Программа AI Masters
Теория игр, весна 2024
Домашнее задание 2: чистые равновесия Нэша

Срок сдачи — 3 мая. При более поздней сдаче оценка снижается на 50%. Ответы присылайте в телеграм `@goddos`. Задачи принимаются в письменном виде одним файлом в формате PDF. (Можно набрать решение в TEXe или другом редакторе, либо отсканировать или сфотографировать написанное от руки, собрав всё в PDF. При фотографировании следите за резкостью, контрастностью и балансом белого. Фотографии плохого качества: нерезкие, смазанные и т. д. — проверяться не будут). Если вы решали задачи совместно с кем-то, или использовали литературу, или консультировались с чатботами, в том числе для редактуры текста, то в работе нужно указать, с кем и в каком объёме вы сотрудничали и какие источники и программы использовали. При этом собственно тексты решений необходимо записывать самостоятельно, обнаруженные текстуальные совпадения могут привести к незачёту задачи или всей работы.

Определение 1. Равновесие Нэша в игре $G = (N, S, u)$ это такой профиль стратегий $s^* = (s_1^* \dots s_N^*)$, что

$$\forall i \in \{1 \dots N\} : \forall s_i \in S_i : u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geqslant u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

Неформально говоря, никакой игрок не хочет отклониться от равновесной стратегии если он верит, что все остальные игроки тоже будут играть свои равновесные стратегии.

---

1. (5 баллов за каждый пункт)

а) Докажите, что если у каждого игрока есть слабо доминирующая стратегия, то эти стратегии образуют равновесие Нэша.

б) Докажите, что если в результате IEWDS осталось по 1 стратегии у каждого игрока, то эти стратегии образуют равновесие Нэша. Верно ли, что такое равновесие обязательно будет единственным?

в) Аналогично предыдущему, но для IESDS.

2. (10 баллов за каждый пункт) Рассмотрим следующую игру: происходит референдум, на котором n избирателей голосуют за одну из двух альтернатив (X или Y), при этом k избирателей поддерживает X, а все оставшиеся поддерживают Y. Каждый избиратель выбирает, приходить ли ему на выборы или нет (разумеется, каждый пришедший избиратель голосует за ту альтернативу, которую он поддерживает). Выигрыш избирателей определяется следующим образом:

- Каждый избиратель, который пришел на выборы, терпит издержки 1.
- Если одна из альтернатив победила (т. е. набрала больше голосов, чем вторая), то все, кто ее поддерживает (включая тех, кто не голосовал), получает выгоду 4.
- Если случилась ничья (альтернативы набрали поровну голосов), то каждый избиратель получает выгоду 2.

Найдите все равновесия Нэша в этой игре в случае

а) $k = \frac{n}{2}$;

б) $k < \frac{n}{2}$.

3. (10 баллов) Рассмотрим следующую игру: два продавца продают мороженое, при этом мороженое первого стоит дешевле чем мороженое второго. Они не могут влиять на цену, но оба независимо друг от друга выбирают расположение своих ларьков на улице, которая является отрезком $[0, 1]$. После этого покупатель в каждой точке улицы выбирает ларек по следующему принципу: он выбирает ларек второго игрока, если он ближе к нему хотя бы на 0.1. Выигрыш каждого продавца равен доле покупателей, которые выбрали его ларек.

Найдите все равновесия Нэша в этой игре. При решении задачи можно предполагать, что продавцы могут выбрать не любую точку отрезка, а одну из большого конечного числа точек (скажем 100), равномерно распределенных по отрезку.