

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Informatik I Vorlesung

Wintersemester 2016/2017

Mitschrieb von
Julian Wolff

Aktueller Stand 13. Dezember 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Scheme: Ausdrücke, Auswertung und Abstraktion	3
1.1	REPL	3
1.2	Literale	3
1.3	Zusammengesetzte Ausdrücke	4
1.4	Identifizier	4
1.5	Lambda-Abstraktion	4
1.6	Kommentare	5
1.7	Signaturen	5
1.8	Prozedur-Signaturen	6
1.9	Testfälle	6
1.10	Erinnerung	6
1.11	Top-Down-Entwurf (Programmieren mit "Wunschdenken")	7
1.12	Reduktionsregeln für Scheme (\rightsquigarrow)	8
1.12.1	Einschub: Lexikalische Bindung	9
1.13	Übliche Notation in der Mathematik: <u>Fallunterscheidung!</u>	9
1.14	Spezialform Fallunterscheidung (conditional)	9
1.15	Binäre Fallentscheidung:	10
1.16	Zusammengesetzte Daten	10
1.17	<u>Records</u> in Scheme	11
1.18	Spezialform check-property	11
1.18.1	Interaktion von Konstruktor und Selektor	11
1.19	Längen/Breitengrade	13
1.20	Signaturnamen	13
2	Gemischte Daten	13
2.1	Polymorphe Signaturen	15
2.2	Polymorphe Paare und Listen	16
2.3	Liste	16
2.4	Visualisierung von Listen	17
2.5	Spines (Rückrad)	17
2.6	Prozeduren über Listen	18
3	Neue Sprachebene "Macht der Abstraktion"	18
3.1	cat	18
3.2	Bewertungen	19
3.3	Pattern Matching für $\langle \text{pat}_i \rangle$	19
3.4	Rekursion über natürliche Zahlen	19
3.4.1	iterative Listenumkehr (backwards)	22

3.5	letrec	22
3.6	Induktive Definitionen	23
3.7	Beweisschema der vollständigen Induktion	23
3.8	Induktionsaxiom (P5) für M	23
3.8.1	Beispiel	23
3.8.2	Beispiel	24
3.8.3	Beispiel	24
3.8.4	Bemerkung	25
3.9	<u>Def</u> (Listen)	25
3.10	Schema der Listeninduktion	25

Scheme: Ausdrücke, Auswertung und Abstraktion

REPL

Definition	DrRacket
Interaktion	REPL

Die Anwendung von Funktionen wird in Scheme ausschließlich in Präfixnotation durchgeführt:

Mathematik	Scheme
44-2	(-44 2)
f(x,y)	(f x y)
$\sqrt{81}$	(sqrt 81)
$\lfloor x \rfloor$	(floor x)
9^2	(expt 9 2)
3!	(! 3)

Allgemein: $\langle \text{Funktion} \rangle \langle \text{argument} \rangle$

(+ 402) und (odd? 42) sind Beispiele für die Ausdrücke, die bei Auswertung einen Wert liefern. (Notation \rightsquigarrow) heißt Auswertung/Evaluation/Reduktion.

(+ 40 2) \rightsquigarrow 42
 (add? 42) \rightsquigarrow #f
Eval
Eval

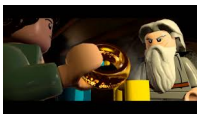
Interaktionsfenster:

Read \rightsquigarrow Eval \rightsquigarrow Print
Loop

REPL

Literale

Literale stehen für einen konstanten Wert (auch: Konstante) und sind nicht weiter reduzierbar.

<u>Literal</u>		<u>Signatur</u>
#t #f	(true, false, Wahrheitswerte)	boolean
„ac“ „x“ „“	(Zeichenketten)	string
0 1904 -42 007	(ganze Zahlen)	integer
0.42 3.1415 -273.15	(Fließkommazahlen)	real
1/2 3/4 -1/10	(rationale Zahlen)	rational
	(Bilder)	image

Zusammengesetzte Ausdrücke

Auswertung zusammengesetzte Ausdrücke (composite expression) in mehreren Schritten (Steps), "von innen nach außen", bis keine weitere Reduktion möglich ist:

$$(+ (+ 20 20) (+ 1 1)) \rightsquigarrow (+ 40 (+ 1 1)) \rightsquigarrow (+ 40 2) \rightsquigarrow 42$$

Beispiel:

$$0.7 + (\frac{1}{2}/0.25) - (0.6/0.3) = 0.7$$

⚠ Achtung: Scheme rundet bei Arithmetik mit Fließkommazahlen (interne Darstellung nicht präzise). Die Arithmetik mit rationalen Zahlen ist exakt.

Identifizier

Ein Wert kann an einen Namen (identifier) gebunden werden, durch (define <id> <expression>). Es erlaubt konsistente Wiederverwendung und dient der Selbstdokumentation von Programmen.

⚠ Achtung: Dies ist eine Spezialform und kein Ausdruck. Insbesondere besitzt diese Spezialform keinen Wert, sondern einen Effekt: der Name <id> wird durch den Wert von <expression> gebunden. Namen können in Scheme fast beliebig gewählt werden, solange

- die Zeichen ()[]{}",',;#\ | nicht vorkommen
- der name nicht einem numerischen Literal gleicht
- keinen Whitespaße (Leerzeichen, Tabulatoren, Neuwlines) enthalten sind

Beispiel: Euro \rightarrow US-\$

⚠ Achtung: Groß-/Kleinschreibung ist in Identifiern nicht relevant.

Lambda-Abstraktion

Eine Lambda-Abstraktion (auch: Funktion, Prozedur) erlaubt die Formulierung von Ausdrücken, in denen mittels Parametern von konkreten Werten abstrahiert wird:

$$(\text{lambda } (\langle p_1 \rangle \langle p_2 \rangle \dots) \langle \text{expr} \rangle)$$

expr ist der Rumpf und enthält Vorkommen der Parameter $\langle p_i \rangle$.

(lambda...) ist eine Spezialform. Der Wert der Lambda-Abstraktion #⟨procedure⟩
 Die Anwendung (auch: Applikation) der Lambda-Abstraktion führt zur Ersetzung
 aller Vorkommen der Parameter im Rumpf durch die angegebenen konkreten Argumente:

(lambda (days)(*days(*155 minutes-in-a-day)) 365) $\overset{!}{\rightsquigarrow}$ (*365 (155 minutes-in-a-day)) \rightsquigarrow ... \rightsquigarrow 81468000
--

Kommentare

In Scheme leitet ein Semikolon einen Kommentar ein, der bis zum Zeilenende reicht
 und von Racket bei der Auswertung ignoriert wird.

