Александров Богдан

HW 3

№1. У нападающего и вратаря по 2 опции. Рассмотрим их комбинации и исходы: (нападающий / вратарь)

Лево/лево: с вероятностью $\frac{5}{6}$ вратарь ловит мяч, с $\frac{1}{6}$ – нападающий промазал.

Лево/вправо: с вероятностью $\frac{5}{6}$ нападающий забивает, с $\frac{1}{6}$ – нет

Вправо/лево: нападающий забивает

Вправо/вправо: с вероятностью $\frac{2}{3}$ вратар ловит мяч, с $\frac{1}{3}$ нападающий забивает

Построим таблицу выигрышей:

		В: Л (q)	В: П ($1-q$)
Н	p Л	$(-1, 5)$	$(4, -5)$
	$(1-p)$ П	$(6, -6)$	$(2, 2)$

Нападающий: $ЛЛ = \frac{5}{6}\cdot 0 + \frac{1}{6}\cdot(-6) = -1$

$ЛП = \frac{5}{6}\cdot 6 + \frac{1}{6}\cdot(-6) = 4$

$ПЛ = 6$

$ПП = \frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 6 = 2$

Вратарь: $ЛЛ = \frac{5}{6}\cdot 6 + \frac{1}{6}\cdot 0 = 5$

$ЛП = \frac{5}{6}\cdot(-6) + \frac{1}{6}\cdot 0 = -5$

$ПЛ = -6$

$ПП = \frac{2}{3}\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot(-6) = 2$

Пусть p – вероятность нападающего пнуть влево, а q – вратаря прыгнуть влево.

$$5p - 6(1-p) = -5p + 2(1-p)$$
$$5p - 6 + 6p = -5p + 2 - 2p$$
$$18p = 8 \Rightarrow p = \frac{4}{9}$$

$$-q + 4(1-q) = 6q + 2(1-q)$$
$$-q + 4 - 4q = 6q + 2 - 2q$$
$$2 = 9q \Rightarrow q = \frac{2}{9}$$

Равновесие будет:

Нападающий: $\left(\frac{4}{9}; \frac{5}{9}\right)$

Вратарь: $\left(\frac{2}{9}; \frac{7}{9}\right)$

N2

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
s_1	(2,0)	(5,3)	(2,4)	(6,1)	(3,2)
s_2	(3,1)	(0,6)	(0,5)	(3,2)	(0,3)
s_3	(4,6)	(1,3)	(2,1)	(5,4)	(1,3)
s_4	(2,7)	(4,2)	(1,4)	(5,8)	(4,5)

1) $s_3 \succ s_2$

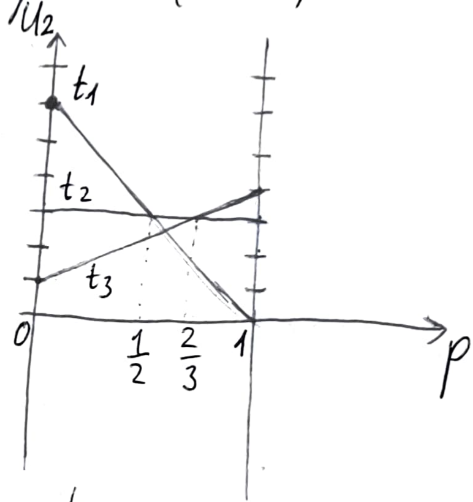
2) $pt_1+(1-p)t_3 \succ t_5$, где $p\in\left(\frac{2}{5};\frac{1}{2}\right)$

3) $ps_1+(1-p)s_3 \succ s_4$, где $p\in\left(\frac{3}{4};1\right)$

4) $pt_1+(1-p)t_2 \succ t_4$, где $p\in\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

У нас получилась игра $2\times N$, где $N=3$ (2×3)

		t_1	t_2	t_3
p	s_1	(2,0)	(5,3)	(2,4)
$(1-p)$	s_3	(4,6)	(1,3)	(2,1)



p – игрок 1, τ – игрок 2

1) t_1 и t_2

$6(1-p)=3p+3(1-p)$

$6-6p=3p+3-3p$

$3=6p \Rightarrow p=\frac{1}{2}$

$2\tau+5(1-\tau)=4\tau+(1-\tau)$

$2\tau+5-5\tau=4\tau+1-\tau$

$4=6\tau \Rightarrow \tau=\frac{2}{3}$

$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right)$

2) t_2 и t_3

нет смешанного равновесия. $s_1 \succ s_3$, если t_1 не играется

3) t_1

Если играется только t_1, то игрок 1 играет только s_3. Значит есть равновесие $(0,1)$ и $(1,0,0)$

4) t_3.

