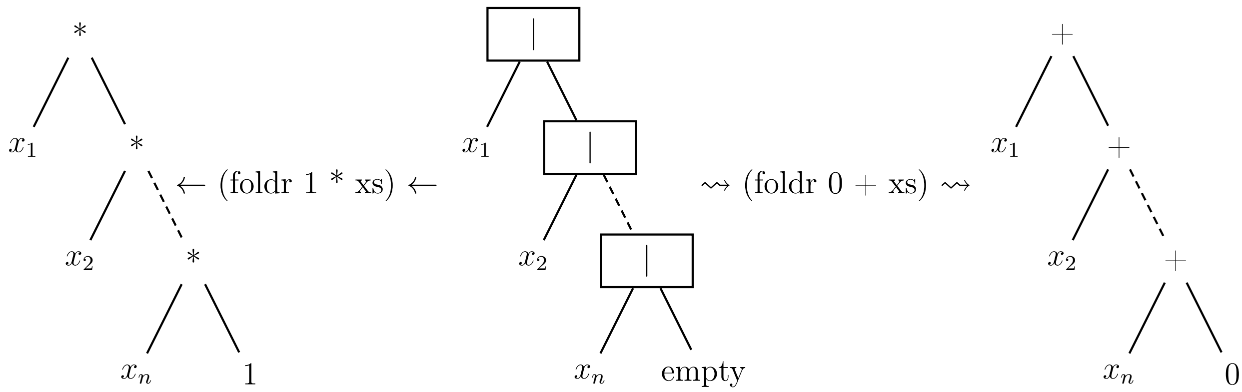


(foldr z c xs) wirkt als Spine Transformer:

- empty → z
- make-pair → c
- Eingabe: Liste (list-of %a)
- Ausgabe im allg. keine Liste (etwa %b)

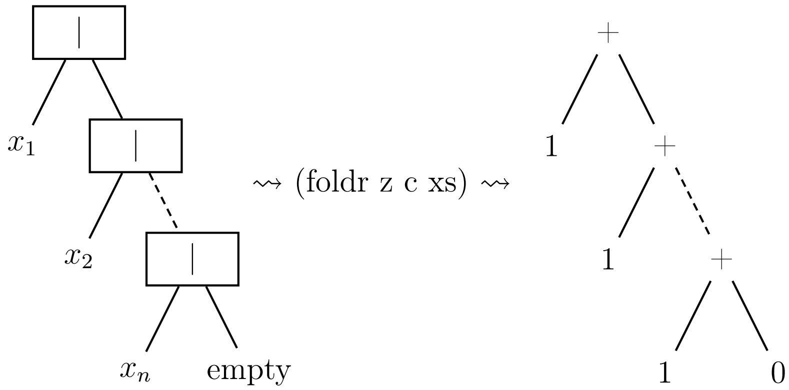
```
;Falte Liste xs bzgl. c und z
(: foldr ( %b (%a %b -> %b) (list-of %a)-> %b))
(define foldr
  (lambda (z c xs)
    (cond ((empty? xs) z)
          ((pair? xs) (c (first xs) (foldr z c (rest xs)))))))
```

Beispiele (Reduktionen von xs)




```
(: sum ((list-of number) -> number))
(define sum
  (lambda (xs) (foldr 0 + xs)))
```

Länge eine Liste durch Listenfaltung:



Spine-Transformation

- empty → 0
- (make-pair y ys) → (lambda y ys) (+1 ys)

Universe

Teachpack universe nutzt H.O.P., um Animationen (=Sequenzen von Szenen/Bildern) zu definieren.

```
(big-bang ⟨init⟩
        (an-tick ⟨ tok⟩)
        (to-draw ⟨render⟩ ⟨w⟩ ⟨h⟩))

(: ⟨init⟩ %a)      ;Startzustand

(: ⟨tock⟩ ( %a -> %a))     ;Funktion, die neuen aus alten Zustand
   berechnet, wird 28 Mal/Sekunde aufgerufen

(: ⟨render⟩ ( %a -> image)) ;Funktion, die aus aktuellem Zustand
   eine Szene berechnet (wird in Fenster mit ⟨w⟩ x ⟨h⟩ Pixeln
   angezeigt)

;Bei Schliessen der Animation wird der letzte aktuelle Zustand
   zurueckgegeben.
```

