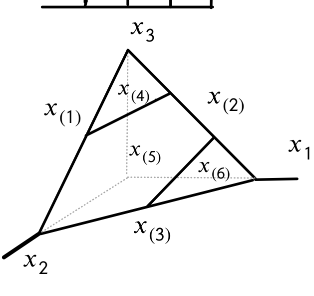
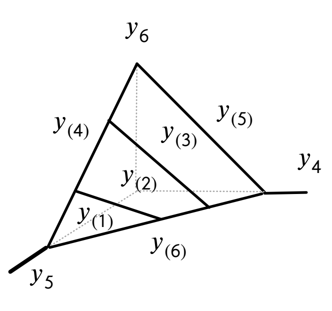
Задача 1

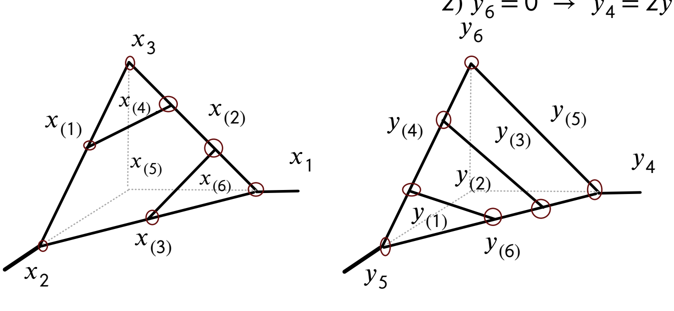
	L	C	R
U	1,0	3,2	0,3
M	2,2	2,3	2,2
D	3,3	0,2	3,0

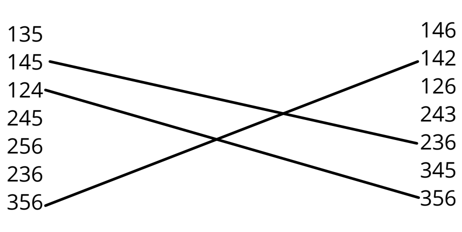


$$x_{(1)} = \{x : x_1 = 0\}$$
$$x_{(2)} = \{x : x_2 = 0\}$$
$$x_{(3)} = \{x : x_3 = 0\}$$
$$x_{(4)} = \begin{Bmatrix} 2x_2 + 3x_3 \ge 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 2x_2 + 3x_3 \ge 3x_1 + 2x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_3 \ge 2x_1 + x_2 \\ x_3 \ge x_1 \end{Bmatrix}$$
$$1)\ x_1 = 0 \to x_3 = x_2 = \frac{1}{2}$$
$$2)\ x_2 = 0 \to x_3 = 2x_1 = \frac{2}{3}$$
$$x_{(6)} = \begin{Bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \ge 2x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \ge x_3 \\ x_1 \ge x_2 + 2x_3 \end{Bmatrix}$$
$$1)\ x_2 = 0 \to x_1 = 2x_3 = \frac{2}{3}$$
$$2)\ x_3 = 0 \to x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$$



$$y_{(4)} = \{y : y_4 = 0\}$$
$$y_{(5)} = \{y : y_5 = 0\}$$
$$y_{(6)} = \{y : y_6 = 0\}$$
$$y_{(1)} = \begin{Bmatrix} y_4 + 3y_5 \ge 2y_4 + 2y_5 + 2y_6 \\ y_4 + 3y_5 \ge 3y_4 + 3y_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_5 \ge y_4 + 2y_6 \\ 3y_5 \ge 2y_4 + 3y_6 \end{Bmatrix}$$
$$1)\ y_4 = 0 \to y_5 = 2y_6 = \frac{2}{3}$$
$$2)\ y_6 = 0 \to y_5 = y_4 = \frac{1}{2}$$
$$y_{(3)} = \begin{Bmatrix} 3y_4 + 3y_6 \ge y_4 + 3y_5 \\ 3y_4 + 3y_6 \ge 2y_4 + 2y_5 + 2y_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2y_4 + 3y_6 \ge 3y_5 \\ y_4 + y_6 \ge 2y_5 \end{Bmatrix}$$
$$1)\ y_4 = 0 \to y_6 = 2y_5 = \frac{2}{3}$$
$$2)\ y_6 = 0 \to y_4 = 2y_5 = \frac{2}{3}$$

