

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Informatik I Vorlesung

Wintersemester 2016/2017

Mitschrieb von
Julian Wolff

Aktueller Stand 6. Februar 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Scheme: Ausdrücke, Auswertung und Abstraktion	4
1.1	REPL	4
1.2	Literale	4
1.3	Zusammengesetzte Ausdrücke	5
1.4	Identifizier	5
1.5	Lambda-Abstraktion	5
1.6	Kommentare	6
1.7	Signaturen	6
1.8	Prozedur-Signaturen	7
1.9	Testfälle	7
1.10	Erinnerung	7
1.11	Top-Down-Entwurf (Programmieren mit "Wunschdenken")	8
1.12	Reduktionsregeln für Scheme (\rightsquigarrow)	9
1.12.1	Einschub: Lexikalische Bindung	10
1.13	Übliche Notation in der Mathematik: <u>Fallunterscheidung!</u>	10
1.14	Spezialform Fallunterscheidung (conditional)	10
1.15	Binäre Fallentscheidung:	11
1.16	Zusammengesetzte Daten	11
1.17	<u>Records</u> in Scheme	12
1.18	Spezialform check-property	12
1.18.1	Interaktion von Konstruktor und Selektor	12
1.19	Längen/Breitengrade	14
1.20	Signaturnamen	14
2	Gemischte Daten	14
2.1	Polymorphe Signaturen	16
2.2	Polymorphe Paare und Listen	17
2.3	Liste	17
2.4	Visualisierung von Listen	18
2.5	Spines (Rückrad)	18
2.6	Prozeduren über Listen	19
3	Neue Sprachebene "Macht der Abstraktion"	19
3.1	cat	19
3.2	Bewertungen	20
3.3	Pattern Matching für $\langle \text{pat}_i \rangle$	20
3.4	Rekursion über natürliche Zahlen	20
3.4.1	iterative Listenumkehr (backwards)	23

3.5	letrec	23
3.6	Induktive Definitionen	24
3.7	Beweisschema der vollständigen Induktion	24
3.8	Induktionsaxiom (P5) für M	24
3.8.1	Beispiel	24
3.8.2	Beispiel	25
3.8.3	Beispiel	25
3.8.4	Bemerkung	26
3.9	<u>Def</u> (Listen)	26
3.10	Schema der Listeninduktion	26
3.11	Prozeduren höherer Ordnung (HIGHER-ORDER FUNCTIONS) . . .	28
3.11.1	Beispiel (map f xs)	29
3.11.2	Hinweis	29
3.11.3	Listenfaltung	29
3.11.4	Beispiele (Reduktionen von xs)	30
3.12	Universe	31
3.13	Komposition von Funktionen (allgemein)	31
3.14	Currying	32
3.15	Erinnerung	33
3.16	Streams (stream-of % a)	33
3.17	Vergleich	34
3.17.1	Verzögerte Auswertung eines Ausdrucks (delayed evaluation) .	34
3.18	Sieb des Erastosthenes (Generierung <u>aller</u> Primzahlen)	34
3.19	Binärbäume	35
3.19.1	Visualisierung/Terminologie	35
3.19.2	Einschub: Pretty-Printing von Binärbäumen	37
3.20	Induktion über Binärbäumen	37
3.20.1	Beispiel:	37
3.20.2	Erinnerung	38
3.20.3	Beispiel	38
3.21	Baumdurchläufe	39
3.21.1	Beispiel	39
4	Neue Sprachebene DMdA-fortgeschritten	41
4.1	Quote	41
4.1.1	Beispiele:	41
4.2	Symbole	41
4.3	Operatoren	41
4.4	Natürliche Repräsentation und Auswertung	42
4.5	Auswertung eines arithmetischen Ausdrucks e	42

5	Lambda-Kalkül	43
5.1	Syntax des λ -Kalküls	43
5.1.1	Freie/Gebundene Variablen	44
5.2	β -Reduktion	44
5.2.1	Definition β -Reduktion	45

Scheme: Ausdrücke, Auswertung und Abstraktion

REPL

Definition	DrRacket
Interaktion	REPL

Die Anwendung von Funktionen wird in Scheme ausschließlich in Präfixnotation durchgeführt:

Mathematik	Scheme
44-2	(-44 2)
f(x,y)	(f x y)
$\sqrt{81}$	(sqrt 81)
$\lfloor x \rfloor$	(floor x)
9^2	(expt 9 2)
3!	(! 3)

Allgemein: $\langle \text{Funktion} \rangle \langle \text{argument} \rangle$

(+ 402) und (odd? 42) sind Beispiele für die Ausdrücke, die bei Auswertung einen Wert liefern. (Notation \rightsquigarrow) heißt Auswertung/Evaluation/Reduktion.

(+ 40 2) \rightsquigarrow 42
 (add? 42) \rightsquigarrow #f
Eval Eval

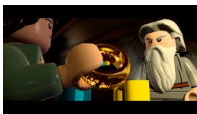
Interaktionsfenster:

Read \rightsquigarrow Eval \rightsquigarrow Print
Loop

REPL

Literale

Literale stehen für einen konstanten Wert (auch: Konstante) und sind nicht weiter reduzierbar.

<u>Literal</u>		<u>Signatur</u>
#t #f	(true, false, Wahrheitswerte)	boolean
„ac“ „x“ „“	(Zeichenketten)	string
0 1904 -42 007	(ganze Zahlen)	integer
0.42 3.1415 -273.15	(Fließkommazahlen)	real
1/2 3/4 -1/10	(rationale Zahlen)	rational
	(Bilder)	image

Zusammengesetzte Ausdrücke

Auswertung zusammengesetzte Ausdrücke (composite expression) in mehreren Schritten (Steps), "von innen nach außen", bis keine weitere Reduktion möglich ist:

$$(+ (+ 20 20) (+ 1 1)) \rightsquigarrow (+ 40 (+ 1 1)) \rightsquigarrow (+ 40 2) \rightsquigarrow 42$$

Beispiel:

$$0.7 + (\tfrac{1}{2}/0.25) - (0.6/0.3) = 0.7$$

⚠ Achtung: Scheme rundet bei Arithmetik mit Fließkommazahlen (interne Darstellung nicht präzise). Die Arithmetik mit rationalen Zahlen ist exakt.

Identifizier

Ein Wert kann an einen Namen (identifier) gebunden werden, durch (define <id> <expression>). Es erlaubt konsistente Wiederverwendung und dient der Selbstdokumentation von Programmen.

⚠ Achtung: Dies ist eine Spezialform und kein Ausdruck. Insbesondere besitzt diese Spezialform keinen Wert, sondern einen Effekt: der Name <id> wird durch den Wert von <expression> gebunden. Namen können in Scheme fast beliebig gewählt werden, solange

- die Zeichen ()[]{}",',;#\ | nicht vorkommen
- der name nicht einem numerischen Literal gleicht
- keinen Whitespaße (Leerzeichen, Tabulatoren, Neuwlines) enthalten sind

Beispiel: Euro \rightarrow US-\$

⚠ Achtung: Groß-/Kleinschreibung ist in Identifiern nicht relevant.

Lambda-Abstraktion

Eine Lambda-Abstraktion (auch: Funktion, Prozedur) erlaubt die Formulierung von Ausdrücken, in denen mittels Parametern von konkreten Werten abstrahiert wird:

$$(\text{lambda } (\langle p_1 \rangle \langle p_2 \rangle \dots) \langle \text{expr} \rangle)$$

expr ist der Rumpf und enthält Vorkommen der Parameter $\langle p_i \rangle$.

(lambda...) ist eine Spezialform. Der Wert der Lambda-Abstraktion #⟨procedure⟩
 Die Anwendung (auch: Applikation) der Lambda-Abstraktion führt zur Ersetzung
 aller Vorkommen der Parameter im Rumpf durch die angegebenen konkreten Argumente:

(lambda (days)(*days(*155 minutes-in-a-day)) 365) $\xrightarrow{!}$ (*365 (155 minutes-in-a-day)) \rightsquigarrow ... \rightsquigarrow 81468000
--

Kommentare

In Scheme leitet ein Semikolon einen Kommentar ein, der bis zum Zeilenende reicht
 und von Racket bei der Auswertung ignoriert wird.

Prozeduren/Funktionen sollen im Programm eine ein- bis zweizeilige Kurzbeschreibung
 vorangestellt werden.


Signaturen

Eine Signatur prüft, ob ein Name ⟨id⟩ an einen Wert einer angegebenen Sorte ge-
 bunden wird. Signaturverletzungen werden protokolliert.

(: ⟨ id ⟩ ⟨signatur⟩)

Bereits eingebundene Signaturen sind:

- natural \mathbb{N}
- ingeger \mathbb{Z}
- rational \mathbb{Q}
- real \mathbb{R}
- number \mathbb{C}
- boolean
- string
- image

 Der Doppelpunkt „:“ ist eine Spezialform und hat daher keinen Wert, aber
 einen Effekt: Eine Signaturprüfung wird durchgeführt.

Prozedur-Signaturen

Prozedur-Signaturen spezifizieren Signaturen sowohl für die Parameter $\langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \dots$ als auch für den Ergebniswert der Prozedur:

$\parallel (: \langle \text{id} \rangle (\langle \text{signatur} - p_1 \rangle \langle \text{signatur} - p_2 \rangle \dots \rightarrow \langle \text{signatur} - \text{ergebnis} \rangle))$

Prozedur-Signaturen werden bei jeder Anwendung der Funktion $\langle \text{id} \rangle$ auf Verletzung geprüft.

Testfälle

Testfälle dokumentieren das erwartende Ergebnis einer Prozedur für ausgewählte Argumente:

$\parallel (\text{check-expect} \langle e_1 \rangle \langle e_2 \rangle)$

Werte den Ausdruck $\langle e_1 \rangle$ aus und teste, ob der erhaltene Wert der Erwartung (=Wert des Ausdruck $\langle e_2 \rangle$) entspricht.

Einer Prozedurdefinition sollten Testfälle direkt vorangestellt werden.

$\triangle!$ „check-expect“ ist eine Spezialform und hat daher keinen Wert. Eine Testverletzung wird als Effekt protokolliert.

Erinnerung

Konstruktionsanleitung für Prozeduren:

- Kurzbeschreibung (ein- bis zweizeiliger Kommentar mit Bezug auf Parameternamen und Ergebnis)
- Signatur $(: \langle \text{name} \rangle (\dots \rightarrow))$
- Testfälle check-expect/ ceack-within
- Prozedurgerüst (define $\langle \text{name} \rangle$ (lambda ($\langle p_1 \rangle \langle p_2 \rangle$))
- Rumpf programmieren $\langle \text{rumpf} \rangle$)

Top-Down-Entwurf (Programmieren mit "Wunschdenken")

Beispiel: Sunset auf Tatooine (SW Episode IV)

Zeichne Szene zu Zeitpunkt t ($t=0 \dots 100$)

- (1) Himmel verfärbt sich von blau ($t=0$) zu rot ($t=100$)
- (2) Sonne(n) versinkt (bei $t=100$ hinter Horizont)
- (3) Luke startt auf Horizont (bei jeden t)

Zeichne Szene von hinten nach vorne:



Abbildung 1: Frodo auf dem Weg nach Mord... äh ich meine natürlich Luke auf Tatooine

```
;Zeichne Tatooine Sunset zu Zeitpunkt t
(:tatooine (natural -> image))
(define tatooine
  (lambda (t)
    (overlay/pinhole (luke t)
                     (sun t )
                     (sky t ))))
```

Reduktionsregeln für Scheme (\rightsquigarrow)

Fallunterscheidung je nach Ausdruck:

- Literal l (1 , $\#t$, "Karotte", ...) $[eval_1]$
 $l \rightsquigarrow l$ (keine Reduktion möglich)
- Identifier $\langle id \rangle$ $[eval_{id}]$
 $\langle id \rangle \rightsquigarrow$ Wert, an den $\langle id \rangle$ gebunden
- Lambda-Abstraktion $[eval_\lambda]$
 $(\text{lambda } (...)...) \rightsquigarrow (\text{lanmbda } (...)...)$
- Applikation ($f\ e_1 e_2 \dots$)

– f, e_1, e_2, \dots mittels \rightsquigarrow , erhalte $f', e'_1, e'_2 \dots$

–	<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center; padding: 5px;"> <div style="text-align: center;"> <p>Operation auf $e'_1, e'_2 \dots$ anwenden</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>Falls f primitive (eingebaute) Operation</p> </div> <div style="text-align: right;"> <p>$[apply/prim]$</p> </div> </div>
–	<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center; padding: 5px;"> <div style="text-align: center;"> <p>Argumentwerte e'_1, e'_2, \dots in den Rumpf einsetzen, den Rumpf mittels \rightsquigarrow reduzieren</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>falls f' Lambda-Abstraktion</p> </div> <div style="text-align: right;"> <p>$[apply_\lambda]$</p> </div> </div>

Wiederhole Anwendung von \rightsquigarrow bis keine Reduktion mehr möglich ist.