Komposition von Funktionen (allgemein)

```
((compose f g) x) ≡ (f (g x))
```

Mathematik: (compose f g) ≡ $f \circ g$ "f nach g"⇒ compose konstruiert aus f und g eine neue Funktion ("Funktionsfabrik")

```
(: compose ((%b -> %c) ( %a -> %b) -> ( %a -> %c)))

(define compose
  (lamda f g)
    (lambda (x)     ;Ergebnis ist eine
```

```
        (f (g x))))) ;Funktion (nicht angewandt)
```

repeat: n-fache Komposition einer Funktion f mit sich selbst (n-fache Anwendung von f, Exponentiation)

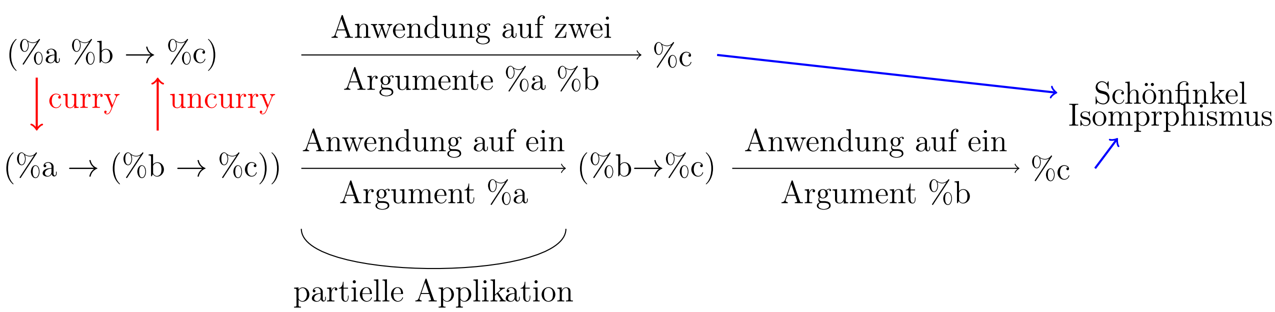
$$f^0 = id \text{ (Identität id} \equiv \text{(lambda (x) x))}$$
$$f^n = f^{n-1} \circ f$$

```
(: repeat (natural (%a-> %a) -> (%a -> %a)))

(define repeat
(lambda (n f)
  (cond ((= n 0) (lambda (x) x))
        ((> n 0) (compose (repeat (- n 1) f) f)))))

;Greife auf das n-te Element von xs zu (n>0)
(: nth (natural (list-of %a) -> %a))

(define nth
  (lambda (n xs)
    ((compose first (repeat (- n 1) rest)) xs)))
```

Currying

Reduktion von ((add 1) 41)

$\overset{\text{eval id}}{\leadsto}$ ((lambda (x)(lambda (y) (+ x y))) 1 41)
$\overset{\text{apply } \lambda}{\leadsto}$ ((lambda (y) (+ 1 y)) 41)
$\overset{\text{apply } \lambda}{\leadsto}$ (+ 1 41) $\leadsto$ 42



- Currying (Haskell B. Curry, Moses Schönfinkel)

  Anwendung einer Funktion auf ihr erstes Argument liefert eine Funktion der restlichen Argumente.

- Jede n-stellige Funktion lässt sich in eine alternative curried Variante transformieren, die in n Schritten jeweils nur ein Argument
  konsumiert: curry (Transformator)
  Gegenrichtung: uncurry

```
(: curry (( %a %b -> %c) -> ( %a ->( %b -> %c))))

(define curry
  (lambda (f)
    (lambda (x)     ;neue
      (lambda (y)   ;Funktion
        (f x y)     ;
      )
    )
  )
)
```

```
(: uncurry ((%a -> (%b -> %c)) -> (%a %b -> %c)))

(define uncurry
  (lambda (f)
    (lambda (x y)
      ((f x) y)
      )
    )
  )
```

