Aufgabe 7

a)

$$5\begin{pmatrix}3\alpha\\4+\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\alpha\\20+5\beta\\5\gamma\end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix}3\alpha\\4+\beta\\\gamma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\beta\\4x\\\gamma^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\alpha+2\beta\\4+\beta+4x\\\gamma^2+\gamma\end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix}3\alpha\\4+\beta\\\gamma\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\alpha\\3\\6\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\1+\beta\\\gamma-6\alpha\end{pmatrix}$$

d)

$$\left\|\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{9+16+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

e)

$$\frac{\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right\|}=\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5\sqrt{2}}\\\frac{4}{5\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

f)

$$<\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}>=6+16+30=52$$

g)

$$cos\theta=\frac{<\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}>}{\left\|\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right\|}=\frac{52}{5\sqrt{2}+\sqrt{4+16+36}}=\frac{52}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{56}}=\frac{52}{5\sqrt{112}}=\frac{52}{5\sqrt{16\cdot 7}}=\frac{52}{20\sqrt{7}}=\frac{13}{4\sqrt{7}}$$

h)

$$\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16-5\\24-5\\3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\19\\1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

a)

Alle 3 Punkte befinden sich auf der x,z-Ebene. Daher stehen alle Vektoren senkrecht auf der Ebene, deren x- und z-Werte gleich 0 sind.
Beweis (Kreuzprodukt von 2 Punkten(hier $P_1(5,0,0)$ und $P_2(0,0,5)$) ergibt Normalenvektor):

$$N = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\25\\0\end{pmatrix}$$

b)

$$A = \frac{\left\| \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix} \right\|}{2} = \frac{\left\| \begin{pmatrix}0\\-50\\0\end{pmatrix} \right\|}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

Aufgabe 9

a)

$$F^T = \begin{pmatrix}6 & 1 & 4\\5 & 8 & 9\\3 & 2 & 7\end{pmatrix}^T$$

b)

$$D \cdot E = \begin{pmatrix}1 & 5 & 3 & -4\\1 & 3 & 2 & 2\\4 & 5 & -3 & 2\\4 & 2 & 7 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & 1\\-2 & 1 & 4 & 2\\3 & 4 & 3 & 3\\-1 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-10+9+4 & 3+5+12-12 & 5+20+9 & 1+10+9-4\\2-6+6-2 & 3+3+8+6 & 5+12+6 & 1+6+6+2\\8-10-9-2 & 12+5-12+6 & 20+20-9 & 4+10-9+2\\8-4+21+1 & 12+2+28+3 & 20+8+21 & 4+4+21+1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}5 & 8 & 34 & 16\\0 & 20 & 23 & 15\\-13 & 11 & 31 & 7\\24 & 45 & 49 & 30\end{pmatrix}$$

$$E \cdot D = \begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & 1\\-2 & 1 & 4 & 2\\3 & 4 & 3 & 3\\-1 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 5 & 3 & -4\\1 & 3 & 2 & 2\\4 & 5 & -3 & 2\\4 & 2 & 7 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2+3+20+4 & 10+9+25+2 & 6+6-15+7 & -8+6+10+1\\-2+1+16+8 & -10+3+20+4 & -6+2-12+14 & 8+2+8+2\\3+4+12+12 & 15+12+15+6 & 9+8-9+21 & -12+8+6+3\\-1+3+4 & -5+9+2 & -3+6+7 & 4+6+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}29 & 46 & 4 & 9\\23 & 17 & -2 & 20\\31 & 48 & 29 & 5\\6 & 6 & 10 & 11\end{pmatrix}$$

c)

$$a = \begin{pmatrix}6 & 5 & 3 & 4\\1 & 8 & 2 & 2\\4 & 9 & 3 & 2\\4 & 9 & 7 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24+10+9+4\\4+16+6+2\\16+18+9+2\\16+18+21+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}47\\28\\45\\56\end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x\\y\\3z\\1\end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 1 & \delta \\ 0 & \zeta & 0 & \eta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + 1 \\ \beta z \\ \gamma x + z + \delta \\ \zeta y + \eta \end{pmatrix}$$

d)