Beispiele:

$(+ 40 2)$

$\rightsquigarrow_{eval_{id}} (\# \langle \text{procedure:} + \rangle 40 2)$

$eval_{lit} \cdot 2$

$\rightsquigarrow_{apply_{prim}} 42$

$(\text{sqr } 9) \rightsquigarrow_{eval_{id}} (\text{lambda}(x)(*xx))$

$eval_{lit}$

$\rightsquigarrow_{apply_\lambda} (* 9 9)$

$\rightsquigarrow_{eval_{id}} (\# \langle \text{procedure : } * \rangle 9 9)$

$eval_{lit*2}$

$\rightsquigarrow_{apply_{prim}} 81$

Einschub: Lexikalische Bindung

Bezeichnen $(\text{lambda } (x) (* x x))$ und $(\text{lambda } (r) (* r r))$ die gleiche Funktion?

$(... 9) \rightsquigarrow^* 81$

\Rightarrow JA!

$\triangle!$ Das hat Einfluss auf das korrekte Einsetzen von Argumenten für Parameter $(s.\text{apply}_\lambda)$.

Das bindende Vorkommen eines Identifiers $\langle x \rangle$ im Programmtext kann systematisch bestimmt werden: Suche strikt "von innen nach außen" bis zum ersten

(1) $(\text{lambda } (x) \dots)$

(2) $(\text{define } x \dots)$

Das ist das Prinzip der lexikalischen Bindung ($\triangle!$ Syntaxprüfung in DrRacket)

Übliche Notation in der Mathematik: Fallunterscheidung!

$$\text{maximum } (x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \text{ falls } x_1 \geq x_2 \\ x_2 \leftarrow \text{sonst} \end{pmatrix}$$

Tests (auch Prädikate) sind Funktionen, die einen Wert der Signatur boolean liefern.

Typische Primitive in Tests:

```
(: = (number number -> boolean))
(: < (real real -> boolean))
(: string=? (string string -> boolean))
(: boolean=? (boolean boolean -> boolean))
(: zero? (number -> boolean))
```

Weiter: add?, even?, positive?, negative?, ...

Spezialform Fallunterscheidung (conditional)

```
(cond (<math>\langle t_1 \rangle</math> <math>\langle e_1 \rangle</math>)
      (<math>\langle t_2 \rangle</math> <math>\langle e_2 \rangle</math>)
      ...
      (<math>\langle t_n \rangle</math> <math>\langle e_n \rangle</math>)
      (else <math>\langle e_{n+1} \rangle</math>)) ; <math>\leftarrow</math> optional
```

Führt die Tests in der Reihenfolge $\langle t_1 \rangle, \langle t_2 \rangle, \dots$ durch. Sobald $\langle t_i \rangle$ zu $\#t$ ausgewertet, werte Zweig $\langle e_i \rangle$ aus. $\langle e_i \rangle$ ist das Ergebnis der Fallunterscheidung. Wenn $\langle t_n \rangle \#f$ liefert, dann liefere

$\left(\begin{array}{l} \text{Fehlermeldung "cond: alle Tests ergeben } \#f \text{ falls kein else- Zweig, sonst} \\ \langle e_{n+1} \rangle \end{array} \right)$

Die Signatur one-of lässt genau einen der n aufgezählten Werte zu:

|| (one-of $\langle e_1 \rangle \langle e_2 \rangle \dots \langle e_n \rangle$)

Reduktion von cond [$eval_{cond}$]

- (cond ($\langle t_1 \rangle \langle e_1 \rangle$) ($\langle t_2 \rangle \langle e_2 \rangle$) ...)

(1) Reduziere $\langle t_1 \rangle$, erhalte $\langle t'_1 \rangle$

(2) $\langle e_1 \rangle$ falls $\langle t_1 \rangle = \#t$
(cond ($\langle t_2 \rangle \langle e_2 \rangle$) ...)

- (cond (else $\langle e_{n+1} \rangle$)) \rightsquigarrow $\langle e_{n+1} \rangle$ ($\langle t_1 \rangle$, $\langle e_2 \rangle$, ... sind nicht ausgewertet
sonst

$\langle e_1 \rangle$ nicht ausgewertet)

- (cond) \rightsquigarrow Fehler "cond alle Tests ergeben #f"

Binäre Fallentscheidung:

(if $\langle t_1 \rangle \langle e_2 \rangle$ (cond ($\langle t_1 \rangle$
 $\langle e_3 \rangle$) \equiv (else $\langle e_2 \rangle$)
 $\langle e_1 \rangle$)))

Zusammengesetzte Daten

Daten können interessante intere Struktur (Komponenten) aufweisen.

Beispiel: Ein Star Wars Charakter:

name	"Luke Skywalker"
jedi?	#f
force	25

Beispiel:

```

;Ein Charakter (character) besteht aus
; - Name (name)
; - Jedi-Status (jedi?)
; - Staerke der Macht (force)
(define-record-procedures character
  make-character
  character?
  ( character-name
    character-jedi?
    character-force))

(make-character n j f)  $\rightsquigarrow$  ) <Tabelle>)) Konstruktion
(character-name <Tabelle>)  $\rightsquigarrow$  n Selektor (komponenten auslesen)
(character-jedi? <Tabelle>))  $\rightsquigarrow$  j
(character-force <Tabelle>))  $\rightsquigarrow$  f

```

Records in Scheme

Record-Definition legt fest:

- Record-Signatur (Name)
- Konstruktor (bau aus komponenten einen Record)
- Prädikat (später)
- Liste von Selektoren (lesen je eine Komponente des Record)

```
(define-record-procedures <t> Signaturname
  make-<t>                ;Konstruktor
  <t>                      ;Praedikat
  (<t>-<comp1>             ;Liste der Selektoren
   ...
   <t>-<compn>))
```

Liste der Selektoren legt Komponenten (Anzahl, Reihenfolge, Namen) fest. Signatur des Konstruktors/der Selektoren für Record-Signatur $\langle t \rangle$ mit n Komponenten $\langle comp_1 \rangle \dots \langle comp_n \rangle$:

(: make $\langle t \rangle$ ($\langle t \rangle \dots \langle t_n \rangle \rightarrow \langle t \rangle$))
n Komponentensignaturen

(: $\langle t \rangle$ - $\langle comp_1 \rangle$ ($\langle t \rangle \rightarrow \langle t_1 \rangle$))

\forall string n, boolean j, natural f:

```
(character-name (make-character n j f)) ~> n
(character-jedi? (make-character n j f)) ~> j
(character-force (make-character n j f)) ~> f
```

Aussagen über die Interaktion von zwei (oder mehr) Funktionen: algebraische Eigenschaft.

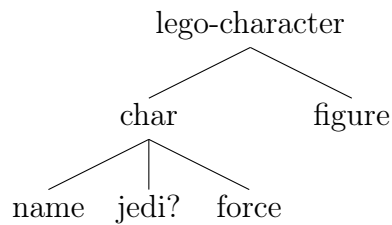
Spezialform check-property

```
(check-property
  (for-all ((<id1><signatur1>)
            ...
            (<idn><signaturn>))
  <expr>))
```

expr ist das Prädikat, das sich auf $\langle id_q \rangle \dots \langle id_n \rangle$ bezieht.

Test erfolgreich, falls $\langle expr \rangle$ für beliebige Bindungen für $\langle id_1 \rangle \dots \langle id_n \rangle$ immer #t ergibt.

Interaktion von Konstruktor und Selektor



```

|| (check-property
||   (for-all ((n string)
||              (j boolean)
||              (f natural)))
||   (string=? (character-name (make-character n j f)) n))

```

Beispiel: Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist mindestens so groß wie jede dieser Zahlen.

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N} : x_1 + x_2 \geq \max(x_1, x_2)$

```

|| (check-property
||   (for-all ((x1 natural)
||              (x2 natural))
||   (≥ (+ x1 x2) (max x1 x2))))

```

Konstruktion von Funktionen $\langle f \rangle$, die zusammengesetzte Daten der Signatur $\langle t \rangle$ konsumiert.

- Welchen Record-Komponenten $\langle comp_i \rangle$ sind relevant für $\langle f \rangle$?
- \Rightarrow Schablone:

```

|| (: <f> (... <t> ... -> ...))
|| (define <f>
||   (lambda (... r ...)
||     ... (<t>-<comp_i> r) ...))
|| (: not (boolean -> boolean))

```

Prozedur $\langle f \rangle$, die zusammengezte Daten der Signatur $\langle t \rangle$ konstruiert/produziert.

- Konstruktoraufruf für $\langle t \rangle$ muss enthalten sein!

```

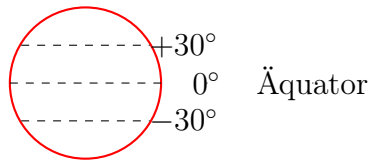
|| (: <f> ( ... -> <t> ))
|| (define <f>
||   (lambda (...)
||     (... (make-<t> ...) ...))

```

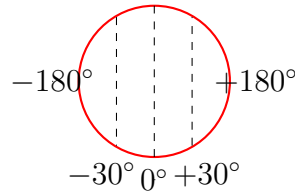
char	<table> <tr> <td>name</td><td></td></tr> <tr> <td>jedi?</td><td></td></tr> <tr> <td>force</td><td></td></tr> </table>	name		jedi?		force	
name							
jedi?							
force							
figure	(BILD)						

Längen/Breitengrade

Breitengrade (latitude)



Längengrade (longitude)



Sei $\langle p \rangle$ ein Prädikat mit Signatur $(\langle t \rangle \rightarrow \text{boolean})$. Eine Signatur

$\parallel (\text{predicate } \langle p \rangle)$

gilt für jeden Wert x mit Signatur $\langle t \rangle$ für den zusätzlich $(p(\langle p \rangle x) \rightsquigarrow \#t)$ gilt. Signatur $(\text{predicate } \langle p \rangle)$ ist damit spezifischer (restriktiver) als Signatur $\langle t \rangle$.