Prozeduren/Funktionen sollen im Programm eine ein- bis zweizeilige Kurzbeschreibung
 vorangestellt werden.


Signaturen

Eine Signatur prüft, ob ein Name ⟨id⟩ an einen Wert einer angegebenen Sorte ge-
 bunden wird. Signaturverletzungen werden protokolliert.

(: ⟨ id ⟩ ⟨signatur⟩)

Bereits eingebundene Signaturen sind:

- natural \mathbb{N}
- ingeger \mathbb{Z}
- rational \mathbb{Q}
- real \mathbb{R}
- number \mathbb{C}
- boolean
- string
- image

 Der Doppelpunkt „:“ ist eine Spezialform und hat daher keinen Wert, aber
 einen Effekt: Eine Signaturprüfung wird durchgeführt.

Prozedur-Signaturen

Prozedur-Signaturen spezifizieren Signaturen sowohl für die Parameter $\langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \dots$ als auch für den Ergebniswert der Prozedur:

$\parallel (:\langle \text{id} \rangle (\langle \text{signatur} - p_1 \rangle \langle \text{signatur} - p_2 \rangle \dots \rightarrow \langle \text{signatur} - \text{ergebnis} \rangle))$

Prozedur-Signaturen werden bei jeder Anwendung der Funktion $\langle \text{id} \rangle$ auf Verletzung geprüft.

Testfälle

Testfälle dokumentieren das erwartende Ergebnis einer Prozedur für ausgewählte Argumente:

$\parallel (\text{check-expect } \langle e_1 \rangle \backslash \text{la} \$ \backslash \text{text} \{e\} _2 \$ \backslash \text{ra})$

Werte den Ausdruck $\langle e_1 \rangle$ aus und teste, ob der erhaltene Wert der Erwartung (=Wert des Ausdruck $\langle e_2 \rangle$) entspricht.

Einer Prozedurdefinition sollten Testfälle direkt vorangestellt werden.

$\triangle!$ „check-expect“ ist eine Spezialform und hat daher keinen Wert. Eine Testverletzung wird als Effekt protokolliert.

Erinnerung

Konstruktionsanleitung für Prozeduren:

- kurzbeschreibung (ein- bis zweizeiliger Kommentar mit Bezug auf Parameternamen und Ergebnis)
- Signatur $(:\langle \text{name} \rangle (\dots \rightarrow))$
- Testfälle check-expect/ ceack-within
- Prozedurgerüst (define $\langle \text{name} \rangle$ (lambda ($\langle p_1 \rangle \langle p_2 \rangle$))
- Rumpf programmieren $\langle \text{rumpf} \rangle$)

Top-Down-Entwurf (Programmieren mit "Wunschdenken")

Beispiel: Sunset auf Tatooine (SW Episode IV)

Zeichne Szene zu Zeitpunkt t ($t=0 \dots 100$)

- (1) Himmel verfärbt sich von blau ($t=0$) zu rot ($t=100$)
- (2) Sonne(n) versinkt (bei $t=100$ hinter Horizont)
- (3) Luke startt auf Horizont (bei jeden t)

Zeichne Szene von hinten nach vorne:



Abbildung 1: Frodo auf dem Weg nach Mord... äh ich meine natürlich Luke auf Tatooine

```
;Zeichne Tatooine Sunset zu Zeitpunkt t
(:tatooine (natural -> image))
(define tatooine
  (lambda (t)
    (overlay/pinhole (luke t)
                     (sun t )
                     (sky t ))))
```


Reduktionsregeln für Scheme (\rightsquigarrow)

Fallunterscheidung je nach Ausdruck:

- Literal l (1 , $\#t$, "Karotte", ...) $[eval_1]$
 $l \rightsquigarrow l$ (keine Reduktion möglich)
- Identifier $\langle id \rangle$ $[eval_{id}]$
 $\langle id \rangle \rightsquigarrow$ Wert, an den $\langle id \rangle$ gebunden
- Lambda-Abstraktion $[eval_\lambda]$
 $(\text{lambda } (...)...) \rightsquigarrow (\text{lanmbda } (...)...)$
- Applikation ($f\ e_1 e_2 \dots$)

– f, e_1, e_2, \dots mittels \rightsquigarrow , erhalte $f', e'_1, e'_2 \dots$

–	<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>Operation auf $e'_1, e'_2 \dots$ anwenden</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>Falls f primitive (eingebaute) Operation</p> </div> <div style="text-align: right;"> <p>$[apply/prim]$</p> </div> </div>
–	<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>Argumentwerte e'_1, e'_2, \dots in den Rumpf einsetzen, den Rumpf mittels \rightsquigarrow reduzieren</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>falls f' Lambda-Abstraktion</p> </div> <div style="text-align: right;"> <p>$[apply_\lambda]$</p> </div> </div>

Wiederhole Anwendung von \rightsquigarrow bis keine Reduktion mehr möglich ist.

Beispiele:

$(+ 40 2)$

$\rightsquigarrow_{eval_{id}} (\# \langle \text{procedure:} + \rangle 40 2)$

$eval_{lit} \cdot 2$

$\rightsquigarrow_{apply_{prim}} 42$

$(\text{sqr } 9) \rightsquigarrow_{eval_{id}} (\text{lambda}(x)(*xx))$

$eval_{lit}$

$\rightsquigarrow_{apply_\lambda} (* 9 9)$

$\rightsquigarrow_{eval_{id}} (\# \langle \text{procedure : } * \rangle 9 9)$

$eval_{lit*2}$

$\rightsquigarrow_{apply_{prim}} 81$

Einschub: Lexikalische Bindung

Bezeichnen $(\text{lambda } (x) (* x x))$ und $(\text{lambda } (r) (* r r))$ die gleiche Funktion?

$(... 9) \rightsquigarrow^* 81$

\Rightarrow JA!

$\triangle!$ Das hat Einfluss auf das korrekte Einsetzen von Argumenten für Parameter $(s.\text{apply}_\lambda)$.

Das bindende Vorkommen eines Identifiers $\langle x \rangle$ im Programmtext kann systematisch bestimmt werden: Suche strikt "von innen nach außen" bis zum ersten

(1) $(\text{lambda } (x) ...)$

(2) $(\text{define } x ...)$

Das ist das Prinzip der lexikalischen Bindung ($\triangle!$ Syntaxprüfung in DrRacket)

Übliche Notation in der Mathematik: Fallunterscheidung!

$$\text{maximum } (x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \text{ falls } x_1 \geq x_2 \\ x_2 \leftarrow \text{sonst} \end{pmatrix}$$

Tests (auch Prädikate) sind Funktionen, die einen Wert der Signatur boolean liefern.

