Программа AI Masters
Теория игр, весна 2024
Домашнее задание 3: смешанные равновесия Нэша

Срок сдачи — 10 мая. При более поздней сдаче оценка снижается на 50%. Ответы присылайте в телеграм `@goddos`. Задачи принимаются в письменном виде одним файлом в формате PDF. (Можно набрать решение в TEXе или другом редакторе, либо отсканировать или сфотографировать написанное от руки, собрав всё в PDF. При фотографировании следите за резкостью, контрастностью и балансом белого. Фотографии плохого качества: нерезкие, смазанные и т. д. — проверяться не будут). Если вы решали задачи совместно с кем-то, или использовали литературу, или консультировались с чатботами, в том числе для редактуры текста, то в работе нужно указать, с кем и в каком объёме вы сотрудничали и какие источники и программы использовали. При этом собственно тексты решений необходимо записывать самостоятельно, обнаруженные текстуальные совпадения могут привести к незачёту задачи или всей работы.

Определение 1. Пусть в игре G у игрока i есть множество из k стратегий $S^i = \{s^i_1, \ldots, s^i_k\}$ (для простоты обозначений отождествим их с числами $1, \ldots, k$). Смешанной стратегией игрока i называется набор из k неотрицательных чисел $(\sigma^i_1, \ldots, \sigma^i_k)$ такой что $\sum_{j=1}^k \sigma^i_j = 1$.

Неформально смешанную стратегию σ_i можно описать так: «с вероятностью σ^i_1 сыграть стратегию 1, с вероятностью σ^i_2 сыграть 2, и так далее».

Обратите внимание, что при таком определении чистая стратегия — это частный случай смешанной стратегии.

Определение 2. Пусть в игре G задан профиль смешанных стратегий σ (то есть $\sigma = (\sigma^1, \ldots, \sigma^N)$, где σ^i — смешанная стратегия игрока i.

Определим выигрыш игроков в при таком выборе стратегий следующим образом:

$$u_i(\sigma^1, \ldots, \sigma^N) = \sum_{s \in S^1 \times \cdots \times S^N} \sigma^1_{s^1} \sigma^2_{s^2} \ldots \sigma^N_{s^N} u_i(s).$$

Неформально говоря, мы считаем, что все игроки независимо выбирают свои ходы в соответствии со своими смешанными стратегиями, и выигрышем игрока считается матожидание его выигрыша.

Смешанным равновесием Нэша называется такой профиль смешанных стратегий $(\sigma^1, \ldots, \sigma^N)$, что для любого игрока i и для любой его смешанной стратегии σ^i_* верно

$$u_i(\sigma^i, \sigma^{-i}) \geqslant u_i(\sigma^i_*, \sigma^{-i}).$$

В этом задании под равновесиями Нэша понимаются смешанные равновесия Нэша.

---

1. (10 баллов) Найдите все равновесия в следующей игре: нападающий пробивает пенальти в ворота, вратарь пытается их защитить. Вратарь выбирает прыгать вправо или влево, нападающий — бить вправо или влево. При этом:

- Если нападающий бьет вправо, то он точно попадает по воротам.
- Если нападающий бьет влево, то он попадает по воротам только с вероятностью $\frac{5}{6}$.

- Если вратарь прыгнул не в ту сторону, в которую ударил нападающий, он точно не поймает мяч.
- Если вратарь прыгнул влево и мяч полетел влево, то он его точно поймает.
- Если вратарь прыгнул вправо и мяч полетел вправо, то он поймает его с вероятностью $\frac{2}{3}$.

Выигрыши игроков определяются следующим образом:

- Нападающий не попал по воротам: он получает -6, а вратарь получает 0.
- Вратарь поймал мяч: он получает 6, а нападающий получает 0.
- Нападающий забил гол: он получает 6, а вратарь получает -6.

Если для данного выбора направлений исход не предопределён, то стороны получают матожидание от выигрышей в разных случаях.

2. (10 баллов) Рассмотрим игру со следующей матрицей:

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
s_1	2, 0	5, 3	2, 4	6, 1	3, 2
s_2	3, 1	0, 6	0, 5	3, 2	0, 3
s_3	4, 6	1, 3	2, 1	5, 4	1, 3
s_4	2, 7	4, 2	1, 4	5, 8	4, 5

Исключением сильно доминируемых стратегий (включая те, которые доминируются смешанными стратегиями) приведите эту игру к игре $2 \times N$. Найдите в оставшейся игре все равновесия Нэша.

3. (10 баллов) Найдите все равновесия Нэша в следующей игре: два игрока называют целые числа от 1 до n. Если они называли одинаковое число, то выигрыш первого игрока равен названному числу, а выигрыш второго — минус названному числу. Иначе выигрыш обоих игроков равен 0.

4. (10 баллов) Найдите все равновесия Нэша в следующей игре: два игрока называют целые числа от 1 до n. Выигрыш определяется следующим образом.

- Если оба игрока называли одинаковое число, это ничья (выигрыш обоих равен 0).
- Если один игрок называл 1, а другой n, то победил тот, кто называл 1 (выигрыш победителя равен 1, выигрыш проигравшего равен -1).
- Иначе победил игрок, назвавший наибольшее число.

5. (15 баллов) Найдите все смешанные равновесия Нэша в следующей игре: дано число n. Первый игрок (прячущийся) называет целое число x в промежутке $[0, 2n)$, второй игрок (ищущий) — целое число y в промежутке $[0, n)$. Если $x \in [y, y+n)$, то победил второй игрок, иначе — первый (выигрыш победителя равен 1, выигрыш проигравшего равен -1).

6. (10 баллов за каждый пункт) Рассмотрим следующую игру: n человек собираются на шашлыки. Каждый из них решает, возьмет ли он угли. Их издержки определяются следующим образом:

- Все игроки, которые взяли угли, несут издержки 1.

- Если ни один игрок не взял угли, то каждый несёт издержки 2.

а) Найдите симметричное смешанное равновесие в такой игре. Чему будет равен выигрыш каждого игрока в таком равновесии? Какова вероятность того, что хоть кто-то возьмет угли? К чему сходится эта вероятность при $n \to \infty$?

б) Найдите все смешанные равновесия в этой игре.

7. (15 баллов за пункт а, 10 баллов за пункт б) Рассмотрим аукцион «платят все» на n игроков ($n > 2$): n игроков одновременно выбирают ставки $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]$. После этого каждый игрок платит продавцу свою ставку, а победитель (игрок с наибольшей ставкой) получает товар с ценностью 1. Если игроков с наибольшей ставкой несколько, товар получает случайный из них.

а) Найдите все симметричные смешанные равновесия в такой игре. (Поскольку здесь множество чистых стратегий бесконечно, под смешанной стратегией нужно понимать распределение вероятностей на $[0, 1]$. В этом пункте можете считать, что у всех равновесных распределений есть плотность). Какова в таком равновесии будет средняя сумма, которую продавец получит за товар?

б) Существуют ли в этой игре несимметричные равновесия?