Signaturnamen

Einführung eines neuen Signaturnamens $\langle \text{new-}t \rangle$ für die Signatur $\langle t \rangle$:

$\parallel (\text{define } \langle \text{new-}t \rangle (\text{signature } \langle t \rangle))$

Beispiele:

$\parallel (\text{define farbe}$
 $\quad (\text{signature } (\text{one-of } \text{"Karo"} \text{"Herz"} \text{"Pik"} \text{"Kreuz"}))$
 $\quad (\text{define latitude}$
 $\quad \quad (\text{signature } (\text{predicate latitude?})))$

Übersetze eine Ortsangabe mittels Google Geocoding API in eine Position auf der Erdkugel:

$\parallel (: \text{geocoder } (\text{string } \rightarrow (\text{mixed geocode geocode } -)))$

Ein geocode besteht aus:

	<u>Signatur</u>
Adresse (address)	string
Ortsangabe (loc)	location
Nordostecke (northeast)	location
Südwestecke (southwest)	location
Typ (type)	string
Genauigkeit (accuracy)	string

Gemischte Daten

Die Signatur mixed

$\parallel (\text{mixed } \langle t_1 \rangle \dots \langle t_n \rangle)$

ist gültig für jeden Wert, der mindestens eine Signatur $\langle t_1 \rangle \dots \langle t_n \rangle$ erfüllt.

Beispiel: Datendefinition:

- ein Geocode (Signatur geocode)
- eine Fehlermeldung (Signatur geocode-error)

```
|| (mixed geocode geocode-error)
```

Beispiel

```
|| (eingebaute Funktion string -> number)
|| (: string -> number (string -> mixed number (one-of #f)))
```

Das Prädikat $\langle t \rangle?$ einer Record-Signatur $\langle t \rangle$ unterscheidet Werte der Signatur $\langle t \rangle$ von allen anderen Werten:

```
|| (: <t>? (any -> boolean))
```

Auch: Prädikate für eingebaute Signaturen.

number?, complex?, real?, rational?, integer?,
natural?, string?, boolean?

Prozeduren, die gemischte Daten der Singaturen $\langle t_1 \rangle \dots \langle t_n \rangle$ konsumieren:

```
|| (: <f>((mixed <t1> ... <t2>) -> ...))
|| (define <f>
  (lambda (x)
    (cond ((<t1>? x) ...)
          ...
          ((<t_n>? x) ...))))
```

Mittels let lassen sich Werte an lokale Namen! binden:

```
|| (let ((<id1> <e2>) ... (<id_n> <e_n>)) e)
```

Die Ausdrücke $\langle e_1 \rangle \dots \langle e_n \rangle$ werden parallel ausgewertet.

$\Rightarrow \langle id_1 \rangle \dots \langle id_n \rangle$ können in $\langle e \rangle$ (und nur dort!) verwendet werden.

Der Wert des let-Ausdruck ist der Wert von e. "nur dort": Verwendung nur in $\langle e \rangle$, nicht in den in $\langle e_i \rangle$!

Lokal: Verwendung nicht außerhalb des (let...)

 Sprachlevel "Die Macht der Abstraktion"

```
|| (let () ≡ (lambda () ))
```

„Syntaktischer Zucker“ = Dinge die nett sind aber ersetzt werden können.

```
|| (check-error <e> <msg>)
```

erwartet Abbruch mit Fehlermeldung $\langle msg \rangle$. Erzwingen des Programmabbruches mittels (violation $\langle msg \rangle$)

Polymorphe Signaturen

Beobachtung: Manche Prozeduren arbeiten völlig unabhängig von den Signaturen ihrer Argumente:

parametrisch polymorphe Prozeduren (griechisch: vielgestaltig). Nutze Signaturvariablen:
Beispiele:

```
; Identitaet
(: id ( %a -> %a))
(define id (lambda (x) x))

; konstante Funktion (ignoriert zweites Argument)
(: const ( %a %b -> %a)) "Anstatt %b kann auch any benutzt werden"
"
(define const
  (lambda (x y) x))

; Projektion (ein Argument auswaehlen)
(: proj ((one-of 1 2) %a %b -> (mixed %a %b)))
(define proj
  (lambda (i x y)
    (cond ((= i 1) x)
          ((= i 2) y))))
```

Beachte: Parametrisch polymorphe Prozeduren "wissen nichts" über ihre Argumente mit Signatur %a, %b, ... und können diese nur reproduzieren oder an andere polymorphe Prozeduren weiterreichen.

Eine polymorphe Signatur steht für die Signaturen, in denen die Signaturvariablen konistent durch konkrete Signaturen ersetzt werden.

Beispiel:

Wenn eine Prozedur (%a number %b -> %a) erfüllt, dann auch

```
(string number boolean -> string)
(boolean number natural -> boolean)
(string number string -> string)
(number number number -> number)
```

Polymorphe Paare und Listen

```
; Ein polymorphes Paar (pair) besteht aus  
;- erster Komponente (first)  
;- zweite Komponente (rest)  
; wobei die Komponenten jeweils beliebige Werte sind:  
  
(define-record-procedures-parametric pair pair-of  
  make-pair  
  pair?  
  (first  
   rest))
```

(pair-of $\langle t_1 \rangle \langle t_2 \rangle$)

ist eine Signatur für Paare, deren erste und zweite Komponente von der Signatur $\langle t_1 \rangle$ bzw. $\langle t_2 \rangle$ sind.

```
(: make-pair ( %a %b -> (pair-of %a %b)))  
(: first ((pair-of %a %b) -> %a))  
(: rest ((pair-of %a %b) -> %b))
```

Liste

Eine Liste von Werten der Signatur $\langle t \rangle$, (list-of $\langle t \rangle$), ist entweder

- leer (Signatur empty-list) oder
- ein Paar (Signatur pair-of) aus
 - einem Listenkopf (Signatur $\langle t \rangle$) und
 - einer Restliste (Signatur (list-of $\langle t \rangle$)))

```
(define list-of  
  (lambda (t)  
    (signature (mixed empty-list  
                      (pair-of t (list-of t))  
                      ))))
```

(list-of $\langle t \rangle$). Listen, deren Elemente die Signatur $\langle t \rangle$ besitzen.

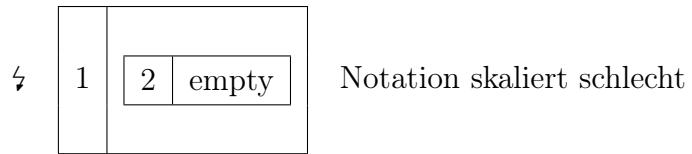
Die Signatur empty-list ist bereits in DrRacket vordefiniert.

Ebenfalls vordefiniert ist:

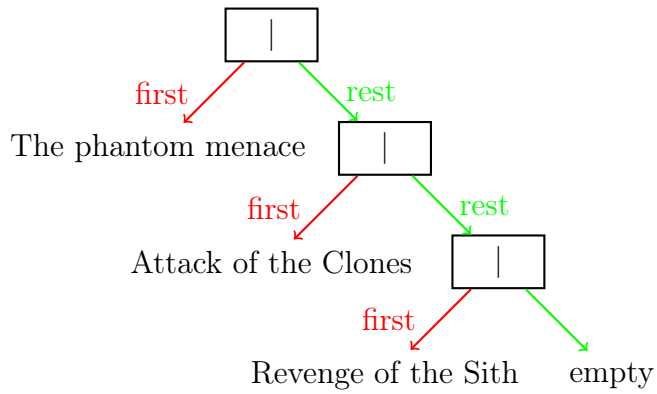
- (: empty empty-list)
- (: empty? (any -> boolean))

Visualisierung von Listen

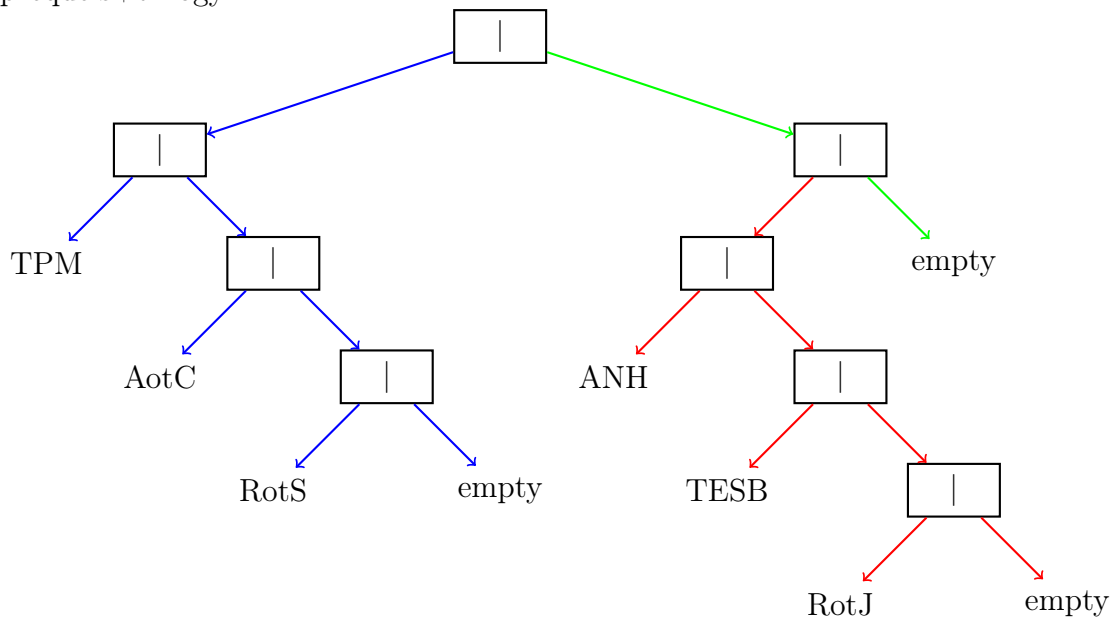
```
|| (make-pair 1 (make-pair 2 empty))
```



Spines (Rückrad)



prequels+trilogy:



Prozeduren über Listen

Schablonen für gemischte und zusammengesetzte Daten

Beispiel:

```
(: list-sum ((list-of number) -> number))

(check-expect (list-sum empty) 0)
(check-expect (list-sum (make-pair 40 (make-pair 2 empty))) 42)

(define list-sum
  (lambda (xs)
    (cond ((empty? xs) 0)
          ((pair? xs) (+ (first xs) (list-sum (rest xs)))))))
```

Schablone für Funktion $\langle f \rangle$, die Liste xs konsumiert:

```
(: <f> ((list-of <t1>) -> <t2>))
(define <f>
  (lambda (xs)
    (cond ((empty? xs) ... )
          ((pair? xs) ... (first xs) ... (<f> (rest xs)) ...))))
;Signatur t1 ;Signatur t2
```

Neue Sprachebene "Macht der Abstraktion"

- Signatur (list-of %a) eingebaut
- Neuer syntaktischer Zucker eingebaut:

$$\begin{aligned}
 &(\text{list } \langle e_1 \rangle \langle e_2 \rangle \dots \langle e_n \rangle) \\
 &\equiv \\
 &(\text{make-pair } \langle e_1 \rangle (\text{make-pair } \langle e_2 \rangle \\
 &\dots \\
 &(\text{make-pair } \langle e_n \text{ empty} \rangle ..))
 \end{aligned}$$
- Ausgabeformat für nicht-leere Listen

$$\# \langle \text{list } \langle e_1 \rangle \langle e_2 \rangle \dots \langle e_n \rangle \rangle$$

cat

;Füge Listen xs, xy zusammen (concatenate)

Zwei Fälle (xs leer oder nicht-leer)

- 1)
$$\begin{array}{ccc}
 \overset{xs}{} & \overset{ys}{} & \overset{(catxsxy)}{} \\
 empty & y_1 y_2 y_n & y_1 y_2 y_n
 \end{array}$$
- 2)
$$\begin{array}{ccc}
 x_1 x_2 x_n & y_1 y_2 y_n & x_1 x_2 x_n y_1 y_2 y_n \\
 \text{restxs} & \text{ys} & (cat(restxs)ys)
 \end{array}$$

Bewertungen

- Die Länge von xs (hier n) bestimmt die Anzahl der rekursiven Aufrufe.
- Auf ys werden keine Selektoren angewandt.

