

Программа AI Masters
Теория игр, весна 2024
Домашнее задание 1: доминирование

Срок сдачи — 10 апреля, для задач 3 и 4 — 17 апреля. При более поздней сдаче оценка снижается на 50%. Ответы присылайте в телеграм @goddos. Задачи принимаются в письменном виде одним файлом в формате PDF. (Можно набрать решение в TeXе или другом редакторе, либо отсканировать или сфотографировать написанное от руки, собрав всё в PDF. При фотографировании следите за резкостью, контрастностью и балансом белого. Фотографии плохого качества: нерезкие, смазанные и т. д. — проверяться не будут). Если вы решали задачи совместно с кем-то, или использовали литературу, или консультировались с чатботами, в том числе для редактуры текста, то в работе нужно указать, с кем и в каком объёме вы сотрудничали и какие источники и программы использовали. При этом собственно тексты решений необходимо записывать самостоятельно, обнаруженные текстуальные совпадения могут привести к незачёту задачи или всей работы.

Определение 1. Статическая игра, или игра в нормальной форме, это тройка (N, S, u) , где

- $N > 1$ — число игроков, $\{1, \dots, N\}$ — множество игроков;
- $S = (S_1, \dots, S_N)$, каждое S_i — непустое множество, называемое множеством стратегий;
- $u : S_1 \times \dots \times S_N \rightarrow \mathbb{N}^N$ — функция выигрыша.

Обозначение 1. Будем обозначать через S_{-i} множество $S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_N$, а через s_{-i} кортеж $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_N)$. При этом под (s_i, s_{-i}) будем понимать кортеж, в котором s_i поставлено на правильное место. Аналогично определим для пропуска двух игроков множество S_{-ij} и кортеж s_{-ij} .

Определение 2. Стратегия $s_i \in S_i$ называется *осторожной*, если она дает наибольший возможный выигрыш в худшем случае, т. е. если

$$\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{s'_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s'_i, s_{-i})$$

Определение 3. Стратегия $s_i \in S_i$ *сильно доминирует* стратегию $s'_i \in S_i$ если она дает строго больший выигрыш при любых действиях других игроков, т. е.

$$\forall s_{-i} \in S_{-i} : u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$$

Определение 4. Стратегия $s_i \in S_i$ *слабо доминирует* стратегию $s'_i \in S_i$ если она дает не меньший выигрыш при любых действиях других игроков, и строго больший выигрыш при хотя бы каких-то действиях, т. е. если

$$\forall s_{-i} \in S_{-i} : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$$

$$\exists s_{-i} \in S_{-i} : u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$$

Определение 5. Стратегия s называется сильно (слабо) *доминирующей*, если она сильно (слабо) доминирует все остальные стратегии этого же игрока.

Стратегия s называется сильно (слабо) *доминируемой*, если ее сильно (слабо) доминирует хотя бы одна другая стратегия этого же игрока.

Определение 6. Последовательное исключение сильно доминируемых стратегий (кратко IESDS) игры G — это последовательность игр (G_0, \dots, G_m) , в которой $G = G_0$, G_{i+1} отличается от G_i удалением некоторого числа сильно доминируемых стратегий, а в G_m нет сильно доминируемых стратегий. Игру G_m называют результатом исключения.

Последовательное исключение слабо доминируемых стратегий (кратко IEWDS) определяется аналогично, только со слабым доминированием¹ вместо сильного.

Определение 7. Профиль стратегий (s_1, \dots, s_N) называется *Парето-оптимальным*, если не существует другого профиля (s'_1, \dots, s'_N) , такого что:

- (слабая Парето-оптимальность) Для каждого i верно $u_i(s'_1, \dots, s'_N) > u_i(s_1, \dots, s_N)$;
- (сильная Парето-оптимальность) Для каждого i верно $u_i(s'_1, \dots, s'_N) \geq u_i(s_1, \dots, s_N)$ и для какого-то i выполнено $u_i(s'_1, \dots, s'_N) > u_i(s_1, \dots, s_N)$;

Определение 8. Профиль стратегий (s_1^*, \dots, s_N^*) называется *равновесием Нэша*, если ни одному игроку не выгодно единолично поменять стратегию, иными словами, если для любого i и любого $s_i \in S_i$ выполнено $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$.

1. (10 баллов) Докажите, что в играх с конечным числом стратегий результат IESDS не зависит от порядка исключаемых стратегий.

2. (10 баллов) Приведите пример игры, в которой у какого-то игрока есть две стратегии s_1, s_2 , которые против какого-то набора стратегий остальных игроков приносят разный выигрыш, при этом в результате IEWDS может остаться только стратегия s_1 , а при другом порядке может остаться только стратегия s_2 .

3. (15 баллов) Приведите пример игры, в которой в результате IEWDS в одном порядке получается Парето-оптимальный исход в сильном смысле, в другом — Парето-оптимальный в слабом, но не в сильном смысле, в третьем — не Парето-оптимальный даже в слабом смысле. (Если получаются только 2 варианта из 3, то даётся 10 баллов).

4. (10 баллов) Скажем, что полезность игрока i существенно зависит от стратегии игрока $j \neq i$, если для некоторых s_i, s_j, s'_j и s_{-ij} выполнено $u_i(s_i, s_j, s_{-ij}) \neq u_i(s_i, s'_j, s_{-ij})$. Рассмотрим орграф, в котором вершины это игроки, а ребро (i, j) проводится, если полезность игрока i существенно зависит от стратегии игрока j . Докажите, что если в этом графе нет циклов, то IEWDS приводит к некоторому результату (при необходимости можно накладывать дополнительные условия на матрицу или варьировать определение IEWDS, чтобы утверждение было верным, но при этом задача не должна становиться очевидной). Может ли этот результат быть не единственным?

5. (5 баллов за каждый пункт) Может ли осторожная стратегия

а) быть сильно доминируемой?

¹Обратите внимание, что по нашему определению нельзя вычёркивать ни одну из двух стратегий, которые всегда приносят один и тот же выигрыш, даже если такое совпадение появилось после ряда вычёркиваний

б) быть слабо доминируемой?

в) Могут ли все осторожные стратегии в какой-то игре быть слабо доминируемыми?

г) Могут ли все осторожные стратегии быть исключенными в результате IEWDS?

6. (10 баллов) Рассмотрим следующую игру: два игрока выбирают целое число от 0 до 10. Если выбранные числа отличаются на 1, то тот, чье число меньше, платит 1 тому, чье число больше. В противном случае выигрыш обоих игроков равен 0.

Есть ли в этой игре слабо доминирующие или осторожные стратегии? Найдите результат IEWDS.

7. (20 баллов в сумме) Фердинанд, Георг и Ирина выбирают, в какую страну поехать на каникулы: Францию (F), Германию (G) или Италию (I). Предпочтения Фердинанда: лучше всего Франция, потом Германия, потом Италия ($F \succ G \succ I$). Предпочтения Георга: $G \succ I \succ F$. Предпочтения Ирины: $I \succ F \succ G$. Выбор происходит голосованием: каждый игрок называет один из вариантов. Если какой-то вариант назвали хотя бы двое, то он и принимается, а если все назвали разные, то выбирается вариант, названный Ириной.

а) (5 баллов) Найдите какой-нибудь исход, полученный в результате IEWDS.

б) (5 баллов) Могут ли получиться другие исходы в результате IEWDS в другом порядке?

в) (10 баллов) Найдите все равновесия Нэша и покажите, что других нет.