Erinnerung

Bestimmung der ersten Ableitung der reellen Funktion f durch Bildung des Differenzenquotienten: (Hier Bild mit x und y achse und schaubild) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ Differenzenquotient $\lim\limits_{0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ Differentialquotient

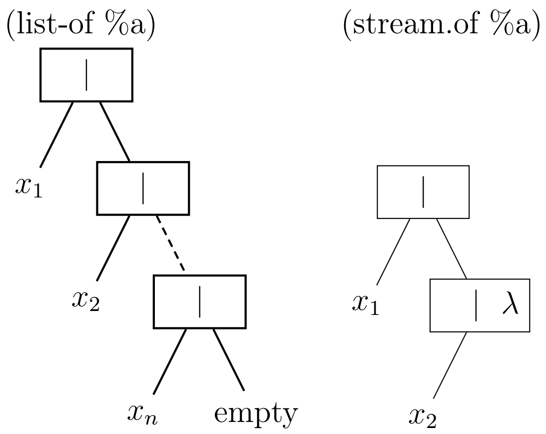
- Operator ' (Ableitung) konsumiert funktion f ind produziert f' $\Rightarrow$ ' ist higher-order

Streams (stream-of % a)

unendliche Ströme von Elementen x_i der Signatur %a.
Ein Stream ist ein Paar stream head (X1) stream tail

$\boxed{x_1 \mid \text{tail}}$ %a (-> (stream-of %a))

Vergleich



Verzögerte Auswertung eines Ausdrucks (delayed evaluation)

- ```
  (: delay ( %a -> (-> %a)))
  (delay ⟨e⟩) ;Verzoegere die Auswertung des Ausdrucks ⟨e⟩ und
      liefere "Versprechen" (promise) ⟨e⟩ bei Bedarf spaeter
      auswerten zu koennen.
  ```

  ⚠ funktioniert nicht:

  ```
  (define delay
    (lambda (e)
      (lambda () e)))
  ```

  Implementation:

  ```
  (delay ⟨e⟩) ≡ (lambda ()⟨e⟩)
  ```

- ```
  (: force ((-> %a) -> %a))
  (force ⟨p⟩) ;Erzwinge Auswertung des Promise ⟨p⟩, liefere den
      Wert des verzoegerten Ausdrucks
  (define force
    (lambda (p)
      (p)))
  ```

Sieb des Erastostgenes (Generierung aller Primzahlen)

Stream-Programm (über 2200 Jahre alt):

- Starte mit dem Stream str der Zahlen 2,3,4,...
- Die erste Zahl n in str ist eine Primzahl
- Streiche alle Vielfachen von n im Stream str
- weiter bei (2)

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

2 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25

2 3 5 7 11 13 17 19 23 25

2 3 5 7 11 13 17 19 23

Binärbäume

Die Menge der Binärbäume T(M) über M ist Induktiv definiert.

(T1) empty-tree $\in$ T(M)

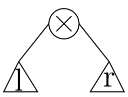
(T2) $\forall x \in M$, l,r $\in T(M)$: (make-node l x r) $\in$ T(M)

(T3) Nichts sonst ist in T(M)

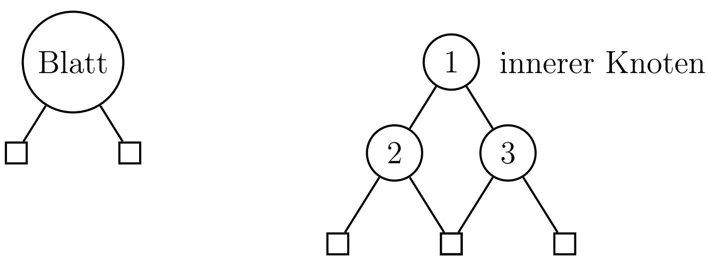
Hinweise:

- Jeder Knoten (make-node) in einem Binärbaum hat zwei Teilbäume l und r sowie eine Markierung (Label) $x \in M$.
- Vgl. M* und T(M), empty-list und empty-tree, make-pair und make-node.