Spezialform match vergleicht einen Wert $\langle e \rangle$ mit gegebenen Patterns $\langle \text{pat}_1 \rangle \langle \text{pat}_2 \rangle, \dots \langle \text{pat}_n \rangle$. Falls $\langle \text{pat}_i, 1 \leq i \leq n$, das erste Pattern ist, das auf $\langle e \rangle$ matched, ist $\langle e_i \rangle$ das Ergebnis (ansonsten wird die Aiswertung mit "keiner der Zewige passte") abgegeben.

```
|| (match <e>
   || (<pat1> <e1>)
   || (<pat2> <e2>)
   || (<patn> <en>))
```

Pattern Matching für $\langle \text{pat}_i \rangle$

- Literal $\langle l \rangle$:
 $\langle e \rangle$ matched, falls $\langle e \rangle \rightsquigarrow \langle l \rangle$
- "Don't care" $_$:
 $\langle e \rangle$ matched immer
- Variable $\langle v \rangle$
 $\langle e \rangle$ matched immer, danach ist $\langle v \rangle$ an den Wert von $\langle e \rangle$ $\langle e_i \rangle$ gebunden
- Record-Konstruktor $(\langle c \rangle \langle \text{pat}_{i1} \rangle \langle \text{pat}_{ik} \rangle, k \geq 0)$
 $\langle e \rangle$ matched, wenn es durch $(\langle c \rangle \langle x_1 \rangle \langle x_k \rangle)$ konstruiert wurde und $\langle x_j \rangle$ auf $\langle \text{pat}_{ij} \rangle$ matched, $1 \leq j \leq k$

⚠ Fall 4 ermöglicht Pattern Matching auf komplex konstruierten Werten.

Rekursion über natürliche Zahlen

Die natürlichen Zahlen (vgl. gemischte Daten). Eine natürliche Zahl (natural) ist entweder

- die 0 (zero)
- die Nachfolger (succ) einer natürlichen Zahl

$\mathbb{N} = \{0, (\text{succ } 0), (\text{succ } (\text{succ } 0)), \dots\}$

Konstruktor:

```

| (: zero natural)
| (define zero 0)

| (: succ (natural -> natural))
| (define succ
|   (lambda (n)
|     (+ n 1)))

```

Bedingte algebraische Eigenschaften (siehe check-property) ($= \Rightarrow \langle p \rangle \langle e \rangle$) Nur, wenn $\langle p \rangle \rightsquigarrow \#t$, wird der Ausdruck $\langle e \rangle$ ausgewertet und getestet ob $\langle e \rangle \rightsquigarrow \#t$.

Beispiel: Fakultätsfunktion $n!$ ($n \in \mathbb{N}$) :

$$0! = 1$$

$$n! = n \cdot (n-1)! \equiv (\text{succ } n)! = (\text{succ } n)! \cdot n!$$

$$\begin{aligned}
3! &= 3 \cdot 2! \\
&= 3 \cdot (2 \cdot 1!) \\
&= 3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 0!)) \\
&= 3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 1)) \\
&= 6 \\
10! &= 3628800
\end{aligned}$$

```

| ; Berechne n!
| (: factorial (natural -> natural))
| (define factorial
|   (lambda (n)
|     (cond ((= n 0) ...)
|           ((< n 0) (* (factorial (- n 1)) n))))))

```

Schablone für Funktionen $\langle f \rangle$, die natürliche Zahlen konsumieren.

```

| (: <f> (natural -> <t>))
| (define <f>
|   (lambda (n)
|     (cond ((= n 0) ...)
|           ((> n 0) ... (<f> (- n 1) ... )))))

```

Satz:

Eine Funktion, die nach der Schablone für Listen oder natürliche Zahlen geschrieben ist, terminiert immer. (=liefert immer ein Ergebnis)

Reduktion kann durchaus zur Konstruktion von Ausdrücken führen, die zunehmende Größe aufweisen (Für factorial bestimmt das Argument die Größe.) Wenn möglich, erzeuge Reduktionsprozesse, die konstanten Platzverbrauch - unabhängig von Funktionsargumenten - benötigen. Beobachtung (Assoziativität von $*$)

$$\begin{aligned}
& (* 10 (* 9 (* 8 (* 7 (* 6 (factorial 5))))) \\
= & (* (* (* (* (* 10 9) 8) 7) 6) (factorial 5)) \\
& (* \quad \quad \quad 30240 \quad \quad \quad (factorial 5))
\end{aligned}$$

⇒ Multiplikationen können vorgezogen werden.

Idee: Führe Multiplikation jeweils sofort aus. Schleife des Zwischenergebnis (akkumulierendes Argument) durch die Berechnung. Am Ende enthält der Akkumulator das Endergebnis.

Berechne 5!:

```
|| (: fac-worker (natural natural -> natural))
```

n	acc
5	1
4	5
3	20
2	60
1	120
0	120

```
|| (: fac-worker (natural natural -> natural))
||
|| (define fac-worker
||   (lambda (n acc)
||     (cond ((= n 0) acc)
||           ((> n 0) (fac-worker (- n 1) (* acc n))))))
||
|| ; Berechne n! [wrapper]
|| (: fac (natural -> natural))
|| (define fac
||   (lambda (n)
||     (fac-worker n 1)))
```

Ein Reduktionsprozess ist iterativ, falls seine Größe konstant bleibt.

Damit: factorial nicht iterativ

fac-worker iterativ

Wieso ist fac-worker iterativ? Der rekursive Aufruf ersetzt den aktuell reduzierten Ausdruck vollständig. Es gibt keinen Kontext (umgebenden Ausdruck), der auf das Ergebnis des rekursiven Aufrufs "wartet".

Kontext des rekursiven Aufrufes in

- factorial: (* n \square)
Hole
- fac-worker: -keiner-

Ein Prozeduraufruf ist endrekursiv (tail call), wenn er keinen Kontext besitzt.

Prozeduren, die nur endrekursive Prozeduraufrufe enthalten, heißen selbst endrekursiv.

Beobachtung: Berechnung von (rev (from-to 1 1000)):

⇒ Anzahl Aufrufe von make-pair $1000+999+998+\dots+1$ auf einer Liste der Länge n:

iterative Listenumkehr (backwards)

Berechnung von (backwards (list 1 2 3)).

xs	acc
(list 1 2 3)	empty
rest	(make-pair 1 acc)
(list 2 3)	(list 1)
rest	(make-pair 2 acc)
(list 3)	(list 2 1)
rest	(make-pair 3 acc)
empty	(list 3 2 1)

letrec

Die Ausdrücke $\langle e_1 \rangle \dots \langle e_n \rangle$ dürfen selbst auf die Namen $\langle id_1 \rangle \dots \langle id_n \rangle$ beziehen. Den Wert des gesamten letrec-Ausdruck ist der Wert von $\langle e \rangle$.

Induktive Definitionen

Konstruktive Definition der natürlichen Zahlen \mathbb{N} :

Def. (Peano-Axiome)

- (P1) $0 \in \mathbb{N}$ Null
- (P2) $\forall n \in \mathbb{N}: \text{succ}(n) \in \mathbb{N}$ Nachfolger
- (P3) $\forall n \in \mathbb{N}: \text{succ}(n) \neq 0$ succ ist
- (P4) $\forall n, m \in \mathbb{N}: \text{succ}(m) = \text{succ}(n) \Leftrightarrow m = n$ injektiv (erzeugt neue Elemente)
- (BILD TAFEL)
- (P₅) Induktionsaxiom:
 Für jede Menge $M \subseteq \mathbb{N}$:
 Falls $0 \in M$ und $\forall n: (n \in M \Rightarrow \text{succ}(n) \in M)$,
 dann $M = \mathbb{N}$. " \mathbb{N} enthält nicht mehr als 0 und die durch succ () generierten Elemente."
 "Nichts sonst ist in \mathbb{N} "

Beweisschema der vollständigen Induktion

Sei $P(n)$ eine Eigenschaft einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ (Prädikat):

(: P (natural \rightarrow boolean))

Ziel: Zeige $\forall n \in \mathbb{N}: P(n)$

Definiere: $M := \{n \in \mathbb{N} | P(n) \text{ gilt}\} \subseteq \mathbb{N}$ " M enthält alle n , für die $P(n)$ gilt."

Induktionsaxiom (P5) für M

Falls	Falls
$0 \in M$	$P(0)$ (INDUKTIONSBASIS)
und	und
$\forall n: (n \in M \Rightarrow \text{succ}(n) \in M)$	$\forall n: (P(n) \Rightarrow P(\text{succ}(n)))$ (INDUKTIONSSCHRITT)
dann	dann
$M = \mathbb{N}$	$\forall n \in \mathbb{N}: P(n)$

Beispiel

$$1 = 1$$

$$1+3 = 4$$

$$1+3+5 = 9$$

$$1+3+5+7 = 16$$

$$\sum_{i=0}^n (2i+1) = (n+1)^2 \equiv P(n)$$

Summe der ersten $n+1$ ungeraden natürlichen Zahlen

Zeige: $\forall n \in \mathbb{N}: P(n)$

(1) Induktionsbasis $P(0)$

$$\sum_{i=0}^0 (2i + 1) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 = (0 + 1)? \checkmark$$

(2) Induktionsschritt: $\forall n : (P(n) \Rightarrow P(n + 1))$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} (2i + 1) &\stackrel{\sum}{=} \sum_{i=0}^n (2i + 1) + 2(n + 1) + 1 \\ &\stackrel{P(n)}{=} (n + 1)^2 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= (n + 2)^2 \checkmark \end{aligned}$$

Beispiel

```

|| (define factorial
||   (lambda (k)
||     (if (= k 0) 1
||         (* k (factorial (- k 1))))))

```

$P(n) \equiv (\text{factorial } n) = \underline{n!}$ X: Racket-Repräsentation der Zahl X

Zeige : $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

(1) Induktionsbasis $P(0)$

$$\begin{aligned} (\text{factorial } 0) &\rightsquigarrow ((\text{lambda } (k) \dots) \underline{0}) \\ &\rightsquigarrow (\text{if } (= 0 \underline{0}) \underline{1} \dots) \\ &\rightsquigarrow (\text{if } \#t \underline{1} \dots) \\ &\rightsquigarrow \underline{1} = \underline{0!} \end{aligned}$$

(2) Induktionsschritt

$$\begin{aligned} \forall n : (P(n) \Rightarrow P(n + 1)) : \\ (\text{factorial } \underline{n+1}) \\ &\rightsquigarrow ((\text{lambda } (k) \dots) \underline{n+1}) \\ &\rightsquigarrow (\text{if } (= \underline{n+1} \underline{0}) \dots (* \dots)) \\ &\rightsquigarrow (\text{if } \#f \dots (* \dots)) \\ &\rightsquigarrow (* \underline{n+1} (\text{factorial } (- \underline{n+1} \underline{1}))) \quad \text{Annahme: - realisiert Differenz korrekt} \\ &\rightsquigarrow (* \underline{n+1} (\text{factorial } n)) \\ \underline{P(n)} (* \underline{n+1} \underline{n!}) &= (\underline{n+1})! \checkmark \quad \text{Annahme: + realisiert Multiplikation korrekt.} \end{aligned}$$

Beispiel

Jedes f, das sich an die Schablone für Funktionen über natürlichen Zahlen hält, liefert immer ein Ergebnis (terminiert immer).

