HW1

Богдан Александров

April 2024

1 Task 1

Пусть мы используем IESDS, и в результате мы получили конечный набор стратегий для каждого игрока. Допустим, что результат зависит от порядка исключаемых стратегий, и мы при другом порядке получили бы другой набор стратегий. Тогда для какого-то игрока набор стратегий мог измениться, то есть как минимум одна стратегия появилась или исчезла.
Покажем, что такого не могло произойти. Если некоторая стратегия s_k в первом случае отсутсвует, а во втором присутсвует, значит, если мы ее исключили в первом случае, ее доминирует какая-то стратегия s_i. А раз так, то во втором случае эта s_i либо включена в результат IESDS, и s_k может быть исключена - что противоречие логике IESDS. Либо s_i была во втором случае доминируема какой-то другой стратегией, которая либо вошла во второй результат, либо была доминируема еще другой стратегией, и т.д., пока не наткнемся на стратегию, которая доминировала все предшествующие стратегии и вошла в результат, и так как доминируемость - транзитивна, мы снова можем исключить s_k - снова противоречие. Аналогично разбирается случай, если какая-то стратегия была в первом результате и исчезла во втором: раз эту стратегию доминировала какая-то во втором результате, то ее должны были доминировать и в первом. Ч.т.д.

2 Task 2

Рассмотрим следующую таблицу:

3,2	3,1
4,1	2,2
7,3	5,3

Первый вариант IEWDS:

3,2	3,1
4,1	2,2
7,3	5,3

→

~~3,2~~	~~3,1~~
4,1	2,2
7,3	5,3

→

~~3,2~~	~~3,1~~
~~4,1~~	2,2
~~7,3~~	5,3

→

~~3,2~~	~~3,1~~
~~4,1~~	~~2,2~~
~~7,3~~	5,3

Последняя строка доминирует первую, затем второй столбец доминирует первый и в конце первый игрок вычеркивает 2 ряд - остается исход (5, 3). Второй вариант IEWDS:

3,2	3,1
4,1	2,2
7,3	5,3

$\rightarrow$

3,2	3,1
~~4,1~~	~~2,2~~
7,3	5,3

$\rightarrow$

3,2	~~3,1~~
~~4,1~~	~~2,2~~
7,3	~~5,3~~

$\rightarrow$

~~3,2~~	~~3,1~~
~~4,1~~	~~2,2~~
7,3	~~5,3~~

Здесь мы сначала вычеркнули 2 ряд, после этого первая колонка стала слабо доминировать вторую, и в конце остается только исход (7, 3).

3 Task 3

4 Task 4

Изменим условие слабой доминируемости для доказательства утверждения. А именно, если две стратегии дают одинаковый выигрыш, то можно вычеркнуть любую из них. Если пользоваться старым определением, то может быть ситуация $\begin{array}{|c|c|}\hline 6,5 & 6,4 \\ \hline 6,4 & 6,5 \\ \hline \end{array}$. В этой ситуации нет цикла в орграфе, так как только игрок 2 существенно зависит от игрока 1, а игрок 1 от игрока 2 нет. Но IEWDS не приведет к конечному результату при старом определении, так как мы не можем исключить ни одну стратегию первого игрока, так как они не доминируют слабо друг друга, как и стратегии игрока 2.

Итак, используем ослабленное определение слабой доминируемости. Пусть граф не содержит цикла, но IEWDS не привел к некоторому результату. Это значит, что ни у одного игрока нельзя вычеркнуть ни одну стратегию, так как ни одна не доминируется другой. Это возможно только в том случае, когда для всех пар стратегий всех игроков выполнено следующее:
$\forall (i, j) : i \neq j \exists k \neq l : u(s_i, s_k, s_{-ik}) > u(s_j, s_k, s_{-jk}), u(s_i, s_l, s_{-il}) < u(s_j, s_l, s_{-jl})$
где u - функция выигрыша любого из игроков. Но это значит по определению, что каждый игрок из оставшихся существенно зависит от какого-то другого. Но тогда в графе должен быть цикл, так как если один игрок зависит от другого, а тот еще от другого и так далее, то цепочка замкнется в какой-то момент, и появится цикл. Но это противоречит начальному условию, что граф без цикла. Таким образом, если граф без цикла, то IEWDS приведет к некоторому результату, ч.т.д.

5 Task 5

a) Нет, не может. Покажем это.
Так как рассматриваются стратегии типа (s_i, s_{-i}), то есть стратегия одного против всех остальных, то можно составить таблицу, где строки - всевозможные комбинации стратегий остальных игроков s_{-i}, а колонки - стратегии рассматриваемого игрока. Каждая ячейка этой биматрицы будет пара

(a_{ij}, b_{ij}), где a_{ij} - список выигрышей других игроков при их комбинации стратегий i и стратегии j рассматриваемого игрока.

	b_1	b_2	...	b_n
a_1	a_{11}, b_{11}	a_{12}, b_{12}	...	a_{1n}, b_{1n}
a_2	a_{21}, b_{21}	a_{22}, b_{22}	...	a_{2n}, b_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	a_{mn}, b_{mn}	a_{mn}, b_{mn}	...	a_{mn}, b_{mn}