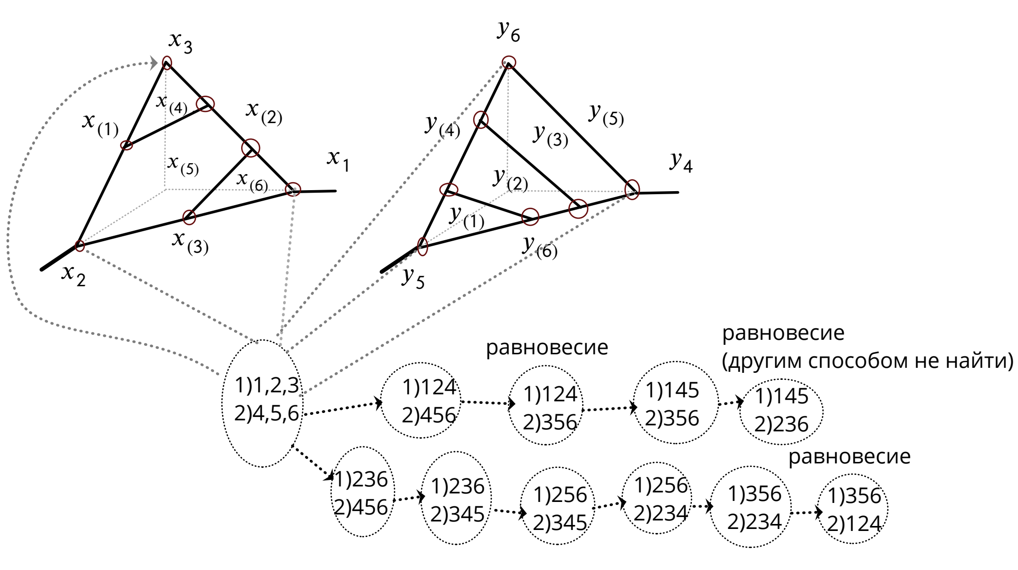




Равновесия : $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$

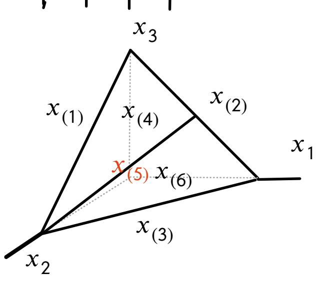
$(0,0,1)$ и $(1,0,0)$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ и $\left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$