Sei

```

|| (: f (natural -> %a ))

```

also definiert durch:

```

|| (define f
||   (lambda (n)
||     (if (= n 0)
||         basis
||         (step (f (- n 1)) n))))
||

```

Bemerkung

```

|| (: basis %a)
|| (: step ( %a natural -> %a))
||

```

totale Funktion

Dann gilt:

$P(n) \equiv (f\ n)$ terminiert mit Ergebnis
der Signatur %a

Beweis

(1) Induktionsbasis $P(0)$

$(f\ \underline{0})$
 $\rightsquigarrow^* (if\ (= \underline{0}\ 0)\ basis\ \dots)$
 $\rightsquigarrow (if\ \#t\ basis)$
 $\rightsquigarrow basis\ \checkmark$

(2) Induktionsschritt $\forall n : (P(n) \Rightarrow P(n+1))$

$(f\ \underline{n+1})$
 $\rightsquigarrow (if\ (= \underline{n+1}\ 0)\ \dots\ (step\dots))$
 $\rightsquigarrow (if\ \#f\ \dots\ (step\ \dots))$
 $\rightsquigarrow (step\ (f\ (-\ \underline{n+1}\ 1))\ \underline{n+1})$
 $\rightsquigarrow (step\ \underbrace{(f\ \underline{n})}_{\text{terminiert mit Ergebnis R}}\ \underline{n+1})$
 $\rightsquigarrow^{P(n)} (step\ R\ \underline{n+1})\ \text{terminiert}\ \checkmark$

Def (Listen)

Die Menge M^* (= Listen mit Elementen aus M , (list-of M)) ist induktiv definiert:

- (l1) $empty \in M^*$
- (l2) $\forall c \in M, xs \in M^* : (make-pair\ c\ xs) \in M^*$
- (l3) Nichts sonst ist in M^*

Schema der Listeninduktion

Sei $P(xs)$ eine Eigenschaft von Listen über M :

\parallel (\vdash P ((list-of M) \rightarrow boolean))
 Falls $P(\text{empty})$
 und $\forall x \in M, xs \in M^*: (P(xs) \Rightarrow P(\text{make-pair } x \text{ } xs))$
 dann $\forall xs \in M^*: P(xs)$

Beispiel: Eigenschaften von cat (append).

```

(define cat
  (lambda (xs ys)
    (cond ((empty? xs) ys)
          ((pair? xs) (make-pair (first xs)
                                   (cat (rest xs) ys))))))

```

- (1) (cat empty ys) = ys
 - (2) (cat xs empty) = xs
 - (3) (cat (cat xs ys) zs) = (cat xs (cat ys zs))
- "(M*, cat, empty) ist ein Monoid"
- (\mathbb{N} , +, 0)
- (\mathbb{N} , +, 1)

Beweise

(1) (cat empty ys) $\overset{*}{\rightsquigarrow}$ ys ✓

(2) $P(xs) \equiv (\text{cat } xs \text{ empty}) = xs$

Induktionsbasis $P(\text{empty})$: (cat empty empty) $\stackrel{(1)}{=} \text{empty}$ ✓

Induktionsschritt $\forall x \in M, xs' \in M^*: (P(xs') \Rightarrow P(\text{make-pair } x \text{ } xs'))$

(cat (make-pair x xs') empty)

$\overset{*}{\rightsquigarrow}$ (make-pair) (HIER FEHLT NOCH WAS)

$\overset{*}{\rightsquigarrow}$ (make-pair x (cat xs' empty))

$\stackrel{I.V.}{=} \text{(make-pair } x \text{ } xs')$

(3) $P(xs) \equiv (\text{cat } (\text{cat } xs \text{ } ys) \text{ } zs) = (\text{cat } xs \text{ } (\text{cat } ys \text{ } zs))$

ys, zs $\in M^*$ beliebig

Induktionsbasis $P(\text{empty})$ (cat (cat empty ys) zs)

$\stackrel{(1-\>)}{=} (\text{cat } ys \text{ } zs)$

$\stackrel{(1<-)}{=} (\text{cat empty } (\text{cat } ys \text{ } zs))$ ✓

Induktionsschritt $\forall x \in M, xs' \in M^*: (P(xs') \Rightarrow P(\text{make-pair } x \text{ } xs'))$

(cat (cat (make-pair x xs') ys) zs)

$$\begin{aligned}
& \stackrel{*}{=} (\text{cat } (\text{make-pair } x \text{ (cat } xs' \text{ ys)}) \text{ zs}) \\
& \rightsquigarrow^* (\text{make-pair } x \text{ (cat (cat } xs' \text{ ys) zs)}) \\
& \stackrel{I.V.}{=} (\text{make-pair } x \text{ (cat } xs' \text{ (cat ys zs)})) \\
& \rightsquigarrow^* (\text{cat (make-pair } x \text{ xs') (cat ys) zs}) \checkmark
\end{aligned}$$

Beispiel: Interaktion von length/cat

```

(define length
  (lambda (xs)
    (cond ((empty? xs) 0)
          ((pair? xs) (+1 (length (rest xs)))))))

```

$ys \in M^*$ beliebig $P(xs) \equiv (\text{length (cat xs ys)}) = (+ (\text{length xs}) (\text{length ys}))$

Induktionsbasis $P(\text{empty})$

$(\text{length (cat empty ys)})$

$\stackrel{(1)}{=} (\text{length ys})$

$\stackrel{(+)}{=} (+ 0 (\text{length ys})) \checkmark$

Induktionsschritt $\forall x \in M, xs' \in M^*: (P(xs') \Rightarrow P((\text{make-pair } x \text{ xs'})))$

$(\text{length (cat (make-pair } x \text{ xs') ys)})$

$\rightsquigarrow^* (\text{length (make-pair } x \text{ (cat xs' ys)}))$

$\rightsquigarrow^* (+ 1 (\text{length (rest (make-pair } x \text{ (cat xs' ys))))))$

$\rightsquigarrow (+1 (\text{length (cat xs' ys)}))$

$\stackrel{I.V.}{=} (+1 (+ (\text{length xs'}) (\text{length ys})))$

$\stackrel{(+)\text{Assoziativ}}{=} (+ (+ 1 (\text{length xs'})) (\text{length ys}))$

$\rightsquigarrow^* (+ (\text{length (make-pair } \underset{\text{beliebig}}{x} \text{ xs')}) (\text{length ys})) \checkmark$

Prozeduren höherer Ordnung (HIGHER-ORDER FUNCTIONS)

Abstraktion von Funktionsparametern

```

; Extrahiere die Elemente xs, die das Praedikat p? erfuehlen

(: filter (( %a -> boolean) (list-of %a) -> (list-of %a)))
(define filter
  (lambda (p? xs)
    (cond ((empty? xs) empty)
          ((pair? xs) (if (p? (first xs))
                          (make-pair (first xs)
                                      (filter p? (rest xs)))
                          (filter p? (rest xs)))))))

```

Prozeduren höherer Ordnung (Higher-Order Procedures H.O.P)
H.O.P. ...

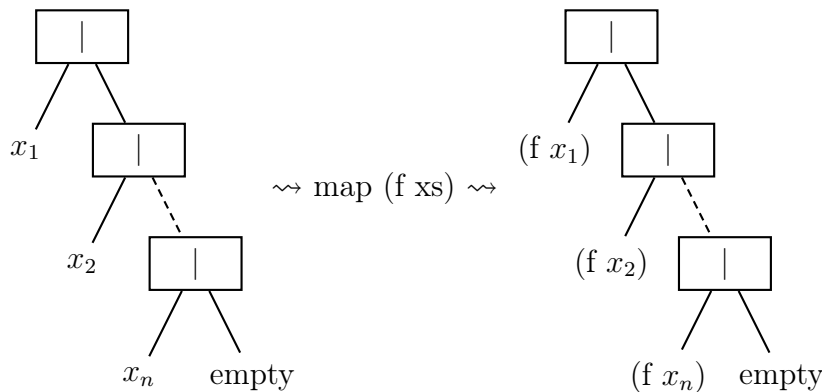
- (1) akzeptieren Prozeduren als Parameter und/oder
- (2) liefern eine Prozedur als Ergebnis.

filter ist vom Typ (1)

H.O.P. vermeiden Duplizierung von Code und führen zu

- kompakteren Programmieren
- verbesserte Lesbarkeit
- verbesserte Wartbarkeit

Beispiel (map f xs)



```

; Wende f auf alle Elemente von xs an
(: map (( %a -> %b) (list-of %a) -> (list-of %b)))
(define map
  (lambda (f xs)
    (cond ((empty? xs) empty)
          ((pair? xs) (make-pair (f (first xs)) (map f (rest xs))
                                )))))

```

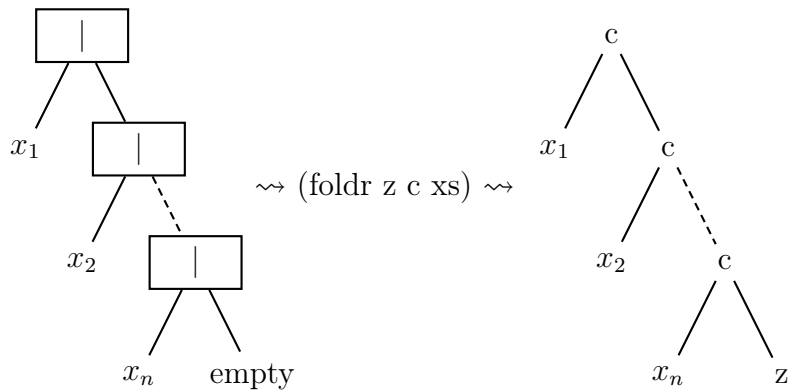
Hinweis

Verwende einfache Lambda-Abstraktion direkt als anonyme Funktion, wenn eine globale Benennung (via define) nicht gerechtfertigt erscheint (z.B. bei lokaler/einmaliger Benutzung).

Listenfaltung

Allgemeinere Transformation von Listen: Listenfaltung (list folding).