Typische Primitive in Tests:

```
(: = (number number -> boolean))
(: < (real real -> boolean))
(: string=? (string string -> boolean))
(: boolean=? (boolean boolean -> boolean))
(: zero? (number -> boolean))
```

Weiter: add?, even?, positive?, negative?, ...

Spezialform Fallunterscheidung (conditional)

$(\text{cond } (\langle t_1 \rangle \langle e_1 \rangle))$

$(\langle t_2 \rangle \langle e_2 \rangle)$

...

$(\langle t_n \rangle \langle e_n \rangle)$

$(\text{else } \langle e_{n+1} \rangle))$ <- optional

Führt die Tests in der Reihenfolge $\langle t_1 \rangle, \langle t_2 \rangle, \dots$ durch. Sobald $\langle t_i \rangle$ zu #t ausgewertet, werte Zweig $\langle e_i \rangle$ aus. $\langle e_i \rangle$ ist das Ergebnis der Fallunterscheidung. Wenn $\langle t_n \rangle$ #f liefert, dann liefere

$\left(\begin{array}{l} \text{Fehlermeldung "cond: alle Tests ergeben \#f falls kein else- Zweig, sonst} \\ \langle e_{n+1} \rangle \end{array} \right)$

Die Signatur one-of lässt genau einen der n aufgezählten Werte zu:

$(\text{one-of } \langle e_1 \rangle \langle e_2 \rangle \dots \langle e_n \rangle)$

Reduktion von cond $[eval_{cond}]$

- $(\text{cond } (\langle t_1 \rangle \langle e_1 \rangle) (\langle t_2 \rangle \langle e_2 \rangle) \dots)$
 - (1) Reduziere $\langle t_1 \rangle$, erhalte $\langle t'_1 \rangle$
 - (2) $\langle e_1 \rangle$ falls $\langle t_1 \rangle = \#t$
 $(\text{cond } (\langle t_2 \rangle \langle e_2 \rangle) \dots)$
- $(\text{cond } (\text{else} \langle e_{n+1} \rangle)) \rightsquigarrow \langle e_{n+1} \rangle$ ($\langle t_1 \rangle, \langle e_2 \rangle, \dots$ sind nicht ausgewertet
sonst
 $\langle e_1 \rangle$ nicht ausgewertet)
- $(\text{cond }) \rightsquigarrow$ Fehler "cond alle Tests ergeben #f

Binäre Fallentscheidung:

$$\begin{array}{lcl}
 (\text{if } \langle t_1 \rangle \langle e_2 \rangle & (\text{cond } (\langle t_1 \rangle \\
 \langle e_3 \rangle) & \equiv & (\text{else } \langle e_2 \rangle) \\
 \langle e_1 \rangle)) & &
 \end{array}$$

Zusammengesetzte Daten

Daten können interessante interne Struktur (Komponenten) aufweisen.

Beispiel: Ein Star Wars Charakter:

name	"Luke Skywalker"
jedi?	#f
force	25

Beispiel:

```

;Ein Charakter (character) besteht aus
; - Name (name)
; - Jedi-Status (jedi?)
; - Staerke der Macht (force)
(define-record-procedures character
  make-character
  character?
  ( character-name
    character-jedi?
    character-force))

(make-character n j f) ~> ( <)Tabelle))) Konstruktion
(character-name <Tabelle>) ~> n Selektor (komponenten auslesen)
(character-jedi? <Tabelle>)) ~> j
(character-force <Tabelle>)) ~> f

```

Records in Scheme

Record-Definition legt fest:

- Record-Signatur (Name)
- Konstruktor (bau aus komponenten einen Record)
- Prädikat (später)
- Liste von Selektoren (lesen je eine Komponente des Record)

(define-record-procedures $\langle t \rangle$ Signaturname

make- $\langle t \rangle$;Konstruktor

$\langle t \rangle?$;Prädikat

($\langle t \rangle$ - $\langle comp_1 \rangle$;Liste der Selektoren

... $\langle t \rangle$ - $\langle comp_n \rangle$))

Liste der Selektoren legt Komponenten (Anzahl, Reihenfolge, Namen) fest. Signatur des Konstruktors/der Selektoren für Record-Signatur $\langle t \rangle$ mit n Komponenten $\langle comp_1 \rangle$... $\langle comp_n \rangle$:

(: make $\langle t \rangle$ ($\langle t \rangle$... $\langle t_n \rangle \rightarrow \langle t \rangle$))
n Komponentensignaturen

(: $\langle t \rangle$ - $\langle comp_1 \rangle$ ($\langle t \rangle \rightarrow \langle t_1 \rangle$))

\forall string n, boolean j, natural f:

(character-name (make-character n j f)) \rightsquigarrow n

(character-jedi? (make-character n j f)) \rightsquigarrow j

(character-force (make-character n j f)) \rightsquigarrow f

Aussagen über die Interaktion von zwei (oder mehr) Funktionen: algebraische Eigenschaft.

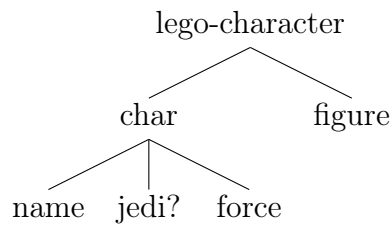
Spezialform check-property

(check-property (for-all(($\langle id_1 \rangle \langle signatur_1 \rangle$) ... ($\langle id_n \rangle \langle signatur_n \rangle$)) $\langle expr \rangle$)) $\langle expr \rangle$ ist das Prädikat, das sich auf $\langle id_q \rangle$... $\langle id_n \rangle$ bezieht.

Test erfolgreich, falls $\langle expr \rangle$ für beliebige Bindungen für $\langle id_1 \rangle$... $\langle id_n \rangle$ immer #t ergibt.

Interaktion von Konstruktor und Selektor

(check-property (for-all ((n string) (j boolean) (f natural))) (string=? (character-name (make-character n j f)) n))



Beispiel: Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist mindestens so groß wie jede dieser Zahlen.