$detG = 48 - 5 = 43$
$detH = 16 + 18 + 10 - 60 - (-6) - (-8) = 44 - 60 + 14 = 58 - 60 = -2$
$detJ = 2 \cdot det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} - (-3) \cdot det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 4 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$= 2 \cdot (18 + 6 + 8 - 6 - (-8) - (-18)) + 3 \cdot (6 + 24 + 12 - 24 - (-12) - (-6)) + 1 \cdot (4 + (-36) + 6 - 16 - 18 - (-3)) - 4 \cdot (4 + 36 + (-6) - (-16) - 18 - 3) = 2 \cdot 52 + 3 \cdot 36 + (-57) - 4 \cdot 29 = 104 + 108 - 57 - 116 = 39$

e)

$(K|I) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & | & 1 & 0 \\ -1 & 4 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$
switch rows I and II

$= \begin{pmatrix} -1 & 4 & | & 0 & 1 \\ 2 & 3 & | & 1 & 0 \end{pmatrix}$
row $I = I \cdot (-1)$

$= \begin{pmatrix} 1 & -4 & | & 0 & -1 \\ 2 & 3 & | & 1 & 0 \end{pmatrix}$
row $II = II - 2 \cdot I$

$= \begin{pmatrix} 1 & -4 & | & 0 & -1 \\ 0 & 11 & | & 1 & 2 \end{pmatrix}$
row $II = II \cdot \frac{1}{11}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -4 & | & 0 & -1 \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$
row $I = I + 4 \cdot II$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$
$\rightarrow K^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$
$(L|I) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
row $III = III + I$

$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
row $I = I - 2 \cdot II$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
row $II = II - I$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

row $II = II - 3 \cdot III$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(M|I) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

switch rows I and II

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

row $II = II - 2 \cdot I$
row $III = III - 4 \cdot I$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & | & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & -6 & | & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

switch rows II and IV

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & -6 & | & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & | & 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

row $I = I + 2 \cdot II$
row $III = III - 7 \cdot II$
row $IV = IV - 3 \cdot II$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 & | & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -13 & | & 0 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & | & 1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

switch rows III and IV

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 & | & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & | & 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & -13 & | & 0 & -4 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

row $III = III \cdot -\frac{1}{3}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 & | & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -13 & | & 0 & -4 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

row $I = I - 4 \cdot III$

row $II = II - 2 \cdot III$
row $IV = IV + 11 \cdot III$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & -\frac{11}{3} & \frac{10}{3} & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

row $IV = IV \cdot -\frac{1}{2}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{11}{6} & -\frac{10}{6} & -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

row $II = II + IV$
row $III = III - IV$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & \frac{15}{6} & -\frac{18}{6} & -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -\frac{13}{6} & \frac{14}{6} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{11}{6} & -\frac{10}{6} & -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & \frac{5}{2} & -3 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -\frac{13}{6} & \frac{7}{3} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{11}{6} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & \frac{5}{2} & -3 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -\frac{13}{6} & \frac{7}{3} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{11}{6} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10

a)

$P_1(1|1)$
$P_2(7|2)$
$P_3(4|5)$
$P_1(3.5|2.5)$

$$\begin{pmatrix} x_0 - x_2 & x_1 - x_2 \\ y_0 - y_2 & y_1 - x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_2 \\ y - y_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -2.5 \end{pmatrix}$$

$$(A|I) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & | & 1 & 0 \\ -4 & -3 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

row $I = I \cdot -\frac{1}{3}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & -\frac{1}{3} & 0 \\ -4 & -3 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

row $II = II + 4 \cdot I$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -7 & | & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

row $II = II \cdot -\frac{1}{7}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{4}{21} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