Idee: die Listenkonstruktion make-pair und empty werden systematisch ersetzt:



(foldr z c xs) wirkt als Spine Transformer:

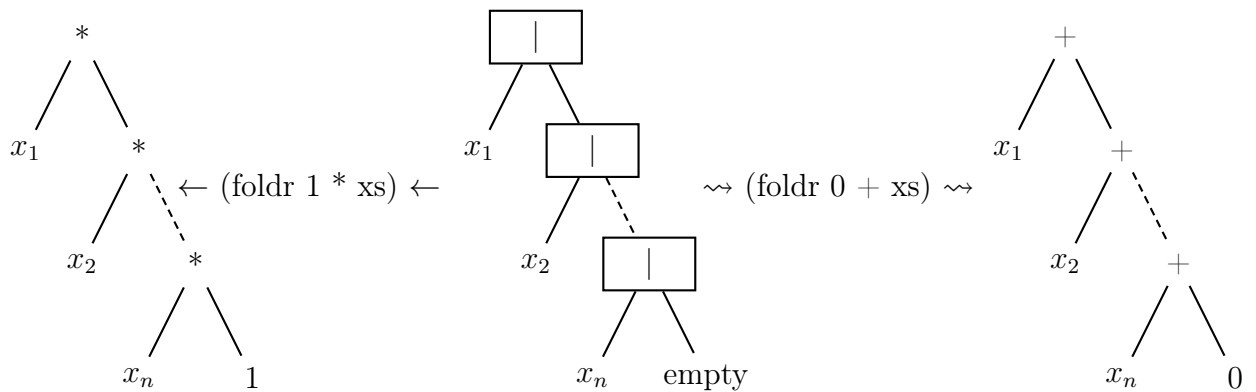
- empty \rightarrow z
- make-pair \rightarrow c
- Eingabe: Liste (list-of %a)
- Ausgabe im allg. keine Liste (etwa %b)

```

;Falte Liste xs bzgl. c und z
(: foldr ( %b (%a %b -> %b) (list-of %a) -> %b))
(define foldr
  (lambda (z c xs)
    (cond ((empty? xs) z)
          ((pair? xs) (c (first xs) (foldr z c (rest xs)))))))

```

Beispiele (Reduktionen von xs)

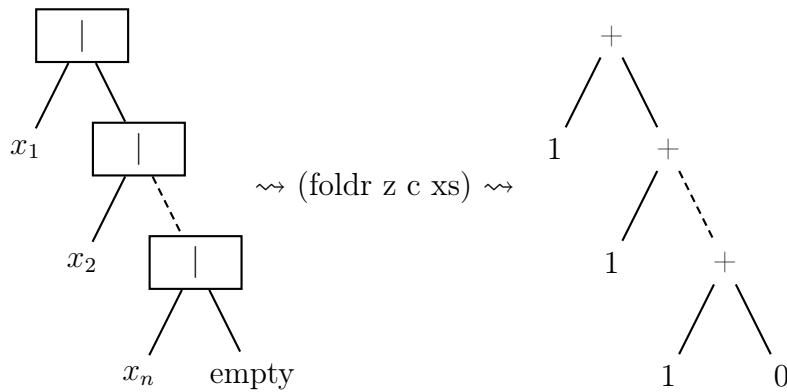


```

(: sum ((list-of number) -> number))
(define sum
  (lambda (xs) (foldr 0 + xs)))

```

Länge eine Liste durch Listenfaltung:



Spine-Transformation

- $\text{empty} \rightarrow 0$
- $(\text{make-pair } y \text{ } ys) \rightarrow (\text{lambda } y \text{ } ys) (+1 \text{ } ys)$

Universe

Teachpack universe nutzt H.O.P., um Animationen (=Sequenzen von Szenen/Bildern) zu definieren.

```
(big-bang <init>
  (an-tick <tok>))
  (to-draw <render> <w> <h>))

(: <init> %a)      ;Startzustand

(: <tock> ( %a -> %a))    ;Funktion, die neuen aus alten Zustand
                           berechnet, wird 28 Mal/Sekunde aufgerufen

(: <render> ( %a -> image)) ;Funktion, die aus aktuellem Zustand
                           eine Szene berechnet (wird in Fenster mit <w> x <h> Pixeln
                           angezeigt)

;Bei Schliessen der Animation wird der letzte aktuelle Zustand
zurueckgegeben.
```

Komposition von Funktionen (allgemein)

```
((compose f g) x) ≡ (f (g x))
```

Mathematik: $(\text{compose } f \text{ } g) \equiv f \circ g$ "f nach g" \Rightarrow compose konstruiert aus f und g eine neue Funktion ("Funktionsfabrik")

```
(: compose ((%b -> %c) ( %a -> %b) -> ( %a -> %c)))

(define compose
  (lambda (f g)
    (lambda (x)      ;Ergebnis ist eine
```



```
|| (f (g x)))) ;Funktion (nicht angewandt)
```

repeat: n-fache Komposition einer Funktion f mit sich selbst (n-fache Anwendung von f, Exponentiation)

$$f^0 = id \text{ (Identität } id \equiv (\lambda x. x))$$

$$f^n = f^{n-1} \circ f$$

```
|| (: repeat (natural (%a-> %a) -> (%a -> %a)))

(define repeat
(lambda (n f)
  (cond ((= n 0) (lambda (x) x))
        ((> n 0) (compose (repeat (- n 1) f) f))))

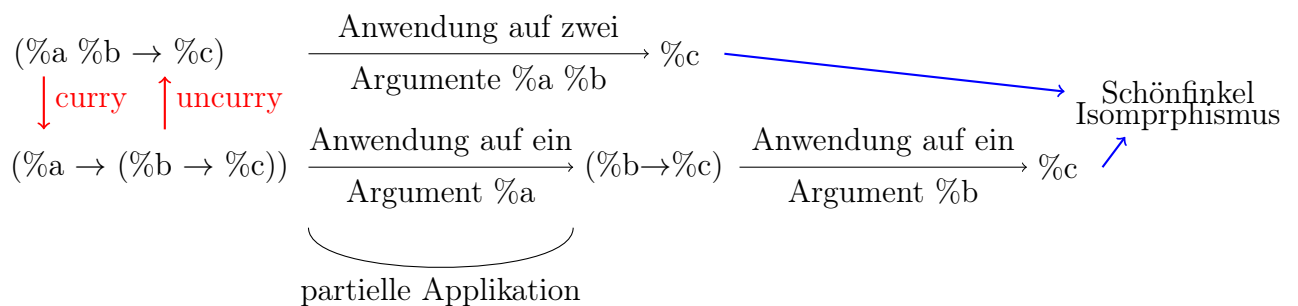
;Greife auf das n-te Element von xs zu (n>0)
(: nth (natural (list-of %a) -> %a))

(define nth
(lambda (n xs)
  ((compose first (repeat (- n 1) rest)) xs)))
```

Currying

Reduktion von ((add 1) 41)

```
eval id ((lambda (x)(lambda (y) (+ x y))) 1 41)
apply λ ((lambda (y) (+ 1 y)) 41)
apply λ (+ 1 41) ~> 42
```



- Currying (Haskell B. Curry, Moses Schönfinkel)

Anwendung einer Funktion auf ihr erstes Argument liefert eine Funktion der restlichen Argumente.

- Jede n-stellige Funktion lässt sich in eine alternative curried Variante transformieren, die in n Schritten jeweils nur ein Argument konsumiert: `curry` (Transformer)
Gegenrichtung: `uncurry`

```

(: curry (( %a %b -> %c) -> ( %a ->( %b -> %c))))

(define curry
  (lambda (f)
    (lambda (x)      ;neue
      (lambda (y)    ;Funktion
        (f x y)      ;
      )
    )
  )
)

(: uncurry ((%a -> (%b -> %c)) -> (%a %b -> %c)))

(define uncurry
  (lambda (f)
    (lambda (x y)
      ((f x) y)
    )
  )
)

```

Erinnerung

Bestimmung der ersten Ableitung der reellen Funktion f durch Bildung des Differenzenquotienten:
 (Hier Bild mit x und y achse und schaubild) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ Differenzenquotient $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$
 $f'(x)$ Differentialquotient

- Operator ' (Ableitung) konsumiert Funktion f und produziert $f' \Rightarrow '$ ist higher-order

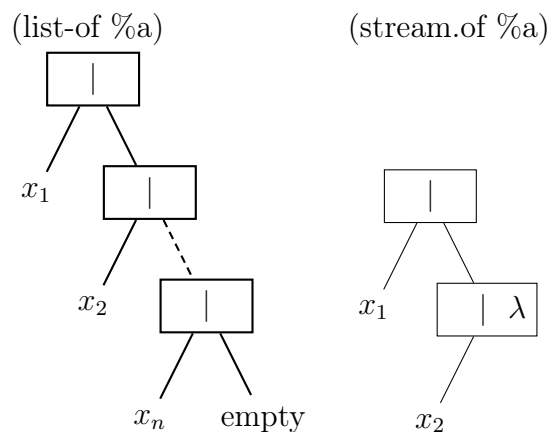
Streams (stream-of % a)

unendliche Ströme von Elementen x_i der Signatur $\%a$.

Ein Stream ist ein Paar stream head (X1) stream tail

$x_1 \mid \text{tail}$ $\%a (-> (\text{stream-of } \%a))$

Vergleich



Verzögerte Auswertung eines Ausdrucks (delayed evaluation)

- ```
(: delay (%a -> (-> %a)))
```

*(delay <e>) ; Verzögere die Auswertung des Ausdrucks <e> und liefere "Versprechen" (promise) <e> bei Bedarf später auswerten zu können.*

⚠ funktioniert nicht:

```
(define delay
 (lambda (e)
 (lambda () e)))
```

Implementation:

```
(delay <e>) ≡ (lambda () <e>)
```

- ```
(: force ((-> %a) -> %a))
```

(force <p>) ; Erzwingt Auswertung des Promise <p>, liefere den Wert des verzögerten Ausdrucks

```
(define force
  (lambda (p)
    (p)))
```

Sieb des Erastosthenes (Generierung aller Primzahlen)

Stream-Programm (über 2200 Jahre alt):

- Starte mit dem Stream str der Zahlen 2,3,4,...
- Die erste Zahl n in str ist eine Primzahl
- Streiche alle Vielfachen von n im Stream str
- weiter bei (2)

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

2 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25

2 3 5 7 11 13 17 19 23 25

2 3 5 7 11 13 17 19 23

Binärbäume

Die Menge der Binärbäume $T(M)$ über M ist Induktiv definiert.

(T1) empty-tree $\in T(M)$

(T2) $\forall x \in M, l, r \in T(M): (\text{make-node } l \times r) \in T(M)$

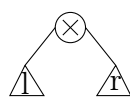
(T3) Nichts sonst ist in $T(M)$

Hinweise:

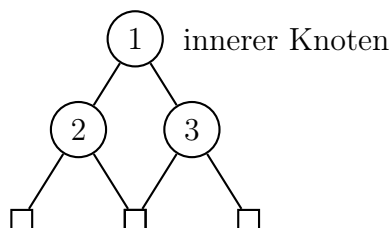
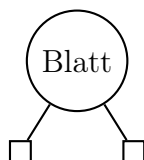
- Jeder Knoten (make-node) in einem Binärbaum hat zwei Teilbäume l und r sowie eine Markierung (Label) $x \in M$.
- Vgl. M^* und $T(M)$, empty-list und empty-tree, make-pair und make-node.

Visualisierung/Terminologie

- empty-tree: \square

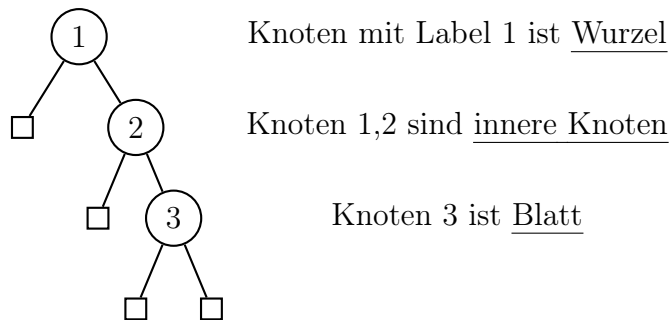
- (make-node $l \times r$): 

- Der Knoten mit Markierung x ist Wurzel (root) des Baumes
- Ein Knoten, der nur leere Teilbäume besitzt, heißt Blatt (leaf) Alle anderen Knoten sind innere Knoten (inner nodes)

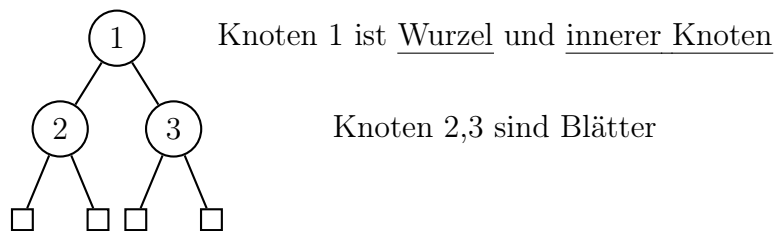


Beispiel für Binärbäume der Menge $T(\mathbb{N})$.