Visualisierung/Terminologie

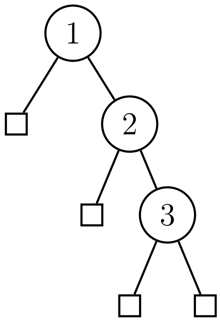
- empty-tree: □
- (make-node l x r): 

- Der Knoten mit Markierung x ist Wurzel (root) des Baumes
- Ein Knoten, der nur leere Teilbäume besitzt, heißt Blatt (leaf) Alle anderen Knoten sind innere Knoten (inner nodes)



Beispiel für Binärbäume der Menge T(ℕ).

- Baum t_1: listenartig (rechtstief)

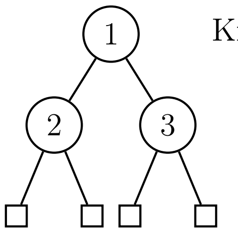


Knoten mit Label 1 ist Wurzel

Knoten 1,2 sind innere Knoten

Knoten 3 ist Blatt

- Baum t_2: balanciert



Knoten 1 ist Wurzel und innerer Knoten

Knoten 2,3 sind Blätter

(Binär-)Bäume haben zahllose Anwendungen:

- Suchbäume (schneller Zugriff, z.B. in Datenbanksystemen)
- Datenkompression
- Darstellung von Programmen/Ausdrücken im Rechner
- ...

Bäume sind DIE induktive Datenstruktur in der Informatik.

Die Tiefe (depth) eines Binärbaumes t ist die maximale Länge eines Weges von der Wurzel bis zu einem leeren Teilbaum. Also:

```
(btree-depth empty-tree)   = 0
(btree-depth t2)           = 2
(btree-depth t3)           = 3
(btree-depth classifier)   = 4
```

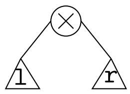
Schablone (gemischte + zusammengesetzte Daten):

```
(: btree-depth ((btree-of %a) -> natural))

(define btree-depth
  (lambda (t)
    (cond ((empty-tree? t) 0)
          ((node? t) (+ 1 (max (btree-depth (node-left-branch t)
             )
                               (btree-depth (node-right-branch t
                                  ))
                      ))))))
```

Einschub: Pretty-Printing von Binärbäumen

Prozedur (pp ⟨t⟩) erzeugt formatierten String für Binärbaum ⟨t⟩.

```
(pp   □) = (list "  □")
```



```
(pp          ) = x
```

Idee: Repräsentiere formatierten String als Liste von Zeichen (String):

(1) Nutze (string-append ...) um Zeilen-Strings zu definieren [horizontal]

(2) Nutze (append...) um die einzelnen Zeilen zu einer Liste von Zeilen zusammenzusetzen [vertikal]

Erst direkt vor der Ausgabe werden die Zeilen-Strings zu einem auszugebendem String zusammengesetzt.

```
(strings-list->string)
```

Induktion über Binärbäumen

Sei $P(t)$ eine Eigenschaft von Binärbäumen $t \in T(M)$, also (: P ((btree-of M) -> boolean)).

Falls

P(empty-tree) [Induktionsbeweis]

und

$\forall x \in M$,$l \in T(M)$, $r \in T(M)$:

$P(l) \wedge P(r) \Rightarrow$P((make-node l x r))

dann $\forall t \in T(M) P(t)$.

Beispiel:

Zusammenhang zwischen Größe (btree-size) und Tiefe (btree-depth) eines Binärbaums t:

$P(t) \equiv (btree - deptht) \leq (btree - sizet) \leq 2^{(btree-deptht)} - 1$

Induktionsbasis P(empty-tree):

(size empty-tree) $\rightsquigarrow 0 = 2^0 - 1 \rightsquigarrow 2^{(depthempty-tree)} - 1$ ✓

Induktionsschritt $P(l) \wedge P(r) \rightarrow P((make - nodelxr))$

(size (make-node l x r)) $\rightsquigarrow$ (size l) + 1+ 1 (size r) $\leq 2^{(depthl)} - 1 + 1 + 2^{(depthr)} - 1$

