

Программа AI Masters
Теория игр, весна 2024
Домашнее задание 5: динамические игры

Срок сдачи — 31 мая (дедлайн строгий). Ответы присылайте в телеграм @goddos. Задачи принимаются в письменном виде одним файлом в формате PDF. (Можно набрать решение в \LaTeX или другом редакторе, либо отсканировать или сфотографировать написанное от руки, собрав всё в PDF. При фотографировании следите за резкостью, контрастностью и балансом белого. Фотографии плохого качества: нерезкие, смазанные и т. д. — проверяться не будут). Если вы решали задачи совместно с кем-то, или использовали литературу, или консультировались с чатботами, в том числе для редактуры текста, то в работе нужно указать, с кем и в каком объёме вы сотрудничали и какие источники и программы использовали. При этом собственно тексты решений необходимо записывать самостоятельно, обнаруженные текстуальные совпадения могут привести к незачёту задачи или всей работы.

1. (10 баллов за пункт а, 5 баллов за пункт б) Рассмотрим следующую игру: два велосипедиста едут навстречу друг другу по узкой дороге. Каждый из них выбирает, уступить дорогу или продолжить ехать. Выигрыш определяется следующим образом:

- Если игрок уступил дорогу, то его выигрыш равен 0.
- Если игрок продолжил ехать, а его оппонент уступил дорогу, то выигрыш игрока, который продолжил ехать, равен 1.
- Если оба игрока продолжили ехать, то они сталкиваются; выигрыш i -го игрока в таком случае равен $-1 + \varepsilon_i$.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — случайные независимые величины из равномерного распределения на отрезке $[-\varepsilon, \varepsilon]$, где $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ — параметр, известный обоим игрокам. Также игрок i знает ε_i , но не реализацию второй величины.

- а) Найдите все равновесия Байеса-Нэша в этой игре.
- б) Пусть теперь каждый игрок знает и ε_1 , и ε_2 . Найдите все равновесия в таком случае.

2. («Соседи», 5+10 баллов) Анна и Белла живут в одном общежитии. Они ходят за продуктами каждый день, и это занимает 20 минут. Они решили скооперироваться на протяжении 4 дней: в понедельник Анна закупает продукты для обеих, во вторник Белла, в среду снова Анна и в четверг снова Белла. Покупка продуктов для соседки занимает лишние 5 минут, так что есть стимул отклониться. Если кто-либо не купил продуктов соседке, то далее до конца игры обе ходят за продуктами сами.

- а) Формализуйте ситуацию как динамическую игру. Найдите все равновесия Нэша, совершенные на подыграх.
- б) Предположим, что Анна решает, покупать ли продукты Белле, стратегически, в то время как Белла может быть честной с вероятностью p , и в таком случае заведомо соблюдать договорённость (если Анна её не нарушила, конечно). С вероятностью $1 - p$ Белла тоже действует стратегически. Формализуйте ситуацию как динамическую игру с неполной информацией. Найдите все байесовские равновесия.

3. (15 баллов) Предприниматель приходит к инвестору, чтобы попросить денег на проект. С вероятностью p проект хороший, с вероятностью $1 - p$ плохой. Хороший проект приносит прибыль в размере 10 предпринимателю и в размере 3 инвестору, если тот согласится профинансировать, и прибыль 7 предпринимателю в отсутствие финансирования. Плохой проект приносит прибыль 3 предпринимателю и убыток 3 инвестору в случае финансирования и прибыль 1 предпринимателю в отсутствие финансирования. Предприниматель может написать хороший бизнес-план, потратив 2, или бесплатно написать плохой бизнес-план. Инвестор не видит типа предпринимателя, но видит бизнес-план. Инвестор может дать денег, отказать, или устроить экспертизу проекта, стоящую 1. В результате экспертизы он точно узнает качество проекта и сможет вновь дать денег или отказать.

Опишите все байесовские равновесия в этой игре. В частности, ответьте на следующие вопросы: при каких p возможны смешивающее, разделяющее и гибридное равновесия? (Смешивающее равновесие означает, что предприниматель с любым проектом пишет одинаковый бизнес-план, разделяющее — что с хорошим проектом пишет один бизнес-план, с плохим другой, гибридное — что хотя бы в одном случае предприниматель использует смешанную стратегию). Всегда ли инвестор проводит экспертизу хорошего бизнес-плана? Бывает ли так, что он проводит экспертизу плохого бизнес-плана?