row $I = I + II$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -\frac{3}{21} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & | & \frac{4}{21} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{4}{21} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$
$x = A^{-1} \cdot b$
$\rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 \\ -2.5 \end{pmatrix}$
$= -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -0.5 - 2.5 \\ \frac{4}{6} - 2.5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{2}{3} - \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{11}{42} \end{pmatrix}$
$\rightarrow \lambda_0 = \frac{3}{7} \wedge \lambda_1 = \frac{11}{42}$
$\rightarrow$ Baryzentrische Koordinaten $(u, v, w) = (\frac{3}{7}, \frac{11}{42}, 1 - \frac{3}{7} - \frac{11}{42}) = (\frac{3}{7}, \frac{11}{42}, \frac{13}{42})$

b)

$\triangle(P_1, P_2, P_3):$
$A_\triangle = |detA| \cdot \frac{1}{2}$

$\triangle(Q, P_1, P_2)$

$\triangle(Q, P_2, P_3)$

$\triangle(Q, P_3, P_1)$

c)

Aufgabe 11

z.z.: 1) $Hom(V, W)$ abelsche Gruppe $(Hom(V, W), +)$
2) Skalarmultiplikation auf $Hom(V, W)$ definiert
zu 1)
z.z.: i) ist abgeschlossen auf +
ii) ist assoziativ
iii) hat Neutrales Element
iv) hat Inverses Element
v) ist kommutativ

zu i)
Sei $f, g \in Hom(V, W), x \in V$
$\rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ nach Definition der Addition auf $Hom(V, W)$
$\rightarrow f(x) + g(x) \in Hom(V, W)$ da Addition auf $\mathbb{R}^3$ abgeschlossen
$\rightarrow (f + g)(x) \in Hom(V, W)$
$\rightarrow Hom(V, W)$ ist abgeschlossen auf +

zu ii)
Sei $f, g, h \in Hom(V, W), x \in V$
$\rightarrow (f + g + h)(x) = f(x) + g(x) + h(x)$ nach Definition der Addition auf $Hom(V, W)$
$\rightarrow (f(x) + g(x)) + h(x) \leftrightarrow f(x) + (g(x) + h(x))$ da Addition in $\mathbb{R}$ assoziativ
$\rightarrow ((f + g) + h)(x) \leftrightarrow (f + (g + h))(x)$ nach Definition der Addition auf $Hom(V, W)$
$\rightarrow$ ist assoziativ

zu iii)
Sei $f, g \in Hom(V, W), x \in V, g$ neutrales Element $mitg(x) = 0$
$\rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ nach Definition Addition auf $Hom(V, W)$

$\rightarrow (f+g)(x) = f(x) + 0$
$\rightarrow (f+g)(x) = f(x)$
$\rightarrow$ Abbildung auf 0 ist neutrales Element
zu iv)
Sei $f, f^{-1} \in Hom(V,W), x \in V, f^{-1} inversesElementmit f^{-1}(x) = -f(x)$
$\rightarrow (f+f^{-1})(x) = f(x) + f^{-1}(x)$ nach Definition Addition auf $Hom(V,W)$
$\rightarrow (f+f^{-1})(x) = f(x) + -f(x)$
$\rightarrow (f+f^{-1})(x) = 0$
$\rightarrow$ inverses Element f^{-1} mit $f^{-1}(x) = -f(x)$

zu v)
kommutativ, da + in $\mathbb{R}$ kommutativ
Sei $f, g \in Hom(V,W), x \in V$
$\rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x)$ nach Definition Addition auf $Hom(V,W)$
$\rightarrow (f+g)(x) = g(x) + f(x)$ da + auf $\mathbb{R}$ kommutativ
$\rightarrow (f+g)(x) = (g+f)(x)$ nach Definition Addition auf $Hom(V,W)$

zu 2)
trivial, da nach Aufgabenstellung Skalarmultiplikation für $Hom(V,W)$ definiert ist.

$\rightarrow$ Hom(V,W) ist $\mathbb{R}$-Vektorraum