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N} : x_1 + x_2 \geq \max(x_1, x_2)$
 (check-property (for-all ((x_1 natural)
 (x_2 natural))
 ($\geq (+ x_1 x_2) (\max x_1 x_2)$))))

Konstruktion von Funktionen $\langle f \rangle$, die zusammengesetzte Daten der Signatur $\langle t \rangle$ konsumiert.

- Welchen Record-Komponenten $\langle comp_i \rangle$ sind relevant für $\langle f \rangle$?
- \Rightarrow Schablone:
 $(:\langle f \rangle (\dots \langle t \rangle \dots \rightarrow \dots))$
 (define $\langle f \rangle$
 (lambda ($\dots r \dots$)
 $\dots (\langle t \rangle\text{-}\langle comp_i \rangle r) \dots$)
 (: not (boolean \rightarrow boolean)))

Prozedur $\langle f \rangle$, die zusammengezte Daten der Signatur $\langle t \rangle$ konstruiert/produziert.

- Konstruktoraufruf für $\langle t \rangle$ muss enthalten sein!

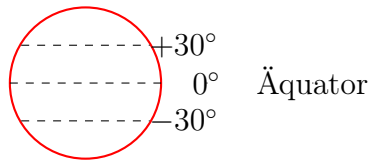
```

|| (: <f> ( ... -> <t> ))
|| (define <f>
||   (lambda (...)
||     (... (make-<t> ...) ...))
  
```

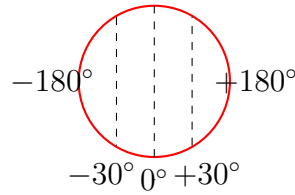
char	<table> <tr> <td>name</td><td></td></tr> <tr> <td>jedi?</td><td></td></tr> <tr> <td>force</td><td></td></tr> </table>	name		jedi?		force	
name							
jedi?							
force							
figure	(BILD)						

Längen/Breitengrade

Breitengrade (latitude)



Längengrade (longitude)



Sei $\langle p \rangle$ ein Prädikat mit Signatur $(\langle t \rangle \rightarrow \text{boolean})$. Eine Signatur

$\parallel (\text{predicate } \langle p \rangle)$

gilt für jeden Wert x mit Signatur $\langle t \rangle$ für den zusätzlich $(p(\langle p \rangle x) \rightsquigarrow \#t)$ gilt. Signatur $(\text{predicate } \langle p \rangle)$ ist damit spezifischer (restriktiver) als Signatur $\langle t \rangle$.

Signaturnamen

Einführung eines neuen Signaturnamens $\langle \text{new-}t \rangle$ für die Signatur $\langle t \rangle$:

$\parallel (\text{define } \langle \text{new-}t \rangle (\text{signature } \langle t \rangle))$

Beispiele:

```
 $\parallel$  (define farbe
      (signature (one-of "Karo" "Herz" "Pik" "Kreuz")))
 $\parallel$  (define latitude
      (signature (predicate latitude?)))
```

Übersetze eine Ortsangabe mittels Google Geocoding API in eine Position auf der Erdkugel:

$\parallel (: \text{geocoder } (\text{string} \rightarrow (\text{mixed geocode geocode} -)))$

Ein geocode besteht aus:

	<u>Signatur</u>
Adresse (address)	string
Ortsangabe (loc)	location
Nordostecke (northeast)	location
Südwestecke (southwest)	location
Typ (type)	string
Genauigkeit (accuracy)	string

Gemischte Daten

Die Signatur mixed

$\parallel (\text{mixed } \langle t_1 \rangle \dots \langle t_n \rangle)$

ist gültig für jeden Wert, der mindestens eine Signatur $\langle t_1 \rangle \dots \langle t_n \rangle$ erfüllt.

Beispiel: Datendefinition:

- ein Geocode (Signatur geocode)
- eine Fehlermeldung (Signatur geocode-error)

```
|| (mixed geocode geocode-error)
```

Beispiel

```
|| (eingebaute Funktion string -> number)
|| (: string -> number (string -> mixed number (one-of #f)))
```

Das Prädikat $\langle t \rangle?$ einer Record-Signatur $\langle t \rangle$ unterscheidet Werte der Signatur $\langle t \rangle$ von allen anderen Werten:

```
|| (: <t>? (any -> boolean))
```

Auch: Prädikate für eingebaute Signaturen.

number?, complex?, real?, rational?, integer?, Prozeduren, die gemischte
natural?, string?, boolean?

Daten der Singatuen $\langle t_1 \rangle \dots \langle t_n \rangle$ konsumieren:

```
|| (: <f>((mixed <t1> ... <t2>) -> ...))
|| (define <f>
  (lambda (x)
    (cond((<t1>? x) ...)
      ...
      ((<t_n>? x) ...))))
```

Mittels let lassen sich Werte an lokale Namen! binden:

```
|| (let ((<id1> <e2>) ... (<id_n> <e_n>)) e)
```

Die Ausdrücke $\langle e_1 \rangle \dots \langle e_n \rangle$ werden parallel ausgewertet.

$\Rightarrow \langle id_1 \rangle \dots \langle id_n \rangle$ können in $\langle e \rangle$ (und nur dort!) verwendet werden.

Der Wert des let-Ausdruck ist der Wert von e. "nur dort": Verwendung nur in
in $\langle e \rangle$, nicht in den in $\langle e_i \rangle$!

Lokal: Verwendung nicht außerhalb des (let...)

 Sprachlevel "Die Macht der Abstraktion"

```
|| (let () ≡ (lambda () ))
```

„Syntaktischer Zucker“ = Dinge die nett sind aber ersetzt werden können.

```
|| (check-error <e> <msg>)
```

erwartet Abbruch mit Fehlermeldung $\langle msg \rangle$. Erzwingen des Programmabbruches
mittels (violation $\langle msg \rangle$)

Polymorphe Signaturen

Beobachtung: Manche Prozeduren arbeiten völlig unabhängig von den Signaturen ihrer Argumente:

parametrisch polymorphe Prozeduren (griechisch: vielgestaltig). Nutze Signaturvariablen:
Beispiele:

```
; Identitaet
(: id ( %a -> %a))
(define id (lambda (x) x))

; konstante Funktion (ignoriert zweites Argument)
(: const( %a %b -> %a)) "Anstatt %b kann auch any benutzt werden"
"
(define const
  (lambda (x y) x))

; Projektion (ein Argument auswaehlen)
(: proj ((one-of 1 2) %a %b -> (mixed %a %b)))
(define proj
  (lambda (i x y)
    (cond ((= i 1) x)
          ((= i 2) y))))
```

Beachte: Parametrisch polymorphe Prozeduren "wissen nichts" über ihre Argumente mit Signatur %a, %b, ... und können diese nur reproduzieren oder an andere polymorphe Prozeduren weiterreichen.