Посмотрим на t_3, когда она на верхней огибающей:

$3p+(1-p)3=4p+1-p$

$3p+3-3p=3p+1$

$2=3p \Rightarrow p=\frac{2}{3}$

При $p\in\left[\frac{2}{3},1\right]$ игрок 2 всегда играет t_3

Значит равновесия будут $(p,(1-p))$ и $(0,0,1)$

Ответ: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right)$

$(0,1)$ и $(1,0,0)$

$(p,1-p)$ и $(0,0,1)$, $p\in\left[\frac{2}{3},1\right]$

№3. Построим таблицу выигрышей:

1 \ 2	1 (q_1)	2 (q_2)	3	4	…	n (q_n)
p_1 1	1	0	0	0		0
p_2 2	0	2	0	0	…	0
p_3 3	0	0	3	0		0
⋮						
p_n n	0	0	0	0		n

Игра антагонистическая. Выигрыш первого - проигрыш второго.

Пусть вероятности игрока 1 - $p_1, p_2, \ldots p_n$

Выигрыши стратегий второго игрока:

$1: -p_1,\ 2: -2p_2,\ 3: -3p_3, \ldots, i: -ip_i$

Все они должны быть равны: $np_n = (n-1)p_{n-1} \Rightarrow p_{n-1} = \frac{n}{n-1}p_n$

$(n-1)p_{n-1} = (n-2)p_{n-2} \Rightarrow p_{n-2} = \frac{n-1}{n-2}p_{n-1} = \frac{n}{n-2}p_n$

$\ldots$

Значит, $p_i = \frac{n}{i}p_n$. Но $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i}p_n = 1 \Rightarrow p_n = \frac{1}{n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}$

$p_k = \frac{1}{k\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}$ - равновесная стратегия игрока 1.

Аналогично, определяется равновесная стратегия игрока 2.

<u>Ответ</u>: $p_k = \frac{1}{k\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}$ - стратегия 1 игрока

$q_k = \frac{1}{k\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}$ - стратегия 2 игрока

№4. Нарисуем антагонистическую таблицу:

	1 \ 2	1	2	3	4	...	n-1	n
p_1	1	0	-1	-1	-1	...	-1	1
p_2	2	1	0	-1	-1		-1	-1
p_3	3	1	1	0	-1		-1	-1
p_4	4	1	1	1	0			
	5	1	1	1	1			
	...						-1	-1
	n-1	1	1	1			0	-1
p_n	n	-1	1	1			1	0

Пусть вер-ти игрока 1: $p_1, p_2, \ldots p_n$.

Составим выигрыши игрока 2 от его страт:

1: $-p_2-p_3-\ldots-p_{n-1}+p_n$

2: $p_1-p_3-p_4-\ldots-p_{n-1}-p_n$

3: $p_1+p_2-p_4-\ldots-p_{n-1}-p_n$

n: $-p_1+p_2+p_3+\ldots+p_{n-2}+p_{n-1}$

Если оставить стратегии из $\{2,3,4,\ldots,n-1\}$, то вер-ти уйдут в ноль, т.к.:

$p_1+p_2+p_3+\ldots+p_{i-1}-p_{i+1}-p_{i+2}-\ldots-p_n=p_1+p_2+p_3+\ldots+p_{k-1}-p_{k+1}-p_{k+2}-\ldots-p_n,\ i<k$

$-p_{i+1}-p_{i+2}-\ldots-p_{k-1}-p_k=p_i+p_{i+1}+\ldots+p_{k-1} \Rightarrow$ слева сумма неположительных, справа – неотрицательных чисел. Если они (суммы) равны, то значит эти $p_j=0$.

Т.о. можно показать, что для игрока 1 необходимо выкинуть стратегии $\{2,3,\ldots,n-1\}$.

Остаётся таблица:

		1	2	3	...	n-1	n
p	1	(0,0)	(-1,1)	(-1,1)	...	(-1,1)	(1,-1)
(1-p)	n	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	...	(1,-1)	(0,0)

Здесь для игрока 2: $1 \succ n$.