- Baum t_1 : listenartig (rechtstief)



- Baum t_2 : balanciert



(Binär-)Bäume haben zahllose Anwendungen:

- Suchbäume (schneller Zugriff, z.B. in Datenbanksystemen)
- Datenkompression
- Darstellung von Programmen/Ausdrücken im Rechner
- ...

Bäume sind **DIE** induktive Datenstruktur in der Informatik.

Die Tiefe (depth) eines Binärbaumes t ist die maximale Länge eines Weges von der Wurzel bis zu einem leeren Teilbaum. Also:

```
(btree-depth empty-tree) = 0
(btree-depth t2)         = 2
(btree-depth t3)         = 3
(btree-depth classifier) = 4
```

Schablone (gemischte + zusammengesetzte Daten):

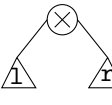
```
(: btree-depth ((btree-of %a) -> natural))

(define btree-depth
  (lambda (t)
    (cond ((empty-tree? t) 0)
          ((node? t) (+ 1 (max (btree-depth (node-left-branch t)
                                             (btree-depth (node-right-branch t)
                                                             ))))
          )))
```

Einschub: Pretty-Printing von Binärbäumen

Prozedur (pp $\langle t \rangle$) erzeugt formatierten String für Binärbaum $\langle t \rangle$.

`|| (pp □) = (list " □")`

`|| (pp ) = x`

Idee: Repräsentiere formatierten String als Liste von Zeichen (String):

- (1) Nutze (string-append ...) um Zeilen-Strings zu definieren [horizontal]
- (2) Nutze (append...) um die einzelnen Zeilen zu einer Liste von Zeilen zusammenzusetzen [vertikal]

Erst direkt vor der Ausgabe werden die Zeilen-Strings zu einem auszugebendem String zusammengesetzt.

`|| (strings-list->string)`

Induktion über Binärbäumen

Sei $P(t)$ eine Eigenschaft von Binärbäumen $t \in T(M)$, also $(: P ((btree-of M) \rightarrow \text{boolean}))$.

Falls

$P(\text{empty-tree})$ [Induktionsbeweis]

und

$\forall x \in M, l \in T(M), r \in T(M)$:

$P(l) \wedge P(r) \Rightarrow P(\text{make-node } l \times r)$

dann $\forall t \in T(M) P(t)$.

Beispiel:

Zusammenhang zwischen Größe (btree-size) und Tiefe (btree-depth) eines Binärbaums t :

$$P(t) \equiv (\text{btree} - \text{depth} t) \leq (\text{btree} - \text{size} t) \leq 2^{(\text{btree} - \text{depth} t)} - 1$$

Induktionsbasis $P(\text{empty-tree})$:

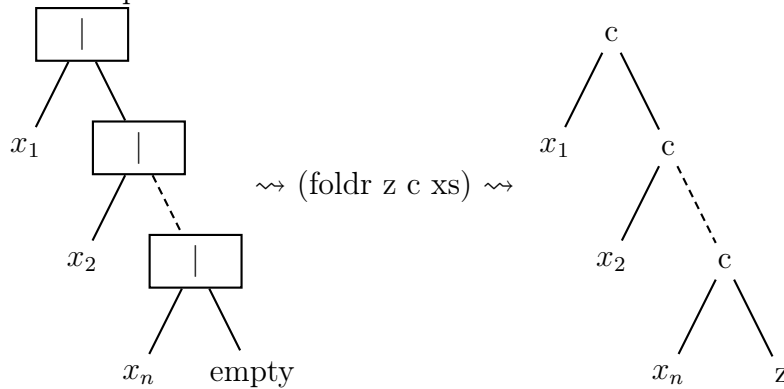
$$(\text{size empty-tree}) \rightsquigarrow 0 = 2^0 - 1 \rightsquigarrow 2^{(\text{depth empty-tree})} - 1 \quad \checkmark$$

Induktionsschritt $P(l) \wedge P(r) \rightarrow P(\text{make-node } l \times r)$

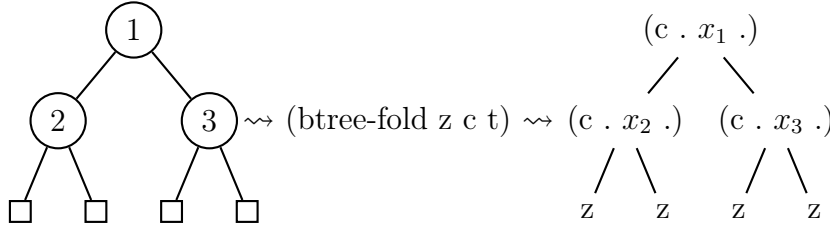
$$\begin{aligned} (\text{size (make-node } l \times r)) &\rightsquigarrow (\text{size } l) + 1 + 1 (\text{size } r) \leq 2^{(\text{depth } l)} - 1 + 1 + 2^{(\text{depth } r)} - 1 \\ &= 2^{(\text{depth } l)} + 2^{(\text{depth } r)} - 1 \\ &\leq 2 \cdot \max(2^{(\text{depth } l)}, 2^{(\text{depth } r)}) - 1 \\ &= 2 \cdot 2^{\max((\text{depth } l), (\text{depth } r))} - 1 \\ &= 2^{1 + \max((\text{depth } l), (\text{depth } r))} - 1 \\ &\rightsquigarrow 2^{(\text{depth (make-node } l \times r)})} + 1 \end{aligned}$$

Erinnerung

fold ist Spine-Transformer für Listen xs:



Wie müsste btree-fold, eine fold-Operation für Binärbäume, verhalten? Tree-Transformer für Bäume t:



;Falte Baum bzgl. z und c

```
(: btree-fold ( %b (%b %a %b -> b) (btree-of %a) -> %b))
```

```
(define btree-fold
```

```
  (lambda (z c t)
```

```
    (cond ((empty-tree? t) z)
```

```
          ((node? t) (c (btree-fold z c (node-left-branch t))
```

```
                        (node-label t)
```

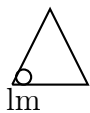
```
                        (btree-fold z c (node-right-branch t)))
```

```
          ))))
```

Beispiel

Bestimme die Markierung *lm* links-aussen im Baum t (oder empty, falls t leer ist).

$t \equiv \Downarrow$



(leftmost (x)) = (list x)



(leftmost (x)) = (leftmost [l])



```
(: leftmost ((btree-of %a) -> (list-of %a)))
```

```
(define leftmost
```

```
  (lambda (t)
```

```
    (btree-fold empty
```

```
(lambda (l1 x l2) (if (empty? l1) (list x) l1))
t)))
```

Baumdurchläufe

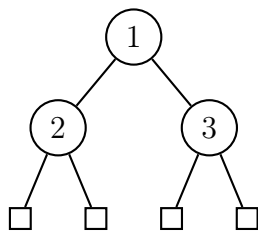
Ein Tiefniedurchlauf (depth-first traversal) eines Baumes t sammelt die Markierungen jedes Knoten n und t auf. Die Markierungen der Teilbäume l, r des Knotens $n = (\text{make-node } l \times r)$ werden vor x eingesammelt. (Durchlauf zuerst in der Tiefe)

Je nachdem, ob x (a) zwischen, (b) vor, (c) nach den Markierungen von l,r eingeordnet wird, erhält man

- (a) inorder traversal (1) (2) (3)
 (b) preorder traversal (2) (1) (3)
 (c) postorder traversal (1) (3) (2)

```
(: inorder ((btree-of %a) -> (list-of %a)))

(define inorder
  (lambda (t)
    (btree-fold empty
      (lambda (xs1 x xs2) (append xs1      ;(1)
                                   (list x)  ;(2)
                                   xs2       ;(3)
                                   ))
      t)))
```

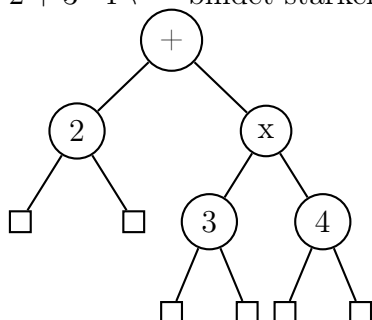


Daraus wird die Liste 2 1 3

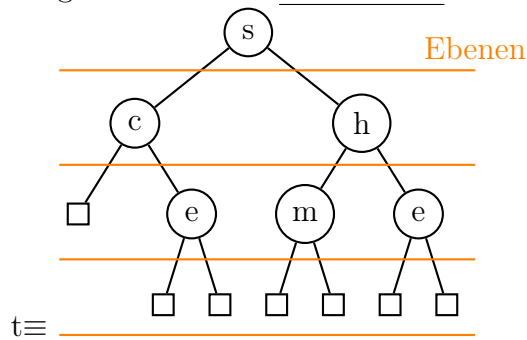
Beispiel

Baumdarstellung des arithmetischen Ausdrucks (Term)

$2 + 3 \cdot 4 \leftarrow \cdot$ bindet stärker als $+$



Ein Breitendurchlauf (breath-first traversal) eines Baums t sammelt die Markierungen der Knoten ebenenweise von der Wurzel ausgehend auf.

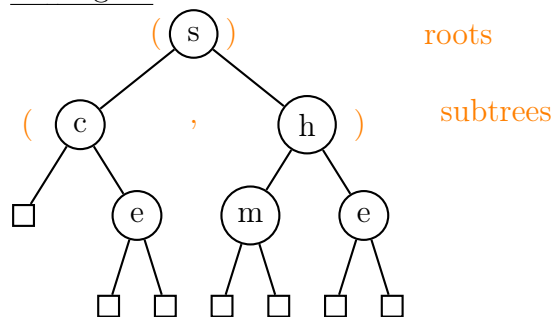


`(leveloder t) = (list "s" "c" "h" "e" "m" "e")`

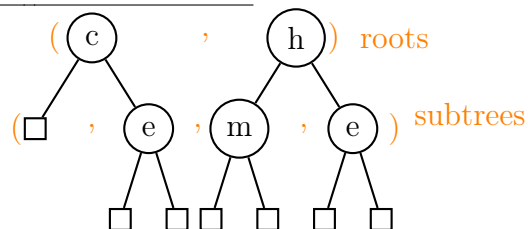
Idee: Gegeben sei eine Liste ts von Bäumen

- (1) Sammle die Liste der Markierungen der Wurzeln der (nicht-leeren) Bäume n ts ($=$ (roots ts))
- (2) Bestimme die Liste ts' der Teilbäume der (nicht-leeren) Bäume n ts ($=$ (subtrees ts))
- (3) Führe (1) rekursiv auf ts' aus.
- (4) komkatiniere die Listen aus (1) und (3).

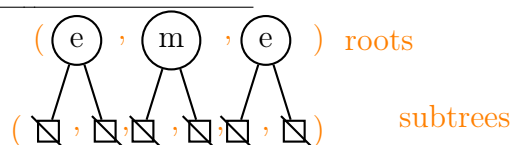
Zu Beginn



1. Rekursionsaufruf



2. Rekursionsaufruf



3. Rekursionsaufruf

()

```

(: traverse ((list-of (btree-of %a)) -> (list-of %a)))
(define traverse
  (lambda (ts)
    (cond ((empty? ts) empty)
          ((pair? ts)
           (append (roots ts)
                    (traverse (subtrees ts)))))))

```

Neue Sprachebene DMdA-fortgeschritten

- neues Ausgabeformat in der REPL $(\text{list } x_1 \ x_2 \ x_n) \rightsquigarrow (x_1 \ x_2 \ x_n)$
 $\text{empty} \rightsquigarrow ()$
- Neuer Gleichheitstest für Werte aller (auch benutzerdef.) Signaturen $(:\text{equal?}$
 $(\ \%a\ \%b \rightarrow \text{boolean}))$

Quote

Sei $\langle e \rangle$ ein beliebiger Scheme-Ausdruck. Dann liefert $(\text{quote } \langle e \rangle)$ die Repräsentation von $\langle e \rangle$ - $\langle e \rangle$ wird nicht ausgewertet.