$= 2^(depthl) + 2^{(swpthr)} - 1$

$\leq 2 \cdot max(2^{(depthl)}, 2^{(depthr)}) - 1$

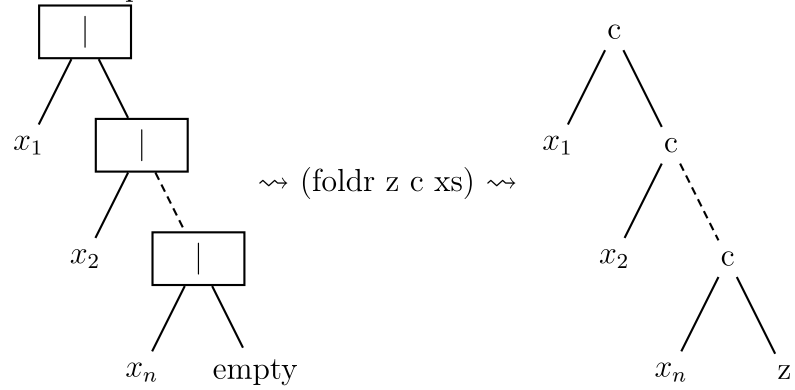
$= 2 \cdot 2^{max((depthl),(depthr))} - 1$

$= 2^{1+max((depthl),(depthr))} - 1$

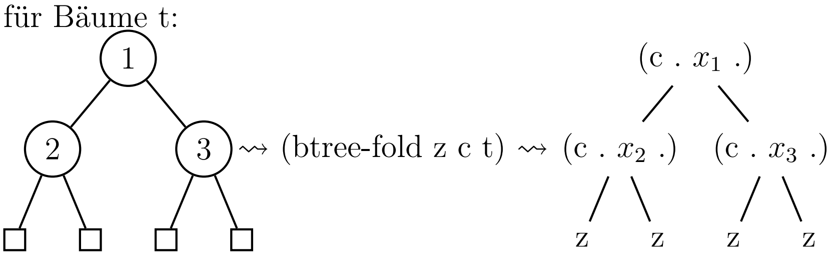
$\rightsquigarrow 2^{(depth(make-nodelxr))} + 1$

Erinnerung

fold ist Spine-Transformer für Listen xs:



Wie müsste btree-fold, eine fold-Operation für Binärbäume, verhalten? Tree-Transformer für Bäume t:

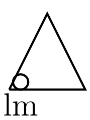


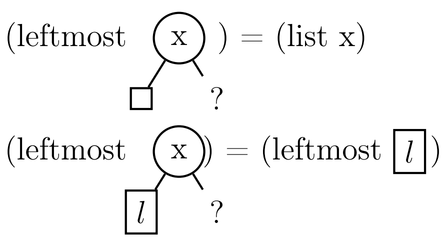

```
;Falte Baum bzgl. z und c

(: btree-fold ( %b (%b %a %b -> b)(btree-of %a) -> %b))

(define btree-fold
  (lambda (z c t)
    (cond ((empty-tree? t) z)
          ((node? t)  (c (btree-fold z c (node-left.branch t))
                         (node-label t)
                         (btree-fold z c (node-right-branch t)))
                         ))))
```

Beispiel

Bestimmte die Markierung lm links-aussen im Baum t (oder empty, falls t leer ist).

$t \equiv\Downarrow$






```
(: leftmost ((btree-of %a) -> (list-of %a)))

(define leftmost
  (lambda (t)
    (btree-fold empty
```

```
                    (lambda (l1 x l2) (if (empty? l1) (list x) l1))
                    t)))
```

Baumdurchläufe

Ein Tiefnedurchlauf (depth-first traversal) eines Baumes t sammelt die Markierungen jedes Knoten n un t auf. Die Markierungen der Teilbäume l,r des Knotens n=(make-node l x r) werden vor x eingesammelt. (Durchlauf zuerst in der Tiefe)

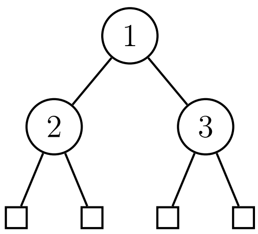
Je anchdem, ob x (a) zwischen, (b) vor, (c) nach den Markierungen von l,r eingeordnet wird, erhält man

