Программа AI Masters
Теория игр, весна 2024
Домашнее задание 4: динамические игры

Срок сдачи — 31 мая (дедлайн строгий). Ответы присылайте в телеграм `@goddos`. Задачи принимаются в письменном виде одним файлом в формате PDF. (Можно набрать решение в TEXе или другом редакторе, либо отсканировать или сфотографировать написанное от руки, собрав всё в PDF. При фотографировании следите за резкостью, контрастностью и балансом белого. Фотографии плохого качества: нерезкие, смазанные и т. д. — проверяться не будут). Если вы решали задачи совместно с кем-то, или использовали литературу, или консультировались с чатботами, в том числе для редактуры текста, то в работе нужно указать, с кем и в каком объёме вы сотрудничали и какие источники и программы использовали. При этом собственно тексты решений необходимо записывать самостоятельно, обнаруженные текстуальные совпадения могут привести к незачёту задачи или всей работы.

1. (5 баллов за каждый пункт) Рассмотрим следующую игру: дана бесконечная в 2 стороны шахматная доска (то есть множество ее клеток — это множество пар неотрицательных целых чисел), в одной из этих клеток находится шахматный конь. За один ход игрок должен передвинуть коня по шахматным правилам, но так, чтобы конь приблизился к угловой клетке. Формально говоря, из клетки (x, y) можно переместиться в одну из клеток $(x-2, y+1), (x-2, y-1), (x-1, y-2), (x+1, y-2)$. Проигрывает игрок, который не может ходить.

а) Найдите все выигрышные начальные позиции в этой игре (то есть все клетки, при старте в которых первый игрок будет иметь выигрышную стратегию).

б) Будет ли ответ другим, если доска конечная, а конь изначально стоит в правом верхнем углу? Объясните, в чём отличие постановок, и приведите по одному примеру, когда ответ меняется и когда не меняется.

2. («Труэль», 5 баллов за каждый пункт) Антон, Борис и Виктор играют в пейнтбол. Они одновременно делают выстрел, при этом каждый сам выбирает, в кого целиться. Если в кого-то попали, то он испачкан краской и более в дуэли не участвует. Если после выстрела остались чистыми более одного человека, то они продолжают играть по тем же правилам. Игра продолжается до тех пор, пока чистыми остаются хотя бы двое. Единственный оставшийся чистым побеждает, иначе все проиграли. Антон попадает в выбранную цель с вероятностью 90%, Борис — с вероятностью 50%, Виктор — с вероятностью 10%.

а) Кому в кого следует целиться, чтобы максимизировать вероятность победы?

б) Найдите вероятности победы каждого игрока.

в) Изменятся ли ответы на предыдущие вопросы, если разрешить игрокам пропускать ход (стрелять в воздух)?

3. (10 баллов) Рассмотрим следующую игру: есть k кучек камней размеров $a_1, \ldots, a_k$ ($a_i \in \mathbb{N}$). Игроки ходят по очереди, за один ход игрок должен взять из любой кучки 1, 2 или 3 камня. Проигрывает игрок, который не может ходить.

Найдите функцию Шпрага-Гранди этой игры. Какой игрок будет в ней выигрывать?

4. (15 баллов) Два игрока делят 100 монет. Это происходит следующим образом: первый игрок предлагает распределение, после чего второй может его принять либо отменить. Если он отклоняет, то одна монетка вычитается из общего банка, после чего ситуация повторяется, но теперь второй игрок предлагает распределение, а первый может его принять или отклонить. Каждый игрок стремится заработать как можно больше денег, а при прочих равных — чтобы второй игрок заработал как можно меньше денег.

Найдите все равновесия, совершенные на подыграх в этой игре. Есть ли в ней (чистые) равновесия Нэша, не совершенные на подыграх?