Beispiele:

$(\text{quote } 42) \rightsquigarrow 42$

$(\text{quote } "Leia") \rightsquigarrow "Leia"$

$(\text{quote } \#t) \rightsquigarrow \#t$

$(\text{quote } + \ 40 \ 2) \rightsquigarrow (+ \ 40 \ 2)$ Funktionsapplikation repräsentiert als Liste

Abkürzung $(\text{quote } \langle e \rangle) \equiv ' \langle e \rangle$

Notation von Listenliteralen in Programmen (c_i Konstanten) $(\text{list } c_1 \ c_2 \ c_n) \equiv$

$'(c_1 \ c_2 \ c_n)$

$\text{empty} \equiv '()$

Symbole

Was ist $(\text{first } (* \ 1 \ 2))$? Was sind lambda , $x +$ in $'(\text{lambda } (x) (+ \ x \ 1))$?

Neue Signatur symbol zur Repräsentation von Namen in Programmen. Effizientere interne Darstellung, effizient vergleichbar (not equal?). Kein Zugriff auf die einzelnen Zeichen des Symbols. $\text{lambda} \neq \text{"lambda"}$

Operatoren

```

|| (: symbol? ( %a -> boolean))
|| (: symbol->string (symbol -> string))
|| (: string->symbol (string -> symbol))

```

Natürliche Repräsentation und Auswertung

Natürliche Repräsentation und Auswertung arithmetischer Ausdrücke (Terme):

Beispiel:

$e \equiv '(* (! (+ 1 2)) x)$

```

|| (define term
||   (signature (mixed number
||               symbol
||               (list-of term))))

```

- kein Parser benötigt
- kein Prettyprinter

Auswertung möglich, wenn Bindungen für Symbole (Variablen und Operatoren) an Werte gegeben sind. Dictionary (Enviroment):

- d1: { $x \rightarrow 3$,
 $* \rightarrow \langle \text{procedure: } * \rangle$,
 $+ \rightarrow \langle \text{procedure: } + \rangle$,
 $\wedge \rightarrow \langle \text{procedure: expt} \rangle$,
 $! \rightarrow \text{fac}$
 $e \rightsquigarrow \rightsquigarrow 18$
- d2: { $x \rightarrow 1$,
 $* \rightarrow *$,
 $+ \rightarrow +$,
 $\wedge \rightarrow \text{expt}$,
 $! \rightarrow (\text{lambda } (x) (-x))$ }
 $e \rightsquigarrow \rightsquigarrow -3$

Auswertung eines arithmetischen Ausdrucks e

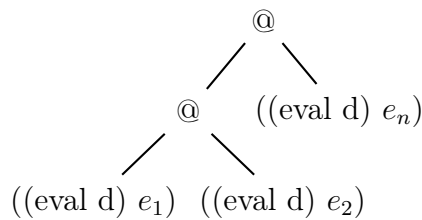
Auswertung eines arithmetischen Ausdrucks e (im Enviroment d):

$((\text{eval } d) e)$

$(E_1) ((\text{eval } d) c) = c$

$(E_2) ((\text{eval } \{x_1 \rightarrow v_1, \dots, x_n \rightarrow v_n\}) x_i) = v_i$

$(E_3) ((\text{eval } d) (e_1 e_2 \dots e_n)) = (\dots (((\text{eval } d) e_1) ((\text{eval } d) e_2)) \dots ((\text{eval } d) e_n))$



```

(: eval ((dict-of symbol value) -> (term -> value)))

(define eval
  (lambda (d)
    (lambda (e)
      (cond ((constant? e) e) ;(E1)
            ((variable? e) (lookup-dict e d)) ;(E2)
            ((compound? e) (let ((es (map (eval d) e)))
                              (foldl (first es) @ (rest es)))))))

(: @ ((%a -> %b) %a -> %b))
(define @
  (lambda (f x)
    (f x)))

```

Lambda-Kalkül

Das λ -Kalkül ist eine Notation für beliebige Funktionen. Entwickelt in den 1930er Jahren von Alonzo Church (1903-1995) als neue Grundlage der Mathematik [aber die Mathematiker bevorzugen die Mengenlehre]. Seither verwendet als theoretischer Unterbau für Programmiersprachen.

Syntax des λ -Kalküls

Die Menge der Ausdrücke (expressions) E des λ -Kalküls ist induktiv definiert (sei V unendliche Menge von Variablennamen).

- $\forall v \in V : v \in E$ [Variable]
- $\forall e_1, e_2 \in E : (e_1 e_2) \in E$ [Applikation]
- $\forall v \in V, e_1 \in E : (\lambda v. e_1) \in E$ [Abstraktion]

Beispiele $y \in E$

$(\lambda y. y) \in E$ Identitätsfunktion

$(\lambda y. z) \in E$ Funktion ignoriert Arg. y , liefert z

$((fx)y) \in E$ Anwendung von f auf x und y (Currying)

$(\lambda f. (f x)) \in E$ Anwendung von Argument f auf x (H.O.P., Typ 1)

$((e_1 e_2) e_3) \equiv (e_1 e_2 e_3)$ Currying

Freie/Gebundene Variablen

Zur Auswertung $E_1 \equiv ((\lambda x(f\ x\ y))\ z)$

- wird der hier nicht bekannte Wert der Variablen f, y, z benötigt, während
- der Wert von x im Rumpf $(f\ x\ y)$ durch das Argument z festgelegt ist.

In E_1 ist

- Variable x (durch das λx als Parameter) gebunden (bound), während
- Variablen f, y, z frei (free) sind.

Welche Variablen eines Ausdrucks sind frei/gebunden?

$$\text{free}(v) = \{v\}$$

$$\text{free}((e_1\ e_2)) = \text{free}(e_1) \cup \text{free}(e_2)$$

$$\text{free}((\lambda x.e_1)) = \text{free}(e_1) \setminus \{x\}$$

$$\text{bound}(v) = \{\}$$

$$\text{bound}((e_1\ e_2)) = \text{bound}(e_1) \cup \text{bound}(e_2)$$

$$\text{bound}((\lambda v.e_1)) = \text{bound}(e_1) \cup \{v\}$$

Beispiel:

$$\text{free}(t_1)$$

$$= \text{free}(((\lambda x((f\ x)\ y))\ z))$$

$$= \text{free}((\lambda x((f\ x)\ y))) \cup \text{free}(z)$$

$$= (\text{free}(((f\ x)\ y)) \setminus \{x\}) \cup \{z\}$$

$$= ((\text{free}(f) \cup \text{free}(x)) \setminus \{x\}) \cup \{z\}$$

$$= (((\text{free}(f) \cup \text{free}(x)) \cup \{y\}) \setminus \{x\}) \cup \{z\}$$

$$= (((\{f\} \cup \{x\}) \cup \{y\}) \setminus \{x\}) \cup \{z\}$$

$$= \{f, x, y\} \setminus \{x\} \cup \{z\} = \{f\ y\ z\}$$

Achtung: Bindung/Freiheit muss für jedes Vorkommen einer Variable separat entschieden werden.

$$E_2 \equiv (x\ (\lambda x.x))$$

$$\text{free}(t_2) = \{x\}$$

$$\text{bound}(t_2) = \{x\}$$

β -Reduktion

Die Anwendung einer Funktion (= λ -Abstraktion) auf ein Argument wird im λ -Kalkül durch β -Reduktion ($\xrightarrow{\beta}$) beschrieben. Die Applikation $(\lambda v.e_1)e_2$ wird durchgeführt, indem

- (1) eine Kopie des Rumpfes e_1 hergestellt wird und
- (2) alle freien Vorkommen von v in e_1 durch e_2 ersetzt werden.

Beispiel:

- $((\lambda x. (* ((\lambda x. (+ x a)) b) x)) c)$
 $\xrightarrow{\beta} (* ((\lambda x. (+ x a)) b) c)$
 $\xrightarrow{\beta} (* (+ b a) c)$
- $((\lambda x. \text{foo}) \text{bar}) \xrightarrow{\beta} \text{foo}$
- $((\lambda x. ((\lambda y. (* y x)) a)) b)$
 $\xrightarrow{\beta} ((\lambda y. (* y b)) a)$
 $\xrightarrow{\beta} (* a b)$ Curry
- $((\lambda f. (f c)) (\lambda x. (+ x a)))$
 $\xrightarrow{\beta} ((\lambda x. (+ x a)) c)$
 $\xrightarrow{\beta} (+ c a)$ Higher-Order
- $((\lambda x. (\lambda y. x)) (\lambda z. y) \bowtie a)$ *muesste y liefern*
 $\xrightarrow{\beta} (((\lambda y. (\lambda z. y)) \bowtie) a)$
 $\xrightarrow{\beta} ((\lambda z. \bowtie) a)$
 $\xrightarrow{\beta} \bowtie$

Definition β -Reduktion

$((\lambda x. e) a) \xrightarrow{\beta} e[x \mapsto a]$ "ersetze freie Vorkommen von x in a "

$$(\mapsto_1) \ x[x \mapsto a] = a$$

$$(\mapsto_2) \ v[x \mapsto a] = v$$

$$(\mapsto_3) \ (e_1 e_2)[x \mapsto a] = (e_1[x \mapsto a] e_2[x \mapsto a])$$

$$(\mapsto_4) \ (\lambda x. e)[x \mapsto a] = (\lambda x. e)$$

$$(\mapsto_5) \ (\lambda v. e)[x \mapsto a] = (\lambda v. e[x \mapsto a]) \text{ falls } v \text{ nicht frei in } a!$$

$$(\mapsto_6) \ (\lambda v. e)[x \mapsto a] = (\lambda v'. e[v \mapsto v'])[x \mapsto a] \text{ sonst } v': \text{ neuer Variablenname}$$

Beispiel: $((\lambda x. (\lambda y. x)) (\lambda z. y) \bowtie a)$ *muegsste y liefern*

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\beta} (((\lambda y. x)[x \mapsto (\lambda z. y)]) \bowtie a) \\ &\xrightarrow{(\mapsto_6)} (((\lambda y'. x[y \mapsto y'])[x \mapsto (\lambda z. y)]) \bowtie a) \\ &\xrightarrow{(\mapsto_2)} (((\lambda y'. x)[x \mapsto (\lambda z. y)]) \bowtie a) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
\rightarrow (((\lambda y'.x[x \rightarrow (\lambda z.y)]))\mathbf{\boxtimes}) a) \\
(\rightarrow_5) \\
\rightarrow (((\lambda y'.(\lambda z.y)) \mathbf{\boxtimes}) a) \\
(\rightarrow_1) \\
\rightarrow ((\lambda z.y)[y' \rightarrow \mathbf{\boxtimes}] a) \\
\beta \\
\rightarrow ((\lambda z.y[y' \rightarrow \mathbf{\boxtimes}]) a) \\
(\rightarrow_5) \\
\rightarrow ((\lambda z.y) a) \\
(\rightarrow_2) \\
\rightarrow y[z \rightarrow a] \\
\beta \\
\rightarrow y \\
(\rightarrow_2)
\end{array}$$