HW2

Богдан Александров

April 2024

1 Task 1

1.1 a

Пусть у каждого игрока есть слабо доминирующая стратегия, то есть формализуя:

$\forall i \in \{1..N\}\ \exists s_i^* : \forall s_i \in S_i, s_{-i} \in S_{-i} : u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$

Рассмотрим профиль стратегий, состоящий из этих слабо доминирующих стратегий: $s^* = (s_1^* \dots s_N^*)$. По определению слабо доминирующей стратегии имеем:

$\forall i \in \{1..N\} \forall s_i \in S_i : u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$

А это и есть определение равновесия Нэша. Таким образом, профиль слабо доминирующих стратегий есть равновесие Нэша.

1.2 b

Пусть в результате IEWDS у нас остался профиль стратегий $s^* = (s_1^* \dots s_N^*)$. Допустим, что это не равновесие Нэша. Тогда $\exists i : \exists s_i : u_i(s_i^*, s_{-i}^*) < u_i(s_i, s_{-i}^*)$ То есть у некоторого игрока существует стратегия, которая доминирует его текущую при профиле других игроков s_{-i}^*, полученную с помощью IEWDS. Но если s_i была зачеркнута, то есть есть еще другая стратегия, которая как минимум слабо доминирует s_i при некотором наборе профилей других игроков, а значит при s_{-i}^* ее выигрыш будет больше. Проводя рассуждения дальше, мы придем к нашей стратегии s_i^*. И получим, что должно выполняться условие $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) < u_i(s_i, s_{-i}^*) \leq \ldots \leq u_i(s_i^*, s_{-i}^*)$, что есть противоречие. Следовательно, не может быть игрока, у которого есть возможность поменять стратегию и увеличить выигрыш. Значит, полученный в ходе IEWDS профиль стратегии - равновесие Нэша.

Такое равновесие не обязательно единственное, так как слабо доминируемая стратегия может приносить столько же, как и слабо доминирующая. Причем при любых профилях стратегий других игроков(две стратегии могут давать всегд одинаковый выигрыш).

1.3 c

Доказательство, что оставшийся профиль - это равновесие Нэша, аналогично прошлому пункту. Пусть есть у некоторого игрока более прибыльная стратегия. Раз ее исключили, то есть та, что доминирует ее, но есть и та, что доминирует и эту и так далее. По итогу остается стратегия, которая должна давать выигрыша больше, чем она дает: $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) < u_i(s_i, s_{-i}^*) < \ldots < u_i(s_i^*, s_{-i}^*)$. Противоречие, значит в результате IESDS, если остался 1 профиль стратегий, то это равновесие Нэша.

Покажем, что оно единственное. Пусть оно не единственное, значит есть другое равновесие, где по крайней мере у одного игрока поменялась стратегия. Но раз она была исключена во втором варианте, то ее доминировала какая-то другая s_k, а именно давала выигрыш больше при любых других стратегиях игроков. Соответственно, в первом варианте можно поменять стратегию игрока из равновесия на стратегию s_k. Но это противоречит равновесности, соответсвенно другого результата не может быть.

2 Task 2

Будем считать, что все избиратели рациональны, и делают свой выбор при предположении о рациональности других.

2.1 a ($k = \frac{n}{2}$)

Избирателей по каждому кандидату поровну, поэтому будем считать, что у нас есть 2 игрока - один за X, другой за Y. Иначе можно рассматривать, будто у нас два игрока - два электората за X и Y(или же что все избиратели рассуждают одинаково). Рассмотрим таблицу выигрышей:

	come	not come
come	(1, 1)	(3, 0)
not come	(0, 3)	(2, 2)

Здесь по столбцам - действия избирателя Y, по строкам - избирателя X. Считаем, что избиратели не могут коллаборироваться, рассуждают одинаково, а значит и действуют одинаково. Поэтому можем заменить группы X и Y одним игроком. Так как у обоих стратегия прийти доминирует, то оба избирателя(то есть все n избирателей) придут на выборы. Единственное равновесие получается - когда все избиратели придут на выборы и будет ничья. Если на выборы не придет никто - то любому избирателю будет выгодно прийти на выборы, и его фракция выиграет(а сам избиратель вместо 0 получит 3). Или же если избирателей одной фракции пришло меньше, чем другой - то проигравшим выгоднее не приходить вовсе, и получить 0, чем терпеть издержки. Но тогда и победителям тоже не выгодно приходить, по крайней мере часть из победивших уйдет, так как в таком случае они также побеждают, но не терпят издержек. Останется из победиших 1 человек. Тогда любому из проигрывающих выгодно прийти на выборы и сделать ничью - он получит 1 вместо 0. Но тогда снова при одинаковом количестве избирателей на выборе, любому избирателю выгоднее прийти на выборы и забрать победу(тогда вместо 2 он получит 3). И все это приведет к тому, что равновесие останется на случае, когда все избиратели придут на выборы и получат 1. Никому не выгодно не приходить на выборы.