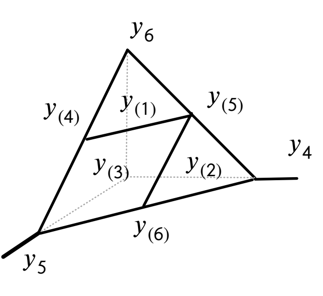
Задача 2

	L	C	R
U	0,0	2,1	4,2
M	4,1	2,1	0,1
D	2,2	4,1	2,0

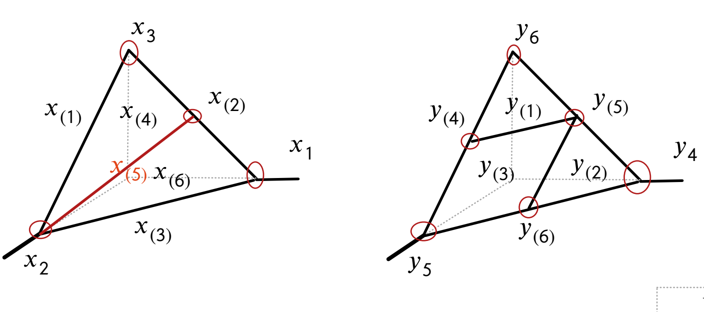


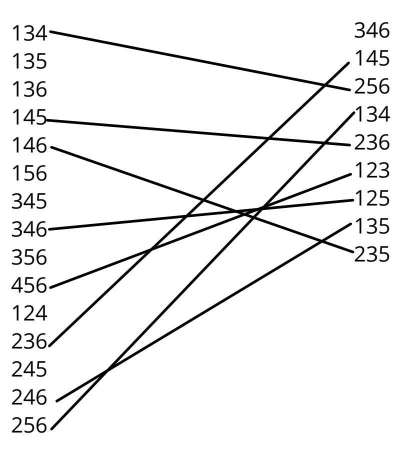
$$x_{(1)} = \{x : x_1 = 0\}$$
$$x_{(2)} = \{x : x_2 = 0\}$$
$$x_{(3)} = \{x : x_3 = 0\}$$
$$x_{(4)} = \begin{Bmatrix} x_2 + 2x_3 \ge x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + 2x_3 \ge 2x_1 + x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_3 \ge x_1 \\ x_3 \ge x_1 \end{Bmatrix}$$
$$1)\ x_2 = 0 \to x_3 = x_1 = \frac{1}{2}$$
$$2)\ x_3 = 0 \to x_1 = 0, x_2 = 1$$
$$x_{(6)} = \begin{Bmatrix} 2x_1 + x_2 \ge x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 \ge x_2 + 2x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \ge x_3 \\ x_1 \ge x_3 \end{Bmatrix}$$
$$1)\ x_2 = 0 \to x_1 = x_3 = \frac{1}{2}$$
$$2)\ x_1 = 0 \to x_3 = 0, x_2 = 1$$
$$x_{(5)} = \begin{Bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \ge x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 2x_1 + x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \ge x_3 \\ x_3 \ge x_1 \end{Bmatrix}$$
$$x_1 = x_3,\ 2x_1 + x_2 = 1$$

(эта область просто плоскость)



$$y_{(4)} = \{y : y_4 = 0\}$$
$$y_{(5)} = \{y : y_5 = 0\}$$
$$y_{(6)} = \{y : y_6 = 0\}$$
$$y_{(1)} = \begin{Bmatrix} 2y_5 + 4y_6 \ge 4y_4 + 2y_5 \\ 2y_5 + 4y_6 \ge 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_6 \ge y_4 \\ y_6 \ge y_4 + y_5 \end{Bmatrix}$$
$$1)\ y_4 = 0 \to y_5 = y_6 = \frac{1}{2}$$
$$2)\ y_5 = 0 \to y_4 = y_6 = \frac{1}{2}$$
$$y_{(2)} = \begin{Bmatrix} 4y_4 + 2y_5 \ge 2y_5 + 4y_6 \\ 4y_4 + 2y_5 \ge 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_4 \ge y_6 \\ y_4 \ge y_5 + y_6 \end{Bmatrix}$$
$$1)\ y_5 = 0 \to y_4 = y_6 = \frac{1}{2}$$
$$2)\ y_6 = 0 \to y_4 = y_5 = \frac{1}{2}$$





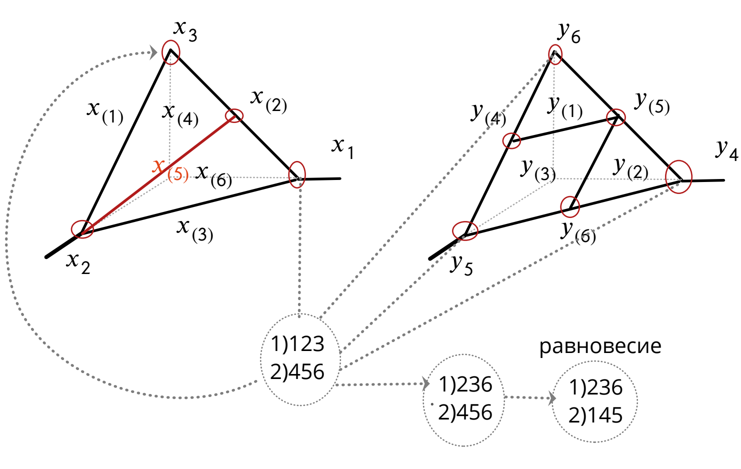
Равновесия : $(0,1,0)$ и $(1,0,0)$

$(0,1,0)$ и $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

$(x_1, 1 - 2x_1, x_1)$ и $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $x_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$(1,0,0)$ и $(0,0,1)$

$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$



Как мы видим, мы нашли данное равновесие без дополнительных правил разрешения неоднозначностей.

Задача 3

	L	R
U	-10,-5	6, 1
D	2, 4	5, 3

a) Чистые равновесия в этой игре $-$ (D, L) и (U, R).

В первом случае у нас суммарный выигрыш $2 + 4 = 6$, во втором : $6 + 1 = 7$.

Доказательство, что это чистые равновесия : в обоих случаях никому не выгодно менять свою фиксированную стратегию $-$ в первом случае первый игрок может только ухудшить выигрыш с 2 до -10, а второй игрок $-$ с 4 до 3.

Во втором случае первый игрок может только ухудшить выигрыш с 6 до 5, а второй с 1 до -5.