Составим ур-ие: $p\cdot 0+1\cdot(1-p)=1\cdot p+(-1)\cdot(1-p) \Rightarrow 1-p=2p-1 \Rightarrow 2=3p$

$p=\frac{2}{3}$

У игрока 2 стратегии $\{2,3,\ldots,n-1\}$ равнозначные.

Возьмём у него стратегию 1 и некоторую из $\{2,3,\ldots,n-1\}$:

$q\cdot 0+(-1)\cdot(1-q)=q\cdot(-1)+1\cdot(1-q) \Rightarrow q-1=-2q+1 \Rightarrow q=\frac{2}{3}$

Таким образом, равновесие здесь будет:

I) $(\frac{2}{3},0,0,\ldots,0,\frac{1}{3})$ и $(\frac{2}{3},q_2,q_3,\ldots,q_{n-1},0)$, где $q_2+q_3+\ldots+q_{n-1}=\frac{1}{3}$

Аналогично, равновесие будет:

II) $(\frac{2}{3},p_2,p_3,\ldots,p_{n-1},0)$ и $(\frac{2}{3},0,\ldots,0,\frac{1}{3})$, где $p_2+p_3+\ldots+p_{n-1}=\frac{1}{3}$

В остальных случаях равновесия не будет. Ни одна стратегия не доминирует.

N5.

1 \ 2	q_0: 0	q_1: 1	q_2: 2	3	…	q_{n-1}: $n-1$	q_n: n
p_0 0	−1	1	1	1	…	1	1
p_1 1	−1	−1	1	1	…	1	1
p_2 2	−1	−1	−1	1	…	1	1
3	−1	−1	−1	−1	…	1	1
⋮							
$n-1$	−1	−1	−1	−1	…	−1	1
n	1	−1	−1	−1	…	−1	−1
$n+1$	1	1	−1	−1	…	−1	−1
⋮							
p_{2n-2} $2n-2$	1	1	1	1	…	−1	−1
p_{2n-1} $2n-1$	1	1	1	1	…	1	−1

← Таблица выигрышей игрока 1 (проигрышей игрока 2)

~~[illegible]~~

Выигрыши игрока 2 – $0: p_0+p_1+p_2 \dots +p_{n-1}-p_n-p_{n+1}-\dots-p_{2n-1}$

$1: -p_0+p_1+ \quad +p_{n-1}+p_n-p_{n+1}-\dots-p_{2n-1}$

$2: -p_0-p_1+ \dots +p_{n-1}+p_n+p_{n+1}-p_{n+2}-\dots-p_{2n-1}$

⋮

Сумма по строкам всегда константа для всех столбцов. Исходя из этого и выигрышей игрока 2, делаем вывод, что игрок имеет равномерную стратегию:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, \dots, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right)}_{2n \text{ длина.}}$$

Рассмотрим стратегии игрока 2 и выигрыши игрока 1 от них:

Выигрыш игрока 1: $0: -q_0+q_1+\dots+q_n$

$1: -q_0-q_1+ \quad +q_n$

$\dots$

$n: q_0-q_1-\dots-q_n$

$n+1: q_0+q_1-q_1 \dots -q_n$

$\dots$

$2n-1: q_0+q_1+\dots-q_n$

Приравнивая выражения (0) и (1), (1) и (2) и т.д., найдем, что

$q_1=q_2=\dots=q_{n-1}=0.$

Остаются стратегии 0 и n, у к-рых вероятности $-q_0+q_n=q_0-q_n$

$q_0=q_n=\frac{1}{2}$

<u>Ответ</u>: Равновесие в этой игре будет: игрок $1=\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, \dots, \frac{1}{2n}\right)$

игрок $2=\left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}\right)$

№6. а) Симметричность.

p – вер-ть человека взять уголь. Условие безразличия: $(-1)=(-2)\cdot(1-p)^{n-1}$

Отсюда $\rightarrow 1-p=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}} \Rightarrow p=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}$

Выигрыш игрока равен: $-1\cdot p+(1-p)\cdot\left(-2\cdot(1-p)^{n-1}+0\left(1-(1-p)^{n-1}\right)\right)=$

$=-p-2(1-p)^n=-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}}=-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}-1}=-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}=\underline{-1}$

Вер-ть, что кто-то возьмёт угли: $1-(1-p)^{n}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}}$