Eine polymorphe Signatur steht für die Signaturen, in denen die Signaturvariablen konistent durch konkrete Signaturen ersetzt werden.

Beispiel:

Wenn eine Prozedur (%a number %b -> %a) erfüllt, dann auch
(string number boolean -> string)
(boolean number natural -> boolean)
(string number string -> string)
(number number number -> number)

Polymorphe Paare und Listen

```
; Ein polymorphes Paar (pair) besteht aus  
;- erster Komponente (first)  
;- zweite Komponente (rest)  
; wobei die Komponenten jeweils beliebige Werte sind:  
  
(define-record-procedures-parametric pair pair-of  
  make-pair  
  pair?  
  (first  
   rest))
```

(pair-of $\langle t_1 \rangle \langle t_2 \rangle$)

ist eine Signatur für Paare, deren erste und zweite Komponente von der Signatur $\langle t_1 \rangle$ bzw. $\langle t_2 \rangle$ sind.

```
(: make-pair ( %a %b -> (pair-of %a %b)))  
(: first ((pair-of %a %b) -> %a))  
(: rest ((pair-of %a %b) -> %b))
```

Liste

Eine Liste von Werten der Signatur $\langle t \rangle$, (list-of $\langle t \rangle$), ist entweder

- leer (Signatur empty-list) oder
- ein Paar (Signatur pair-of) aus
 - einem Listenkopf (Signatur $\langle t \rangle$) und
 - einer Restliste (Signatur (list-of $\langle t \rangle$)))

```
(define list-of  
  (lambda (t)  
    (signature (mixed empty-list  
                      (pair-of t (list-of t))  
                      ))))
```

(list-of $\langle t \rangle$). Listen, deren Elemente die Signatur $\langle t \rangle$ besitzen.

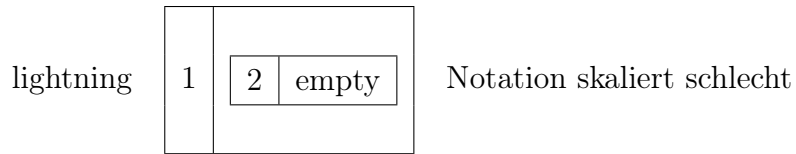
Die Signatur empty-list ist bereits in DrRacket vordefiniert.

Ebenfalls vordefiniert ist:

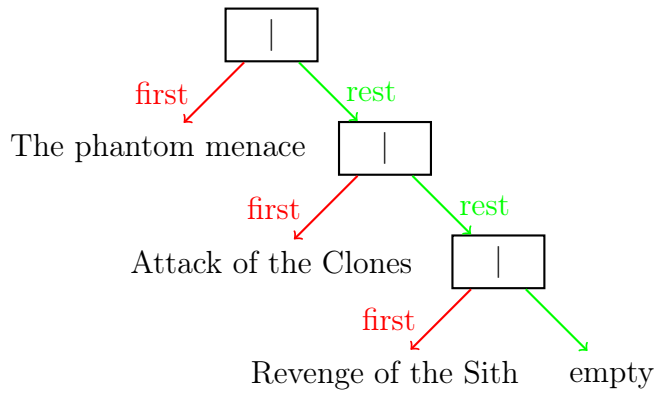
- (: empty empty-list)
- (: empty? (any -> boolean))

Visualisierung von Listen

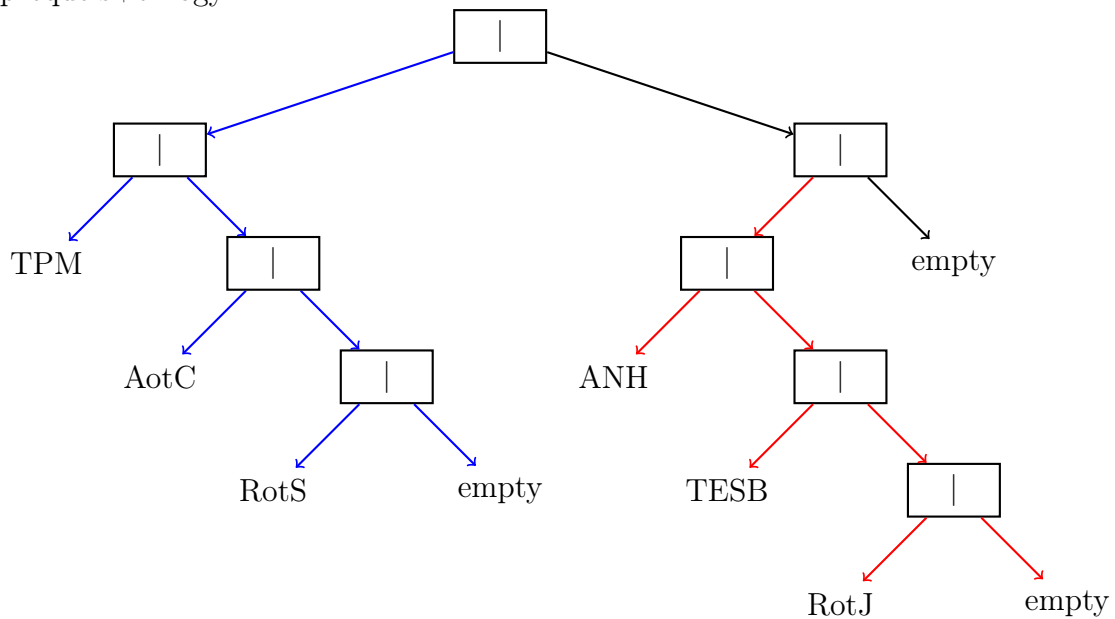
```
|| (make-pair 1 (make-pair 2 empty))
```



Spines (Rückrad)



prequels+trilogy:



Prozeduren über Listen

Schablonen für gemischte und zusammengesetzte Daten

Beispiel:

```
(: list-sum ((list-of number) -> number))

(check-expect (list-sum empty) 0)
(check-expect (list-sum (make-pair 40 (make-pair 2 empty))) 42)

(define list-sum
  (lambda (xs)
    (cond ((empty? xs) 0)
          ((pair? xs) (+ (first xs) (list-sum (rest xs)))))))
```