(a) inorder traversal (1) (2) (3)

(b) preorder traversal (2) (1) (3)

(c) postorder traversal (1) (3) (2)

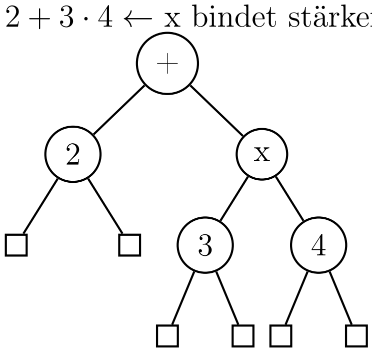
```
(: inorder ((btree-of %a) -> (list-of %a)))

(define inorder
  (lambda (t)
    (btree-fold empty
                (lambda (xs1 x xs2) (append xs1          ;(1)
                                            (list x)     ;(2)
                                            xs2          ;(3)
                                   ))
                t)))
```



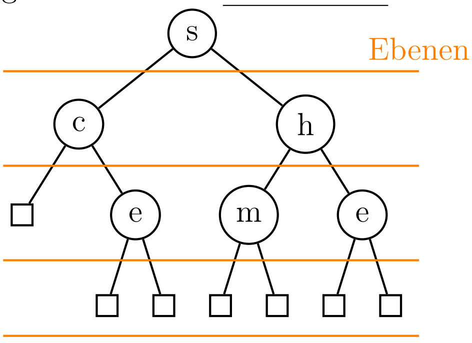
Daraus wird die Liste 2 1 3

Beispiel

Baumdarstellung des arithmetischen Ausdrucks (Term)
$2 + 3 \cdot 4 \leftarrow$ x bindet stärker als +



Ein Breitendurchlauf (breath-first traversal) eines Baumens t sammelt die Markierungen der Knoten ebenenweise von der Wurzel ausgehend auf.

t≡ 


```
(leveloder t) = (list "s" "c" "h" "e" "m" "e")
```

Idee: Gegeben sei eine Liste ts von Bäumen

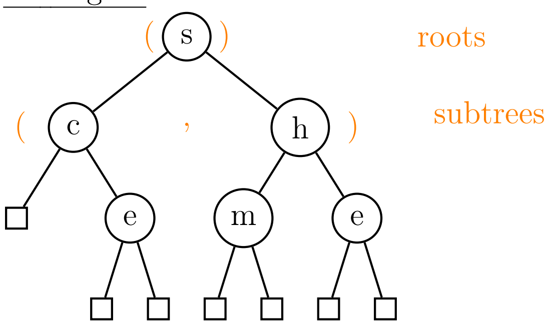
(1) Sammle die Liste der Markierungen der Wurzeln der (nicht-leeren) Bäume n ts (= (roots ts))

(2) Bestimme die Liste ts' der Teilbäume der (nicht-leeren) Bäume n ts (= (subtrees ts))

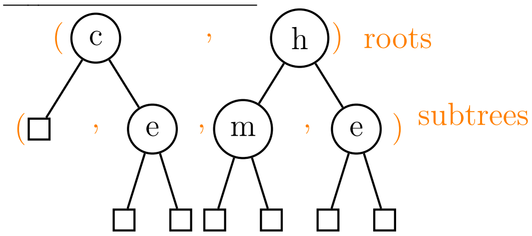
(3) Führe (1) rekursiv auf ts' aus.

(4) komkatiniere die Listen aus (1) und (3).

