Aufgabe 7: Vektoren (4 Punkte)

Diese Aufgabe ist theoretischer Natur und soll ohne technische Hilfsmittel gelöst werden.

a) Berechnen Sie die Multiplikation zwischen dem Skalar 5 und dem Vektor $\begin{pmatrix}3\alpha & 4+\beta & \gamma\end{pmatrix}^T$.

b) Addieren Sie die Vektoren $\begin{pmatrix}3\alpha & 4+\beta & \gamma\end{pmatrix}^T$ und $\begin{pmatrix}2\beta & 4x & \gamma^2\end{pmatrix}^T$.

c) Subtrahieren Sie den Vektor $\begin{pmatrix}3\alpha & 4+\beta & \gamma\end{pmatrix}^T$ von dem Vektor $\begin{pmatrix}2\alpha & 3 & 6\alpha\end{pmatrix}^T$.

d) Berechnen Sie die Länge des Vektors $\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\end{pmatrix}^T$.

e) Berechnen Sie die Normalisierung des Vektors $\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\end{pmatrix}^T$.

f) Berechnen Sie das Skalarprodukt zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\end{pmatrix}^T$ und $\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\end{pmatrix}^T$.

g) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\end{pmatrix}^T$ und $\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\end{pmatrix}^T$.

h) Berechnen Sie das Kreuzprodukt der Vektoren $\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\end{pmatrix}^T$ und $\begin{pmatrix}1 & 1 & 8\end{pmatrix}^T$.

Aufgabe 8: Flächen und Dreiecke (2 Punkte)

Diese Aufgabe ist theoretischer Natur und soll ohne technische Hilfsmittel gelöst werden.

Gegeben seien die Punkte $P_1 = (5, 0, 0)$, $P_2 = (0, 0, 5)$ und $P_3 = (10, 0, 5)$.

a) Berechnen Sie die Vektoren, welche senkrecht auf der durch die Punkte verlaufenden Ebene stehen.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den Punkten aufgespannten Dreiecks.

Aufgabe 9: Matrizen (6 Punkte)

Diese Aufgabe ist theoretischer Natur und soll ohne technische Hilfsmittel gelöst werden.

a) Berechnen Sie die transponierte Matrix von:

$$F = \begin{pmatrix}6 & 5 & 3\\1 & 8 & 2\\4 & 9 & 7\end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Produkte $D \cdot E$ und $E \cdot D$ der Matrizen:

$$D = \begin{pmatrix}1 & 5 & 3 & -4\\1 & 3 & 2 & 2\\4 & 5 & -3 & 2\\4 & 2 & 7 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & 1\\-2 & 1 & 4 & 2\\3 & 4 & 3 & 3\\-1 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

c) Berechnen Sie die folgenden Vektoren:

$$a = \begin{pmatrix}6 & 5 & 3 & 4\\1 & 8 & 2 & 2\\4 & 9 & 3 & 2\\4 & 9 & 7 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\2\\3\\1\end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix} \quad , \quad c = \begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & \beta & 0\\\gamma & 0 & 1 & \delta\\0 & \zeta & 0 & \eta\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}$$

d) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$G = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \quad , \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

e) Invertieren Sie die folgenden Matrizen:

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad L = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \quad , \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10: Baryzentrische Koordinaten (6 Punkte)

Diese Aufgabe ist theoretischer Natur und soll ohne technische Hilfsmittel gelöst werden.

Gegeben seien die Punkte $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (7, 2)$ und $P_3 = (4, 5)$.

a) Berechnen Sie die baryzentrischen Koordinaten (u, v, w) des Punktes $Q = (3.5, 2.5)$ für das durch P_1, P_2 und P_3 aufgespannte Dreieck. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Formulieren Sie das Problem als Gleichnungssystem.
- Schreiben Sie das Gleichnungssystem in Matrixform als $Ax = b$.
- Berechnen Sie die baryzentrischen Koordinaten durch invertieren der Matrix A:

$$x = A^{-1}b$$

b) Sei nun Q ein beliebiger Punkt des von P_1, P_2 und P_3 aufgespannten Dreiecks. Geben Sie unter (ausschließlicher) Verwendung von A und b Formeln für die Berechnung der Flächeninhalte der folgenden Dreiecke an:

$$(P_1, P_2, P_3) \quad (Q, P_1, P_2) \quad (Q, P_2, P_3) \quad (Q, P_3, P_1)$$

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den oben genannten Flächeninhalten und den baryzentrischen Koordinaten des Punktes Q? *Hinweis:* Nutzen Sie für die Invertierung von A und für die Berechnung der Flächeninhalte die Determinante.

Aufgabe 11: Vektorraum der Linearen Abbildungen (2 Punkte)

Diese Aufgabe ist theoretischer Natur und soll ohne technische Hilfsmittel gelöst werden.

Es bezeichne $\mathrm{Hom}(V, W)$ die Menge der linearen Abbildungen zwischen zwei $\mathbb{R}$-Vektoräumen V und W. Für $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $x \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ seien auf $\mathrm{Hom}(V, W)$ eine Addition und Skalarmultiplikation wie folgt definiert:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \tag{1}$$
$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x) \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}(V, W)$ mit dieser Definition ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Allgemeine Hinweise:

- Die Aufgaben sollen maximal zu zweit bearbeitet werden; Ausnahmen müssen mit den Übungsleitern abgesprochen werden.

- Bitte reichen Sie Ihre Lösungen bis Dienstag, den **26.05.2015**, um **13.15** Uhr ein.
- Bei den Aufgaben müssen nachvollziehbare und vollständige Lösungswege angegeben werden. Die alleinige Angabe des Ergebnisses ist nicht ausreichend! Die Lösungen sollen in digitaler Form als PDF-Dokument eingereicht werden. Lösungen in Papierform sollen bei Bedarf eingescannt werden (z.B. am HPI). Außerdem müssen die Lösungsblätter Ihre Matrikelnummern enthalten.
- Zippen Sie ihre Lösungen für die Aufgaben in **eine** Zip-Datei. Geben Sie der Zip-Datei einen Namen nach folgendem Schema:

  cg1_blatt3_matrikelnummer1_matrikelnummer2.zip.
- Die Zip-Datei laden Sie dann bei moodle hoch.