б) Найдем смешанные равновесия. Пусть p $-$ вероятность игрока 1 сыграть U, а q $-$ вероятность игрока 2 сыграть L. В таком случае получаем уравнения : $-5p + 4(1-p) = p + 3(1-p) \to p = \frac{1}{7}$

и $-10q + 6(1-q) = 2q + 5(1-q) \to q = \frac{1}{13}$.

Таким образом, у нас смешанное равновесие $\left(\frac{1}{7}U + \frac{6}{7}D, \frac{1}{13}L + \frac{12}{13}R\right)$.

В этом случае, в среднем общий выигрыш будет равен :

$$\frac{1}{7} * \frac{1}{13} * (-15) + \frac{1}{7} * \frac{12}{13} * 7 + \frac{6}{7} * \frac{1}{13} * 5 + \frac{6}{7} * \frac{12}{13} * 8 = \frac{675}{91} \approx 7.42$$

в) Пусть вероятности пар выборов игроков равны a,b,c,d. В таком случае, выписываем неравенства, чтобы игрокам было выгодно соблюдать коррелированную стратегию :

$$\begin{Bmatrix} -10a + 6b \ge 2a + 5b \\ 2c + 5d \ge -10c + 6d \\ -5a + 4c \ge a + 3c \\ b + 3d \ge -5b + 4d \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} b \ge 12a \\ 12c \ge d \\ c \ge 6a \\ 6b \ge d \end{Bmatrix}$$

Чтобы увеличить суммарный выигрыш игроков, надо решить следующую задачу :

$$-15a + 7b + 6c + 8d \to max$$
$$s.t.\ b \ge 12a,\ 12c \ge d,\ c \ge 6a,\ 6b \ge d, a \ge 0, b \ge 0, c \ge 0, d \ge 0,\ a + b + c + d = 1$$

Построим Лагранжиан :

$$L = 15a - 7b - 6c - 8d + \lambda_1(12a - b) + \lambda_2(d - 12c) + \lambda_3(6a - c) + \lambda_4(d - 6b) -$$
$$- \lambda_5 a - \lambda_6 b - \lambda_7 c - \lambda_8 d + \mu(a + b + c + d - 1)$$

Условия ККТ :

$$\begin{cases} L'_a = 15 + 12\lambda_1 + 6\lambda_3 - \lambda_5 + \mu = 0 \\ L'_b = -7 - \lambda_1 - 6\lambda_4 - \lambda_6 + \mu = 0 \\ L'_c = -6 - 12\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_7 + \mu = 0 \\ L'_d = -8 + \lambda_2 + \lambda_4 - \lambda_8 + \mu = 0 \\ \lambda_5 a = 0,\ \lambda_6 b = 0,\ \lambda_7 c = 0,\ \lambda_8 d = 0 \\ a + b + c + d = 1 \\ \lambda_1(12a - b) = 0,\ \lambda_2(d - 12c) = 0,\ \lambda_3(6a - c) = 0,\ \lambda_4(d - 6b) = 0 \end{cases}$$

В данном случае, приходится перебирать переменные, чтобы равенства выполнялись. Но заметим, что мы максимизируем выигрыш, значит нам подходит $a = 0$, так как в ячейке (U, L) $-$ суммарный выигрыш минимальный.

Тогда $a = 0,\ \lambda_1 * (-b) = 0 \to \lambda_1 = 0,\ \lambda_3 * (-c) = 0 \to \lambda_3 = 0$.

$\lambda_6 b = 0 \to \lambda_6 = 0,\ \lambda_7 c = 0 \to \lambda_7 = 0,\ \lambda_8 d = 0 \to \lambda_8 = 0$.

b не может равняться нулю одновременно с a, так как в этом случае у игрока 1 вырожденная стратегия. Также имеем ввиду, $d \neq 0$, иначе пропадает случай с максимальным суммарным выигрышем. Если $c = 0$, тогда получается, что у игрока 2 вырожденная стратегия, а значит $c \neq 0$. Итак, имеем :

$$\begin{cases} 15 - \lambda_5 + \mu = 0 \\ -7 - 6\lambda_4 + \mu = 0 \\ -6 - 12\lambda_2 + \mu = 0 \\ -8 + \lambda_2 + \lambda_4 + \mu = 0 \end{cases} \to 7 + 6\lambda_4 = 6 + 12\lambda_2 \to \lambda_2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{2}\lambda_4$$

$$\mu = 7 + 6\lambda_4$$

$$-8 + \frac{1}{12} + \frac{1}{2}\lambda_4 + \lambda_4 + 7 + 6\lambda_4 = 0 \to \lambda_4 = \frac{11}{12} * \frac{12}{15} \neq 0 \to d = 6b$$

$$\lambda_4 = \frac{11}{12} * \frac{12}{15} \to \lambda_2 \neq 0 \to d = 12c \to b = 2c$$

$$2c + c + 12c = 1 \to c = \frac{1}{15},\ b = \frac{2}{15},\ d = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