Чтобы найти осторожную стратегию, надо найти $\arg\max_j \min_i b_{ij}$. То есть процедура такая - находим в каждом столбце $\min_i b_{ij}$, и среди n найденных минимумов находим максимумы.
Итак, может ли такая стратегия быть сильно доминируемой? Допустим, что да. Тогда $\exists i : b_{ki} > b_{kj} \forall k$, где b_i, b_j - сильно доминирующая осторожную и сильно доминируемая осторожная стратегии соответственно. Пусть у b_j $\arg\min_k b_{kj} = v$, а $\arg\min_k b_{ki} = w$. Если $v = w$, то $b_{vj} \geq b_{wi}$, но это значит что b_i не доминирует сильно b_j. Если $v \neq w$, то $b_{wj} \geq b_{vj}$ по определению осторожной стратегии, но $b_{vj} \geq b_{wi}$ также по определению, а значит $b_{wj} \geq b_{wi}$ - что снова значит, что b_i не доминирует сильно b_j - противоречие. Значит, осторожная стратегия не доминируется сильно какой-то другой.
б) Да, может.
Пусть осторожных стратегий две: b_i и b_j, то есть $\max_m \min_n b_{nm} = b_{vi} = b_{wj}$. Если $v = w$, то не трудно подобрать такой случай, например:

$\mathrm{a}_{11}, 4$	$\mathrm{a}_{12}, 4$
$\mathrm{a}_{21}, 5$	$\mathrm{a}_{22}, 10$

Здесь две осторожные стратегии у игрока, но одна слабо доминирует другую.
в) Нет, не могут.
Если утверждение, что все осторожные стратегии могут быть слабо доминируемыми, верно, то нужна как минимум одна такая стратегия, которая была бы не осторожной, но слабо доминировала осторожную. Так как все осторожные стратегии не могут слабо доминировать друг друга из транзитивности слабой доминируемости. Если эта стратегия не осторожная, то ее минимум меньше, чем минимум осторожной. Пусть осторожная стратегия b_i, слабо доминирующая ее стратегия b_j, минимумы их в строках s и t соотвественно. Тогда $b_{si} > b_{tj}$, так как стратегия b_j не осторожная. Но из доказательства пункта **а**, у нас выходит что $\exists k : b_{ki} > b_{kj}$. Так как если $t = s$, то $k = t$, а если не равны, то $b_{ti} \geq b_{si} > b_{tj}$ и $k = t$. Таким образом, все осторожные стратегии не могут быть одноврменно слабо доминируемыми.
г) Да, могут. Пример:

5,3	4,4
6,11	5,10

Осторожная стратегия для игрока 2 - вторая, минимум в ней равен 4. Но в ходе IEWDS, первый игрок вычеркнет первую строку, так как она доминируется второй, а затем второй игрок выберет стратегию 1, так во второй строке она приносит больше, чем стратегия 2. Таким образом результат будет (6, 11). Это потребует от второго игрока использовать стратегию 1, в то время как она не осторожная.

6 Task 6

Если построить таблицу выигрышей:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0		-1, 1									
1	1,-1		-1, 1								
2		1,-1		-1, 1							
3			1,-1		-1, 1						
4				1,-1		-1, 1					
5					1,-1		-1, 1				
6						1,-1		-1, 1			
7							1,-1		-1, 1		
8								1,-1		-1, 1	
9									1,-1		-1, 1
10										1,-1	

видно, что осторожные стратегии для обоих игроков будет называть 10. Так как в таком случае они получат минимум 0. В остальных случаях есть риск получить -1. Здесь есть слабо доминируемая стратегия - называть 0, ее слабо доминирует стратегия называть 10, так как в последней строке(столбце) все значения не ниже, а где-то и выше(10 и 1 даст больше чем 0 и 1 для 1 игрока, и наоборот для второго). Но слабо доминирующих стратегий тут нет, для всех остальных стратегий исход зависит от выбора другого игрока, и можно как получить больше, так и меньше.(при разных стратегиях 1 игрока можно получить в зависимости от выбора второго как 1, так и минус, а можно и ничего не получить.)

Результатом IEWDS будет профиль стратегий (10, 10). При старте процесса, мы можем только исключить первую строку и первый столбец в биматрице, так как они слабо доминируются последней строкой и столбцом. После их исключения, последние строка и столбец начнут доминировать вторую строку и столбец, так как после первого шага исчезнут профили (1, 0) и (0, 1) с результатами (1, -1) и (-1, 1). И так по порядку, последние строка и столбец будут доминировать далее 3, 4, 5 и наконец предпоследние строки столбцы. Так как каждые два последовательные шага IEWDS это удаление строки и столбца, ниже и правее чем на прошлых двух шагах. По итогу процесс сойдется к нижней правой клетке. Это будет профиль стратегий (10, 10).