Schablone für Funktion $\langle f \rangle$, die Liste xs konsumiert:

```
(: <f> ((list-of <t1>) -> <t2>))
(define <f>
  (lambda (xs)
    (cond ((empty? xs) ... )
          ((pair? xs) ... (first xs) ... (<f> (rest xs)) ...))))
                                          Signatur t_1

                                          signatur t_2
```

Neue Sprachebene "Macht der Abstraktion"

- Signatur (list-of %a) eingebaut
- Neuer syntaktischer Zucker eingebaut:
 $(\text{list } \langle e_1 \rangle \langle e_2 \rangle \dots \langle e_n \rangle)$
 \equiv
 $(\text{m-p } \langle e_1 \rangle (\text{m-p } \langle e_2 \rangle$
 \dots
 $(\text{m-p } \langle e_n \text{ empty} \rangle \dots))$
- Ausgabeformat für nicht-leere Listen
 $\# \langle \text{list } \langle e_1 \rangle \langle e_2 \rangle \dots \langle e_n \rangle \rangle$

cat

;Füge Listen xs, xy zusammen (concatenate)

Zwei Fälle (xs leer oder nicht-leer)

- 1) $\overset{xs}{empty} \quad \overset{ys}{y_1 y_2 y_n} \quad \overset{(catxsxy)}{y_1 y_2 y_n}$
- 2) $x_1 x_2 x_n \quad y_1 y_2 y_n \quad \overset{x_1 x_2 x_n y_1 y_2 y_n}{\underset{restxs \quad ys}{(cat(restxs)ys)}}$

Bewertungen

- Die Länge von xs (hier n) bestimmt die Anzahl der rekursiven Aufrufe.
- Auf ys werden keine Selektoren angewandt.

Spezialform match vergleicht einen Wert $\langle e \rangle$ mit gegebenen Patterns $\langle pat_1 \rangle \langle pat_2 \rangle, \dots \langle pat_n \rangle$. Falls $\langle pat_i, 1 \leq i \leq n$, das erste Pattern ist, das auf $\langle e \rangle$ matched, ist Zweig $\langle e_i \rangle$ das Ergebnis (ansonsten wird die Aiswertung mit "keiner der Zewige passte") abgegeben.

```

| (match <e>
|   (<pat1> <e1>)
|   (<pat2> <e2>)
|   (<patn> <en>))

```

Pattern Matching für $\langle pat_i \rangle$

- Literal $\langle l \rangle$:
 $\langle e \rangle$ matched, falls $\langle e \rangle \rightsquigarrow \langle l \rangle$
- "Don't care" $_$:
 $\langle e \rangle$ matched immer
- Variable $\langle v \rangle$
 $\langle e \rangle$ matched immer, danach ist $\langle v \rangle$ an den Wert von $\langle e \rangle$ $n \langle e_i \rangle$ gebunden
- Record-Konstruktor $(\langle c \rangle \langle pat_{i1} \rangle \langle pat_{ik} \rangle, k \geq \emptyset)$
 $\langle e \rangle$ matched, wenn es durch $(\langle c \rangle \langle x_1 \rangle \langle x_k \rangle)$ konstruiert wurde und $\langle x_j \rangle$ auf $\langle pat_{ij} \rangle$ matched, $1 \leq j \leq k$

⚠ Fall 4 ermöglicht Pattern Matching auf komplex konstruierten Werten.

Rekursion über natürliche Zahlen

Die natürlichen Zahlen (vgl. gemischte Daten). Eine natürliche Zahl (natural) ist entweder

- die 0 (zero)
- die Nachfolger (succ) einer natürlichen Zahl

$\mathbb{N} = \{0, (\text{succ } 0), (\text{succ } (\text{succ } 0)), \dots\}$

Konstruktoren:

```

| (: zero natural)
| (define zero 0)

| (: succ (natural -> natural))
| (define succ
  | (lambda (n)
    | (+ n 1)))

```

Bedingte algebraische Eigenschaften (siehe check-property) $(= \Rightarrow \langle p \rangle \langle e \rangle)$ Nur, wenn $\langle p \rangle \rightsquigarrow \#t$, wird der Ausdruck $\langle e \rangle$ ausgewertet und getestet ob $\langle e \rangle \rightsquigarrow \#t$.

Beispiel: Fakultätsfunktion $n!$ ($n \in \mathbb{N}$) :

$0! = 1$

$n! = n \cdot (n - 1)! \equiv (\text{succ } n)! = (\text{succ } n)! \cdot n!$

$$\begin{aligned}
 3! &= 3 \cdot 2! \\
 &= 3 \cdot (2 \cdot 1!) \\
 &= 3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 0!)) \\
 &= 3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 1)) \\
 &= 6 \\
 10! &= 3628800
 \end{aligned}$$

```

| ; Berechne n!
| (: factorial (natural -> natural))
| (define factorial
  | (lambda (n)
    | (cond ((= n 0) ...)
          | ((< n 0) (* (factorial (- n 1)) n))))))

```

Schablone für Funktionen $\langle f \rangle$, die natürliche Zahlen konsumieren.

```

| (: <f> (natural -> <t>))
| (define <f>
  | (lambda (n)
    | (cond ((= n 0) ...)
          | ((> n 0) ... (<f> (- n 1) ... )))))

```

Satz:

Eine Funktion, die nach der Schablone für Listen oder natürliche Zahlen geschrieben ist, terminiert immer. (=liefert immer ein Ergebnis)

Reduktion kann durchaus zur Konstruktion von Ausdrücken führen, die zunehmende Größe aufweisen (Für factorial bestimmt das Argument die Größe.) Wenn möglich, erzeuge Reduktionsprozesse, die konstanten Platzverbrauch - unabhängig von Funktionsargumenten - benötigen. Beobachtung (Assoziativität von *)

$$\begin{aligned}
 & (* 10 (* 9 (* 8 (* 7 (* 6 (factorial 5)))))) \\
 = & (* (* (* (* (* 10 9) 8) 7) 6) (factorial 5)) \\
 & (* 30240 (factorial 5))
 \end{aligned}$$

⇒ Multiplikationen können vorgezogen werden.

Idee: Führe Multiplikation jeweils sofort aus. Schleife des Zwischenergebnis (akkumulierendes Argument) durch die Berechnung. Am Ende enthält der Akkumulator das Endergebnis.