Равновесие Нэша здесь - все избиратели приходят на выборы.

2.2 b (k < n/2)

В этом случае избирателей X меньше.

Будем рассуждать аналогично предыдущему пункту. Допустим на выборы пришло x игроков из электората X. Если из электората Y придет меньше людей, то им не выгодно и приходить вовсе - лучше получить 0, чем -1. Но тогда и из пришедших за X останется 1 игрок, остальным нет причин приходить. Тогда одному из тех, кто за Y, придется прийти на выборы, чтобы добыть ничью. Но тогда снова, всем тогда выгоднее прийти, чем не прийти, чтобы вырвать победу. Но так как тех, кто за Y, больше, то у электората X нет шансов выиграть, значит им не стоит приходить вовсе. Рассмотрим таблицу выигрышей, аналогично таблице из предыдущего пункта.

	come	not come
come	(-1, 3)	(3, 0)
not come	(0, 3)	(2, 2)

Считаем, что все избиратели каждого электората рассуждают одинаково, а значит и действуют также. Соответственно они все могут либо одновременно прийти или не прийти. Для электората Y стратегия прийти доминирует стратегию не приходить, исходя из таблицы. Поэтому они обязательно придут. Но тогда избирателям X не выгодно приходить - их меньше, и они точно не выиграют, значит нет смысла терпеть издержки, и они не придут.

Значит здесь равновесие Нэша - все из электората Y приходят, а из электората X - нет. Если бы была возможность коллаборации, то равновесием Нэша было бы любое состояние, где любые k+1 избирателей Y приходят на выборы, а из X не пришел никто.

3 Task 3

Заметим, что второму продавцу не выгодно находиться к первому ближе, чем на 0.1. Так как в обратном случае весь рынок выиграет первый игрок.

Рассмотрим случайную расстановку двух продавцом. Пусть продавец 1 встанет в точке $0.5 + x$, где $0.5 \geq x \geq 0$. Случай $-0.5 \leq x \leq 0$ разбирается аналогично. Тогда второй игрок может встать либо левее $0.4{+}x$, либо правее $0.6 + x$(если $0.6 + x \geq 1$, то встает в точке 1). В первом случае продавец 2 может встать в точку $0.4 + x$, и захватить $0.4 + x$ рынка. Во втором случае только $\max(0.4 - x, 0)$ рынка. Очевидно, продавцу 2 выгоднее вставать левее.

Но в таком случае первому игроку выгоднее самому двинуться влево на $\epsilon > 0$. Тогда он захватит весь рынок. После, продавец 2 двинется влево тоже на ϵ, и вернет себе $0.4 + x - \epsilon$ рынка. Так двум игрокам будет выгоднее двигаться левее дальше, пока $x - n * \epsilon > 0$, где n - количество таких итераций движений влево. После, когда станет $x - n * \epsilon < 0$, продавцу 2 выгоднее встать правее продавца 1. Если положение игрока 1 будет y, то игрок 2 встанет в $y + 0.1$, и он захватит $0.9 - y$ рынка. И так продавцы могут долго осциллировать вокруг точки 0.5.

То есть рассмотрев случай $x \neq 0$, где положение продавца 1 это $0.5 + x$ можно увидеть, что продавцы всегда будут менять свое положение. Рассмотрим положение игрока 1 в точке 0.5. У игрока 2 есть две привлекательные точки - 0.4 и 0.6. В обоих случаях игрок 2 выиграет 0.4 рынка, при остальных положениях - меньше. А игрок 1 выиграет минимум 0.6 рынка, в зависимости от выбора игрока 2. Если игрок 1 решит встать в точку $0.5 + x$, то есть отклониться от середины отрезка на $x \neq 0$, то второй игрок сможет встать в точку $0.4 + x$ или $0.6 + x$, и захватить $0.4 + x$ рынка, если $x > 0$, или $0.4 - x$, если $x < 0$. Игрок 1 же получит только $0.6 - x$ или $0.6 + x$ рынка соответсвенно, что меньше 0.6. То есть игроку 1 не выгодна никакая другая точка, кроме середины, а второй игрок исходя из этого, встанет либо в 0.4, либо в 0.6.

Таким образом, в этой игре два равновесия Нэша. Профили стратегий $(0.5, 0.4)$ и $(0.5, 0.6)$.