Решением этой задачи является $a = 0, b = \frac{2}{15}, c = \frac{1}{15}, d = \frac{4}{5}$.

Суммарный выигрыш будет равен : $-15 * 0 + 7 * \frac{2}{15} + 6 * \frac{1}{15} + 8 * \frac{4}{5} = \frac{116}{15} = 7\frac{11}{15} \approx 7.7333$

г) Аналогично предыдущей задаче, нужно решить задачу оптимизации :

$$-15a + 7b + 6c + 8d \to min$$
$$s.t.\ b \ge 12a,\ 12c \ge d,\ c \ge 6a,\ 6b \ge d, a \ge 0, b \ge 0, c \ge 0, d \ge 0, a + b + c + d = 1.$$

Построим Лагранжиан :

$$L = -15a + 7b + 6c + 8d + \lambda_1(12a - b) + \lambda_2(d - 12c) + \lambda_3(6a - c) + \lambda_4(d - 6b) -$$
$$- \lambda_5 a - \lambda_6 b - \lambda_7 c - \lambda_8 d + \mu(a + b + c + d - 1)$$

Условия ККТ :

$$\begin{cases} L'_a = -15 + 12\lambda_1 + 6\lambda_3 - \lambda_5 + \mu = 0 \\ L'_b = 7 - \lambda_1 - 6\lambda_4 - \lambda_6 + \mu = 0 \\ L'_c = 6 - 12\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_7 + \mu = 0 \\ L'_d = 8 + \lambda_2 + \lambda_4 - \lambda_8 + \mu = 0 \\ \lambda_5 a = 0,\ \lambda_6 b = 0,\ \lambda_7 c = 0,\ \lambda_8 d = 0 \\ a + b + c + d = 1 \\ \lambda_1(12a - b) = 0,\ \lambda_2(d - 12c) = 0,\ \lambda_3(6a - c) = 0,\ \lambda_4(d - 6b) = 0 \end{cases}$$

Мы минимизируем выигрыш, значит нам подходит $d = 0$, так как в ячейке (D, R) максимальный суммарный выигрыш. Аналогично рассуждениям из пункта в) приходим к тому, что $c \neq 0$, так как иначе вырожденная стратегия у игрока 1, затем $a \neq 0$, так как (U, L) $-$ минимальный суммарный выигрыш, и $b \neq 0$, так как иначе у игрока 2 детерминированная стратегия.

Соответственно, имеем :

$\lambda_5 a = 0 \to \lambda_5 = 0,\ \lambda_6 b = 0 \to \lambda_6 = 0,\ \lambda_7 c = 0 \to \lambda_7 = 0$

$-12\lambda_2 c = 0 \to \lambda_2 = 0,\ -6b\lambda_4 = 0 \to \lambda_4 = 0$.

$$\begin{cases} L'_a = -15 + 12\lambda_1 + 6\lambda_3 + \mu = 0 \\ L'_b = 7 - \lambda_1 + \mu = 0 \\ L'_c = 6 - \lambda_3 + \mu = 0 \\ L'_d = 8 - \lambda_8 + \mu = 0 \end{cases} \to \mu = \lambda_1 - 7 = \lambda_3 - 6 \to \lambda_1 = \lambda_3 + 1$$

$$-15 + 12(\lambda_3 + 1) + 6\lambda_3 + \lambda_3 - 6 = 0 \to \lambda_3 = \frac{9}{19},\ \lambda_1 = \frac{28}{19}$$

$$\lambda_3 \neq 0 \to 6a = c,\ \lambda_1 \neq 0 \to 12a = b$$

$$a + 6a + 12a = 1 \to a = \frac{1}{19},\ b = \frac{12}{19}, c = \frac{1}{19}.$$

Решением задачи является $a = \frac{1}{19},\ b = \frac{12}{19},\ c = \frac{6}{19},\ d = 0$.