Berechne 5!:

```
|| (: fac-worker (natural natural -> natural))
```

n	acc
5	1
4	5
3	20
2	60
1	120
0	120

```
|| (: fac-worker (natural natural -> natural))
||
|| (define fac-worker
||   (lambda (n acc)
||     (cond ((= n 0) acc)
||           ((> n 0) (fac-worker (- n 1) (* acc n))))))
||
|| ; Berechne n! [wrapper]
|| (: fac (natural -> natural))
|| (define fac
||   (lambda (n)
||     (fac-worker n 1)))
```

Ein Reduktionsprozess ist iterativ, falls seine Größe konstant bleibt.

Damit: factorial nicht iterativ
 fac-worker iterativ

Wieso ist fac-worker iterativ? Der rekursive Aufruf ersetzt den aktuell reduzierten Ausdruck vollständig. Es gibt keinen Kontext (umgebenden Ausdruck), der auf das Ergebnis des rekursiven Aufrufs "wartet".

Kontext des rekursiven Aufrufes in

- factorial: (* n \square)
 Hole
- fac-worker: -keiner-

Ein Prozeduraufruf ist endrekursiv (tail call), wenn er keinen Kontext besitzt.

Prozeduren, die nur endrekursive Prozeduraufrufe enthalten, heißen selbst endrekursiv.

Beobachtung: Berechnung von (rev (from-to 1 1000)):

⇒ Anzahl Aufrufe von make-pair $1000+999+998+\dots+1$ auf einer Liste der Länge n:

iterative Listenumkehr (backwards)

Berechnung von (backwards (list 1 2 3)).

xs	acc
(list 1 2 3)	empty
rest	(make-pair 1 acc)
(list 2 3)	(list 1)
rest	(make-pair 2 acc)
(list 3)	(list 2 1)
rest	(make-pair 3 acc)
empty	(list 3 2 1)

letrec

$$\begin{array}{l} (\text{letrec } ((\langle id_1 \rangle \langle e_1 \rangle) \\ \quad \dots \\ \quad (\langle id_n \rangle \langle e_n \rangle)) \\ \langle e \rangle) \end{array}$$

22

Induktive Definitionen

Konstruktive Definition der natürlichen Zahlen \mathbb{N} :

Def. (Peano-Axiome)

- (P1) $0 \in \mathbb{N}$ Null
- (P2) $\forall n \in \mathbb{N}: \text{succ}(n) \in \mathbb{N}$ Nachfolger
- (P3) $\forall n \in \mathbb{N}: \text{succ}(n) \neq 0$ succ ist
- (P4) $\forall n, m \in \mathbb{N}: \text{succ}(m) = \text{succ}(n) \Leftrightarrow m = n$ injektiv (erzeugt neue Elemente)
- (BILD TAFEL)
- (P₅) Induktionsaxiom:
 Für jede Menge $M \subseteq \mathbb{N}$:
 Falls $0 \in M$ und $\forall n: (n \in M \Rightarrow \text{succ}(n) \in M)$,
 dann $M = \mathbb{N}$. " \mathbb{N} enthält nicht mehr als 0 und die durch succ () generierten Elemente."
 "Nichts sonst ist in \mathbb{N} "

Beweisschema der vollständigen Induktion

Sei $P(n)$ eine Eigenschaft einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ (Prädikat):

(: P (natural \rightarrow boolean))

Ziel: Zeige $\forall n \in \mathbb{N}: P(n)$

Definiere: $M := \{n \in \mathbb{N} | P(n) \text{ gilt}\} \subseteq \mathbb{N}$ " M enthält alle n , für die $P(n)$ gilt."

Induktionsaxiom (P5) für M

Falls	Falls
$0 \in M$	$P(0)$ (INDUKTIONSBASIS)
und	und
$\forall n: (n \in M \Rightarrow \text{succ}(n) \in M)$	$\forall n: (P(n) \Rightarrow P(\text{succ}(n)))$ (INDUKTIONSSCHRITT)
dann	dann
$M = \mathbb{N}$	$\forall n \in \mathbb{N}: P(n)$

Beispiel

$$1 = 1$$

$$1+3 = 4$$

$$1+3+5 = 9$$

$$1+3+5+7 = 16$$

$$\sum_{i=0}^n (2i+1) = (n+1)^2 \equiv P(n)$$

Summe der ersten $n+1$ ungeraden natürlichen Zahlen

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N}: P(n)$

(1) Induktionsbasis $P(0)$

$$\sum_{i=0}^0 (2i + 1) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 = (0 + 1)? \checkmark$$

(2) Induktionsschritt: $\forall n : (P(n) \Rightarrow P(n + 1))$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} (2i + 1) &\stackrel{\sum}{=} \sum_{i=0}^n (2i + 1) + 2(n + 1) + 1 \\ &\stackrel{P(n)}{=} (n + 1)^2 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= (n + 2)^2 \checkmark \end{aligned}$$

Beispiel

```

|| (define factorial
||   (lambda (k)
||     (if (= k 0) 1
||         (* k (factorial (- k 1))))))

```

$P(n) \equiv (\text{factorial } n) = \underline{n!}$ X: Racket-Repräsentation der Zahl X

Zeige : $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

(1) Induktionsbasis $P(0)$

$$\begin{aligned} (\text{factorial } 0) &\rightsquigarrow ((\text{lambda } (k) \dots) \underline{0}) \\ &\rightsquigarrow (\text{if } (= 0 \underline{0}) \underline{1} \dots) \\ &\rightsquigarrow (\text{if } \#t \underline{1} \dots) \\ &\rightsquigarrow \underline{1} = \underline{0!} \end{aligned}$$

(2) Induktionsschritt

$$\begin{aligned} \forall n : (P(n) \Rightarrow P(n + 1)) : \\ (\text{factorial } \underline{n+1}) \\ &\rightsquigarrow ((\text{lambda } (k) \dots) \underline{n+1}) \\ &\rightsquigarrow (\text{if } (= \underline{n+1} \underline{0}) \dots (* \dots)) \\ &\rightsquigarrow (\text{if } \#f \dots (* \dots)) \\ &\rightsquigarrow (* \underline{n+1} (\text{factorial } (- \underline{n+1} \underline{1}))) \quad \text{Annahme: - realisiert Differenz korrekt} \\ &\rightsquigarrow (* \underline{n+1} (\text{factorial } n)) \\ \underline{P(n)} (* \underline{n+1} \underline{n!}) &= (\underline{n+1})! \checkmark \quad \text{Annahme: + realisiert Multiplikation korrekt.} \end{aligned}$$

Beispiel

Jedes f, das sich an die Schablone für Funktionen über natürlichen Zahlen hält, liefert immer ein Ergebnis (terminiert immer).

