

Программа AI Masters  
Теория игр, весна 2024  
Домашнее задание 6: коалиционные игры

Срок сдачи — 31 мая (дедлайн строгий). Ответы присылайте в телеграм @goddos. Задачи принимаются в письменном виде одним файлом в формате PDF. (Можно набрать решение в  $\text{\LaTeX}$  или другом редакторе, либо отсканировать или сфотографировать написанное от руки, собрав всё в PDF. При фотографировании следите за резкостью, контрастностью и балансом белого. Фотографии плохого качества: нерезкие, смазанные и т.д. — проверяться не будут). Если вы решали задачи совместно с кем-то, или использовали литературу, или консультировались с чатботами, в том числе для редактуры текста, то в работе нужно указать, с кем и в каком объёме вы сотрудничали и какие источники и программы использовали. При этом собственно тексты решений необходимо записывать самостоятельно, обнаруженные текстуальные совпадения могут привести к незачёту задачи или всей работы.

**1. (Съёмка фильма, 3 балла за каждый пункт + 1 дополнительный при полном решении)** Продюсер (Полли), оператор (Оливер) и композитор (Крис) снимают фильм. Съёмка фильма принесёт прибыль \$10000. Оливер может заработать \$2000 на видеосъёмке свадьбы, Крис может получить \$3000, продав музыку, Полли сама может заработать лишь \$1000, организовав детские праздники. Оливер и Крис вдвоём могут заработать \$6000, сняв для свадьбы музыкальное видео, Оливер и Полли заработают \$4000, организовав свадьбу в целом, Полли и Крис заработают \$4500 на организации вечеринки.

- а) Формализуйте эту ситуацию как кооперативную игру. Является ли она супераддитивной? Супермодулярной?
- б) Найдите ядро игры и изобразите его на плоскости (платёж Полли, платёж Криса)
- в) Найдите вектор Шепли. Лежит ли он в ядре?

**2. (Ремонтная бригада, 3 балла за каждый пункт + 1 дополнительный при полном решении)** Сантехник, электрик и плотник ремонтируют дом. Работая в команде, они могут заработать \$1000. Работая отдельно, сантехник может заработать \$300, электрик — \$250, а плотник — \$200. Работая в парах, сантехник и электрик могут заработать \$750, сантехник и плотник — \$550, электрик и плотник — \$600.

- а) Формализуйте эту ситуацию как кооперативную игру. Является ли она супераддитивной? Супермодулярной?
- б) Найдите ядро игры и изобразите его на плоскости (платёж сантехника, платёж плотника)
- в) Найдите вектор Шепли. Лежит ли он в ядре?

**3. (Ресторанный дворик, 3 балла за каждый пункт + 1 дополнительный при полном решении)** Суши-бар, пиццерия и кофейня планируют открыть свои заведения в одном и том же торговом центре. Поскольку некоторые клиенты хотят приобрести еду разных видов, это может быть выгодно. С другой стороны, кафе могут конкурировать

за одних и тех же клиентов. Прогнозируемая дневная выручка будет такой: если открывается только суши-бар, то он зарабатывает \$4000, если только пиццерия, то \$2500, если только кофейня, то \$3000. Пицца и суши вместе получают \$7000, суши и кофе — \$6500, кофе и пицца — \$5000. А все три ресторана вместе — \$10000.

- а) Формализуйте эту ситуацию как кооперативную игру. Является ли она супераддитивной? Супермодулярной?
- б) Найдите ядро игры и изобразите его на плоскости (платёж пиццерии, платёж кофейни)
- в) Найдите вектор Шепли. Лежит ли он в ядре?

**4. (Квадратная сеть, 2 пункта по 5 баллов)** Дорожная сеть состоит из 4 узлов  $A, B, C, D$  и 4 односторонних сегментов:  $AB, BC, CD$  и  $AD$ . Для каждой из 6 пар  $AB, AC, AD, BC, BD, CD$  есть 10 единиц трафика, которые хотят попасть из первой точки пары во вторую. Каждая единица трафика выбирает кратчайший доступный путь и платит 1 денежную единицу за каждый используемый сегмент. Если пути между узлами нет, то трафик остаётся в исходной точке и ничего не платит. Каждый сегмент находится в собственности своего агента. Коалиция агентов открывает все сегменты, которыми владеет, и получает платежи от трафика.

- а) Формализуйте ситуацию как коалиционную игру и найдите вектор Шепли.
- б) Предположим, теперь коалиция может открыть любое подмножество сегментов, которыми владеет. Будет ли большая коалиция открывать все сегменты? Посчитайте вектор Шепли для нового правила.

**5. (Устойчивые паросочетания, 10 баллов)** Имеются четверо мужчин и четверо женщин со следующими предпочтениями:

$$\begin{array}{ll} m_1: w_1 \succ w_2 \succ w_3 \succ w_4 & w_1: m_3 \succ m_2 \succ m_4 \succ m_1 \\ m_2: w_4 \succ w_3 \succ w_2 \succ w_1 & w_2: m_1 \succ m_2 \succ m_4 \succ m_3 \\ m_3: w_3 \succ w_4 \succ w_1 \succ w_2 & w_3: m_2 \succ m_1 \succ m_3 \succ m_4 \\ m_4: w_2 \succ w_1 \succ w_4 \succ w_3 & w_4: m_4 \succ m_1 \succ m_3 \succ m_2 \end{array}$$

- а) (2 балла) Найдите результат алгоритма отложенного принятия, когда предлагают мужчины.
- б) (2 балла) Найдите результат алгоритма отложенного принятия, когда предлагают женщины.
- в) (6 баллов) Найдите все устойчивые паросочетания и докажите, что других нет. Нарисуйте решётку устойчивых паросочетаний.