Суммарный выигрыш равен : $-15 * \frac{1}{19} + 7 * \frac{12}{19} + 6 * \frac{6}{19} + 8 * 0 = \frac{105}{19} = 5\frac{10}{19} \approx 5.526$

Задача 4

Пусть у нас есть некоторая игра 2 на 2:

	1	2
1	a, x	b, y
2	c, z	d, w

По условию, у нас нет чистой стратегии. Рассмотрим случай $(1,1)$: пусть у нас первому игроку выгоднее будет поменять стратегию. Тогда должно быть $c > a$. Затем, второму должно быть тоже выгоднее поменять стратегию. Значит $w > z$. Аналогично рассуждая, получим $b > d$, $x > y$.

Можно также инвертировать все неравенства, но будет аналогичный случай.

Далее, запишем неравенства, которые должны выполняться для смешанной стратегии. Пусть вероятности игрока 1 p и $1 - p$, а игрока 2 q и $1 - q$:

$$px + (1-p)z = py + (1-p)w \to p(x - y + w - z) = w - z \to p^* = \frac{w - z}{x - y + w - z}.$$

Аналогично получаем $q^* = \frac{b - d}{c - a + b - d}$.

Теперь рассмотрим коррелированное равновесие. Пусть вероятности событий равны $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Тогда имеем :

$$\begin{cases} \alpha a + \beta b \ge \alpha c + \beta d \\ \gamma c + \delta d \ge \gamma a + \delta b \\ \alpha x + \gamma z \ge \alpha y + \gamma w \\ \beta y + \delta w \ge \beta x + \delta z \end{cases} \to \begin{cases} \beta(b - d) \ge \alpha(c - a) \\ \gamma(c - a) \ge \delta(b - d) \\ \alpha(x - y) \ge \gamma(w - z) \\ \delta(w - z) \ge \beta(x - y) \end{cases} \to \begin{cases} \beta(b - d) \ge \frac{\alpha\delta}{\gamma}(b - d) \\ \alpha(x - y) \ge \frac{\gamma\beta}{\delta}(x - y) \end{cases} \to \alpha\delta = \beta\gamma$$

Таким образом, на вероятности накладывается некоторое ограничение. Более того, получаем,что все данные неравенства превращаются в равенства. А именно :

$$\begin{cases} \beta(b - d) = \alpha(c - a) \\ \gamma(c - a) = \delta(b - d) \\ \alpha(x - y) = \gamma(w - z) \\ \delta(w - z) = \beta(x - y) \end{cases}$$

Выразим все через α.

$$\begin{cases} \beta = \alpha\frac{c - a}{b - d} \\ \gamma = \alpha\frac{x - y}{w - z} \\ \delta = \beta\frac{x - y}{w - z} = \alpha\frac{c - a}{b - d}\frac{x - y}{w - z} \end{cases}$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1 \to \alpha + \alpha\frac{c - a}{b - d} + \alpha\frac{x - y}{w - z} + \alpha\frac{c - a}{b - d}\frac{x - y}{w - z} = 1$$

$$\alpha\left(\frac{(b - d)(w - z)}{(b - d)(w - z)} + \frac{w - z}{w - z}\frac{c - a}{b - d} + \frac{x - y}{w - z}\frac{b - d}{b - d} + \frac{c - a}{b - d}\frac{x - y}{w - z}\right) = 1$$

$$\alpha = \frac{(b - d)(w - z)}{(b - d + c - a)(w - z + x - y)} = p^* q^*$$

$$\beta = \frac{(c - a)(w - z)}{(b - d + c - a)(w - z + x - y)} = p^*(1 - q^*)$$

$$\gamma = \frac{(b - d)(x - y)}{(b - d + c - a)(w - z + x - y)} = (1 - p^*)q^*$$

$$\delta = \frac{(c - a)(x - y)}{(b - d + c - a)(w - z + x - y)} = (1 - p^*)(1 - q^*)$$

Таким образом мы получили, что коррелированное равновесие у нас всего одно, это следует из системы неравенств. Далее, мы нашли его, и оказалось, что вероятности событий всех пар действий игроков равны произведению вероятностей выбора действий игроков при смешанной стратегии.

Таким образом, мы доказали, что коррелированное равновесие у нас одно, и оно идентично смешанному равновесию.