Sei

```

|| (: f (natural -> %a ))

```

also definiert durch:

```

|| (define f
||   (lambda (n)
||     (if (= n 0)
||         basis
||         (step (f (- n 1)) n))))
||

```

Bemerkung

```

|| (: basis %a)
|| (: step ( %a natural -> %a))
||

```

totale Funktion

Dann gilt:

$P(n) \equiv$ (f n) terminiert mit Ergebnis
der Signatur %a

Beweis

(1) Induktionsbasis $P(0)$

$(f \underline{0})$
 $\rightsquigarrow^* (if (= \underline{0} 0) \text{basis } \dots)$
 $\rightsquigarrow (if \#t \text{basis})$
 $\rightsquigarrow \text{basis } \checkmark$

(2) Induktionsschritt $\forall n : (P(n) \Rightarrow P(n+1))$

$(f \underline{n+1})$
 $\rightsquigarrow (if (= \underline{n+1} 0) \dots (\text{step} \dots))$
 $\rightsquigarrow (if \#f \dots (\text{step } \dots))$
 $\rightsquigarrow (\text{step } (f (- \underline{n+1} 1)) \underline{n+1})$
 $\rightsquigarrow (\text{step } \underbrace{(f \underline{n})}_{\text{terminiert mit Ergebnis R}} \underline{n+1})$
 $\overset{P(n)}{\rightsquigarrow} (\text{step R } \underline{n+1}) \text{ terminiert } \checkmark$

Def (Listen)

Die Menge M^* (= Listen mit Elementen aus M , (list-of M)) ist induktiv definiert:

- (l1) $\text{empty} \in M^*$
- (l2) $\forall c \in M, xs \in M^* : (\text{make-pair } c \text{ } xs) \in M$
- (l3) Nichts sonst ist in M^*

Schema der Listeninduktion

Sei $P(xs)$ eine Eigenschaft von Listen über M :

\parallel (: P ((list-of M) -> boolean))
 Falls $P(\text{empty})$
 und $\forall x \in M, xs \in M^*: (P(xs) \Rightarrow P(\text{make-pair } x \text{ } xs))$

dann $\forall xs \in M^*: P(xs)$

Beispiel: Eigenschaften von cat (append).

```

(define cat
  (lambda (xs ys)
    (cond ((empty? xs) ys)
          ((pair? xs) (make-pair (first xs)
                                   (cat (rest xs) ys))))))

```

- (1) (cat empty ys) = ys
 - (2) (cat xs empty) = xs
 - (3) (cat (cat xs ys) zs) = (cat xs (cat ys zs))
- "(M*, cat, empty) ist ein Monoid"
- (\mathbb{N} , +, 0)
- (\mathbb{N} , +, 1)

Beweise

(1) (cat empty ys) $\overset{*}{\rightsquigarrow}$ ys ✓

(2) $P(xs) \equiv (\text{cat } xs \text{ empty}) = xs$

Induktionsbasis $P(\text{empty})$: (cat empty empty) $\stackrel{(1)}{=} \text{empty}$ ✓

Induktionsschritt $\forall x \in M, xs' \in M^*: (P(xs') \Rightarrow P(\text{make-pair } x \text{ } xs'))$

(cat (make-pair x xs') empty)

$\overset{*}{\rightsquigarrow}$ (make-pair) (HIER FEHLT NOCH WAS)

$\overset{*}{\rightsquigarrow}$ (make-pair x (cat xs' empty))

$\stackrel{I.V.}{=} (\text{make-pair } x \text{ } xs')$

(3) $P(xs) \equiv (\text{cat } (\text{cat } xs \text{ } ys) \text{ } zs) = (\text{cat } xs \text{ } (\text{cat } ys \text{ } zs))$

ys, zs $\in M^*$ beliebig

Induktionsbasis $P(\text{empty})$ (cat (cat empty ys) zs)

$\stackrel{(1->)}{=} (\text{cat } ys \text{ } zs)$

$\stackrel{(1<-)}{=} (\text{cat empty } (\text{cat } ys \text{ } zs))$ ✓

Induktionsschritt $\forall x \in M, xs' \in M^*: (P(xs') \Rightarrow P(\text{make-pair } x \text{ } xs'))$

(cat (cat (make-pair x xs') ys) zs)

$$\begin{aligned}
& \stackrel{*}{=} (\text{cat } (\text{make-pair } x \text{ (cat } xs' \text{ ys)}) \text{ zs}) \\
& \rightsquigarrow^* (\text{make-pair } x \text{ (cat (cat } xs' \text{ ys) zs)}) \\
& \stackrel{I.V.}{=} (\text{make-pair } x \text{ (cat } xs' \text{ (cat ys zs)})) \\
& \rightsquigarrow^* (\text{cat (make-pair } x \text{ xs') (cat ys) zs}) \checkmark
\end{aligned}$$

Beispiel: Interaktion von length/cat

```

|| (define length
||   (lambda (xs)
||     (cond ((empty? xs) 0)
||           ((pair? xs) (+1 (length (rest xs))))))
||

```

$ys \in M^*$ beliebig $P(xs) \equiv (\text{length (cat xs ys)}) = (+ (\text{length xs}) (\text{length ys}))$

Induktionsbasis $P(\text{empty})$

$$\begin{aligned}
& (\text{length (cat empty ys)}) \\
& \stackrel{(1)}{=} (\text{length ys}) \\
& \stackrel{(+)}{=} (+ 0 (\text{length ys})) \checkmark
\end{aligned}$$

Induktionsschritt $\forall x \in M, xs' \in M^*: (P(xs') \Rightarrow P((\text{make-pair } x \text{ xs'})))$

$$\begin{aligned}
& (\text{length (cat (make-pair } x \text{ xs') ys)}) \\
& \rightsquigarrow^* (\text{length (make-pair } x \text{ (cat xs' ys)})) \\
& \rightsquigarrow^* (+ 1 (\text{length (rest (make-pair } x \text{ (cat xs' ys)))))) \\
& \rightsquigarrow (+ 1 (\text{length (cat xs' ys)})) \\
& \stackrel{I.V.}{=} (+ 1 (+ (\text{length xs'}) (\text{length ys}))) \\
& \stackrel{(+)\text{Assoziativ}}{=} (+ (+ 1 (\text{length xs'})) (\text{length ys})) \\
& \rightsquigarrow^* (+ (\text{length (make-pair } \underset{\text{beliebig}}{x} \text{ xs')})) (\text{length ys})) \checkmark
\end{aligned}$$