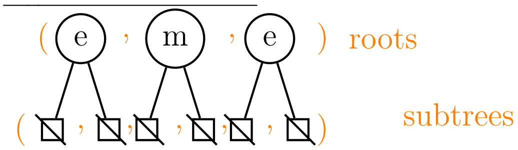
Zu Beginn



1. Rekursionaufruf



2. Rekursionaufruf



3. Rekursionsaufruf

( )

```
(: traverse ((list-of (btree-of %a)) -> (list-of %a)))
(define traverse
  (lambda (ts)
    (cond ((empty? ts) empty)
          ((pair? ts)
            (append (roots ts)
                    (traverse (subtrees ts)))))))
```

Neue Sprachebene DMdA-fortgeschritten

- neues Ausgabevormat in der REPL (list x_1 x_2 x_n) ⇝ (x_1 x_2 x_n)
  empty ⇝ ()

- Neuer Gleichheitstest für Werte aller (auch benutzerdef.) Signaturen (:equal? (%a %b -> boolean))

Quote

Sei ⟨e⟩ein beliebiger Scheme-Ausdruck. Dann liefert (quote ⟨e⟩) die Representation bon ⟨e⟩- ⟨e⟩wird nicht ausgewertet.

Beispiele:

(quote 42) ⇝ 42
(quote "Leia") ⇝ "Leia"
(quote #t) ⇝ #t
(quote + 40 2) ⇝ (+ 40 2) Funktionsapplikation repräsentiert als Liste
Abkürzung (quote ⟨e⟩) ≡ '⟨e⟩

Notation von Listenliteralen in Programmen (c_i Komstanten) (list c_1 c_2 c_n) ≡ '(c_1 c_2 c_n) empty ≡ '()

Symbole

Was ist (first (* 1 2))? Was sind lambda, x + in '(lambda (x) (+ x 1))?
Neue Signatur symbol zur Repräsentation von Namen in Programmen. Effizientere interne Darstellung, effizient vegleichbar (not equal?). KEin Zugriff auf die einzelnen Zeichen des Symbols. lambda ≠ "lambda"

Operatoren

```
(: symbol? ( %a -> boolean))
(: symbol->string (symbol -> string))
(: string->symbol (string -> symbol))
```

Natürliche Repräsentation und Auswertung

Natürliche Repräsentation und Auswertung arithmetischer Ausdrücke (Terme):
Beispiel:
e ≡ '(* (! (+ 1 2)) x)

```
(define term
  (signature (mixed number
                    symbol
                    (list-of term))))
```

- kein Parser benötigt
- kein Prettyprinter

Auswertung möglich, wenn Bindungen für Symbole (Variablen und Operatoren) an Werte gegeben sind. Dictionary (Enviroment):

- d1: { x→ 3,
  *→ ⟨procedure: *⟩,
  \+ → ⟨procedure: +⟩,
  ^→ ⟨procedure: expt⟩,
  ! → fac}
  e ⇝⇝ 18
- d2: { x → 1,
  *→ *,
  +→ +,
  ^→ expt,
  !→ (lambda (x) (-x)) }
  e ⇝⇝ -3

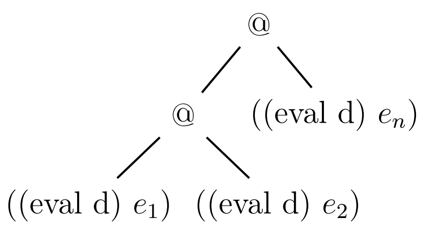
Auswertung eines arithmetischen Ausdrucks e

Auswertung eines arithmetischen Ausdrucks e (im Enviroment d):
((eval d) e)

(E_1) ((eval d) c) = c

(E_2) ((eval $\{x_1 \to v_1, \quad , x_n \to v_n\})x_i) = v_i$

(E_3) ((eval d) (e_1 e_2 ... e_n)) = (... (((eval d) e_1) ((eval d) e_2))...((eval d) e_n))



```
(: eval ((dict-of symbol value) -> (term -> value)))

(define eval
  (lambda (d)
    (lambda (e)
      (cond ((constant? e) e) ;(E1)
            ((variable? e) (lookup-dict e d)) ;(E2)
            ((compound? e) (let ((es (map (eval d) e)))
                              (foldl (first es) @ (rest es)))))))))

(: @ ((%a -> %b) %a -> %b))
(define @
  (lambda (f x)
    (f x)))
```

Lambda-Kalkül

Das λ-Kalkül ist eine Notation für beliebige Funktionen. Entwicket in den 1930er Jahren von Alonzo Church (1903-1995) als neue Grundlage der Mathematik [aber die Mathematiker bevorzugen die Mengenlehre]. Seither verwendet als thearetischer Unterbau für Programmiersprachen.