7 Task 7

В соответствии с предпочтениями игроков, рассмотрим, какие они получат награды, если будет сделан тот или иной выбор:

1. F: (2, 0, 1)
2. G: (1, 2, 0)
3. I: (0, 1, 2)

Порядок игроков: Фердинанд, Георг и Ирина. Построим матрицы выигрышей для нашей игры:

Ирина: F

	F	G	I
F	(2, 0, 1)	(2, 0, 1)	(2, 0, 1)
G	(2, 0, 1)	(1, 2, 0)	(2, 0, 1)
I	(2, 0, 1)	(2, 0, 1)	(0, 1, 2)

Ирина: G

	F	G	I
F	(2, 0, 1)	(1, 2, 0)	(1, 2, 0)
G	(1, 2, 0)	(1, 2, 0)	(1, 2, 0)
I	(1, 2, 0)	(1, 2, 0)	(0, 1, 2)

Ирина: I

	F	G	I
F	(2, 0, 1)	(0, 1, 2)	(0, 1, 2)
G	(0, 1, 2)	(1, 2, 0)	(0, 1, 2)
I	(0, 1, 2)	(0, 1, 2)	(0, 1, 2)

а)
Здесь по строкам - Фердинанд, по колонкам - Георг. Запустим процесс IEWDS:

1. Стратегия I для Ирины слабо доминирует все остальные, поэтому первые две таблицы можно и не рассматривать.
2. В таком случае, для Георга (в 3 таблице), стратегия G будет слабо доминировать остальные его стратегии, остается только 2 столбец 3 матрицы.
3. Фердинанд выберет стратегию G, так как она в оставшемся столбце доминирует другие его стратегии.

Результатом IEWDS станет (G, G, I), что приведет к выигрышу $(1, 2, 0)$.
б) Изучим предпочтения игроков. Заметим, что у Фердинанда стратегия $F \geq I$, у Георга $G \geq F$, у Ирины $I \geq F \geq G$. Получается, Ирина всегда будет выбирать стратегию I, так как она превосходит остальные стратегии почти всегда, кроме ситуаций, когда Фердинанд и Георг выбирают одинаковый вариант. Один из таких вариантов и стал результатом нашего IEWDS. Чтобы Ирина не могла выбрать только I, нужно чтобы благодаря слабым доминациям стратегий Фердинанда и Георга остались в итоге только 2 или 3 ячейки(по 1 в каждой таблице), которые соответсвуют их одинаковым ответам. Но такого в итоге не может быть, так как у Фердинанда выбор F не доминирует слабо G. Таким образом всегда в трех матрицах будет некоторое окно размером больше 2 клеток, при котором Ирине всегда выгоднее брать I. Затем, результат IEWDS будет зависеть только от доминаций стратегий

Георга и Фердинанда. У Фердинанда опять стратегия G не доминируется какой-то другой стратегией в таком случае, а значит у Георга вариант G всегда будет слабо доминировать другие его стратегии. Это значит, что снова останется 2 столбец 3 матрицы(Георг выбрал G, Ирина I), где Фердинанд вынужден выбрать вариант G. Таким образом, другого результата IEWDS не может быть.

в) По определению - равновесие Нэша это ситуация, когда ни одному игроку нет смысла менять свою стратегию, при фиксации выборов остальных. Чтобы найти все равновесии Нэша, будем действовать таким образом: для каждого игрока будем поочередно фиксировать всевозможные пары вариантов его противников, и среди доступных вариантов исходов надо выбирать тот, который максимизирует его выигрыш. Если таких несколько, выбираем все. Если посмотреть на наши 3 матрицы, задающие всевозможные исходы игры, то фиксацией стратегий Георга и Ирины будет столбиком для фердинанда, фиксацией Фердинада и Ирины - строчка для Георга, а фиксация Фердинанда и Георга - соответсвующие ячейки с одинаковыми координатами в трех матрицах. Для наглядности, закрасим наилучшие исходы для игрока при фиксированном выборе других. Тогда получим результат

Ирина: F

	F	G	I
F	(2, 0, 1)	(2, 0, 1)	(2, 0, 1)
G	(2, 0, 1)	(1, 2, 0)	(2, 0, 1)
I	(2, 0, 1)	(2, 0, 1)	(0, 1, 2)

Ирина: G

	F	G	I
F	(2, 0, 1)	(1, 2, 0)	(1, 2, 0)
G	(1, 2, 0)	(1, 2, 0)	(1, 2, 0)
I	(1, 2, 0)	(1, 2, 0)	(0, 1, 2)

Ирина: I

	F	G	I
F	(2, 0, 1)	(0, 1, 2)	(0, 1, 2)
G	(0, 1, 2)	(1, 2, 0)	(0, 1, 2)
I	(0, 1, 2)	(0, 1, 2)	(0, 1, 2)

Те ячейки, которые полностью закрашены, и есть равновесия Нэша. А именно выборы (F, F, F), (G, G, G), (F, I, I), (G, G, I), (I, I, I). Других равновесий не может быть, исходя из принципа нашего выбора равновесия - было бы другое равновесие, тогда бы была другая полностью закрашенная тройка. А если тройка не полностью закрашена, значит для одного из игроков имеет смысл сделать другой выбор, который максимизирует его выигрыш. Таким образом, других равновесий Нэша нет, и все найдены.