$n=2 \Rightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{1}}=\frac{3}{4}$

$\lim\limits_{n\to\infty} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ Вер-ть стремится к $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{3}{4}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}\right)$

<u>Ответы</u>: $p=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ – смеш. стратегия, выигрыш равен -1 у игроков, вер-ть, что кто-то возьмёт угли $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}}$, $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}}\xrightarrow{n\to+\infty}\frac{1}{2}$

б) Если у кого-то вер-ть взять угли равна 1, то остальные игроки просто не будут брать их с собой. Пусть вер-ть взять уголь у ~~игроков~~ игроков: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда равновесием будет любая ситуация: $\exists i: p_i=1$, $\forall k\neq i: p_k=0$

Рассмотрим выигрыши игроков:

1: $(-1)\cdot p_1+(1-p_1)\cdot(-2)(1-p_2)(1-p_3)\ldots(1-p_n)=-p_1-2\prod\limits_{i=1}^{n}(1-p_i)$

2: $-p_2-2\prod\limits_{i=1}^{n}(1-p_i)$, K: $-p_k-2\prod\limits_{i=1}^{n}(1-p_i)$

Возьмём игрока 1: $u_1(p_1)=-p_1-2\prod\limits_{i=1}^{n}(1-p_i)$, $(u_1(p_1))'_{p_1}=-1+2(1-p_2)(1-p_3)\ldots(1-p_n)$

Если производная не равна 0, значит игроку выгодно менять стратегию.

Значит, условие равновесия для игрока 1: $(1-p_2)(1-p_3)\ldots(1-p_n)=\frac{1}{2}$. Аналогично для других игроков: $(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_{k-1})(1-p_{k+1})\ldots(1-p_n)=\frac{1}{2}$. Отсюда выходит симметричное решение, как в пункте а). Также видно, что если $\exists i: p_i=1$, то игрокам выгоднее не брать уголь

<u>Ответ</u>: равновесия: любая ситуация, где $\exists! i: p_i=1$, $\forall k\neq i: p_k=0$

№7. а) Пусть у всех игроков 1, 2, 3, ..., n одна и та же стратегия, а именно ф-ия распределения $F(y)$ на $[0,1]$. Рассмотрим выигрыши игроков:

~~если игрок поставил x: -y+1·P(~~

если игрок поставил x: $-x+1\cdot(P(y<x))^{n-1}=-x+(F(x))^{n-1}$

$x=0 \Rightarrow -0+(F(0))^{n-1}=0$, т.к. $F(0)=0$

Значит, по условию равновесия: $-x+(F(x))^{n-1}=0 \Rightarrow F(x)=x^{\frac{1}{n-1}}$

$$f(x)=\frac{1}{n-1}x^{\frac{1}{n-1}-1}$$

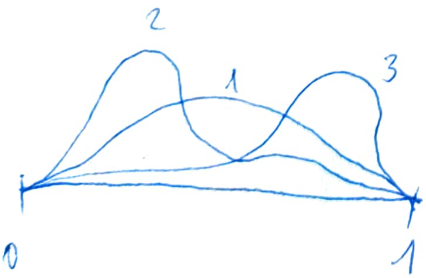
Средняя сумма, которую получит продавец: $E\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(x_i)=nEx_1$

$$Ex_1=\int_0^1 x\cdot\frac{1}{n-1}\cdot x^{\frac{1}{n-1}-1}dx=\frac{1}{n-1}\int_0^1 x^{\frac{1}{n-1}}dx=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{x^{\frac{1}{n-1}+1}}{\frac{1}{n-1}+1}\Bigg|_0^1=\frac{1}{n}\cdot x^{\frac{n}{n-1}}\Bigg|_0^1=\frac{1}{n}$$

$E(\sum x_i)=n\cdot\frac{1}{n}=1$

Ответ: симметричная стратегия $-f(x)=\frac{1}{n-1}x^{\frac{1}{n-1}-1}$, средняя сумма $=1$.

б) нет, не существуют.



← если у распределений центры масс будут в разных точках, то тот, кто будет ставить в среднем большие ставки, будет забирать выигрыш. Остальным не будет выгодно ставить вовсе тогда.

Но тогда и агрессивный игрок снизит цену, почти до минимума. Тогда тем, кто не ставил, будет выгоднее ставить агрессивнее и больше. И все по циклу.