Syntax des λ-Kalküls

Die Menge der Ausdrücke (expressions) E des λ-Kalküls ist induktiv definiert (sei V unendliche Memge von Variablennamen).

- $\forall v \in V : v \in E$ [Variable]
- $\forall e_1, e_2 \in E : (e_1 e_2) \in E$ [Applikation]
- $\forall v \in V, e_1 \in E : (\lambda v.e_1) \in E$ [Abstraktion]

Beispiele $y \in E$
$(\lambda y.y) \in E$ Identitätsfunktion
$(\lambda y.z) \in E$ Funktion ignoriert Arg. y, liefert z
$((fx)y) \in E$ Anwendung von f auf x und y (Currying)
$(\lambda f.(f\ x)) \in E$ Anwendung von Argument f auf x (H.O.P., Typ 1)

$((e_1\ e_2)\ e_3) \equiv (e_1\ e_2\ e_3)$ Currying

Freie/Gebundene Variablen

Zur Auswertung $E_1 \equiv ((\lambda x(f\ x\ y))\ z)$

- wird der hier nicht bekannte Wert der Variablen f,y,z benötigt, während

- der Wert von x im Rumpf (f x y) durch das Argument z festgelegt ist.

In E_1 ist

- Variable x (durch das λx als Parameter) gebunden (bound), während
- Variablen f,y,z frei (free) sind.

Welche Variablen eines Ausdrucks sind frei/gebunden?
free (v) = {v}
free ((e_1 e_2)) = free (e_1) $\cup$ free (e_2)
free ((λx.e_1)) = free(e_1) {x}
bound (v) = {}
bound ((e_1 e_2)) = bound (e_1) $\cup$ bound (e_2)
bound ((λv.e_1)) = bound (e_1) $\cup$ { v}
Beispiel:
free (t_1)
= free (((λx((f x) y)) z))
= free ((λx ((f x) y))) $\cup$ free (z)
= (free (((f x) y)) \{x}) $\cup$ {z}
= ((free ((f x)) $\cup$ free (y)) \{x}) $\cup$ {z}
= (((free (f) $\cup$ free (x)) $\cup$ {y}) \{x}) $\cup$ {z}
= ((({f}$\cup${x}) $\cup$ {y})\{x}) $\cup$ {z}
= {f,x,y} \ {x} $\cup$ {z} = {f y z}
Achtung: Bindung/Freiheit muss für jedes Vorkommen einer Variable seperat entschieden werden.
$E_2 \equiv$ (x (λx.x))
free (t_2) = {x}
bound (t_2) = {x}

Die Anwendung einer Funktion (= λ-Abstraktion) auf ein Argument wird im λ-Kalkül durch β-Reduktion($\underset{\beta}{\rightarrow}$) beschrieben. Die Applikation(λv.e_1)e_2) wird durchgeführt, indem

(1) eine Kopie des Rumpfes e_1 hergestellt wird und

(2) alle freien Vorkommen von v in e_1 durch e_2 ersetzt werden.

Beispiel:

- ((λx.(* ((λx.(+ x a)) b) x)) c)
  $\underset{\beta}{\rightarrow}$ (* ((λx.(+ x a)) b) c)
  $\underset{\beta}{\rightarrow}$ (* (+ b a) c)
- ((λx.foo) bar) $\underset{\beta}{\rightarrow}$ foo

- $((\lambda x.((\lambda y.(* \; y \; x)) \; a)) \; b)$
  $\underset{\beta}{\rightarrow} ((\lambda y.(* \; y \; b)) \; a)$
  $\underset{\beta}{\rightarrow} (* \; a \; b)$ Curry

- $((\lambda f.(f \; c))(\lambda x.(+ \; x \; a))$
  $\underset{\beta}{\rightarrow} ((\lambda x.(+ \; x \; a)) \; c)$
  $\underset{\beta}{\rightarrow} (+ \; c \; a)$ Higher-Order